

Educación Matemática en las Américas 2015

Volumen 9: Geometría



© 2015
Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM)
Paseo de la Reforma 383., 7° Piso,
Colonia Cuauhtémoc, Delegación Cuauhtémoc,
México D.F. CP 06500, MÉXICO

www.ciaem-iacme.org
ciaem.iacme@gmail.com

Educación Matemática en las Américas 2015
Volumen 9: Geometría
Editado por Patrick (Rick) Scott y Ángel Ruiz
Colaboradora: Sarah González.

ISBN Volumen: 978-9945-603-06-4

ISBN Obra Completa: 978-9945-415-97-1

El Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM) es una organización fundada en 1961 asociada a la International Commission on Mathematical Instruction. Busca potenciar la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en las Américas.

Se permite la reproducción de cualquier parte de este libro para fines no lucrativos siempre que se consignen los créditos a los autores y al Comité Interamericano de Educación Matemática.

Para citar este libro y este volumen:

Comité Interamericano de Educación Matemática (2015). *Educación Matemática en las Américas: 2015. Volumen 9: Geometría*. Editores: Patrick (Rick) Scott y Ángel Ruíz. República Dominicana.

Tabla de Contenidos

Presentación	i-iii
A arte pelo olhar da isometria e da Geometria Plana na prática: dos espelhos aos ângulos! Cláudia Georgia Sabba-BR, Clecio Cavalcante-BR	1-12
Algunas maneras no usuales de construir un cuadrado dado su lado Saulo Mosquera López-CO, Oscar Soto Agreda-CO	13-22
Aspectos do pensamento geométrico demonstrados por estudantes do ensino médio em um problema envolvendo o conceito de quadriláteros André Costa-BR, Marcelo Câmara dos Santos-BR	23-30
Comunicação e resolução de problemas utilizando o modelo van Hiele para a exploração geométrica em sala de aula Gilmara Gomes Meira-BR, Kátia Maria Medeiros-BR	31-41
El espacio social de la clase como regulador del trabajo geométrico. Estudio de casos en la escuela secundaria Ana Mántica-AR	42-55
Experiências com alunos e professores sobre números construtíveis utilizando régua e compasso João dos Santos-BR, Angélica Felix Laurindo Silva-BR, Roberta Novais-BR	56-65
Explorando el fractal Tetra Circle: una posibilidad para la introducción de las progresiones geométricas Charles Bruno Melo-BR, José Leivas-BR	66-75
Geometria Analítica e Sistemas de Equações Lineares: transição ensino médio e superior Marlene Alves Dias-BR, Sirlene Neves de Andrade-BR	76-89
Geometria do Taxi – uma investigação com alunos do ensino médio no Brasil José Leivas-BR, Helenara de Souza-BR	90-99
Geometria nos anos iniciais: sobre os conceitos de área e perímetro Maria Candida Müller-BR, Sergio Lorenzato-BR	100-108
Geometrias: as concepções de um grupo de professores de matemática Karla Lovis-BR, Valdeni Franco-BR	109-118
Investigação Matemática e Geometria: área e perímetro de figuras planas Marli Quartieri-BR, Fernanda Schmitt-BR, Ieda Giongo-BR	119-129

La identificación de figuras prototípicas en el desarrollo del razonamiento configural Francisco Clemente-ES, German Torregrosa-ES, Salvador Llinares-ES	130-140
Os pentaminós à luz da metodologia Sequência Fedathi: proposta didática para o ensino da Matemática Ana Paula Alves Santos-BR, Daniel Brandão Menezes-BR, Fernanda Matos-BR	141-150
Procesos de validación en Geometría en situaciones de conflicto Victor Guerrero Rojas-MX	151-160
Producción de conocimiento geométrico de un colectivo – con – doblado de papel: el caso de la trisección de un ángulo Zaida Santa Ramírez-CO, Carlos Jaramillo López-CO	161-172
Quais as tendências de pesquisa sobre o ensino de Geometria Analítica no período de 1991 à 2007? Adriana Santos-BR, Barbara Bianchini-BR	173-182
Series geométricas convergentes en la geometría sintética Oscar Soto Ágreda-CO, Saulo Mosquera López-CO	183-191
Sobre a conversão entre o registro em língua materna para o registro gráfico no caso da elipse José Cícero dos Santos-BR, Vera Helena Giusti de Souza-BR	192-202
Tratamiento de los contenidos curriculares de Geometría en exámenes de evaluación de enseñanza secundaria. Un estudio de casos. Luis Godoy Acedo-ES, María Cáceres García-ES, Janeth Cárdenas Lizarazo-ES	203-214

Presentación

La **XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática** realizada en Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México, del 3 al 7 de mayo del 2015, contó con la participación de cerca de 1000 personas de 23 países y la presentación de más de 500 trabajos (conferencias plenarias y paralelas, mesa redonda, minicurso, diálogos, comunicaciones, talleres y posters) Esta fue una reunión regional de la *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI). El CIAEM es la organización afiliada al ICMI con mayor antigüedad. Su creación se remonta al año 1961 cuando se realizó la primera conferencia en Bogotá, Colombia.

Un gran nivel científico dominó los trabajos, en un ambiente cultural muy especial, con una gran hospitalidad por parte de los colegas de Chiapas.

Los conferencistas plenarios fueron Michèle Artigue (Francia), Carlos Vasco (Colombia), Diane Briars (USA), Abraham Arcavi (Israel-Argentina), Celia Hoyles (Reino Unido), María Teresa Tatto (USA) y Alicia Ávila (México). Ellos también desarrollaron *Diálogos* especiales, espacios adicionales de conversación e intercambio.

Una mesa plenaria organizada por la *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe* contó con la participación de Carlos Sánchez (Cuba), Nelly León (Venezuela), Edison de Faría (Costa Rica), Luis Carlos Arboleda y Jhony Villa (Colombia).

El evento tuvo conferencias paralelas y minicursos impartidos por académicos invitados, entre ellos: Gabriele Kaiser (Alemania), Richard Noss (Reino Unido), Manuel Santos (México), Gert Schubring (Alemania), José Chamoso (España), José Luis Lupiáñez (España), Arthur Powell (USA), Alessandro Ribeiro (Brasil), Roberto Araya (Chile), Gilberto Obando (Colombia), Uldarico Malaspina (Perú).

Los dos temas principales fueron la *Preparación de docentes que enseñan matemáticas* y el *Uso de tecnologías en la Educación Matemática*.

El congreso tuvo el valioso patrocinio de varias instituciones internacionales y nacionales: International Commission on Mathematical Instruction; Universidade Luterana do Brasil; Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas, y Centro de Investigación y Formación en Educación Matemática de la Universidad de Costa Rica; Secretaría de Educación del Estado de Chiapas; Universidad del Valle de México; Sindicato de Trabajadores de la Educación de México; Centro Regional de Formación Docente e Investigación Educativa (CRESUR); Oficina de Convenciones y Visitantes de Chiapas; Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas de México; Escuela Normal Superior de Chiapas; Universidad de Costa Rica; HP; CASIO; y EduSystems.

Desde el 2007 el CIAEM ha logrado, entre otras cosas:

- Potenciar la calidad académica en los trabajos, la organización eficiente y la proyección de las conferencias interamericanas
- Consolidar la publicación de trabajos seleccionados de la Conferencias en la revista *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* (editada en Costa Rica)

- Fortalecer la relación del CIAEM con la comunidad internacional de Educación Matemática, especialmente con el ICMI y la *International Mathematical Union*.
- Crear y consolidar la Medalla *Luis Santaló*
- Apoyar el desarrollo del *Capacity and Networking Project* del ICMI en América Latina (Costa Rica 2012, Perú 2016)
- Auspiciar la creación y las actividades de la *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe*
- Apoyar la organización del *I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe*, celebrado en Santo Domingo, República Dominicana, en noviembre del 2013
- Consolidar el uso intenso de tecnologías de la comunicación en todas las actividades del CIAEM
- Crear una comunidad virtual del CIAEM de gran proyección tanto a través de su sitio web principal como de su página en Facebook
- Fundar en México el *Comité Interamericano de Educación Matemática* con personalidad jurídica para atender los múltiples compromisos formales que posee
- Traducir al español y publicar algunos textos del NCTM relacionados con la temática *Principles to actions* y continuar una línea importante de colaboración con el *National Council of Teachers of Mathematics* de los USA

En la XIV CIAEM fue confirmada la decisión de tener la XV CIAEM en Medellín, Colombia, en el 2019. Será desde hará 58 años la segunda ocasión en que se realizará una CIAEM en tierra colombiana.

CIAEM es el evento internacional más importante en Educación Matemática en América Latina. Constituye un punto de referencia para investigadores, docentes y estudiantes en todo el continente.

La mayoría de los textos de base para las presentaciones plenarias o paralelas ha sido incluidas en el número 15 de los *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* que se edita en Costa Rica: <http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem>.

Las comunicaciones, talleres, minicursos y posters han sido incluidas en esta colección digital de volúmenes que titulamos *La Educación Matemática en las Américas: 2015*. Los trabajos se han organizado de la siguiente manera:

- Volumen 1 *Educación Matemática en las Américas 2015: Formación Inicial para Primaria*
- Volumen 2 *Educación Matemática en las Américas 2015: Formación Inicial para Secundaria*
- Volumen 3 *Educación Matemática en las Américas 2015: Formación Continua*
- Volumen 4 *Educación Matemática en las Américas 2015: Uso de Tecnología*
- Volumen 5 *Educación Matemática en las Américas 2015: Etnomatemática y Sociología*
- Volumen 6 *Educación Matemática en las Américas 2015: Currículum, Evaluación y Competencias*
- Volumen 7 *Educación Matemática en las Américas 2015: Investigación*
- Volumen 8 *Educación Matemática en las Américas 2015: Estadística y Probabilidad*
- Volumen 9 *Educación Matemática en las Américas 2015: Geometría*
- Volumen 10 *Educación Matemática en las Américas 2015: Álgebra y Cálculo*

- Volumen 11 *Educación Matemática en las Américas 2015: Educación Primaria*
- Volumen 12 *Educación Matemática en las Américas 2015: Historia y Epistemología*
- Volumen 13 *Educación Matemática en las Américas 2015: Nuevos Enfoques y Relación con Otras Áreas*
- Volumen 14 *Educación Matemática en las Américas 2015: Necesidades Especiales*
- Volumen 15 *Educación Matemática en las Américas 2015: Resolución de Problemas*
- Volumen 16 *Educación Matemática en las Américas 2015: Modelación*
- Volumen 17 *Educación Matemática en las Américas 2015: Talleres y Minicursos*
- Volumen 18 *Educación Matemática en las Américas 2015: Posters*

El CIAEM desea agradecer a todos los autores que presentaron sus trabajos en la XIV CIAEM y que incluimos en esta colección de volúmenes. Y a todos los revisores, directores de tema, y colaboradores que participaron en la revisión científica de las ponencias de este magno evento.

La organización detallada y la edición en sus diversas dimensiones fue realizada por nuestro segundo vicepresidente Patrick Scott (Estados Unidos) quien dedicó un esfuerzo extraordinario para tener estas *Memorias* disponibles. Quiero expresar en nombre de nuestra organización nuestro agradecimiento a Rick. Nuestra compañera Sarah González (Vocal para El Caribe) se encargó de tramitar su registro en República Dominicana que contó con el apoyo de la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra de ese país, a las que también expresamos nuestra gratitud.

Los enlaces de estos volúmenes se han colocado en las páginas web oficiales del CIAEM.

Esperamos que la publicación de todos estos trabajos contribuya al progreso de la investigación y la acción de aula en la Educación Matemática de las Américas.



Angel Ruiz
Presidente
Comité Interamericano de Educación Matemática

A arte pelo olhar da isometria e da geometria plana na prática: dos espelhos aos ângulos!

Cláudia Georgia **Sabba**
Universidade Nove de Julho
Brasil

cgsbba@gmail.com

Clécio Esteves **Cavalcante**
Universidade Nove de Julho
Brasil

clecioec@uol.com.br

Resumo

Neste trabalho, analisa-se meios para introduzir conhecimentos matemáticos para alunos do ensino médio, associando conceitos da matemática com imagens visíveis em todos os lugares da vida cotidiana. A partir do exame de livros sob o olhar de isometrias, ornamentos e a arte foram estabelecidas relações com conteúdos de livros didáticos, especificamente de geometria plana foi possível observar que em alguns livros não havia nesses temas a preocupação com esta relacionar tais conceitos com eventos do dia a dia dos alunos. Discute-se a importância de buscar alternativas simples no processo de ensino e de aprendizagem da matemática. Nesse cenário, afirma-se que a simetria provém um contexto muito abrangente, mas possibilita a atração dos olhares dos alunos para questões que podem ser relacionadas com o ensino da matemática. Como proposta didática para ação, apresenta-se a construção do caleidoscópio, pois sua montagem emprega materiais simples e de baixo custo.

Palavras chave: matemática, geometria, arte, isometrias, simetria, espelhos

Introdução

Os processos de ensino e de aprendizagem da matemática, na última década, vêm passando por mudanças importantes e significativas. Muito se fala sobre o ensino focado na construção ou com aplicações práticas, de maneira que possibilite ao aluno um panorama daquilo que é ensinado, bem como os reflexos deste conhecimento possam gerar aplicações em situações de sua vida cotidiana.

Essa tendência permite tornar o conhecimento matemático, algo com mais sentido, ampliando o olhar dos alunos em outras direções além de representar apenas operações com números e letras sem apresentar, para alguns, um sentido lógico e aplicado. Ainda no contexto da educação, os livros didáticos geralmente seguem uma tendência que separa os conteúdos de acordo com a capacidade cognitiva dos alunos, procurando introduzir conhecimentos em fases que os alunos possuem maturidade para absorvê-la.

Sendo assim, é fundamental adaptar o processo em busca de uma forma de introduzir o conhecimento matemático aproveitando a fase que o aluno está vivendo. Para isso é sugerido analisar a visão de que para esse jovem assimilar, é importante que ele consiga dar um sentido para as noções trabalhadas pelo professor.

Focando especificamente os tópicos de geometria plana introduzidos no ensino médio percebe-se uma característica comum, os conteúdos não despertam a percepção dos alunos. Esse aspecto está associado ao fato de que os conceitos apesar de simples, muitas vezes não são relacionados ao seu cotidiano ou não cativa a atenção para seus detalhes.

Para construir um conhecimento geométrico mais consistente, é necessário que o aluno tenha condições de perceber aplicações para esse conteúdo, ou visualizar tais aplicações em sua vida fora da escola.

Falar de retas, ângulos ou figuras geométricas regulares entre outros temas da geometria, não envolve definições muito complexas que inviabilizem o entendimento do aluno, pois se trata de conceitos relativamente simples. Trabalhar com um conteúdo simples, que não exige um grande nível de abstração do aluno, pode não ser tão motivador, propiciando que o aluno venha a desprezar esses conteúdos por não visualizar ali algo que chame sua atenção.

Segundo Sabba(2004), uma boa maneira de atrair o olhar dos alunos é por meio da beleza das coisas; a arte é algo que está inserido em tudo que se olha, e certamente é percebida pelos alunos, sem que haja nessa percepção a rigidez de alguns conceitos ou conteúdos da matemática. É necessário então aproveitar essa oportunidade, trabalha-la de forma tal que o aluno perceba e crie relações.

Não é necessário muito investimento para isso, basta buscar nas mídias aquilo que está na moda, sejam roupas, personagens, desenhos, filmes, etc. Apresentar essas imagens aos alunos e questiona-los sobre aspectos tais como: a) Porque as pessoas olham determinada imagem e a conceituam como bela? b) O que há de diferente no rosto de um determinado personagem que chame tanto atenção de um grande número de pessoas?

Perguntas como essas tem o propósito de estimular os alunos a uma reflexão, para tornar o tema interessante, facilitando assim seu envolvimento quando abordado pelo professor. Nesse momento, torna-se possível trabalhar temas como a simetria, inicialmente com uma abordagem mais artística, na qual o professor reúne diversas imagens de revistas, jornais, livros entre outras, promovendo um debate sobre as imagens para reunir informações sobre a percepção inicial dos alunos.

A partir desse ponto, o professor poderá explorar o conteúdo, introduzir conceitos, fazer relações inclusive com gráficos que projetam de forma simétrica as informações, gerando com isso um ambiente de aprendizagem mais envolvente.

As isometrias, conteúdo que está ligado diretamente com essa pesquisa, também tem forte relação com simetrias. A ideia de um espelho, que é facilmente observado por qualquer pessoa, será o principal ponto de partida para o entendimento do assunto. Após apresentar alguns exemplos, sugere-se a definição dos principais conceitos relacionados a isometrias, entre eles, a reflexão isométrica para explorar o tema de forma mais prática e envolvente. Com o tema introduzido, chega o momento de o aluno refletir sobre aspectos da geometria plana, agora com uma nova visão. Como exemplo, podem-se utilizar os casos de congruência de triângulos, associando-os as aplicações de reflexo de isometrias.

Trata-se da retomada do assunto que antes fora abordado como conceito matemático para permitir que os alunos estejam no mesmo nível de entendimento, associada a utilização dos recursos disponíveis, para elaborar imagens e discutir com os alunos sobre construções

isométricas muito comuns em seu dia a dia, com características simétricas, como visto em tapetes, pisos, cartões postais entre outros.

Uma vez que os alunos percebem algumas aplicações isométricas, é o momento de propor a construção de um caleidoscópio. Empregando materiais simples na sua construção, será possível explorar todos os conhecimentos aprendidos. O professor poderá propor algumas formas de montar o caleidoscópio com diferentes materiais, e estimular sua montagem pelos alunos. Aproveitando ainda a ideia do caleidoscópio o professor pode explorar outros estudos mais específicos, como as figuras geométricas que pavimentam um determinado espaço, conceituar essa pavimentação, comparando as figuras. Pode inclusive propor aos alunos que pesquisem se todas as figuras geométricas regulares são capazes de pavimentar o espaço, ou não. Se há alguma forma de misturar mais de uma figura para pavimentar e finalmente convidar os alunos para que tentem explicar porque não é possível em alguns casos a pavimentação. Ao desenvolver esse trabalho, os alunos aumentarão seu nível de conhecimento, pois terão que entender outros conceitos geométricos mais específicos.

Simetria

O mundo moderno dispõe de recursos audiovisuais muito sofisticados. Televisão, computador, máquinas fotográficas digitais, celulares entre outros que possibilitam um acesso visual virtuoso. É intrigante perceber que muitas pessoas se sentem atraídas por determinadas imagens sem se dar conta da similaridade que acontece com outros eventos. A simetria é certamente um desses aspectos!

No estudo da matemática, o tema é aplicado de forma tal, que não atrai os alunos para uma análise mais específica. Muitos alunos ao resolverem um exercício de função, esboçam gráficos e nem mesmo se dão conta do aspecto da simetria, que está inserida no contexto.

Quando um professor aborda o assunto de números opostos em uma operação de adição, os alunos novamente não percebem nesse contexto uma importante relação, que certamente poderia mudar seu entendimento no futuro sem muito esforço, e que está relacionado com a simetria.

Historicamente, a simetria vem sendo estudada, analisada, desenhada e, um bom caminho para atingir sua compreensão, é por meio da geometria. “Os sucessores de Galois logo perceberam que a relação entre grupos e simetria é mais fácil de ser compreendida no contexto da geometria. De fato, é assim que o assunto, em geral, é apresentado aos estudantes.” (Stewart, Ian, 2012, p. 144.).”

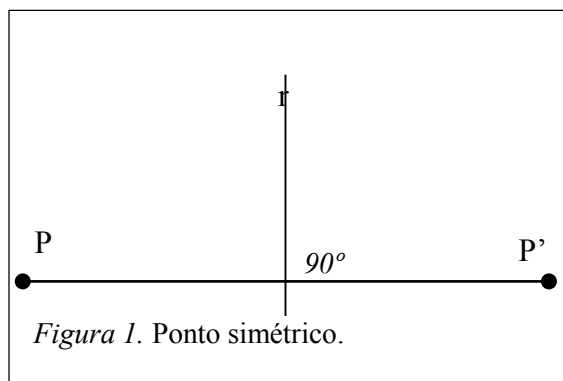
Com base na ideia de Stewart, pode-se afirmar que a utilização da geometria é uma boa estratégia para aplicar o conceito de simetria, assim como para se fazer entender sobre o tema. Durante muito tempo, o estudo da simetria foi associado a aspectos de beleza, elegância e proporção, mas sem um nível de formalização necessário para utilização na matemática. Várias são as definições sobre simetrias, sempre com um olhar muito focado para o aspecto de aplicação de que a define.

Vejam algumas, “Simetria é uma ideia que o homem tem usado ao longo dos tempos para tentar compreender e criar ordem, beleza e perfeição”. (Serra, 1993, p. 304), “A noção de simetria é deveras importante em matemática, nas artes visuais e em diversas ciências como cristalografia e a física”. (Oliveira, 1997, p.70). Já “Em geometria, simetria define-se em termos de isometrias quando a imagem da figura, através de uma isometria diferente de identidade, coincide com a figura original, então a figura tem simetria”. (Serra, 1993, p.2). Muitos

estudiosos escreveram sobre o tema, e nesse contexto, buscou-se uma abordagem simples, para proporcionar ao leitor de forma imediata o entendimento sobre simetria.

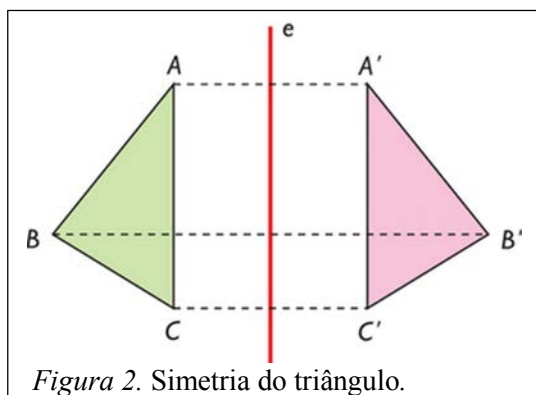
Definir a simetria é fundamental para estabelecer um entendimento e também sua relação com o tema aqui estudado. Como o objetivo não é aprofundar no conceito de simetria e analisar todo o contexto a que ela está submetida (até porque haveria inúmeros), entender sua definição assim como, onde e de que forma é aplicado no desenvolvimento da pesquisa, sugere-se a seguinte definição: Uma simetria de um objeto matemático é uma transformação que preserva a estrutura do objeto. A questão do estudo da simetria, não se trata de uma preocupação específica para o ensino da matemática, segundo Caruso (2008, p.339):

Assim como cabe aos pesquisadores desvendarem os princípios da simetria ainda ocultos na natureza, na busca de um entendimento maior do universo, deve caber ao professor do ensino médio uma tarefa de certa forma análoga: fazer ver ao aluno o quanto mesmo a física básica, objeto de seu estudo, também oculta conceitos de simetria, de cuja compreensão depende um aprendizado mais amplo e profundo da própria física.



Com base no exposto pelo autor, pode-se afirmar que a simetria é um conhecimento que deve ser abordado para alunos do ensino médio, para uma melhor compreensão da física. Esse contexto reforça a análise sobre o aspecto de que a simetria é algo cujo foco deve ser ampliado para uma melhor assimilação por parte dos alunos.

Com a breve análise histórica sobre simetria, assim como instituída uma definição, vejamos agora alguns exemplos apoiados em imagem, para que o leitor consiga assimilar melhor o que fora explorado. Os exemplos serão inseridos sempre apoiados em uma definição, para tornar visível o que se deseja mostrar.



A partir da definição de reflexão de um ponto, é possível compreender alguns conceitos.

Ponto Simétrico – dois pontos, P e P' são simétricos em relação a uma reta r quando esses pontos estão na mesma distância da reta r e o segmento $\overline{PP'}$ é perpendicular a r .

O ponto P' é dito reflexão de P (imagem) através da reta r (ou espelho). Note que r é o eixo simétrico.

Figuras simétricas – quando todos os pontos de uma figura geométrica tem seu simétrico em relação a uma reta r (espelho), dizemos que a figura formada pelos simétricos é simétrica em relação a figura original.

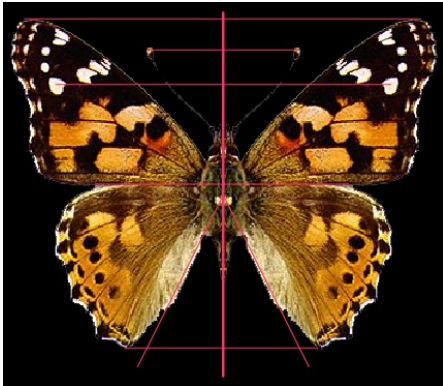


Figura 3. Borboleta sob o eixo de simetria

O olhar proporciona visualizar milhares de imagens a todo o momento. As pessoas raramente buscam nesse processo de visualizar compreender aspectos tão interessantes. A simetria é certamente um desses aspectos. Observemos então algumas imagens das mais simples e primárias até outras com nível de sofisticação e riqueza de detalhes, e notemos aspectos comuns: A figura 1 exibe o triângulo $\triangle ABC$ e seu reflexo $\triangle A'B'C'$, com base no eixo de simetria e. Trata-se de um exemplo simples. Essa imagem representa dinamicamente o efeito da simetria sobre um plano geométrico.

A borboleta da figura 3 está orientada sobre uma linha vermelha e também é uma figura simétrica. Trata-se de uma imagem da natureza, na qual as pessoas não têm por hábito observar a perfeição do reflexo das asas.



Figura 4. Reflexão sobre eixo do Taj Mahal.

Pelas orientações inseridas na imagem, é possível visualizar que todos os pontos de uma das asas são refletidos na outra com riqueza de detalhes.

O Taj Mahal, um museu construído entre 1632 e 1653, considerado uma das sete maravilhas do mundo moderno. Trata-se de uma obra que permite uma visualização no foco da simetria em vários aspectos. Desde o reflexo na água que reproduz a imagem invertida, até os demais detalhes que se projeta a partir do eixo de simetria.

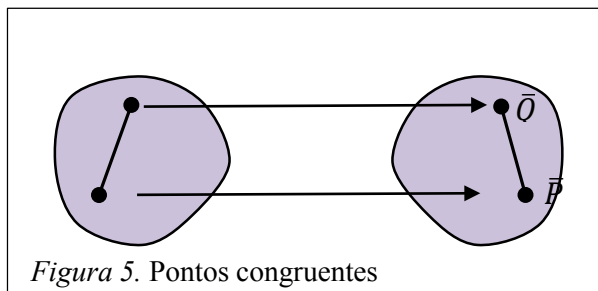
Isometrias

Esse artigo foi idealizado com foco na situação atual da educação matemática e traz uma proposta alternativa na aplicação de certos conteúdos da matemática de forma tal que seja motivador para os alunos do ensino médio.

A geometria Euclidiana ensinada nas escolas baseia-se em figuras rígidas, isto é, a congruência de triângulos é o método principal de demonstrações. O conceito de transformações é tão central na geometria como a função para Análise Matemática. Falar de geometria das transformações (Felix Klein, 1849-1925), mesmo datado de outra época, é sem dúvidas um tema central e atual pela importância que pode oferecer nas estruturas matemáticas como, por exemplo, grupos e isomorfismos.

Do conteúdo desenvolvido até aqui, buscou-se ênfase na intuição geométrica sem prejudicar a precisão das demonstrações e sem alterar ou deixar de definir certos conceitos elementares (ângulos, segmentos, etc.), já que na atual conjuntura espera-se certa dificuldade por parte dos alunos, em conceitos básicos. A intuição geométrica é certamente na formação de um conhecimento matemático e principalmente na vida das pessoas.

A aplicação da teoria das isometrias no plano, pode ser relacionada a teoria dos ornamentos tais como flor ou fita, assunto muito bonito e simples que liga a matemática a arte.



O conceito de transformação geométrica surgiu inicialmente considerando os movimentos dos corpos rígidos. Do ponto de vista geométrico, esses movimentos não alteram o tamanho nem a forma do corpo. É possível analisar por meio de correspondência os pontos antes e depois do movimento do corpo.

Seja M um ponto do corpo, onde M ocupa o ponto P no espaço, antes do movimento e seja $\bar{P}$ o ponto correspondente a P , ocupado por M depois do movimento. Se P é levado em $\bar{P}$, e Q em $\bar{Q}$, nesse movimento os segmentos $[PQ]$ e $[\bar{P}\bar{Q}]$ são congruentes, porque cada um deles corresponde a um segmento fixo entre dois pontos do corpo.

O aspecto da cinemática aqui não é o foco principal, ou seja, a preocupação não está no percurso ou velocidade da passagem do ponto P até o ponto $\bar{P}$, mas sim na correspondência entre os pontos antes e depois do movimento. Tais aplicações conservam a distância entre pontos; do ponto de vista geométrico estas aplicações são as mais simples, pois mudam unicamente a posição de uma figura, mantendo sua forma e seu tamanho.

Definição

1 – Isometria é uma aplicação de P_E em P_E , que conserva distâncias, chama-se isometria, isso é, se Ω é uma isometria, e P e Q dois pontos arbitrários, e se $\bar{P} = (P)\Omega$ e $\bar{Q} = (Q)\Omega$, então $|PQ| = |\bar{P}\bar{Q}|$.

Refletir sobre a teoria de isometrias, permite ao leitor ter uma visão que aplica a geometria plana em um universo mágico, já que busca-se visualizar imagens considerando sua beleza, mas com a propriedade da formalização matemática. Essa formalização não deve ser vista como um aspecto rígido, até porque em cada aplicação da isometria é possível perceber um

teorema que acompanha um contexto agradável. Vejamos a seguir, a imagem de um rosto considerado simetricamente perfeito:

A figura 6 é a foto da jovem Florence Colgate, uma estudante de 18 anos.

Um concurso elegeu o rosto feminino mais próximo da perfeição no Reino Unido. “A beleza dessa jovem foi determinada com utilização de uma visão matemática, com critérios que levaram em conta aspectos da simetria do rosto.” (Abril online, 2012)

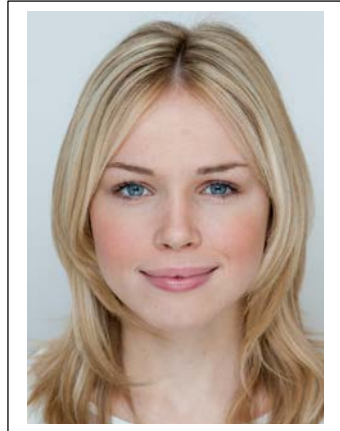


Figura 6. Rosto simetricamente perfeito.

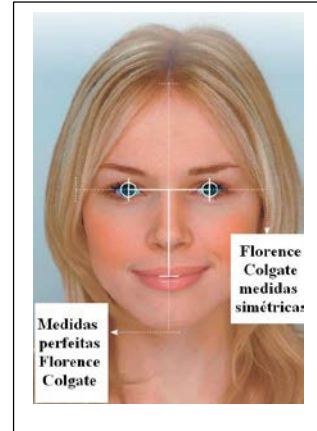


Figura 7. Esquema de análise facial.

Por meio de uma análise não muito aprofundada, é possível perceber aspectos harmônicos no rosto da jovem. A figura 7 possui um esboço, que divide o rosto ao meio, e evidencia a distância entre os olhos, a projeção das sobrancelhas, cuja curvatura é quase idêntica. Os traços do nariz possuem uma similaridade quase total.

Nessa leitura, comprova-se a aplicação da reflexão dos pontos da face por meio de um eixo de simetria, que pode ser justificado pela teoria de isometrias. Visualizam-se traços quase idênticos.

A discussão sobre simetria com utilização de isometrias é sem dúvida um tema muito abrangente, que possui um conteúdo matemático bem denso, porém é facilmente contornado por se tratar de algo de fácil projeção no meio em que se vive.

Os teoremas e definições introduzidos nesse artigo, não foram esgotados dentro daquilo que a teoria de isometrias abrange, mas certamente procurou-se reproduzir os mais relevantes para seguir no desenvolvimento do trabalho.

Serão mencionadas algumas definições a seguir de forma superficial, o que se justifica para evitar que o foco central desse artigo seja desviado por uma teoria densa e rica de detalhes. Recomenda-se ao leitor que busque nas referências bibliográficas mais detalhes sobre definições e apêndices que possam ser do interesse, para o caso de maior rigor de detalhes.

Teoremas sobre isometrias

Entre os teoremas sobre isometrias é importante discutir sobre a relação entre reflexões em retas e isometrias em geral. O produto de isometrias é também uma isometria, pois cada isometria conserva o comprimento; seu produto também o conserva.

A identidade I é uma isometria, assim como a inversa de uma isometria é isometria. Um conjunto de isometrias forma um grupo em relação à operação composição. Toda isometria é o produto de no máximo três reflexões. Translação – toda translação $t(\vec{v})$ pode ser representada de infinitas maneiras como o produto de duas reflexões em retas. Basta tomarmos duas reflexões em retas arbitrárias, paralelas, com vetor distância $\vec{d} = \frac{\vec{v}}{2}$. De forma mais imediata, uma translação nada mais é do que uma mudança de eixo simétrico por alguma reta paralela.

Rotação – O produto de duas reflexões em retas concorrentes caracteriza uma rotação. Para uma melhor visualização do mencionado sobre translação e rotação, serão exibidas imagens com tais características.

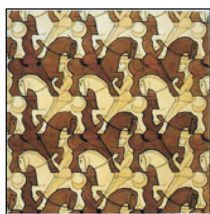


Figura 8. Aplicação Isométrica - Translação



Figura 9. Aplicação Isométrica - Translação

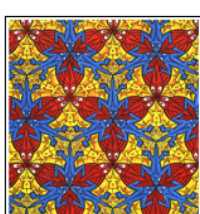


Figura 10 - Aplicação Isométrica - Rotação

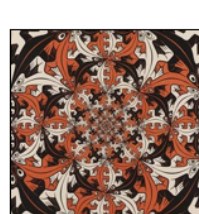


Figura 11. Aplicação Isométrica - Rotação

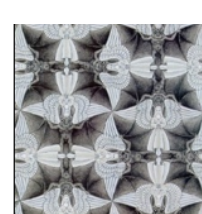


Figura 12. Aplicação Isométrica - Rotação

A figura 10 representa uma aplicação da isometria com rotação. A intrigante imagem de M. C. Escher mostra a fusão de anjos e demônios, em um cenário tão perfeito, que muitas vezes passam despercebidas as relações que compuseram a imagem. O artista relacionou as silhuetas, com uso da rotação dos eixos isométricos, e criou uma imagem por meio dos opostos em uma visão filosófica da religião.

Caleidoscópio

O Caleidoscópio é uma espécie de instrumento óptico constituído em um pequeno tubo de papelão ou metal, com pequenos fragmentos coloridos. Os fragmentos podem ser de diversos tipos de materiais dos mais simples aos mais sofisticados. Entre eles, citam-se vidros, lantejoulas em diversos formatos, ou mesmo, pequenos recortes de papéis coloridos, etc. No interior do tubo, especificamente nas laterais são fixados pequenos espelhos inclinados que refletem através da luz exterior as diversas combinações de imagens, para formação de agradáveis efeitos visuais.

O nome caleidoscópio deriva das palavras gregas: *καλός* (*kalos*) – belo, bonito; *εἶδος* (*eidos*) – imagem, figura; *σκοπέω* (*scopeo*) – olhar para, observar. Há registros que o caleidoscópio fora inventado na Inglaterra por volta de 1817 pelo físico escocês Dawid Brewster (1781 – 1868). Afirmar-se ainda que o caleidoscópio já fosse conhecido no século XVII. Conta-se que um homem muito rico adquiriu um desses aparelhos por 20.000 francos. O aparelho era feito com perolas e gemas preciosas no lugar de vidros coloridos.

O caleidoscópio é utilizado como um simples brinquedo por muitos, assim como pode ser utilizado no processo de observação de padrões de desenhos. Com advento do caleidoscópio, foram desenvolvidos equipamentos que são capazes de reproduzir seus padrões de imagens, e hoje, com o desenvolvimento da tecnologia, existem softwares que reproduzem em imagens fotogravadas os efeitos do caleidoscópio, cujos propósitos são variados, desde criar cenários até sua utilização para estudo.

O caleidoscópio de Brewster consistia em um tubo com pequenos fragmentos de vidro colorido e três espelhos que formavam um ângulo de 45° a 60° graus entre si. Os pedaços de

vidro refletiam-se nos espelhos, formando imagens simétricas. Juntos, os reflexos formavam imagens em cores.

Atualmente os caleidoscópios são edificados em tubos de matérias mais simples, e no seu interior, espelhos são dispostos em ângulos de 45° , 60° e até 90° graus.



Figura 13. Alguns modelos de Caleidoscópio



Figura 14. Caleidoscópio com fragmentos de vidros

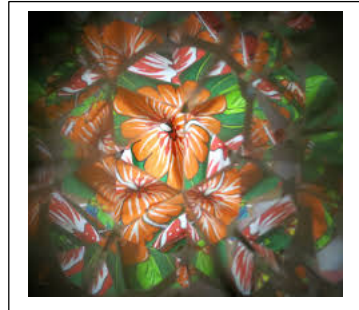


Figura 15. Caleidoscópio formado por imagens

Um caleidoscópio pode gerar inúmeras imagens, assim como pode ser estruturado de várias formas.

Ao mencionar aspectos sobre simetria, reflexos e ângulos, abordam-se assuntos que já foram discutidos dentro de um contexto necessário para que haja um entendimento formal e assim seja possível visualizar e entender a estrutura matemática por traz do fenômeno do caleidoscópio. Há ainda, aspectos relacionados a física, mais especificamente a óptica. Tais conceitos não serão foco no desenvolvimento desse trabalho.

Retomando agora a ideia central desse trabalho, ou seja, de utilizar o caleidoscópio como peça para chamar atenção dos alunos no estudo da geometria, considera-se: Na geometria ensinada de maneira “informal”, geralmente são utilizados cartões, com os quais se desenvolvem várias experiências geométricas. Percebeu-se que mostrando figuras agradáveis e coloridas, as crianças tem um maior rendimento, pois em um primeiro momento não se dão conta o fato de que as brincadeiras são na verdade uma estratégia para exercícios de matemática.

Em se tratando de uma maneira informal de ensinar, não se busca muita precisão nos resultados e pode-se enfatizar a ideia, o entendimento, a noção do pretendido. Ações como essa deixam as crianças livres para manifestar suas opiniões e com isso, é possível argumentar sobre suas visões, corrigi-las sempre em um clima harmoniosos e divertido, obtendo no final o envolvimento e o entendimento dos conteúdos abordados.

Finalizando, as vantagens desse tipo de trabalho residem no fato do próprio aluno poder produzir seu material de aprendizado, construir seu conhecimento por ele mesmo, pois descobrirá os conceitos pela própria experiência, exercitando seu raciocínio.

Caleidoscópio Educacional

Como já vimos, o caleidoscópio de dois espelhos articulados mostrou-se interessante no estudo de polígonos regulares e suas propriedades, já que todos os polígonos regulares têm linhas simétricas e o caleidoscópio produz padrões simétricos

Assim sendo, analisemos agora o caleidoscópio Educacional de três espelhos planos formando uma superfície lateral de um prisma triangular, o qual se apresenta especialmente indicado para produzir pavimentações do plano por polígonos regulares.

Como acontecem com os dois espelhos, para que tenhamos imagens coincidentes e repetição perfeita das figuras obtidas, cada ângulo deve satisfazer a condição de o dobro ser divisor de 360° ; portanto, sendo $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$ os ângulos dos espelhos, devemos ter: $\frac{360^\circ}{2\hat{a}} = \frac{180^\circ}{\hat{a}} = n_1$; $\frac{180^\circ}{\hat{b}} = n_2$ e $\frac{180^\circ}{\hat{c}} = n_3$.

Segue de $\hat{a} + \hat{b} + \hat{c} = 180^\circ$, que a condição para n_1, n_2, n_3 , é $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = 1$, cujas soluções inteiras podem ser deduzidas, e são: (3, 3, 3), (2, 4, 4) e (2, 3, 6), o que corresponde a termos os valores de $\hat{a}$, $\hat{b}$, $\hat{c}$, iguais a $(60^\circ, 60^\circ, 60^\circ)$, $(90^\circ, 45^\circ, 45^\circ)$ e $(90^\circ, 60^\circ, 30^\circ)$. Caleidoscópios com tais ângulos recebem os nomes de Equilátero, Isósceles e Escaleno, respectivamente.

Nos caleidoscópios são formadas imagens múltiplas, pois as obtidas num dos espelhos forma novas imagens nos outros dois, e assim, sucessivamente, estendendo-se por todo o plano.

A construção desses caleidoscópios é de simples execução tanto por professores como pelos alunos, possibilitando amplo emprego em várias atividades educacionais.

A seguir, mostraremos tipos de caleidoscópios e suas construções, para uso individual ou em grupo.

Construção do caleidoscópio equilátero

Material

- 3 espelhos planos retangulares grandes. Medidas sugeridas: dois espelhos de 25 cm x 22 cm e um de 35 cm x 15 cm.
- 2 pedaços de papelões. Um papelão deverá conter a medida (aproximadamente de 51 cm x 22 cm, dependendo da espessura dos espelhos utilizados) dos dois espelhos iguais + 2 vezes a espessura do mesmo, pois o papelão deve revesti-los à forma de um livro.
- $\frac{1}{2}$ folha de cartolina ou papel cartão.

Construção

Fixar com cola os espelhos nos respectivos papelões (os dois espelhos iguais deverão ser colados nas extremidades do papelão, deixando entre eles uma distancia que possibilite sua articulação para obtenção dos ângulos). Desenha na folha referida em (c) um conjunto de semirretas de mesma origem para vários ângulos de 0° a 180° , como uma folha transferidor, para ajustamento dos espelhos.

Utilização

O caleidoscópio pode ser utilizado na forma equilátero, isósceles ou escaleno, dependendo da abertura dos ângulos. Especifiquemos quando equilátero:

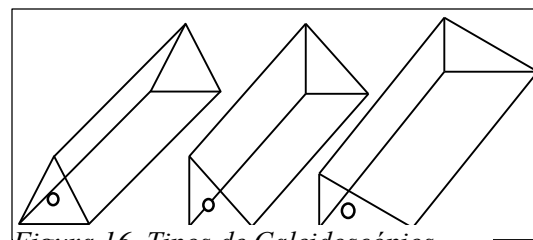


Figura 16. Tipos de Caleidoscópios

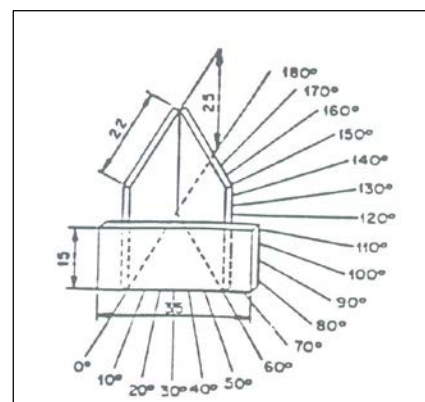


Figura 17. Caleidoscópio modificado

Caleidoscópio Equilátero: dispor os dois espelhos articulados sobre a folha transferidor formando um ângulo de 60° . Encostar o outro espelho conforme indica a figura. Notar que o terceiro espelho é mais baixo que o conjunto articulado, possibilitando uma boa visão superior.

Para as medidas sugeridas, as bases substituíveis serão triângulos equiláteros de lado 22 cm, que podem ser feitos de cartolina com os desenhos adequados. Tais bases serão colocadas no interior do caleidoscópio obtido cobrindo a folha transferidor.

As pavimentações que se obtém, nos diversos tipos de caleidoscópios são: a) No equilátero: (3, 3, 3, 3, 3), e (6, 6, 6); b) No Isósceles: (4, 4, 4, 4), e (4, 8, 8); c) No escaleno: (3, 3, 3, 3, 3, 3), (6, 6, 6), (3, 6, 3, 6), (4, 6, 12) e (3, 12, 12).

Quando tratamos da descoberta de pavimentações planas, podemos encontrar varias configurações geradas nos caleidoscópios equiláteros, isósceles e escalenos, por meio de bases substituíveis colocadas na parte inferior dos caleidoscópios. Estas bases são triângulos feitos, geralmente, de material transparente com segmentos de retas desenhados para obtenção de imagens múltiplas.

Considerações Finais

O momento atual é marcado por um grande desenvolvimento tecnológico, no qual se observa uma grande expansão do fluxo de informações acessíveis por vários canais, entre eles a internet que sem dúvidas, é um poderoso veículo de acesso a informação. Esse cenário de evolução vem se moldando de forma veloz, deixando para traz uma estrutura de educação que parece ter parado no tempo. Muitos profissionais não estão acompanhando esse avanço e alimentando a ruína que se visualiza na atualidade em relação às escolas.

Como consequência disso, a realidade que se observa é de alunos totalmente desinteressados, já que sua vida fora da escola é regada dos principais mecanismos de comunicação e tecnologia tais como, celulares, notebook, Ipad, Tablet, entre outros. Ao chegar à escola, esses indivíduos, são “obrigados” a deixar todos os recursos de lado, para se fixar em aulas monótonas, com poucos recursos disponíveis e ao invés de chamar sua atenção para o desenvolvimento intelecto-cultural, o que se observa é um efeito bem contrário.

Não é concebível que educadores se fixem em estruturas não funcionais de educação, e acreditem que terão bons resultados. Muitos jovens são deixados de lado, pelo fato de não se adequarem ao processo. Chega-se ao absurdo de qualificar grupos de alunos com dificuldade em aprender, ou se adequar ao processo, como portadores de déficit de atenção sem se perceber, que esses jovens são capazes de executar tarefas relacionadas a mais de uma atividade, bastando para isso que sejam estimulados, e o principal, que esses alunos visualizem alternativas diferentes das aplicadas atualmente.

Uma das propostas desse trabalho foi de relacionar a geometria plana, com eventos do cotidiano do aluno, com um objetivo principal, demonstrar ao mesmo, que a matemática não é uma ciência “morta” voltada só a cálculos e expressões como se pensa.

No desenvolvimento dos conteúdos necessários para montar um caleidoscópio, analisamos aspectos de simetria, que demonstram que até o conceito de beleza pode ser explicado e formalizado por aspectos matemáticos. Aproveitar-se desse tipo de mecanismo certamente é um dos caminhos que o educador deve trilhar para desenvolver seu trabalho de forma mais agradável para obter melhores resultados. Como resposta desse esforço, teremos alunos engajados e

envolvidos em estudar e desenvolver o conhecimento, pois não há dúvidas que a assimilação dos conteúdos é muito mais efetiva quando há participação efetiva dos alunos.

A proposta de relacionar a matemática com a arte é sem dúvida uma grande oportunidade de explorar com mais intensidade essa ciência. A todo o momento as pessoas saem às ruas, observam imagens, caminham por ruas pavimentadas, olham para cores, formas, figuras, e não se dão conta do universo de informações constantes nesse meio que estão diretamente relacionadas com a matemática.

O aspecto de montar um caleidoscópio possui o contexto de que o professor reunirá grupos para expor as práticas que deverão ser utilizadas pelos alunos para montar o objeto. Indiretamente, os alunos perceberão aplicações que podem ser associadas à ideia de função, tema esse que não desperta o menor interesse em aulas comuns de matemática. Também terão acesso ao aspecto das relações, tanto de ângulos, que formarão imagens diferentes, de acordo com sua disposição, como também com temas mais específicos, como figuras geométricas regulares, e sua junção, formando planos virtuais muito agradáveis.

Os alunos poderão perceber que há muito mais mistérios na projeção de um reflexo por meio de um espelho, do que se imagina e que esse fenômeno está envolvido com diversas definições matemáticas. São eventos simples que, se reunidos e organizados de forma racional, se tornam um diferencial no processo de ensino aprendizagem.

A educação pode ter um novo horizonte, que depende do envolvimento de muitas partes: Governo, Pais, Alunos e Professores. Esses últimos pode/devem gerar estímulos utilizando os recursos disponíveis para conscientizar e envolver alunos em um novo cenário.

Referências e bibliografia

- Agranionih, N. (2001) *A Teoria da Transposição Didática e o Processo de Didatização dos Conteúdos Matemáticos*, Revista de Educação Matemática, Vol. 1, n.1.
- Caruso, F. (2008). *Revista Brasileira de Ensino de Física*, V.30, n. 3, 3309. www.sbfisica.org.br
- Dolce, O.(2001). *Fundamentos de Matemática 9 Elementar – geometria plana*. São Paulo: Ed. Atual.
- Escher, M. (1989). *Gravura e Desenhos*. Holanda: Cordon Art Baar.
- Gombrich, E. (1995). *Arte e Ilusão – Um estudo da psicologia da representação pictórica*. São Paulo: Martins Fontes.
- Ledergerber-Ruoff, E (1982). *Isometrias e Ornamentos do Plano Euclidiano*. São Paulo: Ed. Atual.
- Murari, C & Perez, G. (2002) *Caleidoscópios: Pavimentações em Espelhos*.
- Sabba, C.(2004). *O Olhar humanístico matemático de Leonardo da Vinci: Reencantando a matemática por meio da arte*. São Paulo: FEUSP
- Stewart, I. (2012). *Uma história da Simetria na Matemática*. Rio de Janeiro: Zahar.

Algunas maneras no usuales de construir un cuadrado dado su lado

Saulo **Mosquera** López

Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Nariño
Colombia

samolo@udenar.edu.co

Fernando **Soto** Agreda

Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Nariño
Colombia

fsoto@udenar.edu.co

Resumen

En la Internet circuló el problema de dividir un cuadrado en dos regiones de igual área, para el cual el profesor José Antonio Mora hizo circular diversas soluciones en el 2002. El cuadrado es un cuadrilátero caracterizado por su regularidad, armonía, peso y simetría y por ello es una de las más sencillas de estudiar. Similar al problema comentado inicialmente, se planeó una experiencia de aula para establecer diversas formas que un grupo de estudiantes de la licenciatura en matemáticas de la Universidad de Nariño, encontraba para construir un cuadrado dado su lado. En el desarrollo de la misma surgieron más de una veintena de soluciones las cuales aprovechan conceptos como el de homotecia, o lugares geométricos como la parábola e incluso el concepto de inversión. Aquí se señalan algunos de los resultados encontrados.

Palabras clave: Cuadrado, Homotecia, Inverso de un punto, competencias, estándares, Experiencia de Aula.

Planteamiento del problema

En la estructura curricular de un Programa de Licenciatura se debe propender por incluir, por lo menos, dos amplios campos de formación: Matemáticas y Educación Matemática. El primero, como aquel que proporciona los conocimientos específicos de esta ciencia y el segundo, para potenciar el desarrollo de conocimientos y destrezas necesarias para enfrentar los procesos inherentes a la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Una línea indispensable en la formación matemática es la relacionada con la geometría, en particular, es necesario incluir un curso de geometría Euclidiana en el cual se presenten los elementos básicos de esta área, que le permitan orientar y potenciar, en el ejercicio de su labor, algunos de los procesos generales de la actividad matemática, tales como “formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida diaria, de otras ciencias y de las matemáticas mismas” (Estándares básicos de Competencias, Ministerio de Educación Nacional, 2006, p.51), y en cuanto a geometría se refiere, consideramos la solución de problemas de construcción.

Entre los medios que se están utilizando en la actualidad como estrategia para potenciar los diversos tipos de pensamientos aparecen los sistemas de cálculo simbólico tales como: CABRI, en el caso del pensamiento geométrico, DERIVE o MAPLE para el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos. En este sentido y dado que se pretendía explorar y

consolidar relaciones de tipo geométrico, se consideró apropiado utilizar CABRI y de manera explícita aprovechar algunas de sus herramientas preestablecidas, las cuales facilitan de manera general la actividad geométrica y en particular la solución de problemas de construcción.

El modelo didáctico escogido para diseñar las estrategias a emplear y problemas a proponer y resolver es el de experiencia de investigación en el aula que resulta ser una propuesta pedagógica interesante fundamentada en modelos cognitivos, en marcar a la evaluación como un proceso investigativo y que suscita el análisis de los registros que va consiguiendo la indagación y en particular los hallazgos y los progresos que derivan de esta actividad. Se seleccionó este modelo puesto que se cuestiona sobre la forma en que los estudiantes inter-relacionan los prerrequisitos de un problema con su propio conocimiento y la idea central de la experiencia se constituía en dar cuenta de las formas posibles que encontraban los estudiantes de resolver el problema propuesto (Orobio y Ortiz, 1997), más aún, cuando los autores de la propuesta tenían preconcebido que las soluciones que se presentarían serían pocas.

El problema objeto de estudio fue el de **construir un cuadrado dado su lado**. De hecho, el problema es simple, su sencillez abarca cualquier interpretación posible y muy pronto se fija en que la solución consiste en localizar un tercer vértice del cuadrado o simplemente calcular el centro del mismo. La ubicación de estos puntos precede la utilización de los mecanismos de simetría central, simetría axial, cálculo de puntos medios, trazo de perpendiculares y de paralelas, entre otras.

La experiencia subyace en aspectos paradigmáticos referidos a formas exclusivas de construcción de cuadrados que utilizan conceptos como el de perpendicularidad y paralelismo que son corrientes dentro del ambiente escolar. Sin embargo, en la medida que cada persona aprende nuevos conceptos, aparecen entretejidos mentales que logran solucionar de manera efectiva un problema y esto permite crear conexiones de gran riqueza didáctica y metodológica. En este punto, puede indicarse la forma en que el problema propuesto cursa lo recreativo. La matemática recreativa es una rama o disciplina matemática que ha perdurado de manera inveterada en las civilizaciones, al punto de que en la historia de la humanidad han trascendido libros y revistas que se preocupan por el estudio y la proposición de problemas atinentes a esta área. De manera casi puntual o correlativa, el cuadrado resulta una figura entrelazada en toda la historia del pensamiento; pues ha sido centro de estudio, preocupación y utilización; por ejemplo, los cuadrados mágicos, los cuadrados latinos, el tangram japonés y los problemas de disección propuestos por Sam Loyd y Ernest Dudeney, (Bellos, 2010), los nuevos juegos de Sudoku en los que se privilegia la armonía y la distribución regular de números, son ejemplo de la forma en que el cuadrado ha servido de enlace entre el conocimiento y la distracción y divertimento.

A pesar de que el objetivo de la propuesta en su forma primitiva, nada tenía que ver con los aspectos recreativos, tornó hacia allá, alcanzando un objetivo develado de la educación como es el de la satisfacción, del placer, del colmar expectativas entre los educandos. Tiene sentido, el aprender, el conocer, el adquirir la facultad de aplicar el conocimiento, los conceptos, dan sentido de oportunidad a los educandos, los dignifica y hace entender que el estudio de las matemáticas no puede ser traumático sino que más bien, resulta una fiesta a la que se puede acudir de manera libre llevando su propio paquete de pertenencias.

Escoger la experiencia de aula como procedimiento metodológico, permite el trabajo colaborativo, la comunicación y argumentación, eleva la autoestima y la confianza en sí mismo,

como se ve en la conducta que muestran los estudiantes al señalar los resultados que van encontrando. De otro lado, cohesiona al grupo y lo torna homogéneo, pues aparecen actividades ligadas a la retroalimentación, al recordar conocimientos, buscar nuevas alternativas y emplear recursos que se encuentran o no a la mano de cada estudiante. Ahora bien, como se mencionó las actividades de aprendizaje establecidas, estuvieron mediadas por computadores y el uso de un CAS (Computer Algebra System, por sus siglas en Inglés) de asistencia geométrica, pensando en que su mediación permita construir los objetos utilizando mejores y más efectivos recursos y empleando conceptos que si bien, resuelven el problema de manera clara, no se encuentran sino en una combinación tácita de otros elementos. Nuestra experiencia nos faculta a opinar que el uso de sistemas computacionales permite:

- Reducir el tiempo y la atención dedicada al desarrollo de las habilidades de cálculo y construcción, dejando espacio para realizar mayor énfasis en la asimilación de los procesos y en la comprensión de los conceptos y su correspondiente análisis.
- Utilizar el sistema como elemento de motivación, no como centro del aprendizaje, puesto que relegar al computador alrededor de construcciones robustas (Construcciones que resisten el arrastre de elementos que las conforman), las diferentes e infinitas posibilidades de dimensiones sobre las figuras objeto de estudio. El sentido visual juega un papel importante dando lugar al análisis y el razonamiento para establecer las reglas que rigen las medidas en la construcción.
- Resolver de manera segura un problema ya que libera de inexactitud la ejecución de los pasos y así determina la seguridad del beneficiario del sistema.
- Contener las infinitas disposiciones que puede registrar los prerequisites de una construcción, pues una construcción robusta hace prevalecer sus características y particularidades a pesar de que las dimensiones de algunos objetos cambien por arrastre.

De otro lado, el planteamiento y resolución de problemas se ha convertido (Polya, 1965), en una de las más ricas estrategias didácticas que conjugan los aspectos teóricos y experimentales en el quehacer docente dentro del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Nariño. Esta experiencia se propuso como ejemplo para que el futuro egresado del programa de licenciatura de nuestra universidad vaya consolidando improntas que lo enriquezcan en el momento de aplicar a su vida profesional proyectos de largo alcance en la institución que laboralmente tenga que representar.

La experiencia se desarrolló con los estudiantes del tercer semestre de la licenciatura en matemáticas de la Universidad de Nariño, en momentos en que la finalización del semestre era un hecho y se preveía que el cúmulo de conocimientos adquiridos en geometría sintética era suficiente para estudiar el problema. Un curso básico de geometría euclidiana compendia prácticas computacionales con ayuda del Software Cabri Géomètre, del modelo de geometría dinámica, producido en la Universidad de Grenoble en Francia por un equipo liderado por el profesor Jean Marie Laborde. Las prácticas son independientes del profesor que ofrece la asignatura y se convierten en fuente dinamizadora del conocimiento, tal y como lo viene advirtiendo el mundo académico que incrementa el uso de estas herramientas en varios países del orbe. De hecho, entre los gustos académicos, muchos docentes hacen uso de herramientas gratuitas que compiten con el software mencionado tales como Geogebra que también requiere cumplir prerequisites básicos en la construcción que resuelve el problema.

Fundamentación teórica

En los Estándares Básicos de Competencias (Ministerio de Educación Nacional, 2006) y en los Lineamientos Curriculares se vislumbra con claridad el papel que desempeña el estudio de la geometría y especialmente la legada por Euclides con su modelo sintético y la heredada por Fermat y Descartes que es el modelo analítico. En el modelo euclidiano, la regla que se despegar al final del trazo de una línea y el compás que se cierra de manera inmediata después de trazar una circunferencia resultan normas o requisitos imposibles de eludir y que impiden el transportar distancias. Estos impedimentos han convertido, al contrario de lo que se piensa, los problemas de construcción, en problemas atractivos que requieren de un esfuerzo mental, en un juego de solitario mucho más válido y enriquecedor que los solitarios que ahora se encuentran frecuentemente. En efecto, una de las primeras cosas que enseña Euclides es que el compás euclidiano y el moderno, que si permite llevar distancias, son equivalentes (Proposición 2 del libro I de los Elementos) y también con prontitud, enseña la forma en que se debe construir un triángulo equilátero (Proposición 1 del libro I de sus Elementos), la bisectriz de un ángulo (Proposición 9 del libro I de sus Elementos), un cuadrado si se da su lado (Proposición 46 del libro I de sus Elementos) y muchas cosas más. También enseña, por ejemplo a dividir un segmento en dos partes iguales (Proposición 9 del libro I de sus Elementos) y por extensión en cualquier número de partes iguales que sea potencia de dos. (Heath, 1908).

Al ser tan rica la estrategia de proponer problemas de construcción, circulan en el mercado textos que proponen eso como centro, por ejemplo, el libro *Excursions in Geometry* de C. Stanley Ogilvy publicado por Dover y decenas de títulos más. Allí se proponen problemas de diverso tipo de complejidad, pero los más sencillos, como el que ataca esta experiencia, resultan enriquecedores y van dignificando a quienes encuentran otras soluciones que aumentan las ya alcanzadas. En el texto anotado, por ejemplo, está el problema de anclar un segmento en un ángulo de modo que un punto arbitrario en su interior sea el punto medio de tal segmento. Simple, tan simple como el que se estudia en esta experiencia de aula y que atrae y atrapa al estudiante en búsqueda de su solución.

Mhor Mascheroni, poeta y geómetra italiano (1750-1800) realizó la sorprendente lucubración con su respectiva demostración, de que una construcción posible con regla y compás tan solo se podía hacer con compás. De hecho, con un compás no se puede trazar una línea recta pero ella se supone construida, en la demostración de Mascheroni, con solo ubicar dos puntos que la determinan. De modo que las construcciones en geometría han jugado un papel importante y las reglas impuestas se convierten en retos importantes de vencer y las hacen divertidas. De hecho, en variadas ocasiones, las soluciones proponen referente teóricos diferentes e incluso nuevas teorías.

De otro lado, Bailey & Borwein, 2001, validan “la utilización de la tecnología computacional...con el propósito de explorar la estructuras matemáticas, de examinar conjeturas...” (p. 123), con el propósito de cimentar bases sólidas y lógicas sobre ciertos conceptos. En este sentido, la tecnología se convierte en una herramienta que permite ver el mundo de los conceptos de modo diferente y en consecuencia, amplía las formas de estudiar el conocimiento. En el caso de la utilización de Cabré Géomètre, la utilización de las herramientas que trae por defecto, formulan respuestas inmediatas que configuran un procedimiento estándar de solución. La máquina imprime precisión a la construcción y deja al hombre su gobierno. En el caso de software de asistencia geométrica, la tarea más complicada está referida a lo que de manera tácita creía Euclides y que es el cálculo de puntos de intersección entre figuras. Los

programadores, tienen allí un buen reto para vencer, sobre todo cuando de calcular puntos de intersección entre lugares geométricos se trata.

Complementariamente, en el contexto de la Educación Matemática Realista, la enseñanza de las matemáticas se trata como una actividad social. Las diversas interrelaciones existentes entre docentes y estudiantes producen reflexiones de diverso carácter en cada uno de ellos de manera que sus aportes provocan mayores niveles de comprensión. (Godino, 2011). Los estudiantes como participantes activos del proceso enseñanza aprendizaje se involucran de manera tal que la intervención, la discusión, la cooperación, la revisión de las propuestas se convierten en elementos básicos de un proceso que pueden ayudar a convertir descripciones primarias de una construcción en elementos formales de la misma. Es esta idea, del concepto de “idoneidad interaccional” (Godino), la que se desea trabajar en esta experiencia.

Diseño y metodología

El propósito fundamental de la experiencia de investigación en el aula fue elaborar un agregado de soluciones al problema de “*construir un cuadrado dado su lado*” para lo cual era posible utilizar los conocimientos teóricos proporcionados por los cursos de geometría y las potencialidades de los diferentes recursos que trae el asistente geométrico Cabri Géomètre incorporados por defecto a su núcleo de acción que son macro-construcciones que en pocos pasos resumen las diversas operaciones geométricas que deben efectuarse con los instrumentos físicos regla y el compás al resolver problemas de construcción.

La experiencia inició con la revisión de elementos teóricos inherentes a problemas relacionados con construcciones geométricas y también con las herramientas geométricas que dispone Cabri, en particular aquellos sobre la construcción de un cuadrado dado un lado, entre los cuales se encuentran, en primer término, los resultados teóricos legados por Euclides, los cuales han sido extractados del texto de Eves, 1963.

- *Triángulo equilátero*. Es el primer problema de construcción de elabora Euclides en su libro Los Elementos.
- *El punto medio de un segmento*. (Proposición 10 de los Elementos) Que es una especie de cálculo sobre una figura geométrica y que sucede a la construcción de la bisectriz (Proposición 9) que también elabora Euclides en el Libro I de sus Elementos. Este punto medio también se puede calcular entre dos puntos sin necesidad de que se haya trazado el segmento que los une.
- *Perpendicular por un extremo*. (Proposición 11 de los Elementos) Esta construcción es estudiada por Euclides en el libro I de los elementos y se corresponde con los problemas similares de la construcción de una perpendicular por un punto de un segmento y también por un punto externo al segmento.
- *Paralela a un segmento o recta*. (Proposición 31 del libro I de los Elementos) Que también explica Euclides en el libro I de sus Elementos.

Por defecto, Cabri tiene incorporadas en su núcleo de trabajo las siguientes macro-construcciones.

- *Simetría central*. Aunque es parte constitutiva de la geometría transformacional, obedece al modelo euclidiano pues se fundamenta en la extensión de un segmento por cualquiera de sus extremos y que Euclides lo escribe en sus Elementos como su segundo postulado.

- *Simetría axial.* Es otra de las herramientas dispuestas en Cabrí y que hacen el efecto del eje de simetría tal y como si fuera un espejo.
- *Homotecia.* Es la más simple entre las semejanzas que pueden establecerse y que desde Cabrí se halla de manera oportuna e inmediata.
- *Lugar Geométrico.* Que resulta de la elaboración dinámica de una construcción. Es uno de los recursos ricos y a veces la única estrategia de solución frente a diversos problemas de construcción.
- *Inverso de un punto respecto de una circunferencia.* Que se convierte en una herramienta importante, pues responde de manera positiva a la forma de trazar círculos sin compás o al trazo de rectas sin regla.

Una vez presentados los conceptos básicos se continuó con la presentación, por parte de los docentes de cinco soluciones del problema que utilizan recursos simples como perpendicularidad, paralelismo, circunferencia dado su centro y su radio, punto medio, simetría central y simetría axial.

Dos de las construcciones tratadas se ilustran gráficamente a continuación, con base en el referente teórico de que la idea central para la construcción de un cuadrado dado el lado, como ya se esbozó, termina con el cálculo constructivo de un tercer vértice o del centro del cuadrado que es el punto de intersección de sus diagonales.

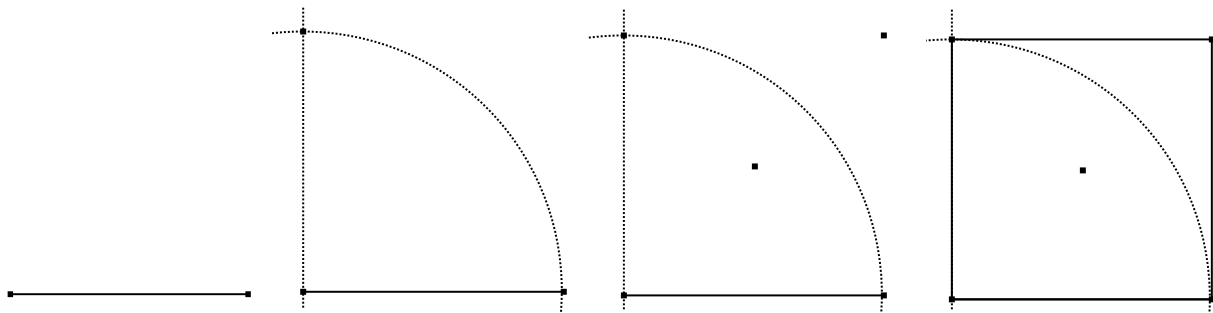


Figura 1. Construcción de un cuadrado que utiliza simetría central.

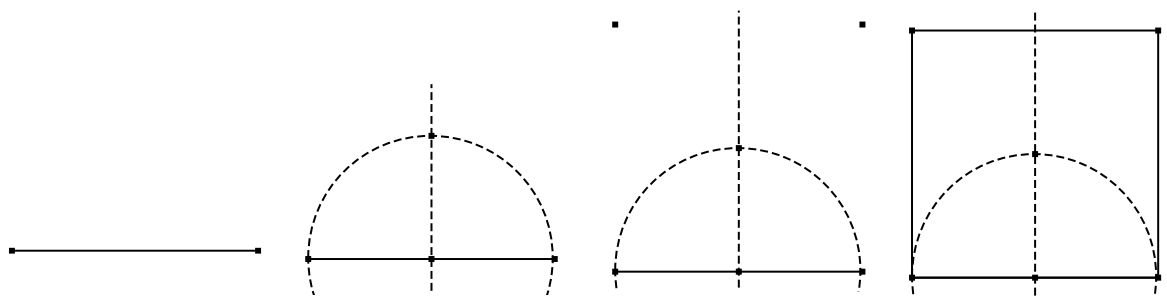


Figura 2. Una segunda construcción de un cuadrado que también utiliza simetría central.

A continuación se realizó un trabajo, en grupos de tres estudiantes, el cual consistió en el análisis de los argumentos teóricos que sustentaban cada una de las construcciones realizadas y su socialización en el aula de clase con el fin de unificar conocimientos y consolidar teóricamente los conceptos utilizados.

La siguiente etapa fue realizada por los docentes y básicamente trató de ilustrar la riqueza conceptual y operativa de CABRI en cuanto a la geometría transformacional se refiere. En este punto se tuvo necesidad de estudiar, bajo claros problemas de construcción cada una de las herramientas que por defecto trae el software. Es especial, las explicaciones se concentraron sobre los conceptos de homotecia e inversión respecto de una circunferencia.

La última etapa de la experiencia fue la más rica en trabajo, análisis y resultados pues fue la búsqueda personal o grupal de soluciones diferentes al problema en cuestión. En la medida en que los actores del proceso encontraron una nueva solución, esta era socializada en el grupo de manera argumentada, se revisaba críticamente desde el punto de vista conceptual y desde las fortalezas del ambiente Cabri, por ejemplo si la construcción era robusta o no, es decir, si los requisitos básicos de un cuadrado como perpendicularidad de lados contiguos, paralelismo de lados opuestos e igualdad entre los lados se mantienen bajo la prueba dinámica del arrastre de cualquiera de sus vértices, y una vez que recibía el visto bueno del grupo, entraba a formar parte de la colección de construcciones. Este proceso se repetía una vez más hasta que las actividades de la culminación del semestre obligaron a docentes y estudiantes a relegar las reuniones del grupo de trabajo a segundo plano.

Es importante llamar la atención de que contrario a los sentimientos de decepción o frustración, el grupo se mostró siempre animado y atento. De hecho, la experiencia fue más allá del aula y de los tiempos propuestos, y a lo largo de muchas reuniones, se revisaron otras soluciones entre las que sobresalen aquella que utiliza el concepto de homotecia, la que obedece a la descripción de la parábola como lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta y de un punto y una de ellas que contiene un artificio geométrico, pero que es hermosa pues recurre al concepto de punto inverso respecto de una circunferencia y que a su vez utiliza la herramienta Cabri denominada Lugar Geométrico, aparte de otras que utilizan la rotación y la traslación de elementos.

El fruto de este trabajo consistió en la colección de veintidós construcciones del cuadrado y únicamente como una muestra se ilustra en la figura 3 la realizada por una terna de estudiantes conformada por Jefri Fernández, Natalia Descanse y Andrea Ortiz. Si Ud. desea tener acceso a los archivos de Cabri de tales construcciones puede solicitarlos a los autores de esta propuesta.

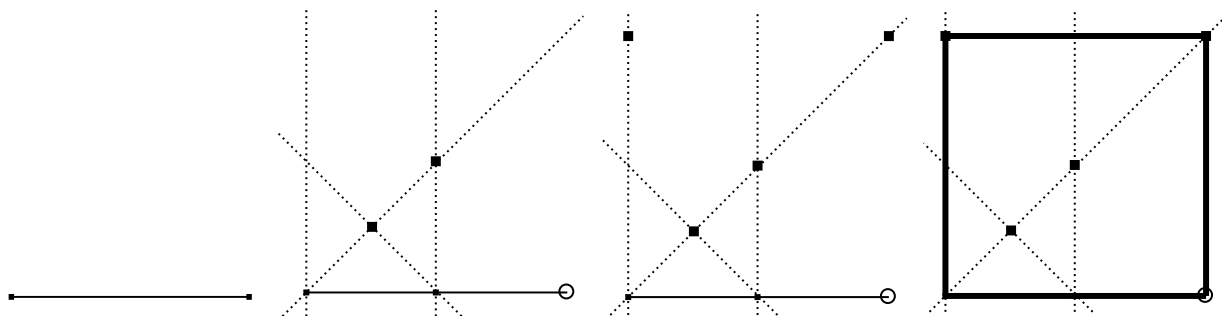


Figura 3. Construcción de un cuadrado que utiliza simetría central de forma iterativa.

La experiencia centró su accionar en el modelo denominado experiencia de aula que resulta enriquecedora en sí misma puesto que anima a los actores a jugar un papel fundamental en la consolidación y uso del conocimiento. En este caso, se vencen los roles de los actores dado que se diluye la figura del profesor y son los estudiantes los protagonistas del aprendizaje. Como ya

se ha indicado, el problema va sesgando su accionar hacia el sentido recreativo de la misma y consigue movilizar el conocimiento de manera efectiva.

Logros y dificultades evidenciadas

Logros. A través del uso de herramientas computacionales aparece ligada la inquietud que tienen los estudiantes de convertir el medio en objeto central de estudio cuando debe convertirse en algo invisible y transparente, es decir, en una ventana a través de la cual se mira.

Los recursos informáticos, las estrategias didácticas que se planean no son sino formas de ampliar el conocimiento y de atravesar sus formas de uso. En este sentido, la experiencia resultó enriquecedora y provechosa.

La experiencia de proponer y formular problemas, como el estudiado, de gran simpleza y ricos en alternativas de solución, resultó enriquecedora pues un problema se convierte en un reto personal que dinamiza el conocimiento. La experiencia dicta a la razón de la existencia de problemas con una única vía de solución ocasionalmente compleja. ¿Es posible constituir problemas con varias y diversas soluciones?. Un prototipo de este hecho está ligado al cuadrado y es el famoso teorema de Pitágoras del que el profesor Elisha S. Loomis coleccionó 256 demostraciones. Y es que el espíritu humano no se doblega ante una sola línea de escape, en este sentido, no le ha sido suficiente la demostración elaborada por Euclides y cada uno de los subsiguientes autores pone un sello e impronta personales.

Las primeras respuestas, ya referidas a la experiencia realizada, fueron especialmente atractivas pues declaraban la utilización de los argumentos teóricos que se habían preconizado cuales eran los de localizar un tercer vértice o calcular el punto medio del cuadrado dentro de su área. De otro lado, buscar una nueva solución mueve el conocimiento, anima la búsqueda frente a la intención de poner un sello personal al problema, y este aspecto, sin duda, enriqueció la experiencia, sin que en el grupo, descubrir una nueva solución se haya convertido en un asunto competitivo.

Sin duda, emplear herramientas como la homotecia, conceptos como el de lugar geométrico, puntos de inversión respecto de una circunferencia, resultaron llamativos e inesperados. Estas soluciones sobresalen entre todas, no solo por su alto entretejido teórico, la gran riqueza que poseen sino porque su utilización necesita de una argumentación teórica inicial que se hace indispensable y anterior a la simple utilización de recurso.

No es simple formular problemas que alleguen tantas oportunidades docentes. Requiere de buen juicio, responsabilidad, alto sentido profesional, conocimiento de la temática y una formación geométrica seria. Creemos que la escuela está en mora de establecer caminos que consoliden recursos como el mencionado. No es el caso que los recursos sean exclusivamente materiales, existen otros, teóricos, abstractos, intangibles que dan lustre a una institución y pueden convertirse en proyectos de largo plazo y alcance.

Los niveles de alegría, de animación, de satisfacción personal que alcanzaron los estudiantes, le dan razón a continuar con propuestas similares a la que ahora se muestra. Hemos anotado que no es algo simple, pero sin duda, resulta ser, de manera organizada, algo que entrega dignidad y respeto a cada uno de los estudiantes, siendo cada uno de ellos una importante razón de la existencia de las instituciones.

Dificultades. La única dificultad que se avizora aparece referida a los tiempos invertidos en la ejecución de la experiencia dado que deslinda lo establecido en los horarios de clase,

usurpando, como en efecto lo hace, tiempos que deben dirigirse al estudio de otras temáticas. A su vez, como ya se ha explicado, en esta dificultad aparece una riqueza, surge un eslabón que abre oportunidad a seguir ejecutando el proyecto, animándolo con propuestas similares o diversas que abran el abanico de actividades que requieren las nuevas generaciones.

Si bien, los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría de alguna manera relegados en los contextos escolares, el mundo moderno ofrece nuevas alternativas para estudiar viejos problemas.

Conclusiones

La actividad realizada contenida en el modelo de experiencia de aula fue enriquecedora pues permitió inter-relacionar los conceptos simples que habían conocido y aprendido los estudiantes. De otro lado, atacar un problema que a todas luces resulta simple, sencillo y entendible rompiendo los pocos esquemas que se explicaron de manera previa resultó ser el motor dinamizador en el conocimiento.

Frente a un problema tan simple, el haber alcanzado más de una veintena de soluciones de las que resulta imposible destacar la mejor o la más bella dado que algunas inter-relacionan conceptos y definiciones que parecerían no caber en una solución como la definición de parábola como un lugar geométrico especial, o el inverso de un punto respecto de una circunferencia y de hecho la semejanza de figuras ligadas entre sí por homotecias, es particularmente asombroso, resulta ser una manera espléndida de mover el conocimiento y la da sentido y oportunidad al ejercicio de aprender.

Es necesario considerar la importancia de la gestión del docente en el aula de clase en la búsqueda de actividades que generan ambientes de aprendizaje y en las cuales los estudiantes exploren, interpreten, argumenten, propongan alternativas y cuestionen la práctica educativa, multiplicando su papel protagónico. Finalmente, el papel más importante entre los actores del aprendizaje lo juega el propio estudiante y las escuelas y docentes se convierten en simples mediadores que deben planear los mecanismos y estrategias que median el conocimiento, el aprendizaje y sus formas de aplicación en la solución de problemas y situaciones de interés personal.

Referencias

- Bailey, D. & Borwein, J. (2001). *Experimental Mathematics: Recent development and future outlook*. En B. Engquist y W. Schmid (Eds.), *Mathematics unlimited-2001 and beyond*. New York: Springer-Verlag.
- Bellos, A. (2010). *Alex en el país de los números. Un viaje al maravilloso mundo de las matemáticas*. Traducción de José Hernández. Grijalbo Editores, Bogotá. Colombia.
- Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. XIII CIAEM. Recife. Brasil.
- Heath, T. (1908). *The Thirteen Books of Euclid's Elements*. Dover Publications, Inc, New York.
- Eves, H. (1963). *Estudio de las Geometrías* (Tomo I). México, Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Serie Lineamientos. Áreas Obligatorias y Fundamentales*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

Disponible en Internet en: [http:// www.mineduacion.gov.co/cvn/1665/articles-89869_archivo_pdf9.pdf](http://www.mineduacion.gov.co/cvn/1665/articles-89869_archivo_pdf9.pdf)

Ogilvy. C. S. (1983). *Excursions in Geometry*. Dover Publications, New York, USA.

Orobio, H., & Ortiz, M. (1997). *Educación Matemática y desarrollo del sujeto. Investigación en el aula. Cooperativa Editorial Magisterio*. Santafé de Bogotá, Colombia.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas. México.

Aspectos do pensamento geométrico demonstrados por estudantes do ensino médio em um problema envolvendo o conceito de quadriláteros

André Pereira da Costa
 Universidade Federal de Pernambuco
 Brasil
andre.pcosta@outlook.com
 Marcelo Câmara dos Santos
 Universidade Federal de Pernambuco
 Brasil
marcelocamaraufpe@yahoo.com.br

Resumo

Esta pesquisa tem por objetivo identificar e analisar os níveis de raciocínio geométrico dos estudantes do Ensino Médio de escolas públicas do Estado de Pernambuco, tendo como fundamentação teórica o modelo do desenvolvimento do pensamento geométrico de Van-Hiele. O estudo contou com a participação de 300 alunos do Ensino Médio, e o instrumento de coleta de dados adotado foi um teste de sondagem, constituído por cinco questões, contendo problemas referentes ao conceito de quadriláteros. Todavia, devido à amplitude dos resultados obtidos com a aplicação do questionário, aqui iremos apenas discutir os resultados obtidos com o primeiro item do teste. Os resultados obtidos mostram que a maioria dos alunos pesquisados se encontra no primeiro nível do modelo de Van-Hiele, a fase de visualização, na qual os estudantes consideram as figuras geométricas apenas considerando sua aparência. Portanto, esses alunos não reconhecem os quadriláteros como figuras portadoras de propriedades.

Palavras chave: raciocínio geométrico, visualização, Van-Hiele, quadriláteros.

Introdução

A presente pesquisa teve por objetivo identificar e analisar os níveis de raciocínio geométrico dos estudantes do Ensino Médio de escolas públicas do Estado de Pernambuco, tendo como fundamentação teórica o modelo do desenvolvimento do pensamento geométrico de Van-Hiele.

É notório que, nos últimos anos, ocorreram avanços significativos em pesquisas na área de Educação Matemática, sobretudo no Ensino de Geometria, especialmente após o reconhecimento da importância da Geometria para o desenvolvimento humano, pelos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (Brasil, 1998), que gerou mudanças nas abordagens dos conteúdos desse ramo da Matemática nos livros didáticos e, também, nos cursos de formação de professores de Matemática.

Para Câmara dos Santos (2009), há um distanciamento progressivo entre os resultados obtidos com as pesquisas educacionais no âmbito da Geometria e o cotidiano complexo e específico da sala de aula. Tal distanciamento tem provocado o surgimento de dificuldades em reaplicar as experiências vivenciadas pelos estudos científicos no ambiente de sala de aula.

Além disso, avaliações de larga escala, como os dados do Sistema de Avaliação Educacional do Estado de Pernambuco – SAEPE¹ (Pernambuco, 2010), têm evidenciado que os estudantes do Ensino Médio apresentam dificuldades de compreensão dos conceitos geométricos, sobretudo os quadriláteros, quando tais conceitos são abordados em situações-problema. Dessa forma, os baixos desempenhos apresentados pelos discentes nessas avaliações constituem um forte indício de que a Geometria continua sendo negligenciada nas aulas de Matemática. É justamente este contexto que sustenta o nosso interesse em realizar tal estudo.

Segundo os PCN (Brasil, 1998), o conceito matemático quadriláteros deve ser abordado na Educação Básica já nos anos iniciais do Ensino Fundamental, porém, no sexto ano, deve ser realizada a sistematização desse conceito pelos alunos. Assim, discentes do Ensino Médio já deveriam ter consolidado os objetos matemáticos quadriláteros.

Conceição e Oliveira (2014) desenvolveram uma pesquisa, que tinha por finalidade analisar o nível de conhecimento geométrico dos professores de Matemática das escolas estaduais do município de São Vicente Ferrer (Pernambuco). Esses pesquisadores observaram que os docentes apresentam várias lacunas conceituais no que diz respeito aos quadriláteros, que é um dado muito preocupante, pois são esses professores que ensinam Geometria aos nossos discentes. Os autores argumentam que essas lacunas apresentadas pelos docentes influenciam os resultados apresentados pelo SAEPE.

Neste contexto, nos interessa investigar os níveis de pensamento geométrico dos alunos do Ensino Médio, considerando como sustentação teórica a teoria do desenvolvimento do pensamento geométrico, desenvolvida pelo casal Van-Hiele (1957).

Referencial Teórico

A teoria vanhieliana do progresso do pensamento geométrico

Inspirados pela teoria da epistemologia genética de Jean Piaget, os pesquisadores holandeses Pierre Marie Van-Hiele e Dina Van-Hiele Geodolf desenvolveram a teoria do desenvolvimento do raciocínio geométrico, como o produto da tese de Doutorado em Matemática e Ciências Naturais pela Universidade Real de Utrecht, na Holanda. Esses professores observaram que seus alunos do Ensino Básico apresentavam várias dificuldades no que se refere à aprendizagem da Geometria, desse modo, se enveredaram a estudar as causas desse fato (Salvador *et al.*, 1989), e o resultado foi a “*A teoria vanhieliana do progresso do pensamento geométrico*”.

A teoria de Van-Hiele consiste em um modelo preconizando que os estudantes evoluem na aprendizagem em geometria a partir de fases hierárquicas de conhecimento; assim, um estudante não consegue alcançar um estágio mais avançado sem antes ter passado por estágios anteriores inferiores. Para tanto, esse modelo pode contribuir com a prática pedagógica do professor de

¹ Tem como objetivos monitorar o padrão de qualidade do ensino e apoiar as iniciativas de promoção da igualdade de oportunidades educacionais (Fonte: <http://www.saepe.caedufjf.net>).

Matemática, no sentido que favorece a análise das dificuldades apresentadas pelos alunos, além de possibilitar um olhar mais detalhado acerca das suas competências (Usiskin, 1994).

A teoria está organizada em cinco níveis de desenvolvimento (visualização, análise, dedução informal, dedução formal e rigor), de modo que, ao mesmo instante em que os estudantes estudam Geometria, eles evoluem a partir de uma sequência dessas fases de aprendizagem de conceitos, em que cada fase possui sua especificidade, marcada por um elo entre a linguagem e os objetos de estudo (Van de Walle, 2009).

Para Van-Hiele (1957), no primeiro estágio, denominado nível de visualização, os alunos reconhecem as figuras geométricas pelas suas aparências e não por suas propriedades ou características próprias. O aluno consegue, por exemplo, identificar um quadrado ou um retângulo e, inclusive, os construir sem falhas, mas um retângulo não é considerado como um quadrado, tendo em vista que divergem em suas aparências. Desse modo, as atividades propostas em sala de aula pelo professor devem promover a evolução para o segundo estágio, no qual os estudantes reconhecem as figuras pelas suas propriedades. Nesse nível, o aluno irá distinguir um losango pelas suas propriedades (lados iguais, diagonais perpendiculares que se interceptam em um único ponto) e não por sua aparência. Van-Hiele (1957) discute ainda que na transição do primeiro estágio para o segundo a manipulação de figuras leva o estudante à elaboração de uma estrutura mental que desenvolve o seu raciocínio, promovendo a passagem entre os dois estágios.

No segundo estágio, chamado nível de análise, o aluno não reconhece mais as figuras pelas suas aparências mas, sim, por suas características específicas. Dessa forma, elas são consideradas como portadoras de propriedades. Assim, se o estudante desenha, mesmo com falhas, um quadrilátero em seu caderno e que essa figura apresenta todos os ângulos retos, então ele é capaz de considerar o quadrilátero como um retângulo. Todavia, nessa fase, o aluno ainda não consegue ordenar as propriedades das figuras o que faz com que, por exemplo, um losango não seja reconhecido como um quadrado (e vice-versa). Novamente, Van-Hiele (1957) recomenda que se o professor possibilitar a manipulação de figuras geométricas pelo o aluno, tal fato promoverá o estudante para o próximo estágio de raciocínio geométrico, que é definido pela ordenação das propriedades das figuras, isto é, pelo estabelecimento de ligações entre as características das figuras geométricas.

Várias pesquisas realizadas com testes que consideram os estágios vanhielianos, mostram que a maioria dos alunos da Educação Básica encontra-se até essas duas primeiras fases do modelo de Van-Hiele, apresentando várias dificuldades de aprendizagem da Geometria (Câmara dos Santos, 2009; Oliveira e Gazire, 2012).

Oliveira e Almeida (2012) observaram que menos de 15% dos alunos que cursavam o quinto ano do Ensino Fundamental em 2011, eram capazes de estabelecer associações entre objetos do cotidiano e as figuras geométricas. Barbosa (2011) observou que estudantes do sexto ano do Ensino Fundamental apresentam diversas dificuldades na aprendizagem da Geometria, em especial quando os conceitos se referiam ao estudo dos quadriláteros.

Para Conceição e Oliveira (2014), essa defasagem ocorre, principalmente, pelo fato de, nas aulas de Matemática do Ensino Básico, ser dada pouca ênfase à Geometria, sendo que, em geral, os professores confundem o seu ensino com o ensino de medidas. Tal fato tem contribuindo para que os alunos apresentem dificuldades com relação à compreensão dos conceitos geométricos.

No terceiro estágio de Van-Hiele, denominado dedução informal, o aluno consegue ordenar as propriedades das figuras, percebendo que elas se deduzem entre si. Então, nesse nível, o sujeito é capaz, por exemplo, de estabelecer uma relação entre a propriedade da soma dos ângulos internos de um triângulo (que diz que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180°) com outra propriedade, que é a soma dos ângulos internos de um quadrilátero (na qual a soma das medidas desses ângulos é igual a 360°). Além disso, o estudante reconhece um quadrado como um losango, pois apresentam as mesmas propriedades. Todavia, ele ainda não compreende o significado próprio da demonstração (Câmara dos Santos, 2001).

Na quarta fase, chamada de dedução formal, o aluno é capaz de compreender a dedução e o significado intrínseco da demonstração. Desse modo, consegue construir vários tipos de demonstrações por diversos caminhos, além de estabelecer a distinção entre uma proposição e sua recíproca, motivo pelo qual as definições e os axiomas são essenciais, sendo possível distinguir quando uma condição é imprescindível e também quando é necessária. Tais aspectos são características do processo dedutivo. Ainda nesse estágio, o estudante é capaz de reconhecer um paralelogramo que tem dois lados adjacentes congruentes como um losango (Ontario, 2006).

No quinto nível, o denominado rigor, que é definido por processos basicamente matemáticos, o discente consegue compreender diferentes sistemas axiomáticos, bem como construir a divergência entre os objetos e sua essência. Além disso, ele é capaz de trabalhar com geometrias não euclidianas. Assim, o sujeito desenvolve um olhar abstrato do campo geométrico.

Para Van-Hiele (1957), o progresso do raciocínio geométrico não está relacionado apenas à maturidade ou à idade do sujeito, mas sim às atividades educativas e às situações didáticas organizadas pelo professor.

Metodologia

Esta pesquisa contou com a participação de 300 alunos do Ensino Médio, sendo que, para cada ano escolar, o instrumento de coleta de dados foi aplicado com 100 sujeitos. Tais sujeitos são estudantes de cinco escolas da rede pública de três municípios do Estado de Pernambuco: Recife (três escolas), Cabo de Santo Agostinho (uma escola) e Limoeiro (uma escola). Para preservar a identidade dos sujeitos, não faremos referência aos nomes dos estabelecimentos de ensino pesquisados.

O instrumento de coleta de dados adotado nessa pesquisa foi um teste de sondagem, constituído por cinco questões, contendo problemas referentes ao conceito de quadriláteros. O objetivo do teste foi identificar em que níveis de raciocínio geométrico se encontram os alunos do Ensino Médio. É importante lembrarmos que, segundo Van-Hiele (1957), os alunos ao concluírem esse nível escolar deveriam estar no nível de dedução informal, no qual o sujeito é capaz de construir definições e demonstrações de teoremas, axiomas e postulados. Além disso, devido à amplitude dos resultados obtidos com as questões, aqui iremos apenas discutir os resultados obtidos com o primeiro item do teste.

A questão a ser analisada constou de duas etapas. Na primeira etapa, os estudantes foram orientados a construir um retângulo e, depois, uma figura que não fosse um retângulo. Na segunda etapa, foi pedido que eles explicitassem suas produções. A busca de produzir uma figura que não fosse um retângulo fundamenta-se na concepção de que, ao construir uma figura que não tenha determinadas características, uma “figura divergente” do retângulo, o discente é conduzido à justificativa de suas construções.

A seguir, são apresentados os resultados obtidos na questão analisada.

Análise dos resultados

Na questão foi solicitado aos alunos que desenhasssem um retângulo e uma figura de quatro lados que não fosse um retângulo. Em seguida, os discentes deveriam explicitar suas construções. Esse item tinha por finalidade analisar se, na construção do não retângulo, o estudante considerava as características da figura ou não. Dessa forma, a explicação da sua resposta mostrará suas concepções referentes à figura que não fosse um retângulo. No Gráfico 01 são apresentados os quadriláteros escolhidos pelos alunos como não retângulos.

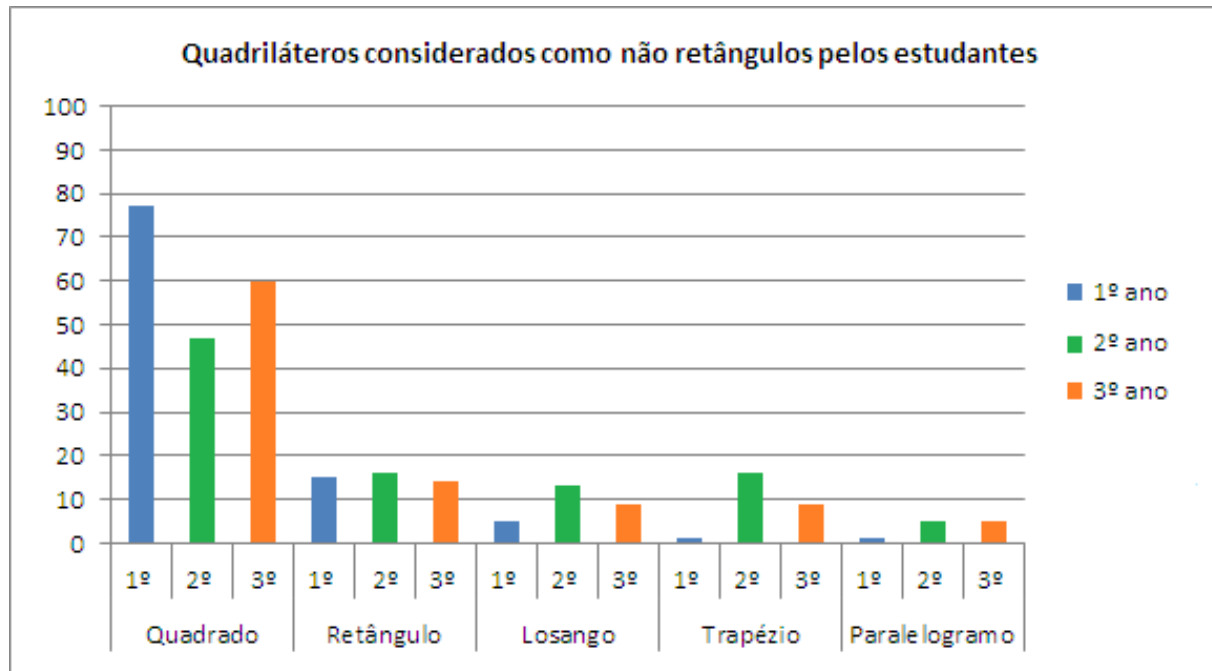


Gráfico 01. Relação quantitativa, em valores percentuais, das figuras geométricas consideradas como não retângulos pelos estudantes do 1º ano do Ensino Médio (Valores percentuais).

Pelo Gráfico 01 podemos observar que a maior parte dos estudantes do Ensino Médio, 61% em média, considera a figura geométrica quadrado como um não retângulo, ou seja, quase dois terços dos alunos pesquisados não reconhecem o quadrado como sendo um retângulo, sendo observado em 77% do total de alunos do 1º ano, 47% entre os do 2º ano e 60% para os do 3º ano. Tal fato é uma forte evidência de que os quadrados não são considerados como retângulos por possuírem aparências diferentes desses últimos, que é uma característica do nível de visualização do modelo de Van-Hiele. Além disso, confirmamos que o quadrado possui grande relevância no espaço do discente.

Em segundo lugar, a figura mais frequente como um não retângulo foi o próprio retângulo, porém, em posição não prototípica, isto é, em posição diferente da que geralmente é ensinado em sala de aula, com o lado maior paralelo às bordas horizontais da folha de papel. Isso foi verificado em 15% dos alunos do 1º ano, 16% do 2º ano e 14% do 3º ano. Esse é um dado importante, pois é uma prova de que os estudantes apresentam dificuldades em reconhecer o retângulo em um arranjo diferente do seu posicionamento padrão, como comumente lhe é ensinado em sala de aula na Educação Básica. Tal aspecto também corresponde ao primeiro nível vanhieliano.

Em terceiro lugar, o losango foi reconhecido como um não retângulo por 5% dos discentes do 1º ano, 13% do 2º ano e 9% do 3º ano, parece ser uma evidência de que os estudantes procuraram especificidades dessa figura, como caminho para promover a distinção entre os dois tipos de quadriláteros. E em quarto lugar está o trapézio, que, entre os alunos, apresentou uma frequência de 1% no 1º ano, 16% no 2º ano e 9% no 3º ano. Em seguida, em quinto lugar, está o paralelogramo qualquer (pois as outras figuras também são paralelogramos), escolhido por 1% dos estudantes do 1º ano e 5% entre os do 2º e 3º ano.

É importante destacar que um aluno do 1º e um do 2º ano construíram um triângulo como um não retângulo, e, um estudante do 2º ano desenhou um polígono irregular e um do 3º ano, uma circunferência. Tal fato reforça a necessidade de se realizar um estudo mais aprofundado, buscando compreender melhor o motivo dessas construções pelos alunos.

Na análise das justificativas dos estudantes, referente à segunda etapa do primeiro item, consideramos a categorização estabelecida por Câmara dos Santos (2001), que realizou uma pesquisa semelhante, desenvolvida com estudantes do sexto ano do Ensino Fundamental em uma escola pública da cidade do Recife – Pernambuco. Tal categorização classificou as respostas dos alunos em três esferas:

- Pragmática – na qual, os estudantes fazem uso das aparências e formas das figuras nas justificativas. Por exemplo, o discente pode afirmar que o retângulo e o quadrado são figuras diferentes pois, possuem tamanhos divergentes.
- Aplicativa – nessa categoria, os discentes utilizaram as definições das figuras nas explicações. Exemplo: ao construir um retângulo e um losango, o estudante pode argumentar que o retângulo possui quatro ângulos internos congruentes (retos), enquanto que o losango possui quatro lados congruentes.
- Relacional – na qual, os alunos empregam as propriedades das figuras desenhadas nas explicações. Por exemplo, ao construir novamente um retângulo e um losango, o aluno pode afirmar que são diferentes, pois enquanto as diagonais do losango são perpendiculares, as do retângulo são concorrentes.

No Gráfico 02 é apresentada a frequência dos tipos de respostas apresentadas pelos alunos no piloto, considerando a categoria de Câmara dos Santos (2001).

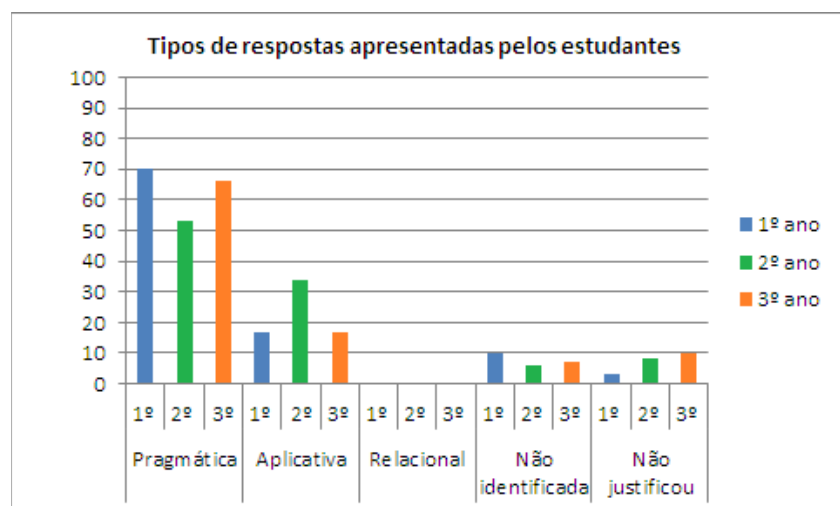


Gráfico 2. Tipos de justificativas apresentadas pelos discentes no que se refere à construção das figuras não retângulos.

Pelo Gráfico 02, observamos que a maioria dos estudantes, 63%, encontra-se na esfera pragmática, isto é, fizeram uso da aparência da figura para justificá-la como não retângulo, que é uma característica do nível básico de Van Hiele. Estão nessa fase 70% dos alunos do 1º ano, 53% do 2º e 66% dos discentes do 3º ano. Na esfera aplicativa estão 22,66% dos alunos investigados (17% do 1º ano, 34% do 2º e 17% do 3º ano), os quais fazem uso da definição da figura em sua explicitação. Não foi identificado nenhum estudante dos três anos escolares analisados na fase relacional, que se refere à aplicação das propriedades das figuras, que corresponde ao segundo nível vanhieliano. Tal dado é bastante preocupante, pois há um forte indício de que esses alunos não conseguem reconhecer os quadriláteros como detentores de propriedades.

Fazendo uma comparação entre os três anos escolares, no que se refere ao primeiro item do piloto, podemos observar que os alunos do 2º ano apresentaram um desempenho melhor do que os demais anos escolares do Ensino Médio. Confrontando, por exemplo, o segundo ano com o primeiro, é notório que há um avanço no pensamento geométrico dos alunos, muito embora, há ainda um considerável número de alunos no nível de visualização. Agora, se compararmos o 2º ano com o 3º, constatamos que há uma queda brusca na evolução do pensamento dos participantes. Esse fenômeno pode ter ocorrido pelo fato de que no segundo ano, os alunos tiveram contato com geometria e no primeiro ano não. Além disso, que no 3º ano é abordada geometria analítica, que geralmente é trabalhada com forte ênfase no aspecto algébrico. Outra possibilidade seria de esses alunos do 2º ano terem trabalhado com um professor que os levou à manipulação de figuras geométricas.

Considerações finais

Os resultados obtidos na pesquisa nos mostram que a maioria dos alunos do Ensino Médio se encontra no primeiro nível do modelo de Van-Hiele, a fase de visualização, na qual os estudantes consideram as figuras geométricas apenas considerando sua aparência. Dessa forma, esses alunos não conseguem reconhecer os quadriláteros como figuras portadoras de propriedades e nem ordená-las. Tal fato foi evidenciado tanto nas construções dos alunos, ao considerarem, por exemplo, o quadrado e o retângulo em formato não prototípico como um não retângulo, como nas suas justificativas, ao argumentarem que as tais figuras não são retângulos por que possuem formatos diferentes.

O caso dos estudantes que identificaram o retângulo não prototípico como um não retângulo pode ser uma forte evidência de que em sala de aula de Matemática é abordada, com grande ênfase, apenas a forma padrão desse tipo de quadrilátero, consequentemente há uma negligência com relação ao ensino da Geometria, especialmente com o estudo dos quadriláteros no Ensino Básico.

Essas dificuldades podem ser evidenciadas, por exemplo, nos casos dos alunos que construíram triângulos e uma circunferência, considerando tais figuras como um não retângulo de quatro lados. Dessa forma, parece que os alunos não compreendem o conceito de quadriláteros, que é um dado que nos chama muito a atenção, pois esses estudantes estarão em breve concluindo a Educação Básica, porém sem saber o que é um retângulo.

É importante destacar que também foram identificados, embora em número pequeno, alguns alunos no segundo nível da teoria vanhieliana, a fase de análise, na qual o aluno é capaz de reconhecer as propriedades das figuras. No entanto, eles ainda não conseguem estabelecer conexões entre essas propriedades. Todavia, esses dados também são preocupantes pois, segundo

o próprio Van-Hiele (1957), o ideal para alunos que estão concluindo o Ensino Médio é que estes sujeitos estejam no quarto nível do modelo, o de dedução informal.

Para tanto, diante do exposto, podemos observar que pouco mudou no que refere à aprendizagem dos conceitos geométricos pelos alunos no ensino da Matemática, apesar de todos os avanços com as pesquisas na área de Educação Matemática nos últimos anos. No caso desse estudo, os resultados evidenciam que os alunos do Ensino Médio apresentam várias dificuldades com a compreensão do conceito de quadriláteros, que é um conteúdo a ser sistematizado no sexto ano do Ensino Fundamental, segundo as orientações dos PCN.

Bibliografia e Referências

- Barbosa, C. P. (2011). *O pensamento geométrico em movimento: um estudo com professores que lecionam matemática nos anos iniciais do ensino fundamental de uma escola pública de Ouro Preto (MG)*. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, MG, Brasil.
- Brasil. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. (3a ed.). Brasília: MEC/SEF, Brasil.
- Câmara dos Santos, M. (2001, dezembro). Effets de l'utilisation du logiciel Cabri-Géomètre dans le développement Effets de l'utilisation du logiciel Cabri-Géomètre dans le développement de la pensée géométrique. *Anais do Congres International Cabri Géomètre*, Montreal, QC, Canadá, 2.
- Câmara dos Santos, M. (2009). O Cabri-Géomètre e o desenvolvimento do pensamento geométrico: o caso dos quadriláteros. In R. Borba, & G. Guimarães (Org.). *A Pesquisa em Educação Matemática: Repercussões na sala de aula* (Cap. 5. pp. 177-211). São Paulo: Cortez.
- Conceição, D. A., & Oliveira, K. P. (2014). *Uma análise do nível do conhecimento geométrico dos professores de matemática das escolas estaduais do município de São Vicente Ferrer*. Monografia de graduação, Universidade de Pernambuco, Nazaré da Mata, PE, Brasil.
- Oliveira, P. N., & Almeida, J. R. (2012, novembro). Sistema de Avaliação Educacional de Pernambuco – SAEPE: o que mostram os resultados no desempenho dos alunos em matemática em 2011. *Anais do Encontro Paraibano de Educação Matemática*, João Pessoa, PB, Brasil, 7.
- Oliveira, M. C., & Gazire, E. S. (2012). *Ressignificando a Geometria Plana no Ensino Médio, com o auxílio de Van Hiele*. (Cartilha). Belo Horizonte, MG: PUC-MG.
- Ontario. (2006). *Guide d'enseignement efficace des mathématiques de la 4e à la 6e année. Géométrie et sens de l'espace: Formes géométriques*. Toronto, le Ministère, Canadá.
- Salvador, R. M. C., Palau, P. H., Garrigues, J. M., Pascual, A. P., & Pérez, E. R. (1989). *Didáctica de la geometría: modelo Van Hiele*. València: Universitat de València.
- Secretaria de Educação do Estado de Pernambuco. (2010). *Boletim Pedagógico da Escola*. Juiz de Fora: Universidade Federal de Juiz de Fora.
- Usiskin, Z. (1994). Resolvendo os dilemas permanentes da geometria escolar. In M. M. Lindquist, & A. P. Shulte (Org.). *Aprendendo e ensinando Geometria* (Cap. 2. pp. 21-39). (H. H. Domingues, Trad.). São Paulo: Atual.
- Van de Walle, J. A. (2009). *Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula*. (6a ed.) Porto Alegre: Artmed.
- Van-Hiele, P. M. (1957). *El problema de la comprensión: en conexión con la comprensión de los escolares em el aprendizaje de la geometria*. Tese de doutorado, Matemáticas y Ciencias Naturales (MCN), Universidad Real de Utrecht, Utrecht, Holanda.

Comunicação e Resolução de Problemas utilizando o Modelo van Hiele para a exploração geométrica em sala de aula

Gilmara **Gomes** Meira
 Universidade Estadual da Paraíba, Campina Grande
 Brasil
gilmarameira@yahoo.com.br
 Kátia Maria de **Medeiros**
 Universidade Estadual da Paraíba
 Brasil
katiamedeirosuepb@gmail.com

Resumo

Este trabalho é parte de uma pesquisa de mestrado em fase da escrita dos estudos de caso, em que se destacam o desenvolvimento de três duplas identificados pelos pseudônimos: Anna e Cecília, Victoria e Alicia, Júlia e Amanda, alunas de uma turma de 3º ano do Ensino Médio. Com esta proposta, queremos saber como os alunos se comunicam para desenvolver problemas geométricos, de acordo com o Modelo de van Hiele e, assim, analisar os limites e as possibilidades de resolução de problemas que levam em consideração o referido Modelo. A pesquisa foi desenvolvida em quatro etapas, na última delas, propomos resolução de problemas com auxílio do Tangram com as seis alunas citadas. Houve uma considerável interação, entretanto, observamos constantes limitações em relação aos conhecimentos da Geometria e, conseqüentemente, na resolução dos problemas nos quais as alunas apresentaram dificuldades na interpretação e criação de estratégias.

Palavras-chaves: comunicação, resolução de problemas geométricos, Modelo van Hiele, ensino médio, sala de aula.

Introdução

Grande parte da sociedade vê a Matemática com um sentimento de medo, enxergando-a como fonte de problemas quando, na verdade, trata-se de uma ciência rica em padrões que geram, muitas vezes, soluções. Essa concepção agravou-se de forma a hoje estarmos permeados numa realidade delicada, pois observamos a desmotivação em relação à aprendizagem e a dificuldade em trabalhar quando, na maior parte das vezes, os alunos abominam a disciplina, substituindo a criticidade e reflexões por reclamações e sentimentos de incapacidade.

Pensando nisto, fazemos menção a uma estratégia que remete para o desenvolvimento de um ensino centrado na realidade cotidiana de estudantes de nossa região. Nossa principal hipótese é de que a partir de um trabalho que envolva Geometria por meio de elementos concretos, os alunos podem desenvolver mais positivamente a visualização e a habilidade de resolver problemas, conseqüência de um olhar mais crítico em relação à Matemática. Assim, o

público alvo no desenvolvimento da nossa pesquisa são estudantes do 3º Ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual do cariri paraibano.

Nosso estudo enfatiza a comunicação e resolução de problemas, através de materiais concretos manipuláveis utilizando o Modelo van Hiele para exploração da Geometria em sala de aula. Para tal, formulamos a seguinte indagação: *Como os alunos se comunicam ao desenvolverem atividades com resolução de problemas geométricos, segundo o Modelo van Hiele?* Com base nesse questionamento, elencamos alguns dos principais objetivos, visando, de modo geral, analisar os limites e as possibilidades de resolução de problemas que levam em consideração o nível de compreensão do Modelo van Hiele, com alunos do 3º Ano do Ensino Médio. Com este intuito, elencamos os seguintes objetivos específicos:

- Analisar a concepção da professora regente da disciplina em relação ao ensino e aprendizagem da Geometria e possíveis procedimentos didáticos utilizados em suas aulas;
- Identificar o nível, segundo o Modelo van Hiele, em que a turma se encontra com relação à Geometria;
- Utilizar testes de van Hiele para identificar o nível de compreensão geométrica de cada aluno;
- Propor atividades com a resolução de problemas geométricos utilizando materiais concretos, para a verificação do nível de pensamento geométrico das Diades;
- Analisar a forma que os alunos interagem e se comunicam no desenvolvimento das tarefas;
- Verificar o nível de desenvolvimento do pensamento geométrico ao final das atividades propostas.

Geometria: contexto e relevância

Infelizmente, a problemática em relação ao ensino e aprendizagem de Matemática já é algo que persiste há muito tempo em âmbito mundial e se agrava em países como o Brasil, no qual a educação ainda não foi plenamente democratizada. Os maus resultados em avaliações da disciplina, embora lamentáveis, já não são nenhuma novidade. De acordo com Rabelo e Gomes (2012) a situação é ainda mais drástica quando o assunto é Geometria, mais especificamente, nos itens de resolução de problemas. Um dos pontos em relação ao ensino e aprendizagem da Matemática, elencado no Relatório Nacional (DGIDC 2005), segundo abordagem de Rabelo e Gomes (2012, p. 7) é o de que é necessário *“focalizar esse processo de ensino/aprendizagem na resolução de problemas não rotineiros que permitam utilizar todas as competências adquiridas.”* De acordo com os autores, todos os anos letivos, escolas ou professores podem desenvolver o mesmo currículo de forma diferente, uma vez que, o professor é que é o artífice daquilo que será posto em prática.

A Geometria, entretanto, representa uma parte muito importante do conhecimento matemático e foi uma ciência construída culturalmente desde os primórdios da civilização humana, tendo conexões e aplicações estreitas com a nossa realidade física. Notamos que quando ela é trabalhada, normalmente é utilizada como pré-requisito para assuntos posteriores vistos na escola e de modo muito linear, convencional e, conseqüentemente, pouco significativo. Mediante isso, os alunos apresentam sérias dificuldades de visualizar, reconhecer e demonstrar. Assim, ensino e aprendizagem têm acontecido de forma descompactada, estando os aprendizes, muitas vezes, a generalizar casos particulares. Conforme Dreyfus e Hadas (1994) os alunos devem ser

levados a considerar diferentes casos para, posteriormente, decidir se a afirmação é verdadeira ou falsa. Os autores asseguram que o sucesso do aluno, frente ao que estuda permite reforçar a motivação para aprender de forma mais significativa. Segundo Leivas (2012) é necessário que a aprendizagem de Geometria esteja centrada em um processo que envolva visualização e manuseio de materiais concretos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997) sugerem a inclusão de alternativas relativas a metodologias para o ensino de Geometria, mas não apontam muitas possibilidades para que isto ocorra. Então, na busca de opções, encontramos nas recreações geométricas, quando convenientemente planejadas, recursos pedagógicos enriquecedores e eficazes na construção do conhecimento. Três aspectos podem justificar seu uso em sala de aula: o caráter lúdico, o desenvolvimento de técnicas intelectuais e a formação de relações sociais, que é de extrema importância para o desenvolvimento do aluno.

Portanto, as ideias geométricas são úteis para representar e resolver problemas em outras áreas da Matemática e até mesmo em situações do mundo real. Assim, seu ensino deveria estar integrado, sempre que possível, com outras áreas, pois as representações geométricas podem ajudar os alunos a dar sentido à área, às frações, aos histogramas e aos dados colhidos.

A Resolução de Problemas matemáticos na sala de aula

Em tratando da resolução de problemas, sabemos que, embora seja de um valor supremo para o trabalho com conteúdos matemáticos e desenvolvimento intelectual, muitos são os desafios para inseri-los nas aulas de Matemática, em consequência de muitos fatores. Entre estes se encontra o baixo nível de conhecimento matemático por grande parte dos alunos da escola pública brasileira, particularmente as da rede estadual e municipal. Na maior parte da vida escolar desses alunos, a atividade mais frequente ou a única foi, e possivelmente continua sendo, a resolução de exercícios, o que é insuficiente mediante as cobranças sociais atuais.

Na resolução de problemas, é muito importante a compreensão do texto, isto é, saber interpretar o enunciado e considerar possíveis estratégias para resolução, o que demanda um leque de conhecimentos prévios. Conforme salientam os Princípios e Normas para Matemática Escolar do NCTM (2008, p. 394) “*a predisposição para a resolução de problemas inclui confiança e vontade de empreender novas e difíceis tarefas*”. Esse fator é justificado pela necessidade de inovação, tendo em vista que, na maior parte das vezes, o ritmo e metodologia em algumas aulas de Matemática têm causado acomodação e rejeição com relação ao estudo da disciplina.

A ideia de que o professor explica o conteúdo e o aluno exercita a aplicação do mesmo, data desde o século XIX. D’Ambrósio (2008) salienta que, embora haja tantos fundamentos para o legítimo uso da resolução de problemas, essa ideia equivocada permeia, há mais de 150 anos, o ensino da Matemática. Sabemos que a influência de George Pólya foi primorosa para o desenvolvimento da resolução de problemas na sala de aula, pois sua proposta era de um ensino que criasse oportunidades para que os alunos refletissem, pensassem matematicamente e construíssem o conhecimento.

Com base nos Princípios e Normas para Matemática Escolar do NCTM (2008), para que aconteça a resolução de problemas com sucesso, é indispensável o conhecimento de conteúdos matemáticos, de estratégias de resolução de problemas, a capacidade de auto regulação, e uma predisposição para a colocação e resolução de problema. Nesse sentido, os professores são muito

exigidos, por serem os responsáveis em desenvolver meios que influenciem no desenvolvimento do conhecimento e estratégias matemáticas, assim podendo praticar uma variedade de heurísticas.

De acordo com Medeiros (2001), um problema para receber essa denominação precisa, de fato, ser desafiador para o aluno, levando-o a pensar, argumentar, buscar caminhos de solução o que, com certeza, não é uma tarefa imediata. Segundo a autora, os exercícios, considerados problemas fechados, são muito tradicionais nas aulas de Matemática, sendo inseridos no processo ensino-aprendizagem de forma que limita a criatividade dos alunos, pelo modo como são apresentados, ou seja, apresenta um contexto muito limitado, palavras que dizem de imediato a operação a ser utilizada e quase sempre são propostos a partir de um conteúdo que foi anteriormente exposto. Enquanto os problemas bem elaborados, chamados de problemas abertos, propiciam que os alunos pensem não de forma linear, mas em rede e com um olhar crítico e reflexivo. Ainda conforme a autora, esses tipos de problemas podem ser desenvolvidos em grupos, o que pode diminuir o medo e aumentar as chances de produções mais eficientes.

Problemas mais elaborados, que envolvem a realidade do aluno, que o façam pensar mais criteriosamente, possivelmente despertam um maior interesse que, por sua vez, gera maior entusiasmo despertando, com isso, a criatividade e, provavelmente, contribuindo para uma aprendizagem mais dinâmica e significativa. Gontijo (2006) ressalta que os problemas que motivam para criatividade são aqueles que levam os alunos a raciocinar.

O Modelo van Hiele e o uso de materiais manipuláveis no estudo da Geometria

O Modelo van Hiele, idealizado pelos pesquisadores holandeses Dina van Hiele Geldof e Pierre Marie van Hiele, tem por principal função orientar a formação e, assim, avaliar as habilidades do aluno. Em Geometria, o Modelo é composto por cinco níveis de compreensão, os quais, segundo Crowley (1994) descrevem características do processo de pensamento.

As ideias preliminares desse Modelo estabelecem que os alunos avancem a partir de uma sequência de níveis de interpretações dos conceitos. Assim, os avanços de um nível para outro deverão ocorrer por meio de um desenvolvimento planejado de atividades, uma vez que o progresso dos níveis de compreensão geométrica depende, mais especificamente, de uma aprendizagem adequada à experiência do aluno.

O *Nível 0* (zero) ou 1º nível, denominado “visualização” é o mais elementar, nesse nível os alunos simplesmente percebem o espaço como algo em torno deles. Aqui muitos alunos já são capazes de comparar e nomear figuras geométricas, apenas por sua aparência. Já o *Nível 1* (um), chamado Análise, começa com uma análise dos conceitos geométricos, o reconhecimento das propriedades e o uso dessas propriedades para resolver problemas. Por exemplo, a descrição de um paralelogramo a partir de suas propriedades. Mas os alunos, nesse estágio, ainda não têm maturidade suficiente para estabelecer relações entre propriedades e não entendem definições.

No *Nível 2* (dois), chamado de Dedução Informal, os alunos iniciam um maior grau de abstração, pois já conseguirão estabelecer inter-relações de propriedades de figuras e reconhecer as classes. No entanto, formulam argumentos informais, mesmo não compreendendo o significado das definições ou axiomas. O *Nível 3* (três) denominado Dedução, é compreendido como o momento no qual os alunos começam a compreender o processo dedutivo das demonstrações, sendo a dedução uma maneira de estabelecer a teoria geométrica no contexto de um sistema axiomático. Enquanto o *Nível 4* (quatro), do rigor, é o momento no qual os sujeitos

apresentam maior capacidade de compreender demonstrações formais, como por exemplo, das Geometrias não-euclidianas. Para Pierre Van Hiele os três primeiros níveis merecem maior atenção.

De acordo com Nasser e Sant'anna (2010), a melhor forma de reconhecer em que nível o discente está raciocinando é através da observação direta do seu modo de raciocinar e de suas estratégias ao resolver os problemas. Para tanto, recomendam atividades que levem os estudantes a pensar, desenvolver estratégias e mostrar suas respostas como melhor alternativa na identificação do nível de Van Hiele, sob o qual eles estão raciocinando. Com isso, o professor deve estar muito atentamente observando tudo que eles falam e desenvolvem.

A Matemática em meio à sua dinâmica cumpre o papel de possibilitar a reflexão sobre as representações que são possíveis. Os artefatos podem ser entendidos e utilizados na Educação Matemática também como artefatos concretos, a exemplo dos materiais didáticos estruturados (Tangram, Material Dourado, Blocos Lógicos, Ábaco, etc.), materiais de desenho, de medidas, jogos e desafios matemáticos, entre outros.

Veloso, Bastos e Figueirinhas (2009) apontam a real importância de proporcionar experiências com o uso de materiais manipuláveis, os quais, também precisam estar de acordo com o nível de escolaridade e a idade dos alunos.

De acordo com Smole e Diniz (2001) é necessário que o professor apresente atividades inovadoras que estimulem os alunos, afirmando que a prática das atividades em grupos é de extrema importância, pois no momento em que há a interação social o aluno sente-se na obrigação de ser coerente e a comunicação entre o próprio grupo é motivo de aprendizagem. De acordo com Fonseca (2009) a comunicação é um meio no qual há uma articulação, organização e consolidação do pensamento. Com base nisso, a autora esclarece que o compartilhar de ideias se dá de vários modos e pode ser oralmente ou por escrito, a partir de gestos, desenhos, objetos, e símbolos. Assim, numa aula de Matemática os alunos podem estar em constante comunicação, mesmo que essa não se dê de modo formal. Todas as experiências são válidas e, por essa razão, devem ser muito bem aproveitadas para, a partir dos processos de interação e ação, os alunos se adequarem a uma linguagem mais precisa do ponto de vista matemático.

Portanto, inseridos numa realidade que se moderniza a passos largos, se faz necessária uma reflexão sobre a prática letiva e uma possível renovação da mesma, na tentativa de suprir algumas necessidades. Dessa forma, nos alunos é preciso despertar uma nova visão em relação ao papel da Matemática e de suas especificidades a partir de um pensamento formal e reflexivo.

Metodologia

Com o desenvolvimento da Educação Matemática, nas últimas décadas, são apontadas uma série de contribuições favoráveis ao ensino e aprendizagem valorizando atitudes mobilizadoras em sala de aula de Matemática, nas quais o professor tem a função de mediador, enquanto os alunos devem ser os agentes principais das ações. Com base nisso, nossa pesquisa utiliza, também, estudos de caso, que são muito comuns em pesquisas dessa natureza e que, de acordo com Ponte (2006), acrescenta conhecimento ao conhecimento já existente, na busca de compreender em profundidade o como e os porquês dos fatos. Ao mesmo tempo, o autor salienta que o estudo de caso é de uma eficiência singular para investigar questões de práticas e aprendizagem dos alunos.

Nosso estudo enfatiza a comunicação e resolução de problemas, por meio de materiais concretos manipuláveis utilizando o Modelo van Hiele para exploração da Geometria em sala de aula.

O campo de pesquisa foi uma escola pública estadual, localizada na cidade de Cabaceiras, no cariri paraibano, e os participantes para realização da mesma foram alunos de uma turma de 3º Ano do Ensino Médio. Nossa pesquisa tem essência diretamente de ordem qualitativa, que é uma das mais eficientes formas de capturar a realidade empírica, exigindo grande seriedade no que se observa e como observar. Esse tipo de pesquisa assume diversas formas e é conduzida em múltiplos contextos. De acordo com Bogdan e Biklen (1994) as investigações qualitativas privilegiam, essencialmente, a compreensão dos comportamentos a partir da perspectiva dos sujeitos de investigação. Além disso, nosso principal interesse não são apenas os resultados, mas, sobretudo, os processos de desenvolvimento, o que segundo os autores, é uma característica forte da pesquisa qualitativa. Concomitante a isto, o desenvolvimento de todos os processos que envolvem a pesquisa assume uma ordem descritiva para demonstração dos fatos.

Antes do planejamento formal das tarefas para identificação do nível segundo o Modelo van Hiele, em que a turma se encontra, realizamos uma entrevista semiestruturada, com a professora regente identificada pelo pseudônimo *Rita*, na intenção de compreender experiências e concepções, bem como, para termos conhecimento acerca do perfil dos alunos para o planejamento das tarefas.

Pensando nisso, na primeira parte da pesquisa em sala de aula, planejamos um conjunto de atividades para serem desenvolvidas em Díades e ganharmos subsídios para identificarmos o nível de pensamento geométrico, segundo o Modelo van Hiele, no qual a turma se encontrava. Após essa etapa, realizamos três testes de van Hiele, na proposta de Nasser e Sant'anna (2010) para identificação do nível individual de pensamento geométrico dos alunos.

Sabemos da relevância da resolução de problemas nesta e em outras situações, porém para que ela aconteça de uma forma coerente é necessário ter o mínimo de conhecimento prévio e interpretação. Como a nossa proposta de pesquisa envolve a resolução de problemas, o uso de materiais didáticos manipuláveis e a comunicação entre os alunos, na última etapa, consideramos mais pertinente, baseado em nossos objetivos, analisar o desenvolvimento das seis alunas que apresentaram melhor desempenho nos testes, pois entendemos que a comunicação entre ambas, na formação de três Díades, seria mais pertinente para responder nossa questão diretriz: *Como os alunos se comunicam ao desenvolverem atividades com resolução de problemas geométricos, segundo o Modelo van Hiele?*

Para organização de atividades, nos apoiamos em Nasser e Sant'anna (2010) com suas propostas de trabalho do Projeto Fundação da UFRJ e na proposta de Oliveira e Gazire (2012) que apresentam módulos de atividades que têm como referência o trabalho de alguns dos mais importantes pesquisadores da teoria de van Hiele.

No decorrer de toda a pesquisa fizemos uma análise global das tarefas desenvolvidas em sala de aula, tendo os alunos como participantes centrais, que são observados em sua totalidade, dado que o objetivo central da nossa proposta é analisar os limites e as possibilidades de resolução de problemas que levam em consideração o nível de compreensão segundo o Modelo van Hiele, com alunos do 3º Ano do Ensino Médio. Dessa forma, a comunicação oral e/ou escrita, desempenho, interação e criatividade, são fatores preponderantes na nossa análise. Para acompanhar de uma forma mais adequada a comunicação das Díades, usamos aparelho de áudio

para as gravações e a observação direta e de registros escritos. O desenvolvimento específico das três Díades na resolução dos problemas desenvolvidos em quatro Episódios, estão organizadas na pesquisa de dissertação, em três estudos de caso, nos quais as alunas estão identificadas por: *Caso Ana e Cecília; Caso Vitória e Alice e; Caso Júlia e Amanda.*

O caso Ana e Cecília em dois Episódios: ações e resultados

Ana e Cecília são duas alunas que têm 17 e 18 anos de idade e cursam o 3º Ano do Ensino Médio em uma Escola Estadual, no município de Cabaceiras – Paraíba/BRASIL. Ambas habitam nesta cidade e sempre estudaram em escolas públicas deste município.

Em três dos quatro Episódios com resolução de problemas, usamos o Tangram como material manipulável auxiliar. Com esse material manipulável, as alunas trabalharam em Díade e apresentaram muitas fragilidades com relação a conhecimentos prévios da Geometria o que, por vezes, dificultou a resolução dos problemas propostos.

No primeiro Episódio nosso objetivo foi compreender se as alunas reconheciam polígonos e o conceito de congruência. Elas apresentaram muitas limitações na resolução, pois demonstravam não reconhecer definições e/ou propriedades e conceitos. Por exemplo, com relação ao paralelogramo, afirmaram que o mesmo era um trapézio, aspecto que nos faz identificar que não reconhecem por sua forma e nem por suas propriedades e definição. Esse é um aspecto preocupante, pois muitos alunos de escolas públicas estão concluindo o Ensino Médio com uma base de conhecimento muito aquém do que é proposto pelas Orientações Curriculares Nacionais para o Ensino de Matemática (BRASIL, 2006) e na maioria das vezes não reconhece propriedades, apenas relaciona algumas figuras com objetos que remetem ao cotidiano, consequentemente não passando do primeiro nível de pensamento geométrico segundo o Modelo van Hiele, de acordo com Crowley (1994).

Começamos com esse problema que consideramos mais básico e as alunas podiam relacionar o contexto do que era pedido, ao material, respondendo numa folha de papel A4. O problema foi o seguinte - ***As peças do Tangram: o que disse Mario?:***

A professora de Matemática levou para sua aula um Tangram feito em madeira, sem explicar o nome de cada peça que o formava. Mônica já tinha visto e estudado um pouco com o material manipulável em sua antiga escola. Assim, ela propôs que seu colega Mário falasse o nome dos polígonos que formam o Tangram. Mário, se sentindo desafiado, insistiu em responder detalhadamente. Se Mário respondeu corretamente, quais foram suas respostas? Que peças Mário apontou como congruentes, por quê?

A Díade lê individualmente o problema e Ana dialoga com Cecília sobre a situação, na busca de soluções. Elas apresentaram muitas dúvidas e se comunicam oralmente de forma demasiada, como vemos no diálogo abaixo:

Ana: Porque assim, a professora de Mônica levou o Tangram e não disse o nome das peças, aí nisso ela pede o nome das peças, que a única que eu não sei é essa (apontando para o paralelogramo)!

Cecília: Ah, é um trapézio!

Ana: É um triângulo, dois, três... São cinco triângulos!

Cecília: Então as peças são cinco triângulos isósceles, quadrado e trapézio. Formando então um quadrado grande!

Com relação ao conceito de congruência, as alunas pareciam lembrar que era “algo” relacionado a lados e ângulos, porém dialogam sem conhecimento formal do conceito:

Ana: *Aí ele quer saber quais são os nomes das peças e quais são congruentes e porque são congruentes. Tu lembra o que é congruente?*

Cecília: *Congruente é aquela que não forma um ângulo de 90°? .*

Ana: *Pensa! O que é côngruo?*

Cecília: *Ou tem a ver com os ângulos ou com as linhas!*

Ana: *Que peças Mario apontou como congruentes? Pode ser o trapézio e os triângulos!*

Cecília: *Agora por quê?*

Ana: *Acho que tem que olhar para os lados, será que tem a ver com lados?*

Cecília: *Não, acho que não!*

Ana: *Não sei o sentido de congruentes!*

Nesse problema, observamos que as alunas se esforçavam em busca de soluções coerentes, mas o maior obstáculo de encontra-las estava na fragilidade de conhecimentos prévios.

Conforme destaca Bishop e Goffree (1986) quando duas pessoas concordam com a validade de um conceito, resolução ou conexões é porque partilham o significado desse conhecimento. Assim, entendemos que as alunas não conseguem responder eficazmente o problema, pois não compreendem o significado de congruências e passam por uma situação de conversação e comunicação, ou seja, um diálogo na perspectiva de Alro e Skovsmose (2010).

No terceiro Episódio, com o objetivo de identificar como as Díades desenvolviam seu raciocínio geométrico baseando-se na ideia de área de figuras planas e relações entre figuras, propomos o seguinte problema - ***Cálculo de áreas: os cálculos de Pedrinho:***

Se Pedrinho tomou como unidade de medida no cálculo das áreas das demais figuras, apenas o triângulo pequeno e o quadrado, como ele denotou a área do triângulo médio, do paralelogramo e do quadrado original (quadrado formato pelas sete peças)?

Ana e Cecília lendo o problema perceberam que este apresentava um grau de dificuldade superior ao do Episódio anterior, pois além de peças específicas envolvia também o conceito de área. Para solucionar, elas começam separando as peças, e estavam com o Tangram industrializado, folhas de papel A4, e lápis.

Elas começam buscando interpretar o problema e referem:

Ana: Nesse caso será usado apenas o triângulo pequeno e o quadrado!

Cecília: Precisamos saber a área do triângulo médio, do paralelogramo e também do quadrado grande.

Ana: Aqui a gente ver que os dois triângulos pequenos formam o paralelogramo. Eh, então a área do paralelogramo vai ser duas vezes a área do triângulo, né assim?!

Observamos que, antes de solucionar, as alunas utilizam uma estratégia que advém da proposta de Pólya, quando especifica que para resolver um problema é necessário fazer a interpretação e depois elaborar um plano para, posteriormente, executá-lo e validá-lo. Nesse sentido, as alunas passaram a usar o conhecimento que tinham sobre áreas, buscando pôr em prática na solução do problema proposto. Dessa forma, elas buscaram resolver a situação, a partir das fórmulas para o cálculo de área das figuras especificadas (quadrado e triângulo). Para isso, elas fizeram explicações praticamente baseadas, uma vez se voltam para o material manipulável especificado.

Ao mesmo tempo em que elas se comunicavam explicando o desenvolvimento, iam escrevendo o procedimento utilizado.

Cecília: Base vezes altura dividido por dois.

Ana: Eh, então a gente tem que colocar assim: duas vezes a base vezes a altura e dividido por dois (escrevendo $2 \cdot (b \cdot h)/2$). Certo?

Cecília: Eh! Do mesmo jeito a área do triângulo médio que se a gente olhar, é o mesmo que a área do triângulo pequeno mais a metade da área do quadrado. Então assim, como a gente já sabe que a área do triângulo é base vezes altura dividido por dois e a área do quadrado é lado vezes lado ou L^2 . Logo a área do triângulo médio vai ser base vezes altura dividido por dois mais L^2 dividido por dois. Tu entendeu?

Ana: Entendi, vou escrever assim: $(b \cdot h)$ dividido por dois mais L^2 dividido por dois $[(b \cdot h)/2] + [L^2/2]$.

Considerando esse problema mais complexo em relação aos trabalhados nos Episódios anteriores, Ana e Cecília apresentaram maior comunicação oral, fazendo relação entre áreas e peças e interligando as informações na busca de soluções. A partir das áreas específicas, Cecília faz o cálculo da área total do quadrado formado pelas sete peças do Tangram, compreendendo que é a junção de todas as áreas dos polígonos que o compõe.

Cecília: Já o quadrado original é composto por dois triângulos grandes que como podemos ver, a área dele é a mesma coisa que duas vezes a área do triângulo pequeno mais a área do quadrado que são as peças que forma. Também do paralelogramo, que a área é a mesma de dois triângulos pequenos. Do triângulo médio com a área igual do triângulo pequeno mais a metade da do quadrado. Vai anotando aí! Também do quadrado com área igual a L^2 e dos dois triângulos pequenos. Agora vamos organizar...

Ana: Então, dizemos que o quadrado é formado por essas áreas juntas!

Cecília: Tá! Então podemos anotar que a área do quadrado original é a soma da área dos dois triângulos grandes com a do triângulo médio, do quadrado e também dos dois triângulos pequenos e do paralelogramo.

Ana e Cecília dialogam, interagem e questionam, porém chegam ao mesmo consenso tentando compreender as áreas de cada um dos polígonos, usando apenas o quadrado e o triângulo menor como referência para o cálculo dos demais. Elas apresentam as fórmulas específicas para o cálculo dessas áreas e as relacionam para encontrar soluções.

Considerações finais

Entendemos que o cruzamento de ideias e pontos de vista no trabalho desenvolvido em pequenos grupos leva o aluno a refletir sobre seus argumentos e interpretações relacionados ao contexto em questão, podendo assim ampliar os conhecimentos, desenvolvendo novas estratégias

e maiores significados, pois ambos estão a partir do diálogo ativamente envolvidos na tarefa. Por esta razão, torna-se muito relevante que nós, professores, possamos incentivar os alunos no desenvolvimento adequado das tarefas, fazendo-os entender quão interessante pode ser a Matemática a fim de terminarem com um sentimento de satisfação.

Mediante essa situação que as alunas consideravam como “nova”, pudemos perceber que apresentavam um relevante grau de empolgação, o que, sem dúvida é primordial para o sucesso do que é desenvolvido. Analisamos ainda, que a maioria dos alunos, mesmo ao término do Ensino Médio, apresentam muitas dúvidas ao responder questões, testes ou problemas referentes à Geometria, pois não reconhecem conceitos básicos. Consequentemente, chegam no máximo ao nível 0 (zero) de acordo com o Modelo van Hiele.

Portanto, esse fator nos fez refletir, ainda mais, acerca da qualidade do ensino de Geometria, que deve sempre acontecer de forma adequada, propiciando a criticidade dos alunos, de modo que possam argumentar, levantar hipóteses, e a partir disso, construir o conhecimento o qual deve estar agregado com as diversas áreas da própria Matemática, sobretudo, na resolução de problemas.

Agradecimento

Agradecemos à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, no âmbito do Projeto *Investigando a Formulação e a Resolução de Problemas Matemáticos na Sala de Aula: Explorando Conexões entre Escola e Universidade*, do Programa Observatório da Educação (Edital 049/2012/CAPES/INEP), que financiou passagens e diárias da autora.

Bibliografia e referências

- Alro, H.; Skovsmose, O. (2010) *Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática*. Tradução de Orlando Figueiredo. 2 ed. Belo Horizonte: Autêntica.
- Bishop, A. J.; Goffree, F. (1986). *Perspectives on Mathematics Education (Cap. 8)*. Org. B. Christiansen, A. G. Howson e M. Otte e publicado pela editora D. Reidel. Tradução: José Manuel Varandas, Hélia Oliveira e João Pedro da Ponte.
- Boavida, A., Paiva, A. L., Cebola, G. & Pimentel T. (2008). Resolução de Problemas em Matemática. In: A experiência matemática no ensino básico. Direção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular. Lisboa.
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Tradução Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora.
- Brasil. (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: Ministério de Educação/ Secretaria de Educação Fundamental.
- Brasil. (2006). *Orientações Curriculares Nacionais Para o Ensino Médio: Matemática*. Ciência da Natureza e suas Tecnologias. Brasília: Ministério de Educação/ Secretaria de Educação Fundamental.
- Crowley, M. L. (1994). *O Modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico*. In: Lindquist, M. M. e Shulte, A. P. (org) *Ensinando e Aprendendo Geometria*. Tradução: Hygino H. Domingues. Ed. Atual. São Paulo, p. 1-19.
- D' Ambrósio, B. (2008). *A Evolução da Resolução de Problemas no Currículo Matemático*. In Anais do I Seminário em Resolução de Problemas, São Paulo: UNESP.

- Dreyfus T., & Hadas, N. (1994). *Euclides deve permanecer – e até ser ensinado*. In: Lindquist, M. M. e Shulte, A. P. (org) *Ensinando e Aprendendo Geometria*. Tradução: Hygino H. Domingues. Ed. Atual. São Paulo.
- Fonseca, L. (2009). *Comunicação Matemática na sala de aula - Episódios do 1º ciclo do Ensino Básico*. In: *Educação Matemática*, nº 103, ESE/IP de Viana do Castelo.
- Gontijo, C.H. (2006). *Resolução e Formulação de Problemas: caminhos para o desenvolvimento da criatividade em Matemática*. In *Anais do SIPEMAT*. Recife, Programa de Pós-Graduação em Educação-Centro de Educação – Universidade Federal de Pernambuco, 11p.
- Leivas, J. C. P. (2012). *Percepção e coordenação visual e motora no desenvolvimento do pensamento geométrico* In: *Educação e Matemática: Revista da Associação de Professores de Matemática*. Lisboa. (p. 27-32) ISSN 0871-7222.
- Medeiros, K.M. (2001). *O contrato didático e a resolução de problemas matemáticos em sala de aula*. In *Educação Matemática em Revista*, nº 9/10.SP, SBEM.
- Nasser, L., & Sant'anna, N. (2010). *Geometria Segundo a Teoria de Van Hiele*. 2 ed. Rev. Rio de Janeiro: IM/UFRJ.
- Oliveira, M. C., & Gazire, E. S. (2012). *Ressignificando a Geometria plana no Ensino Médio, com auxílio de van Hiele*. Belo Horizonte. Disponível em:
http://www.pucminas.br/imagedb/documento/DOC_DSC_NOME_ARQUI20121128150635.pdf?PHPSESSID=fdb6d12870c8aaf4688b74f0ad0dd734 Acessado em: 14 de maio de 2013.
- Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, 25, p. 105-132.
- Princípios e normas para matemática escolar do NCTM. (2008). *Associação dos Professores de Matemática - APM*. Tradução: Madga Melo. Lisboa. ISBN: 978-972-8768-24-9.
- Rabelo, P. C., & Gomes, A. (2012). *Reorganização Curricular da Geometria: Uma Experiência no 6º ano de escolaridade*. In: *Quadrante Revista de Investigação em Educação Matemática*. Volume XXI/ Nº 1/2012. p. 3-27.
- Smole, K.S., & Diniz, M.I. (2001). *Ler, Escrever e Resolver Problemas*. São Paulo: Artmed.
- Veloso, E., Bastos, R., & Figueirinhas. (2009) *S. Isometrias e Simetrias com materiais manipuláveis*. In. *Educação e Matemática – Revista da Associação de Professores de Matemática – Ed. 101 APM*.

El espacio social de la clase como regulador del trabajo geométrico. Estudio de casos en la escuela secundaria

Ana María **Mántica**

Facultad de Humanidades y Ciencias, Universidad Nacional del Litoral

Argentina

amantica@fhuc.unl.edu.ar

Resumen

Presentamos un estudio de la actividad de tres grupos de estudiantes de una escuela secundaria, sobre una secuencia enmarcada en el copiado de figuras, cuyo propósito es que conjeturen, validen y enuncien los criterios de congruencia de triángulos. Se analizan las interacciones con pares y las intervenciones del docente considerando los mensajes que contienen tres lados, dos lados y un ángulo o, un lado y dos o tres ángulos; a partir de registros realizados por un observador no participante, artefactos escritos y grabaciones en audio y video. En algunos casos las constataciones empíricas les bastan, a los estudiantes, para afirmar sus conjeturas, en otros utilizan lo experimental, propiedades conocidas e incluso contraejemplos para fundamentar sus afirmaciones, es decir emplean algunas reglas del debate matemático. El docente, tanto responsabiliza al alumno de sus conjeturas, como omite los potenciales problemas que surgen de las formulaciones de los estudiantes.

Palabras clave: geometría, conjeturas, validación, congruencia de triángulos, interacciones

Introducción

El presente trabajo se enmarca en un proyecto de investigación cuyo objetivo es elaborar, implementar y analizar secuencias didácticas, en distintos niveles del sistema educativo, en las que los estudiantes formulen conjeturas y las validen en interacción con sus pares.

Se presenta el estudio de una secuencia realizada en una escuela secundaria de Santa Fe, enmarcada en una propuesta de dictado de figuras, en la que se pretende que los estudiantes conjeturen, validen y enuncien los criterios de congruencia de triángulos. Previamente realizaron una tarea que permitió enunciar la propiedad de desigualdad triangular de los lados de un triángulo.

Se conforman 8 grupos de 5 alumnos cada uno y se les solicita que dibujen en una hoja blanca un triángulo, y que redacten un mensaje para que el grupo receptor pueda construir uno igual.

El análisis que se presenta en este trabajo tiene que ver con el modo que los estudiantes se convencen y convencen a los demás de las conjeturas que formulan.

Características del estudio

Se presenta un estudio de tres casos. Según Cohen y Manion (1990) la mayoría de los estudios en educación son descriptivos, en los que se cuenta lo que ya ha ocurrido, a partir de

observaciones a individuos, grupos, instituciones y materiales con el fin de describir, comparar, contrastar, analizar e interpretar las entidades y los acontecimientos que constituyen sus diversos campos de investigación. Se trata de describir como proceden los estudiantes al resolver una tarea, durante tres jornadas de trabajo. El propósito de la secuencia es que, como productores de conocimientos, enuncien los criterios de congruencia de triángulos.

La recolección de datos se realiza a partir del registro de un observador no participante. En el estudio de estos casos se observa a un grupo de estudiantes de segundo año, en particular se presentan en este trabajo tres grupos. El observador realiza un registro etnográfico de lo acontecido y además emplea grabadores de audio y cámara de video, elementos que se utilizan para reconstruir lo ocurrido en la clase, además de lo escrito en las carpetas y afiches. En este caso particular se registra la puesta en común de cada tarea, por lo que no se cuenta con la discusión que realizan los integrantes de los grupos para arribar a las primeras conclusiones o los acuerdos que realizan para redactar el mensaje que entregarán al otro grupo.

La secuencia fue acordada con el docente del curso, como también el modo de trabajo con el objetivo que los estudiantes sean productores de conocimientos a partir de la formulación y validación de sus conjeturas.

La tarea que se aborda en este estudio tiene como objetivo que los alumnos puedan determinar cuáles son las condiciones necesarias para construir un triángulo. Se solicita a cada grupo que dibuje en una hoja blanca un triángulo, y que redacte un mensaje para que el grupo receptor pueda construir un triángulo igual. Se intercambian los mensajes y se le entrega a cada grupo una hoja de papel de calcar para que realice el dibujo según las condiciones expresadas en el mensaje y luego lo devuelva al grupo emisor para que verifique si la construcción realizada es correcta. En esta instancia no hay restricciones para la formulación del mensaje. En el caso de que en los mensajes no se proponga algunas de estas posibilidades: tres lados, dos lados o un ángulo y un lado y dos ángulos, el docente planteará una actividad de modo que pueda discutirse la que falta y determinar cuáles son las adecuadas. En función de lo efectuado en la primera construcción, en la que contaban con longitud de los tres lados, se establece que el nuevo mensaje que formule el grupo emisor no puede contener la longitud de los tres lados.

Marco de referencia

Se considera en este apartado los referentes teóricos que aportan al análisis, que se presenta en esta propuesta, en función de lo efectuado por los grupos seleccionados.

Particularidades del trabajo en geometría

Laborde y Vergnaud (1997) plantean que una característica esencial de la enseñanza de la geometría es el lugar acordado a las representaciones gráficas en la enseñanza de los objetos geométricos y en la manipulación, por parte de los alumnos, de las mismas. Algunos de los problemas de interpretación por parte de los alumnos al utilizar en la enseñanza los dibujos como modelos de las figuras es el no reconocimiento del carácter invariable de la figura cuando se pone el dibujo en distintas posiciones, o la utilización de ejemplos prototípicos y que los alumnos poseen una visión muy empirista de la geometría, basada en el dominio de la percepción.

Broitman e Itzcovich (2003) sostienen que hay distintos tipos de problemas geométricos según los conocimientos que involucran, algunos se resuelven con conocimientos espaciales, ligados a desplazamientos efectivos en el espacio físico, que se adquieren de manera espontánea y otros que también incluyen conocimientos espaciales pero no son de desarrollo espontáneo.

sino que involucran conocimientos que requieren niveles más complejos de conceptualización, representación y adquisición. En los primeros años de la escuela secundaria se debe apuntar a trabajar en un modo de pensar propio del saber geométrico, considerando que este “modo de pensar” implica apoyarse en propiedades de los objetos geométricos para poder anticipar relaciones no conocidas o inferir nuevas propiedades. Esto supone demostrar la validez de una afirmación a través de argumentos que en algunos casos se oponen a la percepción o la medida.

Formulación y validación de propiedades

Sadovsky (2005) expresa que pensar la clase como lugar donde se realice actividad matemática requiere plantear propuestas para que los estudiantes sean desafiados a formular conjeturas, ensayar formas de validarlas, producir argumentos deductivos, arriesgar respuestas que contribuyan a arribar a las resoluciones que se buscan, reformular y reorganizar los conocimientos generados a la luz de los nuevos que producen, elaborar otras herramientas y también determinar sus limitaciones. Esto implica que los estudiantes tomen como objeto de reflexión sus resoluciones, que puedan producir teorías a partir de ellas, que puedan volver hacia atrás y revisar y modificar cuestiones elaboradas, que tomen conciencia de la provisoriedad de sus aprendizajes. Señala además la importancia de las decisiones que el docente toma sobre la marcha, en particular el valor y la cabida que le otorga a las cuestiones que aparecen con las conjeturas formuladas por los estudiantes y cómo reconstruye a partir de esto una fundamentación matemática con los conocimientos que los mismos disponen.

Itzcovich (2005) plantea que introducir a los estudiantes en el trabajo deductivo supone para el docente tener resueltos aspectos didácticos y matemáticos para, en consecuencia, poder realizar una toma de decisiones a la hora de gestionar una demostración en la clase, articular las producciones de los alumnos, sus interrogantes, simultáneamente con su idea de presentar el conocimiento matemático en la clase y que no se contradiga con su concepción de rigor. El autor explicita que asumir como práctica geométrica en el aula la puesta en juego de las propiedades de los objetos geométricos, y que la producción de argumentos esté ligada al uso de propiedades, genera para el docente, la dificultad de decidir cuáles son los conocimientos que se admiten como punto de partida para que el estudiante pueda elaborar una argumentación deductiva.

Itzcovich (2007) sostiene que un alumno debe ser capaz de argumentar, fundamentar sus conclusiones, considerar los juicios de sus compañeros para aceptarlos o rechazarlos, hacer el esfuerzo por comprender la demostración realizada por otro o proponer una demostración. El modo que ingresen a esta manera de trabajo es ofrecerles situaciones adecuadas a su nivel de escolaridad, que les muestren la insuficiencia de lo experimental como modo de validación. Sostiene que se deben proponer problemas que pongan al alumno en interacción con objetos que no pertenezcan al espacio físico sino a un espacio conceptualizado, que pongan en juego las propiedades de los objetos geométricos.

Responsabilidad de alumnos y docente en la actividad matemática

Quaranta y Wolman (2003) se cuestionan sobre cuál es el sentido de las discusiones en la clase de matemática y sostienen que los intercambios con los compañeros y con el docente comprenden explicitaciones, confrontaciones y justificaciones. Estas actividades reflexivas enriquecen futuras resoluciones e irán construyendo el camino de la validación del trabajo matemático, aunque en general no siguen las reglas del debate matemático. La “resolución conjunta” entre los alumnos requiere tener en cuenta lo que dice el otro, las sugerencias, el explicitar y justificar las elecciones que se hacen, las que provocan intercambios que posibilitan

tomar conciencia sobre aspectos no considerados, descubrir nuevos, cuestionar otros; en consecuencia las puestas en común abren un espacio para el progreso de la comprensión del conocimiento en cuestión.

Chemello y Crippa (2011) sostienen que en la mayoría de las clases es el docente el responsable de establecer la legitimidad y validez del conocimiento que se produce en el aula, lo que implica que los alumnos tienden a no hacerse cargo de la validez de sus producciones. Plantean que es necesario gestionar situaciones áulicas que promuevan devolver la responsabilidad sobre el trabajo matemático a los estudiantes. El docente no debe intervenir durante la resolución de una tarea propuesta, favoreciendo las construcciones de pruebas autónomas por parte de los alumnos. Consideran, también, la clase como una “comunidad de producción matemática”, en donde el progreso en las maneras de validar requiere de una negociación que permita a los estudiantes aceptar reglas que no siempre son consideradas como objetos de enseñanza.

Análisis de la actividad

Se desarrolla lo que sucede en la puesta en común considerando los casos en que los grupos dieron como datos en el mensaje, para la construcción del triángulo, **(1)** los tres lados; **(2)** dos lados y un ángulo y **(3)** un lado y al menos dos ángulos. Presentamos lo realizado por tres de los ocho grupos dada la extensión permitida para este trabajo.

Análisis de lo actuado por el Grupo A

Mensaje (1): “Usamos un segmento de 10 cm como base, luego tomamos la medida de 7 cm con el compás y de un extremo de la base tomamos una circunferencia y del otro extremo del mismo paso con la misma medida otra circunferencia. Desde el punto que se unen las circunferencias trazamos con regla los lados restantes”

P: ¿qué pasó con los triángulos que construyeron? ¿Cómo resultaron? // As: Iguales

P: Bien resultaron iguales. ¿Qué datos dieron? // As: Los tres lados

Consideramos que este mensaje se ve influenciado por la actividad anterior en la que trabajaban con construcciones que tenían como tarea enunciar la desigualdad triangular de los lados de un triángulo en la que los alumnos realizaron construcciones utilizando tres segmentos. De todos modos la docente no retoma dicha propiedad, ni realiza cuestionamientos sobre las aseveraciones que obliguen a los estudiantes a validar sus afirmaciones.

Mensaje (2): “Un lado mide el siguiente de uno, aumentado a la raíz de nueve, aumentado la mitad de una unidad. El otro lado mide el doble de media docena. La abertura es menor a 119 y mayor que 115, es un número impar”

Haciendo referencia a la cuestión que aparece en el mensaje sobre la amplitud del ángulo la docente pregunta: *Bien, y qué número es?*

A: 117 // P: 117°, bien.

Los estudiantes discretizan la medida del ángulo, Mántica y Carbó (2013) sostienen que:

Otro conflicto que se evidencia es que la noción de unidad de medida es tan fuerte que no les permite a los estudiantes considerar sus partes. El trabajo con los grados como unidad de medida imposibilita, a los alumnos, considerar a la medición como un proceso continuo, pues aún está ausente en ellos el significado entre las transiciones de: grados-radianes-reales.

(50)

La docente decide obviar la cuestión de la continuidad en la medida, si bien cuando se planteó la tarea previa, se abordó esta problemática. Continúa analizando el mensaje

P: **Pero ¿a qué ángulo se refería el mensaje?** // A: al que forman los segmentos.

P: ah, bueno, por que fíjense, para ustedes la abertura es ángulo, pero no aclaran que ángulo, se entiende. Entonces, la abertura se referían ustedes al ángulo que forman los dos segmentos. Ellos entendieron lo mismo, porque lo dibujaron exactamente igual, y coincidieron los triángulos. Bien. Bueno, entonces, recapitulando, ¿Qué datos dieron?

As (clase): dos lados y el ángulo

P: dos lados y el ángulo comprendido entre los dos lados, y ¿qué pasó con los triángulos?

As (clase): fueron congruentes.

Los estudiantes consideran implícitamente, que es el ángulo que forman los lados, a pesar que esto no se explicita en el mensaje, agregan al mensaje un dato que no aparece. No ponen en juego los conocimientos geométricos que disponen, no lo consideran como modelo para resolver las cuestiones que se presentan en el problema. Trabajan en el espacio físico. Probablemente consideran el ángulo comprendido aunque no se explicita, por una cuestión ligada a los instrumentos que poseen para la construcción, la “necesidad” de resolver el problema y el hecho de trabajar generalmente con problemas con solución única.

Mensaje (3) “Es un triángulo escaleno, uno de sus ángulos es de 79° , otro es de 57° y un lado 10 cm”.

Una alumna del grupo receptor manifiesta que el mensaje está mal redactado porque no especifica a qué ángulos se está refiriendo. Algunos sostienen que el ángulo de 57° es el opuesto al lado de 10cm, se genera una discusión respecto a cómo considerar el ángulo

A5: “como dieron solamente dos ángulos, del lado que lo pongas va a estar bien, porque si das vuelta la hoja los triángulos siempre los puedes hacer coincidir”

P: ¿pero a ustedes les quedó una duda? Ustedes escribieron. A ver lee”

A5: “para nosotros este mensaje está mal redactado porque no explica bien cuál va a ser la abertura en grados del ángulo”.

P: “¿a qué se refieren, con la abertura?” // A4: “8 cm, la abertura de 57° acá arriba”

P: “Ah, abertura te referís al ángulo opuesto”

A4: “Claro, hacer los 57° y acá tomar los 79° ”, indicando un extremo del segmento de 10 cm.

A4: “entonces no sabíamos si tomábamos 79° está bien orientado, tal vez daba para otro lado, y no podía ser un triángulo”

P: “lo que pasa es que justo coincidió porque ustedes tomaron exactamente los mismos ángulos”

A4: “y porque ellos dedujeron que lo íbamos hacer así, porque si no, no se hubiese formado el mismo triángulo”. Tal vez así no se formaba el triángulo”

El problema que se plantea en este caso, nuevamente tiene que ver con el instrumento que se utiliza, el transportador. Los estudiantes utilizan el segmento dado como parte del lado del ángulo y los 79° en sentido contrario a las agujas del reloj (cuando en realidad deberían considerarlo en igual sentido). En ese caso, las semirrectas que determinan los ángulos interiores de 101° (en lugar de 79° al considerar el adyacente en la construcción por uso incorrecto del transportador) y 57° se cortan fuera de la hoja. Los estudiantes establecen un vínculo natural entre el dibujo y la figura. Además el triángulo que les queda no coincide con la “*imagen prototípica*” que tienen los estudiantes. Esto podría deberse a que generalmente, en la enseñanza, se desarrolla primero una geometría ligada a la observación y comprobación con los dibujos, para luego hacer un razonamiento deductivo basado en la figura.

P: “da la casualidad que tomaron el mismo ángulo. Porque pudo haber pasado como al grupo B, fíjense que no toman el mismo y no les dio. Ustedes dan dos ángulos y el lado, pero no dicen qué ángulos”

A4: “y no íbamos a saber dónde se iban a cortar, porque podíamos seguir, seguía y nosotros queríamos tomar los 79 arriba y seguíamos con los cincuenta..no sé cuántos”.(no considerar los ángulos adyacentes al lado de 10cm les imposibilita determinar el tercer vértice del triángulo para tomar los 79°).

Los alumnos no utilizan la propiedad que ya conocen (suma de los ángulos interiores de un triángulo) para determinar que la amplitud del tercer ángulo es única, dado que para la construcción con los elementos de geometría sí necesitan el lado y los ángulos cuyos vértices son sus extremos. No realizan un razonamiento deductivo que les permita hacer la construcción. Se nota la necesidad de especificar las “aberturas” en relación al segmento que se toma como “base”. A pesar de que en la construcción les quedan dos triángulos congruentes, en el grupo receptor se plantea la discusión sobre la ubicación de los ángulos. Reconocen que “justo les coincidió” porque tomaron los ángulos adyacentes al segmento, pero podrían no haber coincidido si tomaban los ángulos en diferente posición. La docente socializa esto y pone de manifiesto que si tenemos las amplitudes de dos ángulos, conocemos la del tercero. Los alumnos no logran evidenciar que tienen a mano una propiedad que les permite encontrar el ángulo restante.

Análisis de lo actuado por el Grupo B

Mensaje (1): “Para construir este triángulo, la medida de cada lado es igual a un tercio de la medida de una regla de 30 cm”.

P: ¿Qué datos dieron? // A: los tres lados

P: ¿Qué pasó? // A: Dieron iguales

No se cuestiona la respuesta de los alumnos, no se devuelve al alumno la responsabilidad de validar lo que afirma, sólo con expresar que dieron iguales se acepta que efectivamente el triángulo construido por el grupo receptor coincide con el realizado por el emisor del mensaje.

Mensaje (2) “para construir nuestro triángulo necesitan formar un ángulo de 130° y que dos de sus lados midan 5,5 centímetros”

El grupo lee el mensaje recibido, comienzan a reflexionar sobre el ángulo a considerar. La docente dice: *¿Aclara que ángulo es?* // A: no, no aclara

P: no aclara que ángulo es, que es el ángulo que forman los dos lados

A: pero dice de sus lados y yo entiendo que son los lados del ángulo

P: y que dos de sus lados,... puede ser otro ángulo del triángulo

A: sí, pero como mencionaba el ángulo...

Nuevamente el docente toma la decisión de no considerar el caso que los datos sean dos lados y un ángulo no determinado por ellos. Establece no utilizar el planteo de la clase como productora de nuevos problemas, tal sería el caso de analizar qué ocurre cuando los datos son dos lados y un ángulo que no es el que estos determinan.

P: de los tres ángulos ustedes, tomaron un ángulo que es justamente. // A: el que forman los lados

P: el que forman los dos lados, pero podrían haber tomado otro, acá, se entiende lo que les digo?

A: si tomaba otro, no daría igual

P: y, no daría igual. Entonces, ¿qué podemos concluir?, ¿cuándo resultaron congruentes los triángulos? // A: si le damos dos lados y el ángulo que formaban esos lados

El docente remarca que el ángulo a considerar es el determinado por los lados dados, dando por supuesto que si no es así el triángulo obtenido no es congruente al dado. El hecho que se asuman o no ciertas cuestiones para debatir colectivamente depende del valor y la cabida que éste decide darle en el marco del problema. Una de las razones por las que suponemos el docente no tomó este caso para proponerlo en el debate de la puesta en común, es que resulta difícil “sobre caliente” encontrar una fundamentación matemática adecuada a los conocimientos de sus alumnos. Consideramos que, en este caso, se hace hincapié en la observación y comprobación sobre los dibujos, más que en las propiedades con las que se cuentan para validar las afirmaciones. Se desconoce al alumno como productor de nuevos problemas, no cuestionando sus afirmaciones y no profundizando las dudas.

Mensaje (3): “La base del triángulo es de 8 cm. Sus ángulos miden uno, 50° , otro 90° y otro 41° ”

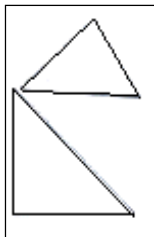


Figura 1
Construcción
grupo receptor

A₁ (grupo emisor): “En el triángulo que nosotros dibujamos el ángulo que formaba el triángulo medía 90° y ellos no habían puesto 90° en ninguno de los tres lados.”

A₂ (grupo emisor): “dijimos que uno medía 90, el otro 41 y el otro 50. Pero el de 90 no aparecía”

A₁: “Le dimos, así, el de arriba (haciendo alusión al ángulo de 50°), que después nos dimos cuenta que no es necesario.”

Los estudiantes hacen referencia a las relaciones espaciales pues dicen “arriba” para indicar el ángulo de 50° . Reconocen el ángulo de 90° si los lados que lo forman están en posición horizontal y vertical, dado que ellos dicen “no habían puesto 90 en ninguno de los tres lados”, y no reconocen en el triángulo dibujado por el grupo receptor el ángulo recto cuando la hipotenusa es paralela al borde de la hoja. Esto está ligado al uso de figuras prototípicas en la enseñanza, en el caso del triángulo rectángulo el ángulo recto formado por los catetos paralelos a los bordes de la hoja.

En la puesta en común los alumnos del grupo B retoman lo discutido en la presentación del grupo A respecto de los datos suficientes para construir un triángulo congruente a uno dado.

A₂: “nosotros le dimos el de 90, el de 41 y el de 50”

En ese momento interviene un alumno del grupo clase:

A₃: “el de 40”

Los integrantes del grupo afirman:

“de 41° ”

El mismo alumno de la clase dice:

A₃: “¿Cómo uno medía 41, el otro 50 y 90? Pero no puede ser triángulo porque los ángulos internos del triángulo sumados tienen que dar igual a 180° ”

Una alumna de la clase dice:

“Ah...era 40 sino, no puede sumar 180° ”.

Los integrantes del grupo emisor dicen:

“Ah...Ah..., lo medimos mal”,

aceptándolo sólo como un error de medición.

El alumno de la clase valida la afirmación de que el tercer ángulo debe tener una amplitud de 40° , utilizando una propiedad conocida. Es decir que hay un control con los medios de que dispone de la resolución que va realizando. Es importante que los alumnos reconozcan las propiedades que disponen como una herramienta eficaz y confiable para establecer la validez de una proposición. Esto permite el trabajo, en el aula, de las reglas del debate matemático, como la afirmación de que no es suficiente una constatación en el dibujo para afirmar que un enunciado es verdadero. Salvada esta cuestión de las amplitudes de los ángulos, la profesora retoma otra vez los dibujos de los triángulos elaborados por el grupo receptor y destaca que hay dos triángulos construidos en la hoja de calcar;

P: “¿por qué hay dos construcciones?”, ¿por qué construyeron dos veces el triángulo?”

A₁: “claro el de arriba estaba mal, no tiene el ángulo de 90° ”.

A₃: “en este triángulo el ángulo de arriba es el de 90° ”

P: “si chicos, acá está el ángulo de 90° ”.

Señalando en la construcción el ángulo recto.

La alumna A₁ a partir de esta intervención, sigue sin visualizar el ángulo de 90° en el primer triángulo construido por el grupo receptor.

A₁: “Este es el que hicieron primero, que no estaban los 90° ”

P: “cómo que no estaban los 90° ?, acá está”

y señala el ángulo recto del primer triángulo.

Se evidencia, como ya mencionamos, que los alumnos del grupo emisor no reconocen el ángulo recto si los lados que lo determinan no están en la posición horizontal y vertical.

P: “pero no es congruente con el de ustedes? ¿Qué pasó? Tienen el ángulo de 90° pero no es igual”.

La docente expone a la clase que a pesar de ser un triángulo rectángulo no es igual al construido por el grupo emisor, y retoma el mensaje porque si bien cumple las condiciones pedidas una de las construcciones coincide y la otra no.

P: ¿qué pasó con el primero que no les dio?

La docente no sanciona la validez o invalidez de las propuestas dadas por los estudiantes, pero si abre un espacio de incertidumbre que los obliga a buscar criterios para establecer si las condiciones enunciadas son correctas o no en ambos casos.

Una alumna pregunta: “¿la base mide 8 cm?”

P: “sí”. Y corrobora que todas las dimensiones son las correctas.

Una alumna del grupo clase expresa:

“pero el mensaje no especifica donde están los ángulos”

P: “Ah...ese es el problema”,

y reconstruye el modo en que el grupo receptor realizó cada uno de los triángulos. Manifiesta que en un caso (el que no coincide) el ángulo recto es el opuesto al lado de 8 cm y en

el otro, el ángulo recto es “contiguo” al lado de 8 cm haciendo referencia a que el vértice del ángulo recto es uno de los extremos del lado de 8 cm.

Para verificar lo que dice la profesora realizan una validación empírica, superponiendo cada una de las construcciones realizadas por el grupo receptor con la del grupo emisor.

P: “entonces, ¿qué es lo que falta aclarar?”

A: “la base mide 8, 90° a la derecha o a la izquierda y 50° a la izquierda, por decir un lugar.”

Los alumnos establecen que deben determinar el vértice de los ángulos indicados en el mensaje.

P: “Por qué crees necesario decir izquierda o derecha?”

A: “Porque lo superpones”

Una alumna de ese grupo sostiene:

“deberían expresar que el de la izquierda mide 90° y el de la derecha 40° ”

Los estudiantes establecen relaciones espaciales preponderantemente a las geométricas. No reconocen el ángulo recto del triángulo cuando los lados que lo determinan no están paralelos a los bordes de la hoja, aun cuando lo corroboran mediante la medición.

Análisis de lo actuado por el Grupo C

Mensaje (1): “Para construir este triángulo, tienen que hacerlo con estas medidas, 6, 6, y 12”.

P: ¿Qué datos dieron? // A: la medida de los tres lados

P, ¿y que pasó? // A: Se construyó otro igual

P: Fíjense el grupo anterior y el anterior dieron los tres lados y siempre se construyó otro igual.

La docente institucionaliza el criterio de congruencia con la sola constatación empírica, en ningún caso solicita a los alumnos que validen sus afirmaciones.

Mensaje (2): un lado del triángulo mide 3 centímetros y otro 10”

En este caso el grupo receptor solicita nuevos datos en el mensaje

Mensaje: “con dos lados se pueden formar infinitos triángulos. ¿Cuántos grados mide el ángulo que forman los dos segmentos?”

Los integrantes del grupo emisor dialogan sobre la nueva información y deciden agregar al mensaje: “ 155° ”.

A (grupo receptor): Bueno, nosotros habíamos dicho que podía ser un lado de 3 y otro de 10, y le preguntamos que nos den otra pista para sacar el otro lado, porque con dos lados se pueden formar infinitos triángulos. Porque hay distintos grados de inclinación del ángulo que forman los dos segmentos.

En la puesta en común la docente trae a la clase la discusión planteada al interior del grupo receptor porque los estudiantes hacen uso de propiedades geométricas para fundamentar el pedido de un dato específico. Este tipo de actitudes apunta a un modo de pensar propio del saber geométrico, dado que la validación de la afirmación se apoya en una propiedad geométrica, enunciada en la tarea previa. Hay una intencionalidad didáctica, por parte del docente, de poner en juego conocimientos geométricos, se pretende toda la clase tome como objeto de reflexión los

datos dados en el primer mensaje y que el modo de validar en este caso es a partir de una propiedad y no de una representación gráfica.

P: exactamente, ¿ustedes les preguntaron algo?

A: cuántos grados mide el ángulo que forman los dos segmentos

A: nosotros les contestamos 155°

P: Resultaron congruentes, entonces, ¿qué datos dieron, para que sean congruentes los triángulos?

As: Los dos lados y la medida del ángulo

P: ¿qué ángulo? // A: el que forman los lados, el que forman los segmentos.

El acento está puesto, en que debe especificarse el ángulo considerado, reiterando lo acordado con el grupo anterior, que debe ser el determinado por los dos lados que se dan como datos. Se pone de manifiesto que no es intención del docente generar una discusión respecto a qué ocurre si el ángulo no es el determinado por los lados dados. Esto no forma parte de su planificación inicial y por tanto no orienta la discusión para generar un nuevo problema.

Mensaje (3): “Un segmento es de 13 cm y 2 ángulos uno es de 49° y otro de 127° ”

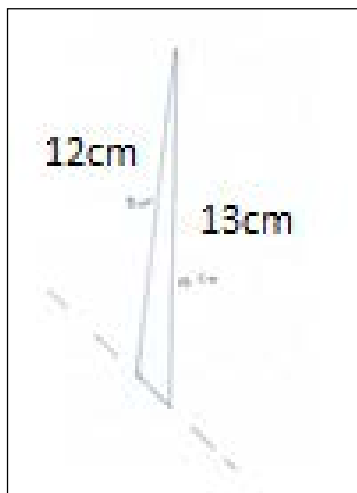


Figura 2. Construcción grupo emisor

P: ¿Qué les pasó con el triángulo?

As: Bueno, nosotros hicimos la base de 13, uno de sus ángulos era de 49° y el otro 127° . Construimos el triángulo, pero se llegan a juntar los segmentos fuera de la hoja, porque el ángulo de arriba era de 5° , era muy arriba”

El triángulo no es el “prototípico” reconocido por los estudiantes.

P: ¿Qué les parece? ¿Qué pudo haber pasado con este mensaje? “Volvamos a repasar, ellos dan 13cm, 49° y 127° , cuándo ustedes lo quieren hacer, no lo pueden construir, les queda afuera de la hoja...”

Aparecen cuestiones referidas al tamaño del espacio en el que se trabaja. El grupo emisor construyó el triángulo en una hoja, por lo que es razonable que el grupo receptor suponga que si no puede realizarlo en la hoja, algo está mal. Los alumnos dialogan entre sí y con la docente respecto de la necesidad de indicar la posición de cada uno de los ángulos respecto del segmento tomado como base. Luego de la discusión la docente retoma lo planteado. Explicita que en un caso se toma el ángulo de 127° sobre la base y en otro se lo toma opuesto a ese lado, por esta razón no coinciden los triángulos construidos.

A₁₀: Entonces para poder construir, hay que aclarar la ubicación de los ángulos...

P: ¿qué pasó cuando coincidían?

A₁₀: Como una "teoría", entonces, siempre que no se da la ubicación de los ángulos, o sea, si se da la medida de un solo lado y no se dan la ubicación de los otros dos ángulos, no se puede construir un triángulo igual.

Pareciera que los estudiantes plantean al decir una "teoría" la necesidad de construir una propiedad, una ley. Esto muestra la importancia de no descartar los procedimientos erróneos puesto que pueden dar lugar a un análisis y reflexión sobre los conocimientos puestos en juego y el hecho de advertir el error demanda una explicación y justificación. A partir del trabajo empírico pueden insertarse en el terreno de la deducción y advertir la insuficiencia de lo experimental como modo de validación.

Conclusiones

En el grupo A, los estudiantes trabajan en el espacio físico, cobra para ellos mucha importancia cómo está ubicado el triángulo. Consideran cuestiones que no se explicitan en los mensajes, dado que si no fuera de ese modo la construcción del triángulo no sería factible, utilizando los elementos de geometría. Los estudiantes tienen una visión de la geometría basada en la percepción. Observamos que si los datos que se encuentran en el mensaje contienen dos lados del triángulo y un ángulo, es más simple para la construcción, utilizando los elementos de geometría, considerar que el ángulo dado es el comprendido entre ellos. Por esta razón, en general, los estudiantes, no se plantean que el ángulo pudiera tener como vértice el extremo de sólo uno de los segmentos dados "la atracción perceptiva de ciertos aspectos del dibujo obstaculiza un análisis geométrico adaptado a la solución del problema escondiendo, por contraste combinaciones de partes de la figura útiles para la solución" (Laborde & Vergnaud, 1997, p.96). Cuando consideran que el mensaje está mal redactado porque no especifica a qué ángulo hace referencia, lo hacen porque al intentar considerar como vértices del triángulo uno que no sea extremo del segmento dado como dato no pueden construirlo. Sostienen que podría tratarse del ángulo interior del triángulo opuesto al lado dado, pero que en ese caso como no pueden determinar el tercer vértice con los elementos que utilizan para la construcción. En este tipo de propuestas, es importante que el docente no valide de entrada la respuesta correcta, pero si que retome para todo el grupo lo que sostienen algunos alumnos, planteando contraejemplos, recordando o haciendo recordar acuerdos o propiedades anteriores en relación con los conocimientos que se están trabajando. Quaranta y Wolman (2003) sostienen que las situaciones de validación "dan lugar a debates entre alumnos que, organizados por el docente, posibilitan que se explicita y se argumente sobre lo realizado; constituyen, de esta manera, un medio para establecer pruebas o refutarlas" (p. 197). En este grupo el docente decide no intervenir para cuestionar la discretización de la medida que aparentemente aceptan tanto los estudiantes del grupo emisor como el receptor. No devuelve la responsabilidad a los estudiantes de fundamentar sus afirmaciones.

En el grupo B es muy importante la percepción y las posiciones de los dibujos realizados. La imagen del ángulo recto de los estudiantes es con sus lados en posición horizontal y vertical, esto les impide reconocerlo en otra posición, aun constatándolo por medición. Los alumnos en la escuela secundaria, en general, no trabajan en un espacio conceptualizado, se nota una marcada influencia de las figuras prototípicas. Laborde y Vergnaud (1997) sostienen que

podemos ver en clase que los alumnos no comprenden el discurso del docente, pues este último se refiere implícitamente a la figura, mientras que los alumnos comprenden el

discurso como referido al dibujo. La ruptura del contrato que constituye pasar del dibujo a la figura aparece entonces con toda su fuerza en los intercambios verbales entre docente y alumnos (p. 97).

Cuando analizan si los dos triángulos rectángulos contruidos son congruentes al dado por el grupo emisor, el docente da a los estudiantes la responsabilidad de validar la afirmación que realizan. Los estudiantes hacen una constatación empírica, más que el uso de propiedades para fundamentar estas afirmaciones, con los conocimientos de que disponen es lo que están en condiciones de producir. En el caso de las amplitudes de los ángulos interiores, no emplean la propiedad de que disponen sino que utilizan métodos empíricos.

En el grupo C puede verse claramente que los estudiantes tienen un “modo de pensar” que los lleva a apoyarse en las propiedades para fundamentar sus afirmaciones. Cuando los datos que se proporcionan son sólo dos lados del triángulo los alumnos hacen referencia a lo trabajado en la tarea previa, expresando que con estos datos pueden construirse infinitos triángulos. Broitman & Itzcovich (2003) sostienen que iniciar al estudiante

en un modo de pensar propio del saber geométrico supone poder apoyarse en propiedades de los objetos geométricos para poder anticipar relaciones no conocidas o inferir nuevas propiedades. Es decir, realizar un proceso de anticipación sobre los resultados a obtener sin necesidad de realizar acciones empíricas y sin apoyarse exclusivamente en la percepción (pp. 303-304).

Aquí los alumnos hacen uso de las propiedades disponibles para fundamentar el pedido de otros elementos para la construcción. Cuando validan su afirmación sobre que no les es posible construir de un único triángulo en el caso que los datos sean un lado y dos ángulos, si bien lo fundamentan basados en el tamaño del espacio, consideran que debe enunciarse una “propiedad” que luego les permita fundamentar sus afirmaciones. Realizan esta fundamentación utilizando un contraejemplo, en forma empírica, para formular que debe especificarse cuáles son los vértices de los ángulos que se especifican en el mensaje. Están utilizando las reglas del debate matemático. Cuando el grupo solicita un dato particular o cuando busca un modo, aunque empírico, para fundamentar por qué toma los ángulos de determinada manera, el docente responsabiliza a los estudiantes de estas decisiones. Respecto de esto Chemello y Crippa (2011) sostienen que es importante “que el docente “no participe” de la toma de decisiones durante la resolución del problema propuesto, favoreciendo la construcción de pruebas autónomas por parte de los alumnos” (p. 67).

Los alumnos del grupo A realizan constataciones empíricas y esto les es suficiente para afirmar sus conjeturas. Los del grupo B, si bien se puede apreciar que no reconocen los triángulos rectángulos congruentes si no están en la misma posición, es decir que prima la percepción sobre lo deductivo, son capaces de aceptar cuando se les cuestiona una afirmación dado que no cumple una propiedad ya conocida, por los integrantes de otro grupo en los que si prima la deducción por sobre la experimentación. El grupo C si bien en un caso pueden determinar la falta de datos utilizando una propiedad para fundamentar su conjetura, en otro caso se basa en lo experimental, como el tamaño del espacio en el que trabajan, para fundamentar lo que afirman. En un caso se apoyan en propiedades pero en otro con acciones empíricas les basta para enunciar la propiedad.

Cuando los alumnos de dos grupos sostienen que si no se considera un ángulo particular el triángulo no daría igual, hay como un telón de fondo, en la discusión, vinculada a las posibles soluciones del problema. En este caso el docente deja de lado la posibilidad del análisis respecto

a la existencia y al número de soluciones según el ángulo que se tome. Sadovsky (2005) sostiene que las decisiones que el docente toma sobre la marcha en general están orientadas por su proyecto de trabajo.

La actividad matemática del docente se refiere fundamentalmente a la reconstrucción de los procesos de validación adaptados a los conocimientos de los alumnos, lo que supone para el docente una reorganización de sus propios conocimientos. El docente aprende matemática cuando piensa cómo se fundamentan los problemas teniendo en cuenta qué saben los alumnos (p. 79).

Es notable que los alumnos para convencerse de sus afirmaciones lo realicen en general utilizando constataciones a través de mediciones, pero cuando su intención es persuadir a otro en confrontaciones sobre lo que sostienen, si disponen, utilizan propiedades que les permiten sentirse más respaldados en lo que sostienen. Por esta razón consideramos que las discusiones, gestionadas por el docente, pueden conducir a progresos en los modos de validar acercándolos a modos con cada vez más rigor matemático.

Podemos observar que son pocos los alumnos que utilizan las propiedades para justificar sus afirmaciones, es más fuerte para ellos la representación en la hoja, Broitman e Itzcovich (2003) plantean que el modo de pensar propio del saber geométrico, “supone poder apoyarse en propiedades de los objetos geométricos para poder anticipar relaciones no conocidas o inferir nuevas propiedades” (p. 303). El estudiante que manifiesta la necesidad de expresar una propiedad, “una teoría”, considera que necesita algo más que la validación empírica para fundamentar las afirmaciones, intenta entrar en lo que podríamos llamar un trabajo deductivo. Itzcovich (2007) sostiene que “lo importante de este tipo de propuesta es que permiten que aparezca lo deductivo por sobre lo experimental, aunque lo experimental forme parte en un primer momento del trabajo con un tinte más exploratorio” (p. 174). Puede apreciarse en el grupo en el que se implementa la propuesta que son escasos los estudiantes que consideran la necesidad de validar sus afirmaciones utilizando acciones que no sean empíricas.

Es notable la actitud de la docente en el trabajo de interacción entre los estudiantes en el primer caso de mensajes (los tres lados), no insta a los alumnos a que validen sus afirmaciones. Se limita a preguntar como son los triángulos obtenidos y a remarcar que los datos para construirlos son las longitudes de sus tres lados. Como si los casos que no generan desacuerdo entre los estudiantes no fuera necesario validarlos. Se quedan con la constatación empírica. Itzcovich (2005) afirma que,

...las situaciones que se proponen a los alumnos con la finalidad de indagar, identificar o reconocer propiedades de las figuras deben impactar en los procesos intelectuales que permitan hacer explícitas las características y propiedades de los objetos geométricos, más allá de los dibujos que utilicen para representar dichas figuras (p.18).

De este modo entendemos la importancia de que tanto el docente como los alumnos tengan en cuenta la utilidad de la construcción de una figura para explorar sus propiedades, aunque no para realizar generalizaciones.

En la puesta en común vemos como, en algunos casos, las intervenciones del docente propician situaciones que favorecen la elaboración de argumentos que facilitan la evolución de los modos naturales de razonar de los estudiantes y de las reglas que utilizan en debates extramatemáticos hacia los modos válidos de la comunidad matemática en función de las reglas del debate matemático, aunque de modo insuficiente. También es notorio que en otros casos no

toma a la clase como productora de nuevos problemas y deja pasar situaciones de las que debería hablarse explícitamente, ya sea para rechazarlas, para aceptarla o para considerar sus límites. El rol del docente es sustancial tanto para la emergencia de un problema como para el tratamiento que se hace del mismo.

Dentro de las limitaciones que notamos de la propuesta son los elementos que se entregan a los estudiantes para realizar la tarea, hoja blanca y de calcar, esto puede condicionar a los estudiantes a realizar constataciones empíricas, de todos modos esto no habilita a que sea este el único modo que consideren para fundamentar sus afirmaciones.

Referencias

- Broitman, C. & Itzcovich, H. (2003) Geometría en los primeros años de la EGB: problemas de su enseñanza, problemas para su enseñanza. En M. Panizza, (Comp.), *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo de la EGB. Análisis y propuestas*. (pp. 289-326). Buenos Aires: Paidós.
- Chemello, G. & Crippa, A. (2011) Enseñar a demostrar: ¿una tarea posible? En A. Diaz (coord.) *Enseñar Matemáticas en la Escuela Media*. (pp. 55-77). Editorial Biblos. Buenos Aires.
- Cohen, L. & Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid. La Muralla. S.A.
- Itzcovich, H. (Coord.) (2005). *Iniciación al estudio didáctico de la Geometría. De las construcciones a las demostraciones*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Itzcovich, H. (Coord.) (2007) *La matemática escolar. Las prácticas de enseñanza en el aula*. Buenos Aires: AIQUE Educación.
- Laborde, C. & Vergnaud, G. (1997). El aprendizaje y la enseñanza de la matemática. Ejemplos ilustrativos. En G. Vergnaud (Comp.). *Aprendizajes y Didácticas: ¿Qué hay de nuevo?* (pp. 89-104). Buenos Aires: Edicial.
- Mántica, A. & Carbó, A. (2013). Interacciones en el aula de secundaria acerca de la dualidad infinito actual infinito potencial en un contexto geométrico. En *Educación Matemática 25 (3) México: SOMIDEM*. 27-55
- Quaranta, M. & Wolman, S. (2003). Discusiones en las clases de matemática: qué, para qué y cómo se discute. En M. Panizza, (comp), *Enseñar matemática en el Nivel Inicial y el primer ciclo la EGB. Análisis y propuestas*, (pp. 189-243). Paidós. Buenos Aires.
- Sadovsky, P. (2005). *Enseñar matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Experiências com alunos e professores sobre números construtíveis utilizando régua e compasso

Angélica **Felix** Laurindo Silva

Universidade de Brasília

Brasil

angelicacqd@gmail.com

João Paulo dos **Santos**

Universidade de Brasília

Brasil

joapaulo.mat@gmail.com

Roberta Paula Brandão de **Novais**

Universidade de Brasília

Brasil

roberta.novais@hotmail.com

Resumo

No trabalho que segue, mostraremos o desenvolvimento e os resultados de experiências realizadas pelos autores em um minicurso oferecido para alunos do curso de graduação em Matemática e professores da Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal (SEEDF). Os objetivos foram: apresentar o significado de um número construtível, compreender a importância da construção com régua e compasso no ensino, relacionar geometria e álgebra apresentando novas resoluções de questões algébricas com construção geométrica e, observar como o conteúdo foi compreendido por alunos e professores. Para tanto, desenvolvemos com os dois grupos sequências de atividades envolvendo construções geométricas. Os resultados revelam a pertinência da construção geométrica para a conceituação em álgebra e geometria. Além disso, mostrou-se como elemento vital para reflexões sobre a formação dos professores na graduação e da consequente formação dos alunos que ingressam na universidade.

Palavras-chave: construções com régua e compasso, geometria, números construtíveis, relato de experiência, formação de professores.

Introdução

Este relato baseia-se em uma experiência realizada durante a aplicação de um minicurso sobre construções com régua e compasso e números construtíveis, ministrado pelos autores para alunos do curso de graduação de Matemática que integram Programa de Educação Tutorial de Matemática (PET-MAT), da Universidade de Brasília e para professores da SEEDF durante o VI Encontro Brasiliense de Educação Matemática (VI EBREM), promovido pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Regional Distrito Federal (SBEM-DF) em parceria com o Departamento de Matemática - UnB cujo tema foi SER EDUCADOR MATEMÁTICO, realizado na Universidade de Brasília nos dias 19, 20 e 21 de setembro de 2014.

Segundo Wagner e Carneiro (2007):

As Construções Geométricas devem, em nossa opinião, acompanhar qualquer curso de Geometria na escola secundária; visto que os problemas são motivadores, intrigantes e conduzem a descobertas de novas propriedades. Os mesmos são educativos no sentido em que cada um é necessário uma análise da situação, onde se deve fazer um planejamento da construção, seguindo-se a execução dessa construção, a posterior conclusão sobre o número de soluções distintas e também sobre a compatibilidade dos dados. (Wagner & Carneiro, 2007, p. 18) .

Além disso, os autores citados acima sugerem uma forma de aliar álgebra à geometria, tratando os problemas de construções geométricas de maneira completamente diferente:

se a solução de um problema não ocorre através dos recursos dados em geometria plana, pode-se adotar como incógnita algum segmento ainda desconhecido e tentar exprimi-lo em função dos elementos conhecidos. Com isso, é obtida uma “fórmula” que calcula esse segmento desconhecido em função dos dados do problema. (Wagner & Carneiro, 2007, p. 29).

Vale lembrar que a ideia de construção, segundo Wagner e Carneiro (2007) significavam para os gregos, construir apenas com régua e compasso. A concepção grega de número real era inteiramente geométrica, a distinção entre construções com régua e compasso e construções mecânicas continha uma classificação de números reais, como ficaria claro séculos mais tarde. De fato, desde cedo os gregos esbarraram na dificuldade de, somente com a régua e compasso, duplicar o cubo, quadrar o círculo, tri-seccionar um ângulo genérico, por exemplo. A dificuldade encontrada por eles mostrou-lhes um problema, de que até hoje algumas pessoas não percebem, e acabam confundindo construções aproximadas ou mecânicas, com construções exatas com régua e compasso.

Atualmente, ainda se observa no ensino de matemática aulas expositivas, no qual o professor se comporta como detentor do conhecimento e o aluno tem um papel de mero expectador cujo seu maior esforço é, normalmente, na resolução de exercícios de fixação. Ciente destes fatos, preparamos um minicurso de modo a resgatar a construção com régua e compasso no ensino, abordando estas construções de maneira diferenciada de forma que geometria Euclidiana plana e a álgebra sejam aplicadas, por meio de construções, para auxiliar a compreensão do conceito de números construtíveis com régua e compasso.

Na próxima seção apresentamos como o minicurso foi desenvolvido e os aspectos teóricos abordados. Apresentamos, também, os resultados obtidos das observações realizadas durante o minicurso. Finalmente, na última seção, apresentamos a conclusão do trabalho.

Referencial Teórico

O abandono das construções geométricas é notado pelas autoras em algumas escolas em que elas desenvolveram experiências, estágios e observações em disciplinas do curso de Matemática. Tal fator motivou reflexões que culminaram no minicurso aqui descrito.

Segundo Nacarato (2000):

Muitos são os fatores que contribuíram para esse abandono, dentre eles podemos citar a própria história do ensino e matemática no Brasil e, em especial, o de geometria, e a não compreensão por parte dos professores, da importância da formação de conceitos geométricos para desenvolvimento do pensamento matemático. (Nacarato, 2000, p.84).

Entendemos que uma das causas do abandono pode ser também a maneira como as construções de régua e compasso passaram a ser ministradas em sala de aula. A construção geométrica tem-se resumido em como fazer o desenho sem a fundamentação teórica que mostra o porquê, sendo assim, impede ao aluno a percepção que a metodologia desenvolvida é coerente e necessária para a resolução do problema. Ressalta Saldanha (2012, p.2), “A Metodologia da Resolução de Problemas tem sido vista como uma das principais alternativas, constituindo-se como uma estratégia de ação que através de uma abordagem criativa permite introduzir conhecimentos matemáticos de forma dinâmica”.

Tendo em vista a Metodologia de Resolução de Problemas, é possível perceber que uma construção de régua e compasso que valoriza o processo em detrimento do resultado perpassa as quatro etapas da resolução de um problema: compreensão do problema, estabelecimento de um plano, execução do plano e a análise dos resultados. Desse modo entendemos que a metodologia de resolução de problemas mostra-se pertinente as situações de construções geométricas podendo contribuir para o ensino e aprendizagem tanto da geometria quanto da álgebra na Educação Básica.

Metodologia

Para dar suporte a temática, o minicurso foi inspirado na sequência didática (Ferreira & Miranda, 2008) desenvolvida com base na metodologia de resolução de problemas (Saldanha, 2012). O mesmo foi desenvolvido para ser apresentado no VI EBREM, tendo uma pré-apresentação para os alunos do grupo do PETMAT- UnB, onde foram feitas observações que seriam comparadas posteriormente com os participantes do VI EBREM. Além disso, foram feitas as ultimas correções e ajustes para uma melhor apresentação no encontro promovido pela SBEM-DF.

O VI EBREM foi um encontro voltado para professores da Educação Básica, alunos de graduação e pós-graduação, professores do ensino superior e pesquisadores das áreas de Matemática, História da Matemática, Educação Matemática e áreas afins, proporcionando ao seu público atualização em relação aos conteúdos e a didática específica para o ensino de matemática, um intercâmbio cultural e científico entre pesquisadores e alunos de pós-graduação do DF e de outras partes do Brasil (para mais informações, consulte a página do evento: <http://www.sbemdf.com/index.php/home/sbemdf/noticias/item/105-vi-ebrem-relatorio>).

Sua pré-apresentação foi desenvolvida para o grupo PETMAT-UnB, formado por 12 alunos bolsistas e não bolsistas graduandos do curso de matemática da Universidade de Brasília, nos graus de licenciatura e bacharéis no período entre o 3º e 7º semestre da graduação (http://www.mat.unb.br/index.php?option=com_content&task=view&id=57&Itemid=244).

O minicurso foi dividido em dois encontros de uma hora e trinta minutos. No primeiro encontro realizamos uma aula prática em que foram trabalhadas as construções básicas: construção de retas paralelas, reta perpendicular e mediatriz, tendo em vista que estas construções serão utilizadas para construções elementares de números com régua e compasso. Paralelamente com as construções, foram resgatados elementos fundamentais da geometria Euclidiana plana, como congruência de triângulos e paralelismo, abordando o estudo de paralelogramos, em particular foram vistas as propriedades do losango.

O losango foi a nossa motivação na construção de retas paralelas e perpendiculares. Ele foi escolhido porque nos processos de construções dessas retas era sempre observada a construção

de um losango e, dadas as suas propriedades, a construção das retas anteriores eram validadas. Por este motivo, optamos por realizar nossa primeira atividade propondo aos participantes que construíssem dois losangos, de tal modo que na primeira construção a reta dada deveria ser a reta suporte de um de seus lados, enquanto que na outra deveria ser a reta suporte de uma das suas diagonais.

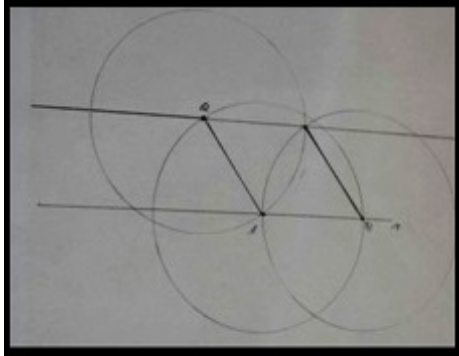


Figura 1. Construção de retas paralelas, feita por um participante do PETMAT-UnB.

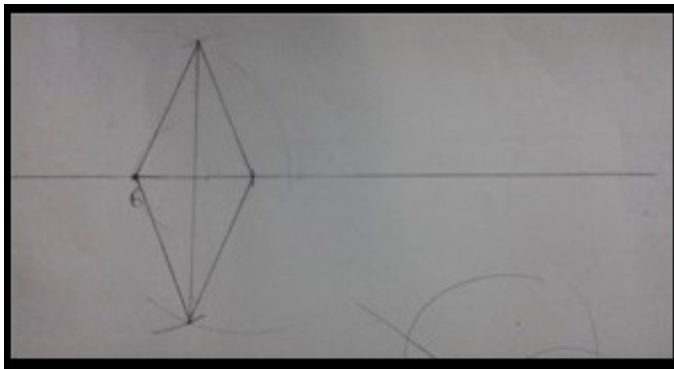


Figura 2. Construção da reta perpendicular, feita no primeiro dia do encontro do PETMAT-UnB.

Foram trabalhadas também as construções elementares de números: $a+b$; $a-b$; $a.b$; $a\div b$, onde a e b representam medidas de segmentos. Nesta etapa, conclui-se que os números racionais são construtíveis. As duas primeiras construções foram feitas de maneira mais intuitiva deixando que os participantes percebessem que se tratava apenas de transposições dos segmentos dados. As duas últimas são feitas a partir do Teorema de Tales que é citado na nossa sequência didática. Esse tipo de abordagem corrobora com as discussões promovidas por Kushima, Pirkel e Steenbock (2009) a partir da compilação de inúmeros trabalhos sobre desenho geométrico. De modo geral essas discussões apontam que é “importante que essas atividades sejam conduzidas, de forma que mantenha ligações estreitas com o estudo de outros conteúdos, em particular com as atividades numéricas, métricas e com a noção de proporcionalidade.” (Kushima, Pirkel & Steenbock, 2009, p.96)

Partindo de um segmento unidade, construímos os números inteiros e os números racionais através destas construções elementares. Para a compreensão da construção do $\sqrt{a}$ foi feita uma dinâmica diferente, na qual a construção foi apresentada e os participantes tiveram que argumentar a fundamentação da construção.

Na análise de resultados de todas as atividades, conforme a metodologia de resolução de problemas que proporciona um enriquecedor processo de aprendizagem, foi salientada o fato de analisar os diferentes caminhos escolhidos e seus resultados.

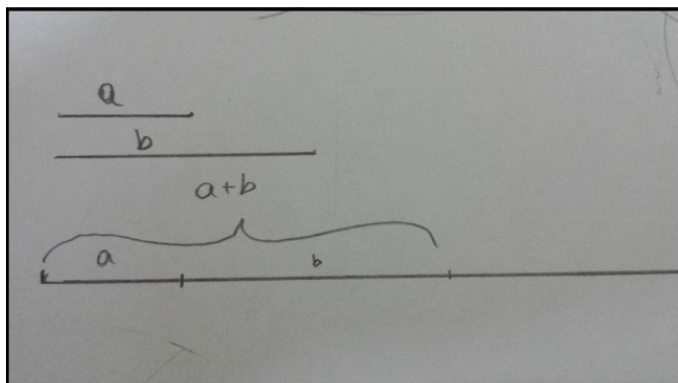


Figura 3. Construção de um segmento de medida $x = a+b$, feita por um integrante do PETMAT-UnB.

No segundo encontro, realizamos aula expositivo-teórica, onde foram relacionados aspectos algébricos com construções geométricas, com um tratamento mais formal de números construtíveis. Foram tratados inicialmente construções com régua e compasso de soluções de equação do 2º grau e de sistemas; cuja solução para equação do 2º grau $x^2 - ax + b^2 = 0$ passa pela análise do discriminante Δ , que determina a existência de soluções. A escolha desta equação ao invés da equação com a forma geral, foi devido a motivação geométrica que ela nos proporciona, permitindo análises tanto do seu discriminante, quanto abordar o problema de encontrar soluções para uma equação do 2º grau, através da resolução do sistema $x_1 + x_2 = a$, $x_1 \cdot x_2 = b^2$. Além disso, os coeficientes dessa equação, comparados aos da equação da forma geral, podem ser reescritos e construídos com régua e compasso, fazendo as mudanças devidas.

Um exemplo abordado foi o caso em que para $\Delta \neq 0$, temos geometricamente que $\sqrt{\Delta}$ é um dos catetos de um triângulo retângulo de hipotenusa a e outro cateto igual a $2b$ (Figura 4). Agora sendo Δ menor que 0 (zero), lembrando que $\Delta = a^2 - 4 \cdot 1 \cdot b^2 = a^2 - (2b)^2$, temos pela equação que $a^2 < (2b)^2$, logo $a < 2b$, o qual chegamos em um absurdo, pela existência de um triângulo retângulo, pois estamos concluindo que sua hipotenusa é menor que um dos catetos.

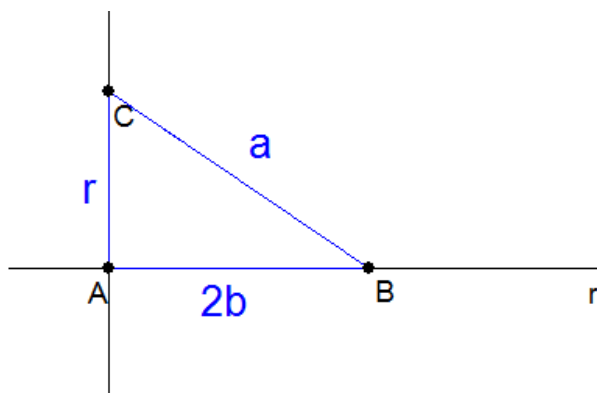


Figura 4. Construção de um triângulo retângulo em que $r = \sqrt{\Delta}$ feita no software KSEG.

No caso em que $\Delta > 0$ sabe-se que a equação tem duas raízes reais e distintas e a construção das raízes desta equação, $x_1 = a/2 - r/2$ e $x_2 = a/2 + r/2$, foi dada pela construção deste triângulo retângulo (Figura 4), de forma que D seja o ponto médio do segmento BC, DF pertença a reta paralela a AB obtendo-se assim o segmento $CF = r/2$. O círculo de centro C e raio CF determina G e H na reta BC tais que $DG = x_1$ e $DH = x_2$ são as raízes da equação dada.

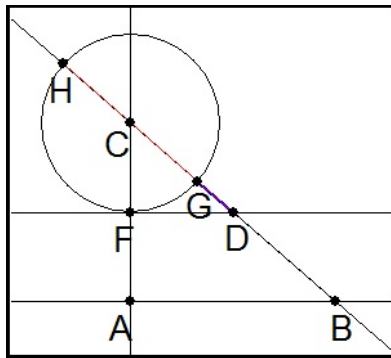


Figura 5. Construção das raízes da equação: $DG = x_1$ e $DH = x_2$, realizada no software KSEG.

Nessa abordagem destacamos a importância da representação visual de algo que normalmente é mostrado somente em fórmulas matemáticas. Segundo Garcia (2006), citado por Kushima, Pirkel e Steenbock (2009, p.98)

A fórmula favorece o processo mecânico de resolução de problemas, porém pouco favorece a compreensão de conceitos. A visualização torna-se uma forma mais efetiva para uma melhor compreensão da Matemática apesar da língua verbal e escrita ser mais utilizada em sala de aula. (Kushima, Pirkel & Steenbock, 2009, p.98).

Foi abordado também o conceito formal de número construtível e apresentado o princípio básico da solução do problema de números construtíveis. Ao final, concluímos a apresentação com o resultado que diz que um número é construtível quando é raiz de um polinômio de grau de potência de dois. Como aplicação apresentamos o problema clássico da duplicação do cubo (Silva, 2013).

Para o desenvolvimento do minicurso, foi utilizada uma sala com quadro negro, giz, apagador, régua e compasso para o quadro. Os participantes receberam: uma apostila desenvolvida pelos autores, régua, compasso, folhas em branco e um questionário para avaliação do minicurso. No questionário perguntou-se sobre a formação, a idade e o sexo dos participantes, além de quatro questionamentos: “Quais suas expectativas do minicurso?”, “O que vocês acham que podem aprender com o minicurso?”, “Suas expectativas foram alcançadas?”, “Ficou algo para ser esclarecido? Alguma dúvida?” e ao fim pedimos sugestões.

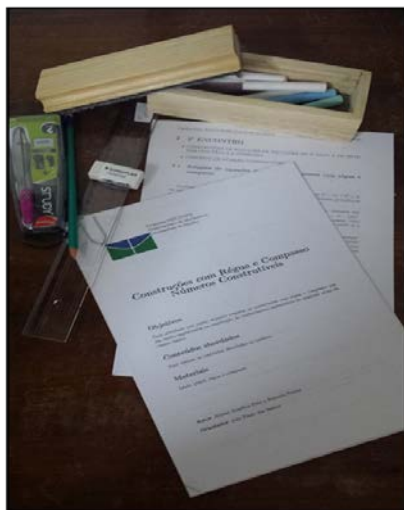


Figura 6. Materiais didáticos utilizados pelos participantes.



Figura 7. Régua e compasso utilizados pelos autores.

Análise dos Resultados

Relacionamos geometria e álgebra, apresentando novas resoluções de questões por meio de construções geométricas, como no caso das soluções das raízes do 2º grau do tipo $x^2 - ax + b^2 = 0$. Vimos que, de fato, algo novo foi apresentado para os participantes em que eles ficaram bastante satisfeitos da forma em que foi apresentado, por poderem ter uma nova visão do porque que quando o $\Delta < 0$ a equação não tem solução nos reais. Outro fator que os participantes avaliaram positivamente foi à apresentação do resultado de quando um número é construtível ou não com régua e compasso estar diretamente relacionado com a raiz de um polinômio que ele representa e consequentemente, a facilidade depois de compreender porque que raiz cúbica de dois não pode ser construtível com régua e compasso, relacionando tal fato com o célebre problema da duplicação do cubo, cuja história apresentada foi bastante apreciada pelos participantes.

Apesar de ter alguns resultados comuns nos dois encontros, como exposto acima, tivemos também suas particularidades.

Encontro do PETMAT-UnB

Nesse primeiro encontro, percebemos a importância do tema tratado. Todos os participantes do PETMAT-UnB demonstraram bastante interesse e vontade de entender as atividades propostas. Três dos participantes já haviam feito a disciplina “Geometria I”, que na Universidade de Brasília aborda geometria Euclidiana plana e construções com régua e compasso. Assim, estes serviram muitas vezes de mediadores para os demais, dos quais, nenhum deles tinha visto tais construções. Muitas dúvidas de nível básico surgiram, como por exemplo, alguns não sabiam o que era uma reta suporte, outro, um aluno do 3º semestre do curso de matemática, não sabia o que era Teorema de Tales, conteúdo abordado para a construção de ab e a/b . Foi dito que nunca havia visto tal conteúdo, o que evidencia a deficiência no ensino básico e na sua formação.

Como o primeiro encontro era mais prático e, como já comentado, alguns dos participantes já tinham feito Geometria I, tivemos um fator facilitador para o desenvolvimento das construções. Já o segundo encontro, promoveu maior tratamento teórico como também apresentação de conceitos e de novas metodologias.

De modo geral, o encontro mostrou fragilidades conceituais na formação básica dos participantes, em especial, sobre: geometria plana e álgebra.

Encontro do VI EBREM

Diferentemente do encontro com alunos do PETMAT-UnB, nosso minicurso do VI EBREM foi desenvolvido junto a professores já formados e alunos de graduação. A expectativa era que, ao menos alguns deles mostrassem algum conhecimento prévio sobre o conteúdo, principalmente do primeiro encontro, onde construções elementares foram abordadas, porém isso não aconteceu. Apenas dois participantes de um total de cinco professores formados, com experiência em sala de aula, mostraram algum conhecimento. Os demais não demonstraram familiaridade com os temas abordados. O que mais chamou atenção foi que esses últimos demonstraram dificuldade além da esperada, como por exemplo, diferenciar o que são relações métricas com as relações trigonométricas de um triângulo retângulo. Foi preciso mediar muitas vezes junto a eles para que os mesmos conseguissem terminar ou entender o que era proposto nas atividades.

Mesmo com todas as dificuldades observadas é importante destacar a iniciativa desses professores e alunos em buscar o aprimoramento dos seus conhecimentos. Todos mostraram muita atenção e envolvimento com as atividades. O minicurso possibilitou grande troca de experiência entre os participantes, devido a sua constituição diversificada que compreendia em um grupo pessoas que estão começando o curso e pessoas que estão em formação continuada, o que foi bastante relevante. Os estímulos de discentes quando transmitidos a docentes fazem muita diferença a ambos, pois estas experiências permitem aos alunos se colocarem no lugar de professores e aos professores aprenderem com os alunos.

As dificuldades gerais mais percebidas foram no início das construções de retas paralelas e perpendiculares e no estabelecimento do plano para a construção do segmento $a.b$. No primeiro caso, os participantes queriam usar régua para marcação de medidas e não tinham muita familiaridade com o compasso mostrando o desuso de tal instrumento. No segundo caso, a dificuldade foi em entender que eles precisariam primeiramente entender as relações dos segmentos no esquema do Teorema de Tales e somente depois utilizar a construção de uma reta paralela.

Diante de tudo isso, avaliamos que o objetivo foi alcançado. Como dito anteriormente, buscava-se proporcionar aos professores de Matemática uma atualização do conteúdo e uma nova didática, especificamente em nosso caso, com relação a construções com régua e compasso, apresentando a eles uma nova metodologia para mediar tais conteúdos, e uma atualização também para os graduandos futuros professores. Mas não podemos pensar que apenas essa ação seja suficiente para chegarmos ao ponto desejado: o resgate do uso das construções geométricas para o ensino de álgebra e geometria. Percebemos que esses professores ficaram motivados, porém só motivação não é o suficiente uma vez que muitos deles mostraram determinadas dificuldades que apenas um minicurso não é suficiente para supri-las. Além disso, foi possível observar os pontos que devem ser melhorados para suprir a deficiência de conteúdo apresentado.

Conclusões

Nosso intuito em compreender a importância das construções com régua e compasso no ensino para os participantes do minicurso foram alcançados. Mostramos aos professores e aos

alunos mais um método de ensino e aprendizagem, fazendo o uso de situações problemas para as construções dos números.

Mostramos, também, aos professores que construções com régua e compasso são uma forte ferramenta no ensino da matemática, pois permite aos alunos ampliar o raciocínio matemático devido a possibilidade de manipulação e visualização. Quanto aos alunos, foi observado o desenvolvimento de pensamento sistêmico, de cooperação e do estabelecimento de conexões entre conhecimentos prévios; habilidades necessárias a sua formação.

A sequência didática por nós abordada, permitiu observar o ciclo vicioso que tanto alunos como professores têm em resolver problemas de construções geométrica seguindo o passo a passo, valorizando o resultado ao invés do processo. Os recursos utilizados por meio da metodologia da resolução de problemas, passando primeiramente pela compreensão do problema, estabelecimento e execução de um plano, juntamente com a análise dos resultados, possibilitou o entendimento de fato do processo de construção de uma reta paralela, utilizando a construção do losango, em uma das atividades propostas no minicurso.

Acreditamos que as dificuldades conceituais e metodológicas apresentadas por alguns professores, acontecem devido a inúmeros motivos, entre eles: limitações da formação inicial, poucas oportunidades de formação continuada, alta carga didática nas escolas, como também por não abordarem o assunto no dia a dia em sala de aula.

O presente relato de experiência amplia nossa reflexão sobre a formação dos professores na graduação e da consequente formação dos alunos que ingressam na universidade. O abandono de determinados conteúdos por parte dos professores, as maneiras rígidas de apresentação dos conteúdos acabam inibindo alguns raciocínios matemáticos dos alunos. Assim, determinados conteúdos acabam permanecendo com um bloqueio para o discente, futuro docente. Visto que muitos alunos segundo Pais (2011, p.26) “arrastam, por muitos anos, dificuldades referentes à aprendizagem de conteúdos estudados nas primeiras séries da escolaridade, gerando os conhecidos “traumas” pela resolução de problemas, em função da experiência particular por ele vivenciada.”

O objetivo de resgatar os elementos básicos de construções geométricas no momento do minicurso foi cumprido, mas, pelos seus envolvimento e dúvidas durante o minicurso, tememos que, caso não aplicado de maneira recorrente em sala de aula, o tema seja esquecido. Isso acaba gerando um desconforto, principalmente para os já formados, com isso eles terminam ensinando o que eles sabem, deixando de lado aquilo que não sabem tanto assim. Ressaltamos aqui a importância da formação continuada, a busca por mais conhecimentos e metodologias como destacou um professor, no questionário em que perguntávamos quais eram as suas expectativas para o minicurso: “Expectativas de ver novidades que possam ser aplicadas no Ensino Fundamental II”.

Referências

- Baran, I. (2004). *KSEG: Software de Geometria Dinâmica* (versão 0.401) [Software]. Disponível: <http://www.mit.edu/~ibaran/kseg.html>
- Ferreira, F.A., & Miranda, D.F. de (2008, setembro). *Demonstrações em Geometria Euclidiana: uma sequência didática como recurso metodológico para o seu ensino*. XII Encontro Brasileiro dos Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática, Rio Claro, SP, Brasil, 7.

- Kushima, A.A., Pirkel, J., & Steenbock, P.R. (2009). O ensino de geometria com suporte de desenho geométrico [versão eletrônica], Revista Científica do Colégio Militar de Curitiba (Kur'Yt'yba), 1(1), 87-103.
- Nacarato, A. M. (2000). *A educação continuada sob a perspectiva da pesquisa-ação: currículo em ação de um grupo de professores ao aprender ensinando geometria*. Tese (Doutorado em Educação: Educação Matemática) — FE, Unicamp, Campinas, SP, Brasil.
- Pais, L.C. (2011). *Didática da Matemática: uma análise da influência francesa*. 3.ed. (Coleção Tendências em Educação Matemática). (p. 26). Belo Horizonte: Autêntica.
- Saldanha, M.A. (2012, agosto). *Resolução de problemas: uma metodologia alternativa para o ensino e a aprendizagem de matemática nas escolas do CASE*, III EIEMAT Escola de Inverno de Educação Matemática, 1º Encontro Nacional PIBID Matemática, Santa Maria, RS, Brasil, 1.
- Silva, L.P., Jr. (2013). *Construções geométricas por régua e compasso e números construtíveis*. Dissertação de Mestrado Profissional - PROFMAT, Universidade Federal de Campina Grande, Campina Grande, PB, Brasil. Disponível: <http://www.dme.ufcg.edu.br/PROFmat/TCC/Luis.pdf>
- Wagner, E., & Carneiro, J.P.Q. (2007). *Construções Geométricas*. 2. ed. (Coleção do Professor de Matemática). (pp.18-29). Rio de Janeiro: SBM.

Explorando o fractal Tetra Círculo: possibilidade para a introdução de Progressões Geométricas

Charles Bruno da Silva **Melo**

Centro Universitário Franciscano de Santa Maria

Brasil

charlesdemelo@yahoo.com.br

José Carlos Pinto **Leivas**

Centro Universitário Franciscano de Santa Maria

Brasil

leivasjc@unifra.br

Resumo

É preciso relacionar os conteúdos matemáticos com os demais setores da sociedade, sobretudo reconhecendo a tecnologia. É fundamental que se busque novas propostas para o ensino da Matemática. Este trabalho apresenta uma investigação desenvolvida em uma escola pública estadual no município de Candelária/RS, Brasil, em uma turma do 2º ano do Ensino Médio. O objetivo foi introduzir o conteúdo de Progressões Geométricas por meio do fractal Tetra Círculo, a partir da utilização do *software* GeoGebra, bem como o de apresentar o conteúdo matemático de uma forma atraente, pois a tecnologia desperta o interesse dos estudantes. A análise das atividades teve como aporte teórico as fases da investigação de um padrão de Herbert e Brown (2000): procura do padrão, reconhecimento do padrão e generalização. Foi alcançado êxito no trabalho, pois possibilitou ao professor refletir sobre sua prática e ao aluno, que se tornou um sujeito ativo no processo de construção do conhecimento.

Palavras chaves: fractal Tetra Círculo, progressões geométricas, GeoGebra.

Introdução

Nossa sociedade está passando por inúmeras transformações, a globalização e as tecnologias têm mudado o nosso dia-a-dia. Estas evoluções provocam algumas mudanças também no âmbito educacional. Atualmente, se tem discutido muito sobre a abordagem de conteúdos em sala de aula e o uso de novas tecnologias no ensino, pois o contexto atual exige uma educação mais completa, uma educação que realmente seja eficaz e atinja o mundo de uma forma global.

[...] chama-se a atenção para a necessidade de se relacionar a Matemática com os demais setores da sociedade, sobretudo reconhecendo os novos desenvolvimentos das ciências e da tecnologia. O grande desafio que nós, educadores matemáticos, encontramos é tornar a matemática interessante, isto é, atrativa, relevante, isto é, útil; e atual, isto é, integrada no mundo de hoje (D' Ambrosio, 2001, p. 14-15).

Nossa prática em sala de aula permite crer que novas formas de abordar conteúdos tornam as aulas de Matemática mais atraentes e produtivas. Nesse sentido, entende-se que é necessário que se crie possibilidades que desenvolvam no aluno capacidades como, questionar, reconhecer,

relacionar e criar, abordando as tecnologias como ferramentas que podem auxiliar tanto professores quanto alunos no processo de ensino e aprendizagem.

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental (Brasil, 1998), há a recomendação de que os recursos tecnológicos podem ser usados em aulas de Matemática com várias finalidades, tais como “meio para desenvolver autonomia pelo uso de softwares que possibilitem pensar, refletir e criar soluções”. (p. 44)

Partindo dessa ideia buscou-se explorar o Fractal Tetra Círculo por meio do *software* GeoGebra, que é um programa de geometria dinâmica livre, adequado para a análise gráfica. Nele pode-se tanto trabalhar conceitos geométricos como algébricos, visto que a Geometria Fractal possui um vasto campo de aplicação e construção de conceitos matemáticos.

Segundo Nunes (2010):

a exploração da geometria fractal, em contexto de sala de aula, proporciona o desenvolvimento das atitudes, dos valores e das competências dos alunos, na medida em que promove a curiosidade e o gosto de aprender, de pesquisar e de investigar; impulsiona a utilização da matemática na interpretação do real, reconhecendo formas e processos que envolvem conceitos matemáticos; ajuda na compreensão dos conceitos de perímetro, área e volume; promove a pesquisa de padrões e regularidades formulando em seguida generalizações em situações diversas, nomeadamente em contextos numéricos e geométricos (p. 74).

Utilizou-se, na investigação, o reconhecimento do padrão do Tetra Círculo, que assim como os demais fractais, está condicionado a modelos numéricos, algébricos e geométricos. Compreende-se que “ao conceito de padrão estão associados termos tais como: regularidade(s), sequência, motivo, regra e ordem” (Vale et al., 2005, p. 3). Ele pode ser um grande aliado no processo de introdução e motivação para o conteúdo de progressões geométricas, o que será mostrado neste trabalho.

Para tanto, a análise das atividades realizadas *in locus* teve como aporte teórico as fases da investigação de um padrão de Herbert e Brown (2000, p. 125): procura do padrão, reconhecimento do padrão e generalização¹.

Conceito de Fractal

Influenciado pelos trabalhos de alguns matemáticos, como George Cantor e Giuseppe Peano, no ano de 1970 Benoit Mandelbrot publicou o livro “*The Fractal Geometry of Nature*”, no qual introduz o termo “fractal”, que, segundo Barbosa (2005), tem sua origem no latim, do adjetivo *fractus*, cujo verbo correspondente é *fragere*, o qual significa quebrar: criar fragmentos irregulares, fragmentar. Ele utilizou o termo Fractal para denominar as figuras que representam aspectos da natureza.

Um fractal é definido por três características básicas: autossimilaridade, complexidade infinita (iteração) e a dimensão fracionária. De acordo com Carvalho (2005), autossimilaridade é a mais simples e marcante das características dos fractais; significa que cada parte em escala menor é exatamente igual ou semelhante à parte inicial, ou seja, cada parte ampliada da imagem será igual a da inicial.

¹ Pattern seeking, pattern recognition e generalization.

A complexidade infinita está relacionada à existência de um processo cíclico, o que significa que uma determinada operação repete-se infinitamente, de acordo com essa propriedade; cada fractal em sua construção dispõe de um número infinito de procedimentos. Sobre essa característica, Capra (1996) a define como “a técnica principal para se construir um fractal é a iteração - isto é, a repetição incessante de certa operação geométrica” (p. 119).

Ao se referir à dimensão fracionária de um fractal, Tratch (2008) afirma que ela “é expressa geralmente por um valor não inteiro e está relacionada com sua estrutura, seu comportamento e seu grau de irregularidade” (p. 18).

Fractal Tetra Círculo

O fractal Tetra Círculo foi criado em 1995 pelo Laboratório de Ensino da Matemática - LEM do IME-USP com a finalidade de explorar sistemas de geometria interativa. Ele é um fractal geométrico, pois é baseado em uma circunferência com quatro pontos equidistantes que a divide em quatro arcos congruentes, os quais são o centro das novas circunferências de raios menores. Essas novas circunferências possuem raios que são a metade do raio da circunferência inicial. Repetindo o processo, essas quatro novas circunferências geram o nível seguinte do fractal, e, assim sucessivamente, como ilustrado na figura 1.

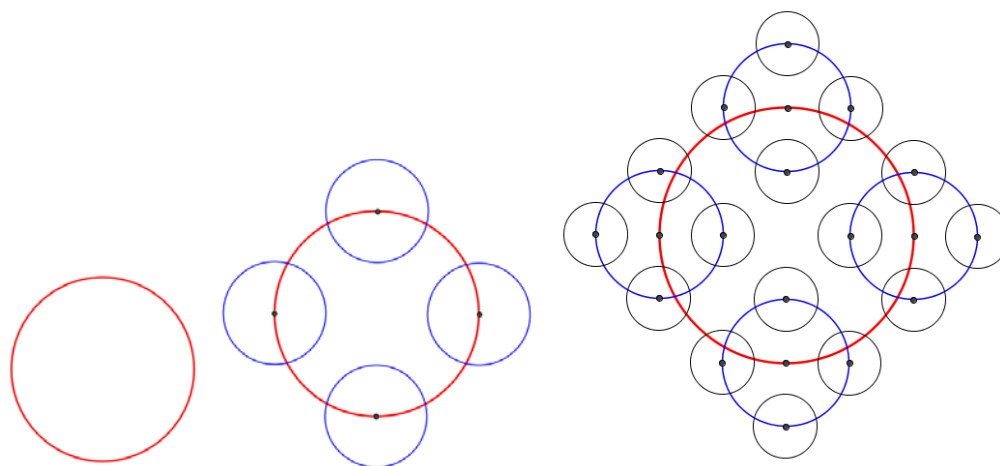


Figura 1. Fractal Tetra Círculo e suas iterações. Construção própria.

Procura do padrão, Reconhecimento do padrão e Generalização

Conforme Herbert e Brown (2000), a investigação de padrões passa pelas fases: procura do padrão, reconhecimento do padrão e generalização. Com base nas experiências realizadas com alunos do sexto ano do Ensino Fundamental, as autoras enumeraram essas três fases como satisfatórias para classificar o desenvolvimento dos alunos durante a investigação de padrões. Elas são claramente identificadas no momento em que se trabalha com sequências, nesse caso, com progressões geométricas.

Na primeira fase, a Procura do Padrão, os alunos buscam determinado padrão em uma situação dada. No caso do trabalho que aqui se apresenta, ela consistiu na etapa em que eles se dedicaram à compreensão da regularidade que faz com que o fractal repita sua estrutura inicial, ou seja, no processo da construção do Tetra Círculo no *software* Geogebra.

Na segunda fase proposta por Herbert e Brown, os alunos reconhecem o padrão por meio de diferentes representações que identificam durante a compreensão da situação dada. Na atividade de exploração, eles passaram por essa fase ao reconhecerem o padrão utilizando tabelas e outras formas de representações matemáticas, como frações e potências.

Por fim, os alunos do experimento de Herbert e Brown atingiram a terceira fase, a de Generalização, quando generalizaram o padrão e relataram isso retomando a situação inicial. Na atividade com o Fractal Tetra Círculo que se realizou, essa fase foi atingida quando os alunos conseguiram, ao passar de um nível posterior a um nível qualquer, escrever uma fórmula geral expressando o conteúdo matemático explorado na situação.

Relato e análise da experiência com o Fractal Tetra Círculo

As atividades foram aplicadas em uma turma do segundo ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual, na qual o primeiro autor é regente de classe, no município de Candelária-Rio Grande do Sul, Brasil. O tempo de execução foi de 4h/aula de 50 minutos cada. Os alunos trabalharam em duplas no laboratório de informática da escola.

Inicialmente, foi solicitado aos alunos uma pesquisa na *web* sobre fractais, na qual deveriam buscar o conceito e as principais características, bem como exemplos. Essa tarefa foi enviada para o professor via *email* e discutida na aula, como ilustrada na figura 2.

TRABALHO - o que é fractal(2)

Para Eu

Um fractal é um objeto geométrico que pode ser dividido em partes, cada uma das quais semelhante ao objeto original. Diz-se que os fractais têm infinitos detalhes, são geralmente autossimilares e independem de escala. Em muitos casos um fractal pode ser gerado por um padrão repetido, tipicamente um processo recorrente ou iterativo. O termo foi criado em 1975 por Benoît Mandelbrot, matemático, que descobriu a geometria fractal na década de 70 do século XX, a partir do adjetivo latino *fractus*, do verbo *frangere*, que significa quebrar.

Responder, Responder a todos ou Encaminhar | Mais

Figura 2. Email enviado pelo aluno A.

A figura 2 ilustra a resposta do aluno A, o qual captura da internet o conceito de fractal e algumas considerações a respeito do tema. No que segue, apresenta-se; na figura 3, alguns dos fractais encaminhados ao professor pelos alunos.

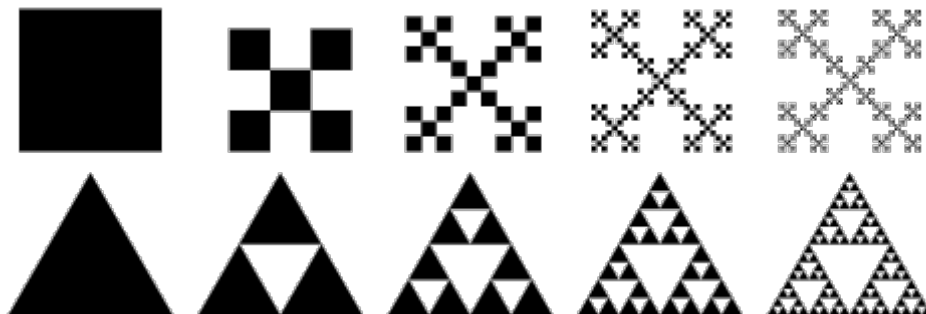


Figura 3. Alguns exemplos de fractais enviados pelos alunos.

Posteriormente, os alunos receberam um roteiro para a construção do Fractal Tetra Círculo e, como já haviam utilizado o Geogebra em outras aulas, não houve questionamentos sobre a construção.

ROTEIRO – FRACTAL TETRA CÍRCULO

- Inicialmente abra o Geogebra.
- Retire os eixos e a janela de álgebra.
- Clique na ferramenta  (Dica escolha o raio do círculo maior ou igual a 10).
- Trace uma reta,  de modo que um dos pontos coincida com a origem do círculo.
- Trace uma reta perpendicular  a anterior.
- Marque os pontos de interseção do círculo com as retas. 
- Em cada ponta de interseção, construa um novo círculo, porém com metade do raio anterior. 
- Repita o processo por três vezes. Sempre o valor do raio, metade do anterior.

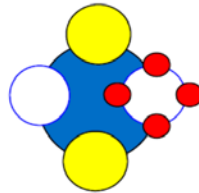


Figura 4. Roteiro para a construção do Tetra Círculo.

A construção do fractal durou uma aula e ocorreu de forma tranquila sem dificuldades. Foi pedido também, após a conclusão pelos alunos dessa parte, para colorir o Tetra Círculo, de modo a respeitar cada iteração realizada. Na figura 5 é possível verificar claramente o processo a cada iteração.

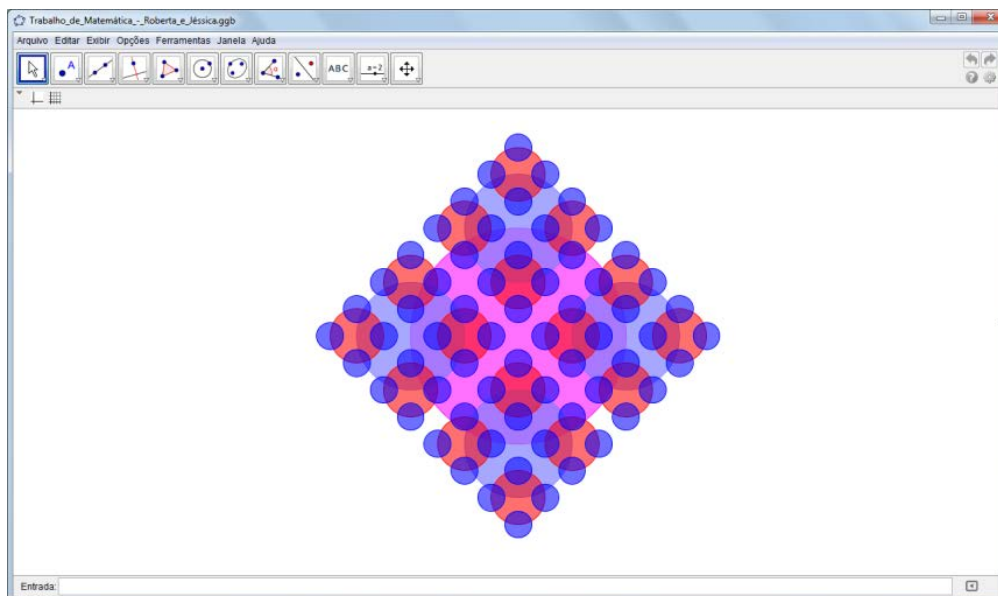


Figura 5. Fractal Tetra Círculo construído por uma dupla de alunos.

Com o fractal pronto, foi questionado qual tipo de regularidade existia no Tetra Círculo. A maioria dos estudantes respondeu que o raio era sempre a metade da iteração anterior e que os

pontos nos círculos eram equidistantes. Quando questionados sobre os níveis de iteração, afirmaram que era infinito. Nesse momento, os alunos puderam explorar as ferramentas *zoom*, *ampliar* e *reduzir*, tal fato evidencia como o Geogebra pode facilitar a manipulação e a visualização.

Através de deslocamentos aplicados aos elementos que compõem o desenho, este se transforma, mantendo as relações geométricas que caracterizam a situação. Assim, para um dado objeto ou propriedade, temos associada uma coleção de ‘desenhos em movimento’ e os invariantes que aí aparecem correspondem às propriedades geométricas intrínsecas ao problema. E este é o recurso didático importante oferecido: a variedade de desenhos estabelece harmonia entre os aspectos conceituais e figurais; configurações geométricas clássicas passam a ter multiplicidade de representações; propriedades geométricas são descobertas a partir dos invariantes no movimento” (Gravina, 1996).

Segundo as fases de Herbert e Brown (2000), os alunos durante estas atividades estavam na fase de Procura do Padrão na situação dada, pois buscavam extrair a informação de um caso específico. Quando perguntado sobre as regularidades do Fractal Tetra Círculo, a visualização ganhou ênfase, pois as características geométricas de autossimilaridade e complexidade infinita foram observadas ainda que não formalizadas.

Na sequência, foi solicitada a criação de uma tabela, a qual deveria ser preenchida de acordo com cada iteração. Nesse momento, foi revisto o conceito de círculo e de circunferência, já que a turma havia trabalhado no início do ano letivo o conteúdo de comprimento de arco, optou-se por explorar os elementos do fractal como circunferências.

ITERAÇÃO	Nº TOTAL DE CÍRCULOS USADOS NESTA ETAPA	TOTAL DE CIRCUNFERÊNCIA	MEDIDA DO RAIO	COMPRIMENTO DA CIRCUNFERÊNCIA (UNIDADE DO RAIO).
0	1	1	10	$2\pi \cdot 10 = 20\pi$
1	4	5	5	$2\pi \cdot 5 = 10\pi$
2	16	21	2,5	$2\pi \cdot 2,5 = 5\pi$

Figura 6. Reconhecimento do padrão: tabela preenchida pelos alunos.

Após o preenchimento da tabela, os alunos foram questionados sobre quantas circunferências teriam a terceira e a quinta iteração. A maioria observou que existia um padrão de regularidade, no qual era a multiplicação do número anterior de circunferências por quatro, concluindo, então, que o número de circunferências seria de 64 e 1024, respectivamente, para cada iteração.

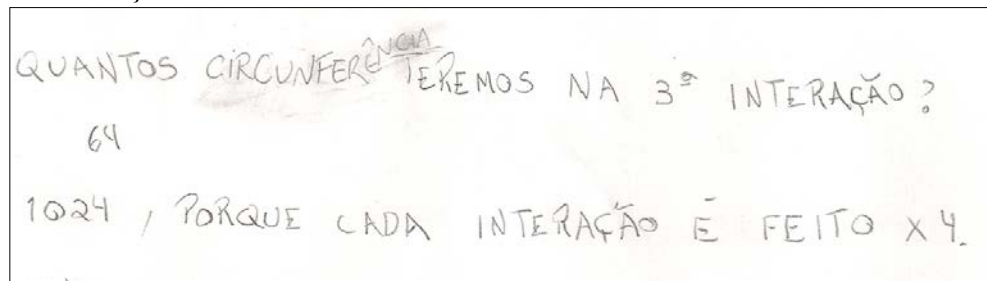


Figura 7. Reconhecimento do padrão: identificando o número de circunferências feito pelo aluno B.

Foi questionado, posteriormente, o que se pode observar em relação ao comprimento da circunferência após cada iteração, bem como qual seria o raio da circunferência na quinta iteração. Os alunos não tiveram dificuldade nessa atividade, pois afirmaram que a cada iteração a medida do raio se reduzia pela metade, logo com o comprimento da circunferência ocorria o mesmo. Cabe lembrar que a medida do raio era diferente para cada dupla de alunos, pois foi exigido apenas que o comprimento fosse maior ou igual a 10 uc.

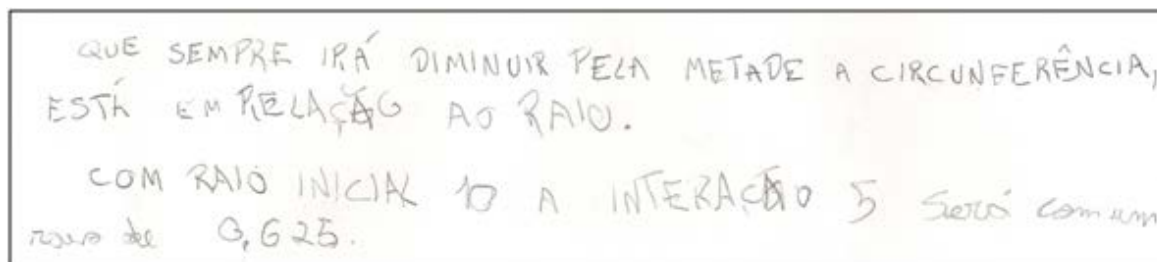


Figura 8. Reconhecimento do padrão: identificando relações entre o raio e o comprimento das circunferências.

Em seguida, depois dos alunos apresentarem suas observações, foi explorado o fato de que estas sequências eram progressões geométricas. A partir desse momento, foi explicado que, quando em uma sequência numérica o termo seguinte é obtido por meio de uma multiplicação por um número que é sempre o mesmo, dizemos que esta é uma progressão geométrica, e este valor que é multiplicado é chamado de razão.

Outro ponto importante, nessa etapa, foi de muitos alunos observarem que essas sequências são expressas por funções exponenciais, conteúdo este que haviam estudado no primeiro ano do Ensino Médio. Esse fato foi essencial na descoberta das leis de formação para o número de circunferências geradas a cada iteração e a para a medida do raio.

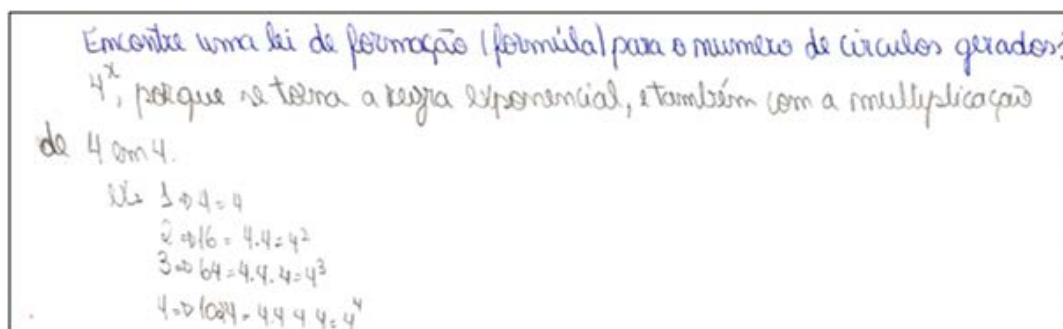


Figura 9. Lei de formação para o número de novas circunferências geradas obtidas por uma dupla.

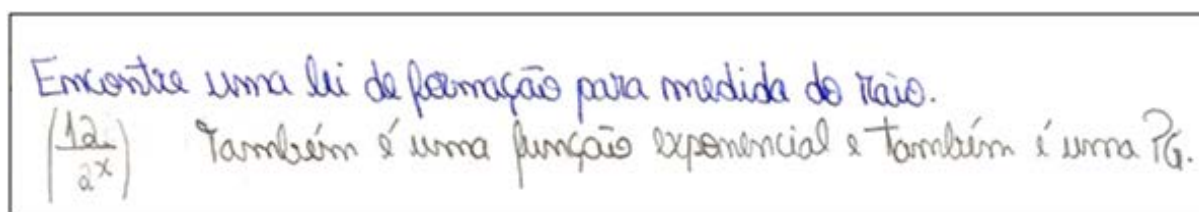


Figura 10. Lei de formação para a medida do raio a cada iteração.

Durante a realização dessas questões, os alunos passaram pela fase de Reconhecimento do Padrão, pois reconheceram o padrão para o caso específico e o transcreveram usando tabelas e

representando os valores encontrados por meio de frações e potências, bem como verificando a ligação entre progressões geométricas e a função exponencial. De acordo com Herbert e Brown (2000), é nessa fase que os alunos buscam representações matemáticas que expressem as observações realizadas com a exploração do padrão.

O próximo passo foi questionar sobre a variação de outros níveis do padrão. Solicitou-se que os alunos tentassem escrever como poderia ser encontrada a medida do raio de circunferências no caso de um nível posterior ao n , o nível $n + 1$. Foi registrado que teriam $\frac{a_1}{2^{n+1}}$ no nível $n + 1$, onde a_1 é a medida do raio da circunferência inicial. Também foi questionado quantas interações eram necessárias para que se tivesse menos de 1000 circunferências e que não ultrapasse 5000 circunferências.

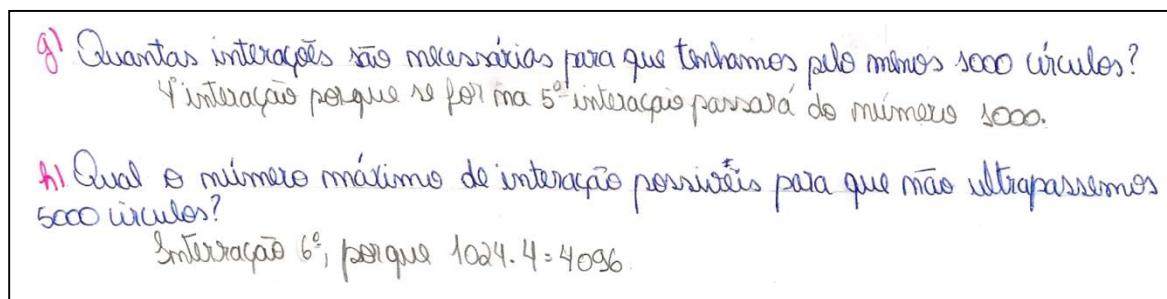


Figura 11. Últimas questões: processo de generalização.

Essas questões se enquadram na terceira fase destacada por Herbert e Brown (2000), a da Generalização, o que é possível afirmar com base na fórmula geral que os alunos escreveram para um nível posterior a um nível qualquer, ou seja, ao nível $n + 1$ e nas afirmações que os alunos foram capazes de realizar posteriormente.

Cabe lembrar também que, durante toda a realização das atividades, os alunos fizeram o uso de ferramentas que permitiram uma investigação dinâmica e uma interação com os objetos construídos a partir do Geogebra, o que contribuiu significativamente para o sucesso da obtenção das conclusões corretas.

Para finalizar, foi formalizado o conteúdo de progressões geométricas, a partir dessas atividades, bem como das observações que emergiram como a identificação do termo geral com a função exponencial com domínio o conjunto dos naturais. Uma progressão geométrica é definida por Lima (2008, p.100-101) como

uma sequência de números reais é uma função $x: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, definida no conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ dos números naturais e tomando valores no conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais. O valor $x(n)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, será representado por x_n e chamado o termo de ordem n , ou n -ésimo termo da sequência. Escreveremos $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots)$, ou $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, ou simplesmente (x_n) , para indicar a sequência x .

Considerações Finais

Com o trabalho desenvolvido se observou que é possível introduzir o conteúdo de progressões geométricas a partir da exploração do Fractal Tetra Círculo no *software* GeoGebra, uma vez que os estudantes conseguiram desenvolver todas as atividades propostas em sua plenitude.

Aponta-se, também, que o uso da tecnologia foi um aliado ao trabalho do professor e um facilitador do processo de ensino/aprendizado dos estudantes, pois possibilitou o estímulo à experimentação, simulação e testes, o que não seria possível apenas com registros manuais.

A exploração do fractal propiciou que os alunos estabeleçam relações entre diferentes formas de representações, chegando até a estabelecer a ligação entre progressões geométricas e funções exponenciais com domínio no conjunto dos naturais.

Entende-se que o objetivo do experimento foi alcançado, já que possibilitou aos alunos aprenderem em ação, ou seja, foram sujeitos ativos no processo de construção de seu próprio conhecimento. Houve uma reflexão positiva sobre a prática docente, já que o professor tinha receio sobre o sucesso da aplicação da atividade antes de efetivá-la. Também, ocorreu a possibilidade de interdisciplinaridade com Artes. Essa, que já se encontra em processo, no qual está sendo organizada uma exposição a ser realizada na escola com os fractais produzidos relacionado com a sobreposição de cores.

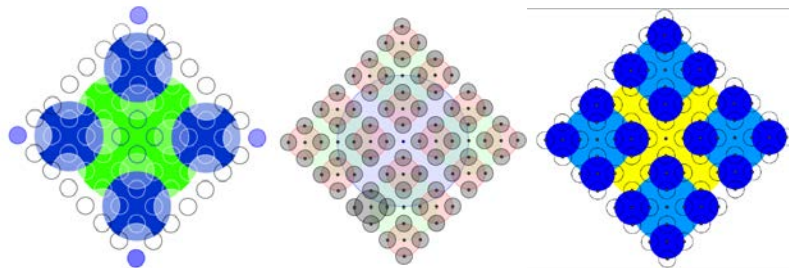


Figura 12. Construções para a exposição.

Referências e bibliografia

- Barbosa, R. M. (2005). *Descobrendo a Geometria Fractal para sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.
- Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Brasília.
- Capra, F. (1996). *A teia da vida: uma nova compreensão científica dos sistemas vivos*. São Paulo: Pensamento-Cultrix.
- Carvalho, H. C. (2005). *Geometria Fractal: perspectivas e possibilidades no ensino de matemática* (Dissertação de Mestrado em Educação). 101 f. Curso de Pós- Graduação em Ensino em Ciência e Matemática, Universidade Federal do Pará, Belém.
- D'Ambrosio, U. (2001). Desafio da Educação Matemática no novo milênio. *Revista da Sociedade Brasileira de Matemática*, 8(11), 14-17, dez. São Paulo,
- Gravina, M. A. (1996). *Geometria Dinâmica: Uma nova abordagem para o aprendizado da Geometria*. VII *Simpósio Brasileiro de Informática na Educação*, Belo Horizonte.
- Herbert, K., & Brown, R. (2000). Patterns as tools for algebraic reasoning. Reimpresso por Barbara Moses, ed., *Algebraic Thinking, Grades K-12: Readings from NCTM's School – Based Journals and Other Publications*. Reston, Va.: *National Council of Teachers of Mathematics*.
- Lima, E. L. (2008). *Curso de Análise* (Vol. 1, 12ª ed.). Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada.

Nunes, R. S. R. (2006). *Geometria Fractal e Aplicações* (Dissertação de Mestrado). Departamento de matemática Pura, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Disponível em: <<http://www.fc.up.pt/pessoas/jfalves/Teses/Raquel.pdf>> Acesso em: 07 jul. 2014.

Tractch, C. (2008). *Investigando matematicamente alguns fractais por meio do software Geogebra*. União da Vitória. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2009_unicentro_matematica_md_claudia_tratch.pdf>. Acesso em: 4 jul. 2014.

Vale, I., Palhares, P., Cabrita, I., & Borralho, A. (2005). *Os Padrões no ensino e aprendizagem de Álgebra*. Actas do XIV Encontro de Investigação em Educação Matemática da SPCE.

Geometria Analítica e Sistemas de Equações Lineares: Transição Ensino Médio e Superior

Marlene Alves **Dias**
 Universidade Anhanguera
 Brasil
alvesdias@ig.com.br
 Sirlene Neves de **Andrade**
 Diretoria Regional Sul 3 – São Paulo
 Brasil
sirlene-neves@hotmail.com

Resumo

Apresentamos aqui parte da pesquisa sobre a transição ensino médio e superior para as noções de geometria analítica e sistemas de equações lineares. O objetivo da pesquisa sendo de analisar as relações institucionais esperadas e existentes para o desenvolvimento das noções de geometria analítica e sistemas lineares na transição entre os ensinos médio e superior. O referencial teórico central é a TAD, complementado pelas noções de quadro, ponto de vista e de níveis de conhecimento segundo a didática francesa. Trata-se de uma pesquisa qualitativa, documental na qual analisamos documentos oficiais e livros didáticos e as macroavaliações do SARESP. Os resultados encontrados mostram uma preocupação institucional em articular ostensivos e não ostensivos associados às noções de geometria analítica e sistemas lineares, um abandono das questões associadas à geometria analítica nas avaliações institucionais do ensino médio e uma preponderância de tarefas intra e extramatemáticas para o estudo dos sistemas lineares.

Palabras chave: geometria analítica, sistemas de equações lineares, relação institucional e pessoal, didática da matemática.

Introdução

Os problemas gerais encontrados no ensino de matemática quando da transição entre o ensino médio e o ensino superior, tanto no Brasil como na França, são muito próximos, como é possível observar por meio do trabalho de Robert (1998), no qual a autora destaca algumas das insatisfações encontradas pelos professores em relação a essa passagem entre as duas etapas escolares consideradas. Algumas dessas insatisfações são: os fracassos numerosos, a perda de sentido, a falta de curiosidade, as dificuldades para entrar no pensamento científico por parte dos estudantes. Isto leva os professores às dificuldades de gestão das classes, que são cada vez mais heterogêneas, e à implementação de novas propostas, muitas vezes não bem compreendidas ou julgadas redutoras por parte dos mesmos. Essas propostas, em geral, demandam a aplicação de novas estratégias de trabalho, incluindo as novas tecnologias, que por sua vez têm especificidades próprias para cada conteúdo, de modo que exigem um preparo específico para que se possa utilizá-las de forma a atender os objetivos propostos.

Em função desse quadro de dificuldades encontradas, tanto pelos estudantes como pelos professores, propõem-se estudos cujo objetivo final seja a construção de cenários de aprendizagem em que estudantes possam trabalhar com seus conhecimentos retrospectivos de forma independente nas tarefas e atividades que lhes são propostas. No entanto, esse trabalho deve ser mediado pelo professor, pois é ele que propõe a tarefa por meio de atividades.

É preciso ainda considerar questões como as diferentes possibilidades de abordagem, das noções em um determinado quadro, conforme Douady (1984), que no caso dessa pesquisa são as noções de geometria analítica e de sistemas de equações lineares.

Além disso, Artigue (2004) ao abordar o tema da transição entre o ensino médio e superior observa a importância de se considerar o desafio imposto pelas questões a ele associadas, identificando para tal: a massificação do ensino, a introdução das mudanças tecnológicas, o desgaste da imagem da ciência e o fato da educação, apesar de ter um valor fundamental, levar a uma concepção que a torna uma mercadoria, submetendo, assim, os sistemas educativos às regras de mercado.

Artigue (2004) salienta também que os desafios ultrapassam o tratamento matemático e didático, mas ela afirma só ter condições de tratar algumas questões sob esta ótica. Após observar que a Matemática é apresentada como um edifício bem estruturado que possibilita um desenvolvimento e uma expansão constante, a autora considera esta imagem como parcial, pois a Matemática pode ser vista também como uma cultura.

Seguindo essa reflexão, a autora cita o trabalho de Hall (1998 apud Artigue 2004) que pondera sobre a existência de três níveis na cultura matemática, a saber:

- o *nível formal* que corresponde às crenças sobre o que é a matemática, quais são suas ferramentas e os métodos que a legitimam;
- o *nível informal* que está associado aos esquemas de ação e de pensamento, às formas não explícitas de desenvolver, de pensar e raciocinar em matemática que estão associadas à experiência e à prática;
- o *nível técnico* que corresponde às técnicas institucionalizadas e às teorias, isto é, à parte explícita do conhecimento matemático.

Na sequência, Artigue (2004) avalia que as fontes que permitem compreender como funcionam essas culturas são os programas, os textos oficiais e livros didáticos. Além destes, há ainda as ferramentas de avaliação e as observações diretas de estudantes e do funcionamento das diferentes classes.

Artigue (2004) observa que existem restrições relativas aos momentos e à introdução dos conceitos que fazem com que os estudantes tenham diferentes meios para que possam experimentar e conjecturar em função das situações que lhes são propostas e das especificidades de seus cursos. Existe ainda uma diversidade de dispositivos de ensino que tornam mais difícil a estruturação dos saberes aliado com a peculiaridade de diferentes professores para o encaminhamento de cada dispositivo. A autora salienta a dificuldade enfrentada pelos professores, em função de sua formação universitária e da necessidade de conduzir um ensino pluridisciplinar.

Isso conduz Artigue (2004) a ponderar que, para os estudantes, a cultura se caracteriza pelo encontro de diversos quadros e problemas de forma superficial, o que não permite que os

discentes operacionalizem, estabilizem e estruturem seus conhecimentos. Ela observa ainda que algumas práticas pedagógicas contribuem para fortalecer essas dificuldades.

A partir dessas reflexões, Gueudet (2008) faz uma síntese de pesquisas em didática da matemática sobre a transição entre ensino médio e ensino superior, estudando especialmente aquelas associadas à entrada na universidade.

Gueudet (2008) faz um estudo das pesquisas existentes por meio das categorias por ela consideradas, isto é, as quatro diferentes formas de olhar a questão da transição, a saber: o *olhar sobre o modo de pensar*, que corresponde aos saberes intrinsecamente mais complexos os quais necessitam de novos modos de pensar, o *olhar sobre a organização dos conhecimentos* que corresponde à nova organização em rede dos conhecimentos, que coloca em evidência a necessidade de fazer alusão às novas práticas de referência, o *olhar sobre a linguagem e os modos de comunicação* que corresponde a empregar uma linguagem matemática diferente, que exige novos símbolos e um novo tipo de discurso e finalmente o *olhar centrado na instituição*, observando que a matemática praticada no ensino médio é diferente daquela que será trabalhada no ensino superior.

Além disso, as abordagens associadas a essas diferentes formas de olhar a questão da transição necessitam que determinadas noções estejam disponíveis e para tanto é preciso levar em conta outros fatores, como por exemplo, culturais, condições dos diferentes sistemas educativos e expectativas em relação ao trabalho dos estudantes. Esses fatores são diferentes de uma etapa escolar a outra e propiciam novos estudos que ajudam estudantes a trabalhar com diferentes formas de pensamento.

Assim, a existência de diferentes formas de tratamento de noções matemáticas deixa evidente a importância de se considerar as relações institucionais esperadas e existentes para o ensino médio que podem auxiliar o professor a determinar a maneira de abordar os conceitos e noções matemáticas em função do seu grupo de estudantes, não esquecendo de considerar os conhecimentos retrospectivos dos mesmos.

Dessa forma, esse estudo tem como objetivo analisar as relações institucionais esperadas e existentes por meio da análise de tarefas, técnicas, tecnologias e teorias em função dos objetos ostensivos e não ostensivos a elas associados.

Sendo assim, a análise das tarefas é fundamentada na Teoria Antropológica do Didático (TAD) de Chevallard (1992,1996) e Bosch e Chevallard (1999), na abordagem teórica de Robert (1998), em termos de níveis de conhecimentos esperados dos estudantes, na abordagem teórica de Douady (1984, 1992), em termos de quadros e na noção de ponto de vista de Rogalski (1995, 2001).

A análise das relações institucionais esperadas e existentes, assim como das relações pessoais que se espera ter sido desenvolvidas pelos estudantes, foi realizada considerando as noções de pontos, retas e planos para cursos de geometria analítica e sistemas de equações lineares trabalhadas no ensino médio e no ensino superior. Consideram-se aqui relações pessoais os conhecimentos disponíveis dos estudantes após terem sido submetidos ao ensino de uma noção matemática.

Ressaltamos que essa pesquisa nos auxilia, por meio das análises das relações institucionais esperadas e existentes assim como a análise das expectativas institucionais sobre a relação pessoal dos estudantes, a compreender as dificuldades enfrentadas nos cursos de

introdução à Geometria Analítica e Álgebra Linear no ensino superior e assim possibilita a identificação de ações didáticas a serem propostas para superar essas dificuldades.

Referencial teórico da pesquisa

Como anunciado acima, o referencial teórico central da pesquisa é a Teoria Antropológica do Didático de Chevallard (1992, 1996) e Bosch e Chevallard (1999) que permite analisar as relações institucionais e os traços dessas relações sobre as possíveis relações pessoais desenvolvidas pelos estudantes. Para melhor compreender os aportes dessa teoria, apresenta-se uma breve descrição das noções utilizadas nas análises.

Para Chevallard (1996), a atividade matemática, como toda atividade humana, se decompõe em certo número de tarefas. Para o cumprimento destas tarefas, são desenvolvidas técnicas, que para se tornarem viáveis devem ser compreensíveis e justificáveis, dando desta forma lugar ao desenvolvimento das tecnologias ou discurso sobre as técnicas. Estas tecnologias são objetos de outras tecnologias que Chevallard identifica como as teorias.

A importância deste tipo de análise é que ela permite identificar as técnicas matemáticas existentes para efetuar as diferentes tarefas, precisar os diferentes níveis de discurso que são suscetíveis de acompanhar estas técnicas, tanto como comentários quanto como justificativas, e explorar, eventualmente, as distinções entre tecnologias e teorias.

Além disso, do ponto de vista das representações, Chevallard enfatiza que a dimensão semiótica da atividade matemática (escritas, símbolos, palavras e gestos) não é um simples subproduto da conceituação. Para a análise desta dimensão Chevallard introduz as noções de ostensivos e não ostensivos e o princípio da existência de relações dialéticas no desenvolvimento desses objetos. Ressaltamos que os objetos ostensivos são as escritas, os símbolos, as palavras e os gestos mobilizados na atividade matemática, por exemplo, um nome, uma notação, um gráfico ou um esquema gestual que pode ser efetivamente manipulado na sua materialidade, e os objetos não ostensivos são noções, conceitos, idéias que aparecem associadas às técnicas, tecnologias e teorias e que só podem ser evocados com a ajuda dos objetos ostensivos, conforme Bosch e Chevallard (1999).

Chevallard insiste no fato que a utilização de palavras na atividade matemática só pode ser compreendida a partir da idéia de instrumento semiótico. Para Chevallard, todo sistema de trabalho supõe a combinação de vários registros semióticos: oral, escrito e gestual.

Além da Teoria Antropológica do Didático, como mencionado acima, escolheu-se como referenciais teóricos de apoio a noção de quadro de Douady (1984, 1992), a noção de níveis de conhecimento de Robert (1997) e a noção de ponto de vista de Rogalski (1995, 2001), pois as relações institucionais associadas às noções de pontos, retas e planos e sistemas de equações lineares podem ser diferenciadas por meio de mudanças de quadros e de pontos de vista. Essas relações institucionais permitem a escolha dos níveis de conhecimento esperados dos estudantes para o desenvolvimento do objeto matemático em questão e das noções em jogo nas tarefas que podem ser desenvolvidas tanto no ensino médio como no ensino superior.

A seguir, apresenta-se uma breve descrição desses referenciais.

A noção de quadro definida por Douady (1984) evidencia a dualidade dos conceitos matemáticos que, em geral, funcionam inicialmente como ferramentas implícitas e depois ferramentas explícitas da atividade matemática antes de ter “status” de objeto e ser trabalhado como objeto do saber. A autora observa, ainda, o papel das mudanças de quadro na atividade e

na produção matemática. Desta forma, Douady transpõe estas características do funcionamento do matemático ao domínio da didática, por meio das noções de dialética ferramenta objeto e jogo de quadros. (Douady, 1884, 1992).

Na realidade, a noção de quadro se fundamenta sobre o fato que um mesmo conceito pode funcionar em níveis conceituais e técnicos, e que a forma de funcionamento em cada um destes níveis apresenta características específicas. Vale ressaltar que as diferenças existentes são justamente um dos motores e ferramentas da criação matemática. Para Douady, os jogos de quadros são meios privilegiados para suscitar, ao mesmo tempo, desequilíbrios cognitivos e permitir a superação desses desequilíbrios em equilíbrios de nível superior. No desenvolvimento da geometria analítica e dos sistemas de equações lineares, necessita-se trabalhar com pelo menos dois quadros. O quadro da geometria euclidiana e o quadro algébrico por meio dos sistemas de equações lineares.

Para auxiliar na escolha dos diferentes quadros que se deseja introduzir nos ensinos médio e superior considera-se a noção de níveis de conhecimento esperado dos estudantes introduzida por Robert (1998). São eles: o nível técnico que corresponde a um trabalho isolado, local e concreto. Está relacionado principalmente às ferramentas e definições utilizadas em uma determinada tarefa. Exemplos: Localizar pontos no sistema cartesiano ortogonal. Resolver um sistema de duas equações a duas incógnitas. O nível mobilizável que corresponde a um início de justaposição ou até mesmo uma organização de saberes num certo quadro. Neste nível o conceito a ser utilizado é explicitamente pedido. Por exemplo: discutir as possibilidades de solução de um sistema de equações lineares com parâmetros em função dos mesmos. O nível disponível significa que o sujeito responde corretamente o que lhe é proposto, sem indicações. Nesse nível encontram-se os estudantes capazes de dar exemplos e contra-exemplos, mudar de quadros, fazer relações, aplicar métodos não previstos. Esse nível de conhecimento está associado à familiaridade, ao conhecimento de situações de referência variadas que o estudante sabe que as conhece, servem de espaço de experimentação, ao fato de dispor de referências, de questionamentos e de uma organização. Por exemplo: dado um sistema de equações lineares com parâmetros determinar as possibilidades de solução e reconhecer o subespaço afim associado à solução encontrada.

A noção de ponto de vista, segundo Rogalski (1995), em notas manuscritas de um seminário de pesquisa apresentado em São Paulo, e utilizada na tese de doutoramento de Dias (1998), é definida por:

Dois pontos de vista diferentes sobre um mesmo objeto matemático são duas maneiras diferentes de enxergá-los, de fazê-los funcionar, eventualmente de defini-los. Neste sentido, enxergar um objeto em diferentes quadros é ter diferentes pontos de vista. Mas, podemos ter vários pontos de vista em um mesmo quadro. (Rogalsky, 1995, tradução nossa).

Isso permite considerar dois pontos de vista em geometria analítica, a saber: o ponto de vista paramétrico, que corresponde a conceber o espaço afim como a soma de uma solução particular ao espaço vetorial gerado por um conjunto de vetores. O ponto de vista cartesiano que corresponde a conceber o espaço afim como o conjunto solução de um sistema não homogêneo de equações lineares. Por exemplo: Representar uma reta em $\mathbb{R}^3$ por meio de uma equação paramétrica ou por um sistema de duas equações lineares independentes.

Na seqüência, apresentam-se os objetivos e a metodologia escolhida para alcançá-los.

Objetivos da pesquisa

O objetivo central da pesquisa é estudar a transição entre o ensino médio e superior para as noções de geometria analítica e sistemas de equações lineares. Em particular, investigar quais conhecimentos retrospectivos sobre pontos, retas e planos e sistemas de equações lineares podem ser considerados disponíveis para os estudantes do ensino médio em um curso de introdução à geometria analítica e álgebra linear no ensino superior, partindo desses conhecimentos.

Dessa forma, foram considerados os seguintes objetivos específicos:

- Identificar as relações institucionais esperadas para o desenvolvimento das noções de pontos, retas e planos e sistemas de equações lineares para os estudantes do ensino médio;
- Verificar quais relações pessoais são consideradas como desenvolvidas pelos estudantes do ensino médio;
- Identificar as relações institucionais mais utilizadas para desenvolver as noções de pontos, retas e planos e sistemas de equações lineares em um curso de introdução à geometria analítica no ensino superior;
- Verificar se existe uma coerência entre o trabalho proposto para o ensino médio e as expectativas de continuidade no ensino superior.

Para alcançar os objetivos acima expostos propõe-se a seguinte metodologia:

- Analisar das propostas institucionais esperadas para o ensino e aprendizagem da geometria analítica e sistemas de equações lineares no ensino médio, em particular, das noções de pontos, retas e planos e sistemas lineares via documentos oficiais.
- Analisar das propostas institucionais existentes para o ensino e aprendizagem da geometria analítica e sistemas de equações lineares no ensino médio, em particular, das noções de pontos, retas e planos e sistemas lineares via livros didáticos indicados pelo Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (PNLEM).
- Analisar dos resultados do SARESP (Sistema de Avaliação da Secretaria da Educação do Estado de São Paulo) para as questões de geometria analítica e sistemas de equações lineares, que tratam das noções de pontos, retas e planos e sistemas lineares.
- Analisar das propostas institucionais existentes para o ensino e aprendizagem da geometria analítica e sistemas de equações lineares no ensino superior, em particular, das noções de pontos, retas e planos e sistemas lineares via livro didático.
- Comparar os resultados das análises propostas acima.

Metodologia da pesquisa

A metodologia da pesquisa segue as técnicas da pesquisa documental que segundo segundo Lüdke e André (1986) está associada à pesquisa qualitativa, pois permite complementar informações obtidas por outras técnicas e/ou desvendar aspectos de um tema ou problema.

Assim, a análise das relações institucionais esperadas foi desenvolvida via estudo dos documentos oficiais, ou seja, PCN para o Ensino Médio (2000), PCN+ Ensino Médio (2006) e o Currículo do Estado de São Paulo (2010) e das relações institucionais existentes via livro de

Dante (2013) do PNLEM/ 2012 e caderno do professor (2011) distribuído pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo na sua rede de escolas.

A finalidade dessa análise é identificar os traços dessas relações institucionais sobre as relações pessoais desenvolvidas pelos estudantes do Ensino Médio. Assim, para analisar as relações pessoais esperadas dos estudantes estudaram-se os resultados do SARESP (2005, 2007, 2008) para as questões associadas às noções matemáticas de pontos, retas e planos e sistemas de equações lineares.

No que se refere às relações institucionais existentes no ensino superior, foi analisado o livro didático de Geometria Analítica de Boulos e Camargo (2008), para verificar se os conhecimentos desenvolvidos pelos estudantes do ensino médio estão em conformidade com os esperados para o ensino superior. A escolha dessa obra justifica-se, uma vez que esses livros são indicados nas bibliografias dos cursos de licenciatura em matemática de grande parte das universidades públicas e privadas brasileiras, conforme estudos das relações institucionais esperadas via planos de ensino para os cursos de formação inicial de professores (licenciatura em matemática) de universidades públicas e privadas.

Para comparar as relações institucionais existentes com as relações pessoais esperadas dos estudantes foi elaborada uma grade de análise para distinguir as diferentes formas de abordagem dos conteúdos estudados nessa pesquisa e identificar articulações associadas às formas de tratamento de uma tarefa.

A grade de análise

A grade de análise é uma ferramenta que permite analisar os conhecimentos retrospectivos e os novos conhecimentos das noções e conceitos associados à geometria analítica e ao estudo dos sistemas lineares:

- em função do *panorama matemático* das noções e conceitos considerados neste estudo;
- em função das *tarefas* habitualmente desenvolvidas em um curso de introdução à geometria analítica e sistemas de equações lineares tanto no ensino médio como no ensino superior;
- em função das *variáveis dessas tarefas*. Destacam-se as variáveis associadas aos ostensivos e não ostensivos utilizados na definição da tarefa ou na sua solução.

Aplicação da grade de análise com um exemplo de seu funcionamento

A aplicação dessa grade em um *panorama matemático* em função das noções e conceitos apreciados neste estudo foi realizada considerando-se:

- O estudo da geometria analítica no plano $\mathbb{R}^2$ e no espaço $\mathbb{R}^3$ considera as noções essenciais de pontos, retas, planos e aplicações afins. A generalização da geometria analítica real está fundamentada na álgebra linear, uma das noções fundamentais da matemática devido ao seu caráter formalizador, unificador e generalizador. Na generalização utilizam-se ostensivos de representação escrita em sua forma reduzida.
- O estudo da geometria analítica euclidiana no plano $\mathbb{R}^2$ e no espaço $\mathbb{R}^3$, trata de munir $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ de seus produtos escalares usuais e dessa nova definição resultam as noções de: distância, ortogonalidade e ângulo.

- O estudo dos sistemas de equações lineares no ensino médio é centrado sobre o método do escalonamento de Gauss para a resolução de sistemas 2×2 e 3×3 , em particular, para a aplicação como ferramenta para a solução de tarefas intra e extramatemática. Essa mesma abordagem é retomada no ensino superior, especialmente, para tratar as aplicações em outros domínios da matemática como, por exemplo, a geometria analítica e a álgebra linear.

Para o estudo das *tarefas* no plano $\mathbb{R}^2$ e no espaço $\mathbb{R}^3$ apresenta-se abaixo um funcionamento dessa grade sobre noções de retas e planos afim e sistemas de equações lineares:

- Dadas uma ou mais figuras, no plano, através de seus pontos demonstrar uma de suas propriedades. (passagem de ponto para vetor);
- Determinar a intersecção de retas, planos, retas e planos;
- Dadas retas, planos, retas e planos através de suas representações paramétricas ou cartesianas demonstrar uma determinada propriedade;
- Dado um ponto e um ou dois vetores dar uma representação paramétrica e uma representação cartesiana da reta ou do plano determinado pelo ponto e pelos vetores dados;
- Dados pontos do plano que satisfazem determinadas propriedades, demonstrar uma nova propriedade.
- Resolver um sistema de equações lineares dado.
- Modelar problemas do cotidiano e de outras ciências por meio de um sistema de equações lineares.

Para especificar as tarefas em relação à dialética entre ostensivos e não ostensivos, considera-se as seguintes *variáveis das tarefas*.

- o tipo ou os tipos de espaços afim dados;
- os ostensivos e não ostensivos dos subespaços afim considerados;
- os ostensivos e não ostensivos de pontos e vetores considerados;
- as dimensões do espaço e dos subespaços afim considerados;
- os pontos de vista utilizados na solução da tarefa;
- os níveis de conhecimento implicados na solução da tarefa em função dos ostensivos e não ostensivos;
- quadros em jogo na solução da tarefa.

Apresenta-se a seguir um exemplo de uma tarefa com suas respectivas variáveis da tarefa:

Seja P o plano definido pelo ponto A (0, 1, -2) e os vetores $\vec{u}$ (1, 0, 4) e $\vec{v}$ (0, 2, 1). Dar uma representação paramétrica de P. Dar uma representação cartesiana de P.

- o tipo ou os tipos de espaços afim dados: $\mathbb{R}^3$
- os ostensivos e não ostensivos dos subespaços afim considerados: as denominações plano, representação paramétrica, representação cartesiana, conceito de plano;
- os ostensivos e não ostensivos dos pontos e vetores considerados: denominação ponto e vetor, representação por meio de coordenadas e representação simbólica intrínseca, conceitos de ponto e vetor;
- as dimensões do espaço e dos subespaços afim considerados: 3 e 2;
- os pontos de vista utilizados na solução da tarefa: ponto de vista cartesiano e paramétrico;
- os níveis de conhecimento implicados na solução da tarefa em função dos ostensivos e não ostensivos: nível mobilizável para as representações paramétricas e cartesianas e nível disponível para determinar o vetor $\vec{AM}$ no *método 1* que consiste em escrever diretamente uma representação paramétrica do plano afim: $M \in P \Leftrightarrow \exists \lambda, \mu$ tais que $M = A + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$. Em seguida, escrever uma representação cartesiana via a noção de determinante, isto é, $\det(\vec{AM}, \vec{u}, \vec{v}) = 0$. Nesse caso, devemos determinar o vetor definido pelos pontos A(0, 1, -2) e M(x, y, z). Nível mobilizável para as representações paramétrica e nível disponível para a passagem de uma representação paramétrica a uma representação cartesiana para o *método 2* que consiste em escrever diretamente uma representação paramétrica do plano P como no método 1. Uma vez determinada uma representação paramétrica do plano, aplicamos o método de Gauss sobre o sistema encontrado que nos conduz

a um sistema de equações independentes (no caso, uma equação). Esse sistema de equações independentes é uma representação cartesiana do plano P. Nível mobilizável para determinar as representações paramétrica e cartesiana e nível disponível para determinar um vetor normal ao plano no *método 3* que consiste em escrever diretamente uma representação paramétrica do plano P como no método 1. Nesse caso, o método para determinar uma representação cartesiana consiste em determinar um vetor normal ao plano, isto é, determinar o produto vetorial dos vetores

$\vec{u}$ e $\vec{v}$ que geram o plano. Obtemos em seguida uma representação cartesiana do plano P escrevendo que para qualquer ponto M desse plano o produto escalar $\vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$ (devemos determinar o vetor $\vec{AM}$).

- **quadros em jogo na solução da tarefa:** quadro algébrico, vetorial, das matrizes e dos determinantes para o método 1, quadro algébrico, vetorial e dos sistemas de equações lineares para o método 2 e quadro algébrico e vetorial para o método 3.

Análise das relações institucionais esperadas encontradas nos documentos oficiais

Os Parâmetros Curriculares Nacionais para ensino médio (PCNEM e PCN+)

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio é dada ênfase ao papel da linguagem da matemática enquanto instrumento de expressão e comunicação. Assim, o PCNEM e PCN+ consideram a noção de ostensivo. É possível destacar a preocupação com essa função da matemática, que consiste em considerá-la uma ferramenta de comunicação e expressão, que permite explicar os conhecimentos científicos, planejar, executar e avaliar ações de intervenção na realidade. Isto corresponde a levar em conta não somente a linguagem escrita, mas a possibilidade de utilizar a matemática para explicar o funcionamento do mundo por meio dos ostensivos orais, gestuais, visuais e táteis.

Além disso, quando se considera, mais especificamente, as noções de geometria analítica e sistemas de equações lineares e suas possíveis abordagens para o ensino médio constata-se que a proposta evidencia a importância da passagem do quadro geométrico para o quadro algébrico, sugere a articulação entre álgebra e geometria ou ainda entre figura geométrica e equação e vice-versa. Isto coloca em evidência a necessidade de utilização de diversos ostensivos em relação aos não ostensivos que aqui podem ser consideradas as propriedades geométricas e equações e as possíveis relações entre elas. Apesar de privilegiar o ponto de vista cartesiano a proposta prevê a introdução da noção de vetor, por meio da representação gráfica, isto é, segmento orientado, e por meio da representação por coordenadas o que supõe a articulação de ostensivos orais, visuais e táteis principalmente para o espaço $\mathbb{R}^3$. Nesse caso é possível dispor de um discurso que leve em conta esses ostensivos e utilizar materiais para melhor visualizar as condições de solução dos sistemas 2×2 , 2×3 e 3×3 . E por meio do discurso oral é possível discutir e justificar as possibilidades de solução dos sistemas lineares articulando quadro algébrico e geométrico e pontos de vista cartesiano e paramétrico.

O Currículo do Estado de São Paulo

O currículo do Estado de São Paulo, que foi implementado a partir de 2008, coloca em evidência o fato que a matemática, assim como as outras disciplinas, deve servir de meio para a formação dos estudantes enquanto cidadãos e como pessoas, isto é, o ensino da matemática deve situar-se no desenvolvimento das competências pessoais dos estudantes. Assim como nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio, a matemática é considerada uma linguagem que permite representar a realidade. Mais especificamente, pode expressar os fenômenos das ciências naturais.

Quando se considera especificamente o quadro da geometria analítica observa-se que a nova proposta propõe o estudo das coordenadas por meio da localização em mapas e o estudo das simetrias e homotetias já no ensino fundamental e faz como recomendação que a geometria deve ser tratada de forma espiralada, isto é, os grandes temas devem ser trabalhados tanto no ensino fundamental como no ensino médio.

A grade curricular específica de geometria analítica é proposta no primeiro bimestre da terceira série do Ensino Médio. Em função das noções consideradas pode-se concluir que o desenvolvimento dos conteúdos deve privilegiar o estudo de retas e curvas no plano por meio do ponto de vista cartesiano uma vez que não existe nenhuma referência ao estudo matemático da noção de vetor.

Análise de um livro didático do ensino médio, de um livro do ensino superior e do caderno do professor

O livro didático brasileiro é atualmente uma das ferramentas mais adaptadas para analisar as relações institucionais existentes para o ensino de uma determinada noção, pois são avaliados pelo Programa Nacional do Livro para o Ensino Médio (PNLEM) sob a luz dos Parâmetros Curriculares Nacionais, que segundo nosso referencial teórico corresponde à relação institucional esperada. Além disso, escolhe-se analisar o caderno do professor, pois ele permite identificar a relação institucional existente para uma determinada noção quando se considera o currículo do Estado de São Paulo.

A análise do livro didático apresentado e do caderno do professor foi estruturada em torno das seguintes questões:

- A abordagem das noções de ponto, retas e planos e sistemas de equações lineares se restringe aos espaços $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$?
- Quais os pontos de vista trabalhados ensino médio e superior?
- Que ostensivos são relacionados aos pontos de vista considerados?
- Quais as articulações levadas em conta e se elas possibilitam uma mudança de quadros?
- Quais os conhecimentos retrospectivos esperados dos estudantes e qual o nível esperado para esses conhecimentos segundo definição de Robert (1998)?
- Se existe um discurso tecnológico, isto é, um discurso que acompanha as técnicas desenvolvidas nas tarefas apresentadas como exemplos para os estudantes?

Análise da obra: Matemática – Luiz Roberto Dante – 2013.

A obra de Dante (2013) foi escolhida por ter sido bem avaliada pelo PNLEM e tratar as noções matemáticas seguindo as propostas dos Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino médio de forma articulada o que pode proporcionar a participação ativa do estudante e o faz retomar seus conhecimentos retrospectivos no período em que frequenta o ensino médio.

Observa-se que o autor inicia o capítulo de geometria analítica com a noção de distância entre dois pontos no plano e considera os ostensivos de representação de pontos no sistema cartesiano ortogonal utilizando a representação gráfica como recurso para visualizar o que o cálculo da distância representa geometricamente. Após definir distância e ponto médio, o autor introduz a noção de coeficiente angular de uma reta no plano articulando esse novo

conhecimento com a noção de função afim suposta mobilizável para os estudantes. Isso permite trabalhar com o ponto de vista funcional ($y = ax + b$) para tratar o não ostensivo reta que será expresso por meio desse mesmo nome e dos ostensivos de representação dos pontos de vista cartesiano, isto é, equação geral ($ax + by = c$), equação segmentária ($\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$) e equação reduzida ($y = mx + n$).

O autor aborda apenas as noções de pontos e retas no espaço $\mathbb{R}^2$ e, consequentemente, o único ponto de vista considerado é o cartesiano. Para esse ponto de vista são trabalhados ostensivos escritos que permitem ao professor justificar as articulações consideradas com a noção de função afim. Além disso, as noções de determinante, coeficiente angular, segmentos, tangente, função afim, posições relativas de retas, ângulos, áreas, triângulo e o teorema de Tales e sistemas de duas equações e duas incógnitas são considerados disponíveis. São tratadas como conhecimentos retrospectivos disponíveis pelo autor.

A articulação entre esses conhecimentos e os novos conhecimentos é acompanhada de um discurso tecnológico e da introdução de novas técnicas para o desenvolvimento do trabalho algébrico, que já se supõe tenha sido visto por meio de construções geométricas no ensino fundamental.

Análise do caderno do professor da Secretaria de Educação do Estado de São Paulo (2011)

No caderno do professor verifica-se que a abordagem proposta considera apenas o plano $\mathbb{R}^2$ e consequentemente estudo de pontos e retas no plano. Dessa forma, o ponto de vista privilegiado é o cartesiano. A articulação com a noção de função afim também é levada em conta nessa proposta.

As figuras geométricas são consideradas por meio da representação gráfica de regiões definidas por meio de inequações, isso conduz a considerar como conhecimentos prévios disponíveis as noções de função afim, equação linear, inequação linear e sistemas de equações lineares com duas incógnitas.

No caso da equação geral da reta a proposta indica que o professor deve explorá-la por meio de exercícios. Esta abordagem sugere que a forma de apresentação do conteúdo seja feita pelo professor deixando a justificativa das novas técnicas a cargo do mesmo.

Análise da obra: Geometria Analítica: Um Tratamento Vetorial – Paulo Boulos e Ivan de Camargo – Ensino Superior – 2008

Escolheu-se essa obra por se tratar de uma das mais utilizadas nos cursos de ciências exatas no ensino superior.

Os autores iniciam a noção de vetores por meio do espaço V^3 . Definem a adição de vetores, a multiplicação de um vetor por um número real e suas propriedades, isto é, introduzem a estrutura de espaço vetorial de V^3 mesmo se não explicitam essa noção. Na sequência tratam da soma de um vetor com um ponto e suas propriedades, da dependência e independência linear e propriedades e base de V^3 introduzindo assim a representação de um vetor por meio de suas coordenadas. Em seguida aborda a noção de mudança de base, produto escalar em que se supõe disponível ângulo entre duas retas e produto vetorial para a qual o conhecimento prévio suposto disponível é a noção de determinante de uma matriz. Na sequência são consideradas as noções de duplo produto vetorial e produto misto e concluem o desenvolvimento das noções de geometria vetorial euclidiana em V^3 que foram apresentadas por meio dos ostensivos de representação

escrita como os nomes das diferentes noções e suas propriedades. Visuais por meio do ostensivo de representação gráfica, escritos e orais por meio do ostensivo de representação intrínseca de vetor ($\vec{u}$) e por meio de suas coordenadas no espaço V^3 que necessitam de um discurso que justifique a passagem de uma representação para a outra.

O estudo da geometria analítica é considerado apenas para o espaço V^3 iniciando com a definição de sistema de coordenadas, seguido da introdução da noção de retas no espaço V^3 para a qual o ponto de vista paramétrico é privilegiado mesmo se o ponto de vista cartesiano é introduzido por meio da representação simétrica de uma reta em V^3 . Sendo assim, a articulação entre os pontos de vista cartesiano e paramétrico não é considerada explicitamente pelos autores.

Para a noção de planos em V^3 observa-se que os autores seguem a mesma abordagem considerada para a noção de retas em V^3 , mas também consideram a noção de equação geral do plano ou representação cartesiana do plano que é trabalhada supondo disponível a noção de determinante de uma matriz o que não conduz a articulação entre os pontos de vista cartesiano e paramétrico.

Finalmente a abordagem proposta não considera o espaço $\mathbb{R}^2$ e privilegia o ponto de vista paramétrico, sem levar em conta os conhecimentos de Geometria Analítica, que possam ter sido adquiridos no Ensino Médio.

Para a obra considerada apenas as noções de geometria e determinante de uma matriz são consideradas como conhecimentos prévios disponíveis pelos autores.

Uma breve análise das relações pessoais esperadas dos estudantes via Saresp 2005, 2007, 2008

A análise das relações pessoais esperadas dos estudantes é feita nessa pesquisa via Saresp 2005, 2007 e 2008.

Observou-se que em 2005 dava-se uma grande ênfase às questões de geometria analítica, pois se encontrou 7 questões que demandavam a distância entre dois pontos, as coordenadas do ponto médio, a área de um triângulo, a equação geral de uma reta, a verificação da pertinência de um ponto a uma reta, a passagem de uma representação paramétrica para uma representação cartesiana e a posição relativa de uma reta. É importante observar que o nível de conhecimento esperado dos estudantes variava entre o mobilizável e o disponível. O que sugere uma preocupação em verificar se os estudantes ao final do ensino médio dominavam as noções relativos a pontos e retas no plano e sistemas de equações lineares, ou seja, se as relações pessoais dos estudantes atendiam as necessidades esperadas para a aplicação em tarefas associadas a estas noções.

Em 2007 é nítido o abandono das questões de geometria analítica, pois somente 2 (duas) questões que demandavam as coordenadas de pontos no Sistema Cartesiano Ortogonal e a intersecção de duas retas são consideradas, mas o nível de conhecimento esperado dos estudantes é o disponível.

Em 2008 somente uma questão de geometria analítica é demandada e trata-se de determinar as coordenadas de pontos no sistema cartesiano ortogonal exigindo apenas o nível mobilizável.

Assim sendo as análises das avaliações 2007 e 2008 não nos permitiu verificar as possíveis relações pessoais atendiam as necessidades esperadas.

Para a noção de sistemas de equações lineares espera-se que os estudantes sejam capazes de aplicar essa noção na modelagem de problemas cotidianos e das outras ciências.

Conclusão

A análise da relação institucional esperada dos estudantes via documentos oficiais mostra que existe uma preocupação em desenvolver pelo menos para $\mathbb{R}^2$ os pontos de vista cartesiano e paramétrico no ensino médio e que os ostensivos escritos são privilegiados. Quanto aos ostensivos verbais, gestuais e táteis estes dependem mais especificamente do trabalho do professor.

Para as relações institucionais existentes observa-se que mesmo articulando as noções de geometria analítica com outras noções trabalhadas no ensino médio, em particular, com a noção de sistemas de equações lineares, não existe uma preocupação de desenvolver o ponto de vista paramétrico. Consequentemente, não se articulam os pontos de vista cartesiano e paramétrico. Esse trabalho é deixado para os cursos de geometria analítica e álgebra linear do ensino superior que para o caso da geometria analítica, em geral, são desenvolvidos apenas no espaço $\mathbb{R}^3$ sem fazer referência aos conhecimentos trabalhados no ensino médio.

Finalmente, o estudo da transição entre o ensino médio e superior, no que se refere a geometria analítica e os sistemas de equações lineares, utilizando a Teoria Antropológica do Didático, as noções de quadro, de ponto de vista e de níveis de conhecimento para analisar os documentos institucionais desta investigação, nos leva a concluir que parece existir um abandono na avaliação da geometria analítica nos últimos anos do SARESP. Isto pode eventualmente fazer com que estes conceitos sejam menos abordados no ensino da disciplina. Mesmo presente no livro didático, o ensino da geometria analítica restringindo-se ao $\mathbb{R}^2$, pode dificultar o trabalho a ser realizado com os estudantes do ensino superior, pela falta da extensão do campo conceitual $\mathbb{R}^2$ para $\mathbb{R}^3$, tanto no ensino médio como no superior.

O trabalho com $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ permitiria uma melhor visualização e compreensão das noções e técnicas associadas ao estudo da geometria analítica e sua articulação com a noção de sistemas de equações lineares que poderia facilitar a generalização para o espaço $\mathbb{R}^n$ e consequentemente a introdução da álgebra linear.

Referências e bibliografia

- Artigue, M. (2004). *Le défi de la transition secondaire-supérieur. Que peuvent nous apporter les recherches en didactique des mathématiques?*. Acesso em 13 de setembro de 2014 de http://pedagogie.ac-toulouse.fr/math/liaisons/post_bac/informations/colltoulouse.pdf
- Bosch, M., & Chevallard, Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs, *Recherche en didactique des Mathématiques*, 19(1), 77-124.
- Brasil. (2000). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio*. Brasília: Ministério da educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica.
- Brasil. (2006). *Parâmetros Curriculares nacionais: ensino médio + : Ciências da Natureza e suas tecnologias*. Acesso em 20 de abril de 2014 de <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf>
- Brasil. (2012). *Catálogo do programa Nacional do Livro para o Ensino Médio PNLEM/2012*. Matemática. Brasília: Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica.
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques* 12(1), 73-112.

- Chevallard, Y. (1996). Les outils sémiotiques du travail mathématique. *Petitx*, 42, 33-57.
- Dias, M.A. (1998). *Les problèmes d'articulation entre les points de vue « cartésien » et « paramétrique » dans l'enseignement de l'algèbre lineaire* (Tese de Doutorado). Universidade de Paris VII. França.
- Douady, R. (1984). *Jeux de cadre et dialectique outil objet dans l'enseignement des mathématiques* (Thèse de Doctorat). Université de Paris VII. França.
- Douady, R. (1992). Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. *Repères IREM* 6, 132-158.
- Gueudet, G. (2008). Investigating secondary-tertiary transition. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 237-254.
- Lüdke, M., & André, M.E.D.A. (1986). *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.
- Rogalski, M. (1995). *Notas manuscritas do seminário em São Paulo*. Brasil.
- Rogalski, M. (2001). Les changements de cadre dans la pratique des mathématiques et les jeux de cadres de Régine Douady. *Actes de la journée en hommage à Régine Douady*. Paris. França.
- Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(2), 139-190.
- São Paulo (estado). *Saresp Encontro de Matemática Avaliações Externas*. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas – CENP. São Paulo, 2005, 2007, 2008. Acesso em 20 de abril de 2014 de <http://saresp.edunet.sp.gov.br/2005/>, <<http://saresp.edunet.sp.gov.br/2007/>>, <<http://saresp.edunet.sp.gov.br/2008/>>
- São Paulo (estado). (2011). *Caderno do professor: Matemática, Ensino Médio*. São Paulo: Secretaria de Educação do Estado de São Paulo
- São Paulo (estado). (2010). *Curriculo do Estado de São Paulo: Matemática*. São Paulo: Secretaria Estadual da Educação de São Paulo.
- Vergnaud, G. (.1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 10 (2/3), 133-170.
- Livros analisados*
- Boulos, P., & Camargo, I. (2008). *Geometria Analítica: Um tratamento Vetorial*. São Paulo: McGraw-Hill.
- Dante, L. R. (2013). *Matemática*. São Paulo: Ática.

Geometria do Taxi: uma investigação com alunos do ensino médio no Brasil

José Carlos Pinto **Leivas**
Centro Universitário Franciscano
Brasil
leivasjc@unifra.br

Helenara Machado de **Souza**
Centro Universitário Franciscano
Brasil
helenara25@gmail.com

Resumo

Esta comunicação científica é um extrato de uma dissertação de um Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática no Brasil. Teve como objetivo investigar como alunos do Ensino Médio de uma escola pública construíram conceitos de uma geometria não euclidiana, a Geometria do Taxi. A metodologia de pesquisa foi qualitativa e envolveu 26 alunos que fizeram uso de recursos didáticos como quadriculados e o software GeoGebra. Nesta comunicação analisamos uma das atividades realizadas, a qual tratou de investigar se os alunos haviam adquirido os conhecimentos esperados. Isso foi feito por meio de um problema avaliativo, no qual os estudantes precisavam analisar o trajeto entre três residências, utilizando o software e um comparativo entre a métrica euclidiana e a dos catetos. Os resultados comprovaram que os conhecimentos dessa geometria, até então adquiridos, foram suficientes e relevantes para a solução correta do problema.

Palavras chave: geometria do taxi, investigação matemática, ensino médio brasileiro, categorias.

Resumen

Esta comunicación científica es una parte de una tesis de Maestría Profesional en Enseñanza de la Matemática en Brasil. El objetivo fue investigar cómo los estudiantes de una escuela secundaria pública como lo habían construido conceptos de una geometría no euclidiana, Taxi Geometría. La metodología de la investigación fue cualitativa y incluyó 26 estudiantes que utilizaron recursos educativos como papel cuadriculado y software GeoGebra. En esta comunicación se analiza una de las actividades, la que trató de investigar si los estudiantes tenían adquirido los conocimientos esperados. Esto se hizo por medio de un problema de la evaluación, en la que los estudiantes tenían que analizar la trayectoria entre tres residencias, utilizando el software y una comparación entre la métrica euclidiana y de los catetos. Los resultados mostraron que lo conocimiento de este geometría, adquirido hasta ahora, fue suficiente y pertinente a la solución correcta del problema.

Palavras chave: geometria del taxi, investigación matemática, escuela secundaria, categorías.

Introdução

Geometria talvez seja o ramo das matemáticas que ofereça o maior número de possibilidades de resolver os problemas das pessoas para uma melhor forma de viver e habitar o planeta. Os Parâmetros Curriculares Nacionais-PCN, no Brasil, orientam para seu ensino no nível básico. Neles se encontra o seguinte: “Para atender as demandas do trabalho contemporâneo é inegável que a Matemática pode dar uma grande contribuição à medida que explora a resolução de problemas e a construção de estratégias como um caminho para ensinar e aprender Matemática na sala de aula” (BRASIL, 1998, p.34). Em relação à Geometria, o documento indica que esta área é um campo no qual, trabalhar com as noções geométricas pode contribuir para que ocorra a aprendizagem de números bem como de medidas uma vez que isso estimula o aluno a “observar, perceber semelhanças e diferenças, identificar regularidades, etc.”(p.51).

Duval (2011), ao tratar da revolução semiótica para a representação e conhecimento, afirma que “A análise do conhecimento não deve considerar apenas a natureza dos objetos estudados, mas igualmente a forma como os objetos nos são apresentados ou como podemos ter acesso por nós mesmos” (p.15). O conhecimento em Geometria, oriundo dos gregos, nos parece ainda persistir nos bancos escolares e na formação dos futuros professores de Matemática em instituições brasileiras, como apontam algumas de nossas pesquisas, especialmente no que diz respeito a outras geometrias que não a de Euclides.

Dessa forma, investigar junto a um Mestrado Profissionalizante em Ensino de Matemática, sobre tais geometrias tem sido a área de interesse do segundo autor, tendo encontrado guarida no interesse da primeira autora em estudar uma dessas geometrias, a saber, a Geometria do Taxi, na qual se leva em consideração uma métrica não euclidiana, a denominada métrica dos catetos. Apresentamos neste artigo, um recorte da dissertação de mestrado, em andamento, dessa mestranda, no qual descrevemos e analisamos a aplicação de uma das atividades de sua pesquisa realizada junto a estudantes do Ensino Médio de uma escola pública da cidade de Santa Cruz do Sul, no estado do Rio Grande do Sul, no Brasil.

Participaram da pesquisa um total de 26 alunos de uma turma em que a investigadora é a própria docente. A pesquisa, de cunho qualitativo, teve como objetivo geral “Investigar quais as contribuições que a Geometria do Táxi pode oferecer para a construção de conceitos referentes à Geometria Analítica por alunos de terceiro ano do Ensino Médio”. O método de coleta de dados consistiu em registros escritos dos alunos em diários de campo, bem como construções realizadas utilizando um software de Geometria Dinâmica, além do diário de campo da investigadora. A fim de elaborarmos as atividades de forma coerente e condizente com os alunos foi aplicado, inicialmente, um questionário, segundo o qual, pudemos delinear o perfil de conhecimento que os estudantes apresentavam. Ao final de todas as atividades foi aplicado um segundo questionário, segundo o qual, foi possível analisar o reflexo produzido na sua aprendizagem, após a realização das mesmas.

A Geometria do Taxi se desenvolveu a partir da necessidade humana de resolver determinados problemas para os quais os conhecimento de Geometria Euclidiana não davam conta. Foi desenvolvido pelo russo Hermann Menkowski (1864-1909). Nessa, o papel de medida ou de métrica precisa ser extrapolado para além euclidiano o que, sem sombra de dúvidas, gera muitos conflitos cognitivos uma vez que não é de uso frequente na escola. Entretanto, este é um

conhecimento do indivíduo no seu dia a dia, ao deslocar-se em uma cidade urbanizada, em que o trajeto mais curto entre dois pontos, quase nunca é dado pela medida de um segmento de reta.

Dessa forma, define-se métrica dos catetos como sendo a função definida por

$$D_1(X, Y) = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|,$$

onde $X = (x_1, y_1)$ e $Y = (x_2, y_2)$ são pontos do $\mathbf{R}^2$. Essa, é representada como na figura 1, pela soma das medidas dos segmentos XP e PY e não por XY como na Geometria Euclidiana.

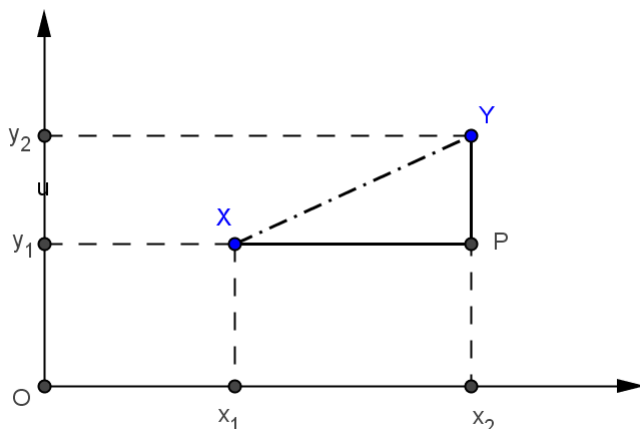


Figura 1. Métrica dos catetos.

Muito embora ela tenha sido desenvolvida antes, adquiriu notoriedade por volta de 1952, quando da publicação do livro de Karl Menger: “Você vai gostar de Geometria”, a partir do qual recebeu a denominação atual. Veloso (1998) utiliza, como exemplo dessa geometria, o trajeto realizado por um motorista de táxi, para levar um cliente do Elevador de Santa Justa até a igreja de São Nicolau, da seguinte forma:

se um motorista de táxi apanha um cliente junto do Elevador de Sta. Justa (seja o ponto A) e este lhe diz que quer ir para a Igreja de S. Nicolau (seja o ponto B), a distância que vai percorrer no trajeto (supondo que não existem ruas reservadas a peões nem sentidos únicos) não é dada pela fórmula da distância euclidiana $\overline{AB}$ entre os dois pontos – pois o motorista não pode “ir a direito, atravessando os prédios” – mas pela soma de duas distâncias em direções perpendiculares [...] (p. 327)

Por outro lado, ao tratar das conexões da Matemática com o cotidiano do aluno, assim se manifestam Kaleff e Nascimento (2004):

[...] a Geometria do Táxi pode ser apresentada, com a intenção de se integrar a Matemática ao cotidiano do aluno, pois esta se apresenta em todos os lugares, não podendo, portanto, deixar de ser encontrada no espaço das “ruas”. Desta forma, confrontado com esta nova Geometria, o aluno pode ser levado a perceber que existem outras Geometrias além da Euclidiana, possibilitando que tenha despertada a sua curiosidade para novos ambientes matemáticos. (p. 13)

A partir desses pressupostos, a pesquisa utilizou atividades de localização por meio de representações em papel quadriculado. Posteriormente, foi empregado o software GeoGebra para obter localizações em sistemas de coordenadas para, usando os recursos do *google maps*, explorar com mais profundidade localizações em ambientes ao redor da escola e das residências dos estudantes. Destacamos para esta comunicação a última atividade realizada, a qual discutiremos em sua totalidade neste artigo.

A atividade investigativa e sua descrição

Realizadas atividades de localização de pontos, as quais exploraram o cotidiano dos alunos e o ambiente escolar e familiar dos mesmos, concluímos a investigação com uma atividade que teve por objetivo avaliar se houve aquisição de conhecimentos básicos sobre a Geometria do Táxi. Esta atividade foi realizada utilizando o software GeoGebra. A investigadora propôs aos alunos que analisassem a respectiva construção.

Descrição da atividade

A figura 2 representa o trajeto realizado por Júlia para ir até a casa de sua amiga Priscila e o trajeto realizado por Júlia para ir até a casa de sua amiga Cláudia.

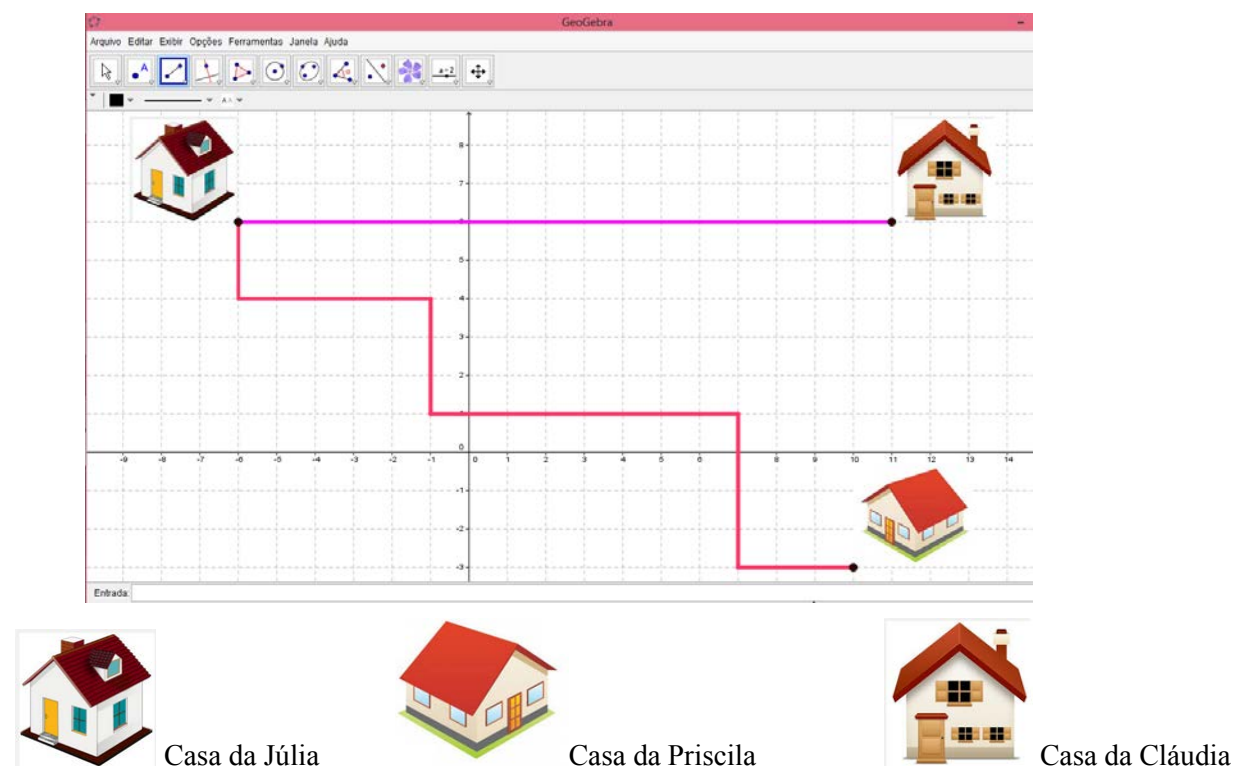


Figura 2. Trajetórias dos deslocamentos entre as residências.

Sabendo que cada unidade de lado de quadradinho representa 250 metros, determine:

- a distância da casa de Júlia até a casa de Priscila.
- a distância da casa de Júlia até a casa de Cláudia.

A solução esperada pela investigadora é a seguinte:

a) a distância da casa de Júlia até a casa de Priscila $ 10 + 6 + -3 - 6 $ $ 16 + -9 $ $16 + 9 = 25 \text{ unidades}$ $25 \times 250 = 6250 \text{ metros}$	b) a distância da casa de Júlia até a casa de Cláudia $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ $\sqrt{(11 + 6)^2 + (-6 + 6)^2}$ $\sqrt{17^2 + 0^2} =$ $\sqrt{289} = 17 \text{ unidades}$ $17 \times 250 = 4250 \text{ metros}$
--	---

Esperávamos que, ao resolver a atividade, inicialmente o aluno identificasse as coordenadas x e y de cada ponto que representa a casa de cada uma das meninas, Júlia, Priscila e Cláudia. Posteriormente, ele deveria identificar o caso apresentado no item a) como sendo um exemplo de aplicação da Geometria do Táxi e, no item b), como sendo uma aplicação de distância, de acordo com a Geometria Analítica Euclidiana. Finalmente, esperávamos que o aluno resolvesse, com êxito, os cálculos necessários para determinar a distância apresentada em cada situação.

Realizaram a avaliação todos os 26 alunos que haviam participado das oficinas que abordaram o uso do software GeoGebra e sua aplicação no processo de compreensão dos conceitos inerentes à Geometria do Táxi.

Para analisarmos as soluções apresentadas pelos alunos utilizaremos o processo de categorização, definido por Bardin (2011):

a categorização é uma operação de classificação de elementos constitutivos de um conjunto, por diferenciação e, seguidamente, por reagrupamento segundo o gênero (analogia), com critérios previamente definidos. As categorias são rubricas ou classes, as quais reúnem um grupo de elementos (unidade de registro, no caso da análise de conteúdo) sob um título genérico, agrupamento esse efetuado em razão dos caracteres comuns destes elementos. (p. 117).

Foram determinadas seis categorias, as quais descrevemos na sequência.

Categoria A: o aluno não consegue diferenciar Geometria do Táxi da Geometria Analítica.

Nessa categoria, encontramos aqueles que não conseguiram identificar quando é possível aplicar a ideia de distância, do ponto de vista da Geometria do Táxi, ou quando se aplica esse conceito de acordo com a Geometria Analítica Euclidiana. Apresentamos o que cada um dos três alunos registrou.

Maiara - Primeiro tiramos as coordenadas do gráfico e depois calculamos a distância.

Laura - Procurei o x e o y . Calculei a distância e coloquei no módulo.

Carlos - Eu precisava ter estudado mais, pois tenho dificuldade.

A partir desses três registros, podemos observar que dois alunos conseguiram identificar as coordenadas dos pontos utilizados na resolução da questão. No entanto, utilizaram a lei errada para determinar a distância, pois deveriam ter observado que o trajeto realizado por Júlia para ir de sua casa até a casa da Priscila representa uma aplicação da Geometria do Táxi. Já o trajeto realizado por Júlia até a casa de Cláudia representa uma aplicação da Geometria Analítica, pois esse trajeto é retilíneo.

Categoria B: o aluno contou os “quadrados”.

Identificamos nessa categoria apenas um aluno, o qual chamaremos de Cássio. Ele descreve que a distância da casa de Júlia até a casa de Priscila tem 25 quadrados. Forneceu a distância em metros, calculando 25 vezes 250, ou seja, 6250 metros. A distância da casa de Júlia até a casa de Cláudia é dada por 17 vezes 250, que é igual a 4250 metros.

Por fim, Cássio comenta: “Foi uma questão fácil de realizar, pois exige somente multiplicar”.

Neste caso, verificamos que o aluno conseguiu resolver a atividade proposta, mesmo que não tenha utilizado a estratégia que esperávamos. Tínhamos por objetivo principal nessa atividade verificar se os alunos conseguiam diferenciar situações que representavam a distância do ponto de vista euclidiano da distância descrita pela Geometria do Táxi.

Categoria C: o aluno não realizou a atividade.

Identificamos, nessa categoria, três alunos, Ariana, Gláucia e Cristiano, os quais não realizaram nenhuma etapa daquelas esperadas para a solução.

Como esses alunos deixaram a parte destinada à escrita dos comentários em branco, não conseguimos identificar o momento em que a dificuldade realmente se encontrou ou onde houve uma laguna com relação à aprendizagem dos conceitos que foram objetos da avaliação.

Categoria D: o aluno identifica a diferença entre distância definida pela Geometria Euclidiana e a definida pela Geometria do Táxi, porém teve dificuldade na realização das operações necessárias.

Nessa categoria, podemos identificar quatro alunos, Maria, Pedro, Marina e Joice, os quais, embora soubessem que, segundo a Geometria Euclidiana, a distância entre dois pontos descreve um segmento de reta e que, de acordo com a Geometria do Táxi, descreve os catetos de um triângulo retângulo, esses alunos tiveram dificuldades em resolver operações como adição, multiplicação e obtenção do módulo dos números que representam a solução da atividade.

Maria realizou essa questão da seguinte forma:

distância da casa de Júlia até a casa de Priscila $ 10 + 6 + -3 - 6 $ $ 16 + -9 $ $16 + (-9) = 7$ unidades $7 \times 250 = 1750$ metros	distância da casa de Júlia até a casa e Cláudia $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ $\sqrt{(11 + 6)^2 + (-6 + 6)^2}$ $\sqrt{17^2 + 0^2} =$ $\sqrt{289} = 17$ unidades $17 \times 250 = 4250$ metros
---	---

Ela comentou: “ Eu calculei a distância de um ponto ao outro. ”

No item a) o correto seria:

$$16 + 9 = 25 \text{ unidades,}$$

$$25 \times 250 = 6250 \text{ metros.}$$

Portanto, podemos verificar que Maria não identificou que o módulo de -9 é 9, ou seja, ou ela se equivocou, ou ainda não sabe o suficiente sobre a função modular.

Pedro realizou a questão da forma que segue.

a distância da casa de Júlia até a casa de Priscila $ 10 + 6 + -3 - 6 $ $ 16 + -9 $ $16 + (+9) = 25$ unidades $\begin{array}{r} 250 \\ \times 25 \\ \hline 250 \\ + 500 \\ \hline 5250 \text{ metros} \end{array}$	a distância da casa de Júlia até a casa de Cláudia $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ $\sqrt{(11 + 6)^2 + (-6 + 6)^2}$ $\sqrt{17^2 + 0^2} = \sqrt{289} = 17$ unidades $17 \times 250 = 4250$ metros
--	---

Podemos perceber, na solução da esquerda, que sua dificuldade esteve na multiplicação. Em seu comentário, Pedro ressalta: “No primeiro se aplica a teoria do táxi (não euclidiana), na segunda se aplica a teoria euclidiana. Na teoria não euclidiana o trajeto não é uma reta e na euclidiana é uma reta.”

A seguir apresentamos a resolução de Marina.

a distância da casa de Júlia até a casa de Priscila $ 10 - 6 + -3 - 6 $ $ 4 + -9 $ $4 + 9 = 13$ unidades $13 \times 250 = 3250$ metros	a distância da casa de Júlia até a casa de Cláudia $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ $\sqrt{(11 + 6)^2 + (-6 + 6)^2}$ $\sqrt{17^2 + 0^2} = \sqrt{289} = 17$ unidades $17 \times 250 = 4250$ metros
--	---

Verificamos que o erro dessa aluna está em compreender que $10 - (-6) = 10 + 6 = 16$. Acreditamos que ela não tenha percebido que a coordenada de x_1 é -6, pois descreve: “Primeiro localizei o x e o y de cada caso e depois utilizei as equações, logo depois multipliquei os resultados por 250. Cheguei à conclusão que, por mais que tenha mais esquina, Priscila mora mais perto de Júlia do que a Cláudia.”

Solução apresentada por Joice:

a distância da casa de Júlia até a casa de Priscila $ 10 + 6 + -3 - 6 $ $ 16 + -9 $ $16 + 9 = 25$ unidades $25 \times 250 = 6250$ metros Não euclidiana, porque não é uma reta	a distância da casa de Júlia até a casa de Cláudia $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ $\sqrt{(11 + 6)^2 + (-6 - 6)^2}$ $\sqrt{17^2 + (-12)^2} = \sqrt{289 + 144} = \sqrt{433} = 20$ unidades $20 \times 250 = 5000$ metros Euclidiana, porque é uma reta
---	---

Na segunda solução apresentada por Joice podemos verificar que o equívoco foi semelhante ao apresentado por Marina na primeira, ou seja, na resolução de operações com números inteiros. Podemos perceber, ainda, que ela conseguiu diferenciar cada uma das geometrias nas quais estudamos.

Categoria E: o aluno apresentou a solução correta.

Os alunos classificados nesta categoria são aqueles que apresentaram a solução esperada, a do início dessa análise, os quais demonstraram ter compreendido que, quando o trajeto realizado pode ser representado por um segmento de reta, temos um exemplo de distância euclidiana. Quando esse trajeto apresenta “esquinas”, “pode ser representado por um L”, de acordo com as palavras dos alunos, temos uma aplicação da Geometria do Táxi.

Alguns dos comentários escritos pelos alunos classificados nessa categoria são os seguintes:

Laura - Primeiramente identifiquei os pontos, após usei a geometria do táxi para resolver a letra a) e usei a forma euclidiana para resolver a letra b). Ao final, já tendo o resultado obtido das duas formas, multipliquei eles por 250 metros, que representa cada unidade, obtendo assim a distância em metros de cada letra.

Jorge - Observando a figura se vê que no caso a) forma um L, então apliquei a Geometria do Táxi. E, na segunda forma uma reta, fiz a distância normal.

Matheus - Para descobrir a distância da casa de Júlia até a casa de Priscila usei a Geometria Não-Euclidiana, pois não é apenas uma reta, tem várias esquinas. Para descobrir a distância da casa de Júlia até a casa de Cláudia, usei a Geometria Euclidiana, pois é apenas uma reta.

Os demais comentários, não foram muito diferentes dos aqui apresentados, pois descreviam como necessário para a solução dessa atividade as três etapas a seguir.

1ª) Identificar as coordenadas dos pontos utilizados.

2ª) Identificar qual das geometrias se aplicava em cada caso, para poder aplicar a forma de obter a distância correta.

3ª) Multiplicar os resultados obtidos por 250, assim teriam como unidade de medida dessas distâncias o metro.

Identificamos um total de onze alunos, nessa categoria.

Categoria F: o aluno não utilizou a escala.

Identificamos, nesta categoria, as soluções apresentadas por quatro alunos, Martina, Jonas, Marcelo e Paulo. A partir dessas soluções e seus respectivos comentários, verificamos que esses alunos diferenciaram cada uma das geometrias estudadas, conseguiram aplicar com sucesso as leis necessárias. No entanto, não conseguiram realizar a etapa na qual se esperava que fizessem a conversão de unidades para metros.

Exemplo de solução apresentada nesta categoria:

a distância da casa de Júlia até a casa de Priscila	a distância da casa de Júlia até a casa de Cláudia
$ 10 + 6 + -3 - 6 $	

$ 16 + -9 $ $16 + 9 = 25$ unidades	$\sqrt[2]{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ $\sqrt[2]{(11 + 6)^2 + (-6 + 6)^2}$ $\sqrt[2]{17^2 + 0^2} = \sqrt[2]{289} = 17$ unidades
---	--

O comentário registrado por Juliana ilustra bem o raciocínio desenvolvido pelos alunos enquadrados na categoria.

Juliana - Identifique as coordenadas de cada ponto, vi que no item a) é Geometria do Táxi, pois o caminho não é uma reta e, no b), é Geometria Euclidiana, pois nesse caso é uma reta. Calculei as distâncias.

Após analisarmos as soluções apresentadas para essa atividade, que teve caráter avaliativo, concluímos que a compreensão do conteúdo se deu de forma satisfatória, pois dos vinte e seis alunos que realizaram a avaliação, apenas nove não conseguiram resolvê-la da forma correta, seja por não diferenciar as geometrias envolvidas, por não ter realizado nada da atividade ou, ainda, por ter utilizado outra estratégia, no caso “contar os quadradinhos e multiplicar por 250”.

Consideramos também que, desse conjunto de alunos, seis não atingiram o mínimo dos objetivos propostos para a avaliação, o que nos leva a acreditar que outros fatores possam ter influenciado na resolução da atividade.

Considerações finais

Apresentamos, nesta comunicação científica, um recorte de uma dissertação de mestrado em andamento, realizada pela primeira autora sob a orientação do segundo autor, cujo objetivo foi verificar se as atividades realizadas anteriormente proporcionaram aquisição de conhecimentos básicos a respeito de uma geometria não euclidiana, no caso, a Geometria do Taxi.

Os alunos a realizaram utilizando o software GeoGebra e a mesma contribuiu para que os alunos reforçassem conceitos de Geometria Analítica, como localização de um ponto no plano e a distância entre dois pontos. Buscou-se verificar como seria esta trajetória na Geometria Euclidiana e, a seguir, na Geometria do Taxi, segundo a qual a métrica envolvida é a dos catetos.

O emprego de problemas envolvendo a Geometria do Taxi proporciona atividades práticas, as quais, geralmente, não são abordadas no cotidiano escolar associado à vivência dos estudantes. Com este tipo de problematização acreditamos estar cumprindo aos objetivos emanados das Orientações Curriculares para o Ensino Médio - OCEM – no que se refere ao ensino de Geometria no Ensino Médio (BRASIL, 2006, p. 75):

o estudo da Geometria deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos do cotidiano, como, por exemplo, orientar-se no espaço, ler mapas, estimar e comparar distâncias percorridas, reconhecer propriedades de formas geométricas básicas, saber usar diferentes unidades de medida.

Dessa forma, acreditamos ter cumprido o objetivo da investigação, uma vez que, pelas manifestações dos estudantes em seus diários de bordo, conseguiram utilizar recursos da Matemática e da Geometria para obter orientações no espaço, fazer leituras de trajetórias em atividades, posteriormente realizadas, utilizaram o *google maps*, o que resultou na aquisição de

novos conhecimentos, proporcionando-lhes um olhar diferenciado para essa disciplina no cômputo do currículo do Ensino Médio.

Referências e bibliografia

- Bardin, L. (2011). *Análise de conteúdo*. São Paulo: Edições 70. p. 229. 2011.
- Brasil. (1998). Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática/Secretaria de Educação Fundamental*. – Brasília: MEC/SEF, 148 P.
- Brasil. (2006). Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. *Orientações curriculares para o ensino médio: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias*. Brasília.
- Duval, R. (2011). *Ver e Ensinar a Matemática de Outra Forma – entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas*. Tânia M.M.Campos (org.) v. 1. São Paulo: PROEM.
- Kaleff, A. M.; Nascimento, R. S. (2004). *Atividades Introdutórias às Geometrias Não-Euclidianas: o exemplo da Geometria do Táxi*. Boletim Gepem, Rio de Janeiro, nº 44, p. 11-42, dezembro, 2004.
- Veloso, E. (1998). *Geometria do motorista de táxi*. Geometria: temas actuais: materiais para professores. Lisboa: Instituto da Inovação Educacional, 1998. p. 327 a 341.

Geometria nos anos iniciais: sobre os conceitos de área e perímetro

Maria Cândida **Müller**

Departamento Acadêmico de Ciências da Educação, Universidade Federal de Rondônia
Brasil

maria.candida@unir.br

Sergio **Lorenzato**

Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas
Brasil

slorenzato@sigmanet.com.br

Resumo

Estes são os primeiros resultados da pesquisa de cunho qualitativo e exploratório - *O ensino de Geometria nos anos iniciais do ensino fundamental: percepção de professores dos anos iniciais de Vilhena (Rondônia/Brasil) sobre perímetro e área de figuras planas*, desenvolvida desde 2013. O objetivo desta primeira etapa foi investigar a percepção dos docentes e futuros docentes, participantes de um grupo de estudos colaborativo – GETEMAT (Grupo de Estudo e Trabalho Pedagógico para o ensino de Matemática), com relação aos conceitos de perímetro e área de figuras planas. Aplicou-se um instrumental com dezessete questões, respondidas por vinte e cinco participantes. Uma primeira análise revelou as dificuldades de compreensão dos conceitos de área e perímetro, também apontados por autores da área de Educação Matemática em outros estudos. A continuidade da pesquisa pretende propor abordagens significativas para o ensino de área e perímetro, além de outros conceitos relacionados à Geometria nos anos iniciais.

Palavras-chave: ensino de Geometria, anos iniciais, formação de professores, educação matemática.

O ensino de Geometria nos Anos Iniciais

Os Anos Iniciais são uma etapa da escolarização fundamental para aquisição de noções, percepções e conceitos das diferentes áreas do conhecimento e, em especial, da Geometria. Vários autores da área de Educação Matemática, tais como: Lorenzato (2006), Mauro (2007), Nacarato & Passos (2003), Pavanello (2004), Broitmann & Itzcovich (2006) têm direcionado seus estudos para esta área. No entanto, como afirma Pavanello (2004), a capacidade de observar o espaço tridimensional, elaborar modos de se comunicar a respeito desse espaço, assim como, atividades de leitura e escrita, entre outras que necessitam o desenvolvimento da percepção espacial, orientação, coordenação de vários ângulos de observação dos objetos, não vêm sendo trabalhadas de forma adequada na escola básica.

Além disso, o ensino de matemática nos dias atuais não se resume a atender um objetivo apenas de utilidade e uso cotidiano desse conhecimento, mas prevê o desenvolvimento de resolução de problemas baseados na realidade em que o aluno está inserido e, nesse processo,

possibilitar a descoberta das relações matemáticas como comparar, procurar regularidades, fazer conjecturas, elaborar hipóteses, fazer estimativas, criar modelos matemáticos, propor problemas, entre outras que fazem parte do chamado conhecimento matemático. Em especial, o ensino de Geometria nos Anos Iniciais como apontado por Pavanello (2004) e também por Luna (2009, p. 73) “favorece o desenvolvimento da noção do espaço, a percepção dos conceitos geométricos em diferentes contextos e as relações existentes entre números e medidas”. A Geometria permite, ainda de acordo com Luna (2009, p. 73) “compreender, descrever e representar de forma organizada o mundo em que vivemos e para isto, a construção desses saberes supõe a investigação e exploração do mundo físico”.

Para se aprender Matemática e, em especial, Geometria tanto os alunos quanto os professores precisam vivenciar de algum modo o processo pelo qual a matemática foi produzida ao longo de sua história; de acordo com Pavanello (2004, p. 131) “os professores em sua formação inicial ou continuada precisam ter algum contato como o modo pelo qual os matemáticos produzem a matemática, os procedimentos que utilizam nessa produção”.

Biani (2011) apresenta dados que mostram que a área de Geometria é preterida em relação à Aritmética e à Álgebra no desenvolvimento dos conteúdos escolares. De acordo com essa autora, a resistência ao ensino de Geometria na escola básica pode estar relacionada a aspectos históricos do ensino de Geometria, que, no século dezenove e início do século vinte era privilégio do que caracteriza como “ensino masculino”, voltado aos homens, enquanto que às mulheres, a maioria do contingente dos profissionais da educação, se ensinava a Aritmética. Além disso, considera que a Geometria foi sempre “conteúdo destinado às elites privilegiadas” (Biani, 2011, p. 3).

Ao justificarem a escolha da Geometria como campo do saber a ser estudado pelo grupo de professores com os quais trabalharam, Nacarato, Gomes e Grando (2008, p. 27) observam que “esse campo matemático raramente é trabalhado nas escolas públicas e, quando o é, ocorre no final do ano ou de forma totalmente destituída de sentido e significado para o aluno”. Além disso, apontam que os alunos ingressantes nos cursos de formação de professores são oriundos desta escola que não trabalhou os conceitos geométricos e, portanto, não têm conhecimentos básicos nesse campo.

Daí a necessidade de se permitir ao professor que está no seu processo contínuo de formação, vivenciar situações que permitam observar, comparar, medir, conjecturar, imaginar, criar, generalizar, deduzir, verificar, ou seja, desenvolver o chamado raciocínio plausível (Polya, 1954), que é próprio de quem produz o conhecimento matemático. E como isso é possível, se o professor na sua época como aluno, provavelmente não aprendeu dessa forma?

Talvez uma possível resposta a essa questão esteja na constituição das chamadas comunidades de aprendizagem do professor, nas quais professores em exercício, professores em formação se reúnem, discutem e aprendem juntos os mais diversos assuntos. No caso desta pesquisa, o lócus de coleta de dados foi o Grupo GETEMAT (Grupo de Estudo e Trabalho Pedagógico para o Ensino de Matemática) – grupo de estudo colaborativo constituído por docentes da educação básica (professoras dos anos iniciais da rede municipal de Vilhena/Rondônia), futuros professores (estudantes de graduação em Pedagogia da Universidade Federal de Rondônia/Campus de Vilhena) e docentes desse curso (Müller, 2011; Müller & Carvalho, 2012).

A dinâmica dos encontros do GETEMAT pode ser caracterizada como uma reflexão sobre a prática docente das/dos participantes a partir da discussão de textos sobre formação docente em grupos colaborativos ou relacionados ao currículo dos anos iniciais. Nas reuniões do grupo são discutidos temas como: a formação da professora dos anos iniciais; a natureza do conhecimento matemático; estratégias para o ensino dos conceitos matemáticos; utilização de materiais didáticos, jogos e outros recursos no desenvolvimento do trabalho pedagógico. O grupo GETEMAT pode ser considerado um espaço privilegiado de formação continuada, constituindo-se ao longo do tempo em uma comunidade de aprendizagem, que busca a produção de um conhecimento que privilegia a reflexão sobre a prática docente a partir do estudo de conteúdos relacionados ao ensinar e aprender matemática nos anos iniciais do ensino fundamental.

Nessa perspectiva, pretendeu-se a partir desta pesquisa de cunho qualitativo e exploratório, investigar a percepção dos docentes e futuros docentes, participantes desse grupo, com relação aos conceitos de perímetro e área de figuras planas, bem como levantar possíveis pontos de discussão sobre como trabalhar estes conceitos nos anos iniciais do ensino fundamental. Para isto, elaborou-se um questionário aberto com dezessete questões, que foi aplicado em uma das reuniões do grupo. A coleta de dados ocorreu em 2013 e, a partir da análise dos mesmos, buscou-se além de subsídios para as discussões desenvolvidas nos encontros do GETEMAT, também a realização de um Curso de Extensão sobre *Área e Perímetro*, planejado a partir dos dados levantados pelo estudo.

Alguns estudos teóricos sobre o tema

Lorenzato (2006) destaca que *Medida, Geometria e Número* constituem o tripé básico dos conhecimentos matemáticos recomendados aos anos iniciais, o que mais uma vez valida a importância do estudo dos conceitos de perímetro e área, pois os mesmos integram estes três aspectos. Além disto, este autor ressalta a importância do desenvolvimento do processo de construção do conceito de medida desde a educação infantil, pois este é fundamental para o entendimento dos conceitos de perímetro e área pelos alunos dos anos iniciais.

Para o desenvolvimento de atividades didáticas que efetivamente produzam situações de reflexão, entendimento e significação, o professor necessita estar atento aos recursos que deve disponibilizar às crianças, para que favoreçam a construção de suas ideias. Além de materiais manipuláveis, a elaboração de situações-problema pode ser fundamental para o desenvolvimento dos conceitos em estudo. Para isto, é necessário por parte do professor o desenvolvimento de três tipos de conhecimento, que Mauro (2007, p. 275) destaca em seu estudo: “[...] três saberes docentes que são essenciais no processo da formação inicial de professores, são eles: os conhecimentos epistemológicos, didáticos e específicos”.

No ensino de Geometria nos Anos Iniciais dois conceitos podem ser considerados como fundamentais, pois possibilitam a integração de diferentes áreas do conhecimento matemático. Estes conceitos são perímetro e área de figuras planas.

Vários autores como Luna (2009), Brito e Bellemain (2004), Douady e Perrin-Glorian (1989) observam que há três obstáculos no estudo das medidas geométricas: confusão entre perímetro e área, entre contorno e superfície; concepção de que o único modo de comparar grandezas é por meio de números; e concepção de que apenas alguns polígonos possuem perímetro, questão gerada pelo uso quase exclusivo das figuras prototípicas.

Pode-se dizer que é fundamental ao professor que, em suas aulas, ordene as atividades que apoiam os conceitos de área, número e grandeza, pois, a criança convive primeiramente com os entes físicos através do tamanho, contorno, superfície dos objetos que a rodeiam; em seguida, com a necessidade de medi-los, é que surgem os chamados entes geométricos como perímetro e área, os quais são expressos em números, que são os entes aritméticos. Dessa forma, parte-se do mundo real, vivido e sentido, ao mundo das formas e das medidas e, finalmente, chega-se ao mundo dos números, da abstração.

Na pesquisa de Douady e Perrin-Glorian (1989) as autoras recomendam a diferenciação entre os conceitos de área de superfície, área de número e área de grandeza. Para tanto, de acordo com estas autoras, o estudo de área deve distinguir três quadros: o geométrico, o das grandezas e o numérico. A mudança de quadros provocada pelo professor através das situações de aprendizagem propostas por ele é que possibilita ao aluno obter formulações diferentes para um mesmo problema, possibilitando a construção do conceito nos seus três aspectos.

Dessa forma, discutir com os professores e futuros professores como eles percebem estes dois conceitos matemáticos (perímetro e área) torna-se fundamental, pois é a partir do conhecimento próprio da área de matemática que terão condições de propor atividades e situações-problema que permitirão aos alunos compreender e utilizar estes conceitos em diferentes contextos. Com relação ao conteúdo de perímetro e área, Mauro (2007) destaca que, no levantamento bibliográfico sobre o tema, o grupo de professores chegou à seguinte conclusão:

[...] no estudo de área e perímetro é necessário considerar três polos: o geométrico – que compreende as figuras geométricas e seu contorno; o numérico – que se refere às medidas das grandezas área e perímetro, composto por números reais não-negativos e da grandeza relacionado às ideias de área e perímetro, constituindo-se nas propriedades das figuras geométricas e do seu contorno. E também, recomenda-se uma exploração de situações de comparação, produção e medidas na resolução de situações-problema, envolvendo muitas vezes as estimativas (Mauro, 2007, p. 277).

A afirmação anterior corrobora que os conceitos de perímetro e área de figuras planas podem ser considerados como conceitos integradores de diferentes conteúdos matemáticos.

Com relação ao tipo de conhecimento que o professor precisa para ensinar e desenvolver atividades de aprendizagem dos conceitos de perímetro e área, Mauro (2007) destaca que muitas vezes o professor não desenvolve o conteúdo de forma adequada por não ter tido oportunidade, na sua formação, de estudar e conhecer o conceito. Ao relatar o desenvolvimento do estudo sobre área e perímetro por uma professora dos anos iniciais, a autora observa que:

[...] de acordo com seus relatos, até então, ela não sentira despertada a curiosidade ou a necessidade de trabalhar com esse bloco de conteúdo, durante a sua vivência em sala de aula. Uma explicação para isso seria o desconhecimento da importância de trabalhar tais conteúdos ou a falta de propriedade acerca de o quê, porque e como proporcionar aprendizagem numa construção tão abstrata do pensamento (Mauro, 2007, p. 276).

Além disto, destaca que:

[...] as questões da professora investigadora centravam-se nos aspectos pontuados por Shulman (1986) no que se refere ao domínio do conteúdo no ensino e por Pimenta (1999), que destaca a importância da mobilização dos saberes da experiência para a construção da identidade profissional do professor, o que é retratado nas suas falas: “Como ensinar o que não foi construído na minha própria aprendizagem?” “Como descentrar um olhar perceptível

para uma construção lógico-matemática?” “Como ‘desconstruir’ esta resistência em pensar diferente?” (Mauro, 2007, p. 276).

Esta experiência relatada pela autora demonstra a importância da formação de grupos de estudo reunindo professores que já estão em sala de aula com professores em formação, para que juntos possam ampliar suas perspectivas de estudo e conhecimento sobre os conteúdos matemáticos escolares que precisam ser trabalhados com os alunos.

Os primeiros resultados da pesquisa

No primeiro semestre de 2013 foi elaborado um questionário para coleta de dados, numa ação conjunta entre os dois autores deste trabalho. O instrumental é composto por três partes, sendo que a primeira faz a identificação do participante, a segunda trata das questões relacionadas ao conhecimento do entrevistado sobre Geometria, e a terceira refere-se ao conhecimento sobre como ensinar Geometria.

Ainda no ano de 2013, no segundo semestre, foi realizada a aplicação dos questionários aos participantes do grupo GETEMAT. Foram respondidos 25 questionários, sendo que três foram respondidos por professores que atuam nos anos iniciais das escolas municipais de Vilhena e vinte e dois por estudantes do Curso de Pedagogia da Universidade Federal de Rondônia - UNIR/ Vilhena. Entre os estudantes, sete participavam do Programa Institucional de Iniciação à Docência (PIBID)¹ e cursavam o quinto e sétimo semestres do curso. Os demais são alunos de diferentes semestres do Curso.

Antes da aplicação do instrumento, a proposta da pesquisa foi apresentada ao grupo e os integrantes foram convidados a participar como colaboradores. Todos os presentes responderam ao questionário. Esses dois momentos, apresentação do Projeto de Pesquisa e aplicação do questionário, foram um preâmbulo para o início das discussões com o grupo sobre algumas questões relacionadas ao ensino de Geometria nos anos iniciais, como por exemplo, a relação entre o estudo da Geometria e a realidade, e a importância da observação na construção de noções espaciais que auxiliarão os estudantes na construção dos conceitos geométricos ao longo de sua vida escolar. Foram mais três encontros de discussão sobre o ensino de Geometria nos anos iniciais.

A partir dos dados referentes à *identificação dos participantes* (primeira parte do questionário), eles foram distribuídos em três grupos: Grupo 1, composto por estudantes de Pedagogia que não participam do Programa PIBID; Grupo 2, formado pelos bolsistas PIBID e Grupo 3, das professoras dos anos iniciais.

A segunda parte do questionário tratava do *conhecimento sobre Geometria*, e dele foram selecionadas as seguintes questões: a de nº 5, “Cite três propriedades geométricas importantes que fazem parte dos programas dos anos iniciais”, e a de nº 7, “Defina perímetro de quadrado”. A terceira parte do instrumento tratava do *ensino de Geometria*, e tinha a indicação de que, se o entrevistado fosse estudante, deveria responder apenas a algumas das questões. Para apresentação dos dados desta terceira parte foram escolhidas as questões que todos os participantes responderam: a de nº 12 – “O que você responderia ao aluno se ele lhe perguntasse:

¹ PIBID -Programa da CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) que tem como objetivo o aperfeiçoamento e a valorização da formação de alunos de licenciatura participantes de projetos de iniciação à docência desenvolvidos por Instituições de Educação Superior (IES), em parceria com escolas de educação básica da rede pública de ensino.

‘por que é importante aprender a calcular perímetro e área de figuras? ’”, e a de nº 16 – “Cite exemplos de aplicação de conhecimentos sobre perímetro e sobre área de figuras”.

Os dados que se seguem resumem as respostas à questão 5, apresentadas pelos grupos 1, 2 e 3. De modo semelhante, seguem as respostas destes três grupos a cada uma das outras questões (nº 7, nº 12 e nº 16).

Sobre o conhecimento de Geometria

A **questão 5** buscava informações sobre o conhecimento dos participantes a respeito de propriedades geométricas, restringindo-as aos conhecimentos dos anos iniciais.

No Grupo 1, composto por quinze estudantes de Pedagogia, houve a seguinte distribuição de respostas: 33,3% responderam que não sabiam, 33,3% deixaram em branco a resposta e 33,3% responderam alguma coisa. Dos que responderam, as respostas foram: “altura, soma, perímetro”, “área, perímetro, altura”, “quadrado, triângulo, retângulo”, “quadrado, círculo, triângulo”, “quadrado, triângulo e o círculo”.

No Grupo 2, formado por sete estudantes de Pedagogia que participam do PIBID, 43% deixaram em branco a resposta, 43% responderam: “quadrado, triângulo e o círculo”, e 14% responderam “face, vértice e aresta”.

No Grupo 3, composto por três professoras dos anos iniciais, duas deixaram em branco a resposta e uma colocou pontos de interrogação.

Na **questão 7**, que tratava especificamente do conhecimento sobre o que é perímetro do quadrado, houve uma mudança na distribuição de respostas: a maioria arriscou alguma caracterização do que seria o perímetro do quadrado, e onze deixaram em branco ou responderam que não sabiam.

No Grupo 1, as respostas ficaram assim distribuídas: 40% deixaram em branco a resposta; 13,3% responderam que não sabiam e 46,7% deram alguma resposta. Dos que deram alguma resposta, quatro deram a seguinte resposta: “quatro lados iguais”; um respondeu “é o comprimento dos lados do quadrado”; outro “tem quatro áreas iguais ou lados”, e outro a resposta “4x4 os quatro a medida são as mesmas”(sic).

O Grupo 2 apresentou as seguintes respostas: dois deixaram em branco; um respondeu que “perímetro é o limite do quadrado”; outro “todos os lados iguais”; outro “é o cálculo que se faz de toda a extensão do quadrado”; outro respondeu “a soma de todos os lados”, e outro “a soma dos quatro lados iguais” e indicou 2^2 .

O grupo das professoras dos anos iniciais – Grupo 3 apresentou as seguintes respostas: uma respondeu “todos iguais”, outra “os lados, ou seja, os quatro lados” e uma deixou em branco a resposta.

Sobre o ensino de Geometria

As duas questões (de nº 12 e de nº 16) da terceira parte do questionário procuravam fazer a conexão entre o conhecimento sobre o perímetro e área e a contextualização desse conteúdo na sala de aula. Mesmo aos estudantes do curso de licenciatura em Pedagogia foi solicitado que respondessem às questões selecionadas.

A **questão 12** perguntava: “O que você responderia ao aluno se ele lhe perguntasse: ‘por que é importante aprender a calcular perímetro e área de figuras? ’”. Para essa questão foram

apresentadas 15 justificativas, o que corresponde a 60% do total dos entrevistados e 40% deixaram em branco ou declararam que não sabiam.

No Grupo 1, 40% dos estudantes deixaram em branco a resposta, 13,3% responderam que não sabiam e os demais, que correspondem a 46,7% do grupo, deram respostas justificando o estudo do perímetro e área por sua utilidade no dia a dia, como “no cálculo de área da casa, quantidade de azulejos”, “saber quantos metros quadrados tem sua casa”, “para saber quantidade, metragem”, “área de sua casa, terreno”.

No Grupo 2, também constituído de estudantes, porém com alguma experiência de magistério, pois participam do PIBID, somente um, que corresponde a 14,3% do grupo, deixou em branco a resposta; os demais, 85,7%, deram alguma justificativa: “para aprender a medida do quintal de sua casa, da rua, dos objetos, ter uma noção espacial”; “para se localizar no espaço”, “saber as noções espaciais de determinado espaço”, “espaço de determinado área”, “ao estudar esses conceitos saberá ter noções espaciais”, “porque diversas profissões exigem este conhecimento”.

No Grupo 3, formado pelas professoras dos anos iniciais, somente uma deixou de responder, as outras duas deram as seguintes respostas: “para saber o espaço onde ele mora, uma parede, etc.”, “Não saberia responder, talvez para calcular o espaço em que ele, futuramente, gostaria de saber ou construir”.

A **questão 16** pedia ao entrevistado que citasse exemplos de aplicação de conhecimento sobre perímetro e sobre área de figuras. No Grupo 1, todos os entrevistados deixaram em branco ou responderam que não sabiam.

No Grupo 2, 43% dos integrantes do grupo deixaram em branco a resposta e os demais 57% responderam: “Para o aluno ter noção da força quando jogar no campo de futebol”; “Perímetro de um terreno e área, perímetro da piscina e área, perímetro da calçada e área.”; “Quando um construtor precisa calcular a área a ser construída, assim descobrir a quantidade de materiais a ser utilizado na obra.”; “O cálculo do tamanho de um campo de futebol.”.

No Grupo 3 tivemos duas respostas em branco e uma informando “ilustrações de formas geométricas”.

Para concluir: olhando um pouco mais os dados...

Os dados apresentados pelos três grupos que responderam ao instrumental indicam um quadro bastante crítico sobre os conhecimentos geométricos dos professores e futuros professores dos anos iniciais.

Com relação ao **conhecimento geométrico**, as respostas às questões selecionadas que tratam de propriedades geométricas e da definição de perímetro de um quadrado, revelam que a totalidade dos participantes desconhece o significado da expressão “propriedades geométricas”, até mesmo as restritas a assuntos dos anos iniciais; em especial, as professoras que já estão atuando, não deram nenhuma resposta, nem fizeram alguma observação sobre qualquer propriedade geométrica, indicando, assim, total desconhecimento sobre o assunto. Com relação à definição de perímetro de um quadrado, novamente o índice de 44% dos entrevistados que não responderam ou declararam que não sabiam é bastante significativo. Além disso, várias respostas ignoram a palavra perímetro e mencionam apenas uma propriedade do quadrado, qual seja, a de possuir quatro lados iguais, o que denota o desconhecimento da existência de outra figura que também tem essa propriedade – o losango. Em síntese, os dados mostram que é nulo o

conhecimento geométrico apresentado pelos participantes da pesquisa, no que se refere ao significado de perímetro e propriedade geométrica (questões de nº 5 e de nº 7).

Com referência ao **ensino de Geometria** (questões de nº 12 e de nº 16), as respostas indicam que, quando há uma relação entre o conhecimento geométrico e situações da realidade, há um maior envolvimento dos entrevistados com a resposta, pois 60% deles apresentaram alguma justificativa para o ensino de área e de perímetro, embora nem todas tenham sido adequadas. Em síntese, as respostas indicam ser mais fácil justificar a presença do estudo de perímetro e de área no currículo escolar do que citar exemplos de aplicação deste conhecimento.

A este respeito convém ressaltar que a relação entre o que se pode chamar de Geometria que estuda o espaço real e a Geometria que cria um espaço matematizado (Broitmann & Itzcovich, 2006) é provavelmente um dos aspectos principais da Geometria a ser trabalhada nos anos iniciais e, por isto, é um ponto crucial a ser discutido com o professor e futuro professor que irá trabalhar na etapa de escolarização. De acordo com os autores citados, é a partir da observação do espaço que a rodeia que a criança inicia a construção de seus conhecimentos espaciais, que não necessariamente se tornarão conhecimentos geométricos da matemática. Este conhecimento geométrico é empírico, mas será básico para a construção da Geometria matemática; para tanto, far-se-á necessária a presença de uma intencionalidade didática no processo escolar.

Lembrando que os participantes desta pesquisa já possuíam alguma experiência geométrica que a vida cotidianamente impinge a todos e, também, considerando que os ensinamentos escolares por eles recebidos devem ter sido, em parte, sobre objetos espaciais, era de se esperar que os participantes da pesquisa conseguissem relacionar seus conceitos de área e de perímetro com situações práticas do dia a dia, tais como, estabelecimento de área de terreno ou de casa, compra de material de construção, etc. No entanto, isto não aconteceu com mais de 80% das pessoas, o que aponta uma descontextualização do ensino de Geometria desde os anos iniciais.

Esta primeira etapa da pesquisa revelou informações significativas, tanto em quantidade como em qualidade. Por isso, elas merecem uma análise mais extensiva e minuciosa, a qual provavelmente indicará onde e como ocorreram falhas na formação dos participantes, bem como apontará novos direcionamentos ao ensino de alguns conceitos geométricos nos cursos de formação universitária e também nos cursos de formação em exercício, principalmente para os professores que lecionam nos iniciais. Assim, o passo seguinte será o desenvolvimento de um curso de extensão, que será oferecido aos docentes dos anos iniciais e estudantes do curso de Pedagogia, no qual serão estudados os conceitos de área e perímetro, além de discutidas as dificuldades detectadas neste estudo com relação ao ensino de Geometria.

Referências

- Biani, R.P. (2011). Considerações sobre a Geometria nos anos iniciais do Ensino Fundamental. *Ciências em Foco*, 1(4).
- Brito, A. F. de, & Bellemain, P. M. B. (2004). Influência do uso de materiais manipulativos na construção da grandeza comprimento. *8 Encontro Nacional de Educação Matemática* (pp. 1-20). Recife. *Anais...* Recife: Universidade Federal de Pernambuco.
- Broitman C., & Itzcovich, H. (2006). Geometria nas séries iniciais do ensino fundamental: problemas de seu ensino, problemas para o seu ensino. In M. Panizza, *Ensinar Matemática na Educação Infantil e nas séries iniciais: análise e propostas* (pp.169-188). Porto Alegre: Artmed.

- Douady, R. & Perrin-Glorian, M.J. (1989). Un processus d'Apprentissage du Concept d'Aire De Surface Plane. *Educational Estudios in Mathematics*, 20, 387-424.
- Lorenzato, S. (2006). *Educação Infantil e percepção matemática*. Campinas: Autores Associados.
- Luna, A. V. de A. (2009). O processo de ensino e aprendizagem da geometria: uma experiência como o estudo de área e perímetro. In G. Guimarães, & R. Borba, R. (Org.), *Reflexões sobre o ensino de Matemática nos anos iniciais de escolarização* (1ed., Vol. 1, pp. 73-85). Recife: Sociedade Brasileira de Educação Matemática.
- Mauro, S. (2007). Saberes docentes na formação continuada de professores das séries iniciais do ensino fundamental: um estudo com grandezas e medidas. In A. D. Nascimento, & T. M. Hetkowski (Orgs), *Memória e formação de professores* (pp. 273-290). [online]. Salvador: EDUFBA. eISBN:9788523209186.
- Müller, M. C. (2011). Formação Continuada de docentes dos anos iniciais: a proposta do GETEMAT. In *Anais XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática*. 2011, Recife. Acedido em Outubro 10, 2011. http://www.cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/view/374.
- Müller, M. C., & Carvalho, D. L. (2012). Grupos Colaborativos – Comunidades de Aprendizagem: espaço de formação permanente do docente. *Anais do XI Encontro Paulista de Educação Matemática: XI EPEM* (pp. 1-12). São José do Rio Preto: SBEM/SBEM-SP.
- Nacarato, A. M., & Passos, C. L. (2003). *A Geometria nas séries iniciais*. São Carlos (SP): Edufscar.
- Nacarato, A. M., Gomes, A. A., & Grando, R. C. (2008). Grupo colaborativo em Geometria: uma trajetória... uma produção coletiva. In A. M. Nacarato, A. A. Gomes, & R. C. Grando (Orgs.), *Experiências com Geometria na escola básica: narrativas de professores em (trans)formação*. São Carlos: Pedro & João Editores.
- Pavanello, R. M. (2004). A Geometria nas séries iniciais do ensino fundamental: Contribuições da pesquisa para o trabalho escolar. In R. M. Pavanello, *Matemática nas series iniciais do ensino fundamental: a pesquisa e a sala de aula*, 2(6), 129-143. São Paulo. Coleção SBEM.
- Polya, G. (1954). *Induction and analogy in mathematics: Mathematics and plausible reasoning* (Vol. 1). New Jersey: Princeton University Press.

Geometrias: as concepções de um grupo de professores de Matemática

Karla Aparecida **Lovis**
Instituto Federal Catarinense – Câmpus Concórdia
Brasil

karla.lovis@ifc-concordia.edu.br

Valdeni Soliani **Franco**
Universidade Estadual de Maringá
Brasil
vsfranco@uem.br

Resumo

O objetivo deste trabalho foi investigar as concepções de vinte e sete professores de Matemática, que atuam em escolas públicas do estado do Paraná, sobre a Geometria Euclidiana e as Geometrias não Euclidianas. A escolha dos participantes realizou-se por meio de um questionário, e a coleta dos dados adveio de uma entrevista semiestruturada. Durante a pesquisa, investigou-se as concepções que os professores apresentam sobre a construção do conhecimento geométrico, da Geometria Euclidiana, das Geometrias não Euclidianas e da importância a elas atribuídas. As concepções tanto a respeito da Geometria Euclidiana quanto das não Euclidianas, são, em geral, ancoradas nas ideias, opiniões e preferências dos professores. Uma minoria de professores apresenta suas concepções pautadas em conceitos e resultados dessas Geometrias.

Palavras-chave: concepções, geometria euclidiana, geometrias não euclidianas, formação de professores.

O interesse pelo estudo das concepções dos professores de Matemática adveio da junção entre a história acadêmica e profissional, dos pesquisadores, com o ensino de Geometrias¹. O interesse pelo tema intensificou-se com a inclusão do tópico noções de Geometrias não-Euclidianas nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica – DCE – do estado do Paraná. As DCE é o documento oficial do estado do Paraná, responsável por nortear e recomendar os conteúdos e metodologias que podem ser empregados nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio. As Geometrias não Euclidianas que as DCE recomendam são: Geometria Projetiva, Topologia, Geometria Fractal, Geometria Hiperbólica e Geometria Elíptica².

¹ Geometrias neste trabalho será entendida como Geometria Euclidiana, Geometria Hiperbólica, Geometria da Superfície da Esfera, Geometria Projetiva, Geometria Fractal e Topologia.

² Nas DCE a Geometria da Superfície da Esfera é chamada de Geometria Elíptica. Porém, ao descrever essa Geometria, percebemos que as diretrizes se referem, na verdade, à Geometria da Superfície da Esfera, construída por Riemann. A Geometria Elíptica foi desenvolvida por Félix Klein, sendo que um de seus modelos é obtido por meio da identificação dos pontos antípodas da Superfície da Esfera, gerando o que se denomina de Plano Projetivo. Nesta Geometria, o primeiro postulado de Euclides é verificado, e como foi visto, isso não ocorre na Geometria da Superfície da Esfera.

Segundo o documento, no Ensino Fundamental, o conteúdo Geometrias tem o espaço como referência, “[...] de modo que o aluno consiga analisá-lo e perceber seus objetos para, então, representá-lo” (Paraná, 2008, p. 56). Nesse nível de ensino, o aluno deve compreender:

Os conceitos da geometria plana: ponto, reta e plano; paralelismo e perpendicularismo; estrutura e dimensões das figuras geométricas planas e seus elementos fundamentais; cálculos geométricos: perímetro e área, diferentes unidades de medidas e suas conversões; representação cartesiana e confecção de gráficos;
Geometria espacial: nomenclatura, estrutura e dimensões dos sólidos geométricos e cálculos de medida de arestas, área das faces, área total e volume de prismas retangulares (paralelepípedo e cubo) e prismas triangulares (base triângulo retângulo), incluindo conversões;
Geometria analítica: noções de Geometria analítica utilizando o sistema cartesiano;
Noções de Geometrias não-euclidianas: geometria projetiva (ponto de fuga e linhas do horizonte); Geometria topológica (conceitos de interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade, curvas e conjuntos abertos e fechados) e noções de geometria dos fractais (Paraná, 2008, p. 56).

Esses conteúdos devem ser distribuídos no decorrer dos quatro anos finais do Ensino Fundamental. No Ensino Médio, as Diretrizes apontam que o aluno deve aprofundar os conceitos de Geometria Plana e Espacial “[...] em um nível de abstração mais complexo [...] é imprescindível o estudo das distâncias entre pontos, retas e circunferências; equações da reta, do plano e da circunferência; cálculos de áreas de figuras geométricas no plano e estudo de posições” (Paraná, 2008, p. 56). Além disso,

[...] é necessário conhecer as demonstrações das fórmulas, teoremas, conhecer e aplicar as regras e convenções matemáticas, tanto no estudo da Geometria de posição como no cálculo de área de figuras geométricas planas e espaciais e de volume de sólidos geométricos, em especial de prismas, pirâmides (tetraedro), cilindro, cone e esfera (Paraná, 2008. p. 56).

No Ensino Médio, também é preciso aprofundar os estudos das noções de Geometrias não Euclidianas, ao abordar a Geometria dos Fractais, Geometria Projetiva, Geometria Hiperbólica e Geometria Elíptica. Com relação a essas Geometrias, as Diretrizes recomendam:

Na geometria dos fractais pode-se explorar: o floco de neve e a curva de Koch; triângulo e tapete de Sierpinski. Para abordar os conceitos elementares da geometria hiperbólica uma possibilidade é através do postulado de Lobachevsky (partindo do conceito de pseudo-esfera, pontos ideais, triângulo hiperbólico e a soma de seus ângulos internos). Já na apresentação da geometria elíptica, fundamentá-la através do seu desenvolvimento histórico e abordar: postulado de Riemann; curva na superfície esférica e discutir o conceito de geodésia; círculos máximos e círculos menores; distância na superfície esférica; ângulo esférico; triângulo esférico e a soma das medidas de seus ângulos internos; classificação dos triângulos esféricos quanto a medida dos lados e dos ângulos; os conceitos referentes à superfície da Terra: pólos, equador, meridianos, paralelos e as direções de movimento (Paraná, 2008. p. 27-8).

Com a inclusão das Geometrias não Euclidianas, questionávamos acerca das concepções dos professores sobre estas Geometrias e também da própria Geometria Euclidiana. Portanto, o problema de investigação, para o desenvolvimento trabalho, surgiu como o produto de um

período de interrogações, da procura de fundamentos teóricos e de reflexões sobre o tema concepções e as questões que envolvem as Geometrias. A escolha do termo “concepção” se deu por acreditarmos que as concepções desempenham um papel importante na vida e na tomada de decisões dos professores.

Desse modo, esta investigação é um estudo a respeito das concepções de vinte e sete professores de Matemática, referentes a também vinte e sete Núcleos Regionais de Educação – NRE³ – do Estado do Paraná, sobre as Geometrias. Destacamos que, durante a pesquisa, procuramos evidenciar os traços mais relevantes, bem como as semelhanças, contrastes e diferenças nas concepções. Para atingir o objetivo realizou-se uma pesquisa qualitativa, cujo instrumento selecionador foi um questionário. Para a coleta de dados, especificamente, organizou-se uma entrevista semiestruturada. O questionário continha tópicos e perguntas relacionadas aos dados gerais sobre os professores. Também questionava se os professores ensinam as Geometrias e o que entendem por Geometrias. Destaca-se que o questionário foi enviado para os e-mails oficiais de todos os professores do estado do Paraná, via Secretaria de Educação, e as respostas foram encaminhadas para o e-mail de um dos pesquisadores. A entrevista continha um roteiro com 11 tópicos e questões, que serviram como guia para a pesquisadora. Destaca-se que a pesquisadora ficou à vontade para fazer novas perguntas quando achava pertinente. As perguntas do roteiro foram apresentadas para todos os entrevistados. Para analisar os dados obtidos utilizou-se a análise de conteúdo descrita por Bardin (2007).

Participantes da pesquisa

Quanto aos participantes da pesquisa, todos são professores de Matemática que atuam em escolas públicas do estado do Paraná. Esses professores têm graduação em Matemática (treze professores), em Ciências com habilitação em Matemática (treze professores) e Ciências Biológicas com habilitação em Matemática (um professor). No momento da investigação, todos tinham pelo menos uma especialização, sendo que cinco já haviam participado do PDE⁴, quatro estavam participando do programa, dois eram mestres e cinco estavam cursando o Mestrado.

Por meio das entrevistas, verificou-se que todos os professores lembraram que estudaram, durante a graduação, conceitos e resultados de Geometria Euclidiana, ou seja, proposições, lemas, propriedades, corolários, teoremas, entre outros. Seis professores não cursaram uma disciplina específica de Geometria Euclidiana, mas comentaram que estudaram conceitos desta Geometria em disciplinas como Desenho Geométrico e Geometria Descritiva.

Sobre a formação em Geometrias não Euclidianas, somente um professor estudou Geometria Projetiva durante a graduação e outros dois comentaram que ouviram falar dessas Geometrias no decorrer da graduação. Nenhum professor estudou ou ouviu falar das Geometrias não Euclidianas na Educação Básica. Após a graduação, quinze professores estudaram alguns conceitos e resultados das Geometrias não Euclidianas por meio de cursos oferecidos pela SEED⁵, pelos NRE's e nos GTR's⁶. Oito professores conhecem alguns conceitos e resultados

³ O estado do Paraná tem 399 municípios e estes são divididos por Núcleos Regionais de Educação – NRE; ao todo temos 32 Núcleos no Estado.

⁴ O PDE é o Programa de Desenvolvimento Educacional idealizado pela Secretaria do Estado do Paraná (SEED) que visa à formação continuada dos professores da Educação Básica do Estado.

⁵ Secretaria do Estado da Educação do Paraná.

⁶ Grupo de Trabalho em Rede.

porque leram e estudaram a respeito do assunto e quatro professores nunca estudaram as Geometrias não Euclidianas.

Dentre as cinco Geometrias não Euclidianas recomendadas pelas DCE, vinte e três professores já estudaram ou leram algo sobre a Geometria Fractal, seis professores sobre a Geometria Projetiva, quatro professores sobre a Geometria da Superfície da Esfera e dois professores sobre a Geometria Hiperbólica e a Topologia.

Fundamentos teóricos

O interesse pelo estudo das concepções e crenças dos professores de Matemática sobre essa disciplina e a influência que ela exerce na prática teve, segundo Cury (1994, p. 25), sua “[...] origem no início do século XX, a partir das preocupações dos psicólogos sociais que procuravam entender a influência das crenças sobre o comportamento das pessoas”. A partir da década de 1980, o interesse pelo estudo das concepções e crenças intensificou-se entre os estudiosos de diversas áreas: psicólogos, cientistas políticos, antropólogos e educadores. Com o desenvolvimento da Educação Matemática, a preocupação com o ensino e aprendizagem dessa disciplina, bem como o estudo das concepções, passou a ter destaque nos trabalhos dos Educadores Matemáticos, principalmente, nos Estados Unidos e em Portugal.

Embora utilizado por muitos pesquisadores, o termo concepção é polissêmico, e, nesse sentido, difícil de definir porque não apresenta um único significado. Ferreira⁷ (1998, p. 20) destaca que “[...] atitudes, representações, valores, concepções e crenças apresentam características muito próximas, e, por vezes, mostram-se entrelaçados. Agrava a situação o fato de que muitas e diferentes entre si são as definições para cada um destes termos”.

Um dos primeiros trabalhos cujo foco foi o estudo das concepções foi o da pesquisadora norte-americana Alba Thompson⁸ (1997). Thompson (1997) investigou as concepções de Matemática e de ensino de Matemática de três professoras da “*junior high school*” (equivalente a 4ª série ou 5º ano do Ensino Fundamental) e analisou a relação entre as concepções das professoras e suas práticas pedagógicas. A pesquisadora observou que as professoras desenvolvem padrões de comportamentos que caracterizam a sua prática pedagógica e, por isso, “[...] podem ser manifestações de noções, crenças e preferências, conscientemente sustentadas” ou “[...] podem ser crenças ou intuições, inconscientemente sustentadas, que podem ter evoluído fora da experiência do professor” (Thompson, 1997. p. 12).

Anos mais tarde, Thompson (1992) refinou seus estudos realçando algumas discussões sobre os termos crenças, concepções e conhecimentos. Para a autora, as crenças são frequentemente mantidas e justificadas sem critérios que requerem provas e constituem apenas uma forma primitiva de saber. Quanto ao termo concepções, Thompson (1992) apresenta a seguinte definição:

⁷ Ferreira (1998) em sua dissertação de Mestrado apresenta uma vasta revisão da literatura sobre o termo crença. A autora destaca trabalhos relacionados às crenças sobre a Matemática, seu ensino e aprendizagem, que envolvem professores e alunos.

⁸ O artigo de Alba Thompson foi originalmente publicado, em 1984, na revista *Educational Studies in Mathematics* com o título “The Relationship of Teachers’ Conceptions of Mathematics and Mathematics Teaching to Instructional Practice”. Sua tradução para o português e sua publicação na revista *Zetetiké* aconteceu em 1997. Na sequência do trabalho, utilizamos como referência o artigo traduzido e publicado em 1997.

As concepções dos professores sobre a natureza da Matemática pode ser visto como crenças conscientes e inconscientes, conceitos, significado, regras, imagens mentais e preferências relacionadas com a disciplina de Matemática. Essas crenças, conceitos, opiniões e preferências constituem os rudimentos de uma filosofia da Matemática, embora para muitos professores eles podem não serem desenvolvidas e relacionadas com uma filosofia coerente (Thompson, 1992, p. 132).

Assim, a definição de concepção apresentada por Thompson inclui as crenças, opiniões, conceitos, significados, regras, imagens mentais e as preferências dos professores. Tem-se, então, uma definição mais complexa de concepções, pois abarca um quadro de outras noções que constituem uma rede de representações dos docentes. Em outras palavras, compõem as crenças, as imagens mentais, as opiniões, as preferências, algumas de dimensões mais elaboradas, outras de dimensões mais superficiais.

Ponte (1992) expõe que o interesse pelo estudo das concepções dos professores, bem como de outros profissionais, baseia-se na hipótese de que o indivíduo possui uma base conceitual que determina o seu pensamento e as suas ações. Esta base conceitual “[...] é de uma natureza diferente dos conceitos específicos – não diz respeito a objetos ou acções bem determinadas, mas antes constitui uma forma de os organizar, de ver o mundo, de pensar” (Ponte, 1992, p. 1). Para o autor, as concepções atuam como uma espécie de filtro, ou seja, ajudam a estruturar o sentido que damos às coisas, mas também podem agir como um elemento bloqueador em relação a novas realidades ou problemas, limitando nossas possibilidades de ação e compreensão.

Além do contexto histórico, Ponte (1992) relata que a criação e a propagação das concepções também possuem origem profissional (formação inicial e continuada, tanto no que se refere a parte científica quanto pedagógica) e nos aspectos sociais (expectativas dos alunos, pais e professores, administração escolar, currículo, entre outros). O estudo das concepções deve considerar a natureza do conhecimento, uma vez que são estas que ajudam a entender e compreender o mundo a nossa volta.

Outro pesquisador português que também discorreu sobre o termo “concepções” foi Henrique Guimarães (1988; 2003). Para ele, o estudo das concepções dos professores insere-se em uma área reconhecida “[...] como o estudo do pensamento ou do conhecimento do professor” (Guimarães, 2003, p. 4); e esclarece que conhecer as concepções do professor é ter acesso à sua “[...] vida mental’ [...] conhecer e compreender os vários aspectos do seu pensamento e conhecimento, bem como as relações desses aspectos com a atuação ou comportamento”. Para o termo “concepção”, em sua pesquisa de Mestrado, Guimarães (1988) apresenta a seguinte definição:

[...] podemos definir compreensivamente concepção ou sistema conceptual do professor, como um esquema teórico, mais ou menos consciente, mais ou menos explícito, mais ou menos consistente, que o professor possui, que lhe permite interpretar o que se lhe apresenta ao seu espírito, e que de alguma maneira o predispõe, e influencia a sua acção, em relação a isso (Guimarães, 1988, p. 20).

Anos mais tarde (2003), na sua pesquisa de doutorado, o autor descreve que as concepções são um instrumento do pensar e, expõe que à luz da noção de concepção, pode-se associar um sentido de construção ou criação de algo,

[...] num acto onde concorrem elementos interiores (da pessoa) e elementos exteriores (da coisa). Este acto de conceber cujo culminar pode ser visto como uma espécie de ‘dar a luz’, é no entanto sempre interior, significando este ‘dar a luz’ que a concepção ficou disponível para os ‘olhos’ (do pensamento) da pessoa (Guimarães, 2003, p. 47-8).

Entende-se que Guimarães (2003) define concepções como esquemas mentais que, uma vez formados, desempenham um papel fundamental na compreensão e na atribuição de significados que damos às coisas que nos cercam.

Dos trabalhos de pesquisadores brasileiros que buscaram compreender o termo concepção, destaca-se o da pesquisadora Helena Cury (1994) que, após fazer uma revisão da literatura sobre os termos crenças e concepções, optou pelo termo concepções por acreditar que ele “engloba toda a **filosofia particular** de um professor” (Cury, 1994, p. 37, grifo autor). A pesquisadora destaca a importância das influências dos professores formadores e dos colegas na formação do sistema de crenças dos professores a respeito da Matemática. Para a autora, “as idéias veiculadas pela cultura matemática, a partir das principais correntes filosóficas da Matemática, disseminam-se entre os matemáticos, entre os autores de livros-textos, entre os pesquisadores em Educação Matemática, entre os responsáveis pelos currículos dos cursos de Licenciatura” (Cury, 1994, p. 33). Na citação a seguir, encontra-se a conceituação para o termo concepção, dada por Cury (1994),

Acreditamos que os professores de Matemática formam idéias sobre a natureza da Matemática, ou seja, *concebem* a Matemática, a partir das experiências que tiveram como alunos e professores, do conhecimento que construíram, das opiniões de seus mestres, enfim, das influências sócio-culturais que sofreram durante suas vidas, influências essas que se vêm formando ao longo dos séculos, passando de geração a geração, a partir das idéias de filósofos que refletiram sobre a Matemática (Cury, 1994, p. 37, grifo autor).

Com o intuito de auxiliar o entendimento e a construção do termo “concepções”, empregado neste trabalho, recorreram-se também ao Novo Dicionário de Língua Portuguesa. Ferreira (1986, p. 445) expõe que concepção é “o ato de conceber ou criar mentalmente, de formar ideias, especialmente abstrações; noção, ideia, conceito, compreensão; modo de ver, ponto de vista; opinião, conceito”. A definição apresentada pelo Novo Dicionário de Língua Portuguesa engloba a maioria dos termos usados pelos pesquisadores descritos anteriormente. No entanto, entende-se que é preciso especificar como o termo “concepções” foi utilizado.

Diante do exposto, o termo “concepções” é aqui entendido como os conhecimentos, as opiniões, as preferências e as ideias que os professores apresentam. Portanto, investigar as concepções dos professores implicará averiguar os conhecimentos⁹, as opiniões, as preferências e as ideias que eles apresentam a respeito das Geometrias.

Concepções sobre as Geometrias

A pergunta norteadora também permitiu investigar as concepções que os professores apresentaram, no momento da investigação, sobre a construção do conhecimento geométrico, a Geometria Euclidiana, as Geometrias não Euclidianas e a importância que eles atribuem às

⁹ Entende-se por conhecimentos os conhecimentos científicos relacionados com cada Geometria.

Geometrias. Nesta seção será apresentada a categorização realizada, após as análises dos relatos dos participantes da pesquisa sobre as concepções de Geometrias. Para construir e justificar essas categorias foram utilizados os dados obtidos com a entrevista semiestruturada, bem como as observações realizadas no decorrer da entrevista.

Quanto à construção do conhecimento geométrico, os professores destacaram quatro momentos que consideram importantes neste processo: antes da graduação, na graduação, na pós-graduação e no decorrer dos anos que estão atuando em sala de aula. A maioria dos professores considera que as leituras e estudos realizados no decorrer dos anos que estão atuando em sala de aula foram fundamentais para a construção do conhecimento geométrico. É interessante destacar os comentários de sete professores que consideraram a Geometria estudada antes da graduação importante na construção do conhecimento geométrico e que dez professores destacaram a graduação como significante nesse processo.

Quanto à construção do conhecimento, Tardif (2012, p. 16) expõe que os saberes de um professor são uma realidade social materializada por meio de uma formação, de programas, de práticas coletivas, de disciplinas escolares, de uma pedagogia institucionalizada, e são “ao mesmo tempo, os *saberes deles*”.

Concordamos também com Tardif (2012) quando expõe que o “saber dos professores é plural e também temporal, [...] é adquirido no contexto de uma história de vida e de uma carreira profissional” (Tardif, 2012, p. 19) e o “saber docente (é) um saber plural formado pelo amálgama, mais ou menos coerente, dos saberes oriundos da formação profissional e de saberes disciplinares, curriculares e experienciais” (Tardif, 2012, p. 36).

Durante a investigação foi possível obter três categorias referentes às concepções dos professores a respeito da Geometria Euclidiana: professores que concebem a Geometria Euclidiana como entes geométricos da Geometria Plana e/ou Espacial; professores que concebem a Geometria Euclidiana como postulados, axiomas, noções primitivas e entes geométricos da Geometria Euclidiana; professores que concebem a Geometria Euclidiana como os aspectos descritos nas categorias anteriores e complementam sua concepção.

Os professores que citaram entes geométricos para descrever suas concepções sobre a Geometria Euclidianas, destacaram o ponto, a reta, segmento de reta, triângulo, quadrado e sólidos geométricos, alguns professores além de entes geométricos usaram as palavras Geometria Plana e/ou Espacial. Segue a fala da professora 1: “são triângulos, quadrados, ponto, reta, plano [...] a Euclidiana trabalha na reta, no plano”. As duas primeiras categorias indicam a falta de clareza que os professores têm sobre o que é a Geometria Euclidiana, o que ela estuda, quais seus conceitos, propriedades, sua história etc. Diante dos dados, percebeu-se que os professores acreditam que a Geometria Euclidiana consiste no reconhecimento e na nomeação de figuras e sólidos geométricos.

Carli (2012, p. 100), na sua pesquisa de Mestrado, observou que os professores apresentam dificuldade em expressar o que é a Geometria Euclidiana e notou que eles a descrevem como aquela que é estudada na escola, como o estudo dos entes geométricos tais como ponto, reta e plano. Crescenti (2005), também observou que os professores apresentam uma tendência em conceber a Geometria Euclidiana como o estudo das figuras, principalmente, aquelas que aparecem com mais frequência no cotidiano. Neste contexto, Dana (1994, p. 141) destaca que a Geometria Euclidiana é “considerada pelos professores da escola elementar simplesmente como

o estudo de retângulos, segmentos de reta, ângulo, congruência e coisas do gênero”, ou seja, entes da Geometria Euclidiana.

Quanto as concepções sobre as Geometrias não Euclidianas, constatou-se que seis professores não apresentam uma concepção sobre estas Geometrias. Dentre esses, quatro professores nunca haviam estudado essas Geometrias, sendo que uma das participantes da pesquisa não sabia da inclusão das Geometrias não Euclidianas nas DCE do Paraná. Antes de iniciar a pesquisa, acreditava-se que seria praticamente impossível encontrar algum professor de Matemática, atuante nas escolas públicas do Estado do Paraná, que não tivesse conhecimento da inclusão desse conteúdo nas Diretrizes. Esta hipótese decorria do fato de que as DCE é o documento oficial que norteia e recomenda os conteúdos e metodologias que devem ser aplicadas nas salas de aula das escolas públicas do Estado e também pelo fato das reformulações das DCE terem sido debatidas em processo de discussão coletiva. O caso dessa professora nos faz pensar sobre a dificuldade da divulgação, da implementação e da utilização de uma estrutura curricular.

Dos demais professores, treze apresentaram suas concepções por meio de ideias e opiniões a respeito das Geometrias não Euclidianas, ou seja, os professores ainda não conhecem e não estudaram as Geometrias não Euclidianas de tal forma seja possível construir uma concepção baseada em conhecimentos das Geometrias. Destaca-se a fala do professor 2: “o pouco que eu tenho conhecimento da não Euclidiana é que aqueles conceitos da Geometria Euclidiana caem diante da não Euclidiana. Então, aqueles conceitos do paralelo, o conceito do reto, que aquilo fica muito fácil também de você explicar dentro do nosso universo; que não é tão fácil você ter uma linha reta; que se você se alongar pro (sic) infinito vai ser muito difícil de você conseguir linhas paralelas”.

Por fim, oito professores apresentaram suas concepções por meio de resultados e/ou conceitos das Geometrias não Euclidianas. A professora 3 expõe sua concepções sobre as Geometrias não Euclidianas: “eu sempre parto do postulado das paralelas, que historicamente tinham os postulados e que o povo começou a desconfiar daquele tal do postulado e que aí, a partir disso, se desenvolveu outros tipos de Geometria, no qual as paralelas podem ter um ponto em comum lá no infinito. E também a questão do Fractal, a questão das dimensões: dimensão finita, dimensão inteira, dimensão decimal, por exemplo”.

Os professores também comentaram que o estudo das Geometrias não Euclidianas, em geral, chama a atenção, principalmente porque os conceitos e resultados diferem da Geometria Euclidiana. Para os professores participantes da pesquisa, consideram a Geometria Fractal mais bonita e interessante do que a Geometria Euclidiana. Também comentaram sobre os resultados e conceitos, principalmente sobre a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo ser menor do que 180° na Geometria Hiperbólica, e maior do que 180° na Geometria da Superfície da Esfera, destacaram a questão das retas paralelas na Geometria Hiperbólica e a não existência de retas paralelas na Geometria da Superfície da Esfera e na Geometria Projetiva. Alguns professores relataram que ficaram surpresos com o fato de existirem Geometrias diferentes da Euclidiana. O professor 4 apresenta suas impressões sobre essas Geometrias: “eu achei interessante foi a questão das paralelas, a superfície que você trabalha a Geometria. De ver a questão dos postulados que alguém teve uma ideia tão brilhante que poderia ser diferente e que ainda tem aplicações”. Na sequência destaca-se a fala da professora 5: “eu, realmente, me surpreendi como tem pessoas que vão além do que a gente pensa. Porque realmente é uma coisa muito abstrata pensar que tem outro plano diferente desse que foi visualizado”.

Sobre as concepções referentes à importância da Geometria também obteve-se três categorias: para ser utilizada em aplicações e situações do cotidiano; conhecer o espaço/mundo; a Geometria está em todo lugar; para ser utilizada como ferramenta na própria Matemática e auxiliar no aprendizado de outros conteúdos. Segue a opinião da professora 6: “eu acho que é importante principalmente pela noção espacial, mesmo num emprego simples que ele vai ter, ele precisa ter noções das direções, das figuras, se ele vai trabalhar como pedreiro, ele tem que conhecer as figuras pra (sic) estar construindo, se ele vai trabalhar em outras profissões; e está no dia a dia construir as figuras, algumas figuras aparecem mais nas construções e também na parte artística”.

As concepções apresentadas pelos professores estão associadas, principalmente, à aplicabilidade e à utilidade dos conteúdos geométricos em situações do cotidiano, em algumas profissões, entre outros aspectos.

Fonseca et al (2011, p. 92) expõe que é comum encontrar professores que, para atribuir a importância da Geometria, enumeram razões que “se apóiam em aspectos utilitários, evidenciando-se os aportes que os recursos geométricos oferecem à resolução de problemas da vida cotidiana, ao desempenho de determinadas atividades profissionais”. Apesar disso, os autores recomendam que “é possível e desejável, todavia, que o argumento da utilização da geometria na vida cotidiana, profissional ou escolar permita e desencadeie o reconhecimento de que sua importância ultrapassa esse seu uso imediato para ligar-se a aspectos mais formativos” (Fonseca, et al, 2011, p. 92).

Considerações finais

Quando nos propusemos a investigar as concepções dos professores, pretendíamos ter acesso ao pensamento do professor, ou como diz Guimarães (2003, p. 4) à sua “vida mental [...] em conhecer e compreender os vários aspectos do seu pensamento e conhecimento”. Durante a investigação percebeu-se que as concepções da maioria dos professores é fundamentada em suas opiniões, ideias e preferências a respeito das Geometrias. Em geral, não são fundamentas nos conceitos e resultados sobre as Geometrias. Percebe-se, assim, que, de um modo geral, os professores ainda desconhem as Geometrias, em seus aspectos teóricos e metodológicos.

Destaca-se que as concepções sobre as Geometrias não Euclidianas, principalmente, foram construídas, sobretudo, no decorrer de cursos oferecidos pela SEED e pelos Núcleos Regionais de Educação do estado do Paraná. A maioria dos professores já ouviu falar, principalmente dos Fractais, por meio destes cursos. No entanto, os estudos realizados nos cursos, não foram suficientes para integrar os conteúdos não euclidianos às suas concepções. Esses novos conteúdos podem ter criado uma instabilidade intelectual, mas não foram suficientes para produzir uma nova concepção. Esses novos conteúdos podem ter criado uma instabilidade intelectual, que não foram suficientes para construir uma concepção fundamentada nos conceitos e resultados dessas Geometrias.

As análises realizadas durante esta investigação dão indicativos de que a inclusão das Geometrias não Euclidianas nas DCE do Paraná possibilitou reflexões, por parte dos professores, acerca do ensino de Geometrias. Além disso, acredita-se que com a inclusão destes conteúdos, os professores passaram a se preocupar e a buscar conhecer essas Geometrias. Nossa hipótese – mas que necessita de outras pesquisas – é a de que as concepções sobre as Geometrias foram e estão sendo alteradas e formadas com a inclusão das novas Geometrias na Educação Básica.

Referências

- Bardin, L. (2007). *Análise de Conteúdo*. Lisboa: Edições 70.
- Carli, F. A. R. de. (2012). *A aprendizagem de Geometrias não Euclidianas: um estudo realizado com alguns professores da pública de ensino*. Dissertação (Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá.
- Crescenti, E. (2005). *Os Professores de Matemática e a Geometria: opiniões sobre a área e seu ensino*. Dissertação: mestrado em Educação Matemática. Universidade Federal de São Carlos. São Paulo.
- Cury, H. N. (1994). *As concepções de Matemática dos professores e suas formas de considerar os erros dos alunos*. Tese de Doutorado em Educação. UFRGS, 275p, Porto Alegre.
- Dana, M. (1994). Geometria – um enriquecimento para a escola elementar. In: Lindquist, Mary M., Shulte, Albert P. *Aprendendo e ensinando Geometria*. Tradução: Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual.
- Ferreira, A. C. (1998). *O desafio de ensinar – aprender matemática no noturno: um estudo das crenças dos estudantes de uma escola pública de Belo Horizonte*. Dissertação (Programa de Pós-graduação em Educação) – Unicamp, Campinas.
- Ferreira, A. B. de H. (1986). *Novo dicionário da língua portuguesa*. 2ª ed. Rio de Janeiro: Nova Fronteira.
- Fonseca, M. da C.; Lopes, M. da P.; Barbosa, M. das G. G.; Gomes, M. L. M. (2011). *O ensino de Geometria na Escola Fundamental: três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais*. 3ª ed. Belo Horizonte: Editora Autêntica.
- Guimarães, H. M. (1988) *Ensinar Matemática: concepções e práticas*. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade de Lisboa, Lisboa, 1988. 290f.
- Guimarães, H. M (2003). *Concepções sobre a Matemática e a actividade Matemática: um estudo com matemáticos e professores do ensino básico e secundário*. (Tese de Doutorado em Educação, Universidade de Lisboa), Lisboa: APM 2003. 431f.
- Lovis, K. A. (2013). *As concepções de Geometrias de um grupo de professores de Matemática da Educação Básica*. Tese (Programa de Pós-graduação em Educação para a Ciência e a Matemática) – UEM – Maringá.
- Paraná, (2008). Secretaria de Estado da Educação. *Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica*. Curitiba.
- Ponte, J. P. (1992). Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação. *Educação Matemática: Temas de investigação*. U de Lisboa. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional.
- Oliveira, Á. E.; Guimarães, G. L. (2008). *Concepções de professores dos anos iniciais do ensino fundamental sobre o ensino de Geometria*. Recife, 2º SIPEMAT. Disponível em: <http://www.ded.ufrpe.br/sipemat/CD-ROM%2020SIPEMAT/artigos/CO-82.pdf>.
- Tardif, M. (2012). *Saberes docentes e formação profissional*. 13ª ed. Petrópolis: Vozes.
- Thompson, A. (1992) Teachers' beliefs and conceptions: a synthesis of the research. In: A. Grouws (Org.). *Handbook of research in mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan, 1992.
- Thompson, A. (1997). A relação entre concepções de Matemática e de ensino de Matemática de professores na prática pedagógica. *Zetetiké*, v.5, n.8, p11-43.
- Thompson, A. (1984). The relationship of teachers' conceptions of Mathematics teaching to instructional practice. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 105-127.

Investigação Matemática e Geometria: área e perímetro de figuras planas

Marli Teresinha **Quartieri**
Centro Universitário Univates
Brasil

mtquartieri@univates.br

Fernanda Eloisa **Schmitt**
Centro Universitário Univates
Brasil

fschmitt@universo.univates.br

Ieda Maria **Giongo**
Centro Universitário Univates
Brasil

igiongo@univates.br

Resumo

Este trabalho apresenta análise de atividades oriundas de uma pesquisa de mestrado que procurou desenvolver questões de Investigação Matemática aliadas ao conteúdo de Geometria. A atividade problematiza a relação entre área de diferentes figuras geométricas conservando-se o mesmo perímetro. Esta foi explorada com alunos de 5º e 9º anos de duas escolas parceiras do Observatório da Educação. O intuito foi procurar similaridades e diferenças nas estratégias de resolução utilizadas pelos discentes dos diferentes níveis de escolaridade. Foram realizadas observações participativas, filmagens e diário de campo da pesquisadora e dos alunos. A análise evidenciou disparidades de ideias e conceitos, entre elas, o fato dos alunos do 9º ano, apesar de já terem trabalhado as fórmulas para calcular a área das figuras, não as utilizaram para realizar as atividades. Os alunos do 5º ano, como não sabiam fórmulas, utilizaram diferentes estratégias. Entretanto, ambas as turmas demonstraram dificuldades em relação à escrita matemática.

Palavras chave: matemática, Investigação Matemática, geometria, prática pedagógica, ensino fundamental, perímetro e área.

Introdução

O presente trabalho socializa a análise de uma atividade de Investigação Matemática, desenvolvida com alunos de 5º e 9º anos, evidenciando que conceitos matemáticos e diferentes estratégias são utilizados pelos alunos, em diferentes graus de escolaridades, quando elaboram e justificam conjecturas (hipóteses) em relação a atividades envolvendo geometria. A escolha pelo conteúdo de Geometria deve-se a pesquisas que evidenciam o descaso desta frente aos demais conteúdos trabalhados nas aulas de Matemática. Autores como Grando, Nacarato e Gonçalves (2008) e Pavanelo (2004) comentam a pouca exploração desse conteúdo, pois a atenção maior ainda é dada para a aritmética. Entretanto, Schmitt, Macali, Quartieri, Giongo e

Rehfeldt (2013) colocam que ao analisar o Plano de Desenvolvimento da Educação (PDE) percebe-se que a maioria dos conteúdos que compõem as avaliações externas à escola pertence a conteúdos e conceitos que tem relação com a geometria. Neste contexto, pode-se inferir que a exclusão desses assuntos, dos currículos escolares, ou seu tratamento inadequado, podem causar prejuízos à formação dos indivíduos.

Este trabalho foi desenvolvido no âmbito do Observatório da Educação intitulado “Estratégias Metodológicas Visando à Inovação e Reorganização Curricular no Campo da Educação Matemática no Ensino Fundamental” que conta com apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior (CAPES). O objetivo da pesquisa é problematizar e propor estratégias metodológicas com vistas à inovação e reorganização curricular na disciplina Matemática em seis escolas públicas de Educação Básica do Vale do Taquari, RS. Estas, por sua vez, apresentavam, à época do início do projeto, considerável distância entre o IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica) relativo à 4ª série/5º ano e 8ª série/9º ano do Ensino Fundamental.

Nesta pesquisa, encontram-se três trabalhos de mestrado ligados ao Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas do Centro Universitário Univates. Tais trabalhos estão relacionados a três tendências no ensino da Matemática: Modelagem Matemática, Etnomatemática e Investigação Matemática. No entanto, neste texto, são socializadas apenas atividades relativas à última das tendências. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2009), Investigação Matemática é uma metodologia que visa desenvolver no aluno a autonomia para a resolução de questões, bem como a elaboração de hipóteses e de conjecturas. Ademais, o estudante necessita testar as hipóteses elaboradas e modificá-las quando necessário. Cabe-lhe ainda divulgar seus resultados e debatê-los com os colegas.

Uma das pesquisas de mestrado teve como público alunos de 5º ano e 9º ano do Ensino Fundamental, de duas escolas públicas da educação básica da região do Vale do Taquari. E, como objetivo investigar como estes alunos operam com atividades de Investigação Matemática envolvendo geometria e quais as diferenças/semelhanças nas conjecturas apresentadas entre as distintas turmas. E, para tanto, foram desenvolvidas cinco questões de geometria. Esta comunicação pretende socializar os resultados e a análise decorrentes de uma destas questões, que problematiza a relação entre área de diferentes figuras geométricas conservando-se o mesmo perímetro.

Referencial teórico

Segundo Ponte *et al.* (2009) em termos gerais a definição de investigar aplica-se a diversas palavras como, indagar, pesquisar, inquirir, averiguar. Para os autores, investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos, procurando identificar as propriedades inerentes aos mesmos. Em efeito,

[...] uma investigação matemática desenvolve-se usualmente em torno de um ou mais problemas. Pode mesmo dizer-se que o primeiro grande passo de qualquer investigação é identificar claramente o problema a resolver. Por isso, não é de admirar que, em Matemática exista uma relação estreita entre problemas e investigação (Ponte *et al.*, 2009, p. 16).

E, por ter esta característica, este tipo de atividade deveria ser trabalhada, procurando desenvolver a habilidade e a capacidade dos alunos, para solucionarem dilemas e formularem conjecturas a respeito dos problemas apresentados. Os autores citados aludem ainda que investigar em Matemática conduz à formulação de conjecturas, hipóteses, as quais necessitam ser

repetidamente testadas e provadas. Uma Investigação Matemática envolve “conceitos, procedimentos e representações matemáticas, mas o que mais fortemente as caracteriza é este estilo conjectura-teste-demonstração” (Ponte *et al.*, 2009, p. 10).

Os autores também delimitam uma Investigação Matemática em quatro momentos principais. O primeiro momento envolve o reconhecimento da situação apresentada, a sua exploração inicial e a formulação de questões, as quais servem de base para o segundo momento que se refere à formulação de conjecturas sobre o problema em estudo. Conjecturas são hipóteses e pressupostos que, no terceiro momento precisam ser testadas e refinadas procurando aperfeiçoá-las. Por fim, tem-se a argumentação, demonstração e avaliação do trabalho realizado.

A exploração da tarefa, profere Ponte *et al.* (2009, p. 30), leva tempo e é uma etapa decisiva para a formulação das conjecturas sendo que o “trabalho em grupo potencializa o surgimento de várias alternativas para a exploração da tarefa”. As conjecturas surgem de diferentes formas, podendo ser por observação ou manipulação dos dados. Entretanto, o aluno tende a não verbalizar a formulação das suas conjecturas. “É somente quando se dispõem a registrar as suas conjecturas que os alunos se confrontam com a necessidade de explicitarem as suas ideias e estabelecerem consensos e um entendimento comum quanto às suas realizações.” (Ponte *et al.*, 2009, p. 33)

Os autores expressam ainda que o registro escrito do aluno é um desafio porque “exige um tipo de representação que nunca utilizaram” (Ponte *et al.*, 2009, p. 35). Apesar disso ele desempenha um papel fundamental, pois “a escrita dos resultados ajuda os alunos a clarificarem as suas ideias, nomeadamente a explicitar as suas conjecturas, e favorece o estabelecimento de consensos e de um entendimento comum quanto às suas realizações” (Ponte *et al.*, 2009, p. 36).

Em relação ao ensino de geometria, Grando *et al.* (2008), explicitam que pesquisas e produções brasileiras revelam que este tema vem assumindo um caráter mais exploratório e investigativo, buscando subsídios teóricos em outras áreas do conhecimento, como a epistemologia, a história, a psicologia sociocultural e a linguagem. Surgem, assim, novas formas de produzir conhecimentos geométricos em sala de aula, principalmente se houver maior diálogo entre professor e aluno, numa perspectiva de negociação e produção de significados. Nesse contexto, buscam-se ressignificações para os processos de validação e verdade em Matemática. Para os autores citados,

[...] as tarefas exploratório-investigativas mostram-se altamente potencializadoras de processos de argumentações e provas em geometria na sala de aula. Elas podem ser realizadas a partir de uma tarefa ou um conjunto de tarefas no qual o aluno passa a identificar qual é o problema a resolver e como resolvê-lo. Trata-se de problemas abertos que possibilitam diferentes perguntas, estratégias de resolução e processos de validação. (Grando *et al.*, 2008, p. 43)

De acordo com o exposto, as tarefas exploratório-investigativas apresentam fatores que direcionam pensar na potencialidade de atividades que possibilitam os alunos a se tornar pessoas mais autônomas em sua aprendizagem. Cabe pontuar ainda que, de acordo com os autores, os alunos ao procurarem respostas para as próprias perguntas se sentem mais motivados e instigados para a realização das atividades. O que nos remete às ideias de Abrantes (1999) que nos afirma que aprender Matemática é essencialmente fazer Matemática. Tal pensamento tem contribuído para conceber a importância de atividades de natureza investigativa, sendo as mesmas concebidas na intenção de que o aluno (re) descubra a Matemática.

Em princípio, questões investigativas não deveriam ser colocadas explicitamente. Nesta visão, os alunos necessitam tomar a iniciativa para levantarem suas próprias questões. Mas, pode-se corroborar com Fonseca e Abrantes (1999, p. 3) ao colocarem que

[...] na prática, o professor tem de gerir uma situação onde há uma tensão entre tarefas demasiadamente estruturadas (as quais podem impedir os alunos de fazer as suas próprias explorações) e problemas muito abertos (os quais podem levar o aluno a não fazer nada ou apenas a uma exploração muito pobre). A decisão depende de vários factores, nomeadamente, da experiência prévia dos alunos com investigações matemáticas.

Desenvolvendo a atividade

O trabalho foi desenvolvido tendo como base metodológica a pesquisa qualitativa, enquadrando-se como um estudo de caso e uma pesquisa participante, sendo que a pesquisadora também foi a professora durante os encontros. Em efeito tomamos como base que “a observação participante é uma modalidade especial de observação na qual você não é simplesmente um observador passivo. Em vez disso, você pode assumir vários papéis na situação de estudo de caso e participar realmente nos eventos sendo estudados” (Yin, 2010, p. 138).

Esta pesquisa envolveu alunos do 5º ano e 9º ano de duas escolas públicas do Vale do Taquari que fazem parte do projeto Observatório da Educação. O objetivo foi averiguar que matemáticas são utilizadas pelos alunos, em diferentes graus de escolaridades, quando criam e justificam conjecturas a cerca de atividades envolvendo geometria. Assim, no primeiro encontro, com cada turma, cada aluno recebeu um caderno, que serviu como diário de campo, onde as atividades de investigação foram desenvolvidas e, posteriormente os mesmos foram recolhidos. Estes serviram como instrumento de coleta de dados, pois a partir dos diários foram analisadas as ideias e respostas dos alunos, além dos conteúdos matemáticos utilizados para testar e resolver as tarefas de investigação. Juntamente com os diários de campo dos alunos foram utilizadas filmagens dos encontros para análise.

Concomitante, no primeiro encontro explicou-se para os alunos o que são atividades de investigação, como elas funcionavam e o que era esperado na resolução das questões. Destaca-se que os alunos eram inexperientes neste tipo de tarefa, fazendo com que fosse optado por questões mais direcionadas e que apresentavam questionamentos. Estas permitiam abertura para novos questionamentos, se assim fosse do interesse dos alunos. Todas as atividades foram desenvolvidas em pequenos grupos.

Neste texto serão relatados apenas dados e conclusões de uma das cinco questões desenvolvidas por ambas as turmas. Assim, após uma breve introdução foi realizada a primeira atividade (aqui relatada). No caso do 5º ano, fez-se, inicialmente, uma leitura conjunta da atividade, pois segundo Ponte *et al.* (2009, p. 26) “no caso de alunos mais novos, a leitura conjunta do enunciado poderá ser imprescindível para a sua compreensão, nem que seja somente para esclarecer certos termos com que não estão familiarizados”. Já na turma de 9º ano os alunos fizeram a leitura, nos pequenos grupos, e iniciaram a atividade.

Análise da atividade

A atividade consistiu na investigação da relação entre perímetro e área de figuras planas. O intuito foi investigar a relação da área de figuras planas com o seu formato, evidenciando que figuras que possuem o mesmo valor para o perímetro podem ter valores diferentes de áreas. Objetivou-se ainda com essa atividade, que o aluno descobrisse qual é a figura plana que tem

maior área, com a mesma medida de contorno. Assim, entregou-se para os alunos o enunciado que segue:

Atividade 1: Investigando área e perímetro
 Material necessário: barbante, papel quadriculado.
 Procedimento: corte um pedaço de barbante com 32 unidades de comprimento. Com a ajuda do barbante, desenhe no papel quadriculado as seguintes figuras:

- 1 quadrado
- 2 retângulos com formatos diferentes
- 1 círculo
- 1 triângulo
- 1 figura diferente das anteriores

Calcule a área de cada figura construída e complete a tabela:

Figura	Área
Quadrado	
Retângulo 1	
Retângulo 2	
Triângulo	
Círculo	
Figura qualquer	

Responda:

- 1) Que figura tem a maior área?
- 2) Que figura tem a menor área?
- 3) Qual o retângulo que tem a maior área?
- 4) Observando as figuras e suas áreas, que outras conclusões você pode tirar em relação ao formato da figura necessário para se obter a maior área?
- 5) Que figura você escolheria para a base de sua casa? Por quê?

Fonte: Adaptado de Zaslavsky (1989).

As respostas obtidas dos questionamentos foram às seguintes:

1) Que figura tem a maior área?

A maioria dos alunos, tanto da 9º ano quanto do 5º ano, responderam que era o círculo. Respostas diferentes a esta ocorreram pela falta de meticulosidade ao construir as figuras com o barbante, no papel quadriculado.

2) Que figura tem a menor área?

Nesta questão apareceu uma gama de respostas, pois dependendo de como os alunos construíam os retângulos, ou seja, que dimensões usavam, surgiam figuras com áreas menores.

3) Qual o retângulo que tem a maior área?

Nesta questão percebeu-se que todos responderam justamente o retângulo que mais se aproximava do formato de um quadrado. Assim, o retângulo com a maior área encontrado, nestas turmas, tinha as dimensões 9x7, quando este havia sido desenhado.

4) Observando as figuras e suas áreas, que outras conclusões você pode tirar em relação ao formato da figura necessário para se obter a maior área?

A maioria dos alunos respondeu o círculo. Comentaram que este fato ocorre porque não tem pontas e sua forma é arredondada. Mas houve alunos que obtiveram outras respostas, sendo que as mesmas ocorreram devido a erros de contagem da área ou a figuras não desenhadas corretamente. Este fato ocorreu com mais frequência na turma do 5º ano. Algumas respostas que

os alunos escreveram nos diários de campo: A17¹ “o círculo tem a maior área porque seu formato é diferente”; e, A8 colocou que “quanto mais redondo maior vai ser [a área]”. Nestas duas colocações, os alunos queriam dizer que o círculo, ao contrário das demais figuras construídas, não tinha pontas e por isso é uma figura diferente e sua área é maior que as demais.

5) Que figura você escolheria para a base de sua casa? Por quê?

Nesta questão apareceram basicamente duas respostas: o quadrado e o retângulo. O A3 expressou: “quadrado, porque ele tem os lados iguais e dá menos trabalho”. E justificou que escolhia o quadrado para poder ter menos trabalho no momento da construção das paredes. A casa redonda, para estes alunos, seria impossível. Observou-se que as justificativas do porque um ou outro tipo de figura, para a base da casa, foi devido ao comodismo quando da construção de uma casa. Os alunos diziam que na nossa volta todas as casas são quadradas ou retangulares, como coloca A16: “escolheria o retângulo para ser a base da minha casa, por que geralmente as casas são retangulares.”

Após cada grupo desenvolver a atividade e escrever seus apontamentos e conclusões iniciou-se a socialização destas em grande grupo. Neste momento os alunos expressavam suas conjecturas, explicavam como tinham encontrado as mesmas e trocavam ideias com os demais colegas da classe. Este debate inicialmente foi lento. Os alunos falavam pouco e eram bastante concisos em suas justificativas, precisando de questionamentos instigadores da professora para a discussão evoluir. A partir do momento que os alunos começaram a contribuir “mais abertamente”, o debate se tornou enriquecedor. Assim, foram socializadas diversas conjecturas que os grupos não haviam descobertos sozinhos. Todas as ideias foram escritas no quadro e a partir destas, os alunos acabavam percebendo e apontando novas conjecturas.

Observações feitas pela professora/pesquisadora durante os encontros, a partir da fala dos alunos ao realizarem as atividades e dos diários dos mesmos, encontram-se na tabela 1.

Tabela 1

Semelhanças x Diferenças entre 5º ano e 9º ano

	5º ano	9º ano
Quadrado	Os alunos tinham o conhecimento de que um quadrado tem os quatro lados iguais, mas para formá-lo eles usaram o método da tentativa e erro.	Eles sabiam que o quadrado tem 4 lados iguais e para formá-lo com um barbante que tem 32 unidades. Segundo os alunos, bastava dividir por 4, o que deixava cada lado com 8 unidades de comprimento.
Retângulo	Muitos acabaram fazendo dois retângulos iguais, apenas invertidos, sem perceber que eram idênticos. Foi preciso intervenção da professora para que percebessem que a figura era a mesma. Para criar retângulos diferentes utilizaram tentativas e erros, construindo diversas formas com a medida do barbante.	Na hora de fazer um retângulo diferente do primeiro alguns usaram estratégias como: se aumentar um para o lado, deve-se diminuir um para baixo.

¹ Ao fazermos referências aos alunos da pesquisa usaremos A1, A2... Os alunos serão identificados por A1, A2, A3... para preservar o anonimato.

Triângulo	Para desenhar o triângulo, muitos alunos, primeiro tentaram fazer o desenho com lápis, pois perceberam que o triângulo não seguiria as linhas do papel quadriculado. Observando os desenhos percebeu-se apenas triângulos retângulos (com um ângulo reto, de 90°) ou triângulos cujo formato se aproxima muito de um triângulo equilátero (todos os lados iguais).	Para desenhar o triângulo, os alunos se ajudaram mutuamente, sendo que um aluno segurava as pontas do barbante e o outro dava forma para a figura marcando com um lápis as pontas. Apenas 4 alunos tentaram desenhar com um lápis antes de usar o barbante. Quanto ao tipo de triângulo, apesar de predominarem triângulos equiláteros tiveram diversas figuras que fugiram deste padrão.
Círculo	Apareceram dificuldades de fazer o círculo, pois muitos fizeram figuras disformes (FIGURA 1), pouco arredondadas e diziam que era um círculo. Outros acabaram desenhando um círculo com cola e colaram o barbante direto sem testar primeiro (FIGURA 2), isso gerou algumas figuras com sobreposição de barbante.	Para fazer o círculo alguns grupos tentaram usar o compasso. Tiveram mais cuidado na hora de formar a figura, tentando o máximo possível que ela ficasse parecida com um círculo.
Figura qualquer	O que chamou a atenção é que em ambas as turmas, sobressaíram figuras disformes como coração, gota, bota... (FIGURA 3). Poucos criaram uma nova figura geométrica conhecida.	
Área das figuras	Apenas dois alunos calcularam a área do quadrado e dos retângulos multiplicando os lados. Os demais fizeram a contagem dos quadradinhos. Tiveram dificuldades para entender o que fazer com os pedaços de quadrados que ficaram aparecendo nas figuras do círculo e do triângulo.	Para saber a área do quadrado e dos retângulos os alunos já calculavam, fazendo lado vezes lado. Apesar de não associarem isso a fórmula da área do quadrado e do retângulo. No triângulo, círculo e demais figuras eles contaram os quadradinhos. Apesar de saberem a fórmula para calcular a área do triângulo, esta apareceu em alguns diários durante a questão 3.
Grupo	O trabalho em grupo em ambos os casos foi promissor. Ouve cooperação entre os colegas, apesar de ainda terem alunos mais inseguros ou tímidos que acabavam colaborando pouco com ideias e opiniões. Apesar disso, houve muitos momentos em que se percebeu que ao descobrir algo novo ou diferente eles explicavam para os demais colegas do grupo tentando “provar” sua teoria.	
Escrita	Os alunos tiveram dificuldade no geral, pois ocorreram poucos registros escritos das discussões e hipóteses levantadas pelo grupo. Os alunos se limitaram na escrita. Mesmo sendo incentivados, a colocarem no papel suas falas e discussões, apresentavam dificuldades, alegando que não sabiam como escrever determinada ideia.	

Fonte: Autores. 2014.

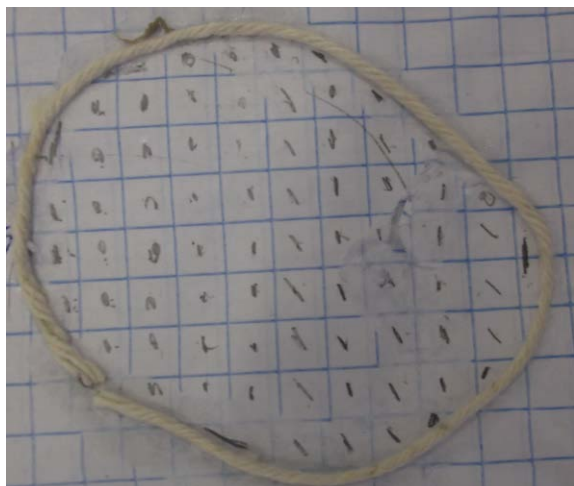


Figura 1. Exemplo de “círculo” confeccionado por alunos do 5º ano.

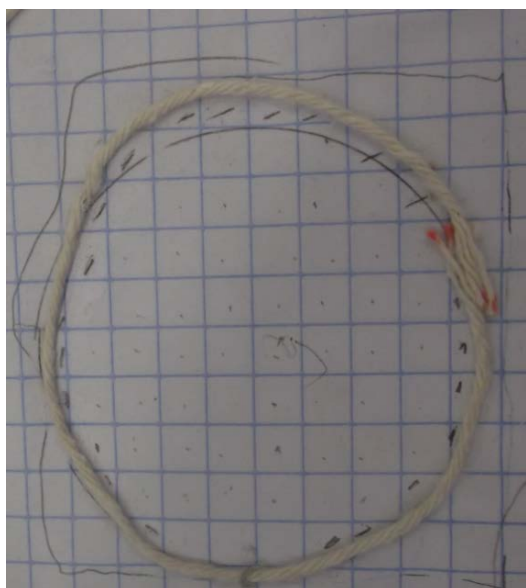


Figura 2. Círculo com barbante sobreposto.

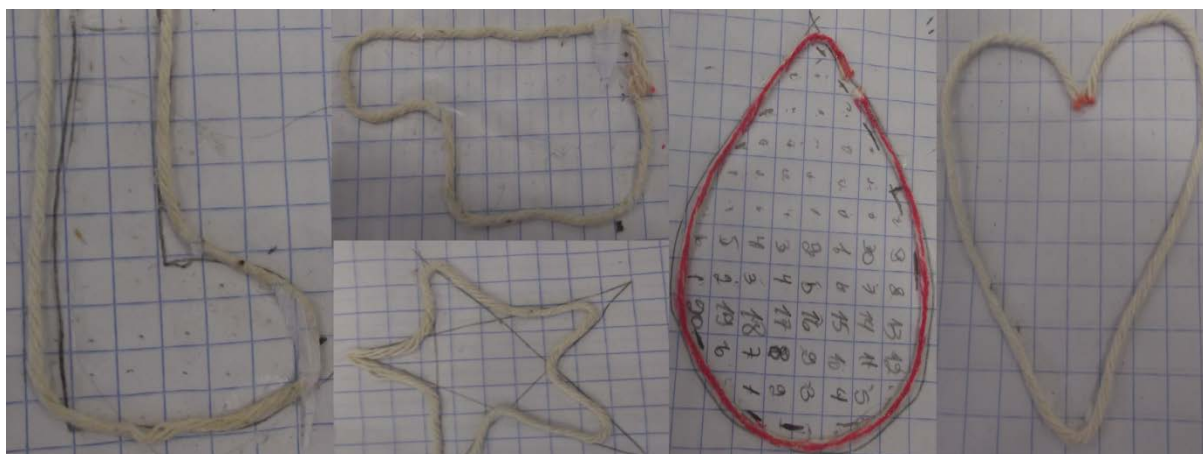


Figura 3. Exemplos de figuras qualquer, turmas de 5º ano e 9º ano.

A seguir são apresentadas algumas hipóteses dos alunos que surgiram durante as discussões no momento da correção da tarefa.

No 9º ano

- Uma das observações realizadas pelos alunos diz respeito à área dos retângulos e a sua relação com o formato. Os alunos perceberam que quanto mais próximas forem as medidas dos lados de um retângulo, maior será a sua área. Esta colocação surgiu somente após colocarmos no quadro, todos os retângulos diferentes formados pelos grupos, bem como suas medidas e áreas.
- Os alunos chegaram à conclusão de que o círculo tinha a maior área, mas não encontraram uma explicação para isso. Limitaram-se a dizer que este fato ocorria devido a ele ser arredondado e não ter cantos.
- Em relação ao formato da base da casa, a maioria escolheu o quadrado ou o retângulo, justificando que as casas, normalmente, têm estes formatos. E, quando questionados do por que não fazer a base da casa no formato de um círculo, eles apenas responderam que as casas não são assim, e que seria estranho ter uma casa nesse formato.

No 5º ano

- Alguns alunos do 5º ano tiveram dificuldades em desenhar o círculo e por isso este nem sempre foi considerado à figura com maior área.
- Quando questionados sobre o formato da base da casa os alunos do 5º ano tiveram respostas iguais aos do 9º ano. Apenas ocorreram diferenças na resposta do questionamento quanto a uma casa com base redonda. Neste momento expressaram várias respostas diferentes. Alguns disseram que não poderíamos construir uma casa com a base em formato de círculo, pois os móveis que encontramos nas lojas não basicamente em formatos retos. Uma aluna chegou a comentar que não poderia limpar a casa com o rodo sendo que este é reto e não alcançaria as paredes. Alegaram também que “a casa vai sair rolando”, pois alguns tinham a ideia de que uma casa redonda seria semelhante a uma bola e não que apenas a base da casa seria redonda.

Conclusões e considerações

Nesta atividade foi possível perceber, assim como Abrantes (1999), que ao utilizar a intuição e à visualização, manipulando materiais, a geometria é propícia para a realização de descobertas. Estas atividades investigativas, envolvendo área e perímetro, podem ser desenvolvidas sem a necessidade de pré-requisitos já construídos. E, assim “evitando, sem grande dificuldade, uma visão da Matemática centrada na execução de algoritmos e em “receitas” para resolver exercícios-tipo” (Abrantes, 1999, p.156).

Percebeu-se que os alunos do 9º ano, mesmo que já haviam estudado as fórmulas de área, nem sempre as utilizaram. Entretanto, resolveram as atividades com êxito e encontraram conclusões desejadas. Esta situação corrobora com a visão de Ponte *et al.* (2009, p. 83), quando expressam sobre “a importância de estudar conceitos e objetos geométricos do ponto de vista experimental e indutivo” sem necessariamente, ligá-los a fórmulas e a memorização das mesmas. Segundo Brunheira e Fonseca (1995, p. 17) “ao analisar várias situações, ao construir estratégias e ao descobrir soluções, o aluno poderá melhorar a capacidade de resolver problemas quer na

matemática, quer na vida real.” Estes autores também salientam o trabalho em grupo ao colocarem que

As atividades de investigação constituem uma boa oportunidade para os alunos **trabalharem em grupo**. Deste modo, mais facilmente se conjugam ideias e se ultrapassam dificuldades. O grupo aumenta também a confiança em enfrentar novos problemas e promove a discussão entre alunos. (Brunheira & Fonseca, 1995, p. 17, grifo do autor)

Durante a realização desta intervenção pedagógica, isto também foi um dos pontos positivos encontrados, em ambas os anos de escolaridade. O trabalho em grupo ocorreu de forma eficaz, sendo que os alunos colaboraram uns com os outros, auxiliando os que tiveram maiores dificuldades. Um dos momentos interessantes foi a discussão em pequenos grupos, pois os alunos apresentavam suas hipóteses para os colegas do grupo, tentando exemplificar suas conjecturas. Estes usaram diversos argumentos com o intuito de que os colegas concordassem ou não com as conjecturas propostas.

Em contra partida um dos maiores desafios encontrados pelos alunos foi escrever suas conjecturas e conclusões. Eles expressavam suas ideias oralmente, mas no momento de colocar no papel, de forma escrita, apenas apareciam alguns dizeres de forma sintética, sem maiores explicações e com o uso de linguagem coloquial. Segundo Altrichter *et al.* (citado por Freitas, 2006, p. 44) é difícil colocar nossas ideias no papel mesmo quando essas sejam coerentes na fala e no pensamento. Para os autores

Existem lacunas em nossos argumentos e achamos que alguns conceitos são muito vagos, quando novas conexões e implicações surgem na mente. Essas dificuldades aparecem pelo fato que a escrita não é apenas sobre a comunicação de um resultado definitivo de uma análise, mas é propriamente uma forma de análise. Ela é a continuação de um processo de análise sobre uma restrição mais estreita, porque nossos pensamentos interiores têm que receber aparência e forma.

Apesar desta dificuldade, esta atividade foi o primeiro contato que os alunos tiveram com esta metodologia e, portanto, não lhes é comum terem que escrever nas aulas de Matemática. Neste contexto, nas atividades seguintes procurou-se incentivar os alunos para que escrevessem com maior destreza.

Esta primeira atividade serviu como base para as demais que ocorrerem nos encontros subsequentes e a partir desta percebeu-se o potencial das atividades de Investigação Matemática, bem como o envolvimento dos alunos. Como professores há a necessidade de se estar em constante movimento, procurando sempre por atividades novas e diferenciadas, que proporcionam tornar as aulas mais produtivas e interessantes.

Referências e bibliografia

- Abrantes, P. (1999). Investigações em geometria na sala de aula. In P. Abrantes (Org.). *Investigações matemáticas na sala e no currículo*. Lisboa: APM. Disponível em: <http://www.rc.unesp.br/igce/demac/maltempi/cursos/curso3/Artigos/Artigos_arquivos/p_153-167.pdf>. Acesso em: 28 jun. 2013.
- Brunheira, L. & Fonseca, H. (1995). Investigar na aula de Matemática. *Educação e Matemática*, (35), pp. 16-18.
- Fonseca, H. & Abrantes, P. (1999). *Investigações em geometria realizadas pelos alunos*. Disponível em: <<http://www.prof2000.pt/users/j.pinto/textos/texto5.PDF>>. Acesso em: 04 ago. 2014.

- Freitas, M. T. M. (2006). *A escrita no processo de formação contínua do professor de matemática*. Tese de doutorado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil.
- Grando, R. C., Nacarato, A. M. & Gonçalves, L. M. G. (2008, jan/abr). Compartilhando saberes em Geometria: investigando e aprendendo com nossos alunos. *Caderno Cedes*, 28(74), pp. 39-56. Disponível em: <<http://www.cedes.unicamp.br>>. Acesso em: 25 de jul. 2013.
- Pavanello, P. M. (2004). Por que ensinar/aprender Geometria? *Anais do Encontro Paulista de Educação Matemática*, São Paulo, SP, Brasil, 7.
- Ponte, J. P., Brocardo, J. & Oliveira, H. (2009). *Investigações matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.
- Schmitt, F. E., Maccali, L., Quartieri, M. T., Giongo, I. M. & Rehfeldt, M. J. H. (2013). Livros didáticos do 5º ano do Ensino Fundamental: análise a partir de temas geradores da prova Brasil. *Anais do Congresso Internacional de Ensino de Matemática*, Canoas, RS, Brasil, 6.
- Yin, R. K. (2010). *Estudo de caso: Planejamento e Métodos*. Porto Alegre: Bookman.
- Zaslavsky, C. (1989). *Pessoas que vivem em casas redondas*. Arithmetic teacher.

La identificación de figuras prototípicas en el desarrollo del razonamiento configural

Francisco **Clemente**

Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante
España

fclemcis@gmail.com

Germán **Torregrosa**

Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante
España

german.torregrosa@ua.es

Salvador **Llinares**

Departamento de Innovación y Formación Didáctica, Universidad de Alicante
España

sllinares@ua.es

Resumen

El objetivo de esta investigación es evidenciar relaciones entre la identificación de configuraciones que inician el razonamiento configural y la trayectoria de resolución de problemas de probar en geometría. Los resultados indican que la identificación de una figura prototípica en la configuración inicial activa determinados conocimientos de geometría determinando la trayectoria de resolución. Estos resultados sugieren la necesidad de potenciar en la enseñanza de la geometría el reconocimiento explícito de la relación entre la identificación de sub-configuraciones y la generación de determinadas trayectorias de resolución.

Palabras clave: aprendizaje de la geometría, razonamiento configural, prueba, figura prototípica

Abstract

The goal of this research is to establish the relationships between the identification of configurations that initiate configural reasoning and the trajectory of the resolution of geometry proof problems. The results show that the identification of a prototypical figure in the initial configuration activates certain knowledge of geometry and determining a trajectory of resolution. These results suggest the need to enhance the teaching of geometry explicit recognition of the relationship between the identification of sub-configurations and generating certain trajectories resolution.

Key words: learning of geometry, configural reasoning, proof, prototypical figure

Introducción

El análisis de la relación entre los procesos de visualización y el conocimiento de geometría en la resolución de problemas de probar ha puesto de manifiesto las dificultades que

tienen algunos resolutores en usar el conocimiento de geometría previamente aprendido (Chinnappan y Lawson, 1998; Battista, 2007, 2008; Gal y Linchevski, 2010). Duval (1995, 2007) y Fischbein (1993) subrayan el papel heurístico de las figuras en el proceso de resolución de problemas de probar que usan una configuración geométrica. En los procesos de resolución de estos problemas se han identificado dos momentos relevantes (Clemente & Llinares, 2013, 2014; en prensa; Llinares & Clemente, 2014; Prior & Torregrosa, 2013). En primer lugar, cuando el resolutor asocia algunas propiedades o definiciones a la configuración geométrica dada. El segundo momento, cuando los diferentes hechos geométricos se relacionan mediante cadenas lógicas de inferencias “si... entonces...”. Así, la resolución de problemas de probar se apoya inicialmente en dotar de sentido a la situación mediante algunos hechos geométricos identificados en la configuración como premisas de alguna relación previamente conocida. Es decir, hay que generar alguna conjetura basada en herramientas visuales que sugieren ideas que pueden ser usadas en la elaboración de relaciones lógicas.

Duval (1995), caracteriza dos aprehensiones que intervienen en este proceso. Las aprehensiones operativas se dan cuando el resolutor modifica una figura para considerar sub-configuraciones. Esto se puede hacer añadiendo o quitando nuevos elementos geométricos, o manipulando las diferentes partes de una configuración geométrica como un puzle para fijar la atención sobre sub-configuraciones particulares. En segundo lugar, denomina aprehensión discursiva cuando el estudiante asocia afirmaciones matemáticas a configuraciones o sub-configuraciones.

La idea de Razonamiento Configural, entendido como la coordinación de las aprehensiones operativas y discursivas nos está ayudando a comprender mejor cómo los estudiantes resuelven problemas de probar y el papel que desempeña la relación entre lo visual y el desarrollo de razonamientos deductivos. El Razonamiento Configural puede desembocar en “Truncamiento” (la coordinación proporciona la “idea” para resolver deductivamente el problema); o bien, en un “Bucle” (situación de bloqueo que no permite el avance hacia la solución) (Torregrosa y Quesada, 2007; Torregrosa, Quesada y Penalva, 2010).

Las figuras prototípicas son representaciones que corresponden a una organización regular del contorno, orientación y forma (Mesquita, 1998). Estas características refuerzan la percepción de unas determinadas representaciones respecto a otras y pueden tener un efecto heurístico, ya que incrementan la “visibilidad” de una figura particular y sus posibilidades de reorganización, que puede desempeñar un papel esencial en la búsqueda de una solución en un problema de geometría. Esto quiere decir que, de entre las varias figuras que el estudiante puede observar en la representación inicial, la que logra llamar su atención estará vinculada con alguna de las figuras prototípicas que guarda en su memoria (Gutiérrez & Jaime, 1999). En las situaciones en las que hay que construir una prueba y en la que hay que establecer algún vínculo entre la argumentación visual y la prueba se plantea la necesidad de estudiar el papel que desempeña la identificación de una sub-configuración a partir de la cual se inician las coordinaciones entre las aprehensiones discursivas y operativas que constituyen el razonamiento configural.

Mientras que el uso de una figura prototípica recuperada de la memoria y usada para identificar alguna sub-configuración puede ayudar a la resolución del problema, algunas veces el apoyo visual hace evidente a los resolutores relaciones no verdaderas lo que puede generar un razonamiento configural no adecuado. En este proceso inicial en la resolución de los problemas de geometría, la idea de la “tipicidad” de una representación (Hershkowitz, 1990) intenta poner de relieve la influencia que tiene el uso de representaciones prototípicas para mostrar más

claramente algún atributo geométrico. La imagen prototípica que los estudiantes han generado a lo largo de su experiencia escolar influye en su capacidad de reconocer figuras o construir determinados objetos geométricos (Vinner, y Hershkowitz, 1980). En el caso particular de los problemas de probar, la importancia de la identificación de una sub-configuración, durante la resolución de los problemas que proporcionan una figura, radica en que ayuda a activar algunos conocimientos de geometría frente a otros. Es decir, el acceso y uso del conocimiento de geometría durante la resolución de problemas está influenciado por la naturaleza de las relaciones que el resolutor haya establecido entre los ítems de conocimiento. Por tanto, determinar cómo la identificación de una configuración permite movilizar determinados ítems de conocimiento puede aportar información sobre la naturaleza de la relación entre la visualización y el conocimiento usado de manera productiva durante la resolución del problema (Chinnappan, 1998; Gal & Linchevski, 2010). Considerando lo anterior, planteamos el siguiente objetivo de investigación centrado en caracterizar la relación entre la identificación de una sub-configuración, el conocimiento de geometría activado y la trayectoria de resolución seguida:

- Caracterizar el papel de la visualización (puesto de manifiesto al identificar una sub-configuración relevante) al iniciar el razonamiento configural determinando una trayectoria de resolución.

Método

Participantes

En este estudio participaron 182 estudiantes para maestros en un programa de formación inicial de maestros. Los estudiantes habían cursado una asignatura sobre Sentido Geométrico organizada según los procesos cognitivos de visualización, prueba y construcción (Duval, 1995). Parte del contenido y las actividades en esta asignatura estaban dirigidas a aprender a visualizar propiedades geométricas de figuras planas como polígonos, triángulos, cuadriláteros, paralelogramos, y generar procesos de probar y construir. Aprender a visualizar propiedades geométricas significa desarrollar de manera explícita el conocimiento sobre las apprehensiones operativas y discursivas que permiten ser conscientes del inicio del razonamiento configural.

Instrumentos

Como parte de la evaluación del curso los estudiantes resolvieron dos problemas de probar (Figura 1) en los que se presentaba una configuración geométrica e información de algunos hechos geométricos vinculados a la configuración. El problema pedía probar la congruencia de dos segmentos en la configuración. Para su resolución, los estudiantes podían desarrollar apprehensiones operativas y discursivas para identificar alguna sub-configuración que les permitiera reconocer hechos geométricos que podían relacionar para generar la prueba.

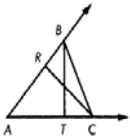
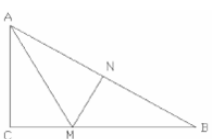
Problema 1	Problema 2
Dado el triángulo $\triangle ABC$ de la figura, con $AB \equiv AC$ y $\angle RCB \equiv \angle TBC$, probar que $RC \equiv BT$ 	En la figura, AM es bisectriz de $\angle CAB$, $\triangle ACB$ es un triángulo rectángulo en C y $MN \perp AB$ en N. Probar que $CM \equiv MN$ 

Figura 1. Problemas de probar.

En la Tabla 1 indicamos primero los elementos geométricos que podían proceder de realizar asociaciones directas de elementos geométricos a la configuración a partir de los datos del problema; y, en segundo lugar, los elementos geométricos susceptibles de ser usados para inferir información adicional.

Tabla 1

Contenido geométrico susceptible de ser usado en cada uno de los problemas (CAi= código usado para indicar el ítem de conocimiento geométrico susceptible de ser usado en algún momento de la resolución de los problemas. Por ejemplo, CA1: idea de triángulo)

Problema 1	Problema 2
Asociación directa de elementos geométricos a la configuración: • (CA1) Definición de triángulo • (CA4) Ángulos opuestos por el vértice son iguales Elementos geométricos susceptibles de ser usados para inferir información adicional: • (CA2) Caracterización de triángulo isósceles (dos lados congruentes, y por tanto, dos ángulos congruentes). En un triángulo, los ángulos opuestos a dos lados congruentes son congruentes y los lados opuestos a dos ángulos congruentes son congruentes • (CA3) Si a dos ángulos congruentes se les resta la misma parte lo que queda son ángulos congruentes • (CA9) Criterio de congruencia de triángulos A-L-A	Asociación directa de elementos geométricos a la configuración: • (CA1) Definición de triángulo • (CA5) Definición bisectriz de un ángulo (es la semirrecta que pasa por el vértice del ángulo y lo divide en dos partes congruentes) • (CA6) Definición de rectas perpendiculares • (CA7) Definición de triángulo rectángulo Elementos geométricos susceptibles de ser usados para inferir información adicional: • (CA8) La suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180° (conocidos dos ángulos en un triángulo, conocemos el tercero) • (CA9) Criterio de congruencia de triángulos A-L-A

Por otra parte, en ambos problemas es posible identificar diferentes subconfiguraciones (Figura 2) que podían generar diferentes trayectorias de resolución. La identificación de estas sub-configuraciones mediante alguna aprehensión operativa permitía reconocer triángulos con ángulos congruentes y lados congruentes como premisas de alguno de los criterios de congruencia de triángulos que conllevaba la resolución del problema.

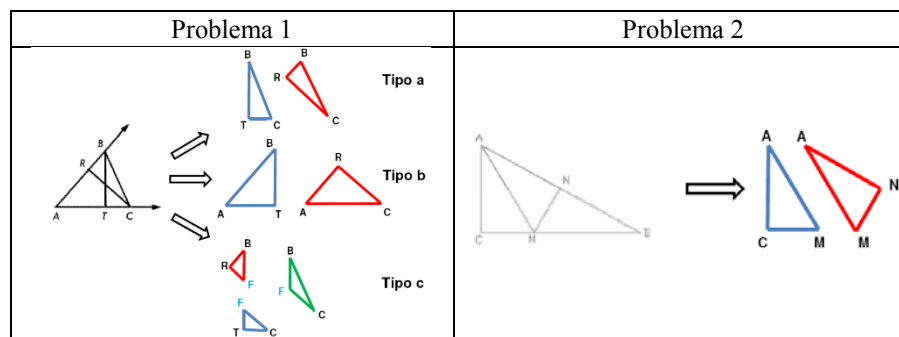


Figura 2. Posibles sub-configuraciones que era posible usar en la resolución de los problemas

Análisis

Los datos usados en esta investigación son las respuestas dadas por los estudiantes a estos dos problemas. Inicialmente identificamos en el discurso textual generado en cada resolución los elementos significativos que indicaban cómo el estudiante estaba generando el razonamiento

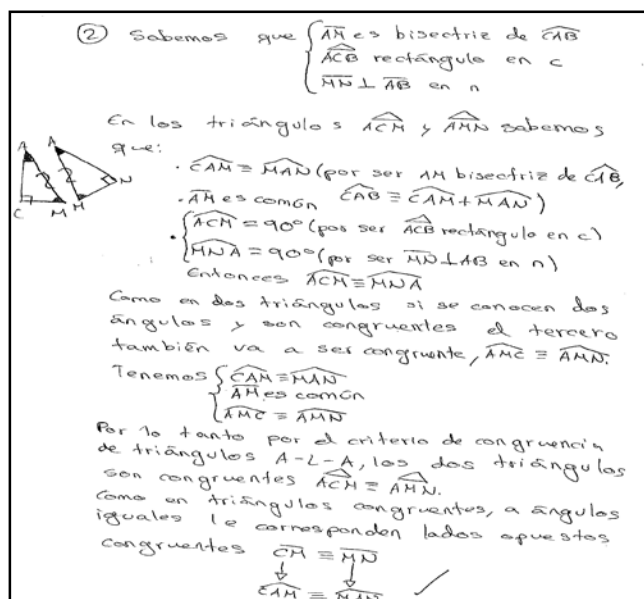
configural como consecuencia de algunas aprehensiones operativas y discursivas y su coordinación. A estos elementos del texto escrito en la resolución los denominamos unidad de análisis (Torregrosa y Quesada, 2007; Torregrosa, Quesada & Penalva, 2010).

En segundo lugar, identificábamos los momentos del proceso de resolución en los que intervenía un conocimiento de hechos geométricos externos a los datos del problema y la secuencia en la que mediaba la identificación de sub-configuraciones relevantes mediante una aprehensión operativa. Esta manera de describir la trayectoria de resolución nos permitió identificar qué estudiantes parecía que asignaban un status lógico a algunos hechos geométricos al poderlos considerar premisas de alguna proposición a partir de la identificación de una sub-configuración relevante, frente a los estudiantes que solo mantenían los hechos geométricos en el dominio de la visualización.

En el momento de la resolución del problema en el que intervenía el razonamiento configural y antes de desembocar en el desarrollo de un razonamiento deductivo, el análisis se centró en identificar:

- Evidencias de que los estudiantes han generado alguna aprehensión operativa identificando sub-configuraciones relevantes.
- Si los estudiantes reconocían los objetos geométricos dados como datos del problema en la configuración.
- Si los estudiantes usaban un conocimiento externo a los datos del problema para generar información adicional.
- Si los estudiantes volvían a usar un hecho geométrico externo a los datos del problema para generar información adicional sobre la configuración, utilizando información obtenida previamente como premisas en una cadena deductiva.

La figura 3 muestra las evidencias encontradas al analizar la respuesta de uno de los estudiantes al problema 2.



Respuesta de un estudiante para maestro al problema 2

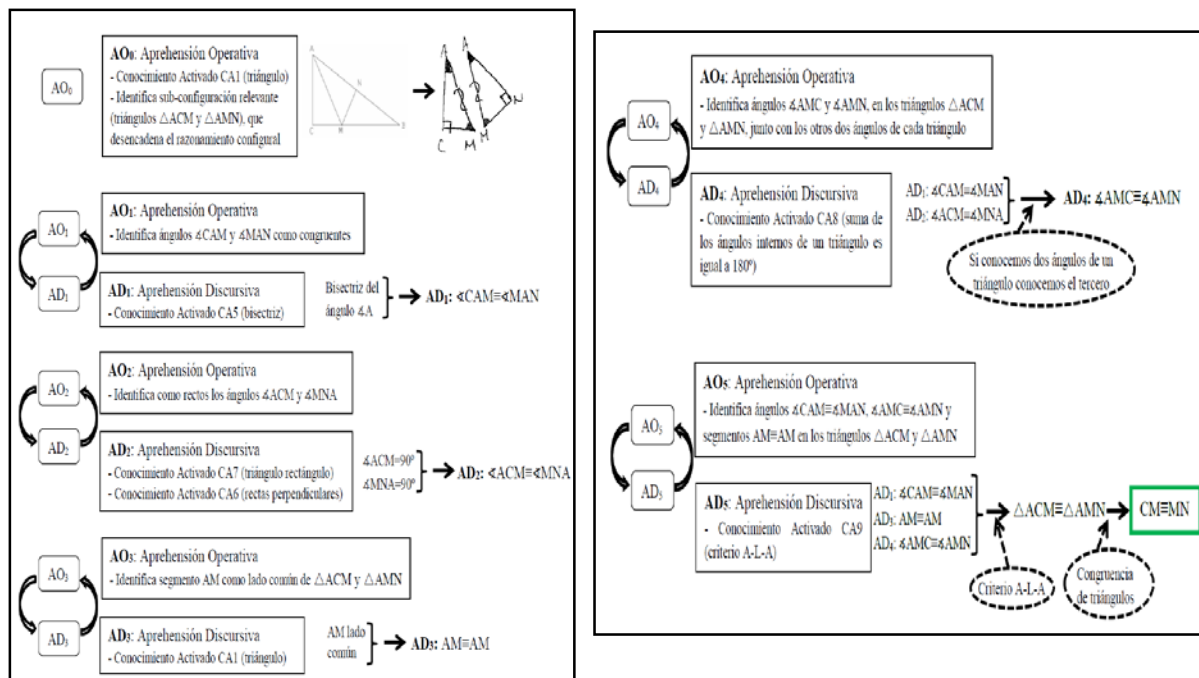


Figura 3. El discurso textual generado por los estudiantes es descompuesto en unidades de análisis (AD_i = Aprehensión discursiva; AO_i = Aprehensión Operativa) y se agrupa en dos momentos del proceso de razonamiento configural.

Resultados

Los dos problemas analizados tuvieron niveles de éxito diferentes. En el problema 1, de los 164 estudiantes que siguieron alguna de las trayectorias de resolución vinculadas a las tres sub-configuraciones relevantes, 75 consiguieron generar procesos deductivos correctos (45,7%). Los niveles de éxito en cada trayectoria fueron 39,7% (a), 66,7% (b) y 33,3% (c). En el problema 2, de los 165 estudiantes que siguieron la trayectoria de resolución definida por la única sub-configuración identificada, 94 generaron procesos deductivos completos (57%).

Identificación de una sub-configuración y la trayectoria de resolución

Un aspecto que nos ayuda a caracterizar el proceso de resolución seguido por los estudiantes es la relación entre la identificación de una determinada sub-configuración y la trayectoria de resolución seguida. Las características de los problemas usados permitían subrayar este aspecto ya que se diferenciaban en el número de sub-configuraciones que permitían generar trayectorias de resolución. El problema 1, tres sub-configuraciones relevantes y el problema 2 solo una. La Tabla 2 indica que en el problema 1, la trayectoria de resolución vinculada a la sub-configuración *tipo a* requiere activar (al menos) tres conocimientos de geometría, la vinculada a la *tipo b* requiere activar cuatro (los tres anteriores más CA3, propiedad aditiva de los ángulos congruentes) y la vinculada a la *tipo c* requiere activar cinco (los cuatro anteriores más CA4).

Tabla 2

Relación entre la sub-configuración identificada y la trayectoria de resolución seguida (CA_i = ítems de conocimiento geométrico activo en la trayectoria de resolución seguida según han sido dados en la tabla 1)

Problema	Sub-configuración	Conocimientos de geometría requeridos	Estudiantes	Total
P1	Tipo a	CA1+CA2+CA9	116	164
	Tipo b	CA1+CA2+CA3+CA9	39	
	Tipo c	CA1+CA2+CA3+CA4+CA9	9	
P2	Única	CA1+CA5+CA6+CA7+CA8+CA9	165	165

El número de estudiantes que iniciaron cada una de estas trayectorias de resolución en el problema 1 han sido 164 (116 para tipo a, 39 para tipo b y 9 para tipo c). En el problema 2, 165 estudiantes identificaron la sub-configuración relevante siguiendo una trayectoria de resolución que implicaba la activación de seis ítems de conocimiento geométrico. Las diferentes trayectorias adoptadas por los estudiantes (Tabla 2), y en particular en relación con el problema 1, indican que los estudiantes generaban diferentes trayectorias de resolución en función de la sub-configuración que habían sido capaces de identificar.

Influencia de las figuras prototípicas en el inicio del razonamiento configural

En relación con la influencia de las figuras prototípicas en el inicio del razonamiento configural, nuestro análisis ha permitido identificar tres comportamientos en los estudiantes que determinan rasgos de la influencia de las figuras prototípicas en el razonamiento configural. La importancia de estos tres comportamientos no nos los da la frecuencia con la que aparecen, sino la información que proporcionan para determinar la manera en que la visualización y el conocimiento intervienen en la generación del razonamiento configural.

Comportamiento 1. Figura prototípica de triángulo isósceles: rotación de la figura inicial.

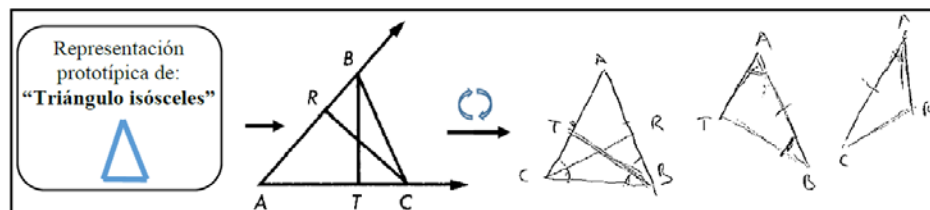


Figura 4. Fragmento de la respuesta de un estudiante al problema 1 en donde se muestra la rotación de la figura inicial, obteniendo a continuación la sub-configuración relevante tipo b.

De los 39 alumnos que en el problema 1 escogieron la *sub-configuración b*, 9 realizaron una rotación de la figura inicial mediante una *aprehensión operativa* para obtener la representación prototípica de triángulo isósceles (Figura 4). Esta manera de proceder no se ha observado en los estudiantes que han escogido las sub-configuraciones tipo a y c.

Comportamiento 2. Figura prototípica de ángulos opuestos por el vértice: identificación de los segmentos RC y BT que intersecan en el punto P (ángulos opuestos por el vértice son iguales).

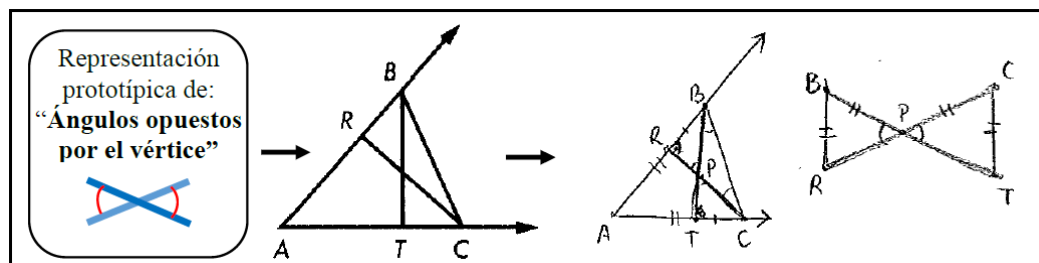


Figura 5. Fragmento de la respuesta de un estudiante al problema 1 en donde se muestra la identificación de ángulos opuestos por el vértice, obteniendo a continuación la sub-configuración relevante tipo c (en esta respuesta se observa que el estudiante realiza además una rotación de la sub-configuración obtenida; falta representar $\triangle BPC$).

Por otra parte, 7 de los 9 alumnos que en el problema 1 escogieron la *sub-configuración c*, identificaron el punto de intersección de los segmentos TB y CR y sus ángulos correspondientes (ángulos opuestos por el vértice, Figura 5).

Comportamiento 3. Figura prototípica de triángulo rectángulo: percibe (erróneamente) en la figura inicial triángulos rectángulos, cree ver que $AC \perp BT$ y $RC \perp AB$; es decir, el estudiante admite una propiedad exclusivamente por las características de la figura inicial, priorizando el aspecto intuitivo frente al formal. Es decir, en este tercer comportamiento algunos estudiantes admiten erróneamente una propiedad ($AC \perp BT$ y $RC \perp AB$) a partir de la percepción de la figura inicial, priorizando el aspecto visual frente al formal (Figura 6).

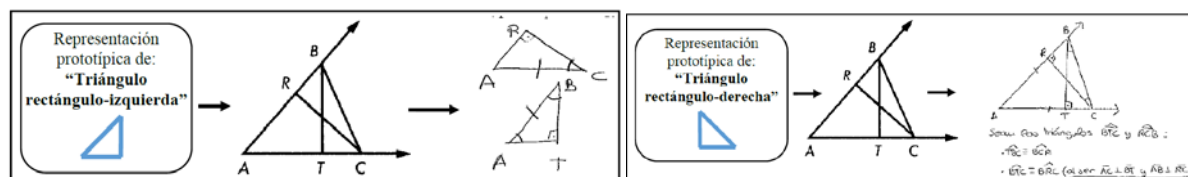


Figura 6. Fragmento de las respuestas de dos estudiantes al problema 1 en donde se muestra la identificación errónea de triángulos rectángulos; respectivamente: triángulo rectángulo-izquierda ($\triangle TAB$; ángulo recto hacia la izquierda, obteniendo la sub-configuración tipo b); y triángulo rectángulo-derecha ($\triangle TBC$; ángulo recto hacia la derecha, obteniendo la sub-configuración tipo a, expresada mediante texto).

La Tabla 3 indica las frecuencias de estos comportamientos para el problema 1:

Tabla 3

Comportamientos derivados de la influencia de las figuras prototípicas (problema 1)

Figuras prototípicas en el problema 1				
Caso	Figura prototípica	Descripción	Sub-configuración	Nº de respuestas
1	Triángulo isósceles	Rotación de la figura inicial	b	9
2	Ángulos opuestos por el vértice	Identifica el punto de intersección de los segmentos TB y CR y sus ángulos correspondientes	a	2 ⁽¹⁾
			c	7
3	Triángulo rectángulo	Admite explícitamente una propiedad errónea ($AC \perp BT$ y $RC \perp AB$) y marca los ángulos rectos. Prioriza el aspecto intuitivo frente al formal por las características de la figura inicial	a	10
			b	3

Discusión y conclusiones

Esta investigación intenta establecer características de las relaciones entre la identificación de configuraciones que inician el razonamiento configural y el conocimiento de geometría determinando diferentes trayectorias de resolución de problemas de probar. Los resultados muestran que la identificación de una sub-configuración relevante activa determinados ítems de conocimiento geométrico cuya coordinación define una determinada trayectoria de resolución. Estos resultados evidencian el papel de la relación entre la visualización y el conocimiento geométrico en el inicio del razonamiento configural.

En el problema 1, de los 39 alumnos que escogieron la sub-configuración tipo b, 9 de ellos realizaron mediante una aprehensión operativa una rotación de la figura inicial para obtener la representación prototípica de triángulo isósceles (Mesquita, 1998). Por otra parte, 7 de los 9 estudiantes que en el problema 1 escogieron la sub-configuración tipo c, identificaron el punto de intersección de los segmentos TB y CR y sus ángulos correspondientes (representación prototípica de ángulos opuestos por el vértice). Finalmente, 13 estudiantes admiten erróneamente una propiedad ($AC \perp BT$ y $RC \perp AB$) para obtener la representación prototípica de triángulo rectángulo, iniciando a continuación la trayectoria de resolución vinculada a la sub-configuración *tipo a* (10 estudiantes) y *tipo b* (3 estudiantes). Los hechos observados en las respuestas indican que el reconocimiento de una sub-configuración relevante para la resolución del problema se inicia con la identificación de una figura prototípica en la configuración inicial, que activa determinados conocimientos de geometría poniendo de manifiesto el cambio del anclaje visual al anclaje discursivo. Además, el reconocimiento de una configuración concreta en la figura inicial puede responder a la activación de uno o varios conocimientos de geometría que permite visualizar una sub-configuración entre varias posibles, lo que pondría de manifiesto a su vez el cambio del anclaje discursivo al anclaje visual.

Los resultados obtenidos muestran que las distintas trayectorias que llevan a la resolución de los dos problemas están determinadas por la identificación de una sub-configuración relevante que facilita el uso de determinados ítems de conocimiento geométrico. Estos resultados permiten generar una hipótesis de trabajo futuro en el sentido de que si los maestros fueran equipados con conocimiento de las relaciones entre la identificación de la configuración y los ítems de conocimiento activados podrían manejar adecuadamente las dificultades a las que se enfrentan los estudiantes¹ al desarrollar el razonamiento configural. Los maestros con este conocimiento especializado de geometría pueden proporcionar a sus estudiantes varias estrategias para encontrar diferentes sub-configuraciones posibles que permitan movilizar los conocimientos de geometría pertinentes para la resolución del problema. Es decir, la hipótesis de trabajo que generan estos resultados es el potencial que puede tener formar a los maestros en estos aspectos que apoyan el desarrollo del razonamiento configural. Más investigación es necesaria para apoyar esta línea de trabajo centrada en la relación entre la visualización, la generación del razonamiento configural y la resolución de problemas de probar en el sentido de aportar información específica para la toma de decisiones en la formación de profesores.

¹ Estos dos estudiantes posteriormente también identifican la sub-configuración *tipo a* continuando con esta trayectoria de resolución

Reconocimientos

Esta investigación ha recibido el apoyo de los Proyectos I+D+i, EDU2011-27288 del Ministerio de Ciencia e Innovación, España.

Referencias

- Battista, M. T. (2007). The Development of Geometric and Spatial Thinking. In F. K. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 843-908). Charlotte, N.C.: Information Age Publishing. NCTM.
- Battista, M. T. (2008). Representations and cognitive objects in modern school geometry. In M. Kathleen, & G. W. Blume (Eds.), *Research on Technology and the Teaching and Learning of Mathematics* (pp. 341-362). Charlotte: IAG.
- Chinnappan, M. (1998). Schemas and mental models in geometry problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 36, 201-217.
- Clemente, F., & Llinares, S. (2013). Conocimiento de geometría especializado para la enseñanza en Educación Primaria. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa, & N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 229-236) Bilbao: SEIEM. DOI: 10.13140/2.1.1181.8242
- Clemente, F., & Llinares, S. (2014). Relación entre el conocimiento de geometría y el “truncamiento” del razonamiento configural. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau, & T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 247-256). Salamanca: SEIEM. DOI: 10.13140/2.1.2912.4487.
- Clemente, F., & Llinares, S. (en prensa). Formas del discurso y razonamiento configural de estudiantes para maestro en la resolución de problemas de geometría. *Enseñanza de las Ciencias*.
- Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processes. In Sutherland, R., & Mason, J. (Eds.), *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematical Education* (pp. 142-157). Berlín, Germany: Springer.
- Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive functions in mathematical thinking. Basis Issues for learning. En F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME* (pp. 3-26) Cuernavaca, México. Columbus, Ohio, USA: ERIC/CSMEE Publications-The Ohio State University.
- Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. In P. Boero (ed.), *Theorems in School. From History, Epistemology and Cognition to Classroom Practice* (pp. 137-162). Rotterdam, Netherland: Sense Publishers.
- Fischbein, E. (1993). The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 24, 139-162.
- Gal, H., & Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational Studies in Mathematics*, 74(2), 163-183.
- Gutiérrez, A. & Jaime, A. (1999). Preservice Primary Teachers' Understanding of the Concept of Altitude of a Triangle. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2(3), 253-275.
- Hershkwitz, R. (1990). Psychological Aspects of Learning Geometry. En P. Nesher & J. Kilpatrick (eds.) *Mathematics and Cognition. A Research Synthesis by the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.70-95).Cambridge Univesity Press: Cambridge.
- Llinares, S. & Clemente, F. (2014). Characteristics of pre-service primary school teachers' configural reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 16(3), 234-250.

- Mesquita, A. L. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 183-195.
- Prior, J., & Torregrosa, G. (2013). Razonamiento configural y procedimientos de verificación en contexto geométrico. [Configural reasoning and verification procedures in geometric context]. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16(3), 339-368.
- Torregrosa, G., & Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en Geometría [Coordination of cognitive processes in geometry]. *RELIME. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(2), 275-300.
- Torregrosa, G., Quesada, H., & Penalva, M. C. (2010). Razonamiento configural como coordinación de procesos de visualización [Configural reasoning as coordination of visualisation process]. *Enseñanza de las Ciencias*, 28(3), 327-340.
- Vinner, S. & Hershkowitz, R. (1980). Concept images and common cognitive paths in the development of some simple geometrical concepts. In R. Karplus (Ed.), *Proceedings of the 4th PME conference* (pp. 177–184). Berkeley, CA: Lawrence Hall of Science.

Os pentaminós à luz da metodologia Sequência Fedathi: uma proposta didática para o ensino da Matemática

Ana Paula Rodrigues Alves **Santos**

Universidade Federal do Ceará

Brasil

anapaularasantos@gmail.com

Daniel **Brandão** Menezes

Universidade Federal do Ceará

Brasil

danielbrandao@multimeios.ufc.br

Fernanda Cíntia Costa **Matos**

Universidade Federal do Ceará

Brasil

cintia@multimeios.ufc.br

Resumo

O presente artigo tem como objetivo contribuir para um ensino da matemática mais motivador e dinâmico, desafiando os alunos a buscarem o conhecimento matemático e ao mesmo tempo relacioná-lo com o seu cotidiano. Apresentamos uma sequência didática, utilizando a metodologia de ensino Sequência Fedathi que promove uma mudança de postura do professor, obtendo como resultado um aluno mais reflexivo, investigativo, crítico e participativo durante o processo de construção do conhecimento. Os pentaminós foram utilizados como ferramenta didática durante os processos de ensino e de aprendizagem. Essa proposta didática foi trabalhada com uma turma constituída por vinte e um alunos do Ensino Fundamental, cursando o nono ano de escolaridade de uma instituição privada. Concluímos que a Sequência Fedathi fomentou o raciocínio matemático, possibilitando aos alunos a construção significativa de conceitos, tais como: área, superfície, perímetro e semelhança de figuras.

Palavras chave: Sequência Fedathi, pentaminós, ensino de Matemática, construção de conceitos.

Introdução

Observamos um certo desinteresse por parte dos alunos resultando em um rendimento insatisfatório em relação a aprendizagem da Matemática. Reproduzindo mecanicamente o conhecimento transmitido pelo professor, os alunos não participam do processo de construção do conhecimento, caracterizando o ensino Tradicional (Souza, 2013 p.36). Ou seja, os alunos não tem oportunidade de fazer conexões nem com os seus conhecimentos prévios e nem com o seu cotidiano, desinteressando-se assim, em aprender alguns conceitos matemáticos. Diante desse cenário, propomos uma sequência didática a alunos do ensino básico que cursavam o nono ano

de escolaridade, de uma escola privada, do estado do Ceará-Brasil. Utilizamos uma metodologia que se contrapõe ao ensino tradicional, a Sequência Fedathi (SF). A SF foi apresentada formalmente em 1996, na Tese de Pós-Doutorado do Prof. Hermínio Borges Neto, UFC, na Universidade de Paris VI. A partir daí, a referida metodologia vem sendo experimentada com base nos estudos de Borges Neto, juntamente com pós-graduandos da Faculdade de Educação-FACED/UFC. A SF busca diferenciar-se positivamente em relação ao ensino tradicional, valorizando igualmente as ações professor e aluno durante o ensino (Souza, 2013 p.38), permitindo o aluno participar ativamente na construção do conhecimento. Isto é, possibilitando aos professores a apropriação de uma metodologia de ensino em que docente e discente se achem motivados e empenhados nas situações de aprendizagem, atingindo um resultado satisfatório para ambos. Tomando como referência as etapas do trabalho científico do matemático, a Sequência Fedathi é composta por quatro etapas sequenciais e interdependentes (Souza, 2013 p.18): **Tomada de Posição, Maturação, Solução e Prova**. Para Borges Neto, o aluno é capaz de reproduzir ativamente o caminho que a humanidade percorreu para compreender os ensinamentos matemáticos, sem que, para isso, sejam necessários os mesmos milênios que a história consumiu para chegar ao momento atual. Portanto, os alunos realizaram as atividades vivenciando cada etapa da Sequência Fedathi, as quais descreveremos a seguir.

A Sequência Fedathi e os Pentaminós

Apresentação do Problema

Antes de apresentar o **problema** (Souza, 2013 p.20) o professor verificou os conhecimentos prévios dos alunos, fazendo um diagnóstico acerca dos conhecimentos prévios que os alunos necessitam ter referente ao saber que pretendia ensinar. Assumindo uma postura de investigador, o professor realizou o **diagnóstico** em dois momentos, o primeiro em que definiu quais os conhecimentos prévios os alunos deveriam ter para a compreensão do novo conhecimento, e o segundo, a realização da investigação junto aos alunos a fim de ratificar se já eram detentores destes conceitos.

O professor iniciou com algumas perguntas: se sabiam determinar o perímetro de uma figura plana, ou determinar a área, se havia diferença entre área e superfície. Alguns alunos confundiam esse conceito. O professor esclareceu a diferença e lembrou junto dos alunos o cálculo da área de algumas figuras planas. Depois de verificar o *plateau*¹ dos alunos, sabia quais os conceitos que deveria reforçar. Os alunos determinaram a área e o perímetro de algumas figuras.

Com a participação e interação de todos, mais algumas indagações foram feitas: se conheciam o dominó e como é constituído. Os alunos lembraram que o dominó é constituído por dois quadrados. Então, continuaram a analisar e enfatizaram que os quadrados eram iguais. O professor esclareceu que quadrados iguais, são aqueles que possuem a mesma medida do lado, portando chamados quadrados congruentes. E continuou: se o dominó é constituído por dois quadrados congruentes, então o monominó é constituído por quantos quadrados? Alguns alunos disseram que era constituído por um quadrado. Assim o professor deu continuidade, triminó (três quadrados), tetraminó (quatro quadrados), pentaminós (cinco quadrados), hexaminó (seis quadrados) ... O professor prosseguia sempre motivando a participação dos alunos, esclareceu

¹ De acordo com a Sequência Fedathi, o “plateau” faz parte do processo de diagnóstico realizado para compreender o nível cognitivo dos alunos (Souza, 2013 p.20).

que todas essas figuras planas são chamadas de poliminós e que construiriam um novo conhecimento com o auxílio dos pentaminós. Um aluno perguntou: o que seriam esses pentaminós? Observou-se que ao falar em pentaminós, fomentou uma curiosidade por parte dos alunos, fazendo-os se interessarem e a se empenharem mais durante a aula.

Descreveremos a seguir a primeira atividade proposta pelo professor.

Atividade 1 - Descobrindo os pentaminós.

Material utilizado: Folha quadriculada A4, lápis e borracha. A turma foi dividida em grupos de quatro alunos (ver figura 1).



Figura 1. Descobrindo os pentaminós

O professor enfatizou que trabalhariam com os pentaminós, que são formados por cinco quadrados, então pediu aos alunos que descobrissem todas as combinações possíveis utilizando cinco quadrados, sendo adjacentes em pelo menos um lado. É importante não dizer que são doze combinações, permitindo o aluno usar a criatividade e a refletir, interagindo com o professor e com os colegas, na busca da descoberta pelos pentaminós. Nesse momento, o professor estabeleceu regras para mediar o trabalho dos alunos, as quais devem delimitar as interações desejadas entre alunos e professor, estabelecendo o **acordo didático**, promovendo o desenvolvimento do trabalho interativo, integrando-se ao grupo, com o objetivo de estabelecer uma interação multilateral, ou seja, aquela em que o professor insere-se no grupo com as funções de refletir, ouvir, questionar e levantar hipóteses, fomentando a discussão entre os alunos (Souza, 2013 p. 21).

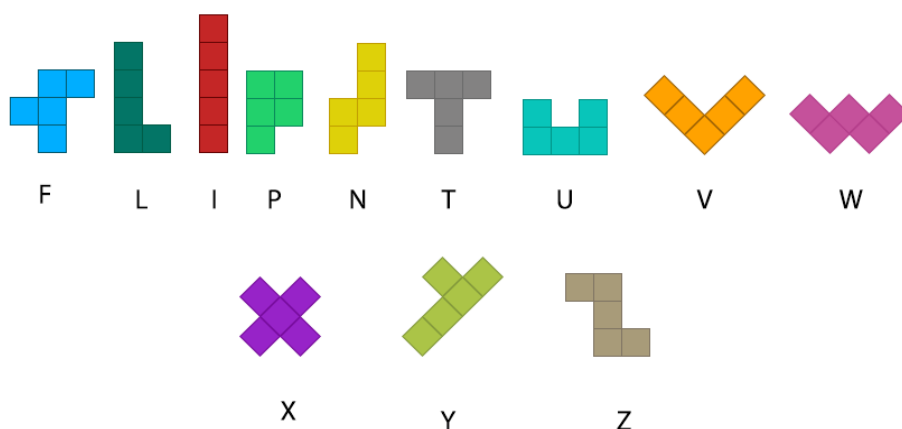


Figura 2. Nomenclatura dos pentaminós

O professor prosseguiu propondo mais uma atividade.

Semelhança de Figuras

A turma formou grupos de quatro alunos, cada grupo recebeu um jogo de pentaminós, confeccionados de cartolina e papel adesivo, sendo cada jogo, constituído por doze pentaminós (ver figura 3).



Figura 3. Pentaminós confeccionados com cartolina

O professor usou o retroprojektor multimídia para expor o problema a seguir.

Atividade 2: Construa uma figura semelhante a seguir (ver figura 4), utilizando os pentaminós L, U, X, Z, Y, F, V e S.

O professor pediu que determinassem o perímetro e a área das figuras, analisando se podiam estabelecer alguma relação.

Material Utilizado: Doze pentaminós de cartolina e retroprojektor multimídia.

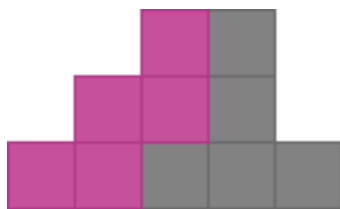


Figura 4. Atividade 2

Caracterizamos assim, a **Tomada de Posição**, a primeira etapa da Sequência Fedathi. Dos grupos formados, apenas dois conseguiram construir os doze pentaminós. Partilhamos os doze pentaminós e fizemos uma relação com as letras do alfabeto (ver figura 2). Ao vivenciarmos essa etapa, verificamos que todos os alunos estão com o mesmo nível de conhecimento, facilitando a aquisição do novo saber matemático: Figuras Semelhantes. Os alunos estão prontos para vivenciar a **Maturação** e a **Solução**, duas etapas muito importantes durante o processo de ensino na metodologia Sequência Fedathi. Essas etapas caracterizam a diferença entre a Sequência Fedathi e o Ensino Tradicional que se centraliza apenas em duas etapas, a Tomada de Posição e a Prova (Souza, 2013 p.36). No Ensino Tradicional o professor, apresenta o problema e valida a sua solução, sendo o aluno um mero receptor do conhecimento. Enquanto que ao utilizarmos a Sequência Fedathi durante o processo de construção de conceitos o aluno torna-se o protagonista, participando ativamente na busca do novo saber (Souza, 2013 p. 37).

Com a resolução desse problema os alunos vivenciaram a segunda etapa da Sequência Fedathi, a **Maturação** (Souza, 2013 p. 23). Esta etapa é destinada à discussão entre o professor e os alunos, para que possam compreender o problema, destacando as variáveis envolvidas e

formulando possíveis soluções. Constitui um dos momentos de grande importância na formulação do raciocínio matemático, através dos questionamentos impostos pelo professor, instigando e fomentando em cada aluno a busca pela construção do conhecimento. Agindo assim, o professor possui o *feedback* necessário para ratificar que os alunos estão focados no desenvolvimento do conhecimento em questão. Portanto, surgiram alguns questionamentos feitos pelos alunos:

- “Professor, eu posso girar as peças ou utilizá-las no seu sentido oposto?”
- “Professor, nunca fizemos nada parecido com esse problema. O senhor devia fazer um problema para entendermos como fazer.”
- “Estamos sentindo dificuldades em construir a figura. Como fazemos? Dá uma dica?”
- “Vamos começar por construir a figura inicial.”
- “Como vamos saber o perímetro? É uma figura tão diferente...”

Indagações desse tipo são muito comuns quando os alunos começam a buscar estratégias para resolver o problema em questão.

Para respondê-las, é necessário que o professor adote respostas por meio da postura, denominada por Borges Neto, de mão no bolso, ou seja, o professor conduz o aluno a pensar, refletir e questionar-se sobre as respostas, sem apresentar-lhes uma resposta direta. Então, foram feitos alguns questionamentos pelo professor:

- “Observem a figura que está projetada.”
- “O que é mais fácil pegar as doze peças ou separar aquelas que vamos usar?”
- “Interajam entre si e busquem adotar uma estratégia, contem com a participação de todos do grupo.”
- “Busquem valorizar a ideia do colega, pois daí podem começar a formular uma estratégia.”

Todos se envolveram com o problema em questão (ver figura 5), a todo instante o professor esteve atento aos alunos, observando e acompanhando seus comportamentos, interesses, medos, atitudes, raciocínios, opiniões e estratégias aplicadas na análise e na busca da solução do problema, bem como suas interpretações e modos de pensar, com o objetivo de perceber quando e como mediar o trabalho que os alunos estão desenvolvendo. Quando um grupo percebeu que o outro havia construindo a figura, sentia-se motivado a encontrar a solução, houve uma troca de ideias mútuas. O trabalho dos alunos na fase da **Maturação** é indispensável para o desenvolvimento do seu raciocínio e da aprendizagem final. Pois sem essa participação os alunos apenas adquirem informações passageiras, tendo como resultado uma aprendizagem superficial.

A maturação do problema exige um tempo significativo da aula para que o aluno possa desenvolver suas ideias. O professor procurou ajustar a duração desse tempo de acordo com o objetivo a ser atingido, ao rendimento dos alunos em relação a exploração do problema e ao que pretendia realizar no tempo total da aula.

Na **Maturação**, em relação a postura do professor, destacamos que a competência didático-matemática² do docente é fundamental para a interpretação, elaboração e discussões das representações dos alunos, para levá-los à construção do novo saber matemático. É indispensável

² Souza, M.J.A. (2013). Sequência Fedathi: uma proposta pedagógica para o ensino de Ciências e Matemática. Fortaleza, CE: Edições UFC.

que o professor seja detentor de uma base sólida acerca dos conceitos matemáticos a ele interligados. O professor precisa dominar o conteúdo matemático e aplicar em suas aulas elementos da Didática Geral e da Didática da Matemática, desde o processo de ensino (Souza, 2013 p. 32). Esses domínios são essenciais para a atenção, a compreensão e a participação ativa dos alunos durante o processo de elaboração das soluções.



Figura 5. Alunos vivenciando a busca de uma estratégia.

Após construírem a figura (solução do problema-ver Figura 6), estavam prontos para observar e relacionar o perímetro e a área das figuras. Os alunos organizaram e apresentaram modelos que pudessem conduzi-los a encontrar o que estava sendo solicitado: pegaram caneta, lápis e papel. Determinaram o perímetro e a área das figuras. Alguns alunos usaram uma tabela para organizar os dados obtidos e analisá-los. Estavam a dar início a mais uma etapa da Sequência Fedathi, a **Solução**. Nessa etapa, aconteceu as trocas de ideias, opiniões e discussões dos pontos de vista e modelos propostos pelos alunos. O professor estimulou e solicitou que os estudantes explicassem seus modelos e justificassem as conclusões atingidas.

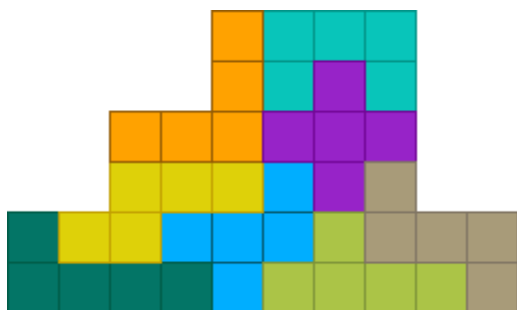


Figura 6. Solução da Atividade 2

Alguns grupos organizaram os dados, percebendo uma relação de proporcionalidade entre a área e o perímetro. O professor pretendia que os alunos construíssem o conceito de Figuras Semelhanças, determinando a Razão de Semelhança, através da proporcionalidade entre as figuras. Nesse, momento foi necessário dar um tempo aos alunos para que pensassem e refletissem acerca das realizações, avaliassem as conclusões, por meio de erros e tentativas, para junto ao professor, pudessem validar os modelos criados.

Este é um excelente momento para os alunos exercitarem a autonomia e perceberem a importância da participação de cada um durante o processo de aprendizagem. O professor analisou as diferentes formas de representação apresentadas pelos alunos, apoiando-se nelas para buscar a constituição do novo saber matemático implicado. O professor destacou uma das soluções em que um dos grupos de alunos, representou os dados em uma tabela (ver Figura 7). O professor ao observar os dados, continuou agindo como mediador, instigando os alunos a tirarem

mais conclusões, discutindo junto do grupo as resoluções encontradas, a fim de juntos concluírem qual delas é mais adequada para representar o problema proposto.

	PERÍMETROS	ÁREAS	RAZÃO ENTRE OS PERÍMETROS	RAZÃO DE SEMELHANÇA
F ₁	16	10	$\frac{16}{8} = \frac{4}{2}$ $\frac{4}{2} = 2$	$\frac{1}{2}$
F ₂	32	40	$\frac{32}{8} = 4$ $\frac{40}{10} = 4$	$\frac{1}{4}$

Figura 7. Dados organizados

Destacamos nessa etapa a importância da discussão das soluções, assim os alunos perceberam as diferentes compreensões e representações do grupo em relação ao problema matemático proposto. O professor identificou, interpretou e discutiu junto a cada grupo as suas soluções e erros apresentados, foi um momento determinante no estabelecimento da aprendizagem matemática, por possibilitar aos alunos a visualização e reflexão das várias soluções apresentadas e a validação de cada uma delas. A análise das soluções permitiu aos alunos compreenderem a construção do novo conhecimento, pois conheceram as diferentes formas de interpretação das conclusões adquiridas, tornando-os consciente do novo saber matemático (Souza, 2013 p.31).

Após a análise e discussões das soluções feitas pelo professor junto a cada grupo de alunos, chegou o momento em que cada um dos grupos apresentou o novo conhecimento. Iniciou-se a quarta etapa da Sequência Fedathi, a **Prova**. Então, cada um dos grupos escolheu um representante que expôs todo o processo de aprendizagem até a conclusão final. Comentaram como construíram a figura, organizaram os dados (perímetro e área), determinaram a razão de proporcionalidade (razão de semelhança), compreendendo assim, como identificar figuras semelhantes, estendendo o conhecimento para os polígonos semelhantes. O professor fez uma intervenção e perguntou como poderiam definir figuras semelhantes. Responderam: “Duas figuras são semelhantes quando têm formas iguais e tamanhos diferentes”. Então, o professor pediu que construíssem mais algumas figuras, a fim de obter outros exemplos de figuras semelhantes.

- Construa uma figura semelhantes (ver figura 8) com os pentaminós X, W, F, V, L, T, I e S.
- Construa uma figura semelhante (ver figura 9) com os pentaminós T, X, I, F, U, W, P e Y.

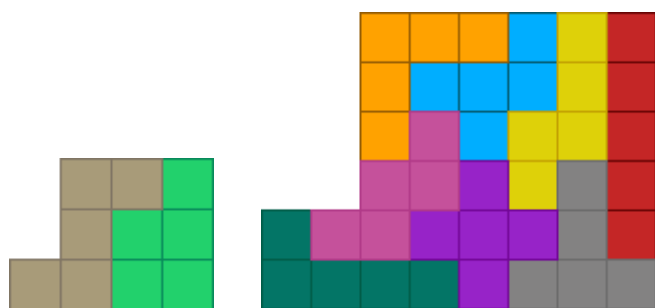


Figura 8. Exemplo de figuras semelhantes usando os pentaminós

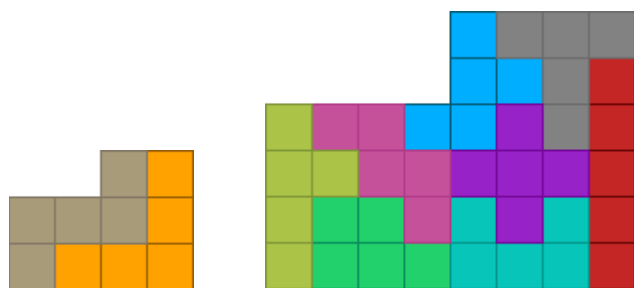


Figura 9. Exemplo de figuras semelhantes usando os pentaminós.

A seguir o professor fez um desenho no quadro (ver figura 10). O objetivo desse momento é formalizar a definição de figuras semelhantes. Então, o professor prosseguiu enfatizando o conhecimento que planejou ensinar, desenhando no quadro dois polígonos ABCD e EFGH.

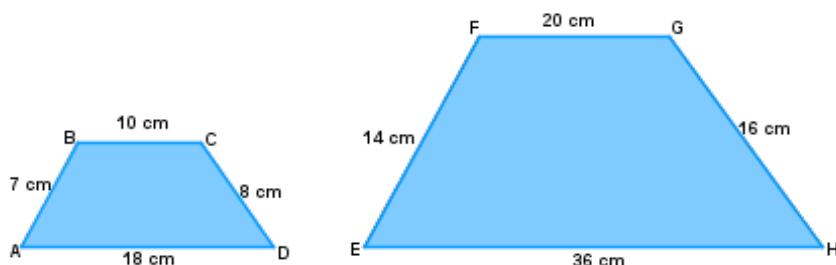


Figura 10. Polígonos desenhados no quadro pelo professor

O professor pediu aos alunos que observassem os seguintes pormenores:

Os ângulos correspondentes são congruentes: $\hat{A} \cong \hat{E}$; $\hat{B} \cong \hat{F}$; $\hat{C} \cong \hat{G}$; $\hat{D} \cong \hat{H}$;

Os lados correspondentes (ou homólogos) são proporcionais:

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE} \quad \text{ou} \quad \frac{7}{14} = \frac{10}{20} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

O professor prosseguiu, comentando que de acordo com o que aprenderam os polígonos ABCD e EFGH são semelhantes.

Os alunos concluíram que para garantirmos que dois polígonos são semelhantes, é preciso verificar as duas condições: os ângulos correspondentes são congruentes e os lados correspondentes são proporcionais. Apenas uma das condições não é suficiente para indicar a semelhança entre polígonos.

Após apresentado e validado o novo conhecimento, prosseguimos fazendo uma **avaliação oral** (Souza, 2013 p. 35), através de um exercício (ver Tabela 1). O professor desenhando três quadrados no quadro (ver figura 11).



Figura 11. Quadrados desenhados pelo professor

Indagando aos alunos prosseguiu: Considerando que o lado do quadrado A mede 1 unidade, o lado do quadrado B mede 2 unidades e o lado quadrado C mede 3 unidades. O professor escolheu alguns alunos para que completassem a seguinte tabela.

Tabela 1

Dados preenchidos com a participação dos alunos

Comparação entre os quadrados	Razão de semelhança	Razão entre os perímetros	Razão entre as áreas
B e A	$\frac{l_B}{l_A} = \frac{2}{1} = 2$	$\frac{P_B}{P_A} = \frac{8}{4} = 2$	$\frac{A_B}{A_A} = \frac{4}{1} = 4$
C e A	$\frac{l_C}{l_A} = \frac{3}{1} = 3$	$\frac{P_C}{P_A} = \frac{12}{4} = 3$	$\frac{A_C}{A_A} = \frac{9}{1} = 9$
C e B	$\frac{l_C}{l_B} = \frac{3}{2}$	$\frac{P_C}{P_B} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$	$\frac{A_C}{A_B} = \frac{9}{4}$

Fonte: pesquisa direta. 2014

Ao realizar esse exercício com a participação ativa dos alunos, o professor acrescentou, reforçando o novo saber adquirido: podemos perceber uma relação válida entre a razão de semelhança e a razão entre os perímetros, assim como, percebemos uma relação entre a razão de semelhança e a razão entre as áreas. A razão entre as suas áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança entre eles. Concluíram, então, que essas relações são válidas para dois polígonos semelhantes quaisquer.

Finalizamos a quarta etapa da Sequência Fedathi, a **Prova**. É nessa etapa final que o novo saber foi compreendido e assimilado pelos alunos, levando-os a perceber que será possível deduzir outros modelos simples e específicos. Portanto, é muito importante que os alunos percebam a importância de se trabalhar com modelos gerais, pois estes irão auxiliá-los a resolver outros problemas e situações, contribuindo também para o desenvolvimento de seu raciocínio lógico-dedutivo, o tipo de pensamento desejado e necessário para resolver, de maneira eficaz e lógica, problemas matemáticos do cotidiano, além de ser o tipo de raciocínio relevante para o desenvolvimento científico (Souza, 2013 p. 33).

Ba Sequência Fedathi, a **Prova** constitui a última etapa do processo, levando o aluno a elaborar o modelo geral do novo saber, especificamente na situação descrita os alunos elaboraram o conceito final de Figuras Semelhantes. Portanto, para atingir esse objetivo o aluno percorreu o seguinte caminho:

- O professor apresentou um problema generalizável;
- Os alunos se debruçaram sobre o problema na busca de uma solução;
- Professor e alunos discutem sobre as soluções apresentadas;
- Após, as discussões, o professor com a participação dos alunos mostrou a formalização do novo conhecimento, enfatizando o novo saber que planeou ensinar.

Considerações Finais

Diante da dificuldade dos alunos assimilarem o conceito de figuras semelhantes e a sua aplicação, planejamos e realizamos essa sequência didática, utilizando como metodologia de ensino a Sequência Fedathi a qual promoveu uma aprendizagem mais significativa, envolvendo e surpreendendo os alunos na elaboração do novo saber, tornando-os parte integrante na

construção do conhecimento. As atividades foram desenvolvidas com a participação ativa dos alunos estimulando o raciocínio matemático e a interação entre professor e os alunos, e os alunos entre si, valorizando a participação de todos, aprendendo com os erros e com as tentativas. A metodologia Sequência Fedathi fomentou uma mudança de postura do professor, o qual exerceu a função de mediador durante todo o trabalho realizado pelos alunos.

A maioria dos alunos não apresentaram dificuldades no momento de aplicar o novo conhecimento em exercícios propostos em aulas posteriores, o que comprovou a eficácia da metodologia empregada, observamos que o aluno sentia-se motivado, recuperando a sua autoestima, tornando-se mais autônomo durante a realização de tarefas.

Sabemos da dificuldade do professor em inserir novas metodologias na sua *Práxis* em sala de aula, pois há muito conteúdo para se cumprir em pouco tempo. Entretanto, com a realização dessas atividades o ganho foi imenso tanto para o professor como para os alunos, pois tivemos como resultado um aluno mais preparado para enfrentar novos desafios na aplicação desse novo saber e motivado a buscar pela aprendizagem em Matemática. O trabalho colaborativo, interativo e autônomo dos alunos encorajou-os a desmistificar a aprendizagem em Matemática.

Portanto, constatamos que o ensino da Matemática pode torna-se mais significativo, tanto para os alunos, como para o professor, desde que o professor explore várias formas de ensinar o conteúdo em foco, adotando a postura proposta pela Sequência Fedathi.

Referências

- Almeida, D. C. C. & Costacurta, M. S. (2010). *Atividades Lúdicas para o Ensino e Aprendizagem da geometria nos anos finais do ensino fundamental*. Universidade Comunitária da região do Chapecó.
- Almeida, V. L. M. C., Guimarães, D.M. & Besserra, V. S. (2005). *Pentaminós como uma Ferramenta Didática* (UNESP).
- Brasil, (1998). Ministério da Educação e Cultura. *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental*. 5ª a 8ª, série, Brasília.
- Golomb, S. W. (1996). *Polyominoes*. Princeton: Princeton University Press.
- Gorgen, A. C., Silva, E. B., Santos, M. B. & Portanova, R. (2009). *Pentaminós, Uma Experiência Enriquecedora*. Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul.
- Santos, A. P. R. A. (2014). *Análise de Uma Formação de professores à Luz da Sequência Fedathi: O Uso do Software Geogebra no Ensino da Matemática* (UFC).
- Silva, A. F., Matiko, H. & Kodama, Y. (2009). *Atividades com Jogos para Explorar a matemática na Educação Infantil* (UNESP).
- Souza, M.J.A. (2013). *Sequência Fedathi: uma proposta pedagógica para o ensino de Ciências e Matemática*. Fortaleza, CE: Edições UFC.

Procesos de validación en Geometría en situaciones de conflicto

Victor Manuel **Guerrero** Rojas

Centro de investigación y de estudios avanzados del instituto politécnico nacional

México

vicwarrio@hotmail.com

Resumen

En este trabajo se reportan resultados preliminares de una investigación en desarrollo sobre los procesos de validación en situaciones de conflicto. En particular, observamos la racionalidad de los estudiantes cuando enfrentan tareas de interpretación y construcción de pruebas localmente válidas usando configuraciones geométricas, a partir de las cuales se plantean situaciones de conflicto. Participaron 6 estudiantes de primer año de licenciatura de matemáticas quienes trabajaron con lápiz y papel, individualmente y en grupo. Observamos que el conflicto cognitivo desarrolla la racionalidad de los alumnos quienes eligen con más cuidado la información que consideran relevante. Sin embargo, esto no ocurre de manera automática sino que depende de: (1) De la aceptación del conflicto y (2) La forma como se resuelve éste. El trabajo con este tipo de proposiciones mostró ser versátil ya que las preguntas pueden propiciar diversas aproximaciones cognitivas.

Palabras clave: Geometría, procesos de validación, conflicto cognitivo, razonamiento deductivo.

Planteamiento

Entre los objetivos de la enseñanza de la Geometría, tenemos aquellos en los que los estudiantes deben indagar las relaciones geométricas de objetos matemáticos, elaborar relaciones entre sus propiedades y comunicarlas de manera oral y escrita. Para que este proceso logre su cometido debe contar con un soporte en las reglas aceptadas por la matemática.

Sin embargo, lo anterior no es un proceso sencillo ni espontáneo para los estudiantes. Parte de las dificultades tienen su origen en la interpretación de las representaciones geométricas, organizar la información relevante que percibimos en ésta, además de la elección de la información adecuada para enlazar las relaciones estructurales pertinentes de manera coherente y utilizarlas en la solución de problemas o demostraciones. Consideramos que desarrollar adecuadamente estos aspectos requiere de un aprendizaje dirigido a la focalización de la información disponible en la representación utilizada, por lo que hay que atender la dualidad entre lo perceptivo y lo abstracto al mismo tiempo en las representaciones que usamos.

En particular, en este trabajo estamos interesados en analizar la racionalidad que se manifiesta cuando los estudiantes de licenciatura enfrentan tareas de interpretación y construcción de pruebas localmente válidas de ciertas configuraciones geométricas, de las que plantean situaciones de conflicto, trabajadas con apoyo en razonamientos inductivos, abductivos y deductivos.

Consideramos el uso del conflicto cognitivo para fomentar el desarrollo de la racionalidad de los estudiantes en los procesos de validación en Geometría, esto es, por un lado, la transición del uso de la figura de considerar los aspectos perceptuales hasta los que los dirigen hacia las propiedades estructurales de ésta, por el otro lado, la forma en que organizan discursivamente los argumentos empleados.

Antecedentes

La investigación en Matemática Educativa sobre los procesos de prueba en Geometría ha sido abordada desde distintas perspectivas y se han considerado diversos elementos que intervienen en el aprendizaje escolar. En este caso, se refiere en particular a la adquisición de concepciones adecuadas para enfrentar la tarea de validar en matemáticas. Los resultados de investigación muestran que las explicaciones de los estudiantes sobre la pertinencia de proposiciones Geométricas en general, son distintas a las aceptadas por la matemática.

Por principio de cuentas, una de las dificultades que enfrentan los estudiantes es que no creen en la necesidad de la demostración como una de las actividades del salón de clases (Alibert y Thomas, 1991; Balacheff, 2000). También Balacheff (2000), menciona dos obstáculos en la producción de las demostraciones geométricas: El primero es que la evidencia de los hechos se impone a la razón y el segundo se refiere a que la enseñanza de la matemática, despoja a los estudiantes de la responsabilidad de considerar la verdad de sus afirmaciones.

Distintas investigaciones (Bell, 1976; Balacheff, 2000; Marrades y Gutierrez, 2000; Harel y Sowder, 2007) muestran que el tipo de pruebas que realizan los estudiantes no corresponden necesariamente a las pruebas matemáticas.

Por otra parte, algunas investigaciones muestran la existencia de creencias que obstaculizan los procesos de prueba entre los estudiantes (Fischbein y Kedem, 1982; Vinner, 1983; Chazan, 1993). En particular, algunos de ellos consideran a la prueba deductiva como simple evidencia o como un método para verificar un caso particular; mientras que otros consideraran a la evidencia empírica como prueba, esto es, que actividades como la medición son suficientes para establecer conclusiones generales (Vinner, 1983; Chazan, 1993).

En los resultados anteriores, se observa que los alumnos tienden a utilizar espontáneamente argumentos no deductivos e información perceptual para validar sus afirmaciones, los cuales pueden ser reconsiderados por ellos si estos supuestos los llevan a situaciones de evidente conflicto. Suponemos que este tipo de situaciones podrían establecer una diferencia en la racionalidad del estudiante para reconsiderar la importancia a las definiciones, la coherencia y la necesidad de los procedimientos matemáticos.

Fundamentación teórica

Procesos de validación

En este trabajo estamos interesados en los procesos de validación de proposiciones matemáticas en el aula, los entendemos como aquellas manifestaciones del razonamiento del individuo que tienen como fin asegurar la certeza de una proposición dada.

En esta dirección nos apoyamos en Balacheff (2000) quien estudió los procesos de prueba de los estudiantes y estableció las diferencias que hay entre una prueba y una demostración. El autor mantiene que el papel y carácter de la situación es determinante para el tipo de pruebas que

se realizan, donde su evaluación y las decisiones que se toman están relacionadas con los conocimientos del sujeto, el lenguaje y la racionalidad que se pone en juego.

Consideramos que las situaciones de validación deben propiciar que los estudiantes tomen decisiones para la organización adecuada de los fundamentos de sus pruebas, lo que a la larga les permitiría asumir la responsabilidad de las consecuencias que esto genere y en particular sobre la verdad de sus inferencias. En este proceso, los conflictos cognitivos también pueden jugar un papel que fomente un cambio en la credibilidad de los aspectos perceptuales hacia las propiedades estructurales de las figuras.

Las figuras Geométricas en los procesos de validación

En este trabajo consideramos, como Radford (2006), que la matemática es una actividad eminentemente simbólica por ello es importante establecer cómo es que funcionan los signos matemáticos, en particular, las figuras geométricas y como hemos dicho antes, en lo relativo con los procesos de validación en Geometría.

Al respecto del carácter simbólico, Duval (2006) señala que el uso de sistemas de representaciones semióticas para el pensamiento matemático es esencial, dado que a diferencia de otros campos de conocimiento, no existen otras maneras de tener acceso a los objetos matemáticos si no es a partir de las representaciones semióticas.

Sobre las representaciones semióticas Duval (2006) afirma que: “la parte jugada por los signos, concretamente los sistemas semióticos de representación, no solamente es para designar a los objetos matemáticos o para comunicar sino también para trabajar con ellos” (Duval, 2006, p.107).

Este aspecto es de especial importancia por lo que debe ser considerado por la enseñanza de la geometría, así como las condiciones e inconvenientes que las representaciones pudieran añadir al proceso de aprendizaje en matemáticas.

En el caso de la geometría escolar, la actividad se realiza principalmente en dos sistemas de representación: el de las figuras y el del discurso (Duval 2002). Éstos necesitan llevarse a cabo de manera coordinada para lograr una actividad productiva, es decir, para resolver un problema es necesario auxiliarse y realizar transformaciones sobre la figura considerando en todo momento al discurso, ya sea en la enunciación de propiedades o en la elaboración de pruebas matemáticas.

De esta manera, en Geometría es mediante las representaciones que tenemos acceso a los objetos Geométricos. Éstas exhiben aspectos reconocibles y es por medio de estas cualidades que podemos trabajar las proposiciones matemáticas asociadas a las figuras.

De manera que, cuando enfrentamos un problema geométrico lo que tenemos es una representación particular, como representante de una categoría establecida a partir de la definición del objeto en cuestión, ésta debería ser considerada por el estudiante como asociada a ciertas propiedades abstractas del objeto geométrico representado, cuyo carácter es general. Esta situación nos revela la naturaleza dual entre lo ideal y lo finito (Mesquita, 1998).

Adoptar la distinción entre lo ideal y lo finito de la figura no ocurre de inmediato entre los estudiantes. En ocasiones, el aspecto de la representación puede ser tan dominante para el estudiante, lo que impide y distrae la atención de las propiedades matemáticas y por tanto no llegar a una solución o a una demostración del problema en cuestión.

Argumentación versus demostración

Comprender el proceso discursivo de los estudiantes que da cuenta de la forma en que organizan e infieren nueva información, resulta realmente complejo. En este apartado, con el fin de analizar las producciones discursivas de los estudiantes en los procesos de prueba, creemos necesario considerar los diferentes tipos de discursos que se establecen en el aula: el propio de la matemática y aquel que se establece en el lenguaje común, lo que nos lleva a distinguir entre argumentación y demostración.

Una postura sobre las diferencias y relaciones de la argumentación basada en el lenguaje común y la demostración es la señalada por Duval (2002, 2007), quien sostiene que son dos formas de razonamiento que no funcionan de la misma manera, pese a que utilizan los mismos conectivos proposicionales y las formas lingüísticas son semejantes.

Para aclarar lo anterior, desde un punto de vista cognitivo, Duval (2002, 2007) hace las siguientes distinciones entre la argumentación y la demostración, estas son: la diferencia entre el valor epistémico y el valor lógico de una proposición, el estatus del contenido de las proposiciones y la organización de la demostración respecto a la de la argumentación.

El autor considera que cualquier razonamiento, explícito o implícito, trabaja con proposiciones, las cuales tienen un valor y un estatus. Así que no hay razonamiento sin una organización discursiva, normada por diferencias funcionales entre las proposiciones que la componen (Duval, 2007).

Por otra parte, en este trabajo, consideramos que aunado a lo dicho por Duval, respecto a los discursos puestos en funcionamiento en el aula, es necesario tomar en cuenta los razonamientos abductivos e inductivos como estructuras que organizan el discurso de los estudiantes para inferir nueva información (Pedemonte, 2007). Lo anterior, con el propósito de dar sentido a la demostración a partir de los indicadores del rigor matemático.

Uso del conflicto cognitivo

Distintos estudios (ej. Hadas, Hershkowitz y Schwarz 2000, 2002; Prusak, Hershkowitz y Scharwz 2011; Stylianides y Stylianides 2008, 2009; Zaslavsky 2005) han abordado el uso del conflicto cognitivo como un mecanismo para promover un aprendizaje significativo en general y sobre la demostración en particular. Lo anterior puede ser planteado, a través de confrontar la comprensión, las creencias y las concepciones de los estudiantes con el fin de establecer la necesidad de procurar explicaciones que superen el conflicto planteado, en particular estamos interesados en aquellas de carácter deductivo.

Se dice que el llamado conflicto cognitivo ocurre cuando los estudiantes se confrontan con datos u opiniones que contradicen sus argumentos iniciales (Prusak *et al*, 2011). Según Johnson y Johnson (2009) los conflictos pueden ser conceptuales o de controversia. Los primeros ocurren cuando la información recibida no es consistente con la asumida anteriormente por los estudiantes. Mientras que los segundos ocurren cuando las ideas, afirmaciones y conclusiones de un estudiante son incompatibles con las de otro, formando una controversia que conduce a una búsqueda entre ellos para llegar a un acuerdo.

Es por medio del contraejemplo, la contradicción y la incertidumbre que se intenta establecer un conflicto cognitivo entre los estudiantes. La contradicción puede conducirlos hacia la incertidumbre de los resultados que obtienen, llevándolos a una búsqueda de explicaciones, eventualmente deductivas, que superen la contradicción (Hadas, Hershkowitz y Schwarz 2000,

2002; Hadas y Hershkowitz 2002). Además, la incertidumbre puede hacer que los estudiantes tomen conciencia del papel de la demostración como una herramienta de convicción (Hadas y Hershkowitz, 1999).

Por otra parte, la investigación muestra que no es suficiente con tratar de establecer un conflicto para fomentar el desarrollo de la comprensión de los alumnos de manera estable, sino que es necesario establecer un medio adecuado para superarlo (Zazkis y Chernoff, 2008). Por su parte, Prusak, Hershkowitz y Schwarz (2011) nos muestran cómo a través de un tratamiento llamado diseño argumentativo se puede producir una argumentación productiva. Se entiende por argumentación productiva al cambio de un razonamiento basado en intuiciones y apoyadas principalmente en la imagen a otro tipo de razonamiento producido por una necesidad lógica. Este diseño que mencionan los autores se basa en tres principios que son: una situación de conflicto, situación de colaboración y proveer un dispositivo para constatar y controlar las hipótesis (Prusak et al, 2011).

De esta manera, teniendo en cuenta la importancia del diseño de la tarea, la forma en que ésta se lleva a cabo frente al grupo en el salón de clases y el rol del profesor, el conflicto cognitivo puede ser usado como “catalizador” de las readecuaciones del estudiante de la forma en que construye su conocimiento. En especial, en lo referente a la formación del rigor matemático que una vez construido es el que da la pauta para la construcción y adquisición del conocimiento matemático del estudiante.

Metodología

Con el fin de alcanzar nuestro objetivo en la dirección de analizar la racionalidad de los estudiantes que diera cuenta de lo que ellos valoran al construir su conocimiento, en particular, en lo relativo a los procesos de validación en Geometría en situaciones de conflicto, se realizó una investigación de tipo cualitativa con estudiantes de nivel universitario. El estudio se llevó a cabo con 6 sujetos, cuatro mujeres y dos hombres, cuya edad osciló entre los 18 y 20 años. Ellos comenzaban el segundo semestre de la licenciatura de Matemáticas en la Universidad Autónoma de Zacatecas, en particular, empezaban el curso de Geometría Moderna en donde las primeras semanas se abordó la Geometría Euclidiana.

La puesta en marcha de la actividad experimental fue llevada a cabo en un taller de tres sesiones de dos horas cada una en el transcurso de una semana, esto como parte del apoyo de los cursos regulares de Geometría moderna.

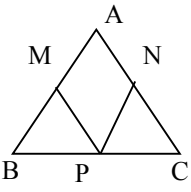
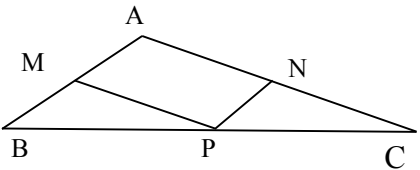
En cada sesión se propuso una secuencia de actividades que se llevaron a cabo de manera individual y en parejas. Esta secuencia tenía un orden específico. En el primer momento se exploró lo relativo a sus preferencias y formas de proceder respecto a las figuras geométricas en situaciones de validación. En el segundo momento se buscó establecer posibles conflictos conceptuales y de controversia a partir de los distintos problemas, sobre todo en aquellos casos donde los estudiantes mantenían argumentos visuales para la validación de los enunciados. En el tercer momento los conflictos fueron abordados en conjunto a través de una discusión grupal de tal forma que los estudiantes pudieron darle solución.

Una característica general de las tareas propuestas es que se plantearon proposiciones localmente válidas de ciertas configuraciones geométricas cuyo análisis requiere de un tratamiento cuidadoso de la figura en cuestión, además que en ningún momento se les pide de

manera explícita que demuestren sus resultados. A continuación mostraremos algunos ejemplos que se prepusieron.

Tabla 1

Ejemplo de problemas propuestos.

Problema		
Enunciado	Figura	Contraejemplo que muestra que $MB \neq CN$
Sea un triángulo $\triangle ABC$ tal que $MP \parallel AC$, $AB \parallel NP$ y P es el punto medio de BC . ¿Son iguales MB y CN ?		

En la Tabla 1 se muestra un ejemplo de los distintos problemas planteados en el instrumento de investigación. El problema consiste en determinar la igualdad de los lados MB y CN en un triángulo cualquiera. Un estudiante con bases esencialmente visuales puede afirmar que los lados son iguales, ya sea que se base en aspectos meramente visuales o que se apoye en la congruencia cierta de los triángulos MBP y NPC y confunda los lados MB y CN como lados homólogos de triángulos congruentes, de esta manera infiera incorrectamente la conclusión.

Luego de una discusión podemos trabajar este problema con dos tipos de confrontaciones. La primera surge cuando el estudiante asume que se trata de un caso particular, esto es, de una proposición que se refiere a un triángulo equilátero, lo que provoca la ilusión de la igualdad de los lados contrapuesta con la proposición establecida al inicio que es de carácter general, lo que induce a un conflicto conceptual. La segunda manera de abordar la confrontación se apoya en la exhibición de un contraejemplo, el que se muestra en la Tabla 1, lo que nos lleva a revisar también el dominio de validación de la proposición original.

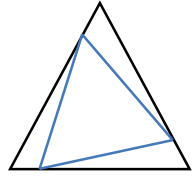
Para una fase posterior a este reporte de investigación, una segunda etapa del problema consistiría en cuestionar al estudiante en cuáles casos o condiciones son necesarias para que se mantenga la igualdad de los segmentos MB y CN . De esta manera iniciamos el proceso de sobrepasar la controversia surgida del planteamiento inicial.

Consideramos que al ser resuelto la situación de conflicto puede provocar ciertas transformaciones en el estudiante, en particular en la forma de construir su conocimiento. Por una parte, la fuente de evidencia que parte de la figura es fácilmente confrontada, debido a que lo que tenemos frente a nosotros es sólo un ejemplo de una categoría de posibles ejemplos asociados a la proposición, por ello los atractivos visuales que en ocasiones presentan información adicional a la hipótesis son puestos en duda, surgiendo una nueva necesidad de explicaciones sobre la validez del enunciado. Esto puede ser resuelto a través de la búsqueda de diversos ejemplos en donde la proposición se verifique o se contradiga, lo que da a la figura una nueva función como un medio de exploración a través de la construcción de ejemplos para la plausibilidad o la refutación de enunciados.

Por otra parte, otro tipo de problemas planteados es el mostrado en la tabla 2.

Tabla 2

Otro tipo de problemas propuestos.

Problema:	Figura	Cuestionamientos generales
¿Es posible inscribir un triángulo equilátero dentro de otro triángulo equilátero?		¿Existe tal triángulo equilátero inscrito? ¿Es único el triángulo equilátero inscrito? Determinar una forma general de obtener tal triángulo equilátero inscrito.

La actividad se realizó en parejas, la situación planteada en general consistió en involucrar a los estudiantes en determinar si era posible inscribir un triángulo equilátero dentro de otro triángulo equilátero. En este problema se buscaba explorar las distintas estrategias de solución, fomentar los razonamientos inductivos, abductivos y deductivos, determinar el nivel de generalización de las respuestas y confrontar la generalidad de los enunciados que se mantenían.

Después de este problema en parejas se buscó confrontar las ideas de los distintos equipos a través de una discusión grupal. En esta discusión se buscó también establecer un modelo de acción genérico sobre la figura. En este caso se refería a construir una figura localizando puntos sobre los lados de la figura original a una distancia igual sobre cada lado, de manera que uniendo los puntos marcados teníamos una figura que era del mismo tipo que la figura original, esto con el fin de fomentar la búsqueda de las propiedades estructurales de las figuras geométricas.

Por último, se plantearon problemas análogos al del triángulo equilátero pero ahora en el caso del triángulo isósceles y el cuadrado, en los cuales se ponía en juego el modelo de acción genérico propuesto en la discusión. Esta situación es muy rica en los estudiantes ya que no tienen familiaridad con este tipo de propuestas y les provoca un conflicto la funcionalidad del modelo que sirve sólo para cierto tipo de figuras como el triángulo equilátero o el cuadrado, pero falla en el triángulo isósceles a pesar de que si es posible inscribir un triángulo isósceles dentro de otro triángulo isósceles.

Resultados y discusión

El análisis de resultados se llevó a cabo de manera cualitativa observando el desempeño de los seis estudiantes al resolver las tareas, enseguida se comentan los resultados de manera general.

En el primer momento, en lo relativo a las preferencias y formas de proceder respecto a las figuras geométricas de los estudiantes en situaciones de validación, se obtuvieron los siguientes resultados:

- Los estudiantes conseguían realizar cierta manipulación sobre la figura. Por ejemplo: establecían trazos auxiliares e incluso realizaban ciertas reconfiguraciones sobre la figura. Sin embargo, su respuesta se apoyaba en las propiedades ostensivas de la misma.
- Los estudiantes recurrían al análisis de casos específicos para validar su respuesta. Por ejemplo, al análisis de las propiedades ostensivas del ejemplo prototipo.
- Los estudiantes lograban constituir una cadena deductiva de argumentos, sin embargo, en ocasiones se apoyaban de propiedades ostensivas de la figura.
- A pesar que los estudiantes construyeron ciertas cadenas deductivas, en algunos problemas no fueron capaces de distinguir el estatus sobre el contenido de las proposiciones.

A continuación explicamos el último punto. Se les hicieron las siguientes preguntas a los estudiantes: ¿Las diagonales de un rombo son siempre segmentos perpendiculares? ¿Siempre que trazamos segmentos perpendiculares obtenemos un rombo al unir los puntos de los segmentos?

Ningún estudiante se dio cuenta que se trataban de preguntas diferentes y todos contestaron ambas como ciertas, debido a que sólo se basaron en el contenido de las proposiciones para apoyar sus respuestas y no en el estatus de las proposiciones dentro de cada pregunta. En la Figura 1 mostramos lo relativo a este problema.

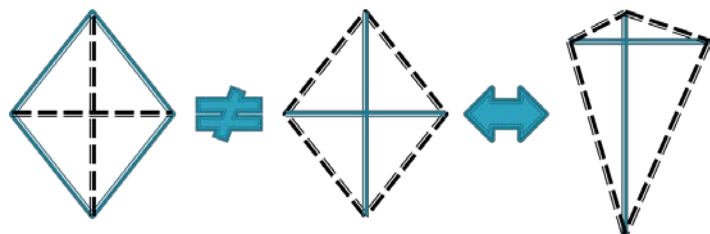


Figura 1. No distinguieron el estatus operativo de las proposiciones.

A continuación se muestran los resultados que se obtuvieron en el segundo momento.

Los estudiantes al enfrentarse al conflicto cognitivo anteponían propiedades ostensivas sobre las propiedades matemáticas y en ocasiones evadían al conflicto debido, entre otras cosas, a que es inusual tanto la situación como la expectativa de que sea resuelta por ellos. Sin embargo, durante los distintos problemas que presentaban conflicto cognitivo, se pudo observar que algunos alumnos comenzaron a realizar nuevas manipulaciones a las figuras, por ejemplo se realizaban variaciones.

En el problema del triángulo equilátero (ver Tabla 2) se presentó un conflicto de controversia entre dos estudiantes con respecto a la pertinencia del uso del razonamiento abductivo como un método de descubrimiento para resolver el problema. La actitud de uno de los estudiantes fue de rechazo hacia el razonamiento abductivo, argumentando que no era posible suponer algo que no se tiene en las hipótesis, debido, probablemente, a lo visto por ellos en clase donde se establece que nunca se debe suponer la tesis en los procesos de demostración. Ellos no lograron ponerse de acuerdo y abandonaron el razonamiento abductivo, prefiriendo el análisis de casos específicos.

En el mismo problema del triángulo equilátero, se observó que el análisis de ejemplos en específico ya no fue suficiente para validar sus respuestas. Por ejemplo, una pareja de estudiantes logró abstraer el modelo de acción que se iba a proponer posteriormente. Lo hicieron a través del análisis de triángulos inscritos en concreto, como lo fue el triángulo de los puntos medios, después validaron sus resultados a través del razonamiento deductivo.

El caso del modelo de acción propuesto, funcionó como experiencia para el cambio de la credibilidad de los estudiantes sobre la figura, debido a que provocó un conflicto ya que no podía ser generalizado en las distintas figuras, el cual ellos trataron de superar a través de la búsqueda de propiedades estructurales de la figura y no sólo en aspectos ostensivos.

Por último, durante la discusión grupal de los problemas, los participantes tomaron conciencia del conflicto que les provocaba apoyar sus supuestos en aspectos ostensivos y su atención se dirigió a una búsqueda de las propiedades estructurales de la figura. Sin embargo, en esta etapa y en las anteriores tuvieron dificultad para lograr organizar discursivamente pruebas deductivas.

Conclusiones

De manera general, se observó que los estudiantes no sienten la necesidad de establecer pruebas deductivas para resolver problemas geométricos en problemas en donde no se les pide explícitamente una demostración. En cambio ellos consideran como suficiente pruebas que se apoyen en razonamientos inductivos y basadas en aspectos ostensivos de la figura.

Las situaciones de conflicto presentadas en este trabajo contribuyeron a establecer un cambio de la credibilidad del estudiante sobre la figura, pasaron de considerarla como un medio de validación absoluta a ser un medio heurístico de trabajo. De esta manera, observamos que el conflicto cognitivo da indicios de lograr un desarrollo de la racionalidad del estudiante que se refleja en las acciones, los argumentos y las decisiones de los alumnos que tienen que ver con los procesos de prueba. Sin embargo, esto no ocurre de manera automática sino que depende de: (1) La aceptación del conflicto y (2) La forma como se resuelve éste.

Por otra parte, queda planteada la necesidad a futuro la investigación de si el conflicto cognitivo contribuye a desarrollar una transición de la argumentación a la demostración, proceso que implica no solo elegir la información relevante de una representación gráfica de soporte sino la organización deductiva de las proposiciones en juego. También deben ser consideradas las distintas situaciones que dan origen a los conflictos cognitivos.

Referencias y bibliografía

- Alibert, D., & Thomas, M. (1991). Research on mathematical proof. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 215-230). The Netherlands: Kluwer.
- Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en alumnos de matemáticas*. Bogotá: Una Empresa Docente.
- Bell, A. (1976). A study of pupils' proof- explanations in mathematics situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7, 23-40.
- Chazan, D. (1993). High School Geometry Students' Justification for their Views of Empirical Evidence and Mathematical Proof. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 359-387.
- Duval, R. (2002). Proof understanding in mathematics: What ways for students. En *Proceedings of the 2002 International Conference on Mathematics: Understanding Proving and Proving to Understand* (pp. 23-44). Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in learning of mathematics. *Educational studies in mathematics*, 62, 103-131.
- Duval, R. (2007). Cognitive functioning and the understanding of mathematical processes of proof. En P. Boero (Ed.), *Theorems in school: From history, epistemology and cognition to classroom practice* (pp. 137-162). Rotterdam: Sense publishers.
- Fischbein, E., & Kedem, I. (1982). Proof and Certitude in the Development of Mathematical Thinking. En A. Vermandel (Ed.), *Proceedings of the Sixth International Conference on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 128-31). Antwerp, Belgium.
- Hadas, N., & Hershkowitz, R. (1999). The role of uncertainty in constructing and proving in computerized environment. *Proceedings of the 23th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 3-57).
- Hadas, N., & Hershkowitz, R. (2002). Activity analyses at the service of task design. En *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 49-56).

- Hadas, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. B. (2000). The role of contradiction and uncertainty in promoting the need to prove in dynamic geometry environments. *Educational studies in Mathematics*, 44(1-2), 127-150.
- Hadas, N., Hershkowitz, R., & Schwarz, B. B. (2002). Analyses of activity design in geometry in the light of student actions. *Canadian Journal of Math, Science & Technology Education*, 2(4), 529-552.
- Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. *Second handbook of research on mathematics teaching and learning*, 2, 805-842.
- Johnson, D. W. & Johnson, R. T. (2009). Energizing learning: The instructional power of conflict. *Educational Researcher*, 38(1), 37-51.
- Marrades, R., & Gutiérrez, Á. (2000). Proofs produced by secondary school students learning geometry in a dynamic computer environment. *Educational studies in mathematics*, 44(1-2), 87-125.
- Mesquita, A. (1998). On conceptual obstacles linked with external representation in geometry. *Journal of mathematical behavior*, 17(2), 183-195.
- Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed? *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 23-41.
- Prusak, N., Hershkowitz R. & Schwarz. (2011). From visual reasoning to logical necessity through argumentative design, *Educational Studies in Mathematics*, published on line 23 de junio de 2011.
- Radford, L. (2006). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática educativa*, 9(Número especial), 103-129.
- Stylianides, A. J., & Stylianides, G. J. (2008). "Cognitive conflict" as a mechanism for supporting developmental progressions in students' knowledge about proof. Artículo disponible en la página web Del 11th International Congress on Mathematical Education, under Topic Study Group 18 (<http://tsg.icme11.org/tsg/show/19>). Monterrey, México.
- Stylianides, G. J., & Stylianides, A. J. (2009). Facilitating the transition from empirical arguments to proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40(3), 314-352.
- Vinner, S. (1983). The notion of proof—some aspects of students' views at the senior high level. En *Proceedings of the Seventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 289-294).
- Zaslavsky, O. (2005). Seizing the opportunity to create uncertainty in learning mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 60, 297-321.
- Zazkis, R., & Chernoff, E. J. (2008). What makes a counterexample exemplary? *Educational Studies in Mathematics*, 68, 195-208.

Producción de conocimiento geométrico de un colectivo – con – doblado de papel: el caso de la trisección de un ángulo

Zaida Margot **Santa** Ramírez

Facultad de Educación, Universidad de Antioquia

Colombia

zaida.santa@udea.edu.co

Carlos Mario **Jaramillo** López

Instituto de Matemáticas, Universidad de Antioquia

Colombia

carlos.jaramillo1@udea.edu.co

Resumen

El presente artículo¹ es resultado de una investigación en curso, la cual, a través de un diseño experimental cualitativo, pretende analizar cómo generar procesos de producción de conocimiento geométrico en un colectivo de maestros – con – doblado de papel, que aporten a su desarrollo profesional docente. Para ello, se expone un ejemplo de una actividad de formación relacionada con la trisección de un ángulo, mediante el doblado de papel, que posibilite la interacción de los maestros del colectivo para propiciar procesos de producción de conocimiento geométrico direccionados tanto al conocimiento disciplinar de la geometría, como al conocimiento de su enseñanza. Por lo tanto, se espera que, a través de construcciones con doblado de papel, el colectivo de maestros pueda discutir asuntos de la geometría al relacionarlos directamente con su práctica docente.

Palabras clave: producción de conocimiento, doblado de papel, *Humanos-con-medios*, colectivo de maestros, geometría.

Introducción

Nuestra experiencia docente e investigativa en programas de formación inicial o continuada de maestros de las regiones del departamento de Antioquia, nos permite evidenciar algunas dificultades relacionadas, en primer lugar, con el conocimiento disciplinar de la geometría y, en segundo lugar, con el conocimiento de su enseñanza. Lo anterior, junto con la poca literatura encontrada hasta el momento sobre el estudio de los procesos de producción de conocimiento que se generan en colectivos de maestros, nos llevó a plantear este trabajo de investigación, el cual, pretende analizar y describir los procesos de producción de conocimiento geométrico que emergen de un colectivo de maestros – con – doblado de papel.

¹Este artículo se deriva del estudio: *Producción de conocimiento geométrico de un colectivo de “maestros-con-doblado de papel”*, que actualmente se lleva cabo en el marco del programa de Doctorado en Educación, línea de Educación Matemática, de la Universidad de Antioquia. Además, hace parte del macro proyecto CAPES-COLCIENCIAS, cuyo código es 111562838729, desarrollado entre la UNESP (Brasil) y la UdeA (Colombia).

Por consiguiente, el planteamiento del problema contempla el análisis de algunos antecedentes concernientes a la geometría del doblado de papel, su axiomática y una aplicación específica, que es la trisección de un ángulo; adicionalmente, se discuten algunas dificultades que se han evidenciado en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría, basados en la revisión del estado del arte. El marco teórico que fundamenta el estudio, aborda algunas ideas del constructo teórico *Humanos-con-medios* de Borba y Villarreal (2005), dado que se ha percibido que la producción de conocimiento está mediada por las interacciones de un colectivo de humanos – con – medios, que en este caso, sería un colectivo de maestros – con – doblado de papel. Finalmente, se fundamenta el uso de una metodología cualitativa, que se consolida en un diseño de tipo experimental a través de unas tareas de formación, de las cuales se presenta una como ejemplo concreto del estudio.

Planteamiento del problema

Antecedentes

Doblado de papel. De acuerdo con Santa y Jaramillo (2013), un colectivo de maestros con una pieza de papel, puede hacer construcciones tan precisas como las elaboradas con regla y compás; de hecho, con base en estas, puede experimentar, visualizar, formular conjeturas, justificar procedimientos, comprender conceptos e, incluso, hacer demostraciones.

En esta perspectiva, Santa y Jaramillo (2010) afirman que:

...el doblado de papel se ha venido consolidando como una alternativa para mejorar el razonamiento en el área de la Geometría, debido principalmente a su carácter visual y experimental, que le permite al estudiante no sólo manipular una hoja de papel para hacer unos dobleces determinados, sino también para visualizar algunos conceptos geométricos, además, justificar de manera formal las construcciones elaboradas, usando un sistema axiomático (p. 340).

En la revisión de la literatura, encontramos muchos autores que justifican el uso del doblado de papel en la construcción, análisis y comprensión de conceptos geométricos. Royo (2002), por ejemplo, concluye que: “el ejercicio de doblar papel se puede usar con fines pedagógicos para estudiar e ilustrar la geometría elemental plana. La clave radica en interpretar geométricamente qué se está haciendo cuando se dobla el papel” (p. 186). En esta línea, Geretschlager (1995), también precisa que:

La conexión entre geometría y origami se hace muy notoria y muy obvia. Para muchas personas, el origami termina convirtiéndose en un simple arte, mientras que para otras (como el educador alemán Friedrich Fröbel) el origami se puede utilizar para enseñar formas elementales geométricas (p. 357).

Adicionalmente, en el Primer Encuentro Internacional de Origami, Ciencia y Tecnología, llevado a cabo en el año 1989, el ítal japonés Humiaki Huzita expuso seis axiomas para la geometría del doblado de papel, en correspondencia con algunos axiomas de la geometría euclidiana y algunos hechos de la geometría analítica o el cálculo diferencial. De acuerdo con Lang (1996 – 2010), el japonés Koshiro Hatori presentó, en el año 2003, un séptimo axioma y, desde entonces, se denominaron Axiomas de Huzita – Hatori. Sin embargo, también se ha encontrado la denominación Axiomas de Huzita – Justin, debido a que aún está en duda la presentación de dicho axioma por parte de Hatori (Lang, 1996 - 2010), y se le atribuye a Jacques Justin, en el año 1989.

Santa y Jaramillo (2010) intentaron presentar la geometría del doblado de papel como un sistema axiomático. Sin embargo, este hecho no fue posible, dado que la característica de suficiencia no está completa aún, pues no se han desarrollado todavía teoremas para este tipo de geometría. Lo que sí se ha logrado, es una demostración de la completitud de los axiomas, por parte de Lang (1996 – 2010). Teniendo en cuenta su traducción original (Lang, 1996 – 2010) en Santa y Jaramillo (2010), estos axiomas se enuncian de la siguiente manera:

“Axioma 1: Dados dos puntos P_1 y P_2 , se puede hacer un doblado que pasa a través de ellos” (p. 343).

“Axioma 2: Dados dos puntos P_1 y P_2 , se puede hacer un doblado que lleva a P_1 sobre P_2 ” (p. 343).

“Axioma 3: Dadas dos líneas l_1 y l_2 , se puede hacer un doblado que pone a l_1 sobre l_2 ” (p. 344).

“Axioma 4: Dado un punto P_1 y una línea l_1 , se puede hacer un doblado que pone a l_1 sobre sí misma y pasa por P_1 ” (p. 345).

“Axioma 5: Dados dos puntos P_1 y P_2 y una línea l_1 , se puede hacer un doblado que pone a P_1 sobre l_1 y pasa por P_2 ” (p. 346).

“Axioma 6: Dados dos puntos P_1 y P_2 y dos líneas l_1 y l_2 , se puede hacer un doblado que pone a P_1 sobre l_1 y a P_2 sobre l_2 ” (p. 346).

“Axioma 7: Dados un punto P_1 y dos líneas l_1 y l_2 , se puede hacer un doblado perpendicular a l_2 que ponga el punto P_1 sobre la línea l_1 ” (p. 349).

Trisección de un ángulo. Un problema clásico de la geometría planteado desde la antigüedad y que actualmente sigue siendo motivo de discusión, es la trisección de un ángulo a partir de las condiciones establecidas por los griegos: con una regla no graduada y un compás. Muchos matemáticos, a través de la historia, se han interesado por solucionar este problema; sin tener en cuenta dichas condiciones, han encontrado soluciones alternativas e ingeniosas. Arquímedes, por ejemplo, ideó, mostró y demostró de una manera particular, una forma de dividir un ángulo en tres partes iguales. El sofista Hipias de Elis, con una curva auxiliar a la que llamó cuadratriz (De Andrés, 2003 - 2004), logró también mostrar una solución al famoso problema. Es posible encontrar otros métodos poco convencionales como el de Hachuela o Tomahawk (Isaacs, 2002) y la construcción que se obtiene con el doblado de papel.

Este último método permite trisecar ángulos agudos y el ángulo recto, además constituye una técnica eficaz y asequible, pues solo requiere una hoja de papel de forma rectangular. La construcción que se obtiene mediante el doblado de papel podría permitir interacciones del colectivo de maestros, de tal manera que se posibiliten análisis y discusiones alrededor de los dobleces construidos y su justificación mediante la axiomática de Huzita – Hatori, lo que podría generar procesos de producción de conocimiento geométrico. Por lo tanto, el uso de este método constituye una de las tareas de formación a utilizar durante el estudio.

Pregunta de investigación

La geometría puede considerarse como un conocimiento intuitivo y cercano a los contextos de los estudiantes, previo a su etapa formal. Tal característica debería ser usada para facilitar procesos de enseñanza y aprendizaje de la misma. Sin embargo, normalmente, la geometría se

percibe como un cuerpo formal de conocimientos, donde se privilegia la demostración, por encima de cualquier otro proceso, como la visualización y la experimentación.

Por otro lado, nuestra experiencia docente tanto en programas de formación continua de maestros, como en formación inicial, nos permite afirmar que algunos maestros de las regiones del departamento de Antioquia, tienen dificultades para aprender, recordar, usar o comprender conceptos geométricos. De hecho, algunos de nuestros estudios investigativos (Santa, 2011; Santa y Jaramillo, 2013) y el trabajo directo con maestros, en talleres a nivel local o nacional, nos posibilitó evidenciar esta problemática con casos concretos, por ejemplo, desconocimiento de la palabra lugar geométrico (Santa y Jaramillo, 2013), dificultades en la clasificación de los cuadriláteros o considerar que un triángulo isósceles es aquel que tiene dos lados iguales y un tercer lado desigual a los anteriores.

Adicionalmente, la misma revisión de la literatura y la experiencia docente, nos llevó a plantear que los procesos de producción de conocimiento geométrico en un colectivo particular, como el de la presente investigación, no son claros ni se han develado todavía. Lo anterior se constituye en una tercera dificultad para el estudio.

Por lo tanto, para intentar resolver las problemáticas mencionadas en párrafos anteriores, surge el doblado de papel como una estrategia que podría aportar a una parte de la solución de dichas situaciones, dado que podría mejorar el proceso de razonamiento en geometría, es decir, le puede permitir al maestro en formación o maestro en ejercicio, dentro de un colectivo: “hacer construcciones, verificarlas, visualizarlas, lanzar conjeturas, discutir las, analizarlas y finalmente, probarlas” (Santa y Jaramillo, 2013, p. 5). Lo que implica que la visualización de construcciones hechas mediante el doblado, puede posibilitar procesos de producción de conocimiento geométrico en un colectivo de maestros; sin embargo, estos procesos aún no se han caracterizado. De esta manera, con el estudio se pretende responder la pregunta de investigación ¿cómo generar procesos de producción de conocimiento geométrico en un colectivo de maestros – con – doblado de papel, que aporten a su desarrollo profesional docente?

Marco teórico

Constructo teórico *Humanos-con-medios*

Humanos-con-medios es un constructo teórico desarrollado por Marcelo Borba y Mónica Villarreal, en el que discuten que el conocimiento matemático es el resultado de una construcción hecha por un grupo de personas pensantes con determinados medios. En este sentido, se basa en dos pilares principales: el primero, es que “la cognición no es un trabajo individual sino más bien de naturaleza colectiva” (Villa-Ochoa y Ruiz, 2010, p. 518) y, el segundo, que la construcción del conocimiento incluye “herramientas, dispositivos, artefactos y medios” (p. 518). Por lo tanto, Borba y Villarreal (2005) precisan que el uso de diferentes tipos de medios puede conducir a la producción de diferentes tipos de conocimientos en colectivos diferentes.

El constructo teórico considera dos aspectos fundamentales, la experimentación y la visualización, que podrían permitir la reorganización del pensamiento al introducir cambios en la naturaleza del conocimiento generado. Borba y Villarreal (2005) afirman que la tecnología tiene un papel primordial en relación al uso de experimentos en matemáticas y, en particular, en Educación Matemática. Estudios realizados por algunos investigadores del grupo GPIMEM, han destacado, en diferentes contextos, la importancia de un enfoque de tipo experimental en la

enseñanza de las matemáticas, cuando la tecnología se hace presente (Borba y Villarreal, 2005). Por su parte, los procesos de visualización con tecnologías, de acuerdo con los autores, son importantes porque constituyen una forma alterna de producir conocimiento, dado que se puede dar una transformación de la comprensión al considerar representaciones de tipo visual.

Procesos de experimentación

Borba y Villarreal (2005) establecen que un enfoque experimental en Educación Matemática, trae las siguientes implicaciones:

El uso de procedimientos tentativos y ensayos direccionados que apoyen la generación de conjeturas matemáticas; el descubrimiento de resultados matemáticos previamente desconocidos por el experimentador; la posibilidad de probar formas alternativas de obtener un resultado; la posibilidad de proponer nuevos experimentos; una forma diferente de aprendizaje de las matemáticas (p. 75).

En este orden de ideas, los procesos de experimentación – con – doblado de papel, pueden permitir que el maestro en formación continua, en un colectivo, tenga la posibilidad de usar procedimientos y ensayos para generar conjeturas geométricas, descubrir nuevos resultados o maneras alternas de probar una afirmación, proponer nuevas construcciones que muestren otros hechos geométricos, repetir y perfeccionar sus construcciones, obtener representaciones visuales o táctiles en el mosaico de pliegues que generen los dobleces. Como consecuencia, el enfoque experimental – con – doblado de papel, propicia una nueva forma de producción de conocimiento, que se genera y valida al interior del colectivo de maestros – con – doblado de papel.

Procesos de visualización

En el presente estudio, se considerará la visualización como ese camino entre las construcciones externas y las internas, es decir, se seguirá la perspectiva de Nemirovsky y Noble (1997, citados por Torroba, Etcheverry y Reid, 2009), quienes observan que la visualización “no se restringe ni a la mente ni a los medios externos (papel, computadora, etc.), sino más bien [la] definen [...] como un medio de circulación entre ellos” (p. 5). De acuerdo con Borba y Villarreal (2005), “al ser el constructo teórico *Humanos-con-medios* asumido como una unidad, la separación entre lo interno y externo no tiene sentido, pues dicha dicotomía carece de valor ya que los límites entre ellos no son claros para el ser cognitivo” (Citados por Villa-Ochoa y Ruiz, 2010, p. 519). Igualmente, estos autores afirman que no ven una dicotomía entre la visualización interna y externa, dado que están tan íntimamente ligados, que no tiene sentido hablar de una separación.

Teniendo en cuenta las ideas anteriores, la geometría del doblado de papel se podría convertir en un medio que posibilite que un grupo de maestros logre procesos de visualización en las construcciones que se les proponga y, de esta manera, producir conocimiento geométrico. Desde esta perspectiva, el doblado de papel le permite al maestro pasar de un proceso inicial de observar y tocar la figura, a un proceso más complejo, donde puede deducir propiedades de las figuras, relacionarlas, clasificarlas y llegar, incluso, a producir conocimiento. Por lo tanto, la visualización no solo se relacionaría con representaciones de tipo visual, sino también de tipo táctil. Lo que llevaría a una resignificación de dicho proceso, que sería uno de los posibles resultados de este estudio.

Conjeturas visuales. El doblado de papel es un medio que permite que los maestros puedan experimentar a través de construcciones de figuras con diferentes dobleces. La visualización sobre las figuras elaboradas, puede permitir la afirmación de diferentes conjeturas visuales, que pueden ser interpretadas, analizadas y debatidas en el colectivo, con el ánimo de llegar a una primera validación, mediante una prueba visual. Ahora, el proceso no necesariamente es lineal. De la experimentación, los maestros pueden generar conjeturas visuales, o pueden iniciar debates o, incluso, pruebas visuales. De la misma manera ocurre con los demás procesos, tal y como lo intentamos ilustrar en la figura 1.

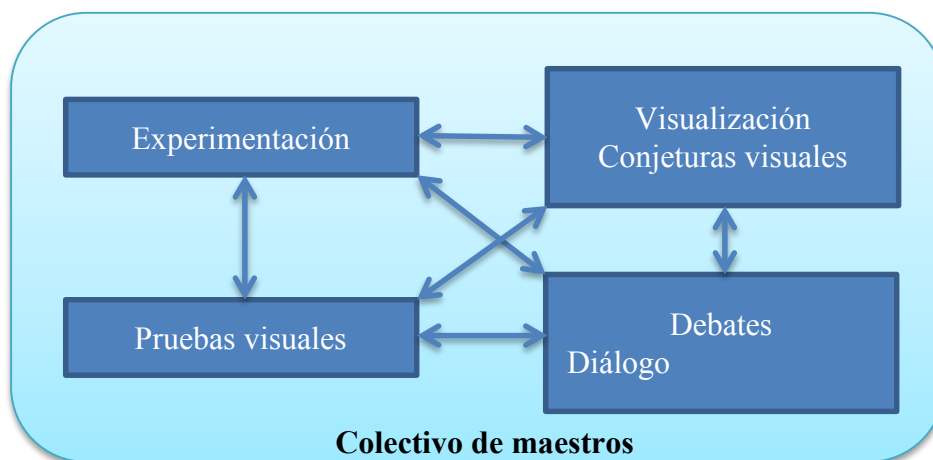


Figura 1. Generación y validación de una conjetura visual.

Metodología

Diseño

Considerando que el objetivo general de la presente investigación es analizar cómo se generan procesos de producción de conocimiento geométrico, en un colectivo de maestros – con – doblado de papel, que aporten a su desarrollo profesional docente, entonces el paradigma que la orienta debe ser de corte cualitativo. Esto se debe principalmente a que se interpretará un fenómeno de tipo social (interacciones entre las personas y los medios) que “no sigue un proceso claramente definido” (Hernández, Fernández y Baptista, 2006, p. 8). Es decir, no es una investigación lineal en la que por ejemplo, los resultados están subordinados a la teoría o a las preguntas hechas, sino en un sentido de constitución mutua, donde se genera una interacción entre preguntas, visión del conocimiento, metodología, procedimientos, análisis y resultados. Además, de acuerdo con Borba (2012), conocer es un esfuerzo humano que tiene un componente subjetivo y, por lo tanto, los aspectos relacionados con esta acción deben ser representados por una investigación de tipo cualitativo, donde se usen técnicas como la triangulación de métodos o la revisión de pares, de tal manera que refleje y considere diferentes posibles interpretaciones de la información.

Por otro lado, el doblado de papel podría convertirse en un medio articulador entre el constructo teórico *Humanos-con-medios* y las ideas de desarrollo profesional docente de Ponte (2012), dado que posibilitaría la generación de procesos de producción de conocimiento que emergen de un colectivo – con – doblado de papel, que pueden permear y consolidar el desarrollo profesional de cada uno de los maestros del mencionado colectivo. Para ello, el proceso investigativo propuesto es: diseño y revisión de actividades o tareas de formación con

doblado de papel; generación de procesos de producción de conocimiento al interior del colectivo, considerando tanto aspectos disciplinares de la geometría, como el análisis de su enseñanza; diseño, evaluación y puesta en marcha de actividades para y con los estudiantes. Por lo tanto, el diseño metodológico que guiará este estudio será un diseño experimental.

Participantes

La investigación pretende caracterizar un colectivo particular de maestros en formación continua que posee un interés marcado en la producción de conocimiento geométrico, que puede generarse mediante el doblado de papel. En este orden de ideas y, considerando que el estudio está centrado en la formación continua de maestros, se propone un seminario en un programa de maestría, en el que se puedan analizar las interacciones del colectivo de maestros – con – doblado de papel, además, contemplar la posibilidad de generar, evaluar y poner en práctica estrategias metodológicas para el uso del doblado de papel en las aulas de clase.

Se invitan a los maestros a participar del trabajo investigativo de manera voluntaria, siempre y cuando manifiesten tener un interés importante en la producción de conocimiento geométrico mediante el doblado de papel. De acuerdo con lo anterior, se pretende invitar maestros de primaria, de secundaria o de universidad, de las regiones del departamento de Antioquia, que estén motivados por fundamentar sus conocimientos sobre la geometría del doblado de papel, sobre su enseñanza y, en general, por modificar, descubrir o valorar su desarrollo profesional docente.

Ruta metodológica

Con el estudio se busca que los procesos de producción de conocimiento geométrico, direccionados hacia el desarrollo profesional docente, se logren a través de las interacciones de un colectivo de maestros – con – doblado de papel. Por lo tanto, se tiene previsto llevar a cabo la siguiente ruta metodológica:

- Conformación del colectivo de maestros. En este caso, serían los maestros en formación continua que acepten ser parte del seminario del programa de maestría.
- Interacción del colectivo a través de actividades o tareas de formación que involucren el doblado de papel y su axiomática.
- Entrevistas grupales e individuales, que permitan caracterizar la producción de conocimiento geométrico, direccionado hacia el desarrollo profesional docente.
- Diseño y puesta en marcha de actividades, en las que la producción de conocimiento esté mediada por el doblado de papel y se oriente al desarrollo profesional docente.

Ejemplo de una actividad de formación

A continuación se presentará una de las actividades de formación propuestas en este estudio, con la que se busca posibilitar procesos de producción de conocimiento geométrico a través de un colectivo de maestros, mediante la construcción de la trisección de un ángulo agudo. Los objetivos específicos que se pretenden alcanzar con la actividad, son:

- Analizar los conceptos geométricos inmersos en la construcción de la trisección de un ángulo agudo.

- Discutir, de manera colectiva, los conceptos geométricos inmersos en la construcción de la trisección de un ángulo agudo
- Deducir algunos axiomas de la geometría del doblado de papel en la construcción de la trisección de un ángulo agudo.
- Reflexionar sobre la generación de estrategias pedagógicas que permitan la construcción de la trisección de un ángulo agudo, en el aula de clase.

Construcción. Los pasos para la construcción, se exponen en los siguientes apartados.

1. Tome una hoja de papel de forma rectangular, llámela $ABCD$ y elija uno de sus ángulos rectos como referencia. Sea $\angle A$ el ángulo elegido. Forme en él un ángulo agudo haciendo un doblez $\overline{AN}$.
2. Remárquelo bien y desdoble nuevamente. Sea el ángulo agudo $\angle DAN$ el ángulo a trisecar. Tenga en cuenta que este está formado por el doblez que ha hecho y uno de los lados del ángulo recto que tomó de referencia.
3. Haga un doblez paralelo a $\overline{AD}$. Llámelo $\overline{ML}$ y desdoble. Se recomienda que la distancia de este doblez a $\overline{AD}$ sea un poco menor que la mitad de la medida de $\overline{AB}$.
4. Ponga $\overline{AD}$ sobre $\overline{ML}$ para formar una nueva paralela $\overline{PQ}$ que sea equidistante de las dos anteriores.
5. Ahora, realice un doblez tal que, al deslizar el punto A del ángulo de referencia sobre la paralela $\overline{PQ}$, el punto M coincida con el doblez $\overline{AN}$ que hizo para formar el ángulo agudo. Nómbrelo $\overline{ZJ}$.
6. Observe que ha hecho una simetría y la parte que ha doblado es un triángulo rectángulo ($\triangle ZAJ$). El doblez $\overline{ZJ}$ se corta con las paralelas $\overline{PQ}$ y $\overline{ML}$. Al punto donde se corta $\overline{PQ}$ con $\overline{ZJ}$ llámelo F . Encuentre la mediatriz $\overline{GH}$ del segmento $\overline{ZE}$. Tenga en cuenta que esta mediatriz se intercepta con el lado del rectángulo CD en el punto H . Desdoble; es claro que A pertenece a la prolongación del segmento $\overline{GH}$.

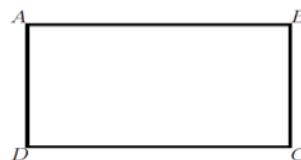


Figura 2. Paso 1.

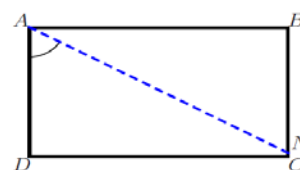


Figura 3. Paso 2.

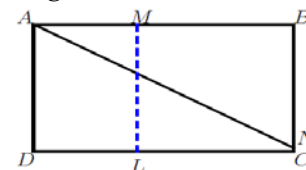


Figura 4. Paso 3.

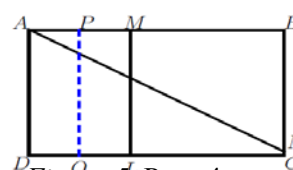


Figura 5. Paso 4.

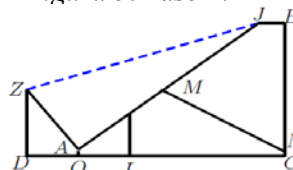


Figura 6. Paso 5.

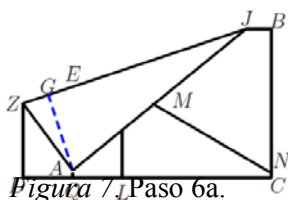


Figura 7. Paso 6a.

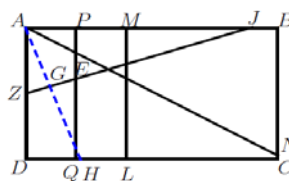
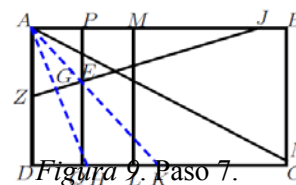


Figura 8. Paso 6b.

7. Finalmente, encuentre la bisectriz $\overline{AK}$ del ángulo $\angle HAN$. De esta manera, queda dividido el ángulo agudo $\angle DAN$ en tres ángulos iguales $\angle DAH$, $\angle HAK$ y $\angle KAN$.



Axiomas de la Geometría del doblado de papel. Después de realizada la construcción con doblado de papel, se proponen las siguientes actividades:

1. Analizar las implicaciones geométricas euclidianas de cada uno de los pasos. Para ello, en subgrupos de tres maestros, diligenciar la siguiente tabla:

Tabla 1

Implicaciones geométricas en la construcción de la trisección de un ángulo.

Doble realizado	Implicaciones geométricas
Paso 1	
Paso 2	
...	

Para lograrlo, se les proporciona a los maestros el siguiente aporte de información:

Pueden tomarse como verdaderas algunas proposiciones del doblado de papel, cuando se hacen diferentes combinaciones entre puntos y dobleces.

2. Hacer una lista de proposiciones que consideren verdaderas, con respecto al doblado de papel, de acuerdo con la construcción realizada anteriormente.
3. Socialización y discusión de las proposiciones.

Análisis geométrico. Posterior al análisis de la axiomática del doblado de papel, se les propone a los maestros las siguientes acciones:

1. Si tuvieran que realizar una prueba de la anterior construcción, ¿con qué hipótesis iniciarían?
2. En equipos de tres maestros, probar que el ángulo $\angle DAN$ queda dividido en tres ángulos iguales, de acuerdo con la construcción mediante el doblado de papel.
3. Un representante de cada equipo presenta su prueba.
4. Discusión de las pruebas y de los conceptos geométricos inmersos en la construcción.

Construcción de Arquímedes. Después del análisis geométrico de la construcción, se les presenta a los maestros la siguiente información y algunas preguntas asociadas:

Entre los aportes a las ciencias, Arquímedes (287 - 212 a.C.) diseñó un método fácil e interesante para trisecar cualquier tipo de ángulo. Sin embargo, su ingeniosa construcción no resuelve el problema de trisección con compás y regla no graduada, pues se vale de dos marcas en esta para trasladar una distancia determinada.

Sea $m(\angle AOB) = x$ el ángulo dado. Se traza por el vértice O una circunferencia de radio r . Se prolonga el segmento $\overline{AO}$ del ángulo inicial y por B se traza una secante

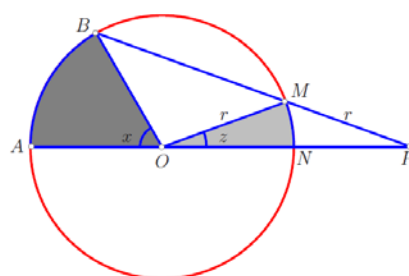


Figura 10. Trisección de Arquímedes.

hasta un punto P (que pertenece a la prolongación) que corte a la circunferencia en el punto M , tal que $m(\overline{MP}) = r$ (es necesario una regla graduada para transportar dicha medida). Entonces $m(\angle NOM) = z$ es la tercera parte del ángulo dado.

1. Si tuvieran que hacer una prueba de la anterior construcción, ¿con qué hipótesis iniciarían?
2. En equipos de tres maestros, probar que el ángulo $\angle z$ es la tercera parte del ángulo $\angle x$.
3. Un representante de cada equipo presenta su prueba.
4. Discusión de las pruebas y de los conceptos geométricos inmersos en la construcción.

Relación de la construcción de Arquímedes con la del doblado de papel. Analizada la construcción de Arquímedes, se plantean las siguientes acciones, junto con las preguntas correspondientes, para probar que en la construcción con doblado de papel, se realiza, de manera implícita, la trisección de Arquímedes.

1. En su construcción con doblado de papel, realice los siguientes dobleces auxiliares que se proponen en color azul.

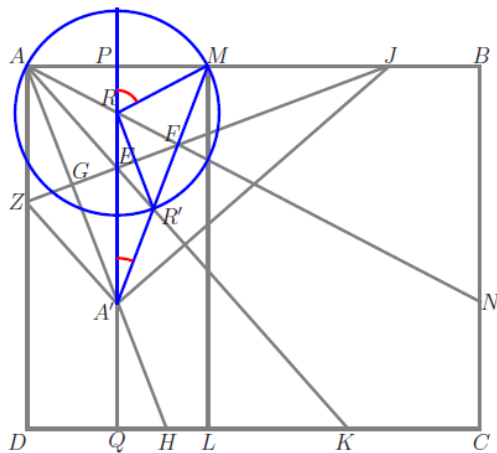


Figura 11. Relación de la trisección del doblado de papel con el método de Arquímedes.

2. ¿Cómo probar que $\angle DAN \cong \angle PRM$, de acuerdo con la construcción?
3. ¿Cómo probar que $\angle PA'R' \cong \angle EAF$, de acuerdo con la construcción?
4. ¿Cómo probar que $\overline{RR'} // \overline{AA'}$, de acuerdo con la construcción?
5. ¿Cómo probar que $\overline{RR'} \cong \overline{A'R'} \cong \overline{AR} \cong \overline{RM}$, de acuerdo con la construcción?
6. ¿Qué se puede concluir al respecto?

Proceso de evaluación. Para finalizar el trabajo con el colectivo de maestros, se dialoga sobre las siguientes preguntas:

1. ¿Qué se aprendió de la actividad?
2. ¿Cómo se aprendió?
3. ¿Las discusiones en el colectivo de maestros contribuyeron con la producción de conocimiento geométrico? ¿Por qué?

4. ¿Qué actividades se podrían diseñar en el aula de clase que permitan que los estudiantes generen procesos de producción de conocimiento geométrico en un colectivo – con – doblado de papel?

Resultados y conclusiones esperadas

Se espera que el colectivo esté conformado por maestros “dispuestos a compartir espontáneamente algo de interés común, pudiendo presentar visiones y entendimientos diferentes sobre los conceptos matemáticos, los saberes didáctico-pedagógicos y experiencias relativas a la enseñanza y al aprendizaje de la matemática” (Fiorentini, 2008, p. 49). En otras palabras, los maestros vinculados al colectivo deben hacerlo por voluntad propia; al interior de este, debe darse un ambiente de apoyo mutuo, espontaneidad, confianza y respeto; debe permitir reflexiones sobre la práctica misma y, en general, sobre el desarrollo profesional docente.

En esta perspectiva, Ponte, Zaslavsky, Silver, et al. (2009), afirman que los maestros aprenden: i) sus conocimientos profesionales (el conocimiento sobre la enseñanza, la didáctica de las matemáticas y el conocimiento de las matemáticas como un área escolar), ii) sus valores profesionales, iii) sobre sus roles profesionales y iv) a desarrollar su identidad, entre otros, en estrecha relación con otros profesores. Por lo tanto, las actividades de formación propuestas al colectivo de maestros – con – doblado de papel, deben garantizar que ellos generen procesos de producción de conocimiento geométrico, que aporten a su desarrollo profesional docente, el cual involucra “el desarrollo progresivo de potencialidades y la construcción de nuevos saberes; está marcado por las dinámicas sociales y colectivas, y depende de las formas de articular intereses, necesidades y recursos del profesorado” (Ponte, 2012, p. 9).

Referencias bibliográficas

- Borba, M., & Villarreal, M. (2005). *Humans-with-Media and the reorganization of Mathematical Thinking*. New York: Springer.
- Borba, M. (2012). Humans-with-media and continuing education for mathematics teachers in online environments. *ZDM Mathematics Education*, 44(6), 801 - 814. Doi: 10.1007/s11858-012-0436-8
- De Andrés, L. (2003 – 2004). De las trisectrices, la cicloide y otras curvas. En *DivulgaMat. Centro Virtual de Divulgación de las Matemáticas*. España: Real Sociedad Matemática Española. Recuperado de http://divulgamat2.ehu.es/divulgamat15/index.php?option=com_content&view=article&id=10884%3Aun-paseo-por-la-geometria&catid=136%3Aacursos-y-ciclos-de-conferencias&Itemid=44&limitstart=9
- Fiorentini, D. (2008). ¿Investigar prácticas colaborativas o investigar colaborativamente? En M. Borba y J. Araújo. (Ed.), *Investigación Cualitativa en Educación Matemática* (pp. 43-72). Balderas, México: Limusa.
- Geretschläger, R. (1995). Euclidean Constructions and the Geometry of Origami. *Mathematics Magazine*, 5, 357 – 371.
- Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2006). *Metodología de la Investigación*. México: McGraw Hill.
- Isaacs, M. (2002). *Geometría universitaria*. México: Thomson Learning.
- Lang, R. (1996 – 2010). *Origami and Geometric Constructions*. Recuperado de http://www.langorigami.com/science/math/hja/origami_constructions.pdf

- Ponte, J. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. In N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática* (pp. 93-98). Barcelona: Graó.
- Ponte, J., Zaslavsky, O., Silver, E., Borba, M., Van den Heuvel-Panhuizen, M., Gal, H., ... Chapman, O. (2009). Tools and Settings Supporting Mathematics Teachers' Learning in and from Practice. R. Even, D. Ball (eds.), *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics* (pp. 185 - 209). United States: Springer. Doi: 10.1007/978-0-387-09601-8 17
- Royo, J. (2002). Matemáticas y papiroflexia. *Sigma: Revista de Matemáticas*, 21, 175 – 192.
- Santa, Z., & Jaramillo, C. (2010). Aplicaciones de la Geometría del doblado de papel a las secciones cónicas. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, (31). Recuperado el 15 de septiembre de 2010, de:
http://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php?option=com_content&task=view&id=169&Itemid=1
- Santa, Z. (2011). *La elipse como lugar geométrico a través de la Geometría del doblado de papel en el contexto de Van Hiele* (Tesis de maestría). Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.
- Santa, Z. , & Jaramillo, C. (2013). Producción de conocimiento geométrico a través de la visualización de construcciones con doblado de papel. En: *Memorias del I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe CEMACYC*. República Dominicana: Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra PUCMM.
- Torroba, E., Etcheverry, E., & Reid, M. (2009). Explorando el Rol de la Visualización en Experiencias de Cátedra. En: *TEyET Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología*, 3, 1 – 7.
- Villa-Ochoa J., & Ruiz M. (2010). Pensamiento variacional: seres-humanos-con-GeoGebra en la visualización de nociones variacionales. En: *Revista Educ. Matem. Pesq.* 12(3), 514 – 528. São Paulo.

Quais as tendências de pesquisa sobre o ensino de Geometria Analítica no período de 1991 à 2007?

Adriana Tiago Castro dos **Santos**
Faculdades Metropolitanas Unidas
Brasil

adriana_larissa.le@hotmail.com

Barbara Lutaif **Bianchini**
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Brasil

barbara@pucsp.br

Resumo

O presente artigo tem como propósito de apresentar um panorama das pesquisas sobre o ensino e aprendizagem da Geometria Analítica no período de 1991 à 2007. Esta pesquisa tem caráter bibliográfico. Foi feito um levantamento bibliográfico em *site* de bibliotecas brasileiras de Universidades. Neste artigo apresentamos os resultados de nossa análise de 10 dissertações de mestrado. Os resultados apontaram que as tendências das pesquisas sobre o ensino da Geometria Analítica foram as pesquisas diagnósticas e que há a preocupação dos pesquisadores em compreender como a aprendizagem ocorre segundo as Teorias de Aprendizagem Cognitivista e o uso das tecnologias da informação. A partir dos dados analisados, podemos inferir que o uso das tecnologias da informação, como uma estratégia de ensino articuladas ao um planejamento das aulas possa fazer com que o aluno construa o seu próprio conhecimento e a compreensão do objeto matemático em estudo.

Palavras chave: Geometria Analítica, Pesquisa Bibliográfica, Ensino Superior, Tendências, Educação Matemática.

O desenvolvimento da Ciência e da Tecnologia desencadeou vários processos de mudanças em nossa sociedade. A Universidade e a escola tem um papel importante em preparar e inserir o profissional no mercado de trabalho para suprir as necessidades dessa sociedade que vive em constante mudança.

Segundo Ferreira (2012), em uma sociedade em constante mudança, competitiva e exigente nos diversos papéis que os cidadãos têm que nela desempenhar, os processos educativos não devem ter como única preocupação conduzir os alunos à aquisição de conhecimentos, mas, sobretudo, ao desenvolvimento de competências necessárias à vida nessa sociedade e ao exercício de uma profissão.

Neste artigo, nos restringiremos aos estudantes que se dedicarão às áreas do conhecimento denominadas no Brasil como áreas de Ciências Exatas.

Para tanto, é necessário que os estudantes que se dedicarão às áreas do conhecimento ligadas às Ciências e Tecnologias, sobretudo à Matemática, devem ter compreender a Álgebra Linear, Cálculo Diferencial e Integral, Análise e a Geometria Analítica, que fazem parte componentes curriculares das Universidades Brasileiras dos cursos das Ciências Exatas (tais

como as Engenharias, Arquitetura, Ciência da Computação, Química, Física e a própria Matemática).

No entanto, resultados de pesquisas apontam que os estudantes dessas áreas não compreendem essas disciplinas, há quem as consideram como “disciplinas problemas” desses cursos, ou seja, são disciplinas com alto índice de reprovação.

Fernandes (1997) em sua pesquisa com alunos dos Cursos de Engenharia Civil Noturnos (ECN) e Engenharia Sanitária (ES) de uma Universidade Particular do Estado de São Paulo, concluiu que os altos índices de reprovação das disciplinas estudadas e a que os alunos são reprovados são: Cálculo Diferencial e Integral B (com 63% na ECN e Álgebra Linear com 57% na ES; em seguida vêm Cálculo Diferencial e Integral A com 61% na ECN e Geometria Analítica e Vetores com 47% na ES; depois vêm Álgebra Linear e Estatística com 49% na ECN.

Com relação à apropriação dos conhecimentos da Geometria Analítica pelos alunos era ou não satisfatória foi realizado um relatório pela *Comissão do projeto das “Disciplinas problema” da Pró-Reitoria de graduação da UNICAMP* de 1997, em que a Geometria Analítica é citada como uma das disciplinas com mais de 35% de reprovação na UNICAMP e na USP. (Di Pinto, 2000, p.5)

Em muitas instituições de ensino superior do Brasil esta disciplina é caracterizada como problema, na UNESP de Rio Claro, a média percentual de reprovação estava em torno de 39% segundo dados do professor da respectiva disciplina no ano de 2004. (Richit, 2005, p. 41)

Mas será que as instituições educacionais e professores estão preparados para enfrentar o desafio de formar este cidadão que atuará na área de Exatas?

Preocupados com esses problemas, pesquisadores da Educação Matemática tem realizado pesquisas com o objetivo de identificar quais são as dificuldades inerentes à Geometria Analítica, quais estratégias que poderão ser utilizadas para minimizar as dificuldades dos estudantes que cursam essa disciplina.

Desta forma, os problemas apontados acima nos levaram aos seguintes questionamentos: O que as pesquisas brasileiras nos mostram sobre a realidade do ensino da Geometria Analítica? Que alternativas de soluções dos problemas foram propostos e ou estudados?

Neste artigo o nosso propósito é apresentar pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem da Geometria Analítica no período de 1991 à 2007, com objetivo de investigar quais contribuições elas trouxeram para a Educação Matemática.

A disciplina de Geometria Analítica no Brasil

Silva (1998) relata em sua pesquisa que a falta de pré-requisitos necessários, ou seja, a não compreensão da Geometria Analítica é um fator prejudicial, quando esse aluno cursar a disciplina de Álgebra Linear, pois dificultará o entendimento e desenvolvimento da linguagem empregada na Álgebra Linear.

Segundo D’Ambrósio (1993), já no século XVIII com o crescimento da indústria e com o objetivo à evolução da ciência e a integração com a indústria, Felix Klein concebia a matemática aplicada como elemento essencial. Defendia também uma preparação uniforme nas escolas secundárias e os conceitos da Geometria Analítica e do Cálculo eram apresentados nessa modalidade de ensino.

D'Ambrósio (1993) relata que esses assuntos eram tratados com padrões de rigor apenas em cursos universitários, na modalidade iniciada nas décadas de 1820 e 1830, por Augustin Cauchy.

A literatura também nos mostra que a Geometria Analítica foi incorporada ao currículo do Ensino Secundário (Ensino Médio) e Superior no Brasil desde o século XVIII.

Segundo Silva (1999) o ensino da Geometria Analítica no Brasil teve a influência das obras do francês Sylvestre Lacroix, professor da Escola Politécnica de Paris, autor de vários livros-texto abrangendo várias áreas da matemática e na qual foram adotados oficialmente nos ginásios, colégios e no ensino universitário da França, em outros países da Europa entre eles na Alemanha.

No Brasil, Lacroix ficou muito conhecido no meio acadêmico. Os membros da junta militar da Real Academia Militar do Rio de Janeiro, responsáveis pela orientação acadêmica dos cursos da referida academia, elegeram os livros-texto de Lacroix como os mais adequados para o ensino, e, por muitos anos, eles foram os mais recomendados e utilizados na escola. A primeira tradução da Geometria Analítica surgiu em 1812 e foi feita por José Victorino de Santos Souza. Além desta tradução existe a de Manoel Ferreira Guimarães (1777-1838), em 1821, e outra obra intitulada *Geometria Analítica* segundo o sistema de Lacroix, de José Saturnino da Costa Pereira (1773-1852) em 1842. (Silva, 1999, p. 82).

Lacroix inspirou-se em Lagrange e Monge para escrever seu livro-texto sobre Geometria Analítica em que fez um trabalho semelhante ao de Monge só que em duas dimensões, enquanto Monge escreveu a Geometria Descritiva no espaço. A obra de Lacroix foi escrita sob a qual se pode considerar a Geometria Analítica, como um meio de combinar os teoremas da geometria, como Descartes, Lagrange e Monge, que a tornaram um meio geral de deduzir as propriedades da extensão a partir do menor número de princípio.

O primeiro ponto de vista é exaustivamente abordado por Lacroix, e, nesse sentido, ele se afasta da abordagem de Euler e Lagrange, estando mais próximo de Descartes. As construções geométricas são apresentadas sempre como recurso mais elegante para resolver o problema. Há uma preocupação muito grande em mostrar que os procedimentos analíticos, embora muito eficientes, podem ser substituídos pela construção geométrica, considerada mais elegante. O método analítico não parece ainda possuir muita força, ou talvez, a tradição euclidiana esteja muito presente na concepção de uma matemática que deve se caracterizar pela “elegância”. Lacroix não inicia a abordagem da Geometria Analítica pelo sistema de coordenadas; este será introduzido muito tardiamente. A exemplo de Descartes começa com problemas clássicos da geometria euclidiana, mostrando como estes podem ser resolvidos com o auxílio da álgebra, e também como os construir geometricamente. (Silva, 1999, p. 93)

É importante salientar que Lacroix se importava com o ensino da Matemática para a compreensão dos estudos de outras ciências.

Lacroix questiona: “Qual deve ser o conteúdo de um tratado de aplicação da álgebra à geometria, quando este se destina a alunos que devem se consagrar aos estudos das ciências físico-matemáticas, por exemplo a fortificação, a artilharia, a química e a mineralogia? Sua resposta; “A obra deve conter tudo o que é necessário para compreender as obras mais modernas” – supõe-se que aqui o autor esteja se referindo ao cálculo diferencial e integral, à mecânica e à física. (Silva, 1999, p. 93)

E assim, em sua obra, a Geometria Analítica é tratada primeiramente a partir de um problema geométrico e introduzia a notação algébrica para obtermos o equivalente analítico deste ente geométrico, de outro lado, tratar o problema enfatizando, primordialmente, sua abordagem analítica, muito próximo do que Descartes o fizera.

Silva (1999) concluiu que o ensino de Geometria Analítica, no Brasil, no século XIX, orientado pelos autores baseados na obra de Lacroix, nada se diferia substancialmente do ensino desta disciplina em outros países como, por exemplo, França, Alemanha e Estados Unidos

Referencial Teórico-Metodológico

A pesquisa qualitativa considera a relação dinâmica entre o mundo real e o sujeito. Emprega diferentes concepções filosóficas, diferentes estratégias de investigação; métodos de coletas, análise e interpretação de dados.

O pesquisador que utiliza a abordagem qualitativa segundo Creswell (2010) coleta pessoalmente os dados por meio de exame de documentos, observação do comportamento ou entrevista com os participantes. Elaboram seus próprios questionários para a coleta de dados.

Creswell (2010) afirma que processo de pesquisa dos pesquisadores qualitativos é emergente, ou seja o plano inicial para a pesquisa não pode ser rigidamente prescrito, e todas as fases do processo podem mudar após a coleta de dados. É uma forma de investigação interpretativa em que os pesquisadores fazem uma apreciação do que enxergam, ouvem e entendem. Essas tais não podem ser separadas de suas origens, histórias e contextos.

Nesta pesquisa utilizamos os métodos da pesquisa qualitativa para o planejamento, análise e interpretação dos dados. Entre esses métodos podemos destacar a pesquisa bibliográfica em que realizamos um levantamento de produções acadêmicas sobre o tema ensino da Geometria Analítica.

A Pesquisa Bibliográfica

Alguns autores argumentam que a pesquisa documental e pesquisa bibliográfica são sinônimas. Concordamos como Severino (2008), Appolinário (2009), Figueiredo (2007), Oliveira (2007) que fazem a distinção entre a pesquisa documental e bibliográfica.

Para Appolinário (2009) a pesquisa é documental quando realizada apenas por meio de fontes documentais (livros, revistas, documentos, legais, arquivo em mídia eletrônica).

Mas o conceito de documento pode ser ampliado quando é um objeto de investigação. Figueiredo (2007) afirma que os documentos podem ser escritos ou não escritos, tais como filmes, vídeos, slides, fotografias ou pôsteres. Esses documentos são fonte de informações que podem elucidar determinadas questões e servir como prova para outras de acordo com o objetivo do pesquisador.

Segundo Severino (2008, p. 122) a pesquisa bibliográfica é realizada a partir do registro decorrente de pesquisas anteriores, em documentos publicados tais como livros, artigos, teses etc. Para analisar os dados, o pesquisador define categorias de análise e os textos registrados tornam-se fontes dos temas a serem pesquisados e assim trabalha a partir das contribuições dos autores dos estudos analíticos dos textos.

Oliveira (2007) amplia o conceito de pesquisa bibliográfica segundo Severino (2008). A autora argumenta que a pesquisa bibliográfica é uma estratégia de estudo e análise de

documentos científicos tais como livros, periódicos, enciclopédias, dicionários e artigos científicos e não possui a necessidade de recorrer diretamente aos fatos e fenômenos da realidade empírica.

Este trabalho caracteriza-se como uma pesquisa bibliográfica, pois realizamos uma busca das publicações acadêmicas sobre o tema Geometria Analítica. Entre as produções acadêmicas nos restringimos em realizar a busca de dissertações e teses publicadas em Programas de Pós Graduação em Educação Matemática e Ensino de Ciências e Matemática.

Para Lakatos e Marconi (2010, p. 166) a pesquisa bibliográfica abrange toda bibliografia já tornada pública em relação ao tema de estudo. Não é mera repetição do que já foi dito ou escrito sobre certo assunto, mas propicia o exame de um tema sob novo enfoque, chegando a conclusões inovadoras.

Apresentação e Análise dos Dados

Utilizamos como fonte de coleta de dados as pesquisas indexadas em bibliotecas *online* das Universidades Brasileiras que possuem cursos de Programas de Pós Graduação em Educação Matemática e Ensino de Ciências em Matemática no período de 1990 à 2014. Utilizamos como palavras-chave como: Geometria Analítica, Cônicas, Vetores, e Quádricas.

Tabela 1

Distribuição de frequência de pesquisas brasileiras sobre Geometria Analítica por nível de Ensino

Universidade	Nível		
	Mestrado Acadêmico	Mestrado Profissional	Doutorado
PUC-SP	8	4	2
UFScar	4	1	
USP	1		
PUC Minas	1		
PUCRS	1		
UNESP RC	3		
CEFET RJ	2	1	
USU	2		
UFPA	1		1
UEL	1	1	
UFRR		1	
UFBA	1		
UFPO		2	
UFJF		2	
UFRJ	2		
UFES		1	
UEM	1		
UFPR	1		
UNIBAN	4		
UFRN	1		
UFRGS	2		
USSM		1	
UFMS	1		
TOTAL	37	14	3

Fonte: Elaborada pelas autoras.

Encontramos 37 produções acadêmicas relativas a dissertações de mestrado acadêmico,¹⁴ dissertações de mestrado profissional e 3 teses de doutorado em Universidades públicas e privadas no Brasil.

Análise dos dados

Realizamos a leitura das produções acadêmicas e criamos categorias de análise de acordo com a nossa interpretação de leitura.

Neste artigo apresentaremos as pesquisas que foram publicadas no período de 1991 à 2007 conforme Tabela 2 e que estão relacionadas com as seguintes categorias de análise:

- Aspectos Cognitivos para o Ensino de Geometria Analítica;
- Tipos de Pesquisas: diagnóstica, documental ou bibliográfica;
- Uso das Tecnologias de Informação;
- Quais conteúdos da Geometria Analítica foram predominantes;
- Que tipos de Metodologia foram adotadas nestas pesquisas.

Tabela 2

Dissertações de Mestrados sobre Geometria Analítica defendidas no Brasil no período de 1991 à 2007.

ANO	TÍTULO	AUTOR	OBJETIVO
1991	A relação entre o abstrato e o concreto no ensino da Geometria Analítica a nível 1° e 2° graus.	Giardinetto, José Roberto Bottger	Realizar um estudo da história da Geometria Analítica, visando compreender a relação entre o abstrato e o concreto no desenvolvimento dos conceitos desse campo da matemático.
1997	Espaço e representação gráfica	Cavalca, Antônio Vilela Pádua.	Verificar a possibilidade de desenvolver em alunos do Ensino Superior as capacidades de visualizar e interpretar objetos do espaço e suas representações gráficas matemática.
1998	A Ação Mediadora da Geometria Analítica no Ensino - Aprendizagem da Álgebra Linear.	Silva, Carmén Expecotti	Realizar um estudo da Álgebra Linear utilizando a Geometria Analítica como ação mediadora.
1999	A impregnação do sentido cotidiano de termos geométricos no ensino e aprendizagem da Geometria Analítica.	Munhoz, Marcos	Investigar se alguns termos geométricos, mais utilizados em Geometria Analítica, têm seu significado impregnado por seu sentido cotidiano.
1999	O Estudo da reta a partir das grandezas diretamente proporcionais: uma proposta alternativa de ensino	Perotti, Aberto Ramos	Elaborar e aplicar uma sequência didática para o ensino de grandezas diretamente proporcionais, para estudar a equação da reta a partir do coeficiente angular da reta por diversas representações.
2001	Vetores do Plano e do espaço e os registros de representação	Castro, Samira Choukri	Elaborar e aplicar uma sequência didática para o ensino do conceito de vetor envolvendo a conversão de registros.

2004	Análise do Livro I do <i>Geometria</i> de Descartes: Apontando caminhos para o ensino da Geometria Analítica segundo uma abordagem histórica.	Frazon, Carmen Roseane Pinto	Análise do Livro I <i>Geometria</i> de Descartes e apontar situações problematizadoras para o currículo de Geometria Analítica.
2005	Projetos em Geometria Analítica usando software de Geometria Dinâmica: repensando a formação inicial docente em matemática	Richit, Adriana	Propor uma intervenção pedagógica com alunos da Licenciatura em Matemática, a qual coaduna o trabalho com projetos e o uso de tecnologia informática, tendo como pano de fundo a disciplina de Geometria Analítica, visando a contribuir com o processo de formação inicial docente.
2006	Explorando equações cartesianas e paramétricas em um ambiente informático.	Silva, Carlos Roberto	Verificar se um ambiente informático permite ao aluno reconhecer algumas propriedades de curvas, por meio de representações gráficas de maneira dinâmica, com o uso de parâmetros, para uma melhor compreensão de suas equações.
2007	O estudo do paralelismo no ensino de Geometria Analítica Plana: do empírico ao dedutivo.	Hajnal, Fabiana	Realizar um estudo sobre argumentação e prova envolvendo o paralelismo no ensino da Geometria Analítica.

Fonte: Elaborada pelas autoras.

Ao realizar a leitura das produções acadêmicas que localizamos, conforme consta na Tabela 2, identificamos que quatro pesquisadores procuraram fundamentar suas pesquisas nas teorias de aprendizagem que focalizam nos processos cognitivos do indivíduo.

Foram citadas: a teoria da Epistemologia Genética de Jean Piaget, a teoria sócio construtivista de Lev Semenovich Vygotsky, os Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e a teoria do Construcionismo de Seymour Papert.

Averiguamos que os autores dessas produções acadêmicas tiveram como hipótese que a aprendizagem ocorre por meio da interação entre os sujeitos e por meio dessa interação ocorre a construção do conhecimento e o professor é o mediador durante o processo.

É importante salientar que a coordenação entre os registros de representação semiótica segundo Duval (2003) de um objeto matemático proporciona ao estudante a compreensão do objeto em estudo, para propor atividades que favorecessem essa coordenação entre os registros de representação semiótica, os pesquisadores tais como Silva (2006) e Richit (2005) utilizaram *software* de Geometria Dinâmica.

Dentre as dez pesquisas apresentadas neste artigo, apenas duas não utilizaram pesquisa do tipo diagnóstica, ou seja, cinco pesquisas a serem aplicadas aos alunos do Ensino Superior e três pesquisas relacionadas aos alunos do Ensino Médio.

Os referenciais metodológicos utilizados foram a Engenharia Didática para as pesquisas diagnósticas (oito pesquisas), análise documental para as pesquisas de caráter bibliográfico (duas pesquisas), sendo uma pesquisa que utilizou a metodologia lógica-histórica e outra pesquisa da análise interpretativa.

As tecnologias da informação estiveram presentes em quatro pesquisas, que utilizaram os *softwares* de Geometria Dinâmica a fim de favorecer a visualização dos objetos matemáticos em estudo.

A pesquisadora Richit (2005) realizou sua pesquisa utilizando o *software Geométricks* para discutir os tópicos de Geometria Analítica com alunos da licenciatura em Matemática.

O trabalho com projetos, coadunando o uso de *software* de geometria dinâmica e a abordagem de Geometria Analítica, foi adotado visando a salientar a relevância de colocarmos o aluno à frente do seu processo de desenvolvimento, na medida em que lhe é concedida autonomia para investigar sobre um determinado conteúdo matemático, expressar suas ideias e concepções, segundo os princípios do Construcionismo, teoria educacional que norteou a criação do ambiente de aprendizagem em que o trabalho foi realizado. (Richit, 2005, p. 59)

Silva (2006) utilizou o *software Winplot* e o *Gif Animator*, ambos são *software* gratuitos. O primeiro permite construir gráficos, animar os gráficos de curvas planas, e o segundo as imortaliza como uma animação constante.

O autor cita que o *software Winplot* “é que sozinho, como todos os programas educacionais, não garante uma aprendizagem eficiente” (Silva, 2006, p. 116).

Hajnal (2007) utilizou o *software Cabri-Geomètre II* um *software* de Geometria Dinâmica, como ambiente para as atividades da sequência didática, sua escolha se deu pela disponibilidade em escolas públicas e o fato que as características de visualização, experimentação e exploração de situações que acarretam em descobertas são ferramentas facilitadoras para o desenvolvimento geométrico dos alunos.

Os autores constataram que o uso das tecnologias de informação auxiliaram no processo de visualização e compreensão dos tópicos da Geometria Analítica propostos durante a pesquisa.

De acordo com as produções acadêmicas analisadas, os conteúdos da Geometria Analítica utilizados como objeto de estudo do Ensino Superior foram: o estudo dos vetores, posições relativas entre retas, planos, estudo das quádras e cônicas. As pesquisas relacionadas ao ensino médio enfatizaram o estudo do ponto, reta e cônicas.

Considerações Finais

O propósito deste trabalho foi apresentar e discutir as produções acadêmicas (dissertações de mestrado) sobre o ensino e a aprendizagem da Geometria Analítica no período de 1991 à 2007, com objetivo de investigar quais contribuições elas trouxeram para a Educação Matemática.

Após o exposto neste artigo retomaremos nossos questionamentos: O que as pesquisas brasileiras nos mostram sobre o do ensino da Geometria Analítica? Que alternativas de soluções dos problemas foram propostos e ou estudados?

Podemos apontar como as tendências das produções acadêmicas brasileiras sobre o ensino da Geometria Analítica no período de 1991 à 2007 as pesquisas diagnósticas em que foram realizados testes com um grupo de alunos e após a análise dos resultados destes testes, os pesquisadores planejaram sequências didáticas, questionários, que versaram conteúdos da Geometria Analítica para buscar diferentes formas de ensino e assim propiciar uma aprendizagem efetiva aos alunos.

Também constatamos a preocupação dos pesquisadores em compreender como a aprendizagem ocorre segundo as Teorias da Aprendizagem Cognitivista, sendo eles: Cavalca (1997), Silva (1998), Castro (2001), Richit (2005). Para tais pesquisadores é necessário que haja

uma interação entre os estudantes de modo que estes sejam responsáveis pela construção do seu próprio conhecimento e a figura do professor é de apenas um mediador neste processo.

As tecnologias da informação foram fortemente destacadas nestas pesquisas tais com Richit (2005), Silva (2006) e Hajnal (2007) como uma alternativa de ensino a fim de que possa possibilitar aos estudantes diversas formas de representar um objeto matemático em estudo por meio dos registros de representação semiótica.

Acreditamos que o uso das tecnologias da informação como uma estratégia de ensino articulada ao um planejamento das aulas em que o aluno construa o seu próprio conhecimento possa favorecer a compreensão do objeto matemático em estudo.

Referências

- Appolinário, F. (2009). *Dicionário de metodologia científica: um guia para a produção do conhecimento científico*. São Paulo: Atlas.
- Castro, S. C. (2001). *Os vetores do plano e do espaço e os registros de representação* (Dissertação de Mestrado). Pontifícia Universidade de São Paulo, SP.
- Cavalca, A.V. S. (1997). *Espaço e representação Gráfica* (Dissertação de Mestrado). Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo.
- Creswell, J. W. (2010). *Projeto de Pesquisa – métodos qualitativos, quantitativo e misto*. Porto Alegre: Artmed.
- D'Ambrósio, B. S. (1993). Formação de professores de matemática para o século XXI: O Grande Desafio. *Pro-Posições*, 4, 1(10), 35-41.
- Di Pinto, M. A. (2000). *Ensino e Aprendizagem da Geometria Analítica: As pesquisas Brasileiras da década da de 90* (Dissertação de Mestrado). Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo.
- Duval, R. (2003). *Registros de Representação Semiótica e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática*. In Machado, Silvia Dias Alcântara (Org.) *Aprendizagem em Matemática: registro de representação semiótica*. São Paulo: Papirus.
- Fernandes, O. P. F. (2001). *O desenvolvimento Cognitivo e a reprovação no curso de Engenharia*. Disponível em <<http://www.abenge.org.br/CobengeAnteriores/2001/trabalhos/MTE006.pdf>> Acesso em: Setembro, 10, 2014.
- Ferreira, C. A. A. (2012). Uma abordagem à avaliação das aprendizagens na formação de professores no contexto de Bolonha. *Avaliação*, 18(3), 685-707. Campinas: Sorocaba, SP.
- Figueiredo, N.M.A. (2007). *Método e metodologia na pesquisa científica* (2ª ed.). Endis Editora. Frazon, C. R. P.(2004). *Análise do Livro I do Geometria de Descartes: apontando caminhos para o ensino da Geometria Analítica segundo uma abordagem histórica* (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, RN.
- Gil, A. C. (1991). *Como elaborar projetos de pesquisa*. São Paulo: Atlas.
- Giardinetto, J. R. B. (1991). A relação entre o abstrato e o concreto no ensino da Geometria Analítica a nível 1º e 2º graus. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de São Carlos, SP.
- Hajnal, F. (2007). *O estudo do paralelismo no ensino de Geometria Analítica Plana: do empírico ao dedutivo* (Dissertação de Mestrado Profissional e Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo.
- Lakatos, E.M., & Marconi, M.A. (2010). *Fundamentos de metodologia científica* (7a ed). São Paulo: Atlas. Minayo, M. C. S. (1993). *O desafio do conhecimento*. São Paulo: Hucitec.

- Munhoz, M. (1999). *A impregnação do sentido cotidiano de termos geométricos no ensino e aprendizagem da Geometria Analítica* (Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo).
- Oliveira, M.M. (2007). *Como fazer pesquisa qualitativa*. Petrópolis: Vozes.
- Perotti, A. R. (1999). *O Estudo da reta a partir das grandezas diretamente proporcionais: uma proposta alternativa de ensino* (Dissertação de Mestrado, Pontifícia). Universidade de São Paulo, São Paulo.
- Richit, A. (2005). *Projetos em Geometria Analítica usando software de Geometria Dinâmica: repensando a formação inicial docente em matemática* (Dissertação de Mestrado). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual de São Paulo, Rio Claro.
- Severino, A. J. (2008). *Metodologia do trabalho científico* (23ª edição). São Paulo: Cortez.
- Silva, C. E. (1998). *A Ação Mediadora da Geometria Analítica no Ensino - Aprendizagem da Álgebra Linear* (Dissertação de mestrado). Universidade Santa Ursula, Rio de Janeiro.
- Silva, C. M. S. (1999) Lacroix e a popularização da geometria analítica. *Educação Matemática*, 1(1) *pesquisa*. Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo.
- Silva, C. R. (2006). *Explorando equações cartesianas e paramétricas em um ambiente informático*. (Dissertação de Mestrado). Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo.

Series geométricas convergentes en la Geometría sintética

Fernando **Soto** Agreda

Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Nariño

Colombia

fsoto@udenar.edu.co

Saulo **Mosquera** López

Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Nariño

Colombia

samolo@udenar.edu.co

Resumen

Uno de los conceptos más finos del análisis matemático es el de infinito y uno de los primeros en estudiarlo fue Georg Ferdinand Ludwig Philip Cantor en una época de creencia generalizada que solo Dios podía hablar de ello y de la nada. Para analizar este concepto, en el desarrollo de la asignatura geometría de transformaciones, del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Nariño, se realizaron una serie de actividades, indagaciones, experimentos y construcciones, con fundamento teórico en la transformación de semejanza denominada homotecia y el apoyo del software de geometría dinámica CABRI II, que con soporte enteramente visual permitieron desarrollar los conceptos de infinito y de serie infinita. En esta presentación se sintetizan los esfuerzos realizados en esta dirección.

Palabras clave: Área, Homotecia, Serie, Serie geométrica, competencias, estándares.

Planteamiento del problema

Al interior de la malla curricular del programa de Licenciatura en Matemáticas, de la Universidad de Nariño, se encuentran asignaturas relacionadas con las áreas de análisis y de álgebra y geometría tales como análisis matemático, álgebra lineal, geometría analítica y geometría de transformaciones, entre otras. Dado que los objetos de estudio de estas tienen grados diferentes de abstracción no es fácil hallar temas que puedan tratarse conjuntamente a pesar de la fuerte interrelación que tuvieron estas ramas del conocimiento en su origen, sin embargo el estudio del concepto de infinito y de series convergentes permitió establecer la conexión entre la geometría y el análisis, para lo cual se utilizaron conceptos básicos de geometría de transformaciones y la potencialidad del software de asistencia geométrica CABRI.

En este caso, se aprovecharon los conceptos de cuadrado y de área de un cuadrado para seccionarlos en cierto número de partes que van produciendo una serie y a partir de ello se generaron las actividades propuestas las cuales logran establecer procedimientos generales de la actividad matemática, en particular, la formulación, tratamiento y resolución de problemas, el razonamiento y complementariamente, la solución de problemas de construcción (Estándares básicos de Competencias, Ministerio de Educación Nacional, 2006). En modo amplio, el problema estudiado está constituido por las formas de establecer diseños geométricos que induzcan el infinito, como problemas de construcción, que representen series geométricas convergentes y sobre los cuales, el estudiante debe inferir la serie representada y su correspondiente valor de convergencia.

El modelo didáctico seleccionado para diseñar las estrategias a emplear y problemas a proponer y resolver es el estudio de clases; se ha escogido este modelo puesto que indaga sobre el método de enseñanza más eficiente y la mejor manera para orientar las clases, permite las críticas y sugerencias mutuas entre un equipo de profesores colaboradores con el fin de incrementar la calidad de la actividad profesional docente.

Ahora bien, las actividades de aprendizaje establecidas, estuvieron mediadas por la utilización de un CAS (Computer Algebra System, por sus siglas en Inglés) de asistencia geométrica, pensando en que su mediación permite estudiar los objetos desde otros ángulos, posibilitan superar las dificultades en el aula y comprender conceptos tales como infinito o series convergentes para que no queden referidos a simples especulaciones teóricas. El uso de sistemas computacionales permite:

- Reducir el tiempo y la atención dedicada al desarrollo de las habilidades de cálculo y construcción, dejando espacio para realizar mayor énfasis en la asimilación de los procesos y en la comprensión de los conceptos y su correspondiente análisis.
- Utilizar el sistema como elemento de motivación, no como centro del aprendizaje, puesto que relega al computador el trabajo de exactitud y precisión alrededor de construcciones robustas y en ellas quedan contenidas las diferentes e infinitas posibilidades de dimensiones sobre las figuras objeto de estudio. El sentido de la vista juega un papel importante dando lugar al análisis y el razonamiento para establecer las reglas que rigen las medidas en la construcción.
- En el caso particular del software que se usa en la experiencia, simula la utilización de instrumentos físicos como el compás y la regla, pero convierte transformaciones como la homotecia, la inversión, el concepto de lugar geométrico y otras, en instrumentos de alta precisión que se pueden utilizar en la resolución de problemas. En adición a esto, también posibilita la construcción de otros elementos denominados macro-construcciones y que se convierten en herramientas propias de cada usuario del recurso, cuando se trata de un elemento de uso repetitivo.

Complementariamente, el sistema computacional utilizado, CABRI II es excelente y se mantiene en proceso de evaluación, como consecuencia de lo cual está en constante mejoramiento, tal es el caso, por ejemplo, de la ejecución de construcciones que requieren de intersecciones de puntos entre lugares geométricos, problema que los creadores de Cabrí han venido superando constantemente. Es de anotar que el cálculo de puntos de intersección resulta, en opinión de expertos en geometría computacional, el problema más complejo que tiene todo software de geometría dinámica.

Conjugar en la clase de matemáticas tanto los aspectos teóricos como experimentales en el quehacer docente dentro del programa de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Nariño proporciona técnicas y teorías de las que los futuros profesionales de la educación matemática seleccionarán las apropiadas para amalgamar sus propias estrategias personales, consolidar su impronta profesional y de hecho cuidar los objetivos establecidos en los Estándares Básicos de Competencias señalados por el Ministerio de Educación Nacional y en consecuencia, el propósito de la ponencia es, presentar algunos de los resultados que se dirigen a esa labor. Desde este punto de vista, los programas de licenciaturas en todas las ramas del saber deben procurar ejemplos de estrategias didácticas, caminos que permitan atrapar el conocimiento de mejor manera para que el mismo se pueda inter-relacionar en la solución de problemas de diferente índole. Lo cierto es que en la vida de una persona resulta imposible saber en qué

preciso momento un determinado conocimiento debe o puede aplicarse, pero de hecho, en el campo profesional docente, todo tipo de conocimiento puede resultar coyuntural y aún más, no se descarta que su aplicación en la solución de un problema se dirija al estudio de un objeto que en apariencia no se liga, no hace empatía con el mecanismo de solución.

En el aspecto teórico, la experiencia centra su accionar en la estrategia denominada estudio de clase, técnica escolar de amplio uso en el Japón, la cual se puede considerar, resumidamente, como una investigación que tiene como objeto la clase misma, se compone de tres etapas básicas que se describen brevemente más adelante. Uno de los resultados importantes del foro mundial de educación celebrado en Dakar en el año 2000 y que a nuestro juicio sigue vigente, es que la asistencia a la escuela por parte de los niños no era por sí sola importante sino que más bien, la importancia radica en que la escuela es el mejor sitio para aprender. En el acta de cierre del foro mencionado se indicó que la meta educativa para una sociedad internacional era la de una educación de calidad para todos. En este sentido, aparece como obligación moral elevar la calidad de cada uno de los procedimientos escolares. El estudio de clases lo permite pues es un método con el cual el personal docente realiza mejoras a las formas de impartir y distribuir el conocimiento. Sus tres momentos fundamentales son: Planeación, Ejecución y Evaluación, los cuales se describen brevemente enseguida.

La Planeación comprende la selección de un problema en relación con el aprendizaje de los educandos, el estudio reflexivo del mismo desde los aspectos teóricos, didácticos y curriculares y la selección, indagación, investigación y preparación de los materiales didácticos que pueden ser teóricos, físicos o prácticos y en la que también sobresalen los procedimientos didácticos y las estrategias a emplear.

La Ejecución es la etapa en la cual la clase planeada se desarrolla en el aula con el grupo de estudiantes y esta puede ser asistida por el equipo docente que participó en el diseño de la misma.

La fase de Evaluación está referida a una reflexión entre el colectivo docente en la que aparecen observaciones, opiniones y sugerencias. Con todo esto, el personal docente hace un estudio positivo de la clase y lleva diariamente a la práctica el progreso de la misma.

En sentido práctico, los elementos básicos constitutivos de las clases son los estudiantes, el colectivo docente y los materiales didácticos utilizados. Los estudiantes fueron los veinte jóvenes del sexto semestre del programa de licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Nariño que en su pensum escolar deben estudiar geometría de transformaciones; se reconoce que han hecho un recorrido por los conceptos teóricos suficientes para desarrollar la experiencia. Los profesores acompañantes fueron del equipo adscrito al programa de la licenciatura que conforman al área de álgebra y geometría. Es de anotar que los profesores del departamento se dividen en cuatro grupos: área de análisis, área de álgebra y geometría, área de estadística y área de educación matemática. Los profesores que pertenecen al área de álgebra y geometría son los que ofrecen todos los cursos relacionados con esta y que se estudian en la licenciatura. En este trabajo, el material didáctico que se ha utilizado lo constituyen los equipos computacionales, el software de asistencia Cabrí Géomètre y cada uno de los ejemplos constitutivos de la etapa inicial de la experiencia. De hecho, también aparecen como ingredientes constitutivos de los materiales, el conjunto de explicaciones y pistas contempladas en los ejemplos iniciales.

Entre el material didáctico a emplear como mediador del conocimiento está Cabrí Géomètre que es un software de asistencia geométrica cuyo nacimiento está en el laboratorio

docente de ayudas didácticas dirigido por el profesor Jean Marie Laborde en la Universidad de Grenoble en Francia. El software corresponde a la línea denominada geometría dinámica y sugiere construcciones robustas cuyas características y requisitos perduran a pesar del arrastre que se aplique a elementos básicos e iniciales de la construcción. Desde la aparición de este tipo de sistemas computarizados, el estudio de la geometría se ha reanimado y su utilización crece de manera lineal en diferentes países del orbe. En el caso de Colombia, en particular, a partir del 2008 se constituyó un equipo liderado por la profesora Ana Celia Castiblanco en torno del manejo de la Calculadora TI 98-plus que contiene versiones resumidas de Derive y de Cabri y son varias las universidades que han configurado eventos en los que circulan experiencias centradas en software de geometría dinámica.

Fundamentación teórica

En los Estándares Básicos de Competencias (Ministerio de Educación Nacional, 2006) y en los Lineamientos Curriculares se vislumbra con claridad el papel que desempeña el estudio de las operaciones, en especial la adición de números naturales, enteros y racionales (fraccionarios en general), pero en el carácter práctico se detiene en sumas finitas. Tal es el caso, por ejemplo, de las sumas parciales de la serie natural que construye a los números triangulares o de las sumas parciales de los cuadrados perfectos y otras sumas de series de potencias. Pero de ninguna manera se preocupa por estudiar series de infinitos sumandos, sobre todo de aquellas que son convergentes. Sin embargo, se explican por razones didácticas las famosas paradojas de Zenón como la de Aquiles y la tortuga o el de la flecha que siempre recorre la mitad de lo que falta y en consecuencia jamás llega a su destino, paradojas que proporcionan elementos básicos, que permiten en el aula de clase reconocer patrones centrados en el infinito y en consecuencia, conjeturar, experimentar, generalizar y construir formas geométricas, entre otros, que como en la teoría de fractales, señalen el camino hacia sumas infinitas de áreas que resultan convergentes.

Es un hecho claro, que la generalidad de los profesores de matemáticas desconocen de variadas estrategias que motiven hacia el aprendizaje y aplicación de las operaciones aritméticas y matemáticas. Por ejemplo, hacen poco uso de las propiedades al realizar los cálculos y dejan de emplear aspectos inherentes a las actividades sociales generales que en el fondo son aplicaciones aritméticas. Por ejemplo, los almanaques y calendarios se forman en un sistema modular aritmético, entre seis números del uno al diez siempre hay dos con suma once, entre cinco números cualesquiera se encuentran tres cuya suma es divisible por tres. Estos ejemplos, siendo de corte finito, consolidan alternativas dirigidas a algo, que incluso a los matemáticos, parece asombroso: la posibilidad de que infinitos sumandos finitos tengan como suma otro número finito. Justo, esta experiencia se detiene en constituir ejemplos en los que se perciba de manera directa el cómo sumas infinitas producen un número finito.

Complementariamente (Bailey & Borwein, 2001) validan “la utilización de la tecnología computacional...con el propósito de explorar la estructuras matemáticas, de examinar conjeturas...” (p. 123), además pueden utilizarse con el objetivo de cimentar bases sólidas y lógicas sobre conceptos centrales del análisis como el concepto de infinito, lo cual confirma que el trabajo experimental complementado con la fundamentación teórica proporciona el marco conceptual alrededor del cual se desarrolla esta propuesta. En este sentido, la tecnología se convierte en una herramienta que permite ver el mundo de los conceptos de modo diferente y en consecuencia, amplía las formas de estudiar el conocimiento. Es conocido que el infinito es un concepto, una idea que no puede manipularse computacionalmente y en consecuencia, un software de asistencia computacional tan solo puede simular. Esto explica la riqueza de la

experiencia, pues se fija en establecer ejemplos que de forma evidente procuren la formación del infinito. Al respecto, la formación del concepto precede a etapas constructivas de carácter inductivo pues la mayoría de los ejemplos se fundamentan en elaborar homotecias de manera iterativa. Es de recordar que la esencia del infinito trasciende al de número, pues si a un número se le suma uno cambia su naturaleza, en cambio si al infinito se le suma uno, su esencia prevalece.

Como se indica en los ejemplos iniciales más adelante, si bien, la iteración es finita, la evidencia deja al cerebro lucubrar hacia el infinito. Es el gran significado de los procesos inductivos y de lo que en términos generales constituyen los métodos de inducción matemática y el método de inducción completa. El infinito es un concepto fino y difícil de arraigar, el infinito no es un número y si bien, dentro del conocimiento geométrico se escinde en el infinito potencial y el existencial, en el campo analítico parecen infinitos tipos de infinitos dentro de los cuales, los primeros y más pequeños se corresponden con la cardinalidad de los números naturales y el otro con la enumerabilidad del continuo o con la cardinalidad de los irracionales o reales. De allí en adelante va subiendo la escala de infinitos, reproduciéndose a un tamaño mayor con solo tomar la cantidad de subconjuntos que posee cada conjunto numérico en el infinito base. Por ejemplo, la cardinalidad de los naturales es aleph cero y la de sus potenciales subconjuntos es igual a la potencia de dos a la aleph cero que entrega el aleph uno, también denominado continuo. Estos aspectos aluden a las dificultades propias del concepto y por ello resulta sorprendente que se puedan sumar infinitos términos y que su suma sea también finita, por ejemplo, que no vaya más allá de la mitad de uno.

Diseño y metodología

El propósito fundamental de la actividad fue el de proponer situaciones que generaran sumas infinitas convergentes a partir de las que fuese proporcionando el profesor como ejemplos y que fueron aumentándose en la medida de que en el estudio de clase, los colegas discernieran otros y nuevos ejemplos. De hecho, la cantidad de propuestas sobre series infinitas convergentes motivó a los estudiantes sobre el estudio de la semejanza en particular y en especial el concepto de fractal que apareció en una de las clases y el más elemental entre ellos que es de la homotecia centrada en un punto y con un factor de escala. De hecho, aparece una pregunta de si es factible que dada una fracción propia, se pueda construir una sucesión infinita de figuras semejantes cuya área total converja a tal número. Esta es una pregunta abierta y se convierte en un acicate de importancia que valida por sí sola el estudio de clase que se presenta en este trabajo y cuya respuesta se sabe positiva dentro del área del análisis, pero que concentra gran esfuerzo de construcción dentro del modelo de la geometría sintética. Igualmente importante, es la aparición de la pregunta sobre la suma de los perímetros de las figuras, primero la indagación respecto de la convergencia de la suma de perímetros y luego la de su cálculo. Sin embargo, está inquietud dejó de tratarse dentro de la experiencia y se lleva como fuente de indagación y de constatación a una nueva. Lo cierto es que, en el desarrollo epistemológico de la relación entre el área y el perímetro, ha aparecido en diversos pueblos el paradigma de que el perímetro es una buena prueba para el área. Contrario a lo que realmente sucede, figuras de gran perímetro puede tener un área reducida y menor que otras. Este paradigma ha sido encontrado entre los griegos, por ejemplo y en varias experiencias de capacitación que los autores han desarrollado con algunos pueblos indígenas de nuestra región, por ejemplo con los que habitan la comarca de los Pastos en Cumbal, Nariño, Departamento situado en el sur de Colombia.

Como lo hemos mencionado, en la metodología del estudio de clase, el desarrollo de la clase no termina con su impartición, ni la instrucción termina con la capacitación recibida por los estudiantes, como se ha indicado, suelen aparecer otras y diversas inquietudes que movilizan el conocimiento. Es el modo en que suelen aparecer reacciones, inquietudes, intereses, aplicaciones que van más allá de las expectativas docentes.

En este estudio de clases se revisaron temas inherentes al mismo como parte sustantiva de los recursos o materiales didáctico tales como:

- *Sumas parciales*. Existen secuencias conocidas que producen fórmulas para el cálculo de progresiones aritméticas y geométricas, como la de los números triangulares que se corresponden con las sumas parciales de la serie natural, o las sumas de la secuencia de los impares cuya solución está referida a los cuadrados perfectos, o las sumas de la secuencia de cuadrados perfectos.
- *El concepto de infinito*. Este concepto que subyace en el análisis, también se revisa a la luz de la geometría como existencial y potencial, demostrando en primera instancia a través de una biyección entre un segmento y una recta, que los dos objetos tienen la misma cantidad de elementos y en cuanto a lo potencial, subrayando el segundo postulado de Euclides referido a que un segmento puede extenderse por cualquiera de los dos extremos siempre que se requiera.
- *Series infinitas*. Aquí se trató la demostración de la condición necesaria para que una progresión geométrica sea convergente y que simplemente asegura que la razón de la misma debe estar entre menos uno y uno.
- *Área de figuras planas*. En particular, el área de rectángulos, cuadrados y triángulos. Este concepto ha requerido profundo análisis epistemológico, discusiones que escapan los objetivos de esta experiencia.
- *Homotecia*. Como herramienta de la geometría transformacional y que consigue la construcción inmediata de figuras semejantes a partir de un punto que es el centro de la transformación y un factor que se corresponde con una reducción si es menor que uno o con una ampliación en caso contrario.
- *Macro-construcción*. Es una herramienta que surge del interés de uso con carácter repetitivo y que se establece a través de pasos concatenados dentro del camino lógico sugerido por Euclides. Si el software revisa que los pasos de una construcción carecen de esa conexión lógica, no permite que la misma se determine como macro-construcción.

Ejemplos de recursos didácticos

La idea central de construcción de fracciones a través de series infinitas inicia con la adopción de polígonos regulares que se toman de área uno y que se diseccionan vía homotecia en partes cuya suma de las áreas se corresponden con la suma de los términos de una serie geométrica. Por ejemplo, al uno es fácil llegar si, refiriéndose a capacidad, vamos llenando una cantina con la mitad del líquido que hace falta para completarla. O lo que es lo mismo, se puede completar al infinito el área de un cuadrado, sombreando la mitad de lo que siempre hace falta tal y como se muestra a continuación.

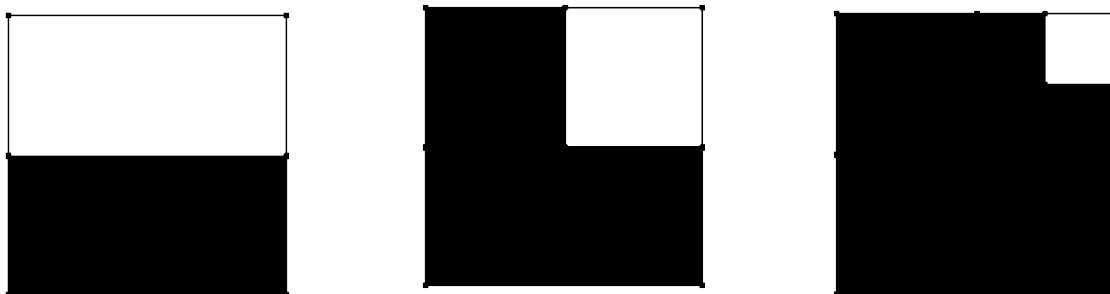


Figura 1. Convergencia a uno a través de la mitad.

Un segundo ejemplo lo constituye el tomar cuartas partes de las cuartas partes de una unidad con lo cual se completa una tercera parte. En este ejemplo, se ve el cómo lo visual brinda una ayuda ejemplar al razonamiento. En la figura 2, se muestra la selección de las cuartas partes de una cuarta parte en lo faltante que al infinito produce en total un tercio y en la figura 3 se evidencia que en efecto es lo mismo que tomar terceras partes, así el total de lo que se toma es una tercera parte del todo.

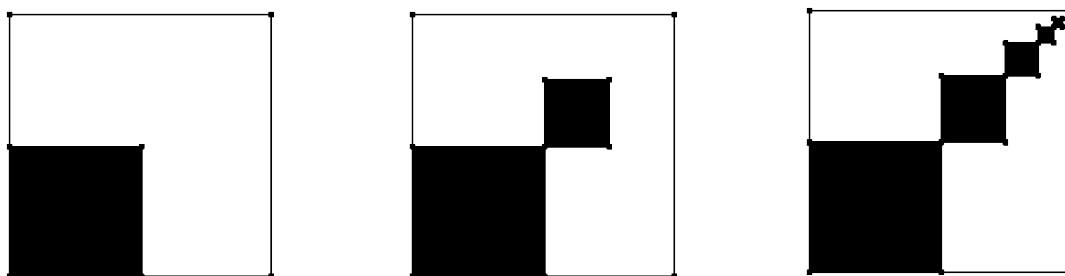


Figura 2. Convergencia a un tercio a través de cuartas partes.

A continuación, la misma construcción vía terceras partes.

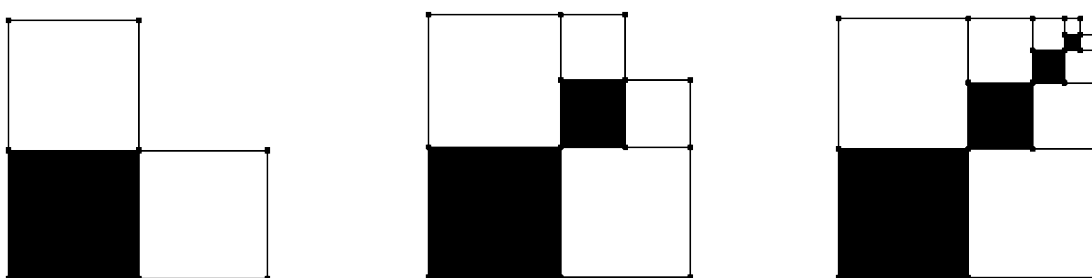


Figura 3. Convergencia a un tercio a través de terceras partes.

Unida a la forma de llegar a la tercera parte de la unidad con el agregado de cuartas partes, se propuso un ejemplo dinámico a través de un control de deslizamiento que se puede construir en Cabrí como aplicación de una regla de tres simple directa. El ejemplo indicado en la figura 4 presenta cuatro momentos que se reducen finalmente a la suma infinita que inducen los ejemplos 1 y 2.

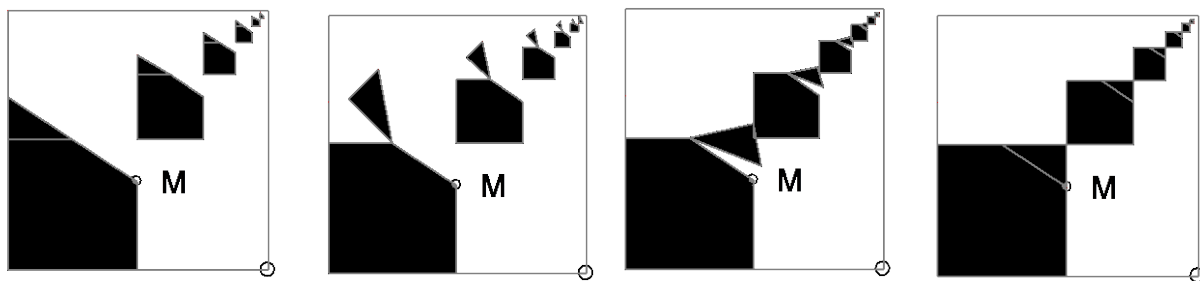


Figura 4. Otra convergencia a un tercio a través de cuartas partes.

Logros y dificultades evidenciadas

Logros. A través del uso de herramientas computacionales se consiguió una adecuada interpretación de los materiales didácticos. Los ejemplos se iban constituyendo en material que se visibilizaban de forma tal, que aparecían de forma natural las argumentaciones analíticas de los resultados. De este modo, la evidencia de los resultados, como sumas de series infinitas, animó la consolidación de otros ejemplos y motivaron la construcción de los mismos. Estas evidencias geométricas suscitaron buen aprovechamiento animando a la indagación analítica de los hechos, los cuales, en el fondo, tratan de sumas denominadas progresiones geométricas que son convergentes bajo requisitos fijos de la razón de cambio.

Las respuestas iniciales a las actividades propuestas no fueron del todo satisfactorias, pero mediante el análisis y la discusión del trabajo realizado en los grupos aparecieron construcciones que se aprovecharon de manera adecuada. En este punto, el asunto del debate entre los colegas de lo examinado en clase, consiguió enriquecer la experiencia pues aparecieron resultados que se corresponden con el modelo de la geometría analítica para series infinitas cuya razón es cualquier real entre menos uno y uno. De modo que, esta discusión o debate, no solo enriquece en sí mismo a la experiencia sino que acude a formar un equipo docente más fuerte, seguro y homogéneo lo que de manera tácita clasifica a la institución en unos niveles altos frente a su quehacer.

A nuestro juicio, los aspectos más importantes se sujetan a la aparición de otras inquietudes sobre la misma temática. La experiencia se centró sobre el concepto de área de figuras regulares y acotadas y no sobre las sumas infinitas de sus perímetros. En este sentido, experiencias como esta resultan formativas, pues la intención de la escuela no solo es la de forjar imágenes mentales de lo que es el mundo y el hombre, sino también la de que los estudiantes por su autonomía sean capaces de organizar sus propias preguntas.

Dificultades. La única dificultad que se avizora en el trabajo se refiere a su riqueza propositiva y es la pregunta de si es factible construir un ejemplo evidente, dentro de la geometría sintética que muestre una serie infinita convergente en un racional previamente fijado.

Esta dificultad de planear una construcción elemental que logre dar respuesta a la inquietud, es por sí sola un gran objetivo dado que una de las funciones sustantivas de la escuela no radica en llenar de conocimientos a las personas tal y como si fueran unas alcancías, sino de indicar caminos que consoliden, como ya se dijo, el organizar sus propias preguntas.

Conclusiones

La actividad realizada contenida en el modelo de estudio de clase fue enriquecedora pues permitió inter-relacionar los conceptos que atañen los unos al área del análisis y los otros

correspondientes con el modelo de la geometría sintética. La experiencia generó otros y diversos conocimientos al tiempo que fomentó el trabajo en grupo, su aspecto colaborativo y puso en acción al grupo docente dignificando y dándole sentido a la profesión docente.

Es necesario considerar la importancia de la gestión del docente en el aula de clase en la búsqueda de actividades que generen ambientes de aprendizaje y en las cuales los estudiantes exploren, interpreten, argumenten, propongan alternativas y cuestionen la práctica educativa. En este estudio de clase, se mostró como el equipo docente juega un papel protagónico representando el papel principal, pues prevé dificultades, modifica sus propias capacidades, toma medidas frente a las dificultades previstas y desarrolla su propia capacidad de equipo, elevando a la vez las capacidades y competencias de cada uno de sus miembros.

Referencias y bibliografía

- Bailey, D., & Borwein, J. (2001). *Experimental Mathematics: Recent development and future outlook*. En B. Engquist, & W. Schmid (Eds.), *Mathematics unlimited-2001 and beyond*. New York: Springer-Verlag.
- Foro Mundial sobre la Educación. (2000). *Marco de acción de Dakar. Educación para todos: Cumplir nuestros compromisos comunes*. Dakar
- Laborde, C. (2000). Dynamic Geometry environments as a source of rich learning context for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics*, 44.
- Landaverde, F. (1955). *Curso de Geometría*. Bogotá- Colombia. Editorial Retina, primera edición.
- Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas*. Bogotá: Imprenta Nacional de Colombia. Disponible en Internet en: http://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf.pdf
- Ministerio de Educación Nacional. (2009). *ESTUDIO de Clase: Una experiencia en Colombia para el mejoramiento de las prácticas Educativas*. Bogotá. DIGA Estudio de diseño.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Serie Lineamientos. Áreas Obligatorias y Fundamentales*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio. Disponible en Internet en: http://www.mineduacion.gov.co/cvn/1665/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

Sobre a conversão entre o registro em língua materna para o registro gráfico no caso da elipse

José Cícero dos **Santos**

Universidade Anhanguera de São Paulo

Brasil

ciceroprofmat_ba@hotmail.com

Vera Helena Giusti de **Souza**

Universidade Anhanguera de São Paulo

Brasil

verahgsouza@gmail.com

Resumo

Apresenta-se parte de uma pesquisa em desenvolvimento, que tem como objetivo diagnosticar a aprendizagem da conversão entre diferentes registros, no caso da cônica elipse. Para atingir tal objetivo, aplicou-se um questionário diagnóstico em um grupo de alunos da 3ª série do Ensino Médio (16-18 anos de idade). Coloca-se neste trabalho o resultado obtido com uma das questões desse questionário, que foi elaborada para analisar se esse grupo de alunos consegue fazer a passagem do registro em língua materna para o registro gráfico. A análise qualitativa que se fez dos protocolos aponta que esses sujeitos apresentam conhecimentos limitados acerca dessa conversão e possuem falhas na aprendizagem de ideias ligadas ao sistema cartesiano e à visualização. Deixa-se como recomendação que os professores de Matemática deem mais atenção a temas básicos relacionados à Geometria Analítica, como por exemplo a reta numérica, os pares ordenados e o sistema cartesiano como um todo.

Palavras chave: elipses, Ensino Médio, registro gráfico, língua materna.

Introdução

Este tema surgiu de nossas inquietações quando ensinava Geometria Analítica, em específico as cônicas, para alunos de uma 3ª série do Ensino Médio. Ao final do bimestre, os resultados das avaliações não eram satisfatórios, o que nos fazia refletir sobre nossas ações pedagógicas e não conseguíamos enxergar possíveis erros de abordagens de ensino que justificassem as dificuldades que aqueles alunos apresentavam para aprender Geometria Analítica. Resolvemos buscar respostas para nossas inquietações no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Anhanguera de São Paulo, onde desenvolvemos uma Dissertação de Mestrado em Educação Matemática com este tema.

Consideramos os Parâmetros Curriculares Nacionais Mais para o Ensino Médio¹ (Brasil, 2012) e o Currículo do Estado de São Paulo para fazer a escolha da série em que aplicaríamos o

¹ Neste trabalho, a partir deste ponto usaremos as iniciais PCNEM⁺ para abreviar Parâmetros Curriculares Nacionais Mais para o Ensino Médio (Nota dos autores.)

teste diagnóstico, pois sabemos que conteúdos básicos de Geometria Analítica estão presentes nos currículos desde o Ensino Fundamental II, mas é na 3ª série do Ensino Médio que se realiza um ensino mais analítico desse tema.

Os PCNEM⁺ (Brasil, 2012) sugerem que a Geometria Analítica deve ser aprendida em duas vias: “o entendimento de figuras geométricas, via equações e o entendimento de equações, via figuras geométricas”. Santos (2009) escreve que:

Desde a simples localização de pontos no plano cartesiano determinando coordenadas, até o estudo de retas e circunferências, através de suas respectivas equações, o estudante, ao estudar Geometria Analítica, lida conjuntamente com as representações algébrica e geométrica (Santos, 2009, p. 1).

O Currículo do Estado de São Paulo, Brasil, adotado oficialmente desde 2011, coloca que:

Um conteúdo como Geometria Analítica, geralmente associada ao Ensino Médio, pode e deve ter espaço para uma apresentação inicial no Ensino Fundamental. As primeiras ideias associadas ao Plano Cartesiano podem - e devem - estarem presentes já no Ensino Fundamental, na 5ª-série/6º - ano ou na 6ª-série/7º-ano, ainda que por meio da localização de pontos em mapas, ou pelo estudo de simetrias, ampliações e reduções de figuras no plano coordenado; na 7ª - série/8º -ano ou na 8ª-série/9º-ano, podem - e devem - estar associadas à construção, análise e interpretação de gráficos (São Paulo, 2011, p. 41-42).

Partindo desses pressupostos, perguntamo-nos: Se os professores de Matemática ensinam tópicos de Geometria Analítica desde o Ensino Fundamental II, por que alunos da 3ª série do Ensino Médio mostram tanta dificuldade na aprendizagem da Geometria Analítica? Será que é verdade que alunos da 3ª série do Ensino Médio não aprendem fatos básicos relacionados à aprendizagem das cônicas?

Segundo Ribeiro (2010), a essência da Geometria Analítica está na transferência de uma investigação geométrica para uma investigação algébrica. Acreditamos que quando efetuamos a conversão de um registro para outro, evidenciamos outras características do objeto, o que acarreta novos saberes, que Duval (1995) chama de face oculta da Matemática e que, por isso mesmo, precisa ser desvelada, pois é importante para a aprendizagem. Por esta razão, Duval sugere que os registros semióticos de um objeto sejam apresentados ao estudante em todas as vias possíveis, isso porque uma única via não garante a compreensão, ou seja, a aprendizagem em Matemática.

Silva (2006) e Dallemole (2010) constataam que muitos alunos apresentam dificuldades para realizar tratamentos e conversões quando estão em jogo os registros da língua materna, algébrico e gráfico e também para compreender a diferença entre um objeto matemático e uma representação gráfica desse objeto, no caso de conteúdos relacionados ao estudo em Geometria Analítica como reta, ponto, plano e cônicas.

Os PCNEM⁺ (Brasil, 2012) alertam que, no interior de um mesmo tema, as igualdades e variações podem ter muitos significados, relativamente distintos.

Equações algébricas, apresentadas abstratamente em Matemática como, por exemplo, $y = 3x - 2$ ou $y = x^2$ expressam, a um só tempo, a possibilidade de variações nas funções de ambos os lados de cada equação e a igualdade ou equivalência entre ambos os lados que contêm elementos com significados efetivamente distintos (PCNEM⁺, 2012, p.28-29).

Como a conversão de registros não é espontânea (Duval, 1995), a reflexão sobre os pressupostos acima nos remeteu à seguinte questão: Será que desenvolvemos em nossos alunos o hábito de analisar ou pensar a Matemática sob diferentes focos?

Sabemos que conteúdos de Geometria Analítica estão repletos de Registros de Representação Semiótica e esperamos que esta pesquisa contribua para que professores de Matemática valorizem o ensino de Geometria Analítica sob a perspectiva semiótica.

Convencidos da importância da aplicação das cônicas em diversas áreas das Ciências Exatas e na vida profissional dos alunos, consideramos importante realizar um diagnóstico que nos desse informações sobre as ideias adquiridas pelos alunos, após passarem por um estudo das elipses, principalmente no que diz respeito à conversão entre as expressões algébricas, a língua materna e os gráficos dessas cônicas.

Com tal diagnóstico, esperamos contribuir com futuras pesquisas na área, pois acreditamos que para se planejar uma intervenção é necessário que se conheça, primeiro, a realidade dos alunos.

A partir dessas ideias, elaboramos e aplicamos, para um grupo de 28 alunos de uma 3ª série do Ensino Médio (16-18 anos de idade) de uma escola pública do Estado de São Paulo, no Brasil, um questionário diagnóstico, elaborado à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica (DUVAL, 1995), com questões sobre a cônica elipse, porque acreditamos que um sujeito aprende fatos básicos relacionados a um objeto matemático quando é capaz de realizar a passagem, que Duval chama de conversão, entre representações desse objeto em diferentes sistemas semióticos. E apresentamos neste artigo o resultado obtido com a questão referente à conversão entre o registro em língua materna e o registro gráfico.

Os Registros de Representação Semiótica

Escolhemos a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (Duval, 1995) por concordarmos que só é possível aprender Matemática se trabalharmos com mais de um sistema de representação semiótica. A partir desta escolha, redigimos algumas passagens, inspiradas na leitura dessa teoria, que serviram de embasamento para a elaboração de nosso diagnóstico e que utilizamos em nossas análises.

Um registro de representação é, segundo Duval (2009), um sistema semiótico que tem as funções cognitivas fundamentais para o funcionamento cognitivo consciente e a aprendizagem em Matemática: é necessário que o sujeito saiba discriminar e coordenar pelo menos dois sistemas semióticos de representação e converter espontaneamente de um para o outro. Duval ainda coloca que as especificidades de um sistema semiótico consistem

Em serem relativas a um sistema particular de signos, a linguagem, a escritura algébrica ou os gráficos cartesianos, e em poderem ser convertidas em representações “equivalentes” em outro sistema semiótico, mas podendo tomar significações diferentes para o sujeito que as utiliza (Duval, 2009, p. 32).

Um sistema semiótico deve, então, permitir as três atividades cognitivas fundamentais associadas à semiósis: a formação de uma representação; o tratamento de uma representação; e a conversão de uma representação em outra, num outro sistema de representação.

A formação de uma representação de um determinado objeto é feita por meio de regras próprias ao registro semiótico no qual a representação é produzida. Por exemplo, dentro do

sistema algébrico de representação, usamos as letras do alfabeto (em geral, x , y expressam as variáveis ou as incógnitas) e os números reais, com regras próprias para expressar os “quadrados”, as “somas”, as “igualdades”, as “divisões” e as “multiplicações”, para produzir uma equação do tipo $4x^2 + 9y^2 = 36$, com regras de “leitura” próprias desse sistema em Matemática.

O tratamento é uma transformação que se efetua no interior de um mesmo registro. Por exemplo, dada a equação da elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$, o sujeito pode efetuar um tratamento para deixá-la na forma reduzida, do tipo $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ e este tratamento ocorre dentro do sistema algébrico de representação.

A conversão é uma transformação que se faz para passar de um registro a outro, mudando o sistema semiótico e, portanto, a forma de apresentar o objeto, mas sem mudar o conteúdo; por exemplo, dada uma questão do tipo: “o eixo maior de uma elipse está contido no eixo Ox . Sabendo que o centro é na origem, o comprimento do eixo menor é 6 e a distância focal é 10, determine a equação da elipse”. A questão foi proposta em língua materna e, podemos converter tal texto para uma expressão algébrica. Para achar tal expressão, o sujeito precisa processar as informações e convertê-las do registro em língua materna para o registro algébrico do tipo $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, o que exige, por parte do sujeito, o reconhecimento de características importantes para tal conversão.

Como algumas conversões parecem mais fáceis que outras, Duval (1995, 2013) introduziu as noções de congruência e de não congruência para explicar essas diferenças. A conversão é congruente quando é imediata e cada unidade significativa do registro inicial é convertida numa unidade significativa do registro final. A conversão não-congruente é aquela em que o tempo de tratamento aumenta e a conversão pode se revelar impossível de efetuar, ou mesmo de compreender, se não houver uma aprendizagem prévia em relação às especificidades semióticas de formação e de tratamento das representações envolvidas e que são próprias a cada uma delas.

Objetivo e Questão da Pesquisa

Partindo da preocupação com a aprendizagem da cônica elipse no Ensino Médio, colocamos como objetivo de nossa pesquisa de Mestrado verificar se um grupo de alunos do Ensino Médio, após terem passado pelo ensino de Geometria Analítica, consegue efetuar as conversões de registro (da língua materna para o gráfico; da língua materna para o algébrico; do algébrico para o gráfico) e em qual mostram maiores dificuldades.

Neste trabalho, apresentamos os resultados que obtivemos com a questão que corresponde à conversão entre o registro em língua materna e o registro algébrico e que foi colocada para responder a seguinte questão de pesquisa: Alunos da 3ª série do Ensino Médio conseguem fazer a conversão entre os registros em língua materna e o registro gráfico, no caso da elipse?

A questão do diagnóstico

Para responder essa questão de pesquisa, em nosso diagnóstico, colocamos um item, dentre outros que contemplam as outras conversões; e o aplicamos em um grupo de 28 alunos de duas turmas da 3ª série do Ensino Médio do período matutino de uma escola pública da rede estadual de ensino da cidade de Caieiras, localizada na região metropolitana de São Paulo.

Segundo Duval (1995), as dificuldades de compreensão na aprendizagem da Matemática não estão só relacionadas aos conceitos, mas com as variedades de representações semióticas utilizadas e com o uso confuso que se faz delas; sendo assim, entendemos que, quando o professor for apresentar um conteúdo aos seus alunos, precisa elaborar abordagens que não agreguem muitas variáveis simultaneamente, principalmente aquelas que não sirvam para o objetivo final.

Ao elaborar nosso diagnóstico, evitamos o uso de muitas variáveis para que os sujeitos não perdessem o foco das questões propostas e colocamos questões sobre as elipses, com gráficos com centro na origem, eixos sobre os eixos do sistema de coordenadas cartesianas e utilizamos a equação reduzida com os focos ou no eixo $0x$ ou no eixo $0y$. Para não introduzir mais dificuldades, utilizamos apenas semieixos medindo 3 e 2 para as constantes a e b , que aparecem na equação e que representam o semieixo maior e o semieixo menor do gráfico da elipse. Com essas escolhas, as equações reduzidas do diagnóstico, em geral, são do tipo $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ quando o eixo maior estiver localizado no eixo $0x$ e $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ quando o eixo maior estiver localizado no eixo $0y$.

A questão proposta para diagnosticar se os alunos conseguem fazer a conversão entre os registros da língua materna para o gráfico foi

Para cada descrição esboce um gráfico:

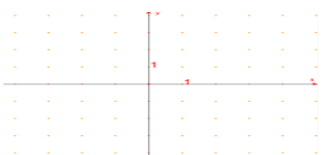
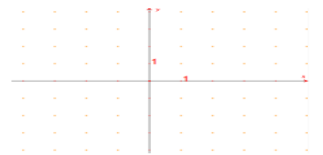
a) Elipse com o centro em $(0, 0)$, extremidades do eixo maior $A_1(0, 3)$ e $A_2(0, -3)$ e comprimento do eixo menor igual a 4.	Esboço do Gráfico 	Expresse seu raciocínio
b) Elipse com o centro em $(0, 0)$, extremidades do eixo menor $B_1(0, 2)$ e $B_2(0, -2)$ e comprimento do eixo maior igual a 6.	Esboço do Gráfico 	Expresse seu raciocínio

Figura 1. Questão do diagnóstico da pesquisa elaborada pelos autores.

Para a conversão do item *a*, esperávamos que os sujeitos percebessem que é preciso determinar os dois vértices do eixo menor, a partir dos vértices do eixo maior $A_1(0, 3)$, $A_2(0, -3)$ e do comprimento do eixo menor. Como os vértices do eixo maior estão sobre o eixo $0y$ e o centro é a origem, os vértices do eixo menor estão sobre o eixo $0x$, em pontos simétricos em relação à origem; portanto, as extremidades do eixo menor são $B_1(0, 2)$ e $B_2(0, -2)$. Determinados os quatro vértices, ficam bem estabelecidas as características visuais necessárias para que façam a conversão entre o registro em língua materna e o gráfico e esbocem o gráfico de uma elipse com centro na origem; eixo maior sobre o eixo $0y$, medindo 6 unidades de comprimento; e eixo menor sobre o eixo $0x$, medindo 4 unidades de comprimento.

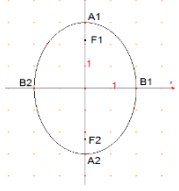
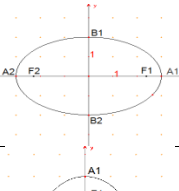
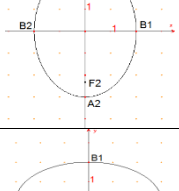
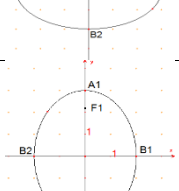
No item *b*, esperávamos que desenvolvessem raciocínios semelhantes aos do item *a*, pois damos os vértices do eixo menor, que está sobre o eixo $0y$ e os sujeitos precisam calcular os vértices do eixo maior, que está sobre o eixo $0x$, a partir da informação de que o comprimento do eixo maior é igual a 6.

Podemos dizer que as conversões exigidas não são do tipo congruente, pois os sujeitos precisam fazer um tratamento das características dadas pelo texto em língua materna (comprimento de um dos eixos) para chegar à resposta procurada. De qualquer forma, supusemos tratar-se de uma conversão com baixo grau de dificuldade, pois em cada item trata-se de uma elipse com eixos sobre os eixos coordenados e centro na origem, apenas que para o *item a* trata-se de uma elipse com eixo maior sobre $0y$ e para o *item b*, com eixo menor sobre $0x$.

Para deixar claros nossos objetivos com essa questão, elaboramos um quadro que expressa às interpretações esperadas dos sujeitos quando lêem o texto dado.

Quadro 1

Interpretação esperada das unidades significativas quando são dadas em língua materna.

Descrição em língua materna	Interpretação esperada do texto	Raciocínio esperado durante a conversão
Elipse com centro em $(0, 0)$	O centro da elipse está na origem do sistema de coordenadas cartesianas.	O gráfico deve ser do tipo 
Extremidades do eixo maior $A_1(0, 3)$ e $A_2(0, -3)$	O eixo maior da elipse está sobre o eixo $0y$; o menor, sobre o eixo $0x$ e o valor do denominador y^2 é 3^2 .	
Extremidades do eixo menor $B_1(0, 2)$ e $B_2(0, -2)$	O eixo menor da elipse está sobre o eixo $0y$; o maior, sobre o eixo $0x$ e o valor do denominador x^2 é 2^2 .	
Coordenadas dos focos $F_1(0, \sqrt{5})$ e $F_2(0, -\sqrt{5})$	O eixo maior da elipse está sobre o eixo $0y$, o eixo menor, sobre o eixo $0x$ e o valor da constante c é $\sqrt{5}$.	
O comprimento do eixo maior igual a 6	O valor da constante a é 3	

Fonte: Elaborado pelo autor a partir de Duval (1995, 2013).

Análise do diagnóstico

Após aplicar o questionário diagnóstico, optamos por apresentar uma análise quantitativa, seguida por uma análise qualitativa, com o intuito de utilizar os detalhes expressos pelos sujeitos na coluna “Explique seu raciocínio” e assim tentar verificar, por meio das diferentes explicações dadas, se podemos dizer que cada sujeito sabe fazer a conversão do texto em língua materna para

o gráfico e avaliar o grau de dificuldade que encontraram para responder os dois itens. Trazemos nossas análises, seguida das produções dos alunos, esperando assim justificar nossas conclusões.

As respostas expressas pelos 28 sujeitos apontam os seguintes resultados:

- 4 alunos acertaram os esboços dos gráficos dos *Itens a e b*
- Desses 4 alunos, consideramos que apenas 2 conseguiram efetuar as conversões dos dois itens, pois além de esboçarem corretamente o gráfico, expressaram o raciocínio feito, conforme solicitado, durante o processo de conversão.
- 5 alunos acertaram o esboço do gráfico do *item a* e erraram o esboço do gráfico do *item b*.
- 7 alunos acertaram o esboço do gráfico do *item b* e erraram o esboço do gráfico do *item a*.
- 1 aluno esboçou apenas o gráfico do *item a* e deixou em branco o *item b*.
- 8 alunos erraram os esboços dos gráficos dos *Itens a e b*.
- 3 alunos deixaram em branco os *Itens a e b*.

Destacamos que 6 sujeitos esboçaram uma elipse com eixo maior em Ox e eixo menor em Oy para os dois itens e 3 esboçaram uma elipse com eixo maior em Oy e eixo menor em Ox para os dois itens. Outros 5 alunos inverteram os gráficos, no *item a* esboçaram uma elipse com eixo maior em Ox e no *item b*, a elipse com eixo maior em Oy . Consideramos que esses sujeitos não desenvolveram a aprendizagem para este tipo de conversão e as possíveis dificuldades desses alunos podem estar relacionadas com a interpretação que fizeram das características presentes na descrição e com a relação que fizeram delas no sistema cartesiano. Esses sujeitos até conseguem colocar os vértices em pontos simétricos em relação ao centro da elipse, embora em posições erradas no sistema cartesiano e se o professor tivesse percebido e corrigido esse erro, ou talvez não tivesse aceitado esse erro como “meio certo” na correção de exercícios desse tipo, esses sujeitos poderiam efetuar de forma correta os esboços dos gráficos e consequentemente poderíamos aceitar que sabem efetuar a conversão.

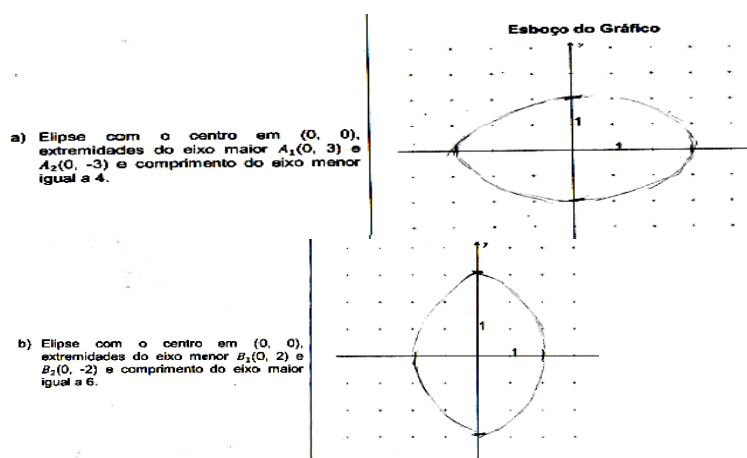


Figura 2. Resposta do aluno 13.

Chamou-nos a atenção a quantidade de alunos (6 em 28) que efetuaram para os dois itens duas elipses iguais, com o eixo maior em Ox , embora tenham utilizado corretamente o tamanho

do eixo. Uma pergunta surge: Por que? Será que a dificuldade está na identificação das coordenadas de pontos sobre os eixos coordenados? Ou será que só viram exemplos de elipses com eixo maior sobre Ox ? De qualquer forma, nossa avaliação é que os sujeitos que assim procederam não desenvolveram a aprendizagem para este tipo de conversão.

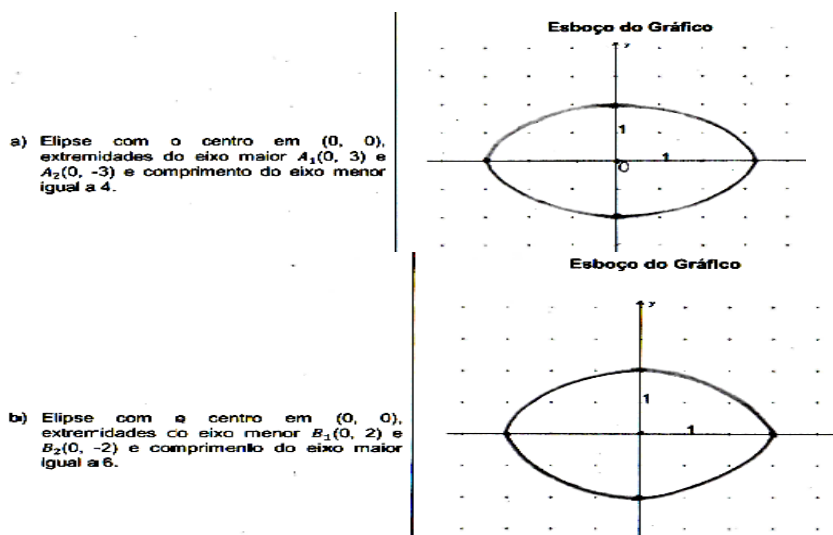


Figura 3. Resposta do aluno 14.

Como os dois itens parecem exigir esquemas cognitivos semelhantes, achamos que se efetuassem uma conversão saberiam efetuar a outra, mas não podemos descartar a hipótese de que quando passaram pelo ensino tenham desenvolvido a aprendizagem apenas com a elipse com o eixo maior sobre o eixo Ox ou fizeram alguma confusão com as coordenadas das extremidades dos eixos no sistema cartesiano, deixando evidências de possíveis deficiências de aprendizagem com o sistema cartesiano ou com as elipses. Como exemplo do que acabamos de descrever, temos o aluno 23, que esboçou corretamente o gráfico do item *a* e deixou em branco o item *b*: se soube localizar as extremidades $A_1(0, 3)$ e $A_2(0, -3)$ do eixo maior da elipse do item *a*, por que não soube localizar $B_1(0, 2)$ e $B_2(0, -2)$ do eixo menor da elipse do item *b*?

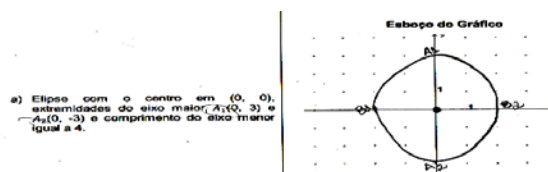


Figura 4. Resposta do aluno 23.

Dentre as várias dificuldades apresentadas pelos sujeitos pesquisados, achamos importante destacar as do aluno 8, para localizar valores no sistema cartesiano, fato que nos remete a imaginar que talvez esse sujeito não consiga usar o sistema cartesiano e, em se tratando de Geometria Analítica, provavelmente não consegue desenvolver nenhum conhecimento no assunto e em nenhum outro tema que faça uso dele, como por exemplo os gráficos de funções.

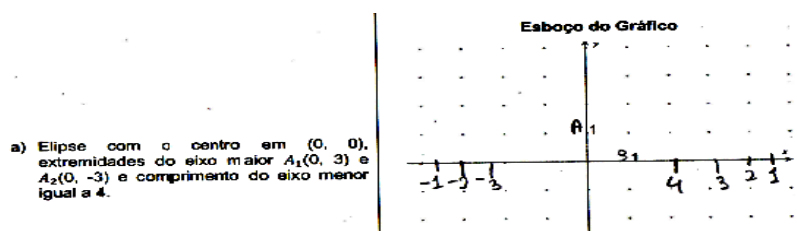


Figura 5. Resposta do aluno 8.

O item *b* descreve uma elipse com eixo maior sobre Ox e 5 sujeitos efetuaram esboços sem conexão com as características da descrição, como por exemplo, o aluno 25. Talvez esse aluno até tenha desenvolvido alguma noção sobre o objeto, que servirá apenas para identificar a figura elipse dentre outras cônicas, mas esta aprendizagem está distante da esperada para o sujeito efetuar tratamentos ou conversões e, ainda, remetê-lo a entender outras características da figura, como por exemplo, as extremidades dos eixos; as coordenadas do centro; a localização dos focos.

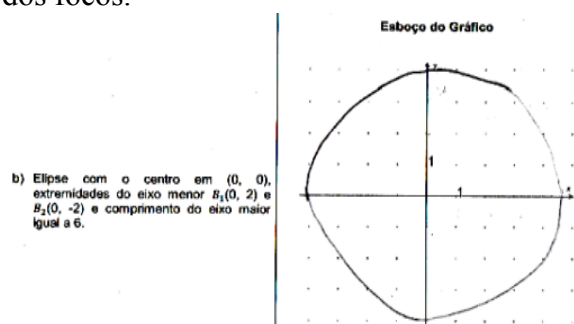


Figura 6. Resposta do aluno 25.

Dos 4 alunos que acertaram os esboços dos gráficos, apenas 2 expressaram o raciocínio feito. Esse fato reforça nossas conclusões acerca da aprendizagem desses sujeitos, como o aluno 12, que no item *a* efetuou corretamente a conversão, e ainda justificou, em língua materna, escrevendo que “ A_1 e A_2 ficam no eixo y sendo a soma do eixo maior de comprimento 6 e b_1 e b_2 o eixo menor sendo a soma do comprimento 4 no eixo y ”, fato que expressa os conhecimentos mobilizados desse sujeito acerca da conversão.



Figura 7. Resposta do aluno 12.

Consideramos que o aluno 16 também possa ter aprendido a efetuar a conversão do texto em língua materna para o gráfico, conseguindo destacar as variáveis visuais do gráfico, características dadas pelo texto.

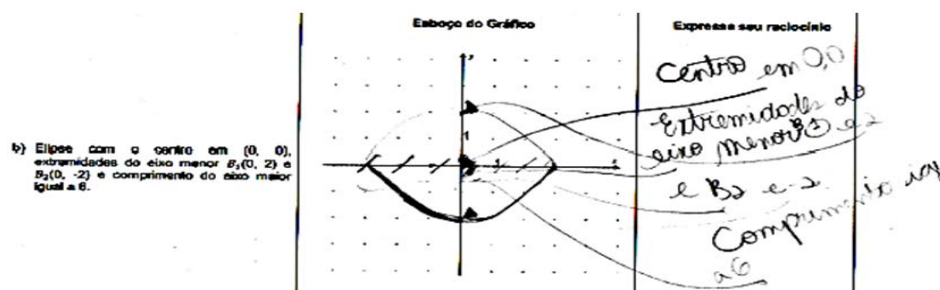


Figura 8. Resposta do aluno 16.

Considerações Finais

Nosso objetivo foi analisar se alunos da 3ª série do Ensino Médio conseguem fazer a conversão entre o registro em língua materna e o registro gráfico. De acordo com as análises das respostas, percebemos que a maioria apontou uma compreensão limitada acerca da conversão esperada e que apenas 7,1% dos sujeitos conseguiu efetuar a conversão. Os que não conseguiram, de acordo com as análises que fizemos dos esboços expressados pelos sujeitos, apontaram dificuldades para interpretar as unidades significativas da descrição dada em língua materna e associá-las as variáveis visuais do gráfico.

O problema mais frequente que percebemos foi com o uso do sistema cartesiano, pois muitos não sabem localizar as coordenadas de um ponto no sistema cartesiano ou mostram dificuldades para reconhecer pontos sobre os eixos. Outra dificuldade que observamos foi com o próprio tratamento da língua materna, como por exemplo a partir da descrição “comprimento de eixo menor igual a quatro”, alguns sujeitos não percebem que os vértices estão à distância 2 do centro da elipse e em posições simétricas em relação a ele.

A análise qualitativa que fizemos dos protocolos mostrou que esses alunos possuem muitas dificuldades para representar pontos com coordenadas (x, y) no plano cartesiano, fato que pode dificultar o desenvolvimento da aprendizagem das cônicas em particular e da Geometria Analítica em geral. Essas considerações nos fazem recomendar que professores de Matemática, quando forem trabalhar temas básicos relacionados à Geometria Analítica, deem mais atenção, a alguns itens, tais como: identificar a diferença entre um ponto, a distância desse ponto à origem do sistema de coordenadas e a coordenada desse ponto; a reta numérica; os pares ordenados do sistema cartesiano; e também, e talvez principalmente, o uso da língua materna como uma grande auxiliar da aprendizagem em Matemática.

Referências

- Brasil. Ministério da educação, secretaria de educação média e tecnológica. (2000). *Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio*. Brasília: MEC, SEMTEC.
- Brasil. Ministério da educação, secretaria de educação média e tecnológica. (2012). *Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio mais: ciências da natureza e suas tecnologias*. Brasília: MEC, SEMTEC.
- Dallemole, J. J. (2010). *Registro de representação semiótica: Uma experiência com o ambiente virtual SIENA*. (Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Luterana do Brasil, Canoas. Canoas: ULBRA.
- Duval, R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuel*. Berna: Peter Lang. ISBN 39-06754-32-4

- Duval, R. (2003). Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In S. D. A. Machado (Org), *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica* (pp. 11-33). Campinas, SP: Papirus.
- Duval, R. (2009). *Semiósis e pensamento humano registros semióticos e aprendizagens intelectuais* (Tradutores - Lênio Fernandes Levy e Maria Rosâni Abreu da Silveira). São Paulo: Editora Livraria da Física.
- Duval, R. (2013). Raymond Duval e a teoria dos registros de representação semiótica. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, 2, jul/dez 2013, 10-34. Entrevista concedida a José Luiz Magalhães de Freitas e a Veridiana Rezende. Disponível em <http://www.fecilcam.br/rpem/index.php?pag=exe3>
- São Paulo (Estado). (2011). *Currículo do Estado de São Paulo: Matemática e suas tecnologias* (Ed. Atual). São Paulo: SE. 72 p.
- Santos, R. J. (2009). *Um curso de geometria analítica e álgebra linear*. Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG.
- Silva, C. R. (2006). *Explorando equações cartesianas e paramétricas em um ambiente informático*. (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo: PUC.

Tratamiento de los contenidos curriculares de Geometría en exámenes de evaluación de enseñanza secundaria.

Un estudio de casos.

Luis **Godoy** Acedo

Instituto de Educación Secundaria El Brocense, Cáceres

España

lgodoyac@alumnos.unex.es

María José **Cáceres** García

Facultad de Formación del Profesorado, Universidad de Extremadura

España

mjcaceres@unex.es

Janeth Amparo **Cárdenas** Lizarazo

Facultad de Educación, Universidad de Extremadura

España

jacardenasl@unex.es

Resumen

Este es un trabajo inicial sobre instrumentos de evaluación utilizados en la enseñanza de Geometría en la Comunidad Autónoma de Extremadura (España), motivado por la percepción de que las modificaciones respecto a la forma de evaluar al alumnado, recogidas en las Leyes de Educación, no han sido completamente aceptadas o asimiladas por el profesorado. Para profundizar sobre las relaciones entre los planteamientos curriculares y la práctica evaluadora en Geometría, se realizó un análisis de contenido de los enunciados planteados en exámenes de esta materia que facilitaron tres profesores de tercer curso de Enseñanza Secundaria en activo. Además, se describieron las características de estas tareas en cuanto a la demanda cognitiva, el soporte comunicativo utilizado y el implicado, y la naturaleza de la tarea. Como conclusiones principales se encontraron desajustes entre contenidos evaluados por los profesores en los exámenes y los contenidos curriculares propuestos por la Consejería de Educación.

Palabras clave: Evaluación de aprendizajes, exámenes escritos, educación secundaria, geometría, matemáticas.

Abstract

This is an initial step on assessment instruments used in the teaching of Geometry in the Region of Extremadura (Spain), motivated by the perception that the way evaluation is carried out according to the current legislation is not properly absorbed by teachers. For a deeper insight of the relationship between curriculum approaches and evaluation practice in Geometry, a content analysis was done to analyze the type of statements for Geometry exam. For the sample we worked with three teachers of Secondary Education in active employment, who provided us with the exams used for evaluating the contents of Geometry at this level. Furthermore, the characteristics

of these tasks are explained using cognitive demand, the communication medium used and the involved and the nature of the task. As a conclusion, some mismatches between assessed contents by teachers in exams and curriculum contents proposed by the Department of Education have been found. Furthermore, it is noted that the evaluation of those tests is not adapted to the educational guidelines.

Key words: Assessment of learning, written exams, secondary education, geometry, mathematics.

Planteamiento del problema

Los objetivos, los contenidos didácticos y los criterios de evaluación planteados en las distintas Leyes de Educación que han gobernado el sistema educativo español han sufrido cambios significativos, transformaciones que el profesorado ha intentado aplicar con mayor o menor éxito en sus programaciones de aula. No obstante, en lo referente al modo de evaluar al alumnado, estas modificaciones no han sido aceptadas o asimiladas de manera significativa por el profesorado en general, puesto que la evaluación sigue siendo entendida por el docente como algo personal y continúa sin adaptarse a las nuevas indicaciones didácticas. (Colomina, Onrubia & Naranjo, 2000; Goñi, 2008). Además, la evaluación, entendida como uno de los organizadores del currículo, es uno de los campos menos trabajado desde el punto de vista de la investigación.

Estas cuestiones sugieren profundizar en las relaciones entre el currículo actualmente vigente de Educación Secundaria Obligatoria para la Comunidad Autónoma de Extremadura y la práctica evaluadora que, en la asignatura de Matemáticas, y específicamente en el área de Geometría, llevan a cabo los profesores de esta misma Comunidad Autónoma.

De esta forma, el presente estudio consiste en el análisis de las preguntas, que un grupo de profesores de esta Comunidad Autónoma, propuso en los exámenes cuando evaluó el bloque de Geometría del curso 3º de Educación Secundaria Obligatoria, para conocer el tratamiento que realizan los profesores en sus propuestas de evaluación de los contenidos curriculares recogidos en la legislación vigente en el momento de su aplicación.

Antecedentes y fundamentación teórica

Los efectos de la evaluación en la práctica docente y, por consiguiente, en el aprendizaje son de gran interés para los investigadores en educación matemática (Leder, 1992). Lo que el profesor evalúa y cómo lo evalúa condiciona el aprendizaje de los alumnos, dado que éstos se centran en asimilar los conceptos que el profesor evaluará. Con la evaluación el profesorado selecciona los contenidos y objetivos que considera más relevantes de forma que y los restantes difícilmente dejarán poso en los alumnos.

En muchos casos, evaluar es visto habitualmente, tanto por profesores como por estudiantes, como sinónimo de calificar, de enjuiciamiento "objetivo y preciso" de la capacidad y aprovechamiento de los estudiantes, no obstante, esta concepción muestra determinadas limitaciones, por lo que es necesario, a partir de los planteamientos constructivistas, dotar de nueva orientación a la evaluación como instrumento de mejora del proceso de enseñanza/aprendizaje de las ciencias (Alonso, Gil & Martínez, 1996; Chamoso & Cáceres, 2009).

Webb (1993) entiende la evaluación como la consideración comprensiva del funcionamiento de un grupo o individuo en Matemáticas o en alguna de sus aplicaciones. Pero a la hora de intentar comprender el grado de aprendizaje de un individuo o grupo el docente debe

disponer de determinados parámetros con los que compararlo, parámetros que pueden expresarse en forma de competencias o de etapas que marquen su nivel de progreso. Además, otro referente pueden ser los criterios de evaluación, elementos que deberían permitir valorar al alumnado de forma homogénea y determinar en qué medida ha desarrollado aprendizaje (Mengual, Gorgorió, & Albarracín, 2013). Por este motivo, los criterios de evaluación deberían permitir valorar o calificar al alumnado de forma homogénea y determinar en qué medida se ha desarrollado el aprendizaje, que, entre otras cosas, debería considerar la adquisición de todos los contenidos establecidos para el curso académico correspondiente (Azcárate, 2006).

Por otro lado, en la evaluación, el examen escrito aparece como un elemento esencial, por lo cual ha sido considerado el elemento principal de este estudio. El examen constituye la forma de evaluación más conocida y más extendida (Cockcroft, 1985), y a su vez uno de los más criticados como se ve en el estudio de Díaz-Barriga (1994). En el informe de Cockcroft (1985) se dice que la evaluación debe permitir a los alumnos demostrar lo que saben, no lo que ignoran, sin minar la confianza de quienes se presentan a estas pruebas. No obstante, se reconocen algunas limitaciones como que esta herramienta no siempre permite, entre otras cosas, evaluar la capacidad de los alumnos para discutir sobre cuestiones matemáticas, ni las actitudes de perseverancia o de inventiva.

En cuanto a la geometría, en el currículo propuesto para la Comunidad Autónoma de Extremadura (DOE, Decreto 83/2007), se plantean los contenidos didácticos y los criterios de evaluación de cada uno de los bloques de contenido para cada uno de los niveles educativos. En este trabajo, como referente legislativo, nos centramos en el bloque 4 que desarrolla los contenidos de Geometría para el curso 3º ESO, y son:

- 4.1. Determinación y construcción de figuras a partir de ciertas propiedades. Lugar geométrico.
- 4.2. Figuras semejantes. Razón de semejanza. Representación a escala de la realidad: planos, mapas y maquetas. El Teorema de Thales.
- 4.3. Relaciones métricas. Rectas y puntos notables de un triángulo. Determinación de las propiedades geométricas de sus puntos de corte. Utilización de programas de trazado geométrico.
- 4.4. Teorema de Pitágoras.
- 4.5. Aplicación de los Teoremas de Pitágoras y Thales a la resolución de problemas geométricos y del medio físico próximo.
- 4.6. Movimientos en el plano: traslaciones, giros y simetrías. Elementos invariantes de cada movimiento. Uso de los movimientos para el análisis y representación de figuras y configuraciones geométricas. Composición de transformaciones en casos sencillos. Reconocimiento de los movimientos en la naturaleza, en el arte y en otras construcciones humanas centrándonos fundamentalmente en nuestra comunidad.
- 4.7. Elementos básicos de la geometría del espacio. Elementos característicos de poliedros regulares y cuerpos elementales. Relación de Euler. Planos de simetría y ejes de rotación en los poliedros. Cuerpos de revolución.
- 4.8. Cálculo de áreas y volúmenes. Volumen y capacidad. Utilización de las fórmulas en la resolución de problemas.

- 4.9. Resolución de problemas geométricos utilizando procedimientos como la composición o descomposición de figuras y cuerpos, la reducción de problemas complejos a otros más sencillos, suponer el problema resuelto, etc.
- 4.10. Elección de las formas geométricas que se adapten mejor al estudio de configuraciones reales. Investigación de regularidades geométricas en el entorno: naturaleza, arte, diseño, arquitectura, tejidos... Utilización de las tecnologías informáticas para generar figuras geométricas y comprobar relaciones y propiedades.
- 4.11. Coordenadas geográficas y husos horarios. Interpretación de mapas y resolución de problemas asociados.
- 4.12. Planificación y diseño de técnicas para la obtención indirecta de medidas inaccesibles del entorno inmediato (DOE, Decreto 83/2007, p. 8103)

Estos contenidos tienen asociados dos criterios de evaluación (el 7 y el 8) de entre los trece propuestos en dicho decreto para el curso seleccionado. Cada criterio de evaluación tiene, a su finalización, un párrafo que explica y concreta el criterio en cuestión. Dichos criterios de evaluación son los siguientes:

7. Utilizar el teorema de Pitágoras y las fórmulas usuales para obtener las medidas de longitudes, áreas y volúmenes a través de ilustraciones, de ejemplos tomados de la vida real y en un contexto de resolución de problemas geométricos.

Se pretende valorar si el alumno es capaz de utilizar métodos directos (medidas y fórmulas) e indirectos (teorema de Pitágoras y resultados sobre proporcionalidad), para calcular longitudes, áreas y volúmenes.

Es básico en este criterio ser capaz de utilizar los procedimientos mencionados en situaciones reales concretas y contextualizar la solución.

8. Reconocer las transformaciones que llevan de una figura geométrica a otra mediante los movimientos en el plano y utilizar dichos movimientos para crear sus propias composiciones y analizar, desde un punto de vista geométrico, diseños cotidianos, obras de arte y configuraciones presentes en la naturaleza.

Con este objetivo se pretende valorar la comprensión de los movimientos en el plano, para que puedan ser utilizados como un recurso más de análisis en una formación natural o en una creación artística. El reconocimiento de los movimientos lleva consigo la identificación de sus elementos característicos: ejes de simetría, centro y amplitud de giro, etc. Se trata de evaluar, además, la creatividad y capacidad para manipular objetos y componer movimientos para generar creaciones propias (DOE, Decreto 83/2007, p. 8109)

Diseño y metodología

Este estudio se centró en la evaluación de las Matemáticas del curso 3º de Educación Secundaria Obligatoria (ESO), concretamente, del bloque de Geometría.

El hecho de considerar el tercer curso de la Educación Secundaria Obligatoria se sustentó en el hecho de que la capacidad de abstracción para los alumnos que cursan este nivel educativo, con edades comprendidas entre los 14 y 15 años, empieza a alcanzar niveles significativos

(Geddes, Fuys, & Tischler, 1988) permitiéndoles una mayor comprensión del mundo que les rodea.

La elección del bloque de Geometría se debió al papel fundamental que juega en el proceso de aprendizaje y abstracción, por su función altamente instrumental y por ser una herramienta que incentiva un pensamiento crítico y creativo, para poder comprender y modificar el entorno (Barrantes & Balletbo, 2012).

Este trabajo se inscribe en el paradigma cualitativo de investigación, tratándose de un estudio de caso de carácter exploratorio, en el que la técnica para el análisis de los exámenes escritos será el análisis de contenido, en la categoría de un estudio “a priori”, debido a que no se ha considerado cómo los profesores utilizan los exámenes.

La elección de la muestra se realizó por conveniencia en el sentido de Hernández, Fernández-Colado y Baptista (2008), es decir, se priorizó la facilidad de acceso y disponibilidad para el investigador, aunque se trató de encontrar exámenes en las capitales de las dos provincias de la Comunidad Autónoma de Extremadura. En concreto, se analizaron ocho exámenes de tres profesores: el profesor 1 (exámenes 1, 2, 3 y 4) y profesor 2 (exámenes 5 y 6) de la provincia de Badajoz; y el profesor 3 (exámenes 7 y 8) de la provincia de Cáceres. Los exámenes que nos facilitaron, habían sido empleados en cursos anteriores para evaluar contenidos del bloque de Geometría de 3º ESO.

Entre todos los exámenes sumaron 38 ejercicios. Y, respecto del carácter de estos exámenes, siete fueron exámenes parciales donde los exámenes 1 y 2 sobre contenidos relativos a los teoremas de Tales y Pitágoras; los exámenes 4 y 6 sobre cuerpos geométricos y los exámenes 5, 7 y 8 sobre problemas métricos en el plano. De esta muestra, el único examen global fue el número 3 dedicado a la evaluación de los todos los contenidos impartidos en el bloque temático de Geometría.

Objetivos del trabajo

Con la intención de comunicar la adecuación de los profesores de matemáticas de Enseñanza Secundaria a las recomendaciones establecidas por la Comunidad Autónoma de Extremadura, a partir de las recomendaciones nacionales españolas, en el bloque de geometría, en este trabajo se pretende realizar un estudio descriptivo sobre las tareas que plantean 3 profesores en los exámenes que emplean para evaluar el conocimiento geométrico de sus estudiantes. Concretamente se pretende:

1. Identificar los contenidos curriculares de Geometría para el curso 3º ESO evaluados por los profesores en los exámenes escritos.
2. Analizar los enunciados de las preguntas propuestas por los profesores en los exámenes escritos para determinar las habilidades requeridas por parte de los estudiantes en las mismas.

Instrumentos de análisis

A la hora de analizar el transvase del conocimiento que se produce desde el currículo oficial hasta el trabajo real mediante las propuestas de evaluación de cada profesor, se realizó un análisis de contenido que se engloba dentro de la metodología cualitativa. Para ello se identificaron unidades completas de información, consideradas como cada uno de los apartados o subapartados de los que constaban los enunciados de las preguntas de los exámenes escritos. Por ejemplo, un enunciado con una única unidad de información fue: “*Enunciar el teorema de*

Pitágoras”, en otros casos se consideraron varias unidades de información en un mismo enunciado, por ejemplo: “*El tejado de la torre de una iglesia tiene forma de una pirámide regular de base hexagonal de 12 m de lado y 18 m de altura. El párroco quiere arreglar la cubierta del tejado y le cuesta 10 euros el metro cuadrado. ¿Cuánto dinero tendrá que recaudar para poder hacer la obra?*” constaba de dos unidades de análisis, una pregunta implícita, que sería *calcular la superficie del objeto geométrico*, y otra explícita, *¿Cuánto dinero tendrá que recaudar para poder hacer la obra?*.

Por otra parte, para el análisis de los enunciados de las tareas propuestas en exámenes escritos de la muestra se utilizó parte de la categorización desarrollada por Cárdenas (2014). Las categorías empleadas en este estudio fueron: demanda cognitiva, soporte comunicativo utilizado, soporte comunicativo implicado y naturaleza de la tarea. La explicación de las categorías y subcategorías correspondientes a cada una de ellas se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1

Sistema de categorías y subcategorías para el estudio de las tareas propuestas en los exámenes (y codificación de las mismas)

Categorías	Subcategorías
Demanda cognitiva: caracteriza la complejidad de los procesos cognitivos involucrados en la resolución de dicha tarea	Conceptual (DCC): hechos, fenómenos y conceptos Desarrolla los siguientes aspectos • Recuento directo de información factual (DCC-rd) • Identificación y ejemplificación entre conceptos (DCC-i) • Establecimiento de relaciones entre conceptos (DCC-er) • Explicación/Modelización de un fenómeno complejo (DCC-mod) Procedimental (DCP): acciones que facilitan el logro de un fin propuesto. Desarrolla los siguientes aspectos • Aplicación directa de algoritmos o técnicas (DCP-ad) • Interpretación/Traducción entre lenguajes o formas de representación (DCP-inter) • Identificación de algoritmo y aplicación del mismo (DCP-iaa) • Identificación y aplicación encadenada de algoritmos (DCP-iaea) • Delimitación y concreción de la formulación del problema y/o utilización de estrategias o heurísticos (DCP-heu)
Soporte Comunicativo Utilizado (SCU): forma en que se presenta la información principal.	Verbal (SCU-v): Texto Numérico (SCU-n): Valor numérico Imagen (SCU-i): Imágenes o gráficos. Tabla (SCU-t): Tablas.
Soporte Comunicativo Implicado (SCI): forma en que el alumno expresará la información principal.	Verbal (SCI-v): Texto Numérico (SCI-n): Valor numérico Imagen (SCI-i): Imágenes o gráficos. Tabla (SCI-t): Tablas
Naturaleza de la tarea (NT): contexto en que se inscribe.	Real (NT-r). Referencias cotidianas al entorno cercano (educativo y laboral, privado, social y comunitario). Realístico (NT-rco). Referencias a la realidad en un entorno alejado Intramatemática (NT-intra). Referencias a elementos propios de las Matemáticas Manipulativo o recreativo (NT-m). Referencias al uso de materiales manipulativos o de la lógica

Medidas

Para el análisis del tratamiento de los contenidos curriculares de geometría en los exámenes propuestos por los profesores se estableció la relación entre los contenidos propuestos en el Decreto 83/2007 y los localizados en las diversas preguntas planteadas a los estudiantes.

Para determinar las habilidades que se requieren por parte de los estudiantes en el desarrollo de las diversas tareas se utilizó la descripción de resultados obtenidos en las categorías *Demanda cognitiva*, *Soprote comunicativo utilizado*, *Soprote comunicativo implicado* y *Naturaleza de la tarea*.

Resultados

En primer lugar, se presentan en la Tabla 2 los contenidos que los profesores evaluaron en los exámenes en relación a los propuestos en el desarrollo curricular del bloque de geometría para el curso seleccionado en la legislación extremeña actual.

Tabla 2

Datos obtenidos en el análisis de contenidos curriculares tratados en los exámenes, agrupados por los bloques de contenidos que evaluaban

Contenido curricular	Exámenes 1 y 2: Parciales: Tales y Pitágoras	Exámenes 4 y 6: Parciales: Cuerpos geométricos	Exámenes 5, 7 y 8: Parciales: problemas métricos en el plano	Examen 3: Global: toda la geometría del curso.
4.1			Determinación y construcción de figuras a partir de ciertas propiedades. Lugar geométrico	Determinación y construcción de figuras a partir de ciertas propiedades. Lugar geométrico
4.2	Teorema de Tales		Figuras semejantes. Razón de semejanza	
4.3			Relaciones métricas	
4.4	Teorema de Pitágoras			
4.5	Aplicación de los teoremas de Tales y Pitágoras	Aplicación del teorema de Pitágoras	Aplicación de los teoremas de Tales y Pitágoras	Aplicación de los teoremas de Tales y Pitágoras
4.7		Elementos característicos de poliedros regulares y cuerpos elementales. Cuerpos de revolución		Elementos característicos de poliedros regulares y cuerpos elementales. Cuerpos de revolución
4.8	Cálculo de áreas y volúmenes	Cálculo de áreas, volúmenes y capacidad. Utilización de fórmulas en la resolución de problemas	Cálculo de áreas. Utilización de fórmulas en la resolución de problemas	Cálculo de áreas, volúmenes y capacidad. Utilización de fórmulas en la resolución de problemas
4.9	Resolución de problemas mediante descomposición de figuras	Resolución de problemas mediante descomposición de figuras y cuerpos	Resolución de problemas mediante descomposición de figuras y reducción de problemas complejos en otros más sencillos	Resolución de problemas mediante descomposición de figuras y cuerpos

Los contenidos curriculares que se trabajaron en todos los exámenes, tanto en los parciales como en el final, fueron fundamentalmente, los referentes a la aplicación de los Teoremas de Pitágoras y Tales, el cálculo de áreas y volúmenes mediante las fórmulas adecuadas o la

resolución de problemas que implican como procedimiento para su resolución la descomposición de figuras o la reducción de problemas complejos en otros más sencillos.

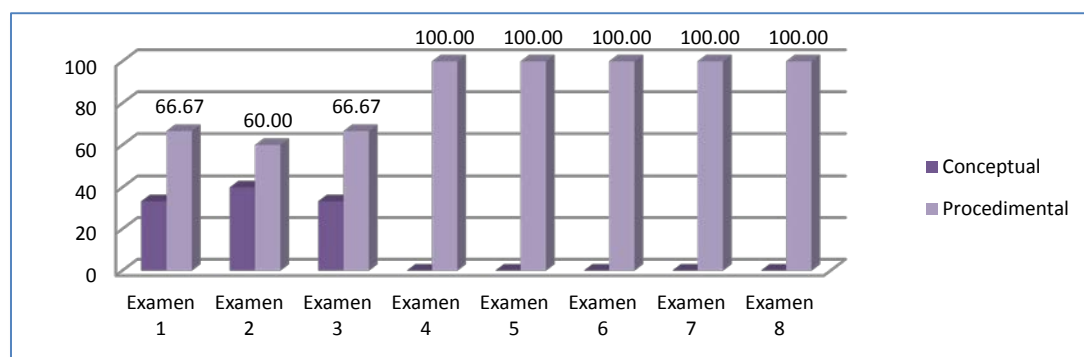
Cabe destacar la ausencia total de la evaluación de los contenidos curriculares 4.6, 4.10, 4.11 y 4.12, de manera que, en los exámenes analizados, se obviaban indicaciones como el reconocimiento de los movimientos en la naturaleza, en el arte y en otras construcciones humanas (4.6), la investigación de regularidades geométricas en el entorno: naturaleza, arte, diseño, arquitectura, tejidos (4.10), las coordenadas geográficas y husos horarios (4.11) o la planificación y diseño de técnicas para la obtención directa de medidas inaccesibles del entorno inmediato (4.12), que muestran la escasa adaptación por parte de estos docentes al objetivo de conectar las matemáticas con el entorno próximo del estudiante. En este mismo sentido hay contenidos tratados sólo parcialmente, olvidando cuestiones como la representación a escala de la realidad: planos, mapas y maquetas (4.2).

En otro sentido, la naturaleza de las preguntas de estos exámenes impedía el desarrollo de contenidos vinculados a la utilización de tecnología como la utilización de programas de trazado geométrico (4.3), utilización de tecnologías informáticas para generar figuras geométricas y comprobar relaciones y propiedades (4.10).

Respecto a la consideración de los dos criterios de evaluación que se desarrollan en el currículo cabe destacar que estos profesores aplicaron sólo uno de ellos, el 7, olvidando completamente el 8 tanto en su vertiente conceptual como procedimental, aspecto que se estudió con más precisión en el apartado dedicado a la demanda cognitiva solicitada.

A continuación, se presentan los resultados derivados del análisis de estas situaciones de evaluación matemática con relación a la tipología de preguntas empleadas en función de la Demanda Cognitiva (DC), el Soporte Comunicativo Utilizado (SCU), el Soporte Comunicativo Implicado (SCI) y la Naturaleza de la Tarea (NT).

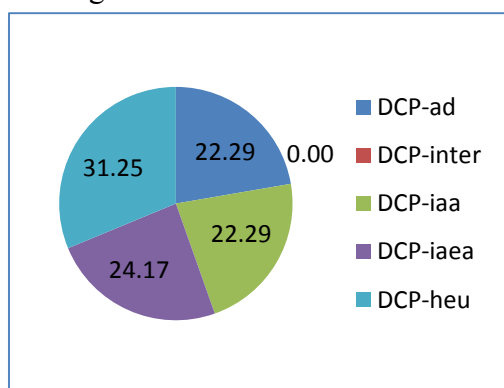
En cuanto a la demanda cognitiva solicitada en las tareas propuestas en los 8 exámenes se observó que, de forma general, predominaban los ejercicios de carácter procedimental (Gráfica 1). De hecho, cinco de los ocho exámenes carecían de preguntas conceptuales. En general, el 13,33% de los exámenes tenía carácter conceptual y el 86,67 % carácter procedimental.



Gráfica 1. Porcentajes totales por examen para la Demanda Cognitiva.

Un análisis más en profundidad, en relación a la Subcategoría Demanda Cognitiva Conceptual muestra que en los únicos exámenes donde se plantearon preguntas conceptuales (exámenes 1, 2 y 3), predominaba el recuento directo de información factual (DCC-rd) con un 83,3% y la identificación y ejemplificación entre conceptos (DCC-i) con un 16,7 %. Siendo estas tareas consideradas de un bajo nivel de demanda cognitiva.

Con el estudio de la Subcategoría Demanda Cognitiva Procedimental (Gráfica 2) se comprobó que la Interpretación/Traducción entre lenguajes o formas de representación (DCP-inter) no estaba presente en ninguno de los exámenes. La aplicación directa de algoritmos o técnicas (DCP-ad) y la identificación de algoritmo a aplicar y aplicación del mismo (DCP-iaa) gozaron de un peso correspondiente a un 22,29 %. En este punto, destacamos como aspecto positivo el que predominaran tanto la identificación y aplicación encadenada de los algoritmos a aplicar (DCP-iaea) como la delimitación y concreción de la formulación del problema y/o utilización de estrategias o heurísticos para la resolución (DCP-heu) frente al resto de subcategorías.



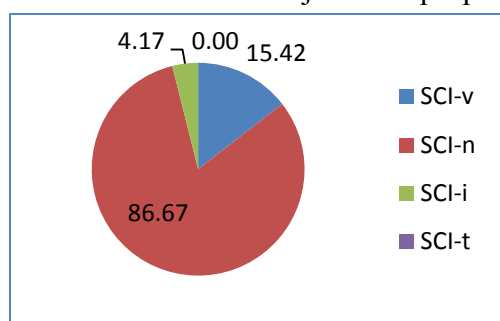
Gráfica 2. Porcentajes de la Subcategoría Demanda Cognitiva Procedimental

En relación al Soporte Comunicativo Utilizado se comprueba cómo los cuatro primeros exámenes, correspondientes al profesor 1, gozaban de una estructura similar a la del examen 5 del profesor 2, en relación al uso mayoritario del carácter verbal para sus enunciados. Sin embargo, se comprueba un cambio de tendencia al analizar los exámenes 6, del profesor 2, y 7 y 8, del profesor 3, en los cuales se empleaba el soporte de imagen como elemento principal.

Considerando que una pregunta de un examen puede llevar asociadas dos o más subcategorías, se percibe que, de forma general, imperaba el formato verbal con un 62,92 %, seguida de la subcategoría de imagen con un 46,25 %.

Además, no se encontró ningún enunciado que empleara ni el soporte numérico ni el de tablas para proporcionar la información pertinente al alumnado, característica que están relacionadas de forma más habitual con los bloques de Números, Estadística o Probabilidad.

El análisis de las subcategorías pertenecientes al Soporte Comunicativo Implicado muestra (Gráfica 3) que el alumnado debía realizar un gran esfuerzo por dar una respuesta numérica como resultado de los ejercicios propuestos.



Gráfica 3. Porcentajes del Soporte Comunicativo Implicado.

De estos datos se desprende que lo que le interesaba realmente al profesorado que elaboró estos exámenes era el dato numérico del resultado. Se comprueba que no se valoraba o, al menos, no se establecía de forma implícita en los enunciados la utilización de gráficos en el desarrollo de los ejercicios para resolver las situaciones planteadas.

Finalmente, los datos correspondientes a la categoría Naturaleza de la Tarea en cuanto al contexto en el que se inscribe muestran que el contexto intramatemático fue el contexto predominante con un 75 %, seguido del contexto realístico (25 %).

Estos datos indican lo alejado que estaban estas propuestas de examen con relación a las ideas plasmadas en el currículo que hacen referencia a que los enunciados deben ser cercanos al alumnado. Si se acepta que la evaluación no es un hecho aislado, sino que está íntimamente unida a la instrucción (Chamoso & Cáceres, 2009), los datos obtenidos indican también un cambio metodológico necesario para la introducción de tareas próximas al alumno, que permitan capacidades diferentes a la aplicación algorítmica de los contenidos desarrollados en el aula de formación, como la investigación e indagación sobre la utilización de la geometría en el contexto próximo.

También, se pone de manifiesto el hecho que se recoge en el estudio de Cárdenas et al. (2013) según el cual el profesorado tiene una mayor tendencia a evaluar aspectos que están ligados con algún contenido y que no impliquen el uso de la creatividad, creatividad que va asociada en mayor medida a pruebas reales o de carácter manipulativo que en esta muestra no fueron consideradas.

Conclusiones, limitaciones del estudio y prospectiva

El estudio sobre el tratamiento por parte de los profesores de los contenidos curriculares de geometría en los exámenes que proponen a estudiantes de tercer curso de Educación Secundaria muestra, que independientemente del momento educativo en que realice la prueba escrita, se da preponderancia sólo a unos cuantos contenidos.

En este sentido, una de las principales limitaciones del estudio es la falta de información sobre la posible utilización por parte de los docentes de otros instrumentos de evaluación y el tratamiento de los contenidos curriculares en ellos. También sería interesante conocer el tratamiento de los contenidos curriculares en la dinámica cotidiana del aula y no sólo en momentos clave como las evaluaciones realizadas al final de un periodo, si bien este hecho, permite conocer los contenidos geométricos que para los profesores tienen mayor relevancia (Prieto & Contreras, 2008). Para este fin, podrían realizarse entrevistas semiestructuradas como una estrategia de investigación más económica que las observaciones de aula, sin embargo reconocemos las limitaciones que ésta tiene.

Además, se comprueba que los enunciados tenían un carácter procedimental que prevalecía frente al conceptual, donde los estudiantes debían emplear, para la resolución de los mismos, la aplicación directa de algoritmos o la interpretación o traducción entre lenguajes o formas de representación, de manera que se constata la falta de ejercicios que permitieran emplear otro tipo de heurísticos planteados en el currículo de referencia, como por ejemplo, la división del problema geométrico en partes, así como la búsqueda de problemas afines. En los enunciados analizados, el profesorado empleaba el Soporte Comunicativo Verbal con mayor intensidad, mientras que el alumnado debía dar sus respuestas de forma numérica en la mayoría de los casos.

Otra limitación importante es el tamaño de la muestra empleada, sería conveniente realizar una investigación con una muestra más amplia, para, sin ánimo de generalizar resultados, tener una visión más próxima a lo que puede ser la realidad en la evaluación de contenidos geométricos en la Comunidad Autónoma de Extremadura. En la selección de la muestra sería interesante considerar exámenes propuestos en diferentes zonas geográficas y sociales, en centros públicos y privados, todos los exámenes realizados por los profesores que participen para este bloque temático. El estudio de la evaluación que se realiza en las aulas, unido al desarrollo curricular de la geometría, puede ser un paso importante en el campo de la investigación en didáctica de las matemáticas en general y del desarrollo profesional de profesor de matemáticas en particular.

Referencias bibliográficas

- Alonso, M., Gil, D., & Martínez, J. (1996). Evaluar no es calificar. La evaluación y la calificación en una enseñanza constructivista de las ciencias. *Investigación en la Escuela*, 30, 15-26.
- Azcárate, P. (2006): Propuestas alternativas de evaluación en el aula de matemáticas. En J.M. Chamoso (Ed.), *Enfoques actuales en la didáctica de las Matemáticas*, 187-219. Madrid: MEC, Colección Aulas de Verano.
- Barrantes, M., & Balletbo, I. (2012). Referentes principales sobre la enseñanza de la Geometría en Educación Secundaria. *Campo abierto: Revista de educación*, 31(2), 133-148.
- Cárdenas, J.A., Blanco, L.J., Guerrero, E., & Gómez, R. (2013). Resolución de problemas de matemáticas y evaluación: aspectos afectivos y cognitivos. En V. Mellado, L. J. Blanco, A. B. Borrachero & J. A. Cárdenas (Eds.), *Las emociones en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Ciencias Experimentales y las Matemáticas*, 67-88. Badajoz, España: DEPROFE.
- Cárdenas, J. A. (2014). *La evaluación de la resolución de problemas en matemáticas: concepciones y prácticas de los profesores de secundaria* (Tesis Doctoral inédita). Departamento de Didáctica de las Ciencias Experimentales y de las Matemáticas, Universidad de Extremadura, Badajoz (España).
- Chamoso, J.M., & Cáceres, M.J. (2009): Analysis of the reflections of student-teachers of Mathematics when working with learning portfolios in Spanish university classrooms. *Teaching and Teacher Education*, 25(1), 198-206.
- Cockcroft. W. H. (1985). Las Matemáticas sí cuentan. Informe de la Comisión de Investigación sobre la Enseñanza de las Matemáticas en las Escuelas bajo la presencia del Dr. W. H. Cockcroft. *Ministerio de Educación y Ciencia*. Madrid, España.
- Colomina, R., Onrubia, J., & Naranjo, M. (2000). Las pruebas escritas y la evaluación del aprendizaje matemático en la educación obligatoria. *Revista Electrónica Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 3(2). Consultado el 3 Mayo de 2013 en http://www.aufop.com/aufop/uploaded_files/articulos/1402925699.pdf
- Decreto 87/2002, de 25 de junio, por el que se establece el currículo de Educación Secundaria Obligatoria en Extremadura. *DOE n° 77 del 4 de julio de 2002*, 8482-8483.
- Decreto 83/2007, de 24 de abril, por el que se establece el Currículo de Educación Secundaria Obligatoria para la Comunidad Autónoma de Extremadura. *DOE n° 51 del 5 de mayo de 2007*, 7980-8152.
- Díaz-Barriga, A. (1994). Una polémica en relación al examen. *Revista Iberoamericana de Educación* 5. Consultado el 4 de mayo 2012 en <http://www.rieoei.org/oeivirt/rie05a05.htm>
- Geddes, D., Fuys, D., & Tischler, R. (1988). The van Hiele model of thinking in Geometry among adolescents (JRME Monograph No. 3.). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

- Goñi, J.M. (2008). La evaluación de las competencias determinará el currículo de matemáticas. En Goñi (Ed.), 32-2 *ideas clave. El desarrollo de la competencia matemática*. España: GRAO, 167-185.
- Hernández, R., Fernández-Colado, C., & Baptista, P. (2008). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill.
- Leder, G. (Ed.). (1992). *Assessment and Learning of Mathematics*. Hawthorn, Victoria: Australian Council for Educational Research.
- Mengual, E., Gorgorió, N., & Albarracín, L. (2013). Validación de un instrumento para la calificación de exámenes de matemáticas. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa y N. Climent (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XVII*, 367-382.
- Prieto, M., & Contreras, G. (2008). Las concepciones que orientan las prácticas evaluativas de los profesores: Un problema a develar. *Estudios Pedagógicos*, XXXIV(2), 245-262.
- Webb, N. M. (1993). Collaborative group versus individual assessment in mathematics: Processes and outcomes. *Educational Assessment*, 1(2), 131-152.