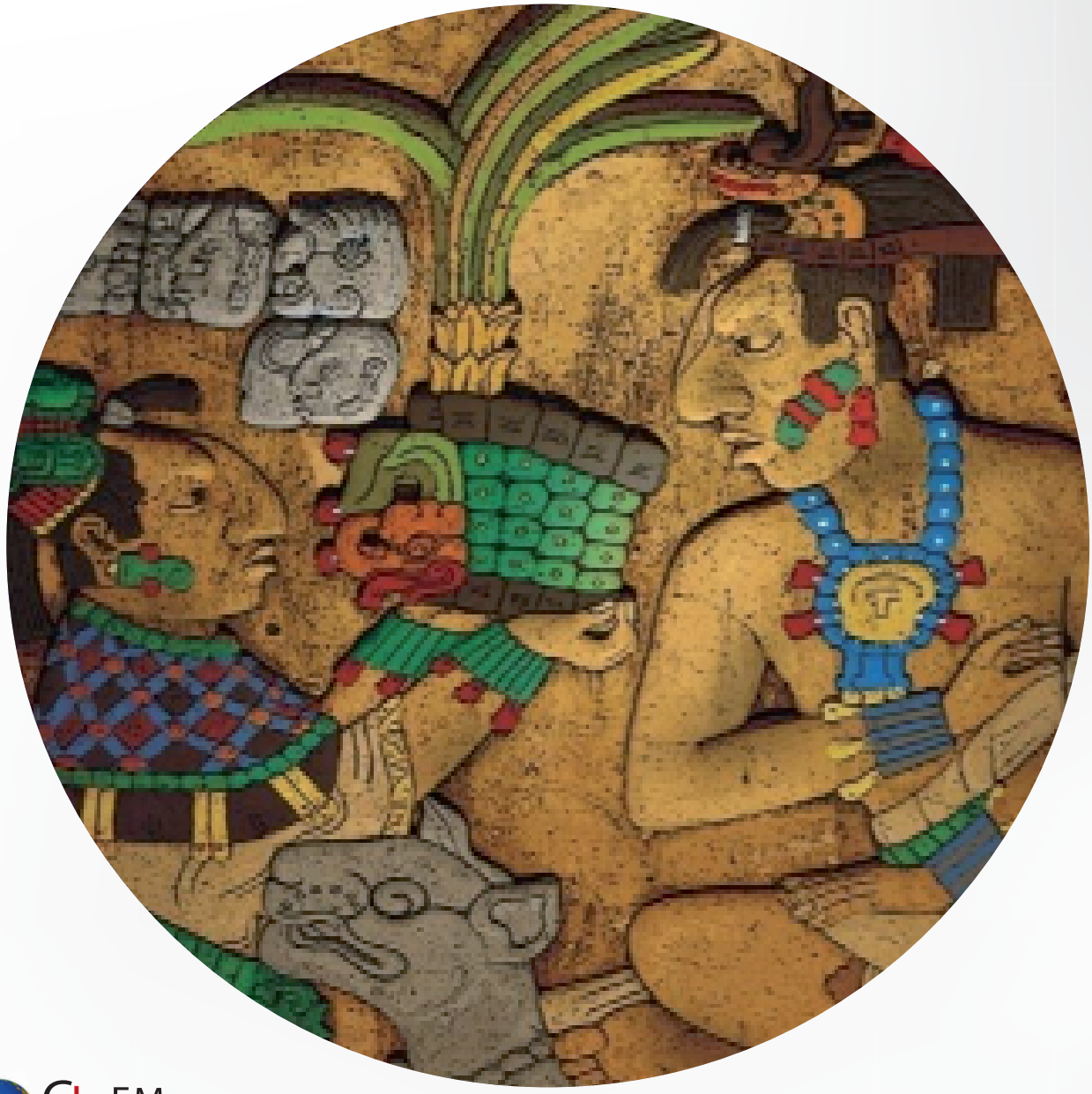
Educación Matemática en las Américas 2015

Volumen 8: Estadística y Probabilidad



CIAEM
CME
Fundado Founded: 1961

© 2015
Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM)
Paseo de la Reforma 383., 7° Piso,
Colonia Cuauhtémoc, Delegación Cuauhtémoc,
México D.F. CP 06500, MÉXICO

www.ciaem-iacme.org
ciaem.iacme@gmail.com

Educación Matemática en las Américas 2015
Volumen 8: Estadística y Probabilidad
Editado por Patrick (Rick) Scott y Ángel Ruiz
Colaboradora: Sarah González.

ISBN Volumen: 978-9945-603-05-7
ISBN Obra Completa: 978-9945-415-97-1

El Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM) es una organización fundada en 1961 asociada a la International Commission on Mathematical Instruction. Busca potenciar la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en las Américas.

Se permite la reproducción de cualquier parte de este libro para fines no lucrativos siempre que se consignen los créditos a los autores y al Comité Interamericano de Educación Matemática.

Para citar este libro y este volumen:

Comité Interamericano de Educación Matemática (2015). *Educación Matemática en las Américas: 2015. Volumen 8: Estadística y Probabilidad*. Editores: Patrick (Rick) Scott y Ángel Ruíz. República Dominicana.

Tabla de Contenidos

Presentación i-iii

A probabilidade que a história nos conta 1-13
Ana Nogueira Junqueira-BR

Análise Combinatória: um olhar no currículo das Instituições de ensino superior do estado de Pernambuco - Brasil 14-19
Virginia Gonçalo-BR, Anderson Silva-BR

Caracterización del razonamiento estadístico sobre el concepto de estimación puntual en estudiantes de grado noveno 20-32
Claudia Yamile Munõz Galindo-CO

Concepciones de futuros profesores de Matemáticas sobre pensamiento estadístico 33-45
Nelly Martínez Camacho-CO

Da taxa de variação média à taxa de variação instantânea: uma proposta no âmbito do ensino médio 46-58
Edson Rodrigues da Silva-BR, Maria José Ferreira da Silva-BR

Da teoría à arividade prática pedagógica: dialogando com os dados 59-68
Camila Rubira Silva-BR, Suzi Samá Pinto-BR

Enseñanza de la Estadística en contexto: análisis e interpretación de datos oficiales 69-84
José Carrasco Escobar-MX, José Rodríguez Silva-MX

Evolución de las tendencias de pensamiento probabilístico de los estudiantes para profesor de secundaria: el caso de Matemática 85-91
Amable Moreno-AR, José Cardeñoso-ES

La Distribución Normal y lo concepto de número: caminos que se cruzan en lo 1° año en lo ciclo de alfabetización en la escuela primaria 92-103
Maria Lucia Wodewotzki-BR, Sandra Vilas Bôas Campos-BR

La herramienta tecnológica como instrumento cognitivo sobre el concepto de Correlación Lineal 104-114
Gessure Espino Flores-MX, Enrique Hugues Galindo-MX, José Ulloa Ibarra-MX

La toma de decisiones en una situación de riesgo 115-122
José Antonio Orta Amaro-MX, Ernesto Sánchez-MX

Letramento Estatístico e o Exame Nacional de Ensino Médio 123-130
Amari Goulart-BR, Cileda de Queiroz e Silva Coutinho-BR

Livro paradidático no ensino de Estatística no ensino fundamental 131-142
Ailton Oliveira-BR, Roberta Costa-BR, Beatriz Delalíbera-BR, Luana Alves-BR, Gessica Silva-BR, Lorena Oliveira-BR, Edmeire Fontana-BR

Livro paradidático no ensino de Probabilidade no ensino fundamental 143-153
Ailton Oliveira-BR, Valéria Ciabotti-BR, Camila Giardulo-BR, Joana Silva-BR, Luana Segawa-BR, Roberta Moreira-BR

O ensino de Estatística no curso de Engenharia de Produção 154-164
Geraldo Bull da Silva Junior-BR, Celi Espasandin Lopes-BR

O ensino de gráficos estatísticos no contexto da educação crítica 165-172
Celso Campos-BR, Otávio Jacobini-BR, Denise Ferreira-BR, Maria Lucia Wodewotzki-BR

O Meio Ambiente como tema transversal articulado ao estudo dos conceitos estatísticos 173-182
Karine Melo-BR, Claudia Groenwald-BR

O trabalho com conceitos de contagem e de probabilidade através de um jogo de dominós 183-191
José Lopes-BR

O uso do jogo Max_Min Estatístico em sala de aula 192-203
José Lopes-BR

Projetos de aprendizagem no ensino da Estatística 204-209
Mauren Porciúncula Moreira da Silva-BR, Suzi Samá Pinto-BR

Proporção simples: um estudo de caso sobre o raciocínio de estudantes brasileiros do ensino fundamental 210-219
Marlí Schmitt Zanella-BR, Idelmar André Zanella-BR

Transnumeración de los datos: el caso de las tablas de frecuencia 220-225
Soledad Estrella-CL, Raimundo Olfos-CL

Uma formação profissional colaborativa para o ensino de Probabilidade e Estatística: abordagens empíricas com alunos do ensino fundamental 226-237
Leandro Souza-BR, Celi Lopes-BR

Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS) para o ensino de Estatística na educação básica 238-247
Arno Bayer-BR, Camila Nunes-BR, Norton Manassi-BR

Utilização do dotplot na aprendizagem da variabilidade estatística no ensino médio 248-257
Irene Cazorla-BR, Mario Moreno-BR

Presentación

La **XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática** realizada en Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México, del 3 al 7 de mayo del 2015, contó con la participación de cerca de 1000 personas de 23 países y la presentación de más de 500 trabajos (conferencias plenarias y paralelas, mesa redonda, minicurso, diálogos, comunicaciones, talleres y posters) Esta fue una reunión regional de la *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI). El CIAEM es la organización afiliada al ICMI con mayor antigüedad. Su creación se remonta al año 1961 cuando se realizó la primera conferencia en Bogotá, Colombia.

Un gran nivel científico dominó los trabajos, en un ambiente cultural muy especial, con una gran hospitalidad por parte de los colegas de Chiapas.

Los conferencistas plenarios fueron Michèle Artigue (Francia), Carlos Vasco (Colombia), Diane Briars (USA), Abraham Arcavi (Israel-Argentina), Celia Hoyles (Reino Unido), María Teresa Tatto (USA) y Alicia Ávila (México). Ellos también desarrollaron *Diálogos* especiales, espacios adicionales de conversación e intercambio.

Una mesa plenaria organizada por la *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe* contó con la participación de Carlos Sánchez (Cuba), Nelly León (Venezuela), Edison de Faría (Costa Rica), Luis Carlos Arboleda y Jhony Villa (Colombia).

El evento tuvo conferencias paralelas y minicursos impartidos por académicos invitados, entre ellos: Gabriele Kaiser (Alemania), Richard Noss (Reino Unido), Manuel Santos (México), Gert Schubring (Alemania), José Chamoso (España), José Luis Lupiáñez (España), Arthur Powell (USA), Alessandro Ribeiro (Brasil), Roberto Araya (Chile), Gilberto Obando (Colombia), Uldarico Malaspina (Perú).

Los dos temas principales fueron la *Preparación de docentes que enseñan matemáticas* y el *Uso de tecnologías en la Educación Matemática*.

El congreso tuvo el valioso patrocinio de varias instituciones internacionales y nacionales: International Commission on Mathematical Instruction; Universidade Luterana do Brasil; Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas, y Centro de Investigación y Formación en Educación Matemática de la Universidad de Costa Rica; Secretaría de Educación del Estado de Chiapas; Universidad del Valle de México; Sindicato de Trabajadores de la Educación de México; Centro Regional de Formación Docente e Investigación Educativa (CRESUR); Oficina de Convenciones y Visitantes de Chiapas; Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas de México; Escuela Normal Superior de Chiapas; Universidad de Costa Rica; HP; CASIO; y EduSystems.

Desde el 2007 el CIAEM ha logrado, entre otras cosas:

- Potenciar la calidad académica en los trabajos, la organización eficiente y la proyección de las conferencias interamericanas
- Consolidar la publicación de trabajos seleccionados de la Conferencias en la revista *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* (editada en Costa Rica)

- Fortalecer la relación del CIAEM con la comunidad internacional de Educación Matemática, especialmente con el ICMI y la *International Mathematical Union*.
- Crear y consolidar la Medalla *Luis Santaló*
- Apoyar el desarrollo del *Capacity and Networking Project* del ICMI en América Latina (Costa Rica 2012, Perú 2016)
- Auspiciar la creación y las actividades de la *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe*
- Apoyar la organización del *I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe*, celebrado en Santo Domingo, República Dominicana, en noviembre del 2013
- Consolidar el uso intenso de tecnologías de la comunicación en todas las actividades del CIAEM
- Crear una comunidad virtual del CIAEM de gran proyección tanto a través de su sitio web principal como de su página en Facebook
- Fundar en México el *Comité Interamericano de Educación Matemática* con personalidad jurídica para atender los múltiples compromisos formales que posee
- Traducir al español y publicar algunos textos del NCTM relacionados con la temática *Principles to actions* y continuar una línea importante de colaboración con el *National Council of Teachers of Mathematics* de los USA

En la XIV CIAEM fue confirmada la decisión de tener la XV CIAEM en Medellín, Colombia, en el 2019. Será desde hará 58 años la segunda ocasión en que se realizará una CIAEM en tierra colombiana.

CIAEM es el evento internacional más importante en Educación Matemática en América Latina. Constituye un punto de referencia para investigadores, docentes y estudiantes en todo el continente.

La mayoría de los textos de base para las presentaciones plenarias o paralelas ha sido incluidas en el número 15 de los *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* que se edita en Costa Rica: http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem.

Las comunicaciones, talleres, minicursos y posters han sido incluidas en esta colección digital de volúmenes que titulamos *La Educación Matemática en las Américas: 2015.* Los trabajos se han organizado de la siguiente manera:

- Volumen 1 *Educación Matemática en las Américas 2015: Formación Inicial para Primaria*
- Volumen 2 *Educación Matemática en las Américas 2015: Formación Inicial para Secundaria*
- Volumen 3 *Educación Matemática en las Américas 2015: Formación Continua*
- Volumen 4 *Educación Matemática en las Américas 2015: Uso de Tecnología*
- Volumen 5 *Educación Matemática en las Américas 2015: Etnomatemática y Sociología*
- Volumen 6 *Educación Matemática en las Américas 2015: Currículum, Evaluación y Competencias*
- Volumen 7 *Educación Matemática en las Américas 2015: Investigación*
- Volumen 8 *Educación Matemática en las Américas 2015: Estadística y Probabilidad*
- Volumen 9 *Educación Matemática en las Américas 2015: Geometría*
- Volumen 10 *Educación Matemática en las Américas 2015: Álgebra y Cálculo*

- Volumen 11 *Educación Matemática en las Américas 2015: Educación Primaria*
- Volumen 12 *Educación Matemática en las Américas 2015: Historia y Epistemología*
- Volumen 13 *Educación Matemática en las Américas 2015: Nuevos Enfoques y Relación con Otras Áreas*
- Volumen 14 *Educación Matemática en las Américas 2015: Necesidades Especiales*
- Volumen 15 *Educación Matemática en las Américas 2015: Resolución de Problemas*
- Volumen 16 *Educación Matemática en las Américas 2015: Modelación*
- Volumen 17 *Educación Matemática en las Américas 2015: Talleres y Minicursos*
- Volumen 18 *Educación Matemática en las Américas 2015: Posters*

El CIAEM desea agradecer a todos los autores que presentaron sus trabajos en la XIV CIAEM y que incluimos en esta colección de volúmenes. Y a todos los revisores, directores de tema, y colaboradores que participaron en la revisión científica de las ponencias de este magno evento.

La organización detallada y la edición en sus diversas dimensiones fue realizada por nuestro segundo vicepresidente Patrick Scott (Estados Unidos) quien dedicó un esfuerzo extraordinario para tener estas *Memorias* disponibles. Quiero expresar en nombre de nuestra organización nuestro agradecimiento a Rick. Nuestra compañera Sarah González (Vocal para El Caribe) se encargó de tramitar su registro en República Dominicana que contó con el apoyo de la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra de ese país, a las que también expresamos nuestra gratitud.

Los enlaces de estos volúmenes se han colocado en las páginas web oficiales del CIAEM.

Esperamos que la publicación de todos estos trabajos contribuya al progreso de la investigación y la acción de aula en la Educación Matemática de las Américas.

Angel Ruiz
Presidente
Comité Interamericano de Educación Matemática

A Probabilidade que a história nos conta

Ana Lucia Nogueira **Junqueira**
Universidade Anhanguera de São Paulo
Brasil
anajunqueira@gmail.com

Resumo

Encontramos na literatura diferentes abordagens da probabilidade. Cotidianamente nos deparamos com as noções de acaso, incerteza e aleatoriedade, como também com crenças e concepções a elas relacionadas. Para melhor compreender essas noções e conceitos envolvidos no estudo da probabilidade faz-se necessário voltar o olhar para a história para perscrutar a origem e o percurso dessas ideias, bem como as motivações dos pensadores em cada época, os principais empecilhos, resistências ou dificuldades epistêmicas, objetivando evidenciar se algumas incompreensões dessas ainda se refletem em determinados níveis de conhecimento. Nessa direção, trata-se de um extrato da revisão de literatura de minha tese de doutorado no que tange à gênese e evolução histórica do conceito de probabilidade e ideias relacionadas, que muito elucidaram a pesquisa junto a um grupo de professores de matemática da educação básica, permitindo trabalhar as dificuldades que se evidenciaram, aqui apontadas aquelas da análise que se inserem nesse contexto.

Palavras chave: probabilidade, história, evolução conceitual, dificuldades epistemológicas.

Primeiras noções sobre aleatoriedade, acaso e incerteza

Olhando para a História da Matemática vemos que os gregos, além dos amplos conhecimentos de geometria, se destacam por terem inventado a maneira como a matemática moderna é trabalhada, por meio de axiomas, teoremas e provas, apesar de séculos depois, em 1930, Kurt Gödel, amigo de Einstein, com seu Teorema da ter provado que esta abordagem tinha uma inconsistência. Mesmo assim, a matemática seguiu seu caminho ao estilo grego, o estilo de Euclides. Porque os gregos não desenvolveram conhecimentos sobre probabilidades? Afinal eles costumavam apostar num jogo, semelhante a um jogo de dados, jogado com *astrágalos*, feito de ossos de calcanhar de carcaça de animais; o astrágalo tinha seis faces não uniformes, em virtude da anatomia dos animais, apenas quatro delas eram estáveis para permitir que o osso se apoiasse ao ser lançado (a probabilidade da peça cair em cada um desses lados era de 40% para as faces estáveis contra 10% para as outras). De acordo com Mlodinow (2009, p. 36), o jogo comum era jogado com quatro astrágalos e o resultado mais raro, em que as quatro peças caiam em lados diferentes, era chamado jogada de Vênus, com probabilidade de, aproximadamente, 384/10.000 de acerto, mas os gregos não sabiam sobre esse cálculo. Na verdade, utilizavam o jogo mais para consultar seus oráculos, sem se preocuparem em entender as regularidades do mesmo. É plausível afirmar que não se preocuparam em perceber essas regularidades porque acreditavam que o futuro se desvelava conforme a vontade dos deuses. Com essa visão de mundo, um entendimento da aleatoriedade seria irrelevante, e mesmo contraditório em relação às suas crenças. Na Antiguidade, chamava-se muitas vezes *probabilidade* àquilo que, segundo as

aparências, podia ser considerado como verdadeiro ou certo. De acordo com Ribeiro (2006, p. 14), citando Platão, a retórica de Tísias e Córax consistia na descoberta de que "a probabilidade [εi'$\kappa o'\tau\alpha$ – provável, plausível, aparência] deve ser tida em maior apreço do que a verdade [$\alpha\lambda\varepsilon\tau\varepsilon'\omega\varsigma$]" (*Fedro*, 267a)". Essa afirmação torna-se mais significativa considerando o fato de a retórica ter se originado nos meios jurídicos. Ainda segundo Mlodinow (2009, p. 40), o principal legado de Cícero no campo da aleatoriedade foi ter usado o termo *probabilis*, que acabou originando o termo atual. Segundo Franklin (2001, p. 113, tradução nossa): "*Probable* e seus cognatos em outras línguas modernas derivam do aprendido latim medieval *probabilis* e *verosimili*, decorrentes de Cícero e geralmente aplicado a uma opinião para significar *plausível* ou *geralmente aprovado*". No entanto, ainda segundo Mlodinow (2009, p. 40), é numa seção do *Digesto*, código de leis romanas compilado pelo imperador Justiniano, no século VI, que o termo *probabilidade* aparece pela primeira vez como figura jurídica. Por outro lado, na Roma antiga, onde as regras de testemunho eram tribais como na Idade das Pedras, a probabilidade de verdade num testemunho podia variar e apenas o reconhecimento da inconsistência da veracidade de testemunhos sob essa égide é que impulsionou a criação de novas regras para a combinação das possibilidades – isso foi um ponto de partida.

Vale destacar que a palavra probabilidade deriva do Latim *probare* (provar ou testar). O termo provável é muito utilizado em eventos incertos, sendo também substituído por outros como 'sorte', 'risco', 'azar', 'incerteza', 'duvidoso', dependendo do contexto. No entanto, a noção de probabilidade tem sua origem mais remota relacionada à prática dos jogos, ditos de azar. O jogo foi a mola propulsora e também o primeiro beneficiário da criação da teoria das probabilidades. Parece que tudo começou com o jogo de dados. Entretanto, as informações são um pouco desencontradas, o que é natural uma vez que uma nova escavação pode alterar a data da descoberta, mas sabe-se que por volta de 1200 a. C. já existiam os dados feitos de ossos de animais. Uma combinação cruzada de referências consultadas (Sheynin, 1974; Boyer, 1974; Eves, 1997; Berstein, 1997; Stigler, 1998; Silva, 2004; Hacking, 2006; Kahneman, 2009; Mlodinow, 2009) resultaram nas considerações que se seguem no texto.

Desde a pré-história os dados teriam sido utilizados no Oriente; escavações feitas em cemitérios mostram que, provavelmente, têm origem na Ásia. A expressão "jogar dados" aparece no jogo indiano *Rig-veda*, e há indícios que foram inventados na Índia, pois em escavações feitas em Kalibangan, Lothal e Ropar, foram encontrados dados que remontam a mais de 2000 a. C. Na forma primitiva do *Jogo do osso* (ou *knucklebone*, em árabe*)*, crianças atiravam o osso na expectativa de deixar certo lado para cima ou para baixo. Em escavações em Shahr-i Sokhta (na antiga Pérsia, hoje o Irã), sítios arqueológicos levaram à descoberta de dados, dos mais antigos que se têm conhecimento, como parte de um jogo de Gamão, com mais de cinco mil anos de idade, que provavelmente foi importado da Índia. Encontrados em tumbas egípcias, os dados sugerem um período de cerca de 2000 a. C. Posteriormente os dados de osso ganharam valores numéricos, tornando-se mais parecidos com os atuais. No entanto, o jogo atingiu grande popularidade com os gregos e os romanos. Os romanos eram exímios jogadores, principalmente na era de luxo do Império Romano (século II d. C.), onde jogar dados era um passatempo predileto, tanto que esse jogo por dinheiro foi motivo de leis especiais em Roma. Na Idade Média, a Igreja Católica era contra o jogo, nem tanto pelo jogo em si, mas pelo vício de beber e dizer palavrões, comum durante os torneios. Os jogadores inveterados do século XVI procuravam cientistas de renome para que estes lhes dessem fórmulas 'mágicas' que garantissem ganhos substanciais nas bancas de jogo. O fato é que desde sempre os jogos foram utilizado em apostas, como também serviram para prever futuro, decidir conflitos ou dividir heranças.

Entretanto, não foram apenas os jogos que contribuíram para a formação do conceito de probabilidade. Também a prática dos seguros teve forte influência e parece ter se iniciado com comerciantes mesopotâmicos e fenícios que o aplicavam à perda de cargas dos navios por conta de roubos ou naufrágios. Essa prática teve continuidade com os romanos e gregos estendendo-se até aos comerciantes marítimos italianos em tempos mais recentes. Não se sabe muito sobre a prática das seguradoras, especula-se que se baseavam em estimativas empíricas das probabilidades. O crescimento de conglomerados urbanos, após a idade média, popularizou o uso de seguros. Apesar do crescimento desse tipo de negócio, os prêmios dos carregamentos entre as Américas e as Índias continuavam sendo calculados pelas técnicas milenares. É daí, então, que surgem os primeiros estudos matemáticos acerca desse tipo de negócio. Em 1693 foi publicado o primeiro trabalho sobre seguros, *An Estimate of Degrees of Mortality of Mankind*, de autoria de Edmond Halley (1656-1742), o mesmo cujo nome batizou o cometa. Antes dele, em 1570, na obra *De proportionibus Libre V*, Cardano fez uma tentativa de estudar matematicamente os seguros de vida, no entanto, não alcançou repercussão. Halley mostrou como determinar a anuidade de um seguro (prêmio) em termos da esperança de vida e da probabilidade de sobrevida. O estudo de seguros atingiu a maturidade, em 1730, com Daniel Bernoulli (1700-1782), que utilizou a abordagem de calcular o número esperado de sobreviventes após "n" anos, dado certo número de nascimentos (conceito de probabilidade condicional). Nesse momento começavam a aparecer grandes empresas de seguros que tinham condições de trabalhar com embasamento científico.

Por outro lado, a abordagem matemática do ***acaso*** e do ***risco*** só teve início há cerca de 500 anos. Uma contribuição decisiva para a criação da Teoria das Probabilidades deu-se por meio da correspondência trocada entre os matemáticos franceses Blaise Pascal (1623-1662) e Pierre de Fermat (1601-1665), nas quais ambos chegaram à solução correta, por caminhos diferentes, de um problema célebre da divisão das apostas, em 1654. Estas cartas históricas são documentos fundadores da Teoria das Probabilidades, que mais tarde desenvolveu-se através dos trabalhos de Jacques Bernoulli (1654-1705), Moivre (1667-1759) e Thomas Bayes (1702-1761). Bernoulli teve publicado seu livro *Ars Conjectandi*, em 1713, oito anos após sua morte por seu sobrinho Nicola. Nesse livro, que foi o primeiro dedicado inteiramente às probabilidades, é que se encontra a lei dos grandes números, hoje chamado Teorema de Bernoulli, que pode assim ser enunciada: *A frequência relativa de um acontecimento tende a estabilizar-se nas vizinhanças de um valor quando o número de experimentos cresce indefinidamente.* Vale ressaltar que Jacques foi a primeira pessoa a estudar ligações entre probabilidade e qualidade da informação, ao levantar a questão de como desenvolver probabilidade a partir de amostras de dados em 1703, base do estudo de probabilidade a posteriori. Segundo Bernstein (1997, p. 118), em missivas trocadas com Leibniz comentava achar estranho este fato poder ser resolvido em termos de jogos de dados, mas não sabermos as chances de um homem de 20 anos sobreviver a um de sesenta, ou ainda, se o grau de uma doença é mais provavelmente fatal que outra – a peste do que a hidropsia ou a hidropsia do que febre – limitações considerada graves relatadas no *Ars Conjectandi*.

Moivre introduziu e demonstrou a lei normal e a Bayes deve-se o cálculo da chamada probabilidade das causas, que consiste em determinar a probabilidade dos acontecimentos perante certas condições iniciais.

Na segunda metade do século XVIII e primeira metade do século XIX a probabilidade adquiriu uma forma concisa e sistemática. Laplace, em 1812, publicou importante obra *Teoria Analítica das Probabilidades*, sistematizando os conhecimentos da época e produzindo a Lei de

Laplace. Destaca-se também a participação de Gauss (1777-1855) no aprofundamento da Lei Normal e a de Poisson na sua *Teoria da lei dos grandes números e da lei de repartição*. No século XIX e princípio do século XX a teoria das probabilidades tornou-se um eficaz instrumento, exato e fiável do conhecimento. Surge daí a célebre escola de San Petersburgo, com grandes nomes como Tchébychev (1821-1894), Markov (1856-1922) e Liapounav (1857-1918). À escola de San Petersburgo sucedeu a escola soviética, cujo grande destaque foi Kolmogorov (1903-1987), que axiomatizou corretamente a Teoria das Probabilidades e um dos sucessos da sua abordagem foi dar uma definição rigorosa da expectância condicional.

A teoria das probabilidades começou com um ***jogo***. Fermat e Pascal viabilizaram que o estudo do *acaso* tomasse uma expressão matemática, introduzindo o *Cálculo das Probabilidades*. Hoje a Teoria das Probabilidades transformou-se num dos ramos da matemática com mais aplicações nas outras ciências, exatas, naturais e sociais, inclusive em situações bem mais cotidianas. Por exemplo, deparamo-nos com uma grande quantidade de jogos, como loteria esportiva, sena, entre outras ofertas de variados prêmios ou sorteios, em que as pessoas querem saber quais são suas chances de ganhar antes de apostar ou concorrer, ou ainda, se resolvemos fazer um investimento, poupança, ações ou de outro tipo, desejamos saber a priori como estes se comportam no mercado investidor para decidir qual deles dará melhor retorno financeiro que possa atender às nossas expectativas. Ou ainda, um médico pode se deparar com a incerteza dos efeitos que poderão ser provocados num paciente ao administrar-lhe um novo remédio e terá que deter conhecimentos para uma tomada de decisão, enfim, em diversas ocasiões da vida cotidiana nos deparamos com situações em que temos de tomar uma decisão, sem a certeza do que poderá ocorrer exatamente.

Entretanto, como é de se esperar em todo processo de construção do conhecimento, muitas concepções equivocadas ocorreram e até hoje aparecem, motivando larga escala de pesquisas, tanto entre os cientistas das áreas afetas, como entre pesquisadores envolvidos com o ensino desse tipo de conhecimento. O fato é que alguns equívocos (*misconceptions*) e falácias se refletem até os dias de hoje no campo da probabilidade.

Sobre as noções relacionadas à probabilidade

Desde a antiguidade, filósofos, físicos e matemáticos dedicam-se à tarefa de compreender e dar um sentido ao que chamamos de "evento aleatório" e "probabilidade". Entretanto, nessa tarefa as divergências cuidaram de dividir os estudiosos em diferentes correntes de pensamento acerca do conceito de probabilidade, entre as quais três se destacam: o "frequentismo", defendido por aqueles que entendem probabilidade como "intensidade de ocorrência"; o "subjetivismo", defendido pelos que entendem probabilidade como "grau individual de convencimento em uma ocorrência", expresso por sua disposição em "agir" de alguma forma específica; e o "logicismo", defendido pelos que entendem probabilidade como "noção lógica relacional" a ser valorada relativamente a um corpo de "evidência".

Kasner e Newman (1976) ao falar sobre acaso e probabilidade, fazem referência a Sherlock Holmes, detetive de histórias de ficção, como uma caricatura do raciocínio por dedução provável. Esse método de raciocínio, embora se assemelhe ao procedimento formal do silogismo, é menos rígido sem se enquadrar em normas exatas, por isso mais apropriado para o raciocínio diário. Na Matemática, certas suposições fundamentais são feitas e delas são deduzidas as conclusões, segundo o raciocínio lógico formal, garantindo assim validade ao nosso pensamento. Entretanto, nem todos os pensamentos são matemáticos, grande parte das crenças não é certa,

apenas provável. Mas dizer que um acontecimento é determinado pelo acaso é declarar que não se sabe como ele é determinado. Mesmo assim, no "reino do acaso", percebe-se certa regularidade, certa "ordem dentro da desordem" e acerca de acontecimentos atribuídos ao acaso formamos uma gradação de crença racional.

Embora a maioria dos nossos julgamentos seja baseada na probabilidade e não na certeza, raramente dedicamos um pensamento cuidadoso à "mecânica" desse modo de raciocínio. Em geral, os julgamentos na tomada de decisão são feitas por dedução provável, nos negócios, na mesa de jogos, em um processo de júri, até mesmo em experimentos. Costumamos dizer em dias quentes e nebulosos que provavelmente choverá. Um meteorologista pode precisar de maiores evidências, mas não o cidadão comum. Costuma-se raciocinar assim, no senso comum, em assuntos que vão do mais trivial ao mais importante, com o uso frequente das palavras "provável" e "probabilidade", sem precisar seu significado. De fato, segundo Bennett (2003), se a incerteza em um processo aleatório é fruto da nossa ignorância a respeito das forças que determinam o seu desfecho ou da existência de mecanismos inacessíveis inerentes aos recursos e condições que o circunscrevem e que determinam o seu desfecho, estas são questões que estão no centro da discussão filosófica envolvendo as noções de aleatoriedade e chance e que continuam em debate até os dias de hoje.

Para Kasner e Newman (1976, p. 219), o ponto de vista subjetivo da probabilidade, não tão em moda nos dias de hoje, manteve por certo tempo, notadamente no século XIX, uma posição respeitável. Um dos primeiros adeptos foi Augustus De Morgan, conceituado lógico matemático, que se referia à probabilidade como um "estado de espírito e ao grau de certeza ou incerteza que caracteriza nossas crenças". Não é um ponto de vista totalmente errôneo, mas traz dificuldades como fundamento para o cálculo de probabilidades. Na lógica matemática uma proposição ou é falsa ou é verdadeira, mas nossos conhecimentos, na maioria das vezes limitados, nos impedem de estarmos racionalmente certos, quer seja da verdade ou da falsidade. Esses autores reforçam que não há como medir a intensidade de uma crença, havendo ainda grande variação entre as crenças das pessoas acerca de um mesmo conjunto de fatos. Uma das dificuldades do ponto de vista subjetivo da probabilidade resulta do *princípio da razão insuficiente* – tido como base lógica em que repousa o cálculo da probabilidade subjetiva – e estabelece que "se ignoramos completamente as diferentes maneiras pelas quais um acontecimento pode ocorrer e, por isso, não temos base razoável para preferência, consideraremos como ocorrendo de um modo ou de outro". Este princípio, de acordo com Kasner e Newman (1976, p. 221), foi apresentado primeiramente por Jacob Bernoulli e, à época, analisado exaustivamente pelos matemáticos. Entretanto, este princípio contém parte da verdade, notadamente o critério de negação – não se pode dizer que dois acontecimentos são igualmente prováveis se há razões de preferência por um ou outro – e, portanto, qualquer cálculo de probabilidades consistente depende dele de alguma forma.

Em relação à probabilidade subjetiva, Kahneman e Tversky (1972) afirmam que as pessoas julgam a probabilidade de eventos com base na heurística da representatividade ao invés da probabilidade real. Representatividade, embora um pouco difícil de definir, reflete dois aspectos – as características da população e do processo que a gerou. Por exemplo, no caso do nascimento de seis filhos, a sequência de nascimento, em ordem do sexo, ser dada por MFMMMM é julgada menos provável do que FMFMMF (porque a primeira não reflete a proporção de meninos na população), ou também MMMFFF contra FMMFMF (porque a primeira não reflete a aleatoriedade da determinação do sexo). As pessoas também costumam ignorar o efeito do

tamanho da amostra sobre a probabilidade de um evento, resultando desse raciocínio por representatividade que o tamanho da amostra não afeta o resultado, o que nem sempre é verdade.

Já a *frequência relativa* ou *interpretação estatística* (que se aproxima da visão Aristotélica) é uma teoria considerada bastante viável e aceita mais amplamente ao evitar muitas destas dificuldades. Em grande parte esse ponto de vista é o responsável pela ampliação do uso das probabilidades no campo da Física, Astronomia, Biologia, Ciências Sociais e no mundo dos negócios. Para Kasner & Newmon (1976, p. 222): "Probabilidade é considerada como a frequência relativa em que um acontecimento ocorre em certa classe de acontecimentos". Dessa forma, a frequência relativa da classe de acontecimentos na classe maior de tentativas representa a probabilidade de o evento ocorrer. "Avançamos, então, para uma predição geral em um grande número de situações particulares e supomos que o futuro será consistente em relação ao passado".

Apesar do sucesso do método estatístico, ele sofre objeções. Algumas dificuldades podem ser facilmente sobrepujadas, outras não. Vale lembrar que o conceito de probabilidade obteve uma interpretação em termos de frequência relativa originalmente pensada para descrever certos jogos de azar onde as jogadas podem ser repetidas um grande número de vezes e onde é razoável assumir que os eventos elementares de interesse são igualmente prováveis. Similarmente, existem situações em que se obtêm muitas observações sob as mesmas condições, o que permite dar uma interpretação frequentista à probabilidade. Uma das limitações é o conceito de limite – embora matemáticamente defensável e usado por físicos e estatísticos – uma vez que os fenômenos estudados, por mais complexos que sejam, costumam ser finitos e limitados. Por outro lado, existem muitos eventos que podem ser pensados em um sentido probabilístico, mas que não podem ter uma probabilidade em termos de uma interpretação frequentista. Nesse caso, tal afirmação de probabilidade descreve o grau de convicção do observador sobre uma situação que ocorrerá uma única vez, não sendo possível observar ensaios repetidos nessa situação de incerteza. Entretanto, não é preciso que um experimento seja não-repetitivo para aplicar a interpretação subjetivista de probabilidade, a interpretação subjetivista de probabilidade faz sentido se o experimento for repetível ou não. A justificativa de frequências em séries de repetições está baseada em certas suposições: uma delas é que os ensaios desta série de repetições são independentes; outra é que os ensaios são realizados sob idênticas condições. Apesar disso, em última instância, a decisão de razoabilidade destas suposições é uma decisão subjetiva, portanto, existe uma parcela de subjetividade na interpretação frequentista de probabilidade.

Tudo o que se disse até agora conduz sem dúvida a um fato: nenhuma proposição contém qualquer verdade provável exceto em relação a outro conhecimento. Dizer que uma proposição é provável, quando o conhecimento em que se baseia é obscuro ou inexistente, é absurdo. É preciso esclarecer que, muitas vezes, fazemos declarações sobre probabilidade sem menção clara sobre qual ramo do conhecimento a que nos estamos referindo. Dificuldades filosóficas foram prevalentes na probabilidade desde a sua criação, a probabilidade não é uma propriedade inerente de um evento, mas baseada no modelo subjacente escolhido. Conceitos probabilísticos estão mais perto de uma forma (consistente) de pensar sobre o mundo ao invés de descrever o mundo de uma forma consistente, o que pode parecer paradoxal, e só resolvido através de uma análise cuidadosa.

Sobre ideias que desafiam a racionalidade

Segundo Taleb (2011, p. 15), antes da descoberta da Austrália, as pessoas do Antigo Mundo estavam convencidas de que todos os cisnes eram brancos, pois ninguém nunca tinha visto um cisne negro. Esta era uma crença inquestionável por ser absolutamente confirmada por evidências empíricas, no entanto, não é porque não eram conhecidos, que os cisnes negros não existiam – o que remete ao clássico problema formulado pelo Popper: um único caso falsifica uma tese. Taleb usa a metáfora para se referir a eventos raros, improváveis ou de difícil previsão, mas que causam grande impacto (cita, por exemplo, o ataque às Torres Gêmeas do World Trade Center, de 11 de setembros de 2001). De acordo com o livro, não somos preparados para lidar com esses eventos e diante da complexidade e incerteza crescentes, sua opinião é de que serão cada vez mais frequentes (e influentes) do que o senso comum imagina. Este autor, árduo defensor do impacto do altamente improvável, critica com certa avidez os defensores do comportamento gaussiniano para eventos probabilísticos em que predominam fenômenos aleatórios e de análise de incertezas, por exemplo, no comportamento do mercado financeiro e de bolsas de valores, em fenômenos de cataclismos que provocam grandes tragédias ambientais, entre outros. Para este autor, esses fenômenos são considerados *outliers* nas análises estatísticas, isto é, com grandes desvios da curva normal gaussiana

No livro Outliers, Gladwell (2008) elabora uma extensa pesquisa destinada a comprovar que são inúmeras as variáveis que levam uma pessoa ao topo. A princípio podemos pensar que pessoas de sucesso, como celebridades, cientistas ilustres, prodígios da matemática, músicos e atletas bem sucedidos, não se enquadram na experiência dos comuns mortais. Mas isto não é verdade: eles são produto da história, da comunidade, das oportunidades e dos legados. Os indivíduos fora de série – como Mozart, Bill Gates ou os britânicos da banda The Beatles – além de terem praticado suas habilidades por uma quantidade de tempo extraordinária, se beneficiaram de oportunidades disponíveis, vantagens ocultas ou heranças culturais. Além de estudar as pessoas em si, é preciso focar a análise em questões como o meio e a época em que viveram, quem foram seus amigos, dentre outros fatores, pois tudo isso exerce influência nas realizações humanas. No fim das contas, os *outliers* não estão tão à margem assim.

Dan Ariely, americano de origem israelita e professor de psicologia, tornou-se uma das maiores referências no que hoje se chama Economia Comportamental. É autor do livro *Previsivelmente Irracional: Aprenda a Tomar Melhores Decisões*, publicado em 2008, em que desmonta alguns preconceitos em relação à tomada de decisões baseadas em critérios puramente racionais. Ariely indica que seu objetivo é ajudar a pensar profundamente sobre o que move as pessoas em situações de tomada de decisão, trazendo um leque de experiências científicas, descobertas e até situações divertidas, visando levar as pessoas a reparar que certos erros que cometemos são sistemáticos, portanto, se percebidos podem ser evitados.

Na análise do papel do risco na sociedade, Bernstein (1997) argumenta que a concepção do controle do risco constitui uma das ideias centrais que distinguem os tempos modernos do passado mais remoto. Em seu livro *Desafio aos deuses* comenta que a vastidão do tema é imensa e o risco afeta aspectos profundos da psicologia, matemática, estatística e história; relata a notável aventura intelectual que libertou a humanidade dos oráculos e adivinhos, mediante as ferramentas poderosas da administração do risco disponíveis nos dias de hoje. O autor esclarece os conceitos de probabilidade, amostragem, teoria dos jogos e tomada de decisões racional versus irracional. As seções finais do livro levantam questões importantes sobre o papel do computador, a relação entre fatos e crenças subjetivas, o impacto da teoria do caos, o papel dos

mercados de derivativos em franco desenvolvimento e a total predominância dos números. Quando corremos um risco, apostamos em um resultado que será consequência de uma decisão que tomamos, embora não saibamos ao certo qual será o resultado. Enfatiza que o problema está nas consequências de nossas decisões e não nas próprias decisões, a decisão é apenas o início.

Alguns equívocos recorrentes relativos ao raciocínio probabilístico

Vamos pensar em uma questão aparentemente simples: qual resultado é mais provável no lançamento simultâneo de duas moedas: duas caras, duas coroas ou uma de cada? Para esta pergunta, algumas pessoas poderiam pensar (equivocadamente) que os três resultados são equiprováveis, cada um com probabilidade de 1/3. É comum deixarem de considerar que sair faces distintas nesse tipo de lançamento de moedas tem probabilidade dobrada do que faces iguais, pois o espaço amostral, indicando C para cara e K para coroa, é dado por $\{(C,C),(C,K),(K,C),(K,K)\}$. Podem-se fazer diversas variações desse tipo de questão, como, por exemplo, qual a probabilidade de sair apenas uma face cara em dois lançamentos consecutivos da moeda, cujo resultado é o mesmo. Entretanto, mesmo o conceituado matemático do século XVIII, Jean Le Rond D'Alembert, à época um dos mais influentes cientistas franceses, sustentou que a probabilidade de se conseguir uma cara em dois lançamentos consecutivos era de 2/3, por entender que haveria apenas três casos possíveis equiprováveis, ou seja, C, KC e KK. Na verdade, ao pensar num primeiro lançamento sendo cara, nem cogitou o segundo lançamento neste caso, por já ter obtido o resultado esperado. Vários autores relatam este 'erro' de D'Alembert, em especial Todhunter (1865, pp. 258-259, 263), comentando ainda que a questão consta do artigo *Croix ou Pile*, de autoria de D'Alembert, publicado pela primeira vez em 1754 na *Encyclopédie ou Dictionnaire Raisonné des Science, des arts et des métiers*. De acordo com Bennett (2003, pp. 74-75) muitas pessoas por meio de um raciocínio errado ainda chegam à resposta correta, uma vez que na opinião delas um resultado com as faces diferentes das moedas voltadas para cima reflete com mais precisão o comportamento das moedas em longo prazo. Tversky e Kahneman (1971) rotulam este equívoco de "crença na lei dos pequenos números" e afirmam que essa crença surge da confiança exagerada na estabilidade de resultados observados em pequenas amostragens.

Dentre as histórias relatadas por Bernstein situa-se a que trata de Thomas Bayes, nascido em Londres, em 1791, pastor presbiteriano, inconformista, que deixou um legado importante para a matemática, em apenas dois trabalhos, só publicados postumamente. Um desses trabalhos, *Essay towards solving a problem in the doutrine of chances*, foi uma obra que o imortalizou entre os estatísticos, economistas e cientistas sociais. O artigo estabeleceu a base do moderno método de inferência estatística, questão anteriormente levantada por Jacob Bernoulli. Quando morreu em 1761, em testamento, Bayer legou o manuscrito desse ensaio para Richard Price, que além de pastor e defensor da liberdade, foi também um matemático e apenas a liberdade de contrair empréstimos o incomodava. Após estudar os trabalhos de Harley e Moivre, entre outros, publicou no *Philosophical Transations of the Royal Society of London* dois artigos sobre este assunto relacionando tabelas de mortalidade com prêmios de seguros de vida e anuidades. Atualmente esses dois clérigos são conhecidos pelo Teorema de Bayes e pela Tabela Price.

Dentre esses dois legados, o Teorema de Bayes é particularmente importante para o estudo de probabilidade. Após a publicação do artigo de Bayes, em 1764, no *Philosophical Transactions*, o trabalho caiu no esquecimento, sendo resgatado mais tarde pelo matemático francês Pierre-Simon de Laplace (1749-1827), que o revelou ao mundo. Os fundamentos da teoria de probabilidade foram então colocados por Laplace em uma forma (hoje dita clássica)

que se manteve praticamente inalterada até o início do século 20. Nesse tratado Laplace fez novas contribuições e reuniu, sistematizou e ampliou resultados desenvolvidos por seus predecessores. Uma das contribuições é quando define a probabilidade a priori (que originou grandes controvérsias) para o cálculo da chamada probabilidade inversa (ou probabilidade de causas ou a posteriori), conceito este sugerido pelo trabalho de Bayes em 1764. A solução de Bayes para um problema de "probabilidade inversa" foi apresentada naquele seu ensaio, com a declaração de um caso especial do teorema de Bayes. Vale recordar que, nas primeiras décadas do século XVIII, foram resolvidos muitos problemas, relativos à probabilidade de certos eventos, dadas as condições especificadas, a chamada *probabilidade condicional*. Por exemplo, dado um determinado número de bolas brancas e pretas em uma urna, quando se quer saber qual é a probabilidade de se tirar uma bola preta, é o tipo de questão que se enquadra nos chamados problemas de probabilidade a posteriori. Mas a atenção logo se voltou para o inverso deste tipo de problema: uma vez que já se retirou uma ou mais bolas da urna, o que pode ser dito sobre o número de bolas brancas e pretas na urna? O Ensaio de Bayes contém a solução para um problema similar, de Abraham de Moivre, autor da Doutrina das Chances, de 1718.

Vamos nos concentrar na forma elementar de inferência bayesiana, que consiste em inferir um ponto único - uma estimativa de probabilidade (probabilidade a posteriori) ou uma frequência – de duas hipóteses mutuamente exclusivas e complementares, com base na observação de uma delas. Segundo Gigerenzer e Hoffrage (1995, p. 687) esta tarefa elementar tem sido alvo de quase todos os estudos experimentais sobre inferência bayesiana nos últimos 25 anos. O seguinte "problema da mamografia" é um exemplo adaptado do artigo em questão*: "A probabilidade de câncer de mama é de 1% para uma mulher de quarenta anos de idade que participa de exames de rotina. Sabe-se que a mamografia apresenta resultado positivo em 80% das mulheres com câncer de mama, mas esse mesmo resultado ocorre também com 9,6% das mulheres sem o câncer. Uma paciente nessa faixa etária tinha uma mamografia positiva em um exame de rotina. Qual é a probabilidade dessa paciente realmente ter um câncer de mama?"*

Montando o problema de maneira bayesiana temos como probabilidade *a priori* – ter câncer (CA) ou não câncer (NCA). Como, em média, 1% das mulheres por volta dos 40 anos tem tumor de mama, a probabilidade *a priori* desta paciente é de 0,01 e de não ter é de 0,99. Incorporando o resultado da mamografía temos: se o câncer estiver presente, a probabilidade condicional de a mamografia dar resultado positivo é de 0,80 (80%) e, de não estar presente, é de 0,096 (9,6%). Multiplicando a probabilidade a priori pela condicional, obtemos as probabilidades conjuntas: 0,01 x 0,8 = 0,008 P (CA ∩ +) e 0,99 x 0,096 ≅ 0,095 P (NCA ∩ +)

Tabela 1
Probabilidade conjunta

	CA∩+	NCA∩+
Probabilidade a priori	0,01	0,99
Probabilidade condicional	0,8	0,096
Probabilidade conjunta	**0,008**	**0,095**

Fonte: elaborada pela pesquisadora

Observemos que a soma das probabilidades a priori é 1, mas o mesmo não ocorre com a probabilidade conjunta. Para fazer esta soma dar 1, precisamos normalizar, isto é, dividir cada probabilidade conjunta pela soma das duas probabilidade conjuntas. Assim, como 0,008+0,095=0,103 teremos: 0,008/0,103≅ 0,0776 (CA) e 0,095/0,103 ≅ 0,922 (NCA)

Tabela 2
Probabilidade a posteriori

	CA	NCA
Probabilidade a priori	0,01	0,99
Probabilidade condicional	0,8	0,096
Probabilidade conjunta	0,008	0,095
Probabilidade a posteriori	**0,0776**	**0,922**

Fonte: elaborada pela pesquisadora

Vemos, portanto, que usando o raciocínio bayesiano podemos concluir que a chance de a paciente não ter câncer de mama é de 92,2%, contra 7,76 % de ter. Podemos resolver o mesmo problema usando diretamente o Teorema de Bayes, sabendo que queremos encontrar a probabilidade a *posteriori* p (câncer |positivo). Usando os símbolos H e $-H$ para as para as duas hipóteses complementares (ter e não ter câncer) e D para o diagnóstico positivo da mamografia, teremos:

$$p(H|D) = \frac{p(H).p(D|H)}{p(H).p(D|H)+p(-H).p(D|-H)} \cong \frac{(0{,}01).(0{,}8)}{(0{,}1).(0{,}8)+(0{,}99).(0{,}96)} \cong 0{,}078$$

Vale ressaltar que situações semelhantes aplicadas a especialistas, de diversas áreas, da saúde às finanças, revelam equívocos de análises, com tendências em superestimar a probabilidade a posteriori ou mesmo ignorar a probabilidade a priori, fenômeno denominado por Kahneman de 'falácia da probabilidade de base' (*a priori*). É bom lembrar, como alerta Diáz e Fuentes (2005), bem como Batanero, Contrera e Díaz (2012), que a probabilidade condicional é fundamental em aplicações de estatísticas, porque permite incorporar mudanças em nosso grau de crença sobre eventos aleatórios à medida que adquirimos novas informações. Portanto, a compreensão e raciocínio corretos sobre a mesma são requisitos necessários para o estudo da inferência estatística, tanto clássica como bayesiana. No campo profissional e até mesmo na vida cotidiana, tomar boas decisões em situações de incerteza é em grande parte baseada no raciocínio condicional. As autoras ainda reforçam que investigações recentes em ensino da probabilidade mostram a existência de intuições incorretas, equívocos de raciocínio e erros de compreensão e aplicação do conceito de probabilidade condicional, alguns deles já bastante difundidos e que o ensino formal de probabilidade é insuficiente para superá-los. É necessário tomar consciência destas dificuldades para lidar com os problemas condicionais com ferramentas adequadas.

Falk (1986) também comenta que muitos estudantes não discriminam adequadamente entre os dois sentidos da probabilidade condicional P (A | B) e P (B | A) e esse erro é denominado de 'falácia da condicional transposta'. Aparece com freqüência em contextos médicos, onde se confunde a probabilidade de ter uma doença, quando o teste teve um diagnóstico positivo, com a probabilidade de um resultado positivo do teste diagnóstico, uma vez que se têm a doença. A prevalência desse erro pode ter consequências importantes, por exemplo, a confusão entre a probabilidade de uma criança afetada com a Síndrome de Down ter o resultado de amniocentese pré-natal positivo, que tem alta probabilidade, e o fato de que, uma vez que o teste foi positivo, realmente a criança ter a síndrome de Down, que é muito menor. No artigo Falk relata que um problema deste tipo foi apresentado aos alunos para avaliar a presença deste viés, sendo que pouco mais de 40% dos futuros professores e cerca de um terço dos alunos de Psicologia deram a resposta correta. Os resultados foram um pouco melhores no estudo de caso realizado por Pollatsek, Well, Konold e Hardman (1987), entretanto afirmam suspeitar de que o grande erro é

uma confusão entre P(A| B) e P (A ∩ B). O erro mais comum foi calcular a probabilidade conjunta em vez da probabilidade condicional solicitada. Em certo sentido, estes resultados são complementares ao "efeito conjunção" discutido por Tversky e Kahneman, sendo mais freqüente em ambos os grupos considerar a mesma confiança em ambas as previsões, que Pollatsek *et al*. indicam como falácia da condicional transposta.

Considerando que mesmo profissionais experientes podem errar na interpretação de dados estatísticos e probabilísticos, não surpreende o fato da probabilidade estar em conflito com opiniões intuitivas de pacientes, pessoas leigas e até alunos. Experiências adquiridas ao longo da vida solidificam intuições a respeito de probabilidades, corretas ou equivocadas. Além disso, algumas ideias intuitivas a respeito da probabilidade parecem preceder as ideias formais e, se corretas são um auxílio à aprendizagem, mas se incorretas, podem prejudicar a compreensão dos conceitos probabilísticos. Não surpreende que, ao longo da história, a conquista de um entendimento de probabilidade tenha sido extremamente gradual, espelhando a forma como o entendimento da aleatoriedade e da probabilidade se desenvolve em um indivíduo.

Essa visão é o que se pretendeu dar neste extrato da tese, mesmo que parcial frente ao volume de ideias e informações, mas procurando transcender à descrição apenas histórica da evolução do pensamento probabilístico para mostrar também sua influência em várias áreas do saber, bem como os percalços, equívocos, ou mesmo divergências, que ocorreram ao longo da construção desse conhecimento, notadamente aqueles que se referem mais especificamente ao teor da pesquisa.

Considerações finais

A história da evolução das ideias estocásticas evidenciam os percalços, dificuldades e equívocos por quais passaram as figuras chave e outros pensadores na construção da Teoria da Probabilidade. Como exemplo, podemos citar as interpretações místicas atribuídas ao acaso e à incerteza, o ‘erro de D’Alembert’, o ‘erro de Bernoulli’, os percalços no desenvolvimento do raciocínio bayesiano, entre outras. Com certeza, a pesquisa histórico-epistemológica do desenvolvimento do raciocínio e dos conceitos probabilísticos muito contribuiu para ampliar o olhar para as dificuldades inerentes à aprendizagem destes conceitos por parte de alunos, em qualquer nível de escolaridade, e mesmo em cursos de formação de professores. Nesse sentido, considero essencial esse tipo de conhecimento por parte do professor para que possa se preparar e planejar sua prática em sala de aula de forma a minimizar erros conceituais ou raciocínios equivocados, favorecendo a aprendizagem e contribuindo com a melhoria da educação.

Meus pressupostos acerca tanto da construção do pensamento estocástico ser mais complexo do que costuma ser apresentado nos cursos de formação e nos livros didáticos, como da necessidade de uma ruptura com o pensamento determinístico e linear, que se perpetua em nossos currículos, ficaram confirmados nos estudos realizados na pesquisa. Nessa direção, podemos destacar, de uma maneira geral, que ficaram evidenciadas algumas crenças e concepções consolidadas nos processos de formação dos professores-cursistas, sujeitos da pesquisa. A análise dos dados levantados na pesquisa (Junqueira, 2014), relativa aos conteúdos específicos, evidenciaram, em menor ou maior grau, dificuldades na compreensão de processos aleatórios, notadamente em experimentos frequentistas, na distinção entre os conceitos de eventos mutuamente exclusivos e de eventos independentes, na compreensão do conceito de probabilidade condicional. Evidenciaram também a presença de falácias (do jogador e da representatividade), que representam equívocos no modo de pensar em situações de acaso,

incerteza e aleatoriedade. Essas evidências demonstram concepções dos cursistas em relação ao conteúdo de probabilidade, no que tange aos conceitos básicos, e revelam, sobretudo, a dificuldade no desenvolvimento do raciocínio probabilístico. Entretanto, esses resultados só confirmam o que vêm apontando muitas pesquisas similares na área de Educação Estatística, referenciadas na análise e na revisão de literatura, como por exemplo, Falk (1986), Lopes (1998), Díaz e La Fuente (2005), Ben-Zvi e Garfield (2005), Batanero, Contreras e Díaz (2012), Azcarate e Cardenoso (2011), Santana (2011), entre outros.

Sobre ideias que desafiam a racionalidade, dificultando o desenvolvimento do pensamento e raciocínio probabilísticos, pudemos confirmar na pesquisa a presença de equívocos, que encontramos registradas nas obras de Kahneman e Tversky (1982, 2012), Stigler (1986), Bernstein (1997), Taleb (2011), entre outros. Dentre as dificuldades de ordem histórico-epistemológicas, pudemos constatar na pesquisa a presença de duas falácias (do jogador e da representatividade) e a dificuldade em perceber o pensamento equivocado de D'Alembert na atividade que reproduzia a situação sobre o 'erro de D'Alembert'.

Bibliografia e referências

Batanero, C., Contreras, J. M., & Díaz, C. (2012). Sesgos en el razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza. *Revista digital Matemática, Educación e Internet*, *12*(2). Marzo/Agosto, 1-13.

Bennett, D. J. (2002). *Aleatoriedade.* São Paulo: Martins Fontes.

Bernstein, P. L. (1997). *O Desafio dos deuses: a fascinante história do risco* (23ª ed.) Rio de Janeiro: Elsevier.

Boyer, C. B. (1974). *História da Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher Ltda.

Díaz, C., & La Fuente, E. I. (2005). Razonamiento sobre probabilidad condicional e implicaciones para la enseñanza de la estadística. *Epsilon*, *59*, 245-260.

Eves, H. (1997). *Introdução à História da Matemática* (2ª ed.). Campinas: Editora da Unicamp.

Falk, R. (1986). Conditional probabilities: insights and difficulties. In R. Davidson, & J. Swift (Eds.), *Proceedings of the Second International Conference on Teaching Statistics* (pp. 292-297). Victoria, Canada: International Statistical Institute.

Franklin, J. (2001). *The science of conjecture: evidence and probability before Pascal.* Baltimore, MD: Johns Hopkins University Press.

Gigerenzer, G., & Hoffrage, U. (1995). How to improve bayesian reasoning without instruction: frequency formats. *Psychological Review*, *102*(4), 684-704.

Gladwell, M. (2008). *Fora de série: outliers.* Rio de Janeiro: Sextante.

Hacking, I. (2006). *The emergence of probability* (2ª ed.). Cambridge: Cambridge University Press.

Junqueira, A. L. N. (2014). *Probabilidade na educação básica: um estudo sobre concepções de professores de matemática* (Tese de doutorado). Universidade Anhanguera, São Paulo, SP.

Kahneman, D. (2012). *Rápido e Devagar: duas formas de pensar.* Rio de Janeiro: Objetiva.

Kahneman, D., & Tversky, A. (1972). Subjective probability: a judgment of representativeness. *Cognitive Psychology*, *3*, 430-454.

Kasner, E. & Newman, J. (1976). *Matemática e imaginação: o mundo fabuloso da matemática ao alcance de todos* (2ª ed.). Rio de Janeiro: Zahar.

Mlodinow, L. (2009). *O andar do bêbado: como o acaso determina nossas vidas*. Rio de Janeiro: Zahar.

Pollatsek, A., Well, A. D, Konold, C., & Hardiman, P. (1987). Understanding conditional probabilities. *Organization, Behavior and Human Decision Processes*, *40*, 255-269.

Ribeiro, A. A. (2006). *A filosofia da linguagem em Platão* (Dissertação de mestrado). Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas, Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Rio Grande do Sul, Brasil.

Sheynin, O.B. (1974). On the prehistory of the Theory of Probabilities. *Archive for History of Exact Sciences, 12*(2), 97-141

Silva, J. G. C. (2004). *Introdução à Probabilidade. Notas de aula.* Pelotas: Instituto de Física e Matemática, Universidade Federal de Pelotas, Rio Grande do Sul, Brasil. 838 p.

Stigler, S. M. (1998). *The History of Statistics: the measurement of uncertainty before 1900* (7ª ed.). Cambrige: Harvard University Press.

Taleb, N. N. (2011). *A lógica do Cisne Negro: o impacto do altamente improvável* (5ª ed.). Rio de Janeiro: Best Seller.

Tversky, A, & Kahneman, D. (1971). The belief in the law of small numbers. *Psychological Bulletin*, *2*, 105-110.

Todhunter, I. (1865). *A history of the mathematical theory of probability: from the time of Pascal to that of Laplace.* Cambridge: Macmillan.

Análise Combinatória: um olhar no currículo das instituições de ensino superior do estado de Pernambuco - Brasil

Virgínia Leite Santos **Gonçalo**
Faculdade de Ciências e Tecnologia Professor Dirson Maciel de Barros de Goiana
Brasil
vivaleite-p@hotmail.com
Anderson Douglas Pereira **Rodrigues da Silva**
Universidade Federal de Pernambuco
Brasil
anderdouglasprs@gmail.com

Resumo

O presente trabalho teve como objetivo investigar a presença da disciplina de combinatória nos cursos presenciais de matemática das Instituições de Ensino Superior (IES) do Estado Pernambuco. Para tal, iremos mapeamos as matrizes curriculares de dezoito IES que estão credenciadas junto ao MEC (Ministério da Educação e Cultura). Os resultados preliminares mostram que Pernambuco é o primeiro estado do Nordeste quanto ao número de cursos de Licenciatura em Matemática, e em todas as IES pesquisadas, apenas seis possuem disciplina especifica de combinatória. Como não houve analise das ementas não é possível verificar se as IES possuem outras disciplinas que tratem de forma explicita o ensino da combinatória à formação do professor.

Palavras chave: Análise Combinatória; Currículo; Licenciatura em Matemática.

Introdução

Os documentos de organização curricular como o National Council of Teachers of Mathematics (NTCM, 1989) relatam a importância da Combinatória para a construção do raciocínio lógico nos alunos de diferentes níveis escolares. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997), incentivam o ensino de Combinatória desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, destacam, também, entre outros conteúdos, o papel importante do raciocínio combinatório na formação dos alunos do Ensino Médio.

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidades no Ensino Médio (PCN, 1999, p.257).

O desenvolvimento do raciocínio combinatório, portanto, é de extrema relevância e deve ser alvo do ensino formal na Educação Básica.

Os Parâmetros para Educação Básica para o Estado de Pernambuco (PCPE, 2012, p. 58), faz menção a importância da articulação do Bloco Tratamento da Informação com o Campo das operações numéricas explorando a ideia de combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental. No Ensino Médio o conteúdo de Análise Combinatória encontra-se no Eixo Número e Operações, explorados por meio de diferentes representações, tais como: árvores de possibilidades, tabelas, n-uplas de elementos etc. Uma das expectativas de aprendizagem encontradas para esta etapa da Educação Básica é resolver e elaborar problemas de combinatória, envolvendo a ideia de permutação, combinação e arranjo. (PCPE, 2012, p. 137-139).

Apesar de a Combinatória estar presente nos documentos oficiais que norteiam a Educação no Brasil, trabalhos desenvolvidos como os de (Sturm, 1999; Esteves, 2001; Rocha, 2002; Costa, 2003; Pinheiro e Rosa, 2006 apud Pinheiro, 2007) apontam dificuldades no ensino de Análise Combinatória nas escolas.

Os resultados das avaliações do desempenho de estudantes brasileiros, apontados por indicadores nacionais e internacionais já consolidados, como o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) e o Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA), revelam a urgência da atenção para os inúmeros problemas encontrados em todos os níveis de ensino, além de comprovarem as dificuldades de aprendizagem, principalmente nas competências matemáticas.

De acordo com a Matriz da Prova Brasil 2011, que avalia os alunos do 3º e 5º dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, o descritor vinte que trata da resolução de problema com números naturais, envolvendo diferentes significados da multiplicação ou divisão: multiplicação comparativa, ideia da proporcionalidade, configuração retangular e combinatória, nesse item os alunos apresentam um baixo rendimento avaliados por meio de situações-problema contextualizadas.

O boletim de resultados gerais das avaliações realizadas em Pernambuco, com os alunos do 5º e 9º Anos do Ensino Fundamental e do 3º Ano do Ensino Médio (SAEPE/2011), apresentam também, um nível inferior ao que se é esperado na escala de desempenho de Matemática, mais especificamente nas escalas de proficiências relativa ao domínio de tratamento da Informação, quanto a utilizar procedimentos de combinatória e probabilidade.

O Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE), criado pelo MEC (Ministério da Educação) e aplicado periodicamente aos estudantes de graduação nas diversas áreas do conhecimento, tem como objetivo avaliar o rendimento de estudantes, ingressantes e concluintes, em relação aos conteúdos programáticos, suas habilidades e competências necessárias ao aprofundamento da formação geral e profissional, e o nível de atualização com relação à realidade brasileira e mundial.

A prova do ENADE/2011, no Componente de Conhecimento Específico na Área de Matemática, traz como referencial comum aos Cursos de Bacharelado e Licenciatura os conteúdos matemáticos Contagem e Análise Combinatória, entre outros.

Foi analisado, na questão discursiva três que trata do conteúdo de Análise Combinatória, um fraco desempenho dos estudantes em nível Nacional. Houve percentual alto de respostas em branco e de alunos que receberam nota zero, diversos estudantes demonstraram falta de interesse em resolver tal questão e dentre os estudantes que se dispuseram a resolvê-la, o ímpeto rumo à

utilização das fórmulas usuais associadas às técnicas de contagem (Arranjos, Combinações, Permutações) tomou o lugar da análise criteriosa.

Embora essas avaliações não possam ser tomadas como referência única ou central para denotar a boa ou má qualidade da educação em nosso país, os resultados apontam elementos que têm uma dimensão pedagógica que não se pode ignorar, na medida em que fornecem dados sobre o desempenho desses estudantes com relação à aprendizagem da matemática.

Entre as dificuldades, especialmente as de aprendizagem em Combinatória, podemos destacar a falta de compreensão dos textos estruturais dos problemas (Esteves, 2001; Rocha, 2002; costa, 2003; Pinheiro e Rosa, 2006 apud Pinheiro, 2007), a diferença entre problemas de Arranjo e Combinação (Sturm, 1999; Esteves, 2001; Costa, 2003; Pinheiro e Rosa, 2006 apud Pinheiro), e a valorização de técnicas nas quais as fórmulas cumprem um papel importante, segundo o Sistema Nacional da Avaliação no Ensino Superior (SINAES, 2011, p. 71).

Considerando os resultados das avaliações promovidas por órgãos Públicos oficiais Nacionais e as dificuldades acima mencionadas, torna-se desafiador a formação de profissionais na área de Matemática, para atenderem o que ressalta os PCN quanto ao Ensino da Combinatória na Educação Básica.

As Diretrizes Curriculares Nacionais (2001) abalizam que os cursos de Licenciatura em Matemática têm como objetivo principal a formação de professores para a Educação Básica. (Brasil, 2001. P01).

Diante desse contexto, na organização dos currículos das Instituições de Ensino Superior devem ser incluídos, no conjunto dos conteúdos profissionais, os conteúdos da Educação Básica, consideradas as Diretrizes Curriculares Nacionais para a formação de professores em nível superior, bem como as Diretrizes Nacionais para a Educação Básica e para o Ensino Médio. (Brasil, 2001. P06).

Sendo assim, o presente trabalho tem por objetivo investigar a presença da disciplina de combinatória nos cursos presenciais de matemática das Instituições de Ensino Superior do Estado Pernambuco e verificar se as mesmas estão cumprindo o que determinam as Diretrizes Nacionais quanto à elaboração de um currículo que contribua positivamente com a formação de professores para Educação Básica.

Metodologia

O estado de Pernambuco concentra o maior número de IES que oferecem o Curso de Licenciatura em Matemática da Região Nordeste.

Investigamos quantas e quais são as Instituições de Ensino Superior (IES), credenciadas ao MEC na modalidade presencial para os cursos de Licenciatura em Matemática em todo o Estado de Pernambuco. Foram encontradas dezoito Instituições com cursos autorizados pelo MEC, distribuídos em todo estado de Pernambuco, são elas: Centro de Ensino Superior de Arco Verde (CESA), Centro do Ensino Superior do Vale São Francisco (CESVASF), Faculdade de Ciências Aplicadas de Limoeiro (FACAL), Faculdade de Ciências Humanas do Sertão Central (FACHUSC), Faculdade de Ciências Humanas e Sociais de Igarassu (FACIG), Faculdade de Formação da Mata Sul (FAMASUL), Faculdade de Formação de Professores de Afogados da Ingazeira (FAFOPAI), Faculdade de Formação de Professores de Araripina (FAFOPA), Faculdade de Formação de Professores de Belo Jardim (FABJA), Faculdade de Formação de Professores de Goiana (FFPG), Faculdade de Formação de Professores de Serra Talhada

(FAFOPST), Instituto Federal de Educação, Ciências e Tecnologia de Pernambuco (IFPE), União de Escolas Superiores da FUNESO (UNESF), Universidade Católica de Pernambuco (UNICAP), Universidade de Pernambuco (UPE), Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Universidade Federal Rural de Pernambuco (UFRPE), Universidade Salgado de Oliveira (UNIVERSO.

Algumas considerações preliminares

Das dezoito IES encontradas, três são de Rede Pública Federal, uma de Rede Pública Estadual, dez de Rede Pública Municipal e quatro de Rede Privada.

Em todas as Instituições o regime é semestral; quanto à duração do curso apenas um tem duração de quatro anos e meio-UFRPE, as outras Instituições oferecem cursos de quatro anos de duração, sete disponibilizam em seus sites as matrizes curriculares e apenas uma disponibiliza as ementas das disciplinas, porém a falta dessas informações não nos impediu de compor nossos dados.

Foram analisados os pareceres do Conselho Estadual de Educação de Pernambuco (CEE/PE) dos anos de 2011 e 2012, a fim de adquirir todas as matrizes necessárias à nossa analise, com exceção das matrizes das seguintes IES- Faculdade de Formação de Professores de Araripina (FAFOPA) e Universidade Salgado Filho (UNIVERSO), ambas pela não disponibilidade de acesso por meio digital.

Nossa amostra é composta por dezesseis IES, Para as quais iremos mapear disciplinas específicas de Combinatória. De todas as matrizes curriculares analisadas, apenas seis possuem disciplina especifica de combinatória.

Tabela 1
Quantidade de Disciplinas de Combinatória Encontradas nas Matrizes Curriculares Analisadas
*Disciplinas encontradas. Quantidade*s

Combinatória e Probabilidade	1
Princípio de Contagem	2
Análise Combinatória	3

Nas disciplinas acima mencionas, não há variação de carga horária, todas apresentam 60 horas, mas aparecem em diferentes períodos:

Tabela 2
Disciplinas de Combinatória Encontradas nas Matrizes Curriculares Analisadas por Períodos
Instituições. Disciplinas encontradas. Período cursado

FUNESO	Combinatória e Probabilidade	5º
UPE	Princípio de Contagem	1º
UFPE	Princípio de Contagem	3º
FACIG	Análise Combinatória	Não Informado
IFPE	Análise Combinatória	3º
UFRPE	Análise Combinatória	5º

Identificamos também outro conjunto de disciplinas que estariam no agrupamento referente ao eixo Tratamento da Informação juntamente com a Combinatória- Estatística e Probabilidade.

Outro dado visto na analise dos pareceres CEE/PE 2011/2012 é que algumas instituições solicitaram alteração da Matriz Curricular alegando sintonia com as constantes transformações do mundo de trabalho e, em uma dessas IES – Faculdade de Formação de Professores de Belo Jardim (FABEJA) a disciplina Matemática Combinatória (5º Período) foi retirada do currículo no ano de 2012.

Como não houve análise das ementas não foi possível verificar se as demais IES possuem disciplinas que tratem de forma explícita o ensino da combinatória à formação do professor.

Conclusão

Desde a criação das primeiras licenciaturas oferecidas no país, onde são encontrados atualmente 930 cursos de Licenciatura em Matemática autorizados e distribuídos em todos os Estados e Distrito Federal, as estruturas curriculares dos cursos de formação de professores já passaram por diversas mudanças visando à melhoria das práticas educativas e de seus resultados. Tais mudanças foram fortemente destacadas a partir da publicação das Diretrizes Curriculares Nacionais, instituídas pelo Ministério da Educação com a finalidade de orientar a formulação dos projetos pedagógicos dos cursos de graduação e assegurar a formação dos futuros profissionais.

Investigamos as Matrizes Curriculares de dezesseis IES no Estado de Pernambuco que compunham nossa amostra, constatou-se que os seus currículos divergem quanto à presença da disciplina de Combinatória elencada nas Diretrizes Curriculares para formação de professores da Educação Básica.

Desta forma, percebe-se que esta disciplina ainda está longe de ser vista como conteúdo específico dos Cursos de Licenciatura em Matemática, podendo vir a comprometer a formação dos licenciandos. Assim, é possível que a ausência da mesma, ocasione eventuais lacunas no ensino da Combinatória na Educação Básica.

Sendo assim, essas eventuais lacunas de formação não minimizadas durante a graduação, provavelmente serão retransmitidas aos alunos desses futuros professores, aumentando assim o número de cidadãos incapazes de usar de modo satisfatório conceitos de Análise Combinatória que seriam úteis na análise de informações estatísticas ou probabilísticas, tão amplamente divulgadas pelos meios de comunicação contemporâneos.

Referências Bibliográficas

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. (1999). *Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio*. Brasília: MEC.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática.* Brasília.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação do Estado de Pernambuco. (2012). Parâmetros para Educação Básica do Estado de Pernambuco. (Pernambuco, p. 58, 137-139).

Costa, C. A. da. (2003). *As Concepções dos professores de Matemática sobre o uso da modelagem no desenvolvimento do raciocínio combinatório no Ensino Fundamental.* (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática). 163 p. Centro das Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Esteves, L. (2000). *Investigando os fatores que influenciam no raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos-8ª série do ensino fundamental.* (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática).

194p. Centro das Ciências Exatas e Tecnologias, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

_____ . Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Parecer n° 1.302

de novembro de 2001 - CNE/CES. Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais para os Cursos de Matemática, Bacharelado e Licenciatura. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/cne/arquivos/pdf/CES13022.pdf>.

NCTM. National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.*

Pernambuco. Secretaria de Educação.SAEPE-2011/Universidade Federal de Juiz de Fora, Faculdade de Educação, CAEd. V.2 (jan/dez.2011), Juiz de Fora, 2011-Anual.

Pinheiro, C.A. M. E., & Roza, I.S. (2006). *Da análise combinatória: o que ficou em alunos e professores do Ensino Médio?* (Monografia, Especialização em Educação Matemática). 52 p. Centro de Ciências Sociais e Educação, Universidade Estadual do Pará, Belém.

Rocha, J. C. (2002). *O ensino de análise combinatória: uma discussão sobre o uso do princípio multiplicativo na resolução de problemas.* (Dissertação de Mestrado em Educação). 96 p. Faculdade de educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

Sturm, W. (1999). *As possibilidades de um ensino de análise combinatória sob uma abordagem alternativa* (Dissertação de Mestrado em Educação). 94 p. Faculdade de Educação, Universidade de Campinas, Campinas.

Caracterización del razonamiento estadístico sobre el concepto de estimación puntual en estudiantes de grado noveno

Claudia Yamile **Muñoz** Galindo
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
yamy237@yahoo.es

Resumen

Esta propuesta se enmarca, dentro del campo de la educación estadística, busca describir y caracterizar el nivel de razonamiento estadístico que tienen los estudiantes de grado noveno de un colegio privado en la ciudad Bogotá, cuando se enseña el concepto de estimación puntual, a partir de la metodología investigación-acción desde las etapas de: teorización, diseño-acción y análisis, en concordancia con el proyecto de trabajo estadístico, a partir del diseño de una secuencia didáctica. La fundamentación teórica acerca del razonamiento estadístico, se estructura a partir de la consolidación del instrumento ¿Cuántos peces hay en el lago? que propone Lisbeth K. Cordani en el taller "Estadística para Todos", del encuentro de educación estadística ENAES Bogotá (2007), como una aproximación elemental del modelo de captura y recaptura usado para la estimación del tamaño de una población, así como las categorías de análisis respecto al razonamiento estadístico propuestas por Fernández & Soler (2008).

Palabras clave: Alfabetización estadística, pensamiento estadístico, razonamiento estadístico, método Peterson, muestreo por captura-recaptura, estimación estadística puntual.

Planteamiento de la temática o del problema de investigación

Existe en la literatura, los informes científicos, los libros, y en general los medios de comunicación una gran cantidad de información que utiliza los conceptos de estadística para tomar decisiones, convencer de la ocurrencia de algún suceso, o simplemente para informar. Es cada día más importante que los estudiantes se enfrenten a situaciones donde es necesario que describan, analicen, pronostiquen el comportamiento de variables de tipo aleatorio.

En muchas situaciones la información de tipo estadístico es presentada de forma incomprensible o con errores en su estructura lo que conlleva a que los ciudadanos se encuentren o mal informados o con información incompleta.

En ese sentido como afirma Batanero (2013):

> la idea, es dotar de significado y comprensión al aprendizaje de la estadística, estableciendo las competencias que requiere la sociedad de la información: interpretar y evaluar críticamente la información estadística, discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones (Gal,2002), y comprender la abstracción lógica que hace posible el estudio cuantitativo de los fenómenos colectivos (Ottaviani,1998), esto es, comprender como se usa el método estadístico, como pasar de un estudio de una muestra a una población, como podemos de la variabilidad de una población sacar un resumen y sacar una predicción.

A continuación se presenta un ejemplo, tomado de una muestra aleatoria, de noticias con representaciones estadísticas del diario El Tiempo Bogotá, Colombia (2013), que evidencia cómo algunos medios de comunicación presentan diariamente estimadores, y en algunos casos conclusiones e inferencias de los análisis de datos recogidos para la información:

A Bachelet no le alcanzó para ganar en primer vuelta

El próximo 15 de diciembre disputará con la conservadora **Evelyn Matthei la presidencia de Chile, en un balotaje histórico.**

Santiago (AFP-Efe-Reuters). A Michelle Bachelet no le alcanzó. No obstante la expectativa, y de lo cerca que estuvo de conseguir el 50% más uno de los votos, la expresidenta y candidata de la concertación de izquierda chilena tendrá que disputar, el próximo 15 de diciembre, la segunda vuelta presidencial con la derechista Evelyn Matthei.

América

Escrutado el 98,66 por ciento de los votos, Bachelet se impuso ampliamente con el 46,69, mientras que la oficialista alcanzó el 25,01 por ciento para poner a la democracia chilena en una situación inédita, pues nunca dos chi-

en los días en que el golpe militar de Augusto Pinochet derrocó al presidente socialista Salvador Allende en 1973 (véase nota alterna).

"No hay dos lecturas. Hemos ganado esta elección y con una amplia mayoría", dijo anoche Bachelet en su discurso tras la jornada electoral. "Sabíamos que el desafío de ganar era complejo e hicimos un inmenso esfuerzo", reconoció. "Vamos a trabajar para conseguir la victoria decisiva en la segunda vuelta", añadió.

Por su parte, Matthei, consciente de que Bachelet arranca la carrera con gran favoritismo, esgrimió el le-

Chile tendrá presidenta el 15 de diciembre

Fotos: AFP

La segunda vuelta de las elecciones presidenciales se realizará el próximo 15 de diciembre

Resultados de las elecciones de ayer:

46,69%

25,01%

Michelle Bachelet | Evelyn Matthei

*Escrutado el 98,66 por ciento de los votos

Figura 1.

En la gráfica de la Figura 1, se muestran los resultados de las elecciones presidenciales de Chile, no se especifica durante la noticia la cantidad de personas votantes para la primer vuelta electoral, ni la fuente de información, se muestra un parámetro del 98,6%, y un porcentaje del 46,69% a favor de Michelle Bachelet contra un 25,01% de Evelyn Matthei, lo que le permitiría al ciudadano común hacer inferencias respecto al resultado de la segunda vuelta del 15 de diciembre.

El caso, muestra que al no existir una fuente de información sobre el tamaño de la muestra o de la población, el lector del diario podría pensar que no existe variación ó que el evento ocurrido podría haber sido pronosticado con anticipación, descuidando la aleatoriedad en la variabilidad de los datos y realizando inferencias sobre un parámetro cuando posiblemente es sólo un estadístico. Es así, que evidencian la necesidad de fortalecer el razonamiento estadístico y en particular la estimación, como afirma Behar (2007) "Poder leer críticamente los resultados de una investigación debe ser un objetivo primordial de todo curso que aborde la metodología estadística como un objeto de aprendizaje".

Desde la enseñanza, en la escuela, es un tema poco trabajado en nuestro país como lo afirma en su proyecto de investigación estado del arte de la educación estadística escolar en Colombia Fernández & soler, (2006) y en la investigación de Fernández (2008) acerca del contexto, actitudes y conocimiento estocástico del profesor de matemáticas, donde se refleja que el desempeño de los profesores en cuanto al componente de razonamiento estadístico es deficiente.

Igualmente, en investigaciones del Grupo Crisálida (2007), de la universidad Distrital Francisco Josè de Caldas de Bogotá, asocian la problemática de la enseñanza debido a:

1. Que los métodos corrientes de enseñanza de la estadística se han centrado generalmente en el desarrollo de habilidades y han fallado en instalar la habilidad para pensar estadísticamente como lo afirma Pfannkuch y Wild (2004).
2. Los libros de texto que se usan para enseñar estadística dan mayor importancia al procedimiento que a la comprensión, y el acercamiento exploratorio es reducido. (Ortiz, Batanero, & Serrano, 2007).

Sin embargo, cuando se piensa en el conocimiento que debe ser impartido en los colegíos de Colombia, respecto a la estadística, los estándares básicos de competencias en Matemáticas del Ministerio de Educación Nacional MEN (2005) dan cuenta de los procesos generales presentes en toda actividad matemática como "…formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones de la vida cotidiana, de las otras ciencias y de las matemáticas mismas…" (p.51) y del papel que juega el razonamiento en estas actividades, puesto que pretenden enunciar argumentos que expliquen los análisis, métodos usados y la validez de las soluciones designadas de los problemas propuestos, (Citado por Zambrano & Palacios, 2009).

En ellos, se destaca la importancia de observar de manera más sistemática el razonamiento estadístico en los estudiantes de secundaria, específicamente en uno de ellos respecto al pensamiento aleatorio y sistemas de datos (noveno) se dice: "Predigo y justifico razonamientos y conclusiones usando información Estadística" (pág. 85).

Por lo tanto, el interés principal de la presente propuesta de investigación es describir una caracterización sobre el razonamiento estadístico de los estudiantes de grado noveno de un colegio privado de la ciudad de Bogotá, cuando se enseña el concepto de estimación estadística, esperando que, de acuerdo con lo sugerido por el MEN (2004) de Bogotá; esta caracterización aporte elementos para el diseño y aplicación de propuestas curriculares que contribuyan en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. Por ello, se considera importante dar respuesta a la siguiente pregunta de investigación:

- ¿Qué resultados se obtienen al observar el nivel de razonamiento estadístico que tienen los estudiantes de grado noveno, cuando se enseña el concepto de estimación?
- Destacando preguntas que se derivan del mismo:
- ¿Cómo razonan los estudiantes de grado noveno cuando se enfrentan a la interpretación del concepto de estimación estadística de tipo puntual?
- ¿Qué resultados se obtienen al observar y analizar el desarrollo de la secuencia didáctica cuando los estudiantes de grado noveno de un colegio privado de Bogotá, se enfrentan al método de estimación estadística por captura y recaptura ?

Marco de referencia

Al considerar la posibilidad de hacer una descripción del razonamiento estadístico cuando se enseña el concepto de estimación en estudiantes de grado noveno, basado en la realización de experiencias aleatorias, reales o simuladas, en los fundamentos teóricos se destacan aspectos básicos para abordar dichas temáticas:

- La aproximación de la idea de razonamiento estadístico quien involucra conceptos de alfabetización estadística y pensamiento estadístico, desde autores como Wild y Pfannkuch (1999), Garfield y delMas (2002), Fernández, (2008) y Rocha (2007),Zapata (2012) como consecuencia de la enseñanza y aprendizaje de la estadística y probabilidad.
- Una aproximación respecto al proceso de la estimación estadística puntual desde el método de Peterson como modelo que permite estimar la cantidad de elementos de una población, como objeto estocástico de enseñanza.
- El tercero, el proyecto de trabajo estadístico (Rocha, 2007) como método de resolución de problemas (Crisálida, 2007), y medio de intervención en el aula donde se especifican los momentos del diseño, gestión y evaluación de la secuencia didáctica (G, Brousseau, 1986).
- El tercero las categorías de razonamientos correctos e incorrectos preestablecidas por Fernández, F (2008), así como los sesgos y formas erradas de pensamiento estocástico desde autores como Kahneman, Slovic y Tversky (1982) quienes reportan errores sistemáticos y conductas recurrentes en la forma de tomar decisiones por parte de las personas ante situaciones de tipo estocástico que serán usadas para tipificar las justificaciones dadas por los estudiantes en el desarrollo de la actividad propuesta en la secuencia didáctica denominada ¿Cuántos peces hay en el lago?.

Razonamiento estadístico

Fernández (2008) afirma: "Detrás del razonamiento estadístico subyace la comprensión de ideas estadísticas como: distribución, centralidad, dispersión, asociación, incertidumbre, aleatoriedad y muestreo" (p.41). Para Rocha (2007), la aproximación a la idea de razonamiento estadístico consiste en: "Una habilidad que le permite a los individuos realizar juicios utilizando criterios apoyados en el análisis de información estadística dentro de un contexto determinado" (p.16).

Para Garfield (2002) el razonamiento estadístico, se podría definir: "como la forma como la gente razona con ideas estadísticas y le da sentido a la información estadística; Esto incluye interpretaciones basadas en conjuntos de datos, representaciones gráficas y resúmenes estadísticos" (p.41). (Citado por Fernández, 2008).

Para Chervaney (1980) y otros (citado por Garfield ,2002), el razonamiento estadístico es entendido como lo que una persona es capaz de hacer con el contenido estadístico, como recordar, reconocer y discriminar entre conceptos estadísticos y las habilidades que demuestra tener en la utilización de conceptos estadísticos en la resolución de problemas.

Rumsey (citado por Fernández, 2008), proporciona sugerencias útiles respecto al conocimiento de los datos. Ella sugiere que "el discernimiento a cercad e cómo los datos son utilizados para tomar una decisión muestra el conocimiento de la persona sobre los datos, y por tanto, un nivel de alfabetización estadística" (p.53).

A su vez, el conocimiento de cómo los datos son utilizados implica una comprensión de los contextos en los que diferentes tipos de datos son útiles lo que al parecer coincide con la idea de pensamiento estadístico. El acercamiento a la idea de razonamiento estadístico, se presenta cuando una persona puede demostrar frente al conocimiento sobre los datos, porque está razonando con ideas estadísticas y dando significado a la información estadística (Rumsey, 2002).

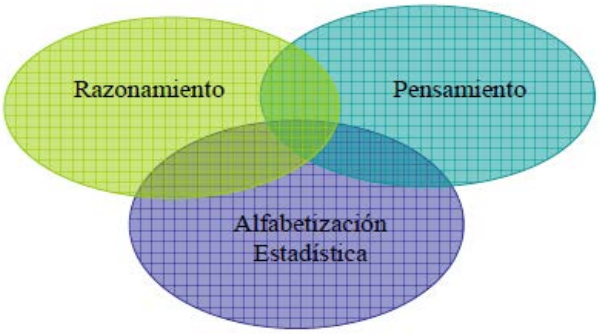


Figura 2. Resultados de la educación estadística: enfoques independientes con algunos aspectos en común.

De acuerdo a los resultados que se deseen obtener como consecuencia de cada enfoque de instrucción distintos autores (Rumsey, Garfield y Chance) proporcionan al menos dos posturas frente a cada enfoque, uno de ellos por ejemplo contempla que parece razonable que el pensamiento estadístico sea el que comprenda y se apoye para su fundamentación en la alfabetización y el razonamiento estadístico, la otra postura contempla que sea la alfabetización estadística como el desarrollo tanto de habilidades básicas como del conocimiento esencial que se requiere para desarrollar razonamiento y pensamiento estadístico. Sin embargo delMás (2002) propone una lista de palabras que proporcionan algunas orientaciones sobre lo que se requiere del estudiante para que demuestre o desarrolle su comprensión sobre cada perspectiva (p.55).

Alfabetización estadística	Razonamiento	Pensamiento
Identificar Describir Refrasear Traducir Interpretar Leer	¿Por qué? ¿Cómo? Explicar (Los procesos)	Aplicar Criticar Evaluar Generalizar

Por ejemplo si la meta fuera desarrollar la alfabetización estadística básica entonces el profesor debería procurar que el estudiante realice acciones como identificar ejemplos de un término o concepto; describir gráficas, distribuciones…etc y por otra parte si se le pide al estudiante explicar porque o cómo los resultados de un proceso particular fueron realizados o como se realiza el proceso de realizar una estimación puntual , o porque la mediana es resistente a los valores atípicos se estaría indicando lo que corresponde al razonamiento estadístico, y respecto al pensamiento estadístico se indica que este es promovido si se les enseñan a los estudiantes a aplicar su comprensión a problemas reales a cuestionar, a criticar y evaluar el diseño y las conclusiones de estudios. (Citado por Fernández 2006).

Para efectos de la propuesta se entenderá razonamiento estadístico lo que Zapata (2011) afirma:

> proceso que tiene una persona para leer interpretar, organizar, evaluar críticamente y apreciar información estadística relacionada con contextos sociales en los cuales se está inmerso (Zapata, 2011, p.237).

Estimación estadística

Para centrar el estudio en la estimación estadística, se considera pertinente verificar aspectos como utilidad y uso social de la estimación, un acercamiento a la idea de estimación estadística puntual, así como el método de aproximación para la estimación de la población denominado: captura-recaptura a partir del tipo de muestreo denominado: modelo de Peterson.

Utilidad y uso social de la estimación

De acuerdo con Rico (1988):

> La estimación es una estrategia para trabajar con números en situaciones reales, que nos permite hacer una asignación rápida de valores numéricos manteniendo al mismo tiempo un cierto control sobre la validez de esa valoración (pág. 45).

Por tal razón cada situación en la que se requiere el empleo de números hay un proceso de estimación. Para la estadística dicho proceso estará reglamentado por alguna técnica, donde se hace un uso sistemático de la estimación y en las que estimar es un rasgo esencial que las define. Por ejemplo, las ciencias de la naturaleza dado que una de las dificultades de los especialistas es la datación de los hechos y fenómenos que estudian, puesto que no existe un procedimiento definitivo que mida el tiempo transcurrido de un determinado acontecimiento.

Por tal razón, en estadística el concepto de estimación, es de tipo técnico dado que los criterios que determinan una estimación es de tipo imparcial, consistente y efectiva.

De acuerdo a Badii (2009):

> la inferencia estadística está basada en la estimación y en la prueba de hipótesis, donde se hacen inferencias acerca de ciertas características de las poblaciones a partir de la información contenida en las muestras (p.300).

Como lo afirma Manzano (2014):

> Estimar qué va a ocurrir respecto a algo (o qué está ocurriendo, o qué ocurrió), a pesar de ser un elemento muy claramente estadístico, está muy enraizado en nuestra cotidianidad (pág. 1).

El concepto de estimación estadística para la propuesta de acuerdo con Soto (2000) se define como:

> un proceso que permite decir algo de los hechos poblacionales (parámetros), utilizando para ello la información proporcionada por una(s) muestra(s) seleccionada(s) de la población de interés, generalmente por métodos aleatorios.

A la función de los valores muéstrales que les permite “decir algo” del hecho poblacional, se le denomina el estimador, y corresponde con las medidas que se presentaron inicialmente con el nombre de “estadísticas” o “estadígrafos”. Por ser función de tales valores, que dependen del azar, todo estimador se constituye en una variable aleatoria.

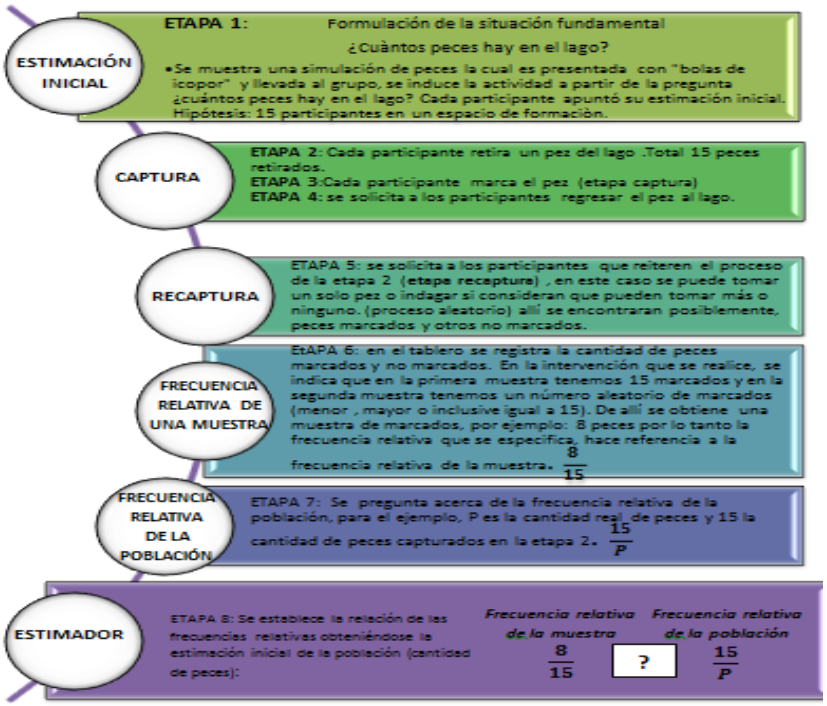
Por tal razón, el problema de la estimación consiste en hacer inferencias acerca de la distribución poblacional, el valor de parámetros, la existencia y la forma de relación entre características de la población.

Para que el proceso sea válido, los estimadores deben poseer una serie de características o propiedades relacionadas con tal validez, que son conocidas como propiedades deseables de un buen estimador, tales como el insesgamiento, la consistencia, la suficiencia, propiedades que le serán propias al estimador, no así a alguna estimación que con él se haga en alguna instancia particular.

Propuesta en educación estadística del método captura y recaptura para la estimación del tamaño de una población

La actividad que propone Lisbeth K. Cordani (2007) "Estadística para Todos", en la modalidad de taller pretende analizar con los alumnos los siguientes conceptos: población, muestra, estimación, variabilidad y tamaño de muestra etc, ideas fundamentales para la estadística (Batanero, 2001).

Estructura de la actividad



Guía del estudiante

En la tabla de datos los estudiantes establecen cinco experimentos aplicando las 8 etapas anteriores para el proceso de la estimación estadística a partir del método captura y recaptura:

	Número de peces capturados inicialmente*	Número de peces en la nueva captura	Número de peces marcados en la nueva captura	Procedimiento realizado	Número de peces en el lago (Estimación)
1					
2					
3					
4					
5					

Para concluir con el proceso se hace pertinente indagar respecto a las siguientes preguntas de la propuesta:

a. ¿Cuántos "peces" fueran capturados al inicio?.....
b. ¿Cuántos "peces" fueran marcados al inicio?.....
c. ¿Cuántos "peces" fueran recapturados?.....
d. ¿Cuántos "peces" estaban marcados entre los recapturados? .....
e. ¿Còmo determinar a partir de la informaciòn de la tabla la cantidad de peces existentes en el lago?

Caracterización del razonamiento estadístico

Partiendo de las Categorías de Análisis de los conocimientos del Profesor de Matemáticas (Godino, J. 2009) y Aportes del análisis didáctico a la investigación sobre comprensión del conocimiento matemático (Gallardo, J. 2004), se indican las categorías que la investigación requerirá para la tipificación y caracterización del razonamiento estadístico sobre el concepto de estimación desde el diseño, gestión y evaluación de la secuencia didáctica

Categoría 1: Conocimiento del contenido

- **Conocimiento del contenido de estadística del estudiante:** "conocimiento del contenido pedagógico: Comprensión de lo que hace fácil o difícil el preconcepciones de los estudiantes" (Shulman 1986).
- **Conocimiento pedagógico del contenido**: "conocimiento del contenido que se entrelaza con el conocimiento de cómo los estudiantes piensan, saben, o aprenden este contenido particular" (Hill, Ball, y Schilling, 2008 p. 375).
- **Conocimiento sobre lo que aprenden los alumnos de acuerdo a su experiencia y estudio:** Comprensión sobre lo que aprenden los alumnos de acuerdo a su experiencia o estudio sobre el tema (Bromme, 1988).
- entendimiento de determinados conceptos y conocimiento de las concepciones y

Categoría 2: Categorías de razonamiento esperadas en el desarrollo de la secuencia

ETAPAS	PROCESO	RAZONAMIENTO ESTADÍSTICO ESPERADO
ETAPA 1	**ESTIMACIÒN INICIAL**	♣ El estudiante propone una estimación inicial del proceso a partir de un número natural . ♣ El estudiante propone una estimación inicial a partir de un número decimal. ♣ El estudiante propone una estimación inicial utilizando un porcentaje. ♣ Determina el tamaño de la población inicial estableciendo en su lenguaje un promedio.
ETAPA 2	**CAPTURA**	♣ El estudiante sigue instrucciones para establecer la captura inicial. ♣ El estudiante interpreta que la captura es una muestra de la población

ETAPA 3	**RECAPTURA**	♣ El estudiante determina el número exacto de peces para la recaptura. ♣ El estudiante establece recapturas en cada experimento mostrando su intuición de aleatoriedad. ♣ El estudiante no identifica cuál debe ser la cantidad de elementos de la recaptura.
ETAPA 4	**FRECUENCIA RELATIVA DE LA MUESTRA**	♣ Sistematiza la información en una tabla ♣ El estudiante reconoce la muestra inicial de la muestra de recaptura ♣ El estudiante reconoce por qué es una frecuencia relativa de la muestra . ♣ Argumenta cómo se establece una frecuencia relativa de la muestra inicial ♣ No identifica que es frecuencia relativa.
ETAPA 5	**FRECUENCIA RELATIVA DE LA POBLACIÒN**	♣ El estudiante establece una comparación entre la muestra inicial y la población real. ♣ El estudiante indica cómo se establece una frecuencia relativa de la población ♣ No establece comparación de la muestra inicial con la población ♣ No identifica cuál es la población.
ETAPA 6	**ESTIMACIÓN PUNTUAL**	♣ Explica por qué se debe establecer una relación entre la frecuencia relativa de la muestra y la frecuencia relativa de la población para establecer un estimador del tamaño de la población. ♣ Reconoce que debe realizar varios experimentos para evidenciar la variación de los datos. ♣ Recolecta información de sus estimadores y hace cálculo del promedio como un estimador puntual estadístico de la población. ♣ Interpreta partir de los datos que la mediana es el mejor estimador puntual para la población ♣ Describe el tamaño de la población a partir des estimador estadístico la moda. ♣ Plantea un estimador estadístico sin utilizar medidas estadísticas centrales.

Categoria 3: Configuración de objetos y procesos

Para ello realizo la propuesta para la generación de categorías según el análisis de razonamientos estadísticos en consideración como correctos o incorrectos para el análisis de las respuestas de los estudiantes de grado noveno cuando se enfrentan al concepto de estimación utilizando como instrumento el taller “peces en un lago” la cual se consolida como situación fundamental para el análisis de la trayectoria del estudiante.

RAZONAMIENTO ESTADÍSTICO EN CONSIDERACIÓN COMO CORRECTO	
Interpretación y uso de estadígrafos	Interpreta y estima promedios
	Utiliza una medida de tendencia central para describir la población
	El estudiante reconoce que debe realizar el ensayo varias veces
	Utiliza la mediana para describir la cantidad de elementos.
Uso y comprensión de ideas de muestra	Comprende la importancia del tamaño de la muestra
	Determina el tamaño de la población
	Usa la idea de muestra y de población
	Identifica un método de muestreo

SESGOS Y FORMAS ERRADAS DE RAZONAMIENTO ESTADÍSTICO	
Errores involucrados en el uso de las medidas de tendencia central	Elección no adecuada de una Medidas de tendencia central
	Supone que la media es una operación interna en el conjunto de los números internos
	Desconoce el uso de las Medidas de tendencia central para describir la población
	Desconoce el valor atípico
Errores ante razonamientos en situaciones de incertidumbre	Confunde la población de referencia
	No identifica una población
	No identifica una muestra

Metodología

La propuesta se enmarca desde la metodología investigación-acción, como uno de los métodos de investigación de tipo cualitativo, que permite "la producción de resultados como efecto de la interacción continua entre procesos de reflexión, observación, diseño, puesta en escena, análisis y teorización de los eventos educativos"(Calderon y Leon,2000: 14).

La acción investigativa involucra un proceso de tres fases fundamentales que se corresponden con el diseño, gestión y evaluación desde el proyecto de trabajo estadístico propuesto por Rocha (2007).

Fase de teorización (Diseño): La elaboración del marco referencial primario sobre los requerimientos, o primera fase de teorización, correspondiente a la noción y caracterización del razonamiento estadístico (Fernández, 2008), método de estimación estadística (captura-recaptura) (Johnson,1994), diseño de la secuencia didáctica desde la teoría de situaciones didácticas Brousseau (1986) y la apropiación del instrumento de observación y análisis para caracterizar e indagar sobre el conocimiento disciplinar "estimación estadística puntual" de la actividad que propone Lisbeth K. Cordani, titulada: "Estadística para Todos" en la modalidad de taller, durante el encuentro ENAES 2007, basados en los referentes de los lineamientos curriculares y estándares de matemáticas, y partiendo de la necesidad de involucrar al estudiante en el tratamiento de una de las ideas fundamentales que propone (Biehler y Burrill, (2011) Citado por Batanero 2012) como organización curricular de la estadística: el Muestreo y la Inferencia.

Fase de diseño – acción (Diseño-Gestión): La reestructuración del instrumento posterior a una prueba piloto y puesta en escena, con un grupo de docentes del área de matemáticas permite verificar y reestructurar elementos de lenguaje e instrucción del mismo; El diseño de la secuencia didáctica.

Fase de análisis (Evaluaciòn) para el análisis didáctico se contemplan los polos del tetraedro didáctico propuesto por Lurduy (2012): entorno, saber, docente y alumno; enfocando el

lente en las relaciones triádicas y diádicas que establece una de sus caras: docente-saber-alumno. Por tal razón, el elemento de control del entorno se establece a partir del diseño y gestión de la secuencia didáctica apoyada en la teoría de situaciones didácticas de Brousseau (1986), y análisis en el momento de validación donde se da muestra de los argumentos y procesos que le permitieron al estudiante realizar una estimación estadística puntual a partir del proceso de captura y recaptura. lo que ha permitido generar procesos de validación, regulación y evaluación del diseño, y verificación de las posibles categorías de razonamientos correctos e incorrectos preestablecidas por Fernández, F (2008), así como los sesgos y formas erradas de pensamiento estocástico desde autores como Kahneman, Slovic y Tversky (1982) quienes reportan errores sistemáticos y conductas recurrentes en la forma de tomar decisiones por parte de las personas ante situaciones de tipo estocástico, con el fin de tipificar dichas justificaciones.

A través del siguiente esquema se muestra la forma en que las tres fases se desenvuelven en el desarrollo de la propuesta:

Conclusiones parciales y/o alcances de la propuesta

1. Sistematizar, y documentar las acciones que realizan los estudiantes cuando se enfrentan al problema de estimar de forma puntual una medida estadística.
2. Reflexionar sobre el trabajo del profesor de estadística en el aula.
3. Describir las categorías de razonamiento estadístico de los estudiantes de grado noveno cuando se enfrentan al concepto de estimación.
4. Analizar la trayectoria que recorren los estudiantes en el espacio de formación

Referencias y bibliografía

Batanero C. (2003). *Los retos de la cultura estadística.* Universidad de Granada, España. Publicado en http://www.ugr.es/~batanero/sergroup.htm

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada: Grupo de Investigación en Educación Estadística. ISBN: 84-699-4295-6

Batanero, C., & Godino, J. (2002). *Estocástica y su didáctica para maestros.* Proyecto Edumat-Maestros. ISBN: 84-932510-0-3

Behar, R. (2001). *Aportaciones para la mejora del proceso de enseñanza – aprendizaje de la estadística* (Tesis Doctoral). Universitat Politécnica de Catalunya, Barcelona y Santiago de Cali.

Behar, R. (2007). Búsqueda del Conocimiento y Pensamiento Estadístico. En *XVII Simposio de Estadistica*.27 al 31 de Julio de 2007. World Trade Center, Veracruz, México.

Bruno D', A. (2006). *Didáctica de la Matemática* (Primera Edición en Español). Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.

Ben-Zvi, D., & Garfield, J. (2004). *The Challenge of Developing Statistical Literacy, Reasoning and Thinking* (pp. 47-78). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Calderón, D. (2012). *Perspectivas en la didáctica de las Matemáticas*. Bogotá, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Chaparro, E., & Romero, J. (2012). *Propuesta para promover el razonamiento estadístico de estudiantes de grados noveno y undécimo al comparar conjuntos de datos mediante gráficos de caja* (trabajo de especialización). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá.

Cordani, L. (2007). *Estadística para todos*. Recuperado de: ttp://www.encoedest.org/T07_Cordani.pdf

Fernández, F. (2008). *Estadística y Probabilidad en la Escuela Secundaria. Un estudio acerca del contexto, actitudes y conocimiento estocástico del profesor de Matemáticas.* Bogotá. ISBN: 978-958-44-4541-4.

Godino, J. (2009). Categorías de Análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación matemática*, 13-31.

Godino, J. (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros*. Recuperado de http://www.redescepalcala.org/inspector/documentos%20y%20libros/matematicas/didactica%20de%20las%20matematicas%20para%20maestros.pdf.

Johnson, R. (1994). *How Many Fish are in the Pond?* Recuperado de: http://www.rsscseedu.org.uk/tsj/wp-content/uploads/2011/03/johnson3.pdf.

Fernández, F. (1998). *Matemáticas, Azar y sociedad.* Bogotá, Colombia: Una empresa docente.

Garfield, J. (2002). "The Challenge of Developing Statistical Reasoning". *Journal of Statistics Education*, *10*(3). [Online]. En www.amstat.org/publications/jse/v10n3/garfield.htm.

Herrera, I.(2011). Educación estadística: desarrollo del pensamiento y razonamiento. *XIII CIAEM-IACME* (pp. 1-4). Brasil: Recife.

Lurduy, J. (2012). *El sistema didáctico y el tetraedro didáctico. Elementos para un análisis didáctico de los procesos de estudio de las matemáticas. Pensamiento, Epistemología y Lenguaje Matemático* (pp.75-99). Bogotá, Colombia. Doctorado Interinstitucional en Educación.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.* Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional [MEN].

Muñoz, C., & Sandoval, J. (2006). "Optimus" proyecto interdisciplinario entre las áreas de Educación física y Matemáticas. En *Memorias del cuarto encuentro de Matemática Educativa.* Colombia: Editorial Gaia. Universidad de Manizales.

Rocha, P. (2007). *Educación estocástica, la didáctica de la probabilidad y estadística.* Bogotá: Serie de cuadernos No. 10. IEIE. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Salcedo, A. (2013) *Educación Estadística en América Latina: Tendencias y Perspectivas.* Universidad Central de Venezuela. Gea., Batanero, C., Gustavo, R., Cañadas, Arteaga, P y Contreras, J., *La estimación de la correlación: variables de tarea y sesgos de razonamiento. ISBN: 978-980-00-2744-8*

Steffe, L., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: underlying principles and essential elements. En A. E. Kelly, & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267-306). Mahwah: NJ: LAE.

Soto, O. (2000). Estimación estadística. Recuperado de: http://www.virtual.unal.edu.co/cursos/ciencias/1000013/und4/html/cont_03.html 27 de octubre 2013

Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry, *International Statistical Review*, 67, 223 –265. Traducido al castellano por el Dr. Román Hernández Martínez.

Zambrano, W., & Palacios, R. (2009). *Razonamiento estadístico de estudiantes de secundaria al comparar conjunto de datos representados mediante gráficos de caja* (Tesis de maestría). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Zapata, L. (2011). ¿Cómo contribuir a la alfabetización estadística? *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 234-247. México.

Concepciones de futuros profesores de Matemáticas sobre pensamiento estadístico

Nelly Yureima **Martínez** Camacho
Universidad de los Andes
Colombia
ny.martinez10@uniandes.edu.co

Resumen

En este artículo se muestran las concepciones que un grupo de estudiantes para profesor de matemáticas tienen sobre pensamiento estadístico. Para ello fue necesario hacer una revisión teórica que permitiera identificar las diferencias entre pensamiento estadístico y razonamiento estadístico llegando a una unificación de algunas definiciones. Posteriormente se aplicaron tres instrumentos a un grupo de veintisiete estudiantes y se hizo uso del mecanismo de viñetas para hacer el análisis de la información, llegando a resultados que permitieron verificar la discrepancia respecto a las concepciones sobre pensamiento estadístico.

Palabras clave: Pensamiento estadístico, razonamiento estadístico, concepciones, formación de profesores, educación estadística.

Introducción

La educación estadística en la actualidad hace parte del currículo en Colombia. En éste se contempla la idea de generar en los estudiantes competencias que les permitan analizar e interpretar conjuntos de datos, hacer inferencias, pronosticar y hacer uso de modelos para predecir. Sin embargo, investigaciones como la expuesta por Shaughnessy, Garfield y Greer (1996) señalan que los estudiantes en los diferentes niveles de enseñanza presentan concepciones erradas o no están en la capacidad de hacer una interpretación correcta de datos estadísticos.

Batanero (2013) señala que una de las causas que está impidiendo generar razonamiento estadístico en los estudiantes es, posiblemente, la forma como se ha venido impartiendo la educación estadística, pues los temas se abarcan de forma rutinaria y los docentes no hacen explícita la relación del contexto con los datos. La forma como se enseña estadística en las instituciones de educación formal puede depender de a) las concepciones de las estrategias de enseñanza que poseen los docentes y b) las limitaciones conceptuales que estos tienen, las cuales les impide adoptar, por ejemplo, el proyecto estadístico como metodología para el desarrollo de esta disciplina en el aula de clases (Doerr & Zangor, 2000).

Wild y Pfannkuch (1999) establecen que "la piedra angular de la enseñanza en cualquier área es el desarrollo de una estructura teórica con la cual darle sentido a la experiencia, para aprender de ella y transferir perspicacia, penetración y discernimiento a otros" (p. 2), por esta razón se considera primordial reconocer las concepciones de los estudiantes para profesor sobre pensamiento estadístico.

Garfield y Ben-zvi (2008) explican que efectivamente las concepciones que tienen los docentes sobre pensamiento estadístico están generando un impacto en la educación estadística. Estos autores afirman que los profesores pueden tener la intención de generar en sus estudiantes la capacidad para analizar conjuntos de datos y así convertirlos en sujetos críticos de su sociedad. Sin embargo, es poco probable desarrollar procesos cognitivos más estructurados, si los profesores tienen concepciones erradas sobre pensamiento estadístico (Garfield y Ben-zvi, 2008).

Ahora bien, teniendo en cuenta que el interés de este trabajo está en determinar las concepciones que un grupo de estudiantes para profesor tienen sobre pensamiento estadístico, se quiere responder la siguiente pregunta:

Pregunta de investigación:

¿Qué concepciones tiene un grupo de estudiantes para profesor de matemáticas sobre pensamiento estadístico?

Pregunta orientadora:

- ¿Cuáles son las acepciones de pensamiento estadístico más relevantes en un grupo de estudiantes para profesor?

Objetivo general:

Determinar las concepciones que tiene un grupo de estudiantes para profesor de matemáticas sobre pensamiento estadístico.

Objetivo específico:

- Identificar las acepciones de pensamiento estadístico más relevantes en un grupo de estudiantes para profesor.

Marco conceptual

Thomson (1992) señala que uno de los componentes que intervienen en el comportamiento de los profesores en el aula está relacionado con las concepciones que tienen sobre la disciplina. Freire y Sanches (1992) afirman que las concepciones están relacionadas con las interpretaciones y creencias que tienen los docentes con los contenidos, la forma como aprenden los estudiantes y su actuar en el salón de clases. Por su parte, Pehkonen y Furinghetti (2002) establecen que uno de los principales problemas que se les presenta a los investigadores cuando se desea establecer las creencias o concepciones de un grupo determinado, es el sinnúmero de definiciones contradictorias que hay sobre el tema. Por esta razón, a continuación, se especificará la definición de concepción que se tendrá en cuenta en el desarrollo de la investigación.

Es de gran importancia tener en cuenta que la investigación sobre creencias y concepciones tiene sus orígenes al comienzo de siglo XX, siendo interrumpida por el conductismo hasta la década de los setenta, donde fue retomada por autores como Green (1971) y Schoenfeld (1985) seguido por un gran número de investigadores que tenían como objetivo primordial establecer una caracterización de las creencias y de las concepciones de los docentes, de tal forma que pudiesen explicar la relación entre estas y su desempeño en clase. Este hecho, dio origen a un sinfín de escritos e investigaciones alrededor de este tema, complejizando la tarea de encontrar una única caracterización de concepciones. Sin embargo, autores como Pehkonen y Furinghetti (2002), Pehkonen (1999) y Bohórquez (2013), han realizado investigaciones epistemológicas, permitiendo evidenciar las definiciones de concepciones más relevantes.

- Las creencias son el conocimiento subjetivo estable de las personas (que también incluye sentimientos) de un determinado objeto o riesgo a la que los motivos defendibles no siempre se encuentran en consideraciones objetivas. Las concepciones se explicarán como creencias consientes, es decir, las concepciones forma un subconjunto de las creencias. La visión de un individuo de las matemáticas es un amplio concepto de sus creencias y concepciones, por ejemplo, los individuos, pueden ser capaces de describir su visión de las matemáticas o algunas partes de la misma, pero podrían tener algunos prejuicios o imágenes del tema en discusión. (Pehkonen, 1999 1999, p.390).
- Saari (1983) caracteriza las concepciones como las creencias conscientes. (Furinghetti & Pehkonen, 2002).
- Azcárate, García y Moreno (2006) consideran que algunas características de las concepciones del profesor son: primero que forman parte del conocimiento, segundo que son producto del entendimiento, tercero que actúan como filtros en la toma de decisiones y finalmente que influyen en los procesos de razonamiento (Bohórquez, 2013).

De acuerdo a estas definiciones, lo primero que se puede inferir es que las tres apoyan la idea de que las concepciones son producto de un acto consiente, pero además, las dos primeras afirman que las concepciones son un conjunto de creencias y que precisamente difieren de éstas, de las creencias, por no ser subjetivas. D'Amore y Fandiño (2004), retoman esta idea y dan una definición operativa de la misma, donde consideran que el conjunto de convicciones de un sujeto (A) sobre un aspecto (T) forma la concepción (K) de A relativa a T "…si A pertenece a un grupo social (S) y comparte con los demás miembros de S el mismo conjunto de convicciones relativas a T, entonces K es la concepción de S relativa a T" (p. 2). A pesar de que estos autores hablan de convicción, en el mismo texto se aprecia que hacen referencia a *belief* o creencia. Teniendo en cuenta esto, se puede deducir que las concepciones surgen cuando un sujeto trata de formalizar un concepto o generar conocimiento que ha construido basado en un conjunto de creencias.

Según Espinel (2007), los estudiantes para profesor poseen diversas concepciones sobre conceptos estadísticos, incluso esta investigadora identificó en los futuros profesores concepciones erradas en conceptos asociados a diferenciar lo continuo de lo discreto en el ámbito estadístico. Al respecto, Lee y Maleteu (2003) señalan que las concepciones que poseen los futuros profesores son bastante difíciles de cambiar, en particular las erróneas, y explican que esto se debe a la dificultad para reconocer la necesidad de los datos.

Pensamiento y razonamiento estadístico

La enseñanza de la estadística y de la probabilidad ha tenido fuertes cambios en la actualidad, pues según Garfield y Ben-Zvi (2008) se ha buscado dejar de lado el uso de técnicas y procedimientos mecánicos, dando paso a una educación estadística que permita desarrollar en el estudiante el pensamiento y el razonamiento estadístico.

Hablar de razonamiento estadístico separado de la noción de pensamiento estadístico, es una tarea difícil, más cuando según Garfield y Ben-Zvi (2008) diferentes investigadores tratan sin distinción alguna los dos términos, evidenciando concepciones diversas sobre el tema.

> Un análisis rápido de los materiales en la Web que describen los cursos o libros de texto sugiere que la gente está utilizando el término "razonamiento estadístico" para representar los resultados deseados de un curso de estadística, y que esta expresión se usa de manera intercambiable con "pensamiento estadístico". (p.2).

Es por esto que se busca entender los diferentes procesos cognitivos que implican las nociones de pensamiento estadístico y razonamiento estadístico. Para hablar de pensamiento estadístico, es necesario basarse en el modelo propuesto por Wild y Pfannkuch (1999) quienes consideran que "la piedra angular de la enseñanza en cualquier área es el desarrollo de una estructura teórica con la cual darle sentido a la experiencia, para aprender de ella y transferir perspicacia, penetración y discernimiento a otros" (p. 2), y reconocen que la importancia de esta noción está en permitirle al estudiante entender sucesos cotidianos, como por ejemplo, la diversa información que aparece en los medios de comunicación. Según Wild y Pfannkuch (1999) los fundamentos del pensamiento estadístico se resumen en los siguientes "Tipos fundamentales de pensamiento estadístico".

- *El reconocimiento de la necesidad de datos*: Se reconoce que las experiencias reales pueden ser entendidas a partir del análisis previo de los datos, se presenta una necesidad por cuantificar la información.
- *Transnumeración*: Se define como la capacidad que se tiene de transformar los datos en diferentes representaciones en busca de nuevos significados.
- *Consideración de la variación*: Se toman decisiones y se aprende bajo situaciones de incertidumbre, entendiendo que la variación es omnipresente.
- *Razonamiento con modelos estadísticos*: Uso de los diferentes modelos de la disciplina estadística para predecir sucesos reales.
- *Integrar el conocimiento del contexto y conocimiento estadístico*: La capacidad para producir implicaciones, perspicacias y conjeturas a partir del conocimiento estadístico, el conocimiento del contexto y la información en los datos.

Estos tipos de pensamiento estadístico se establecen de forma jerárquica, dado que para poder razonar con modelos estadísticos se hace necesaria una previa identificación de la necesidad de recolectar datos, de la transnumeración y de la variabilidad. Además, Garfield, delMas y Chance (2003), en su definición de pensamiento estadístico, resaltan la importancia de comprender el contexto a través de los resultados obtenidos en un estudio estadístico y que es éste el más complejo de los tipos de pensamiento estadístico.

Por razonamiento estadístico, autores como Garfield, delMas y Chance (2003) entienden que es la capacidad de poder explicar procesos estadísticos e interpretar resultados estadísticos. En complemento a estos autores, Rocha (2009) define razonamiento estadístico como una habilidad que permite al sujeto realizar juicios apoyado en el análisis de información estadística dentro de un contexto determinado.

La diferencia entre pensamiento y razonamiento estadístico está dada porque, el pensamiento parece requerir de procesos cognitivos más complejos que el razonamiento, dado que en el pensamiento se necesita, no solo realizar juicios estadísticos en un contexto determinado, sino también, hacer este proceso reconociendo los diversos modelos estadísticos y deduciendo cuándo y cómo debe hacer uso de los mismos. Teniendo en cuenta lo anterior, es posible que una persona pueda razonar estadísticamente y no pensar estadísticamente.

Esta idea se verifica con las definiciones dadas por Garfield y Ben-zvi (2008) sobre pensamiento y razonamiento. Donde estos autores entienden por pensamiento la comprensión del cómo y el por qué las investigaciones estadísticas se llevan a cabo "estas ideas incluyen la

naturaleza omnipresente de la variación y cómo y cuándo utilizar los métodos apropiados de análisis de datos" (p.13) y por razonamiento la capacidad de explicar e interpretar procesos estadísticos. Estas dos definiciones serán las que se privilegiaran en está investigación.

Metodología de investigación

Este estudio buscó establecer las concepciones que tiene un grupo de estudiantes para profesor de matemáticas sobre pensamiento estadístico. Por lo tanto, se consideró necesario hacer una investigación empírica, de carácter cualitativo, descriptivo, exploratorio e interpretativo. El proyecto se desarrolló con estudiantes para profesor que cursan la asignatura Didáctica de la estadística (27 estudiantes) en séptimo semestre de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (LEBEM) de la Universidad Distrital (Bogotá- Colombia). La elección de esta población se realizó teniendo en cuenta que los objetivos de la asignatura están orientados a responder, entre otras cosas, la siguiente pregunta:

> ¿Cuál debe ser la formación que un estudiante para profesor de matemáticas debe poseer para realizar mejores reflexiones e intervenciones en el aula sobre cómo ha sido, cómo es y cómo será la enseñanza de la estadística a nivel de la educación básica del país? (LEBEM, 2010).

Recolección de la información

Para dar respuesta a la pregunta de investigación ¿Qué concepciones tiene un grupo de estudiante para profesor sobre pensamiento estadístico?, en primer lugar se le pidió al grupo de estudiantes para profesor que escribieran una definición y/o caracterización propia del concepto de pensamiento estadístico. En segundo lugar, se aplicó al mismo grupo una adaptación del instrumento, denominado panel, usado por Furinghetti y Pehkonen (2002); finalmente se les entregó una situación que describe el actuar de dos estudiantes en la resolución de una tarea estadística, este instrumento se llamará "Situación".

Caracterización o definición. La primera fuente de datos buscaba que los estudiantes para profesor establecieran una definición de pensamiento estadístico basada en sus conocimientos previos y en la postura que ha adoptado frente a los mismos. Para esta actividad se destinó un tiempo máximo de quince minutos.

Panel. El panel se caracterizó por presentar a los sujetos seis definiciones sobre pensamiento estadístico, las cuales fueron seleccionadas teniendo en cuenta las similitudes existentes entre cada una de ellas y la acepción de pensamiento estadístico que desea privilegiar en esta investigación. El desarrollo del panel tuvo un tiempo aproximado de cuarenta y cinco minutos. Con la aplicación del panel se esperaba que los estudiantes para profesor leyeran cuidadosamente cada una de las definiciones y respondieran a la pregunta "¿Considera que la definición contiene los elementos necesarios para hablar de pensamiento estadístico? Justifique su respuesta".

Situación. El instrumento denominado situación tuvo como objetivo primordial determinar si en el análisis de una situación particular el estudiante para profesor acude a la definición sobre pensamiento estadístico que presentó con anterioridad. Este instrumento se caracterizó por presentar al sujeto una descripción de una situación real en la cual un estudiante de administración presenta una serie de argumentos para justificar la solución a un problema propuesto donde se aprecia que razona estadísticamente. Asimismo, en esta descripción se presenta la solución que hace otro estudiante de la misma carrera, en la cual se evidencia que no

se acude al razonamiento estadístico. Se esperaba que al finalizar la lectura de la situación, el estudiante para profesor identificara si las acciones y argumentaciones de los estudiantes de administración están asociadas con el razonamiento estadístico, con el pensamiento estadístico o con ninguno. El tiempo que tuvieron para responder el instrumento situación fue de 60 minutos.

Los tres instrumentos mencionados fueron aplicados con anterioridad a un grupo de siete (7) estudiantes con las mismas características de los veintisiete (27) estudiantes de la población seleccionada. La única diferencia que se presentó en los dos grupos fue que recibían las clases en un horario diferentes con el mismo profesor. Esta primera aplicación se realizo para determinar la pertinencia y la validez de los instrumentos. Se llegó a la conclusión que las preguntas planteadas eran comprensibles para la población estudiada, el lenguaje era claro y las preguntas establecidas permitían alcanzar los objetivos de cada uno de los instrumentos. Asimismo, se logró establecer que el orden en que fueron presentadas las preguntas fue el apropiado.

Análisis de datos

El análisis de los datos tuvo como objetivo identificar las concepciones que tenían los estudiantes para profesor sobre pensamiento estadístico. Se caracterizaron las respuestas y categorizaron de acuerdo a lo completas o superficiales que estas fueron frente a la definición presentada en el marco conceptual, para lo cual se desarrollaron dos niveles de análisis: descriptivo e inferencial.

De acuerdo a lo anterior, el análisis de datos se desarrolló haciendo uso de lo que Gavilán, García y Llinares (2007) denominaron "Viñeta" y que según estos autores es un instrumento que permite integrar la descripción y el análisis de los datos que dan cuenta de una situación particular en un mismo espacio de tiempo. En esta investigación se organizó la información de tal forma que fuese posible comparar las respuestas de los estudiantes frente a un mismo instrumento en un momento particular. Se generaron dos viñetas, la primera con el fin de analizar el panel, la segunda para registrar y analizar los datos obtenidos en los dos instrumentos restantes (Caracterización y Situación).

De los veintisiete estudiantes del curso Didáctica de la Estadística, veinte asistieron a la sesión en la que se realizó la prueba. Cuatro estudiantes no entendieron la intención de la pregunta del panel y sus respuestas se centraron en la explicación de lo que entendían de cada una de las definiciones. Cuatro estudiantes respondieron el instrumento sin argumentar su respuesta, es decir, frente a cada definición escribían las palabras "Sí" o "No". De acuerdo a lo anterior, el análisis se realizó teniendo en cuenta la información obtenida de los doce restantes del curso Didáctica de la estadística.

Construcción viñeta 1. En primera instancia, se tomó la información obtenida con el panel y teniendo en cuenta la variabilidad en las respuestas y la dificultad que se puede presentar para reconocer patrones en los comentarios que los estudiantes para profesor hicieron de cada una de las caracterizaciones y la caracterización propia, se hizo uso de la escala usada por Pehkonen y Furinghetti (2002). De esta manera, se generaron datos que se agruparon en cuatro grupos: Y (= totalmente de acuerdo), P + (=acuerdo parcial con una orientación positiva), P - (= parcial acuerdo con una orientación negativa), N (= completo desacuerdo). Para esto, se hizo necesario la elaboración de las siguientes categorías de análisis y de indicadores (Ver Tabla 1).

Categorías panel.

1. De acuerdo (Y): En esta categoría están aquellos estudiantes que en su justificación considerarón que las caracterizaciones contienen los elementos necesarios para hablar de pensamiento estadístico y por ende no necesitan ser complementadas.
2. Parcialmente de acuerdo con orientación positiva (P+): En esta categoría están los estudiantes que considerarón que falta al menos un elemento para que la caracterización pueda dar cuenta de lo que es pensamiento estadístico.
3. Parcialmente de acuerdo con orientación negativa (P-): en esta categoría se contemplarón los estudiantes que consideran falta dos o más elementos para definir pensamiento estadístico.
4. Desacuerdo (N): En esta categoría se encuentran los estudiantes que afirmarón no estar de acuerdo con la caracterización ya sea porque está carece elementos fundamentales al momento de hablar de pensamiento estadístico o porque consideran que no define lo que significa pensamiento estadístico.

Indicadores. Como indicadores se tomarán las expresiones que los estudiantes usen para referirse a una definición:

Tabla 1
Indicadores

Y	P+	P-	N
Sí	Falta tener en cuenta…	Solo se habla de…	No
De acuerdo	Tiene los elementos pero falta ser más específica…	Es muy general	En desacuerdo
Es coherente	Cumple ciertos elementos…	Es confusa	Incompleta
Esta completa	Abarca gran parte…	Contiene elementos…pero no son esenciales.	No define
Cumple todos los elementos…		Faltan elementos primordiales	No cumple
Me gusta			

Posteriormente en la Tabla 2, se organizaron los datos de acuerdo al número de opiniones frente a cada definición, la primera columna representa la opinión de los estudiantes y de la segunda a la séptima se indica a cual definición se está haciendo referencia. Con esto es posible establecer cuáles de las acepciones son las más representativas para los estudiantes para profesor, y cuál es la que genera mayor inconformidad.

Tabla 2
Frecuencia de cada definición

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Y	3	4	2	4	6	1
P+	1	3	5	0	0	1
P-	3	3	2	6	3	3
N	5	2	3	2	3	7

A partir de la elaboración de las tablas de datos, se hará una descripción de las respuestas encontradas presentando lo datos como evidencia, de tal forma que frente a cada una de las definiciones se pueda analizar lo que los estudiantes para profesor consideran le falta o modificarían. Vale la pena recordar que este análisis descriptivo e inferencial se puede realizar gracias a los comentarios que los estudiantes realizaron frente a cada una de las definiciones.

Construcción de la viñeta 2. La viñeta dos surge de la recolección de información obtenida en el instrumento "Caracterización" y el instrumento "Situación". Teniendo en cuenta que se buscó relacionar los datos encontrados en cada uno de estos instrumentos, se confrontó la definición que dan los estudiantes con la respuesta que den al instrumento Situación. Es decir, se buscó establecer si la definición que dieron en el primer instrumento es coherente con la concepción que ponen en juego al momento de resolver la "Situación". En esta viñeta los datos surgieron dos grupos, los cuales se seleccionaron teniendo en cuenta los aspectos que los estudiantes consideraban relevantes al momento de definir pensamiento estadístico.

Viñeta 1. De acuerdo a la Tabla 2, se puede afirmar que no hay una unificación por parte de los estudiantes en tanto no hay una diferencia significativa frente a las caracterizaciones que favorecen o no.

Frente a la Caracterización #2, parece haber una mayor aceptación en tanto un grupo de siete (7) estudiantes respondieron positivamente a la definición. Cuatro (4) están completamente de acuerdo, afirmando que en un proceso estadístico es fundamental la recolección de la información para poder hacer un análisis de datos, esto se puede apreciar en las declaraciones de EPP5.

> EPP5: Sí estaría dando los elementos necesarios… pues de la información recolectada, se hace el tratamiento pertinente respectivo a lo que se quiera analizar.

Estos estudiantes están considerando como primordial una característica propia del razonamiento estadístico, ya que según Garfield y Ben-zvi (2008), uno de los elementos del razonamiento estadístico es hacer interpretaciones y análisis a partir de un conjunto de datos. Sin embargo, aunque el análisis y las interpretaciones de datos estadísticos son un elemento esencial del razonamiento estadístico es necesario hacer alusión a más elementos para definir razonamiento estadístico. Tres (3) estudiantes están parcialmente de acuerdo con orientación positiva, ya que consideran que a la definición le hace falta mencionar que el proceso estadístico debe realizarse a partir de información obtenida de situaciones reales, esto puede verificarse en el comentario de EPP1.

> EPP1: Esta definición es menos completa, pues tiene en cuenta la toma de decisiones, que es una de las finalidades de la estadística, pero le hace falta la idea del trabajo relacionado con situaciones del mundo real

Se puede inferir, a partir de lo anterior, que los tres (3) estudiantes están considerando nuevamente la importancia de los datos, pero además están teniendo en cuenta la importancia de la naturaleza de los datos para un estudio estadístico. Según Garfield y Ben-zvi (2008) una característica propia de la estadística es proporcionar herramientas para el análisis de situaciones del mundo real, así que, a pesar de que consideren un elemento más, nuevamente se quedan cortos al definir pensamiento estadístico.

La Caracterización # 3, también tuvo siete (7) estudiantes que argumentaron positivamente frente a ella. De este grupo de siete (7) estudiantes dos (2) estuvieron completamente de acuerdo,

argumentando la importancia de hacer interpretación de los datos en estadística, esto se puede evidenciar en las declaraciones de EPP14.

> EPP14: … en estadística se hace interpretación e datos

Estos estudiantes a pesar de considerar completa la Caracterización # 3 que es la referente al razonamiento estadístico desde lo expuesto por Garfield y Ben-zvi (2008), en su argumentación solo consideran, como el grupo anterior, la importancia de interpretar un conjunto de datos, nuevamente solo tienen en cuenta un aspecto del razonamiento estadístico. Cinco (5) estudiantes estuvieron parcialmente de acuerdo con esta caracterización, argumentando que a la definición le faltaba hablar de cómo se iba a hacer la recolección de los datos y el análisis de los mismos, como se evidencia en las declaraciones de EPP10.

> EPP10: considero que esta definición aborda aún más aspectos importantes… pero aun así hace falta el análisis de datos

Nuevamente, estos estudiantes parecen dar prioridad a la necesidad de recolectar y analizar datos, dejando de lado, por ejemplo, los métodos apropiados para hacer el análisis.

La Caracterización # 5 tuvo seis (6) estudiantes que estuvieron completamente de acuerdo con está. Estos estudiantes afirmaron que estaban de acuerdo con esta definición en tanto, el trabajo estadístico estaba relacionado con el mundo real, esto se puede apreciar en los argumentos de EPP11.

> EPP11: A mi modo de ver esta caracterización es la que define pensamiento estadístico ya que en ella interviene el contexto

De acuerdo a lo anterior, se puede inferir que los estudiantes les están dando primacía a la idea de la naturaleza de los datos, dado que la definición menciona la variabilidad de los datos y la presencia de estos en el mundo real.

La Caracterización # 6 generó mayor inconformidad a los estudiantes, en cuanto un grupo de diez (10) estudiantes estuvieron en desacuerdo. Siente (7) estudiantes afirmaron estar completamente en desacuerdo argumentando que en la caracterización falta hacer mención a cuales son los procesos sobre los que hay variación, esto se puede ver en la afirmación de EPP16.

> EPP16: No, ya que no especifica de qué tipo de procesos se está hablando

La afirmación de estos estudiantes permite identificar que no están reconociendo los procesos necesarios que se deben llevar a cabo cuando se habla de pensamiento estadístico, si bien es cierto que la definición no los menciona, al hacer alusión a la variación, deberían estar en la capacidad de reconocer todos los procesos que esta implica (Garfield & Ben-Zvi 2008).

La Caracterización # 1 fue otra que generó inconformidad en los estudiantes, ya que ocho estudiantes estuvieron en desacuerdo. Cinco (5) estudiantes estuvieron en completo desacuerdo declarando que la definición solo tiene en cuenta uno de los elementos del pensamiento estadístico: las conjeturas, esto se puede evidenciar en el comentario de EPP16.

> EPP16: Esta definición no contiene todos los elementos para hablar de pensamiento estadístico ya que no solo se trata de la capacidad para realizar conjeturas.

Este grupo de cinco (5) estudiantes, parece no entender la Caracterización # 1, pues esta contiene más elementos de los que ellos consideran, sin embargo, las argumentaciones que dan

no permite identificar por qué consideran que las conjeturas a partir de información estadística no son suficientes para hablar de pensamiento estadístico. Tres (3) estudiantes estuvieron parcialmente de acuerdo con orientación negativa frente a esta definición, argumentando que las conjeturas que se mencionan deberían indicar que son de carácter cuantitativo, esta afirmación se puede evidenciar en el comentario de EPP9.

> EPP9: La definición me parece coherente pero creo que hace falta mencionar el carácter cuantitativo de los datos para generar conjeturas.

De estos tres (3) estudiantes, se puede inferir nuevamente que no están teniendo el resto de la definición, pues en esta se dice que las conjeturas se hacen a partir del conocimiento estadístico y este tiene en cuenta el carácter cuantitativo de los datos.

Ahora bien, de acuerdo a lo anterior se puede decir que los estudiantes privilegian en particular dos aspectos al momento de hablar de pensamiento estadístico: la recolección y el análisis de datos y la pertenencia de estos a situaciones reales.

Viñeta 2. Un grupo, de ocho (8) estudiantes, en su definición de pensamiento estadístico hizo alusión a la importancia de organizar la información y de la inmersión de esta en el mundo real. Además hizo énfasis en que dicha organización debía ser por medio de tablas o graficas estadísticas. Esta afirmación se puede evidenciar en la definición dada por EPP17.

> EPP17: Pensamiento estadístico es el conjunto o rama que ordena los diferentes sucesos que ocurren en la vida diaria… por medio de herramientas como tablas o gráficas.

Este mismo grupo de ocho (8) estudiantes frente al instrumento "Situación" afirma que Yimmy no está llevando a cabo ningún proceso cognitivo, puesto que al parecer no hace uso de ninguna herramienta estadística. Sin embargo, considera que Lady sí está llevando a cabo un proceso de razonamiento estadístico, en cuanto organiza los datos en una tabla. Esta afirmación se puede evidenciar en las declaraciones de EPP17.

> EPP17: En Yimmy no veo reflejado un pensamiento o razonamiento estadístico, puesto que piensa que al tener la probabilidad del 40% ese valor es 4000. Además que no realiza ningún procedimiento estadístico, sino solo infiere. Por otro lado, Lady al realizar la tabla donde organiza los datos presentados, ya está teniendo un razonamiento estadístico puesto que le será más fácil dar una respuesta a la pregunta planteada.

En la descripción anterior se puede ver que los estudiantes sí acudieron a la definición que dieron en el instrumento Caracterización para abordar la situación. Por ejemplo, EPP17 es consistente en los dos instrumentos, en cuanto para él el pensamiento estadístico significa organizar la información y Lady hace dicha organización. Sin embargo, los estudiantes de este grupo a pesar de que dieron la definición de pensamiento estadístico, utilizan esa misma información para hacer referencia al razonamiento estadístico.

El segundo grupo está conformado por cuatro (4) estudiantes. Estos estudiantes en su definición de pensamiento estadístico tuvieron en cuenta elementos como el análisis de datos, esto se evidencia en la definición dada por EPP1 y EPP3.

> EPP1: Pensamiento estadístico: el proceso que realiza el cerebro para poder entender, analizar e inferir situaciones que suceden en el mundo real.

> EPP3: Es la forma en la cual vemos la información obtenida, además la habilidad de organizar los datos y realizar sus respectivos análisis…

Este grupo, de cuatro (4) estudiantes, frente al instrumento situación afirmó que los estudiantes no estaban razonando estadísticamente, pero sí pensando estadísticamente, en cuanto están analizando los datos pero no están haciendo uso de herramientas estadísticas. Esta afirmación se evidencia en la argumentación de EPP3.

> EPP3: Teniendo en cuenta cada una de las respuestas se evidencia que los estudiantes nos están razonando estadísticamente, ya que únicamente están analizando los datos pero no están haciendo uso de herramientas estadísticas adecuadas

El grupo de cuatro (4) estudiantes también mostró ser consistente en cuanto la respuesta a los dos instrumentos. Estos estudiantes tuvieron en cuenta la definición de pensamiento estadístico, donde privilegian el análisis de datos, para responder a la situación, sin embargo consideraron el razonamiento estadístico más complejo que el pensamiento, al afirmar que los personajes de la situación piensan pero no razonan estadísticamente.

Resultados

A partir de la Viñeta 1, se pudo identificar que los aspectos que los estudiantes consideraban más importante en la definición de pensamiento estadístico eran el análisis de datos y la pertenencia de los datos al mundo real. Esta información es coherente con la obtenida en la Viñeta 2 en la cual se identificaron como aspectos esenciales la organización, el análisis de datos y la relación de estos con el mundo real.

A partir de las dos viñetas se pudo identificar que ocho (8) estudiantes conciben pensamiento estadístico como la organización de los datos y la pertenecía de estos a situaciones reales. Estos componentes son mencionados por Garfield y Ben-zvi, (2008) en su definición de razonamiento estadístico, pero aunque los consideran necesarios, no definen el razonamiento estadístico. Además, en este grupo se identificó el uso indistinto del término razonamiento con el término pensamiento.

Cuatro (4) estudiantes conciben pensamiento estadístico como el análisis de datos lo cual se acerca más a la definición de razonamiento dada por Garfield y Ben-zvi (2008), sin embargo, en este grupo de estudiantes estableció una jerarquía, en donde se considera de mayor complejidad el razonamiento que el pensamiento estadístico, hecho que contradice la teoría.

Discusión

Con esta investigación se pudo corroborar lo expuesto por Garfield y Ben-zvi (2008) pues al igual que en sus investigaciones, un grupo de estudiantes trata indistintamente los procesos cognitivos que implican razonar y pensar estadísticamente y otro grupo de estudiantes privilegio el razonamiento estadístico sobre el pensamiento estadístico. Además se identificó que los estudiantes privilegian las acepciones donde se hace referencia a un mayor manejo de números, cálculos o formular esperando llegara una respuesta correcta, es decir, los estudiantes comparan las matemáticas con la estadística (Garfield y Ben-zvi, 2008) y esta puede ser la principal dificultad para comprender que los procesos cognitivos que se realizan en cada ciencia son diferentes y la causa trascendental de que los objetivos educativos en la educación estadística no hayan llegado a un consenso (Garfield y Ben-zvi, 2008).

Las concepciones que tiene el grupo de estudiantes para profesor, están enfocadas a elementos básicos del razonamiento estadístico, a continuación se mencionan las concepciones encontradas en esta investigación:

1. El pensamiento estadístico es la capacidad para organizar datos del mundo real.
2. El pensamiento estadístico hace referencia a la interpretación y al análisis de datos.

Desafortunadamente como ya se mencionó son elementos básicos del razonamiento estadístico, por lo cual a pesar de que los lineamientos curriculares pidan a los profesores que enseñen a sus estudiantes a pensar estadísticamente, es innegable que la organización y análisis de datos puede trasmitirse haciendo uso de enfoques tradicionales de enseñanza, centrándose en el desarrollo de habilidades y cálculos, procesos que no conducen a los estudiantes a razonar o pensar estadísticamente (Garfield y Ben-zvi, 2008).

Por otro lado, se verificó la pertinencia y la potencia de utilizar no dos, sino tres instrumentos para indagar las concepciones de los estudiantes, en particular el instrumento denominado situación, pues este reveló las verdaderas concepciones de los estudiantes sobre pensamiento estadístico.

Referentes bibliográficos

Batanero, C. (2013). Sentido estadístico: Componentes y desarrollo. En *I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 5-7).

Bohórquez, L. (2013). *Cambio de concepciones de un grupo de futuros profesores de matemática sobre su gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje en un ambiente de aprendizaje fundamentado en la resolución de problemas*.

D'Amore, B., & Fandiño-Pinilla, M. I. (2004). Cambios de convicciones en futuros profesores de matemática de la escuela secundaria superior. *Epsilon, 20*(1), 25-43.

Doerr, H. M., & Zangor, R. (2000). Creating meaning for and with the graphing calculator. *Educational Studies in Mathematics, 41*(2), 143-163.

Espinel, M. C. (2007). Construcción y razonamiento de gráficos estadísticos en la formación de profesores. *Investigación en educación matemática*, 99-120

Furinghetti, F., & Pehkonen, E. (2002). *Rethinking characterizations of beliefs Beliefs: A hidden variable in mathematics education?* (pp. 39 - 57). Netherlands: Springer.

Garfield, J. B., Ben-Zvi D., & Chance B. (2008). Creating a Statistical Reasoning Learning Environment. *\ldots ' Statistical Reasoning*.

Garfield, J., delMas, R., & Chance, B. (2002). The Assessment Resource Tools for Improving Statistical Thinking (ARTIST) Project. NSF CCLI grant ASA- 0206571.[Online: https://app.gen.umn.edu/artist/]

Gavilan, J. M. a. G. M. a. L. S. (2007). Una perspectiva para el analisis de la práctica del profesor de matemática. Implicaciones metodologicas. *Enseñanza de las Ciencias, 25*(2), 157-170.

Green, T. F. (1971). *The activities of teaching*. New York: McGraw-Hill.

Lee, C., & Meletiou, M. . (2003). Some difficulties of learning histograms in introductory statistics. *Joint Statistical Meetings-Section on Statistical Education.*, 2326-2333.

Thompson, A. G. (1992). Teacher's Beliefs and Conceptions: A Synthesis of the Research. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 127-146). New York: Macmillan.

Pehkonen, E. (1999). Conceptions and images of mathematics professors on teaching mathematics in school. *International Journal of Mathematical Education in \ldots, 30*(3), 389-397.

Rocha, P. (2009). Una educación estadística: para una sociedad que tolere la incertidumbre. *Revista Científica, 11*, 6-14.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Shaughnessy, J. M., Garfield, J., & Greer, B. (1996). Data handling In K. C. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (Vol. 1, pp. 205-237). Dordrecht, Netherlands: Springer.

Wild, C., & Pfannkuch, M. . (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. *Intemutionu lStaristicul Review*, 223-265.

Da taxa de variação média à taxa de variação instantânea: uma proposta no âmbito do ensino médio

Edson Rodrigues da **Silva**
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Brasil
professoredsonrodrigues@gmail.com
Maria José Ferreira da **Silva**
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Brasil
zeze@pucsp.br

Resumo

Neste artigo apresentamos um recorte do trabalho de Silva (2012), que contempla umasituação de aprendizagem com oito estudantes do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública do Estado de São Paulo, cujo objetivo foi levá-los à construção de significado para a ideia de taxa de variação instantânea a partir da ideia de taxa de variação média. Com esse intuito, e fundamentados nos pressupostos da Engenharia Didática, aplicamos e analisamos uma situação de aprendizagem composta por cinco atividades. Como aporte teórico utilizamos a Teoria das Situações Didáticas (TSD) e a Teoria de Registros de Representação Semiótica, que nos auxiliaram na elaboração das atividades, cuja análise apontou que esses estudantes, por meio da mobilização simultânea dos registros de representação gráfica, algébrica e tabular, construíram significado para a ideia de taxa de variação instantânea a partir de uma abordagem intuitiva da ideia de taxa de variação média.

Palavras chave: Taxa de variação média. Taxa de variação instantânea. Registros de Representação Semiótica. Teoria das Situações Didáticas.

Introdução

Identificar quando a representação gráfica de uma função cresce, decresce ou é constante deve ser uma tarefa trivial para qualquer cidadão que tenha concluído a Educação Básica, todavia, para perceber o quão rápido essa representação gráfica cresce ou decresce, ou seja, qualificar seu crescimento e decrescimento, é necessário um conhecimento mínimo da noção de taxa de variação. Segundo Rezende (2003, p. 33), "no mundo de hoje, não basta perceber o crescimento/decrescimento de uma função, mas determinar precisamente o quanto esta está crescendo/decrescendo", ou seja, é importante que a ideia de taxa de variação faça parte do conhecimento matemático de todos. Todavia, sabemos que esta não é a realidade da maior parte da população, como podemos observar no relato do autor, ao expor que o índice de não aprovação na disciplina de Cálculo Diferencial pode chegar a 95% entre estudantes do Ensino

Superior que, constatamos que representam apenas 13,9% dos brasileiros entre 17 e 25 anos[1], quanto aos demais, se não tiveram acesso a estas ideias na Educação Básica, não mais as terão.

Rezende (2003) credita essa situação ao fato de que alguns problemas clássicos do Cálculo Diferencial são evitados, ignorados, ou tratados sem a devida atenção pelos professores da escola básica. Ponderamos que se estes problemas fossem abordados, ainda que intuitivamente, nesse nível de escolaridade, com o objetivo de levar os estudantes à construção de significado para suas noções fundamentais, essas fariam parte do conhecimento matemático de grande parte da população.Para nós, a problemática do estudo do Cálculo Diferencial na escola básica está em focar o processo de ensino e de aprendizagem nas ideias que o fundamentam e não em antecipar conteúdos e metodologias dos cursos universitários. Pensamos que essas ideias não são de difícil assimilação, pelo contrário, são simples e passíveis de serem compreendidas tanto por estudantes da escola básica quanto por estudantes universitários, basta que estejam inseridas em um contexto apropriado para cada nível de escolaridade.

Posto isso, nos detivemos em buscar trabalhos que sugerissem abordagens intuitivas para a ideia de taxa de variação sem tratá-la com o rigor e formalismo do Ensino Superior, com o intuito de elaborar e aplicar uma situação de aprendizagem para um grupo de estudantes do 3º ano do Ensino Médio. Assim, encontramos em Machado (1988), Silva (2002) e Trotta (1980), as concepções pertinentes ao objeto matemático taxa de variação que nortearam nossos estudos, visto que para o ensino das noções de Cálculo Diferencial esses autores privilegiam "o significado das ideias fundamentais em detrimento do acúmulo de técnicas operatórias ou de definições formalmente rigorosas". (Machado, 1988, p. 4).Desse modo, os estudos referentes ao objeto matemático taxa de variação nos permitiram visualizar outros métodos para seu ensino e aprendizagem e nos nortearam na tentativa de atingir o objetivo dessa situação de aprendizagem: Levar um grupo de estudantes à apropriação dos conhecimentos referentes à noção de taxa de variação instantânea a partir da noção de taxa de variação média.

Para atingir esse objetivo, bem como para desenvolver as atividades que compuseram a situação de aprendizagem, baseamo-nos na Teoria de Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval e na Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau.A Teoria de Registros de Representação salientou a importância da diversidade de registros de representação e a articulação entre os mesmos nas atividades que compuseram a situação de aprendizagem, enquanto a TSDnos auxiliou a modelar o processo de ensino e aprendizagem da ideia de taxa de variação instantânea com base nasrelações didáticas em que se pode identificar as interações entre o professor, o aluno, o saber e o meio, epropôs um modelo teórico para a construção, análise e experimentação da situação de aprendizagem.

Isso posto, adotamos pressupostos da Engenharia Didática de Artigue (2009) como metodologia de pesquisa visto que, de acordo com a autora, "como metodologia de investigação, a engenharia didática se caracteriza em primeiro lugar por um esquema experimental baseado nas 'realizações didáticas' em sala de aula, isto é, sobre a concepção, realização, observação e análise de sequências de ensino" (Artigue,1995, p. 36. tradução nossa). No processo da Engenharia Didática, Artigue (1995) delimita quatro fases fundamentais: a primeira, denominada de análises preliminares, a segunda voltada à concepção e análise *a priori* da sequência didática, a terceira designada à experimentação, e a quarta fase voltada à análise *a posteriori* e validação.

[1] Informações retiradas de site http://www.unb.br/noticias/unbagencia/unbagencia.php?id=3112 em22/06/2012.

A Situação de Aprendizagem – Da taxa de variação média à taxa de variação instantânea

Participaram voluntariamente do experimento oito estudantes, aqui apresentados por meio de pseudônimos, da terceira serie do Ensino Médio de uma escola pública estadual, situada na cidade de Santo André – SP que, na época, contava com aproximadamente 1700 alunos matriculados no Ensino Fundamental e Médio, distribuídos em três períodos. As cinco atividades que compuseram a situação de aprendizagem foram aplicadas em um encontro com duração de aproximadamente 2 horas, onde os oitos voluntários foram dispostos em quatro duplas, para facilitar a troca de informações e as discussões entre os componentes, o que vai de encontro às orientações dos PCN+, de que "a aprendizagem não se dá com o indivíduo isolado, sem possibilidade de interagir com seus colegas e com o professor, mas em uma vivência coletiva de modo a explicitar para si e para os outros o que pensa e as dificuldades que enfrenta". (BRASIL, 2002, p.120).

Análise da Situação de Aprendizagem

Atividade 1 – O maratonista Marílson Gomes dos Santos é o maior vencedor brasileiro da São Silvestre, em 2010 ele completou a prova em aproximadamente 44min. Sabendo que o percurso da maratona de São Silvestre é de 15 km, determine a velocidade média desse maratonista em km/h, em seguida responda:

a) A velocidade média desenvolvida pelo maratonista durante a prova nos fornece informações precisas quanto a sua velocidade nos últimos 200 metros da corrida? Explique.

b) Pode-se afirmar que esse maratonista em nenhum momento ultrapassou sua velocidade média? E que a velocidade média desenvolvida pelo mesmo foi sua velocidade em toda a maratona? Explique sua resposta.

Essa atividade teve por objetivo levar os estudantes a perceber que a velocidade média de um móvel, em um determinado intervalo, não fornece informações precisas quanto a sua velocidade em um intervalo muito pequeno, ou em um instante qualquer. Logo no inicio, deparamo-nos com duas dificuldades que requereram a intervenção do professor, a primeira referiu-se a conversão das unidades de medida necessárias ao cálculo da velocidade média do maratonista em km/h e,a segunda, ao cálculo de sua velocidade média.Quando questionados se haviam estudado as conversões de unidade de medida ao longo de sua escolaridade, todos osalunos responderam que não ou que não lembravam, fato esse, que levou o professor a apresentar (relembrar) um procedimento para realizar tal conversão. Para isso, foi utilizadaa regra de três simples, por ser um processo de resolução conhecido pelos estudantes.

A dificuldade referente ao cálculo da velocidade média pôde ser percebida por meio da afirmação de William, "*a gente ta apanhando agora pra chegar na velocidade*" e, quando questionados a respeitos de possíveis estratégias para se obter a velocidade média do atleta, Artur afirmou que sua velocidade média poderia ser obtida da seguinte maneira: "*se ele correu em 44 minutos, 15 quilômetros, o certo devia ser eu dividir 44 por 15, por que ai daria um tempo para cada quilômetro*", o que nos levou a inferir que a ideia de velocidade média não fazia parte de seu conhecimento matemático. Assim, a intervenção do professor foi de extrema importância para levar os estudantes à compreensão da noção de velocidade média de um móvel por meio de situações concretas, comuns aos alunos.Convém ressaltar que, tanto a noção de velocidade média quanto a de conversão de unidades, de acordo com o atual currículo do Estado de São Paulo, faziam parte do conhecimento matemático dos estudantes que participariam da pesquisa.

Para o item (a), esperávamos levar os estudantes a um questionamento quanto à precisão do cálculo da velocidade média desenvolvida pelo atleta durante a maratona em relação a um intervalo relativamente pequeno, de modo que concluíssem que nos últimos 200 metros de corrida a velocidade do maratonista possa ser diferente de sua velocidade média. A dupla formada pelos alunos Guilherme e Artur afirmou que a velocidade média do maratonista fornece informações quanto a um intervalo de tempo de corrida e não da corrida inteira, o que nos levou a inferir que os estudantes não compreenderam a noção de velocidade média apresentada pelo professor.Enquanto as demais duplas concluíram que a velocidade média do maratonista não corresponde a sua velocidade durante toda a corrida, como se pode observar na figura 1, que mostra a solução apresentada por Gabriel e Adriano.

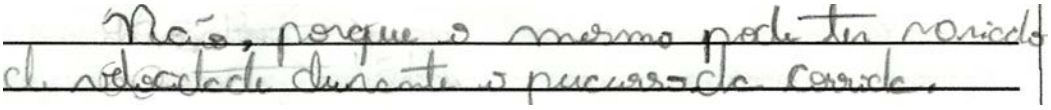

Não, porque o mesmo pode ter variado
a velocidade durante o percurso da corrida.

Figura 1. Resolução do item a da atividade 1 pelos alunos Gabriel e Adriano

Para o item (b), esperávamos que os estudantes percebessem que não se pode afirmar que o corredor não ultrapassou sua velocidade média durante a maratona, nem que a velocidade desenvolvida pelo atleta foi constante e igual a sua velocidade média.

Novamente, só Guilherme e Artur não atingiram o objetivo deste item, pois afirmaram que a velocidade do maratonista não ultrapassou sua velocidade média e, que sua "*velocidade foi constante e igual à velocidade média*", o que levou o professor a retomar a ideia de velocidade média com esses alunos,de modo a levá-los a perceber o erro/equivoco cometido, como se pode observar na fala de Artur, "Éverdade, pode ser que ele diminuiu para pegar água né!". Já as demais duplas atingiram o objetivo deste item, como se pode observar na figura 2, que apresenta a solução dadupla Gabriel e Adriano.

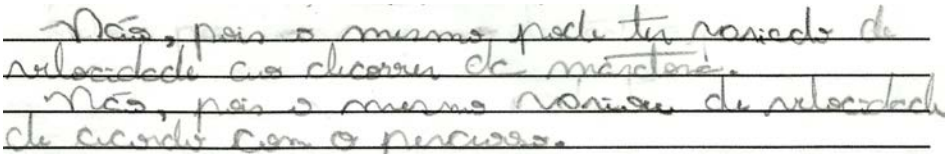

Não, pois o mesmo pode ter variado da
velocidade ao decorrer da maratona.
Não, pois o mesmo variou de velocidade
de acordo com o percurso.

Figura 2. Resolução do item b da atividade 1 pelos alunos Gabriel e Adriano

Atividade 2 – Determine a velocidade média de um carro entre às 8h e às 10h de um determinado dia, sabendo que às 8h ele estava no quilômetro 50 e às 10h estava no quilômetro 210 da mesma rodovia. A seguir responda:[2]

a) É possível afirmar que o carro não ultrapassou os 80 km/h no intervalo considerado? Justifique sua resposta.

b) Sabendo que durante esse percurso o carro esteve parado durante 20 minutos, o que se pode afirmar sobre sua velocidade máxima entre os instantes considerados?

c) A velocidade média desse carro nos fornece informações precisas quanto à velocidade desenvolvida pelo mesmo em um determinado instante de tempo, por exemplo, as $9h\ 33min$? Explique sua resposta.

Essa atividade teve por objetivo levar os estudantes a uma reflexão quanto à precisão do cálculo da velocidade média de um móvel em um intervalo muito pequeno ou em um instante

[2] Adaptado de Machado (1988, p. 30).

qualquer, e fazê-los sentir, ainda que intuitivamente, a necessidade de uma nova grandeza para o cálculo da velocidade de um móvel em um instante.

Para o item (a), esperávamos que os estudantes deduzissem que não se pode afirmar que a velocidade do veículo não ultrapassou sua velocidade média no intervalo dado, e apresentassem uma justificativa plausível para esse fato. Somente Guilherme e Artur não atingiram o objetivo deste item, pois concluíram que o veículo não ultrapassou sua velocidade média pelo fato da mesma ser constante, oque levou o professor a retomar as explicações apresentadas no item b da atividade anterior e, novamente, apresentar a ideia de velocidade média para esses estudantes.Já as demais duplas perceberam, quase que instantaneamente, que não se pode afirmar que a velocidade do veículo não foi maior ou menor do que sua velocidade média.

Para o item (b) esperávamos que os estudantes percebessem que o fato do veículo ter permanecido parado durante vinte minutos e ter percorrido a mesma distância no mesmo intervalo de tempo, implica em uma velocidade máxima maior do que sua velocidade média. Embora Guilherme e Artur tenham mobilizado corretamente tanto a ideia de conversão de unidades de medida quanto a de velocidade média, a dupla calculou a velocidade média do veículo em um intervalo de 100 minutos (descontando os 20 minutos que o veículo esteve parado) e compararam-na com o resultado apresentado no item anterior, seguidoda afirmação "*Agora aumenta de 80 km/h para 96,38 km/h*", o que levou o professor a intervir por meio dos seguintes questionamentos: "*Mas os fato de o veículo ter permanecido parado por 20 minutos diminui o tempo de viajem? Ou foram gastas as mesmas 2h? O que vocês acham?*" levando-os a refletir quanto a solução que apresentaram, como se pode observar na fala de Guilherme, "*É mesmo, o tempo não diminui. Então ele correu mais né*".Já as demais duplas atingiram o objetivo deste item,como se pode observar na figura 5, que apresenta a solução de Gabriel e Adriano.

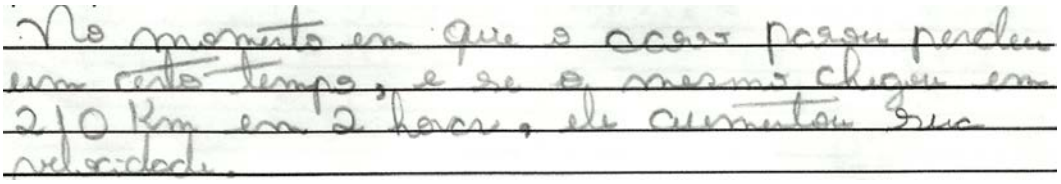

No momento em que o carro parou perdeu um certo tempo, e se o mesmo chegou em 210 Km em 2 horas, ele aumentou sua velocidade.

Figura 3. Resolução do item b da atividade 2 pelos alunos Gabriel e Adriano

Para o item (c), esperávamos que os estudantes concluíssem que a velocidade média desenvolvida pelo veículo no intervalo apresentado, não fornece informações precisas quanto a sua velocidade em um determinado instante. Embora as duplas Guilherme/Artur e Gabriel/Adriano tenham afirmado que a velocidade média do veículo não fornece informações quanto a sua velocidade em um determinado instante, suas justificativas fugiram as nossas expectativas, pois ambas particularizaram-na por meio das informações apresentadas no item b, ao justificar suas soluções recorrendo ao fato de o veículo ter parado por vinte minutos e por não se saber em que instante o veículo parou. Já as demais duplas atingiram o objetivo o objetivo esperado, visto que para os alunos Leonardo e William, a "*velocidade do veículo pode ter variado ao longo do percurso"*, enquanto para a dupla Caroline e Daniel, o veículo pode, em alguns momentos, ter realizado "*movimentos acelerados ou retardados"*.

Após os estudantes terem desenvolvido as atividades 1 e 2, o professor apresentou uma devolutiva e iniciou a uma institucionalização local, em que formalizou com os alunos que a velocidade média de um móvel não fornece informações precisas quanto a sua velocidade em um

determinado instante por meio de alguns questionamentos pertinentes as atividades desenvolvidas.

Atividade 3 – Ao fim de um teste de resistência de um veículo popular, sua trajetória foi modelada de acordo com a função horária $s(t) = 3t^2 - 5t + 2$ (s em metros, t em segundos), a partir dessa informação faça o que se pede:

a) Considere o intervalo de tempo $[2s, 4s]$, calcule $s(2)$ e $s(4)$ e, em seguida, determine a velocidade média deste veículo nesse intervalo de tempo.

b) Agora, determine a velocidade média do veículo no intervalo de tempo $[2s, 3s]$.

c) Determine a velocidade média do veículo no intervalo de tempo $[2s, 2{,}1s]$?

d) Considere agora o intervalo de tempo $[2s, (2 + \Delta t)s]$, onde Δt representa um acréscimo muito pequeno ao instante $t = 2s$, calcule $s(2)$ e $s(2 + \Delta t)$ e, em seguida, determine a velocidade média do veículo nesse intervalo de tempo. O resultado obtido depende de Δt, por esse motivo, ele será indicado por $v(\Delta t)$.

e) Com base na expressão matemática apresentada como solução para o item anterior, complete o quadro utilizando 4 casas decimais e, em seguida preencha as lacunas da frase abaixo.

Δt	2	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$v(\Delta t)$						

O valor de Δtestá se aproximando de _____, ao mesmo tempo, o valor de $v(\Delta t)$ está se aproximando de _____.

f) Como você interpretaria fisicamente a velocidade média do veículo no item (d), quando Δt tende a zero?

g) Qual a velocidade do veículo no instante $t = 2s$?

Essa atividade teve por objetivo levar os estudantes ao cálculo da taxa de variação instantânea de um veículo a partir da taxa de variação média de sua posição em relação ao tempo por meio da mobilização dos registros de representação algébrica e tabular.

Para os itens (a), (b) e (c), esperávamos que os estudantes apresentassem a taxa de variação média da função $s$em alguns intervalos previamente escolhidos por nós, e percebessem intuitivamente que esses intervalos diminuem cada vez mais, e que tendem há um instante t. No início da resolução destes itens,constatamos que os estudantes depararam-se com algumas dificuldades parasubstituir os valores correspondentes ao tempo na função $s(t)$, que só foram superadas por meio da intervenção do professor ao verbalizar que "*bastasubstituir os valores dados na função s*".Todas as duplas apresentaram a taxa de variação média da posição em relação ao tempo nos intervalos fornecidos, exceto os alunos Guilherme e Artur, que não realizaram as substituições corretamente, quecompreenderamseus erros quando o professor apresentou a devolutiva destes itens, como se pode observar na fala de Artur "*A então era isso!*".

Almejávamos que para o item (d) os estudantes apresentassem a taxa de variação média de $s(t)$ em relação a t no intervalo genérico $[2s, (2 + \Delta t)s]$, em que Δt corresponde a um acréscimo muito pequeno ao instante t, e concluíssem que a expressão $v(\Delta t) = 7 + 3\Delta t$ é a solução mais adequada para esse item.Somente Caroline e Daniel chegaram à solução esperada e

atingiram o objetivo deste item quase que instantaneamente, enquanto os demais, não interpretaram o enunciado como esperávamos e não mobilizaram os conhecimentos necessários para chegar a solução almejada, pois tentaram determinar o valor de Δt por meio de manipulações algébricas, tomando Δt como um valor desconhecido. E quando questionados, prontamente exclamaram que não conseguiam determinar o valor de Δt, fato esse, que nos chamou a atenção, pois não foi solicitado o valor de Δt e, que necessitou da intervenção do professor, querealizou uma leitura minuciosa do enunciado deste item junto aos alunos, de modo a levá-los a interpretar o que lhes foi solicitado e abandonar o tecnicismo até então empregado, em detrimento do cálculo da taxa de variação média da posição em relação ao tempo no intervalo fornecido.

Para o item (e) esperávamos que os alunos deduzissem, para o intervalo $[2s, (2 + \Delta t)s]$, que á medida que o valor de Δt tende a zero, a taxa de variação média de $s(t)$ em relação a t tende à taxa de variação instantânea no instante $t = 2s$, e completem o quadro fornecido, como segue abaixo:

Δt	2	1	0,1	0,01	0,001	0,0001
$v(\Delta t)$	14	10	7,3	7,03	7,003	7,0003

E esperávamos que percebessem que à medida que o valor de Δt tende para zero, o valor correspondente de $v(\Delta t)$ tende para $7\ m/s$, e que esse valor corresponde à velocidade do veículo no instante $t = 2$.Nenhuma dupla apresentou dificuldades para completar o quadro fornecido e chegar à solução esperada, mas Guilherme e Artur afirmaram que quando "*o valor de* Δt *está se aproximando de 0,0001, ao mesmo tempo, o valor de v(*Δt*) está se aproximando de 7.0003*", o que levou o professor intervir por meio do seguinte questionamento: "*E se diminuirmos o intervalo cada vez mais, para 0,00001? E se ele chegar bem pertinho de zero, o que ocorre com a velocidade?*", quando Artur respondeu "*quando* Δt *se aproxima de zero, a velocidade é 7*", o que nos levou a inferir que a dupla também atingiu o objetivo deste item.

Para o item (f), esperávamos que os alunos percebessem que à medida que Δt tende a zero a velocidade média do veículo tende à sua velocidade instantânea no instante $t = 2s$. Embora os estudantes não tenham relatado esse fato, constatamos, por meio de suas verbalizações, que todos atingiram esse objetivo, entretanto, Guilherme e Artur interpretaramΔt tendendo a zero como t tendendo a zero (instante em que se inicia o movimento do veículo), o que nos levou o professor a retomar as discussões realizadas no item anterior de modo a levá-los a perceber que era o intervalo de tempo que estava tendendo a zero.

Já para o item (g), almejávamos que os estudantes apresentassem a taxa de variação instantânea do veículo no instante $t = 2$, e concluíssem que sua velocidade neste instante foi igual a $7m/s$, pois quando Δt tende a zero, $v(\Delta t) = 7 + 3\Delta t$ tende a 7. Todas as duplas atingiram a finalidade desse item quase que instantaneamente. Somente os alunos Guilherme e Artur afirmaram, inicialmente, que a velocidade do veículo no instante $t = 2s$ foi igual a $4\ m/s$ e, logo em seguida, perceberam, com o auxilio do professor e por meio das inferências pontuadas nos itens anteriores, que avelocidade do veículo no instante $t = 2s$ foi igual a $7\ m/s$.

Atividade 4 – Agora com o auxilio do geogebra, retomemos os itens da atividade anterior. No referencial cartesiano, construa a curva de equação $y = 3x^2 - 5x + 2$, que representa graficamente a função $s(t) = 3t^2 - 5t + 2$, em seguida faça o que se pede.

a) Para o intervalo de tempo $[2s, 4s]$, você verificou que $s(2) = 4$ e que $s(4) = 30$, em que $(2, s(2))$ e $(4, s(4))$ podem representar dois pares ordenados, que por sua vez, podem ser representados no plano cartesiano por dois pontos. Marque esses pontos na parábola e os nomeie de A e B respectivamente, em seguida faça o que se pede:

i. Trace uma reta definida por A e B, selecione a ferramenta "inclinação" e aplique-a sobre a mesma, em seguida, calcule a razão entre a medida do segmento vertical e a medida do segmento horizontal, compare com o resultado que você apresentou no item (a) da atividade 3 e determine a velocidade média do veículo neste intervalo de tempo.

ii. Apresente a equação da reta definida por A e B, em seguida verifique se há algo comum entre a equação da reta e o valor da razão que você apresentou no item anterior.

b) Para o intervalo de tempo $[2s, 3s]$, faça o que se pede:

i. Construa novamente a representação gráfica da função $s(t) = 3t^2 - 5t + 2$ e marque os pontos $A(2, s(2))$ e $B'(3, s(3))$ sobre a mesma.

ii. Trace uma reta definida por A e B', aplique a ferramenta "inclinação" sobre a mesma, calcule a razão entre a medida do segmento vertical e a medida do segmento horizontal, em seguida, compare o resultado com a solução apresentada no item (b) da atividade 3 e determine a velocidade média do veículo neste intervalo de tempo.

iii. Apresente a equação da reta definida por A e B' e verifique o que há em comum entre esta equação e o valor da razão fornecido obtida no item anterior.

c) Para o intervalo de tempo $[2s, 2{,}1s]$, faça o que se pede:

i. Construa novamente a representação gráfica da função $s(t) = 3t^2 - 5t + 2$ e marque os pontos $A(2, s(2))$ e $B''(2.1, s(2.1))$ sobre a mesma.

ii. Trace uma reta definida por A e B", aplique a ferramenta "inclinação" sobre a mesma, calcule a razão entre a medida do segmento vertical e a medida do segmento horizontal, compare o resultado obtido com o resultado que você apresentou no item (c) da atividade 3 e determine a velocidade média do veículo neste intervalo de tempo.

iii. Apresente a equação da reta definida por A e B'' e novamente observe o que há em comum entre esta equação e o valor da razão que você apresentou no item anterior.

Essa atividade teve por objetivo levar os estudantes a perceber, por meio da mobilização dos registros de representação gráfica e algébrica da função $s(t) = 3t^2 - 5t + 2$, que o valor da taxa de variação média de $s(t)$ em relação a t, em um intervalo qualquer, corresponde ao coeficiente angular da reta secante à representação gráfica de $s(t)$, definida por dois pontos do tipo "$(t, s(t))$", extremos desse intervalo.Para o item (a), almejávamos que os estudantes verificassem que o coeficiente angular da reta de equação $y = 13x - 22$, como mostra o gráfico 1, corresponde a taxa de variação média de $s(t)$ em relação a t no intervalo $[2s, 4s]$, conforme foi verificado no item (a) da atividade anterior, e concluíssem que a taxa de variação média de $s(t)$ em relação a t no intervalo $[2s, 4s]$ foi igual a 13.

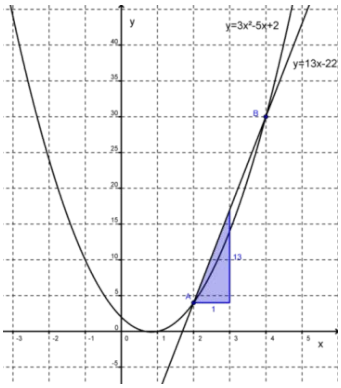


Figura 4. Reta secante a representação gráfica da função $s(t) = 3t^2 - 5t + 2$ nos pontos A e B

Todas as duplas alcançaram o objetivo deste item e apresentaram soluções similares a que havíamos previsto. Os alunos Caroline e Daniel, por exemplo, afirmaram que o valor da velocidade média do veículo corresponde ao coeficiente angular da reta definida pelos pontos A e B, enquanto os alunos William e Leonardo enfatizaram que o valor da razão entre os segmentos vertical e horizontal do triângulo retângulo, obtido por meio da "ferramenta inclinação", corresponde à taxa de variação de $s(t)$ em relação at.

Para o item (b), esperávamos que os estudantes percebessem que o coeficiente angular da reta de equação $y = 10x - 16$,como mostra o gráfico 2, corresponde à taxa de variação média de $s(t)$ em relação a t no intervalo $[2s, 3s]$, como foi verificado no item (b) da atividade anterior, e concluíssem que o valor da taxa de variação média de $s(t)$ em relação a t nesse intervalo foi igual a 10,.

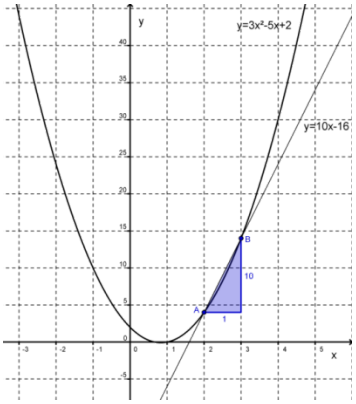


Figura 5. Reta secante a representação gráfica da função $s(t) = 3t^2 - 5t + 2$ nos pontos A e B'

Novamente todas as duplas atingiram o objetivo deste item. Os alunos Caroline e Daniel afirmaram que a velocidade média do veículo corresponde ao coeficiente angular da reta definida pelos pontos A e B', enquanto os alunos William e Leonardo basearam sua solução na ideia de taxa de variação, e novamente afirmaram que o valor da razão entre os catetos do triângulo retângulo obtido por meio da "ferramenta inclinação" é igual ao valor da taxa de variação de $s(t)$ em relação at. Já os alunos Guilherme e Artur, embora tenham apresentado a equação da reta definida pelos pontos A e B', não relataram, nem verbalizaram, que o valor do coeficiente angular dessa reta corresponde ao valor da razão entre os catetos do triângulo retângulo obtido por meio da "ferramenta inclinação", o que foi percebido somente quando o professor apresentou a devolutiva desta atividade.

Já para o item (c), esperávamos que os estudantes deduzissem que o coeficiente de angular da reta de equação $y = 7{,}3x - 10{,}6$, como mostra o gráfico 3, corresponde à taxa de variação média de $s(t)$ em relação a t no intervalo $[2s, 2{,}1s]$, como foi verificado no item (c) da atividade anterior, e concluíssem que a taxa de variação média de $s(t)$ em relação a t foi igual a 7,3.

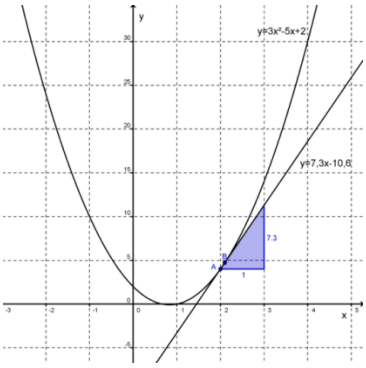


Figura 6. Reta secante a representação gráfica da função $s(t) = 3t^2 - 5t + 2$ nos pontos A e B''

Novamente, todasas duplas apresentaram soluções compatíveis com a que esperávamos, entretanto, os alunos Guilherme e Artur, embora tenham afirmado que a velocidade média do veículo no intervalo $[2s, 2{,}1s]$ foi igual a $7{,}3\ m/s$, apresentaram dificuldades para relacionar este valorcom o coeficienteangular da retadeequação$y = 7{,}3x - 10{,}6$, que só foram superadas após a devolutiva desta atividade. Caroline e Daniel, novamente afirmaram que o valor da velocidade média do veículo pode ser obtido por meio do coeficiente angular da reta definida pelos pontos A e B'', e que esse valor corresponde ao valor da razão entre os segmentos vertical e horizontal do triângulo retângulo obtido por meio da "ferramenta inclinação". Ao final desta atividade, o professor apresentou uma devolutiva e deu início a uma institucionalização local, em que formalizou, via registro de representação gráfica e algébrica da função $s(t) = 3t^2 - 5t + 2$, que o valor da taxa de variação média de $s(t)$ em relação a t em um intervalo qualquer do domínio de s, corresponde ao coeficiente angular da reta secante a representação gráfica de $s(t)$, definida por dois pontos do tipo "$(t, s(t))$" extremos desse intervalo.

Atividade 5 – Na atividade anterior, você deve ter observado que os pontos B, B' e B'' estão se aproximando cada vez mais do ponto A. Na atividade 3, você pôde verificar que à medida que o intervalo Δt se aproxima de zero, isto é, quando os pontos que definem as retas secantes aproximam-se cada vez mais do ponto A, o intervalo de tempo aproxima-se cada vez mais do instante $t = 2s$, e a velocidade média do veículo tende à velocidade instantânea do mesmo no instante $t = 2s$, que é igual a $7m/s$. No geogebra, construa o gráfico de equação $y = 3x^2 - 5x + 2$, que representa graficamente a função $s(t) = 3t^2 - 5t + 2$, marque o ponto $A(2, s(2))$, em seguida faça o que se pede:

a) Selecione a ferramenta "reta tangente", aplique-a no ponto A da representação gráfica de s, de modo a obter uma reta tangente à curva no ponto A, em seguida, marque um ponto qualquer sobre a representação gráfica de s, nomeio de B, trace uma reta definida por A e B e aplique a ferramenta "inclinação" sobre a mesma, movimente o ponto B e complete a frase: À medida que o ponto B se aproxima do ponto A, o intervalo de tempo Δt aproxima-se de _____.

b) Aproxime o ponto B o máximo possível do ponto A, calcule a razão entre o segmento vertical e o segmento horizontal, fornecidos pela ferramenta "inclinação", e compare o resultado com a solução que você apresentou no item g da atividade 3.

c) Assim pode-se concluir que: quando o intervalo de tempo tende a zero, ou seja, quando o ponto B aproxima-se o máximo possível do ponto A, a velocidade média do veículo tende à sua velocidade instantânea, que é igual a _____.

Essa atividade teve por objetivo levar os estudantes a perceber que à medida que o intervalo Δtdiminui, os pontos que definem a reta secante AB aproximam-se cada vez mais um do outro, de modo que a reta tenda a tangenciar a representação gráfica de $s(t)$ no ponto $A(2, s(2))$, como mostra o gráfico 4.

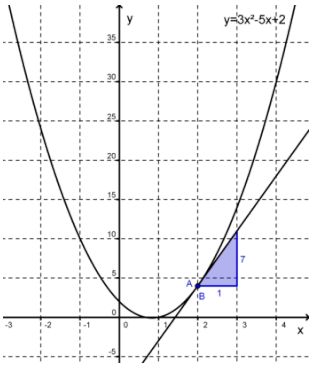


Figura 7. Reta tangente à representação gráfica de $s(t)$ no ponto A

Para o item (a), almejávamos que os estudantes percebessem que à medida que o intervalo Δt aproxima-se de zero, os pontos que definem a reta secante aproximam-se cada vez mais um do outro. Somente Guilherme e Artur atingiram a finalidade deste item, enquanto os demais afirmaram que o intervalo Δt se aproxima de sete quando o ponto B se aproxima do ponto A, o que levou o professor a intervir e solicitar que os estudantes retomassem as soluções apresentadas na atividade anterior e relacionem-nas com os itens que compõem esta atividade.

Esperávamos que para o item (b), os estudantes percebessem que a taxa de variação de $s(t)$ em relação àt corresponde ao coeficiente angular da reta tangente a representação gráfica de $s(t)$ no ponto A, e concluíssem que a taxa de variação de $s(t)$ em relação a t no ponto A é igual a 7. Com exceção de Guilherme e Artur, todas as duplas atingiram a finalidade deste item quase que instantaneamente. Acreditamos que Guilherme e Artur não atingiram a finalidade deste item de imediato, porterem apresentado dificuldades para atingiro objetivo do item (g) da terceira atividade, todavia, após a intervenção do professor, que retomou as discussões realizadas no item g da atividade 3, os estudantes chegaram a solução esperada.

Para o item (c), esperávamos que os estudantes generalizassem as inferências e conjecturas pontuadas a partir dos itens anteriores, e concluíssem que quando o intervalo Δt tende a zero, a velocidade média do veículo tende à sua velocidade instantânea no instante $t = 2s$, que é igual a $7\ m/s$. Todas as duplas atingiram o objetivo deste item, e perceberam que a velocidade do veículo no instante $t = 2s$ foi igual a $7m/s$.

Após a devolutiva referente às atividades que compuseram essa situação de aprendizagem, o professor saiu do contexto em que estava inserido junto aos estudantes e formalizou, para uma função qualquer $f(x)$, que o valor da taxa de variação instantânea de $f(x)$ em relação ax em um ponto qualquer de seu domínio corresponde ao coeficiente angular da reta de equação $y = ax + b$, tangente à representação gráfica de $f(x)$ neste ponto.

Considerações Finais

Embora algumas noções matemáticas que julgávamos fazer parte do conhecimento matemático dos estudantes não foram mobilizadas, nossa situação de aprendizagem parece tê-los levadoa modificações comportamentais frente ao objeto matemático taxa de variação, o que

caracterizou a compreensão da ideia de taxa de variação instantânea a partir da noção de taxa de variação média, pois segundo Brousseau (1975),

> um processo de aprendizagem pode ser caracterizado de modo geral (se não determinado) por um conjunto de situações identificáveis (naturais ou didáticas) reprodutíveis, conduzindo frequentemente à modificação de um conjunto de comportamentos de alunos, modificação característica da aquisição de um determinado conjunto de conhecimentos". (Brousseau, 1975, p. 6 apud Almouloud, 2007, p. 31)

Acreditamos que a construção de significado para a ideia de taxa de variação instantânea foi facilitada por meio da mobilização simultânea dos registros de representação algébrica, gráfica e tabular, pois "a mudança de registro constitui uma variável cognitiva que se revela fundamental em didática: ela facilita consideravelmente a aprendizagem ou ela oferece procedimentos de interpretação" (Duval, 2009, p. 81), e é a articulação de registros de representação que constitui uma condição de acesso à compreensão matemática. Desse modo, pensamos que o processo de ensino e aprendizagem da ideia de taxa de variação instantânea no âmbito do Ensino Médio deve ser abordado por meio de situações de aprendizagem que permitam a coordenação entre os vários registros de representação, de modo que os estudantes tenham independência e condições para construir significado para esta ideia.

Posto isso, concordamos com Silva (2012), ao inferir que estudantes do 3º ano do Ensino Médio podem construir significado para a noção de taxa de variação instantânea a partir de uma abordagem intuitiva da ideia de taxa de variação, desde que não se traga para esse nível de escolaridade a estrutura e as terminologias abordadas no Ensino Superior. Sendo assim, pensamos que seria viável abordar algumas ideias presentes no estudo do Cálculo Diferencial no âmbito do Ensino Médio, em particular a ideia de derivada em consonância com o ensino de funções, de modo que os estudantes compreendam-na como a taxa de variação instantânea de uma função f em um ponto P de seu domínio.

Referências e bibliografia

Almouloud, S. A. (2007). *Fundamentos da didática da matemática*. Curitiba: UFPR.

Artigue, M.; et al. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Una empresa docente & Grupo Editorial Iberoamérica. México, 33-59.

Artigue, M. (2009). *Didactical Design in Mathematics Education*. Nordic Research in Mathematics Education.

Brasil. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais (2002). *Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: MEC/SEMT.

Duval, R. (2009). *Semiósis e pensamento humano – Registros semióticos e aprendizagens intelectuais*. 1ª ed. Trad. de Levy, L. F.; Silveira, M. A. da. São Paulo: Ed. Livraria da Física.

Machado, N. J. (1988). *Matemática por assunto: noções de cálculo*. Ed. Scipione, v. 9, São Paulo.

Rezende, W. M. (2003). *O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica*. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de São Paulo. São Paulo.

Silva, B. A. et all. (2002). *Atividades para o estudo de funções em ambiente computacional*. São Paulo: Iglu.

Silva, E. R. (2012). *Uma proposta para o ensino da noção de taxa de variação instantânea no Ensino Médio*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Trotta, F.; Imenes, L. M. P.; Jakubovic, J. (1980). *Matemática Aplicada:3*. São Paulo: Moderna.

Da teoria à atividade prática pedagógica: dialogando com os dados

Camila Rubira **Silva**
Universidade Federal do Rio Grande
Brasil
camilarubira@hotmail.com
Suzi **Samá** Pinto
Universidade Federal do Rio Grande
Brasil
suzisama@furg.br

Resumo

Atualmente tem-se utilizado com maior frequência técnicas estatísticas para sintetizar e comunicar informações recorrentes no cotidiano. No entanto, para que o cidadão possa compreendê-las é necessário o conhecimento de conceitos básicos de Estatística. Considera-se de suma importância o estudo da Estatística desde o Ensino Fundamental, a fim de possibilitar ao estudante organizar, ler, interpretar e analisar dados criticamente, bem como auxiliar na tomada de decisões. O presente artigo tem por objetivo relatar uma experiência educacional vivenciada na atividade pedagógica Dialogando com os Dados. Esta atividade é uma das ações do projeto "A Estatística no Cotidiano", oferecida para estudantes da Educação Básica do 7° ano de uma escola pública municipal da periferia do município de Rio Grande – RS, Brasil. As atividades desenvolvidas proporcionaram, além do estudo de conceitos e procedimentos estatísticos, a vivência da pesquisa, o desenvolvimento da criatividade, interatividade e coletividade.

Palavras-chave: ensino de estatística, experiência educacional, Ensino Fundamental.

Introdução

A Estatística passou a fazer parte da vida diária das pessoas. Tabelas, gráficos, medidas e análises estatísticas são frequentemente utilizadas para sintetizar e melhor apresentar questões sociais, econômicas e ambientais. Cada vez mais, pesquisadores de diversas áreas do conhecimento têm se valido da Estatística no tratamento e análise de dados. Este cenário evidencia, segundo Cazorla e Castro (2008), a importância de preparar o cidadão para que compreenda o processo de geração das informações estatísticas, a fim de que seja capaz de tomar decisões conscientes.

Para Lopes (1998) o ensino da Estatística desde o Ensino Fundamental "[...] possibilita ao estudante desenvolver a capacidade de coletar, organizar, interpretar e comparar dados para obter e fundamentar conclusões, que é a grande base do desempenho de uma atitude científica" (p.15). A autora ainda ressalta a necessidade da escola de proporcionar a formação de conceitos que auxiliem no exercício de sua cidadania (1998).

Apesar da importância do ensino de estatística desde a Educação Básica estudos apontam que os estudantes têm dificuldades em compreender os conceitos estatísticos. Para Viali (2007) um dos motivos para esta dificuldade reside no fato que muitas vezes a estatística é trabalhada

com foco na resolução de cálculos e aplicação de fórmulas desvinculada da realidade. Esta forma de abordar a estatística pode levar o estudante a não entender o significado dos conceitos e sua aplicabilidade no cotidiano. Garfield e Ben-Zvi (2007) realizaram o levantamento de vários estudos publicados sobre o ensino e aprendizagem da estatística. Apesar destes estudos apresentaram diferentes teorias e metodologias, eles apontam as dificuldades que os estudantes têm na aprendizagem da estatística e a necessidade de novas abordagens para o Ensino da mesma.

Além da problemática relacionada às dificuldades na aprendizagem da Estatística, há de se considerar o impacto que as tecnologias como o computador, o telefone celular, a TV Digital e a internet vem causando na sociedade. Estes avanços tecnológicos não apenas ampliam o acesso à informação que circula no mundo moderno como também facilita o tratamento da mesma. No entanto, o tratamento das informações demanda, além de um bom aparato tecnológico, conhecimentos estatísticos que possibilitem sua organização, leitura, interpretação e análise.

Segundo Lévy (1999) planejar uma aula com recursos tecnológicos exige preparo do ambiente educacional, dos recursos tecnológicos que serão utilizados, dos conhecimentos prévios dos alunos para manuseá-los, do domínio da tecnologia por parte do professor, além de seleção e adequação destes recursos aos estudantes e aos objetivos propostos pela aula.

Conscientes disso, os integrantes do Laboratório de Estudos Cognitivos e Tecnologia no Ensino de Estatística (LabEst) da Universidade Federal do Rio Grande vêm desenvolvendo ações que incluem propostas pedagógicas voltadas para a inserção da tecnologia digital e da educação estatística em ambientes formais e não-formais de ensino. Tal iniciativa busca promover a inclusão social e digital e, garantir o exercício amplo da cidadania. O presente artigo visa apresentar uma das experiências pedagógicas vivenciada na oficina intitulada Dialogando com os Dados. Para tal propósito este trabalho foi dividido em quatro seções, sendo que nesta primeira realizou-se uma sucinta introdução sobre o tema. Na sequência será realizado um breve levantamento sobre o Ensino da Estatística no Brasil. Posteriormente, serão apresentadas as atividades pedagógicas propostas e por fim, teceremos algumas considerações.

O Ensino da Estatística no Brasil

De acordo com Cazorla e Santana (2010) podemos definir a Estatística "como uma ciência que tem como objetivo desenvolver métodos para coletar, organizar e analisar dados. Uma de suas finalidades é auxiliar a outras ciências na tomada de decisões em condições de incerteza" (p.113). Diante disto acredita-se que o estudo da Estatística, desde o Ensino Fundamental, possa auxiliar a constituição de cidadãos mais informatizados, críticos e preparados para compreender argumentos baseados em dados. Segundo a autora:

> Para que o indivíduo seja capaz de abstrair reflexivamente todas essas informações veiculadas, em forma de gráficos e tabelas, é necessário que a escola traga para sim a responsabilidade de introduzir e desenvolver o conhecimento estatístico com seus alunos, objetivando formar cidadãos capazes de ler, compreender e comparar dados estatísticos, bem como criticá-los (Cazorla, 2008, p.2).

Partindo da definição de cidadania apresentada por Lopes (1998) como sendo "a capacidade de atuação reflexiva, ponderada e crítica de um indivíduo em seu grupo social" (p.13), entende-se que a compreensão de conceitos estatísticos, contribui significativamente para uma formação voltada à cidadania, uma vez que permite ao sujeito questionar e analisar a veracidade de acontecimentos e informações presentes no seu cotidiano. .

A fim de que a educação estatística venha contribuir à formação cidadã, possibilitando ao sujeito intervir na sua realidade, torna-se necessário que a escola propicie ao estudante o confronto com situações e problemas de âmbito social, presentes na atualidade, desafiando-o a encontrar soluções e estratégias para resolvê-los. Lopes (2008) acredita que o ensino da Probabilidade e da Estatística:

> [...] possa contribuir para que a escola cumpra seu papel de preparar os estudantes para a realidade à medida que desenvolve a elaboração de questões para responder a uma investigação, que possibilita fazer conjecturas, formular hipóteses, estabelecer relações, processos necessários à resolução de problemas (Lopes, 1998, p.9).

A Estatística, enquanto ciência permite a coleta, organização e interpretação de informações, produção de estimativas e argumentos para fundamentar a tomada de decisões. No entanto, segundo Cazorla (2008) para que o ensino desta auxilie os estudantes a se tornarem "[...] cidadãos críticos e ativos numa sociedade onde a compreensão da informação estatística é fundamental" (p.10), faz-se necessário que a escola repense suas práticas pedagógicas.

O primeiro passo neste sentido, no Brasil, ocorreu ao final dos anos noventa, quando os conceitos básicos de Estatística foram incorporados oficialmente na grade curricular das escolas de Ensino Fundamental, com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (1998). Conforme as diretrizes deste documento, os conceitos estatísticos são abordados no Ensino Fundamental na área da Matemática, mais especificamente no bloco Tratamento da Informação.

Integram este bloco estudos relativos a noções de Estatística e probabilidade, junto a problemas de contagem envolvendo o princípio multiplicativo (Brasil, 1998). Segundo o referido documento a abordagem desses conceitos é justificada pela demanda social e por sua constante utilização na sociedade.

> Também é importante salientar que a compreensão e a tomada de decisões diante de questões políticas e sociais dependem da leitura crítica e interpretação de informações complexas, muitas vezes contraditórias, que incluem dados estatísticos e índices divulgados pelos meios de comunicação. Ou seja, para exercer a cidadania é necessário saber calcular, medir, raciocinar, argumentar, tratar informações estatisticamente etc. (Brasil, 1998, p.27).

Sendo assim, desde a Educação Básica os documentos oficiais recomendam procedimentos em que o estudante desenvolva habilidades e competências para seleção e interpretação crítica de tabelas e gráficos, compreensão e análise de argumentos e fatos apresentados no cotidiano. Além disto, são sugeridas algumas medidas estatísticas para interpretação e resumo do conjunto de dados, tais como média, mediana e moda. Os procedimentos que integram o bloco Tratamento da Informação possibilitam ao professor explorar, na sala de aula, temas transversais presentes no cotidiano dos estudantes, vinculados nos mais diversos meios de comunicação como jornais, revistas, internet, entre outros. Desenvolver os conceitos estatísticos a partir do cotidiano dos estudantes possibilita superar o ensino de estatística como simples ferramenta de cálculos e memorização de fórmulas:

> [...] o conhecimento estatístico poderá permitir uma análise de questões sociais e econômicas, desde que o ensino da Estatística e da Probabilidade não se configure como mais um momento para realizar cálculos, pois somente a resolução de exercícios mecânicos, a aplicação de fórmulas, a construção de gráficos e a leitura de tabelas provavelmente não viabilizarão o desenvolvimento do Pensamento Estatístico e Probabilístico que consiste, principalmente, em saber utilizar-se desses conceitos para solucionar problemas (Lopes, 1998, p.22).

Trabalhar conceitos estatísticos de forma mecânica e desvinculada da realidade, dando enfoque a memorização de regras e aplicação de fórmulas em nada garante a aprendizagem dos estudantes. Muitas vezes, quando confrontados a situações que problematizem e exigem o pensamento estatístico, não conseguem analisar e compreender o sentido e o significado desses conceitos.

Ainda neste sentido, os PCN apontam que o uso das tecnologias pode contribuir para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática. Para que isto ocorra, faz-se necessário que o professor tenha percepção da importância do seu trabalho na criação, condução e aperfeiçoamento das situações de aprendizagem, buscando utilizar as tecnologias, em suas aulas, com o intuito de potencializar o ensino. O uso de recursos tecnológicos como calculadoras e computadores possibilitam ao estudante o desenvolvimento do pensamento, da reflexão e da criatividade na criação de estratégias e tomada de decisões, uma vez que permite a realização dos cálculos de modo mais rápido e eficiente. Cazorla e Santana (2010) sugerem o uso de tecnologias digitais e ambientes virtuais de aprendizagem para o estudo da Estatística, pois o trabalho com conjuntos de dados relativamente grandes

> [...] torna a Estatística cansativa, enfadonha para nossos alunos. O pior é que o trabalho manual gasta tanto tempo que o interesse dos alunos para interpretar, analisar e discutir os resultados, a parte mais nobre da Estatística, aquela que se relaciona com a atividade cognitiva do aluno, fica em segundo plano, ou mesmo corre o risco de não acontecer (Cazorla e Santana, 2010, p.145).

As tecnologias digitais podem proporcionar aos professores e aos estudantes formas diferenciadas de organizar o processo de ensino e de aprendizagem da estatística. Esses recursos, quando bem utilizados, estimulam o raciocínio, a elaboração de estratégias na obtenção de soluções e conclusões, auxiliando na construção do conhecimento estatístico, valorizando a criatividade e a inclusão social.

Desenvolvimento da experiência pedagógica Dialogando com os Dados

Com base nas reflexões sobre a importância do ensino de estatística na Educação Básica e o suporte teórico que fundamenta as pesquisas no LabEst foi desenvolvida a atividade pedagógica Dialogando com os Dados. Essa integra as ações do Curso para Estudantes da Educação Básica – A Estatística no Cotidiano, vinculado ao Programa Novos Talentos. Esta oficina foi planejada com o intuito de propiciar aos estudantes o estudo de conceitos estatísticos básicos. Buscou-se, através de atividades dinâmicas, explorar conteúdos como tabelas, gráficos e representações que aparecem frequentemente no cotidiano, de modo que os estudantes pudessem construir procedimentos para coleta, organização, apresentação e interpretação de dados.

A experiência educacional foi realizada com estudantes do 7° ano do Ensino Fundamental de uma escola municipal da periferia do município de Rio Grande – RS, Brasil. O local foi escolhido para desenvolver as atividades propostas, principalmente, por ser um espaço aberto que estimula as práticas escolares diferenciadas considerando as vivências dos estudantes.

A prática Dialogando com os Dados foi realizada ao longo de duas semanas, tanto no espaço da escola quanto nos laboratórios da Universidade Federal de Rio Grande – FURG (LabEst e laboratório de informática). Na elaboração e realização da mesma, preocupou-se em promover o desenvolvimento do pensamento estatístico, a participação ativa dos estudantes, o reconhecimento e construção dos conhecimentos estatísticos apresentados, assim como incentivar

o uso de recursos tecnológicos. A oficina foi ministrada por uma equipe constituída de um professor do Ensino Superior, um estudante da pós-graduação e uma estudante de Licenciatura em Matemática.

Inicialmente, foram propostas atividades com intuito de proporcionar, além da construção de conhecimentos estatísticos, a criatividade, afetividade, interação e o trabalho coletivo. As atividades contaram com momentos de reflexão, interpretação, escrita, construção manual, utilização de instrumentos de uso específico como compasso, transferidor e calculadora, bem como de recurso tecnológico multimídia.

A primeira atividade buscou investigar o que os estudantes entendiam por estatística. Foi solicitado que escrevessem, em uma folha de seus blocos, de duas a quatro palavras que julgassem ter alguma relação com estatística. A seguir, as palavras elencadas foram escritas no quadro negro pelos professores e discutidas com os estudantes. Cabe ressaltar que alguns estudantes sentiram dificuldade em fazer tal relação. Preocupou-se nesse momento em permitir que eles se familiarizassem com o assunto, refletindo sobre as palavras escritas e sua relação com a Estatística.

Após as reflexões e discussões, os participantes da oficina passaram a realizar outras atividades a fim de promover a construção de alguns conceitos estatísticos. Na sequência, buscou-se com o auxílio do recurso tecnológico multimídia, apresentar algumas contribuições e áreas de abrangência da estatística nos processos de pesquisa, bem como algumas formas de apresentar e organizar dados, como tabelas e gráficos. Com isto, objetivou-se que os estudantes percebessem a importância da estatística na atualidade e sua integração com outras áreas e disciplinas.

Promover a relação dos conceitos ensinados na escola com o cotidiano do estudante, através de aplicações práticas, oportuniza que o mesmo vislumbre a aplicabilidade destes, atribuindo assim significado ao seu estudo. Segundo os PCN "O significado da atividade matemática para o aluno também resulta das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos e também entre estes e as demais áreas do conhecimento e as situações do cotidiano" (Brasil, 1998, p.37).

A segunda atividade consistiu na coleta de dados e sua organização. A fim de explicar melhor a coleta de dados, primeiro passo em uma pesquisa, foi realizado um levantamento com os estudantes a respeito de suas idades. As informações foram coletadas em sala de aula, trabalhando-se dessa forma o conceito de variável e dados estatísticos. No próprio PCN (1998) é indicado, para introduzir a coleta de dados em sala de aula, a abordagem de variáveis do cotidiano do estudante, como idade, peso e altura, despertando assim, o interesse e facilitando a compreensão dos conceitos elencados.

A partir da coleta das idades dos estudantes foi discutida a forma de apresentação e organização desta informação. Por sugestão dos próprios estudantes foi construída uma tabela de frequência absoluta no quadro negro. Na sequência da discussão da construção e aplicação de tabelas de frequência passou-se a terceira atividade. Esta objetivou trabalhar com a identificação de tabelas e gráficos e a interpretação da informação apresentada por estes. Com os estudantes organizados em duplas ou trios, foram distribuídos jornais e revistas de modo que pudessem pesquisar gráficos e tabelas com informações que julgassem relevantes. Com o material selecionado foi confeccionado cartazes (Figura 1) que incluíam também as interpretações dos estudantes sobre as informações contidas nos gráficos e tabelas. Cada grupo realizou uma breve

apresentação de sua pesquisa para a turma. Buscou-se com isso além de proporcionar aos estudantes o reconhecimento da forma de organizar e apresentar dados, o trabalho coletivo, a síntese e socialização das informações.

Figura 1. Atividade de pesquisa em revistas e jornais.

Esta atividade procurou mostrar aos estudantes as várias aplicações da estatística e as formas de sintetizar questões referentes à economia, política, esporte, educação, saúde, alimentação, moradia, meteorologia, pesquisas de opinião, entre outras. Lopes (2008) ressalta que:

> Uma educação estatística crítica requer do professor uma atitude de respeito aos saberes que o estudante traz à escola, que foram adquiridos por sua vida em sociedade. Em nosso modo de entender, seria necessária a discussão de temas, como a poluição dos rios e mares, os baixos níveis do bem-estar das populações, o abandono da saúde pública, entre outros; questões que estão em manchetes de jornais diários e revistas e em reportagens de televisão. Trabalhando a análise dessas questões que estão sempre envolvidas em índices, tabelas, gráficos etc., podemos estar viabilizando a formação de cidadãos críticos, éticos e reflexivos (Lopes, 2008, p.60).

A problematização de temas inseridos no cotidiano dos estudantes além de despertar o interesse dos mesmos, proporciona maior significado aos conceitos trabalhados, o que potencializa a aprendizagem. O educar pela pesquisa caracteriza-se por uma situação de aprendizagem mais abrangente, segundo Demo (2007), o desafio da pesquisa leva a organizar o trabalho de outra maneira, pressupõe presença ativa, tarefa individual e coletiva, supõe outra forma de dedicação e participação.

A confecção do cartaz ainda contou com a construção de um gráfico de setores (Figura 2) pelos estudantes. Para esta quarta atividade foram utilizados alguns instrumentos como: régua, transferidor, compasso e calculadora. A utilização destes recursos visou instigar a participação ativa dos mesmos na oficina, bem como compreender a construção e aplicabilidade desse tipo de gráfico. Os dados para a construção da representação gráfica também foram coletadas na sala de aula. Para tal, os estudantes foram questionados quanto ao tipo de atividade física que realizavam. Dentre as opções surgiram caçador, vôlei, futebol, caminhada, futsal e o mais votado handebol. Foi criada uma tabela de frequência e explicado os processos de construção da representação gráfica.

Figura 2. Construção do gráfico de setores com EVA.

O gráfico de setores foi construído pelos estudantes primeiramente em folhas de oficio que serviam como molde para que o fizessem em EVA colorido e colassem no cartaz. Nesse momento foram trabalhados conceitos e procedimentos como porcentagem, razão, proporção, ângulo, cálculos, regra de três, perímetro, raio, entre outros. Conforme PCN a abordagem do bloco Tratamento da Informação,

> [...] abarca uma ampla variedade de conteúdos matemáticos, o desenvolvimento desse bloco pode favorecer o aprofundamento, a ampliação e a aplicação de conceitos e procedimentos como porcentagem, razão, proporção, ângulo, cálculos etc. (Brasil, 1998, p.134).

Desta forma, o estudante pôde vislumbrar a relação entre os diversos conteúdos da matemática trabalhados na escola e os conceitos estatísticos. Finalizada esta primeira etapa da oficina que focou o trabalho com material concreto, foi dado seguimento às demais atividades visando o uso das tecnologias digitais. No laboratório de informática os estudantes puderam explorar e experimentar recursos tecnológicos digitais, como *sites* de busca, planilha eletrônica e *software* de apresentação de *slides*. Os PCN apontam as principais finalidades do uso de computadores na sala de aula:

> [...] como fonte de informação, poderoso recurso para alimentar o processo de ensino e aprendizagem; como auxiliar no processo de construção de conhecimento; como meio para desenvolver autonomia pelo uso de softwares que possibilitem pensar, refletir e criar soluções; como ferramenta para realizar determinadas atividades - uso de planilhas eletrônicas, processadores de texto, banco de dados etc. Além disso, tudo indica que pode ser um grande aliado do desenvolvimento cognitivo dos alunos, principalmente na medida em que possibilita o desenvolvimento de um trabalho que se adapta a distintos ritmos de aprendizagem e permite que o aluno aprenda com seus erros (Brasil, 1998, p.44).

O que torna um pacote computacional adequado ao ensino não é o que ele faz, mas sim como o faz. A planilha com sua simplicidade e universalidade pode contribuir no processo de ensino e aprendizagem da estatística. Além disso, precisamos considerar que tecnologias digitais como esta certamente farão parte da vida profissional da grande maioria dos estudantes (Viali, 2007).

A quinta atividade envolveu ações no laboratório de informática, objetivando promover o uso e a exploração do ambiente digital. Desta forma, possibilitou-se a construção dos conceitos estatísticos com o auxílio das tecnologias digitais. Os estudantes construíram uma tabela na planilha eletrônica e posteriormente um gráfico que sintetizasse as informações da pesquisa desenvolvida na sala de aula. Na sequência confeccionaram uma tabela de frequência absoluta e

um gráfico de setores (Figura 3), semelhante ao construído em EVA, com os dados sobre a prática de atividade física que cada estudante realizava.

A partir do gráfico de setores foi criado um cartaz no *software* de apresentação de slides. Para isto realizaram a busca de figuras, em sites na internet, que pudessem representar os dados coletados e apresentados no gráfico. Esta atividade pretendeu permitir aos sujeitos a familiarização com os recursos computacionais, bem como o desenvolvimento da criatividade e a interação através das discussões com os colegas.

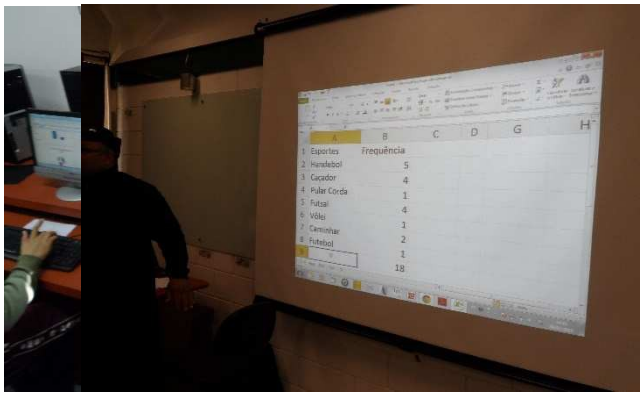


Figura 3. Construção de gráficos da pesquisa da atividade física.

Na atividade seguinte foram desafiados a realizar uma pesquisa e, para tal precisaram escolher um dos temas, que foram sendo apontados durante a explicação da proposta. Os assuntos indicados foram "Programas de TV" e "Copa do Mundo 2014". Ponte *et. al* (1998) defende que o projeto de pesquisa deve emergir a partir de um tema que seja escolhido de acordo com as preferências e estilos pessoais dos estudantes e que retrate uma temática que estes considerem relevante.

Depois de selecionados os temas, com os grupos de trabalho já formados, os estudantes precisaram definir as questões de pesquisa, eleger a população a ser pesquisada e construir o instrumento de coleta dados. As questões de pesquisas que emergiram a partir dos assuntos elencados foram "Qual a preferência dos telespectadores que assistem TV?" e "Quais foram os destaques da Copa do Mundo 2014?".

Transcorrido isto, passaram a elaboração dos questionários com a supervisão dos professores elencando e problematizando cada pergunta. Nesta atividade buscou-se que os estudantes vivenciassem cada etapa da pesquisa investigando questões presentes em seu cotidiano.

Por fim, em uma última atividade, com os dados das pesquisas já coletados, cada estudante organizou-os em uma planilha eletrônica e construiu um gráfico de colunas verticais ou horizontais. Da mesma forma como realizado na atividade anterior produziram um cartaz digital (Figura 4) sintetizando as informações coletas e analisadas na pesquisa. Este cartaz também foi ilustrado com imagens relacionadas ao tema da pesquisa.

Considera-se importante que os professores percebam o potencial pedagógico das tecnologias digitais, que estão cada vez mais presentes na vida dos estudantes, e se apropriem delas, incluindo-as no ambiente educacional de forma a desenvolver metodologias e estratégias que estimulem o pensamento inovador, a responsabilidade e a autonomia do estudante.

Figura 4. Cartazes das pesquisas sobre os temas selecionados pelos estudantes.

Considerações finais

O desenvolvimento da experiência educacional aqui apresentada permitiu reflexões e discussões sobre o ensino da Estatística. Através desta foi possível investigar a importância do estudo de conceitos estatísticos na formação dos estudantes de forma a contribuir para o exercício pleno de sua cidadania. A Estatística fornece subsídios para tal na medida em que oportuniza ao estudante interpretar e analisar criticamente as representações estatísticas que sintetizam questões sociais, econômicas, ambientais, entre outras presentes em sua vida.

Na oficina Dialogando com os Dados foram planejadas atividades dinâmicas buscando possibilitar que os estudantes vivenciassem os processos de pesquisa, desenvolvessem a criatividade, interatividade e coletividade, bem como explorassem recurso tecnológicos digitais como *softwares* e planilhas. Acredita-se que o ensino da Estatística seja necessário para que os cidadãos possam analisar com criticidade as questões frequentemente apresentadas no cotidiano e intervir em suas realidades. Diante disto, faz-se necessário que a escola, planeje atividades e utilize recursos que potencializem o processo de ensino e aprendizagem da estatística.

Bibliografia e referências

Brasil. (1998). *Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nascionais: Matemática/ Secretaria de Educação Fundamental.* Brasília: MEC/ SEF.

Cazorla, I. M. (2008). A leitura e a interpretação de gráficos e tabelas Ensino Fundamental e Médio. *2° Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*.

Cazorla, I. M., & Castro, F., C. (2008). O Papel da Estatística na Leitura do Mundo: O Letramento Estatístico. *Publicatio UEPG: Ciências Humanas, Linguistica, Letras e Artes*, *16*(1), 45-53. Ponta Grossa.

Cazorla, I. M., & Santana, E. R, S. (2010). *Do Tratamento da Informação ao Letramento Estatístico.* Via Litterarum: Itabuna.

Demo, P. (2007). *Educar pela pesquisa*. Campinas: Editora Autores Associados.

Garfield, J, & Ben-Zvi, D. (2007). How Students Learn Statistics Revisited: A Current Review of Research on Teaching and Learning Statistics. *International Statistical Review, 75*(3), 372–396. Lévy, P. (1999). *Cibercultura* (34 th ed.). São Paulo.

Lopes, C. A. (1998). *A Probabilidade e a Estatística no Ensino Fundamental uma análise curricular.* (Dissertação de Mestrado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas.

Lopes, C. A. (2008). O Ensino da Estatística e da Probabilidade na Educação Básica e a Formação dos Professores. *Caderno Cedes, 28*(74), 57-73. Campinas.

Moraes, M. C. (2003). *Educar na Biologia do Amor e da Solidariedade.* Petrópolis: Vozes.

Ponte, J. P., Bruneira, L., Abrantes, P., & Bastos, R. (1998). *Projectos Educativos.* Lisboa: Editora do Ministério da Educação.

Viali, L. (2007). Aprender fazendo: como tirar proveito do computador para melhorar a aprendizagem da estatística. *In 9 Encontro Nacional de Educação Matemática*. Belo Horizonte. Anais. Belo Horizonte: ENEM.

Enseñanza de la Estadística en contexto: análisis e interpretación de datos oficiales

José Paúl **Carrasco** Escobar
Instituto Politécnico Nacional
México
jcarrascoe1200@alumno.ipn.mx
José Luis Ángel **Rodríguez** Silva
Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey
México
luis.rodriguez@inegi.gob.mx

Resumen

El aprendizaje moderno de la Estadística está cada vez más ligado al contexto de los datos y a la atención de los requerimientos de los tomadores de decisiones basadas en información confiable y de calidad. La disposición de estadísticas oficiales sobre los temas sociales, económicos y de los registros de las funciones administrativas y de control de los gobiernos es cada vez más común y su aprovechamiento es una labor propia tanto de especialistas como de otros profesionales que cuentan con formación estadística. En esta comunicación se presentan, como parte de un estudio de caso sobre aprendizaje y evaluación del uso de técnicas estadísticas en el contexto del lugar de trabajo, los resultados de la aplicación de ciertas técnicas estadísticas multivariadas a datos oficiales sobre el medio ambiente, considerando el uso del conocimiento estadístico y el desempeño de un egresado de un posgraduado en Estadística Oficial, quien realizó dicho estudio. Se muestra que el contexto es significativo para el aprendizaje y aplicación de la Estadística.

Palabras clave: Educación Estadística, Enseñanza de la Estadística, Didáctica de la Estadística, Análisis multivariado, lugar de trabajo, contexto.

Antecedentes

Durante el proceso de enseñanza-aprendizaje, el desarrollo y aplicación de diversas técnicas estadísticas sobre casos reales son excelentes motivadores para que los estudiantes perciban el valor de aumentar sus conocimientos estadísticos y así mejorar la calidad futura del análisis y desarrollo de políticas públicas y la toma de decisiones que llevan a éstas (véase, por ejemplo, Wild y Pfannkuch, 1999; Moore, 1997; Biehler, 1994). Los datos, cuando éstos son de calidad adecuada, son esenciales tanto en la toma de decisiones del gobierno como para una correcta participación en la educación de la sociedad y en la obtención de logros académicos y profesionales. Ejemplos de estos son las estadísticas de salud (tasas de morbilidad y mortalidad), los índices de criminalidad y encarcelamiento y la información fiscal. Algunos de estos datos provienen de los registros administrativos en poder de autoridades gubernamentales y otros se derivan de la aplicación de diversos instrumentos estadísticos como encuestas y censos, los cuales a menudo están a cargo de la oficina nacional de estadísticas del país bajo consideración o

de investigaciones independientes o académicas. En tal línea de pensamiento, resulta esencial que los educadores estadísticos motiven y permitan que los estudiantes tengan las habilidades para evaluar la calidad relativa de los datos oficiales que se usen, así como incentivar el uso de tales estadísticas (Forbes y Janssen, 2014). Los estudiantes deben ser alentados a utilizar, así como a entender las estadísticas oficiales y, por tanto, a evitar su mal uso (Janssen y Sharlee, 2014).

Por otro lado, es necesario que cada país promueva el fomento a su capacidad estadística, entendiéndose esta como *las actividades que fortalezcan las diferentes actividades consideradas como pilares, tales como la promoción para el fortalecimiento de las estadísticas oficiales y el conocimiento, la transferencia y la formación técnica en la recopilación de datos, su análisis y la difusión de estos* (Hermann, 2014).

Para incentivar tal capacidad estadística, diversos autores, como Westbrooke y Ellis (2014) proponen que los conocimientos estadísticos clave se promocionen y se usen en los lugares de trabajo, incluyendo: el entrenamiento en el uso de gráficos para exploración y visualización de datos; el modelado, especialmente los modelos lineales y sus extensiones, con énfasis en el efecto de tamaños de las muestras en lugar de las pruebas; el diseño y análisis adecuado de los datos *pequeños y de los grandes*; y la aplicación de software de estadística de apoyo al entrenamiento. Una de las estrategias para hacer frente a estas necesidades y desafíos en el lugar de trabajo es aumentar las habilidades de los no expertos en estadística en su lugar de trabajo. Sus experiencias refuerzan el énfasis en la literatura sobre la importancia de aplicar diversas técnicas estadísticas con el uso de los datos y problemas reales, con una aplicación directa a los proyectos de trabajo. Finalmente, concluyen que las *grandes ganancias* vienen rápidamente cuando el personal descubre que pueden aplicar las nuevas habilidades y herramientas para llevar a cabo su trabajo más fácil y rápidamente y, con frecuencia, con una calidad superior. Esto significa que las necesidades de formación para el lugar de trabajo integran a los participantes que realizan prácticas y tareas, aumentando sus habilidades y los anima a compartir y demostrar las aplicaciones que los retos que sus actividades laborales les plantean.

Respecto a los laboratorios de computación, existen posturas sobre qué tan apropiado es la enseñanza de aplicaciones estadísticas con GUI (interfaz gráfica de usuario) o, en su lugar, hacer uso de software para cómputo estadístico a través de algoritmos de programación o de líneas de comandos o scripts, como lo que se realiza con ayuda de lenguajes como *R* o *Scilab* ©. Por ejemplo, Navarro (2014) menciona que no es raro encontrar biólogos con un estado de ánimo vacilante, sintiéndose satisfechos con la solución de un problema, porque fue logrado con la ayuda de una interfaz gráfica de usuario inteligente, mientras que la situación real es que fue el resultado de un procedimiento automatizado o encapsulado de *caja negra*. Agrega que este es el precio que se paga de ser sólo un simple usuario y que los riesgos de la generación de resultados a través de las *cajas negras* se pueden minimizar si el usuario está familiarizado con los principios conceptuales y procesales de la programación y la informática, pertenecientes a lo que llama *la computación del siglo XXI*. Concluye que es urgente que los científicos, y en términos generales, los usuarios, sean reeducados en los temas informáticos de la ciencia en general, y de la estadística, en particular.

Para contribuir a la formación en el lugar de trabajo, Bavdaž, Ograjenšek y Perviz (2014) mencionan que se necesitan datos de las estadísticas oficiales en el lugar de trabajo (para la evaluación comparativa, análisis de mercado, etc.), pero estos han sido, en gran medida, subutilizados. De un estudio estadístico realizado por dichos investigadores se tiene que, en

general, se utilizan las estadísticas oficiales con el propósito de familiarizar a los estudiantes con el estado actual de un fenómeno determinado (83%) o para ilustrar su evolución en el tiempo (82%). En menor parte se utilizaron las estadísticas oficiales para explicar la metodología detrás de un indicador elegido (34%) o para explicar técnicamente un método analítico (29%); si lo hicieran, se utilizaría alguno de ellos, principalmente para hacer una combinación con la presentación del estado de un fenómeno y de su evolución. Solamente un 12% utiliza los cuatro enfoques mencionados. Mencionan también que las ideas sobre el uso de las estadísticas oficiales en los programas de estudio de negocios, por ejemplo, al parecer están casi siempre vinculadas a la interpretación y, muy a menudo, a la comprensión conceptual. También se asocian con otros elementos pero es probable que algunos de estos elementos estén estrechamente conectados con el tema del curso (por ejemplo, con la computación estadística). Sobre la base de sus resultados, es posible concluir que sólo un pequeño grupo de los educadores pueden ser caracterizados como usuarios asiduos de las estadísticas oficiales; algunos educadores no los usan en absoluto y otros los utilizan ya sea principalmente para la propia preparación y presentación de las actividades a los estudiantes. El uso más generalizado de las estadísticas oficiales para conferencias es también más pasivo, desde el punto de vista de los estudiantes.

Las actividades en el uso y aplicación de técnicas estadísticas sobre datos oficiales ofrecen entonces a los estudiantes experiencias más directas y con mayor sentido a ellos que los ejemplos que no utilizan tales estadísticas oficiales, lo anterior en términos generales. En tal sentido, pudiera parecer prudente que la mayoría de los educadores que utilizan las estadísticas oficiales ofrecieran a sus estudiantes, a su vez, una mínima oportunidad de utilizarlas en sus propios procesos de toma de decisiones (por ejemplo, en la aplicación de proyectos de inversión, de emprendimiento, para llevar a cabo un análisis fundamental sobre algún tópico que sea de su interés, etc.). Esto trae consigo, de manera dual, la correspondencia a invitar a los proveedores de estadística oficiales a brindar sus experiencias a los estudiantes para que éstos puedan conocer de manera directa la forma en que se desarrollan los procesos de las estadísticas oficiales (diseño conceptual, definición de objetivos y metas, alcance del proyecto, representatividad geográfica, desarrollo del instrumento de captación, captura, validación, tratamiento, explotación y difusión de las estadísticas oficiales), mediante la exposición de ejercicios interactivos y de interés a los propios alumnos. En tal sentido, en México, el Instituto Nacional de Estadística y Geografía tiene ya, en estos momentos, un área que brinda este tipo de asesorías mediante la adherencia, por ejemplo, a la llamada "Cátedra INEGI" y cuya disponibilidad hace más fácil enrolar tanto a los propios estudiantes como a los mismos profesores en la pertinencia y el valor de las estadísticas oficiales para el proceso de enseñanza y aprendizaje, en el marco de sus intereses particulares.

El objetivo del presente artículo, bajo la línea de pensamiento planteada, es el presentar un estudio de caso sobre la forma en que un egresado de la Maestría en Ciencias en Estadística Oficial, trabajador del INEGI, realiza análisis estadístico a datos oficiales, en el contexto de su lugar de trabajo, para generar información que nutra la toma de decisiones en políticas públicas relacionadas con la gestión ambiental.

Fundamentación teórica

Enfocándonos a lo referente a un proceso de formación profesional o especializada, los estudios de casos son utilizados para establecer el aprendizaje de la Estadística en el contexto del mundo real de los estudiantes (Forbes y Keegan, 2014). En los últimos años esto se ha basado en la teoría de pensamiento estadístico, centrada en las estadísticas oficiales, así como en los

métodos generales de estadística. Vaughan (2008) afirma que "el aprendizaje en el lugar de trabajo no es sólo un proceso unidireccional, es una interacción entre el lugar de trabajo, el aprendizaje, y el alumno". Sin embargo, lo que aún no es del todo claro es si dicho proceso didáctico logra, en efecto, un impacto positivo y duradero en el rendimiento de las organizaciones en cuanto a sus procesos institucionales de toma de decisiones o incluso en la mejora de la calidad de la producción estadística, aunque existen en proceso diversas investigaciones para caracterizar este complejo fenómeno (e. g., Carrasco, 2014).

Se ha determinado en otros estudios que el razonamiento estadístico será una de las facetas más importantes de la vida profesional de los egresados dado el mayor nivel de demanda de la utilización de diversas herramientas estadísticas, por no decir simplemente del acentuado requerimiento de mayores niveles de alfabetización estadística básica, pertenecientes a los así llamados pensamiento crítico y el razonamiento estadístico, que aparecen en políticas, prácticas, atributos y habilidades que un estudiante debería obtener en su desarrollo de actividades académicas. Por un lado, la lista de habilidades específicas que debe mostrar el estudiante incluye los siguientes: demostrar conocimiento y la capacidad de aplicar los principios y conceptos científicos; resolver problemas mediante la aplicación de conocimientos y métodos científicos; demostrar capacidad de análisis; demostrar el desarrollo de habilidades para el aprendizaje permanente; entender, evaluar, acceder y revisar críticamente la nueva información, demostrar la capacidad de pensar de forma independiente; demostrar un profundo conocimiento y habilidad en su sujeto de estudio con especialización; acceder efectivamente y utilizar la información relevante para un tema; demostrar habilidades numéricas, trabajar en colaboración en las tareas; y comunicar las ideas y hallazgos de la aplicación de técnicas estadísticas de manera efectiva.

Para los estudiantes de posgrado de estadística, lo anterior se traduce en centrar la atención en el desarrollo de su propia cultura estadística mediante la ejecución de seminarios estadísticos sobre los principales temas e incrementado sus habilidades prácticas de laboratorios de cómputo estadístico y uso de aplicaciones especializadas en estadística, mediante la utilización de diversas plataformas como R, Minitab®, SPSS ©, entre otras. Estos laboratorios proporcionan a los participantes la experiencia inmediata que ayuda a consolidar su aprendizaje en los seminarios. Algunos de eso temas principales han sido: comprensión e interpretación resultados estadísticos; diseño experimental; ANOVA; modelos lineales generalizados; y modelos de efectos mixtos (Brown, David, Moltchanova, Seddon y Harlow, 2014), mismos que figuran ya como asignaturas en diversos programas de posgrado de México y otras latitudes. Aquí nuevamente el contexto y la aplicación de las técnicas estadísticas sobre datos reales es extraordinariamente relevante y ha sido reconocido por autores como Cobb (2007) quien declaró que "el contexto es un elemento esencial, parte del pensamiento estadístico, y algunos de las peores enseñanzas de la estadística se produce cuando el profesor o libro de texto intenta tratar al contexto como irrelevante". Así, el contexto permite motivar el aprendizaje en estadística y es importante seguir actualizando estudios de caso, en colaboración con colegas de una amplia gama de disciplinas que aplican la propia Estadística. Por tal motivo, es necesario asegurar que los estudiantes reciban, desde el principio de su formación e incluso después de ésta, las oportunidades de participar en actividades y la toma de decisiones que se espera de ellos al concluir su programa de estudio, situación que sin embargo, y de manera ciertamente lamentable, rara vez se practica en la educación superior. En lugar de ello, predominan las enseñanzas del curso dirigidas por el instructor, usando un método específico (cortando con ello el fomento de la creatividad de los

estudiantes) y mediante el uso de algunos ejemplos artificiales de final de libro (Johnson y Shumway, 2014).

Por lo anterior, resulta de gran interés, desde la óptica de la Educación Estadística, el conocer la forma en que se desenvuelven los profesionales de la estadística sobre ambientes contextuales reales en su trabajo, motivo que será de estudio en el presente documento.

Diseño y metodología

En este artículo se comparte el desarrollo de un caso basado en el entorno, que permite a los profesores desafiar a los estudiantes a demostrar su capacidad de aprendizaje al participar con éxito en el análisis de composición abierta, la evaluación y la aplicación de los contenidos específicos de cada conocimiento dentro del mundo real en contextos de consultoría estadística, y lo anterior con la finalidad de proveer a los estudiantes acceso a indicadores de su eficiencia al desarrollarse como nuevos profesionales a través de su programa de estudios, lo cual maximiza las posibilidades de alcanzar niveles profesionales de orden superior.

Por ejemplo, en la taxonomía de Bloom, los objetivos de aprendizaje de conocimientos conceptuales y procedimentales son más fácilmente identificados dentro de cursos de preparación individuales, donde se les pide a los estudiantes a recordar, entender y aplicar. Muy a menudo es sólo al final de un programa de estudio de los cursos donde se encuentran el análisis, la evaluación y la síntesis que se requieren. En tal sentido, Razzouk y Razzouk (2008) informan que, mientras el análisis y la síntesis son el núcleo de lo que los estudiantes deben ser capaces de hacer como un graduado, estas son "probablemente algunas de las actividades de aprendizaje menos comprendidas y más tergiversadas" (p. 49). Por lo general, este tipo de objetivos de aprendizaje de orden superior se infunden en las experiencias de culminación, ya que son difíciles de abordar intencionalmente en la mayoría de los cursos de preparación.

La enseñanza basada en casos es un método popular que coloca a los estudiantes frente a situaciones que requieren del pensamiento analítico y promueven la síntesis dentro de un campo profesional de estudio en particular. La instrucción basada en casos, sobre la descripción de los complejos acontecimientos que ocurren típicamente en el mundo real da a los estudiantes contextos donde revisan, en el aumento de la complejidad, escenarios posibles. Sin embargo, mientras que la instrucción basada en casos es un método de enseñanza que se encuentra en muchas profesiones y clases de culminación académica, no es comúnmente usada como una herramienta integrada para apoyar el aprendizaje del estudiante desde el inicio del plan de estudios académicos.

El método general para el estudio que reporta este artículo, inicia con la propuesta a un recién egresado de un programa de posgrado en Estadística oficial, al que se le denomina como el *especialista*, de seleccionar un tema sobre el cual existan publicadas estadísticas oficiales, las cuales sean susceptibles de un análisis estadístico que permita obtener indicadores o conclusiones que sean la base de los elementos de toma de decisiones de políticas públicas en el ámbito del tema seleccionado. En tal sentido, dicho especialista expuso el contexto de los datos y del análisis, así como de la pertinencia del estudio y de las técnicas estadísticas usadas a partir de su acervo de conocimientos individuales y de su capacidad para utilizarlas eficientemente. Los hallazgos se presentan en las siguientes secciones.

Resultados

A continuación se hace una síntesis del reporte obtenido del especialista recién formado.

Contexto sobre los antecedentes de los residuos sólidos urbanos

El especialista comentó acerca del contexto de su problema estadístico lo siguiente:

La gestión de los *Residuos Sólidos Urbanos*, RSU (o basura doméstica, aunque sin la precisión que tiene el primer concepto), es uno de los fenómenos que más impacto tienen sobre el medio ambiente y sus recursos. Lo anterior es cierto puesto que, por un lado, debido a la creciente demanda que tienen los seres humanos sobre sus satisfactores (que muchos de ellos al final se convierten precisamente en RSU) se tiene un mayor consumo de los recursos naturales, teniendo en consecuencia una afectación a los recursos naturales; por otro lado, al hacer la disposición final de los RSU, y debido tanto a su gran volumen (como será comentado a mayor detalle posteriormente) así como al hecho de que en diversas ocasiones no se cumplen con los estándares y normas al respecto, se hace una afectación al medio ambiente. Esto trae, al final, graves problemas en materia de salud pública, utilización de espacios y recursos y contaminación ambiental, entre otros. Son numerosos los ejemplos en los cuales, por una falta de cuidado en alguno de los múltiples procesos del sistema de los RSU, se tienen consecuencias de impacto al medio ambiente, algunos de los cuales se comentan.

En sus aspectos más simples, la gestión de los RSU implica tres grandes etapas: generación; recolección; y disposición final. Sin embargo, para dimensionar lo complejo de la gestión de los RSU, en la *Figura 1* se presenta el diagrama de flujo de un sistema de manejo de residuos sólidos diferenciado, en el cual resulta claro que se encuentran involucrados una gran cantidad de factores en dicho proceso, por lo que resulta imprescindible el fomentar un uso adecuado en cada una de tales instancias para lograr una mayor gestión operativa al respecto.

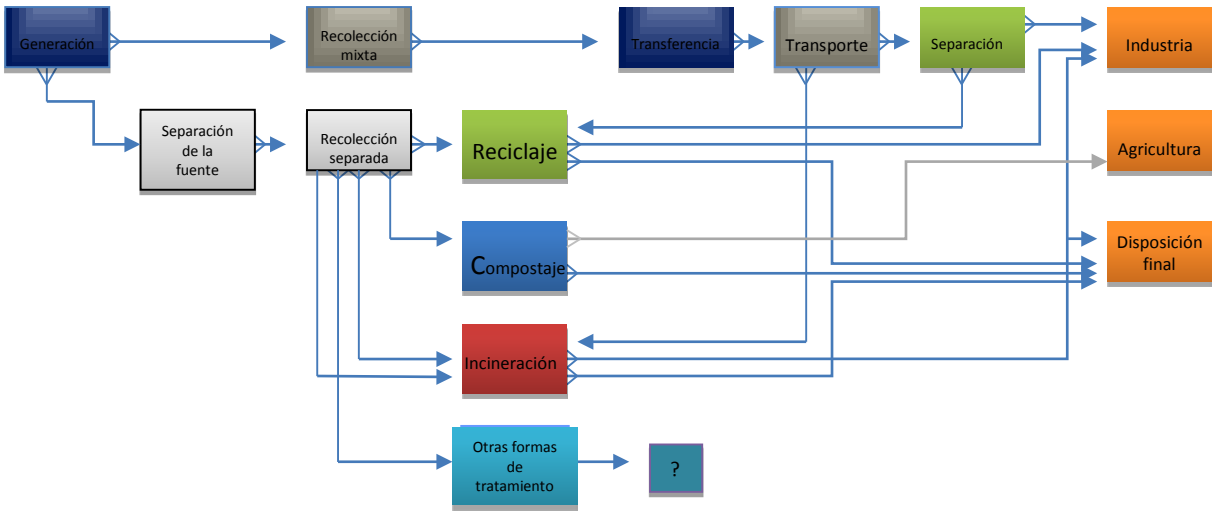


Figura 1. Diagrama de flujo de un sistema de manejo de residuos sólidos diferenciado.
Fuente: Diseño del especialista inspirado en SEMARNAT (2007).

Técnicas estadísticas multivariadas

Las dos técnicas estadísticas multivariadas que utilizó el especialista fueron el Análisis de Componentes Principales (ACP) y el Análisis de Conglomerados (AC) que, para sus fines, se basó en las referencias siguientes: para el caso del ACP tomó a Johnson, 2000, pp. 93-146; Johnson y Wichern, 2002, pp. 426-476; Manly, 1986, pp. 59-71; para el caso del AC tomó a Johnson 2000, pp. 319-396; Johnson y Wichern 2002, pp. 668-745 y Manly 1986, pp. 100-113. Para el análisis numérico de datos se basó tanto en el uso de Minitab® como de R (2014).

Aplicación de las ACP y Análisis de Correlaciones a un subconjunto de datos de RSU

El especialista comento acerca de su justificación para la utilización de los datos analizados lo siguiente:

> El *Instituto Nacional de Estadística y Geografía* (INEGI) de México ha realizado un gran esfuerzo por acopiar información de RSU mediante la adherencia de un módulo en la materia en los así llamados Censos Nacionales de Gobierno, y mediante el cual se ha logrado generar datos de gran relevancia, por los siguientes motivos: antes de este ejercicio de Estadística Oficial no se tenían, de manera abundante y profusa, datos al nivel de detalle con los que ahora se cuentan, y varios de ellos provenían de estimaciones -véase, por ejemplo, SEMARNAT (2012). Así, el INEGI al momento cuenta con, y pone a disposición de los usuarios en general, un vasto conjunto de datos acerca del fenómeno de los RSU. Para el ejercicio mostrado en este trabajo, se acopiaron diversas variables asociadas de los RSU, según está dispuesta la información en el sitio web del INEGI, para determinar niveles de asociación multivariados en las distintas fases de la gestión integral de residuos. A su vez, no se consideraron variables que aunque son de interés, no contaban con registros (por ejemplo, algunas variables de selección de RSU, como PET u otras). Así, en total, se consideraron 20 variables de la siguiente manera:
>
> - VAR_1 = Proporción de municipios y delegaciones con centros de acopio respecto al total de municipios en la Entidad Federativa.
> - VAR_2 = Proporción del total municipios y delegaciones con centros de acopio respecto al total nacional de centros de acopio.
> - VAR_3 = Proporción de municipios y delegaciones con estaciones de transferencia, sólo almacenamiento temporal y traspaso respecto al total de municipios en la Entidad Federativa.
> - VAR_4 = Proporción de municipios y delegaciones con estaciones de transferencia, compactación y/o selección de materiales respecto al total de municipios en la Entidad Federativa.
> - VAR_5 = Proporción de municipios y delegaciones con estudios sobre la generación de residuos sólidos urbanos respecto al total de municipios en la Entidad Federativa.
> - VAR_6 = Proporción de municipios y delegaciones con programas locales orientados a la gestión integral de los residuos sólidos urbanos respecto al total de municipios en la Entidad Federativa.
> - VAR_7 = Proporción de municipios con estaciones de transferencia respecto al total de municipios de la Entidad Federativa.
> - VAR_8 = Proporción del total de municipios con estaciones de transferencia respecto al total nacional.
> - VAR_9 = Proporción de vehículos utilizados para la recolección de residuos sólidos urbanos con compactador respecto al total en la Entidad Federativa.
> - VAR_{10} = Proporción de vehículos utilizados para la recolección de residuos sólidos urbanos con caja abierta respecto al total en la Entidad Federativa.
> - VAR_{11} = Proporción de otros vehículos utilizados para la recolección de residuos sólidos urbanos y otro tipo de vehículos respecto al total en la Entidad Federativa.
> - VAR_{12} = Proporción del total municipios y delegaciones con disponibilidad de servicios relacionados con los residuos sólidos urbanos respecto al total en la Entidad Federativa.
> - VAR_{13} = Proporción de municipios y delegaciones con disponibilidad de servicios de sólo recolección y disposición final de residuos sólidos urbanos respecto al total en la Entidad Federativa.

- VAR_{14} = Proporción de municipios y delegaciones con disponibilidad de servicios de recolección, disposición final y tratamiento de residuos sólidos urbanos respecto al total en la Entidad Federativa.
- VAR_{15} = Proporción del promedio diario de pesaje de residuos sólidos urbanos recolectados respecto al total en la Entidad Federativa.
- VAR_{16} = Proporción del promedio diario por vehículo/capacidad/viajes de residuos sólidos urbanos recolectados respecto al total en la Entidad Federativa.
- VAR_{17} = Proporción del promedio diario de otros métodos de obtención de residuos sólidos urbanos recolectados respecto al total en la Entidad Federativa.
- VAR_{18} = Proporción de municipios y delegaciones con servicio de recolección y disposición final con reglamento relacionado con los residuos sólidos urbanos respecto al total en la Entidad Federativa.
- VAR_{19} = Proporción de sitios de disposición final tipo relleno sanitario reportados como destino de los residuos sólidos urbanos respecto al total en la Entidad Federativa.
- VAR_{20} = Proporción de sitios de disposición final tipo tiradero a cielo abierto reportados como destino de los residuos sólidos urbanos respecto al total en la Entidad Federativa.

Análisis de Correlaciones

El primer análisis llevado a cabo por el especialista fue el de correlaciones. Comentó él que dicho análisis es fundamental para poder emplear de manera eficaz el Análisis de Componentes Principales así como el Análisis de Conglomerados. Textualmente comentó lo siguiente: "al llevar a cabo un análisis de correlaciones, se observó que del total de $(19\times20)/2 = 190$ correlaciones de variables en sus cruces (eliminando las correlaciones triviales), y al contar el número de correlaciones que, en valor absoluto, fueron mayores a 0.7, se encontró que estas últimas fueron 35, por lo que hay una proporción no trivial, casi un 18.42%, que gozan de dicha propiedad. Si el valor de umbral de 0.7 disminuye 0.5, el cual para cierto tipo de análisis se considera un valor alto, la proporción se incrementa a casi un 25%. Más aún, existen correlaciones muy altas, por ejemplo, entre VAR_{11} y VAR_{16}, de un orden de 0.99. Estas dos consideraciones justifican, en parte, el que sea razonable llevar a cabo tanto el ACP como el AC".

Aplicación del ACP

En la Tabla 1 el especialista presentó los valores de las varianzas explicadas por cada componente principal (CP, subindexada según su orden). Observó que, utilizando la regla de *más un 70% de varianza explicada*, serían necesarias tres componentes principales para explicar nuestro fenómeno de 20 dimensiones. Sin embargo, señaló que si se exigiera poco menos, y empleamos la regla de *un mínimo de 60%* de varianza explicada, bastaría con dos componentes principales. Este punto fue esencial dentro de nuestro estudio, puesto que nos percatamos que este especialista no considera como "inviolables" las reglas dadas en los textos usuales de estadística, sino que las va adecuando según cada caso particular, con la debida mesura y explicitación de la variación correspondiente.

El especialista comentó que: "así entonces, parece claro que el "verdadero" problema de los RSU tiene dos a tres dimensiones, y no tanto como 20, que es el número total de variables de proporción que están bajo análisis. La anterior afirmación se refuerza al considerar el diagrama de sedimentación, mostrado en la *Figura 2*, en la cual es claro que *el codo* de la misma se presenta en la segunda componente principal, motivo por el cual nos inclinamos a la consideración de que la dimensionalidad más importante es de 2, en el sentido de que el 61.7% de la varianza acumulada puede explicarse con tal número de componentes principales."

Tabla 1
Valores propios, proporción y proporción acumulada de las CP's sobre datos de RSU

	CP_1	CP_2	CP_3	CP_4	CP_5	CP_6	CP_7	CP_8
Valor propio	9.5721	2.7735	2.2142	1.5967	1.1128	0.9018	0.4585	0.3828
Proporción	0.479	0.139	0.111	0.08	0.056	0.045	0.023	0.019
Acumulada	0.479	0.617	0.728	0.808	0.863	0.909	0.931	0.951

Fuente: Elaboración del especialista con resultados generados en Minitab®

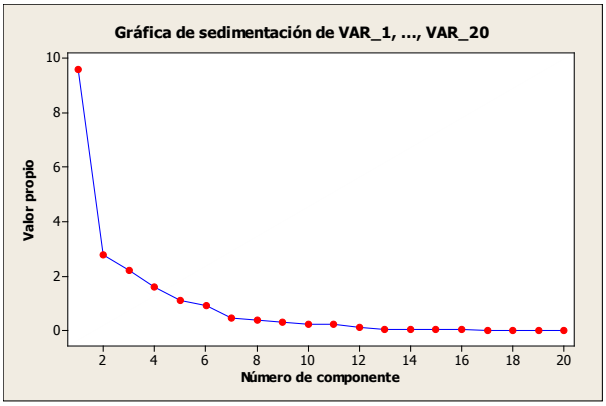


Figura 2. Gráfica de sedimentación del ACP sobre datos de RSU.
Fuente: Elaboración del especialista con resultados generados en Minitab®.

El especialista hizo explícitas las dos primeras CP's de la siguiente forma:

$$Z_1 = 0.294VAR_1 + 0.303VAR_2 + 0.205VAR_3 + 0.024VAR_4 + 0.229VAR_5 + 0.110VAR_6 + 0.265VAR_7 + 0.211VAR_8 + 0.282VAR_9 + 0.165VAR_{10} + 0.295VAR_{11} + 0.008VAR_{12} -0.301VAR_{13} + 0.302VAR_{14} + 0.082VAR_{15} + 0.295VAR_{16} + 0.302VAR_{17} + 0.096VAR_{18} -0.005VAR_{19} - 0.174VAR_{20}$$

$$Z_2 = - 0.047VAR_1 - 0.145VAR_2 + 0.328VAR_3 + 0.227VAR_4 + 0.119VAR_5 - 0.010VAR_6 + 0.261VAR_7 - 0.014VAR_8 - 0.110VAR_9 - 0.322VAR_{10} - 0.075VAR_{11} + 0.323VAR_{12} - 0.111VAR_{13} - 0.060VAR_{14} + 0.020VAR_{15} - 0.184VAR_{16} + 0.028VAR_{17} + 0.391VAR_{18} + 0.464VAR_{19} - 0.301VAR_{20}$$

Él observó que la primera componente principal adquiere sus mayores valores en las variables 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 14, 16 y 20. Al analizar las primeras, notó que estas se encuentran involucradas con la infraestructura (vehículos y medios para pesar los RSU) en la gestión integral de los RSU. A su vez, observó que los signos negativos se presentan en las variables 13 y 20 se asocian básicamente a la disposición final de los residuos, aunque notó que los coeficientes son relativamente pequeños. Así, el especialista asoció a esta componente una interpretación de *Infraestructura de Gestión de los RSU, salvo disposición final*. Esta sería, según su apreciación, la componente principal que más impacto tiene en general en el fenómeno de los RSU. De manera similar, en la segunda componente principal contrastó una parte conceptual, de planeación, con respecto a la infraestructura u operación. Así, concluyó que la segunda componente representa la *planeación vs. la operación en la gestión de los RSU*.

Ahora, el especialista generó la *Figura 3*, que corresponde a la puntuación de las dos primeras componentes principales, y en ella él apreció el punto extremo derecho, que

corresponde al Distrito Federal, en el cual tuvo el mayor valor. Otros dos valores que destacó son el punto superior, correspondiente a Baja California, con un gran valor en la segunda componente, y Oaxaca con el menor valor en esta última componente principal.

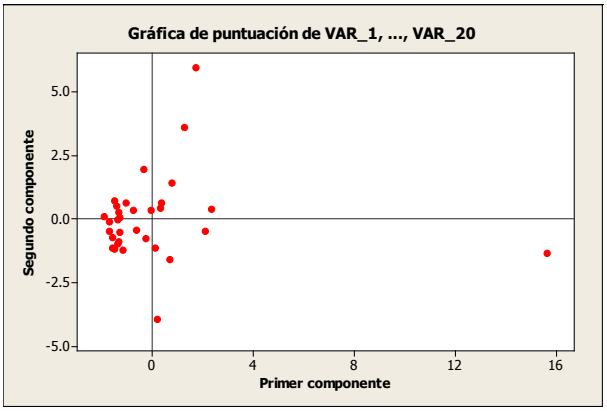


Figura 3. Gráfica de puntuación del ACP sobre datos de RSU.
Fuente: Elaboración del especialista con resultados generados en Minitab®.

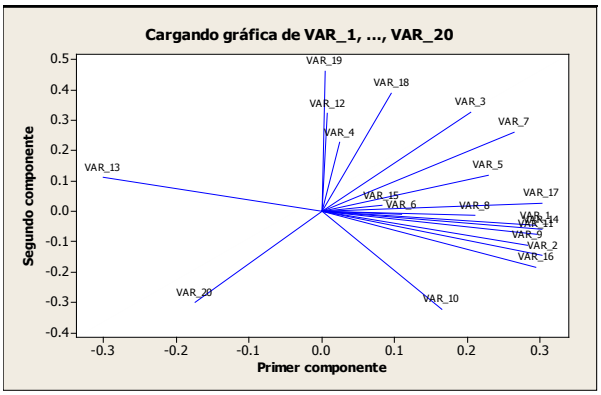


Figura 4. Gráfica de puntuación del ACP sobre datos de RSU.
Fuente: Elaboración del especialista con resultados generados en Minitab®

La *figura 4* proporciona información, según el ACP, acerca de la afinidad de las variables, destacando el especialista que "la número 13 parece ser la que marca una *dimensionalidad* distinta con respecto a las restantes, así como la 20 y la 10, aunque éstas en menor medida. Por otro lado, las variables 4, 12 y 19 tienen una gran afinidad en tal sentido". Así mismo, el especialista muestra el ordenamiento de las Entidades Federativas según la primera componente principal: "Distrito Federal, Baja California, Aguascalientes, Querétaro, Jalisco, Morelos, Estado de México, Nuevo León, Quintana Roo, Guanajuato, Veracruz de Ignacio de la Llave, Oaxaca, Michoacán de Ocampo, Puebla, Tlaxcala, Hidalgo, Colima, Chihuahua, Baja California Sur, Tabaco, Sinaloa, Coahuila de Zaragoza, Chiapas, Tamaulipas, San Luis Potosí, Durango, Sonora, Zacatecas, Campeche, Nayarit, Guerrero y Yucatán. De este ordenamiento observa que las cinco primeras tienen el mayor desarrollo en *infraestructura de gestión de los RSU, salvo disposición final*, mientras que las que tienen mayor área de oportunidad al respecto son las cinco últimas". Y realizando el ordenamiento con respecto a la segunda componente principal, menciona que los resultados son: "Baja California, Aguascalientes, Distrito Federal, Quintana Roo, Querétaro, Jalisco, Guanajuato, Morelos, estado de México, Colima, Nuevo León, Chihuahua, Coahuila de Zaragoza, Tlaxcala, Baja California

Sur, Sinaloa, Tabasco, Campeche, Durango, Hidalgo, Puebla, Michoacán de Ocampo, Nayarit, Sonora, Zacatecas, Veracruz de Ignacio de la Llave, San Luis Potosí, Tamaulipas, Chiapas, Yucatán, Guerrero y Oaxaca". Observa también que "en la dimensión de la *planeación en contraste con la operación en la gestión de los RSU*, las cinco entidades federativas que parecen tener mayor desarrollo son las cinco primeras y las menos favorecidas en tal dimensión son las últimas cinco".

Empleo del Análisis de Conglomerados

En cuanto al Análisis de Conglomerados, el especialista generó la *Figura 4*, la cual es el *dendograma* de las entidades federativas bajo consideración, con una distancia euclidiana y con enlace simple (no por grupos), en el cual se distinguieron cuatro conglomerados o colecciones de observaciones. En el primer grupo, de manera aislada, distinguió el Distrito Federal. En el segundo distinguió a Baja California, en el tercero encontró a Aguascalientes y, en el cuarto, todas las demás entidades federativas. Con ello señaló: "respaldo las afirmaciones comentadas en la sección previa del Análisis de Componentes Principales".

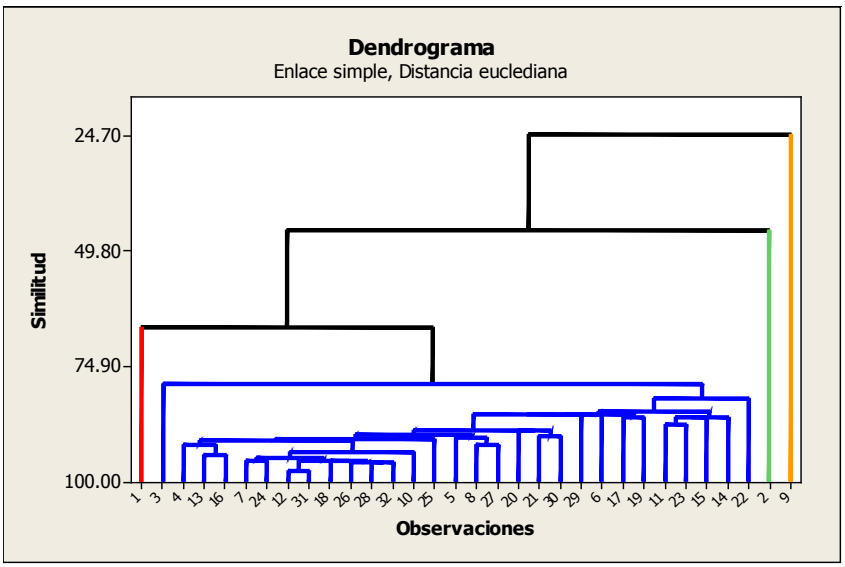


Figura 4. Dendograma de enlace simple y distancia euclidiana de las variables de proporción de RSU. *Fuente:* Elaboración del especialista con resultados generados en Minitab®.

En la *Figura 5* el especialista mostró cuatro grupos de variables, en las cuales destacó que se dan tres grupos con una sola variable cada uno de ellos: la 20 (*proporción de sitios de disposición final tipo tiradero a cielo abierto reportados como destino de los residuos sólidos urbanos respecto al total en la Entidad Federativa*), la 13 (*proporción de municipios y delegaciones con disponibilidad de servicios de sólo recolección y disposición final de residuos sólidos urbanos respecto al total en la Entidad Federativa*) y la 12 (*proporción del total municipios y delegaciones con disponibilidad de servicios relacionados con los residuos sólidos urbanos respecto al total en la Entidad Federativa*), y el cuarto grupo aglutina a todas las demás. Según sus palabras: "esto es, hasta cierto punto, coincidente con el resultado del ACP, en el cual se contrasta la *infraestructura (salvo disposición final de los RSU),* parece marcar una de las diferencias más importantes en este conjunto de datos".

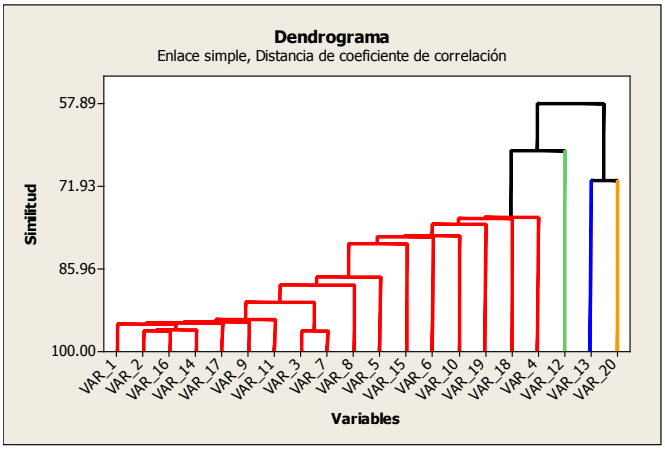


Figura 5. Dendograma de enlace simple y distancia de coeficiente de correlación de los datos de RSU.
Fuente: Elaboración del especialista con resultados generados en Minitab®

Conclusiones, reflexiones y comentarios del especialista con respecto a su estudio estadístico

Del resultado de la aplicación del ACP y del AC, el especialista observó que hay dos dimensiones fundamentales en la gestión de la basura: la *Infraestructura de Gestión de los RSU, Salvo Disposición Final*, por un lado, y la *Planeación vs. la Operación en la Gestión de los RSU*, por el otro. El argumento fue, siguiendo textualmente sus palabras: "por supuesto, la designación de estos nombres es finalmente cuestión de decisión personal, y podría ser sujeta a otro tipo de reflexiones por parte de otros investigadores; sin embargo, aquí lo que destaca es que de un fenómeno de 20 dimensiones, dos (que son cruces), resultan ser las que marcan de manera preponderante el fenómeno de los RSU, con lo cual se simplifica conceptualmente su comprensión".

A su vez, él argumentó que: "el hecho de que las entidades federativas se hubiesen contrastado, bajo aglomeramiento, en básicamente el Distrito Federal, Baja California y Aguascalientes, por un lado, y las demás entidades federativas por el otro nos dice que, a pesar de que estas últimas han dado avances en la gestión de los RSU (básicamente en las tres entidades referidas), existen áreas de oportunidad muy importantes, sobre todo en las entidades del sur del país".

Finalmente, el especialista aseguró que: "el análisis por supuesto podría no parar aquí y se sería posible aplicar otro tipo de herramientas estadísticas que podrían complementar el mostrado en este documento, aunque creemos que los resultados aquí son representativos y arrojan una gran luz acerca del complejo fenómeno de los RSU".

Discusión de resultados

Los siguientes resultados son distinguibles en el estudio llevado a cabo: la selección de un problema para analizar por parte del especialista fue dado por motivos de su adherencia de tal tipo de problemas según su área laboral. Esto es, al estar él inserto a un área de gestión de las estadísticas del medio ambiente valoró como relevante el tomar datos de Residuos Sólidos Urbanos, más que datos de tipo económico, socio-demográfico o de justicia, que son los temas generales que trabaja la institución donde él labora. Esto nos lleva a conjeturar que, en general, los especialistas dentro de sus áreas de trabajo tienden a tomar casos que sean de su interés inmediato y con relevancia a sus labores propias, más que ejemplos en otros contextos. Por

supuesto, esto podría no ser una pauta general y para otros especialistas, que por algún motivo no estuvieran satisfechos en sus actuales áreas, la situación podría ser diferente.

El especialista no optó por la selección de técnicas estadísticas univariadas, como podría ser simplemente la descripción de algunas medidas de tendencia central (media, mediana, moda) o de dispersión (varianza, rango, desviación semi-intercuartílica, etc.), debido a que, según sus palabras, "en fenómenos complejos y de la vida real, estas son técnicas limitadas y más bien deben de tomarse en consideración estrategias multivariadas para el análisis de datos". Este es un punto extraordinariamente relevante en el cual se distingue un estudiante en algún centro escolar con respecto a los especialistas, los cuales tenderían a tener análisis más elaboradas, y por ser elaborados en sí, sino persiguiendo una descripción más adecuada de la realidad.

Un énfasis muy marcado del especialista fue el perseguir la interpretación de los datos y cifras que se generaban en la aplicación de cada una de las técnicas estadísticas que él utilizó. Esto es, por ejemplo, no se limitó solo a mostrar la varianza explicada de cada componente principal, sino que buscó dar la interpretación contextual de al menos las dos primeras componentes principales, tal y como se mostró en la sección 4.5. Esto, conforme a la experiencia de los autores, marca también de manera muy acentuada una distinción fundamental con respecto a los estudiantes en instituciones de educación superior, los cuales usualmente no les *consterna* en mayor medida la interpretación, sino que se considera que *cumplen* con su tarea estadística al mostrar ciertos conjuntos de cifras. El énfasis en la interpretación muy probablemente se asocia al hecho de que en la vida profesional se busca *explotar* los resultados de manera que dé sentido al proceso de toma de decisiones en contextos y problemas reales del lugar de trabajo.

Con respecto al hecho de seleccionar el Análisis de Componentes Principales y el Análisis de Conglomerados, según la apreciación del especialista, obedece a que son dos de las técnicas de mayor reconocimiento por parte de la comunidad estadística, por un lado, y por el hecho de que sus resultados coadyuvan fuertemente la toma de decisiones y el esclarecimiento conceptual de los problemas. Nuevamente, se observa que la principal inquietud del especialista fue el que los resultados fueran valiosos para el proceso de toma de decisiones y que se pudieran comunicar con relativa facilidad a sus colegas.

Por último, el especialista mostró consuetudinariamente el hábito de poder modificar las *reglas* dadas por los libros para tornarlas más laxas o más exigentes, según fuera el caso, y desde su propia apreciación. Por ejemplo, a pesar de que tomó como mínimo un 70% de la varianza explicada, él se inclinó por considerar que el fenómeno tendría una dimensión de 2, puesto que la diferencia entre el 72.8% y el 61.7% mostrada en la Tabla 1, a pesar de ser reconocida, no le pareció que valiera la pena para volver más complicado el fenómeno.

Conclusiones

En función a los resultados comentados en la sección previa, son claras las siguientes conclusiones: la forma de aprender y aplicar el aprendizaje de la estadística adquiere una importancia fundamental en el contexto de trabajo y en situaciones reales. En general, esta es una característica muy particular de la Educación Estadística, en la cual el contexto más que ayudar, es indispensable para que adquieran sentido los ejemplos y ejercicios que se desarrollan. En función a lo anterior, parece ser que una buena estrategia que podría emplearse para incentivar el aprendizaje y uso de las técnicas estadísticas es, por un lado, la aplicación de datos reales (y no hacer un sobreuso de los ejemplos académicos que existen en la mayoría de los textos), y por

otro, invitar a especialistas (por ejemplo, de las estadísticas oficiales) a ofrecer sus experiencias estadísticas en grupos académicos.

Finalmente, el contexto en los problemas de Estadística es significativo y es un atributo esencial que no debe ser separado en los ejercicios de Estadística aplicada para que estos en verdad tengan sentido para los estudiantes y cuenten con un segmento interesante y real de interpretación.

Limitaciones del estudio

El presente estudio es un caso de estudio con un egresado de un posgrado especializado en Estadística Oficial. Por esto mismo, entrevemos dos limitantes del estudio: por un lado, sería conveniente llevar a cabo un estudio más amplio con un mayor número de especialistas, egresados del programa de Estadística Oficial, para observar similitudes y contrastar diferencias, y así estar en condiciones de ver si lo observado en el presente estudio es realmente una particularidad, o si es una generalidad; por otro lado, al ser el especialista un egresado de un programa de Estadística, podría existir diferencia contra otros egresados en posgrados distintos, como de Administración o Ingeniería que incluya componentes curriculares estadísticos, por lo que también deben de tomarse con reservar los presentes resultados y no ser generalizables a todo estudiante o egresado de estudios de posgrado en Estadística.

Prospectiva

Los estudios sobre estadística educativa son incipientes en el mundo en general, y particularmente en el caso de México, y más aún aquellos estudios sobre la caracterización de los procesos de enseñanza-aprendizaje en lugares de trabajo y sobre contextos reales y aplicados. Sin embargo, todos ellos son extraordinariamente importantes, tanto en un sentido teórico como práctico, y sin lugar a dudas serán motivo de mayores y más profundos estudios al respecto. En este trabajo se pretendió el brindar un aporte al respecto y esperamos que los resultados sean de interés a los investigadores en el tema y a aquellos que no lo son les parezcan interesantes para poder ser, potencialmente, incorporados en sus propios estudios educativos. Lo que es indiscutible es que las investigaciones seguirán su marcha y dentro de algún tiempo se tengan un cuerpo de conocimiento estructurado y coherente con respecto a este y otros hechos de gran relevancia en la Educación Estadística.

Bibliografía y Referencias

Bavdaž, M., Ograjenšek, I., & Perviz, L. (2014) Workplace and official statistics: How can higher education contribute to a better relationship? En K. Makar, B. de Sousa, & R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS9, July, 2014), Flagstaff, Arizona, USA*. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute. iase-web.org [© 2014 ISI/IASE]

Biehler, R. (1994). Probabilistic thinking, statistical reasoning, and the search for causes - Do we need a probabilistic revolution after we have taught data analysis? Versión revisada y extendida de un artículo presentado en el *Fourth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 4), Marrakech, Morocco*, pp. 25-30.

Brown, J., David, I., Moltchanova, E., Seddon, H., & Harlow, J. (2014) Improving statistical literacy at university. En K. Makar, B. de Sousa, & R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS9, July, 2014), Flagstaff, Arizona, USA*. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute. iase-web.org [© 2014 ISI/IASE]

Carrasco, J. P. (2014) Education statistics for professional specialization: use of knowledge at the workplace of postgraduate in statistics. En K. Makar, B. de Sousa, & R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS9, July, 2014), Flagstaff, Arizona, USA*. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute. iase-web.org [© 2014 ISI/IASE]

Cobb, G. (2007). Un marco posible para pensar sobre el aprendizaje experimental. *International Statistical Review*, *7*(3), 336-347.

Forbes, S., & Janssen, T. (2014). The use of official statistics in evidence based policy making in New Zealand**.** En K. Makar, B. de Sousa, & R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS9, July, 2014), Flagstaff, Arizona, USA*. Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute. iase-web.org [© 2014 ISI/IASE]

Forbes, S., & Keegan, A. (2014) Bringing the workplace into a national certificate in oficial Statistics. En K. Makar, B. de Sousa, & R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS9, July, 2014), Flagstaff, Arizona, USA.* Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute. iase-web.org [© 2014 ISI/IASE]

Instituto Nacional de Estadística y Geografía –INEGI- (2014). Residuos Sólidos Urbanos. En la sección de "Asentamientos y actividades humanas", sub-sección "Residuos Sólidos Urbanos". *Módulos ambientales dentro del Censo Nacional de Gobiernos Municipales y Delegacionales 2013*. Recuperado de http://www3.inegi.org.mx/sistemas/temas/default.aspx?s=est&c=21385

Johnson, D. (2000). *Métodos multivariados aplicados al análisis de datos*. México, D.F.: International Thomson Editores.

Johnson, G., & Shumway, D. (2014). Supporting statistical consultant decision-making within a case-based learning environment- En K. Makar, B. de Sousa, & R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS9, July, 2014), Flagstaff, Arizona, USA.* Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute. iase-web.org [© 2014 ISI/IASE]

Johnson, R., & Wichern, D. (2002). *Applied Multivariate Statistical Analysis* (Fifth Edition). New Jersey: United States of America.

Navarro, J. (2014) Once were warriors: the need of re-education in mathematics and Computing for life "scientisticians". En K. Makar, B. de Sousa, & R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS9, July, 2014), Flagstaff, Arizona, USA.* Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute. iase-web.org [© 2014 ISI/IASE]

Moore, D. (1997). New Pedagogy and New Content: The Case of Statistics. International Statistical Review, *65*(2), pp. 123-165. Recuperado de http://iase-web.org/documents/intstatreview/97.Moore.pdf

Razzouk, N., & Razzouk, J. (2008). Analysis in Teaching with Cases: A revisit to Bloom's Taxonomy of Learning Objectives. *College Teaching Methods & Styles Journal*, *4*(1), 49-56.

Secretaría de Medio Ambiente y Recursos Naturales –SEMARNAT. (2007). Guía metodológica para el levantamiento y evaluación de información para efectuar el diagnóstico de la gestión integral de los RSU.

Secretaría de Medio Ambiente y Recursos Naturales –SEMARNAT. (2012). *Informe de la Situación del Medio Ambiente, 2012.* Compendio de Estadísticas Ambientales. Indicadores Clave y de

Desempeño Ambiental. Capítulo 7: Residuos. Recuperado de http://app1.semarnat.gob.mx/dgeia/informe_12/pdf/Cap7_residuos.pdf

Vaughan, K. (2008). *Workplace learning: A literature review.* Report prepared for Competenz.

Wild, C., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. *International Statistical Review*, *67*(3), 223-265.

Westbrooke, I., & Ellis, P. (2014). Training to develop modern statistics in the workplace using R and R Commander - Experiences from the New Zealand government sector. En K. Makar, B. de Sousa, & R. Gould (Eds.), *Sustainability in statistics education. Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS9, July, 2014), Flagstaff, Arizona, USA.* Voorburg, The Netherlands: International Statistical Institute. iase-web.org [© 2014 ISI/IASE]

Evolución de las tendencias de pensamiento probabilístico de los estudiantes para profesor de secundaria: el caso de Matemática

Amable **Moreno**
Universidad Tecnológica Nacional de Mendoza
Argentina
amable.moreno@frm.utn.edu.ar
José María **Cardeñoso**
Universidad de Cádiz
España
josemaria.cardenoso@uca.es

Resumen

En este trabajo se analiza la evolución de las tendencias de pensamiento probabilístico de 583 estudiantes para profesor de matemáticas de la provincia de Mendoza, Argentina. Se aplicó el análisis de clusters, análisis discriminante, test de Pearson, y el gráfico de líneas. El marco de referencia es el sistema de categorías para la determinación de las tendencias de pensamiento probabilístico propuesto por Cardeñoso (2001). La caracterización de las mismas está asociada a la capacidad para reconocer la aleatoriedad, los argumentos para justificarla: causalidad, multiplicidad e incertidumbre; los argumentos para justificar la estimación de la probabilidad: contingencia, laplaciana, frecuencial, y equiprobabilidad. Pero no se ha encontrado asociación estadísticamente significativa entre las tendencias de pensamiento probabilístico con la edad, el instituto docente y el nivel propedeútico. Se encontró mayor presencia de las tendencias *incertidumbre* y *determinista* en los dos primeros años; y de las *contingencia* y *personalista* en los dos últimos años.

Palabras clave: educación probabilística, formación del profesorado de matemática, evolución de las tendencias de pensamiento.

Introducción

En este trabajo se analizan las características asociadas a las tendencias de pensamiento probabilístico de los estudiantes para profesor de matemáticas de la provincia de Mendoza, Argentina. Las tendencias encontradas son: Determinista, Incertidumbre, Personalista y Contingente (Moreno y Cardeñoso, 2014b). La caracterización de las mismas está asociada a ciertos factores, como es la capacidad para reconocer sucesos aleatorios, los argumentos que utilizan para justificarlos: causalidad, multiplicidad e incertidumbre; los argumentos que emplean para justificar la estimación de la probabilidad: contingencia, laplaciana, frecuencial, y equiprobabilidad. Sin embargo, no se ha encontrado asociación entre las tendencias de pensamiento probabilístico con la edad, el instituto docente y el nivel propedeútico de los estudiantes. Lo que nos hace reflexionar acerca de la necesidad de una profunda revisión del currículo del profesorado de Matemática, con miras a lograr una formación que les permita concretar la enseñanza de la probabilidad en el nivel de secundaria.

Marco de Referencia

Hemos utilizado como marco de referencia el sistema de categorías para la determinación de las tendencias de pensamiento probabilístico propuesto por Cardeñoso (2001); el que detallamos a continuación, y además compartimos con el autor su perspectiva epistemológica socio constructivista, según la cual entendemos el conocimiento como sistemas de ideas con diferentes formas de concreción y articulación, que está sometido a evolución, reestructuración y reorganización continua, producto de la interacción con el medio.

Causalidad : Argumentaciones que tienen como criterio de reconocimiento de la aleatoriedad explicaciones en función de los diversos factores causales o en la ausencia de posibilidad de su control.

Multiplicidad ; Argumentaciones que tienen como criterio de reconocimiento de la aleatoriedad la existencia de múltiples posibilidades en el desarrollo del fenómeno.

Incertidumbre ; Argumentaciones en las que se utiliza como criterio de reconocimiento de la aleatoriedad la propia imprevisibilidad del suceso, sin profundizar en su explicación o análisis.

Subjetiva : Argumentaciones en las que utiliza como criterio de reconocimiento de la aleatoriedad consideraciones referidas a la propia vivencia o creencia subjetiva.

Contingencia: Argumentaciones estimativas de cuantificación de la probabilidad basadas en la comparación entre los casos favorables y desfavorables de un suceso.

Laplaciana: Argumentaciones estimativas de cuantificación de la probabilidad basadas en la proporción entre los casos favorables y desfavorables del fenómeno.

Frecuencial: Argumentaciones estimativas de cuantificación de la probabilidad basadas en la lectura frecuencial del fenómeno o de la información aportada.

Equiprobabilidad: Argumentaciones estimativas de cuantificación de la probabilidad basadas en justificaciones desde la equiposibilidad entre los resultados del fenómeno.

Experiencial: Argumentaciones estimativas de cuantificación de la probabilidad basadas en criterios fruto de la experiencia personal.

Metodología

Se aplicó un cuestionario con cuarenta y ocho ítems; veinticuatro relativos a las características sociodemográficas de los estudiantes; doce al reconocimiento de la aleatoriedad con sus respectivas argumentaciones y otros veinticuatro ítems relativos a la estimación de la probabilidad. Las respuestas de los estudiantes se analizaron a la luz de técnicas estadísticas: Transformación de las respuestas en variables cuantitativas; análisis de clusters, análisis discriminante, Test de Pearson y Gráfico de líneas.

Resultados

Los estudiantes que participaron del estudio se distribuyen en distintos institutos de formación docente de la provincia de Mendoza, Argentina.

En el Instituto de Formación Docente 9-002 de la Capital de Mendoza, respondieron al cuestionario 215 estudiantes (36,88%); del instituto 9-013 de Capital respondieron 38 estudiantes (6,5 %); del instituto de gestión privada TP-13 contestaron 32 estudiantes (5,5 %); del instituto 9-009 ubicado en el departamento de Tupungato y en Luján de Cuyo contestaron 95 estudiantes

(29,2%); del instituto 9-011 del departamento de San Rafael contestaron 53 estudiantes (9,1%); del instituto 9-006 del departamento de Rivadavia contestaron 52 estudiantes (8,9%); del instituto 9-026 del departamento de San Martín, contestaron 37 estudiantes (6,4%); del instituto 9-024 de Lavalle contestaron 34 estudiantes (5,8%) y del instituto 9-023 del departamento de Maipú contestaron 27 estudiantes (4,6%).

En primer lugar se determinaron las tendencias de pensamiento probabilístico de los estudiantes mediante el análisis de clusters y el discriminante (Moreno & Cardeñoso, 2014); donde se determinaron cuatro tendencias de pensamiento: Determinista, Incertidumbre, Personalista y Contingencia.

La tendencia al *Determinismo*, es la que logra el menor reconocimiento de la aleatoriedad, hecho que motivó la denominación del grupo. Cuando niegan la aleatoriedad lo hacen desde la incertidumbre y desde la multiplicidad (Moreno, Cardeñoso & González-Garcia, 2014a, 2014c). Cuando estiman la probabilidad lo hacen desde la contingencia y la equiprobabilidad, con valores que superan al valor medio de esta categoría (Moreno, Cardeñoso & González-García, 2012a, 2014d).

La tendencia hacia la *Incertidumbre,* es la que logra el mayor reconocimiento de la aleatoriedad. Fundamentan este reconocimiento desde la imprevisibilidad del suceso; es decir desde la categoría que hemos denominado incertidumbre, lo que motivó la denominación de grupo. En segundo lugar argumentan desde la multiplicidad, es decir que consideran los posibles resultados en la ocurrencia del suceso; no por esto descartan los argumentos causales, ya que los mismos tienen cierta relevancia, dado que alcanzan un valor superior a la media de la categoría. En cuanto a la estimación de la probabilidad, la equiprobabilidad alcanza el valor máximo en este grupo, mientras que las categorías contingencia, laplaciana y frecuencial alcanzan el valor mínimo.

La tendencia hacia el *Personalismo* es el tercer grupo en el reconocimiento de la aleatoriedad, y es el grupo que más emplea la subjetividad para argumentar el reconocimiento de la aleatoriedad, si bien es superado por el argumento incertidumbre. Cuando niegan la aleatoriedad, también argumentan desde la subjetividad; y en cuanto a la estimación de la probabilidad se destaca el uso de la categoría experiencial, en relación con los otros tres grupos.

La tendencia hacia la *Contingencia,* es el segundo grupo en el reconocimiento de la aleatoriedad, se destaca el uso de argumentos basados en la multiplicidad y en la causalidad; sin embargo la categoría más usada es la incertidumbre. Cuando estiman la probabilidad lo hacen fundamentalmente desde las categorías contingencia y laplaciana con valores máximos, si bien también argumentan desde la categoría frecuencial con un valor superior al valor medio de la misma.

Luego, se aplicó el test de Pearson para analizar la asociación entre las tendencias de pensamiento probabilístico y las variables, como se muestran en la Tabla 1.

Tabla 1
Características asociadas a las tendencias de pensamiento probabilístico.

Variable	Chi cuadrado de Pearson	Valor p	conclusión
Nivel Propedeútico	$\chi^2_{(9)} = 13{,}736$	0,132	Independencia
Edad de los estudiantes	$\chi^2_{(12)} = 13{,}736$	0,319	Independencia
Instituto Educativo	$\chi^2_{(24)} = 30{,}556$	0,167	Independencia
Reconocimiento de la aleatoriedad	$\chi^2_{(33)} = 419{,}26$	0,000	Dependencia
Reconocimiento de la aleatoriedad desde la causalidad	$\chi^2_{(21)} = 81{,}2$	0,000	Dependencia
Reconocimiento de la aleatoriedad desde la multiplicidad	$\chi^2_{(18)} = 127{,}351$	0,000	Dependencia
Reconocimiento de la aleatoriedad desde la incertidumbre	$\chi^2_{(33)} = 362{,}86$	0,000	Dependencia
Reconocimiento de la aleatoriedad desde la Subjetividad	$\chi^2_{(12)} = 18{,}216$	0,109	Independencia
Estimación de la probabilidad desde la Contingencia	$\chi^2_{(27)} = 46{,}687$	0,011	Dependencia
Estimación de la probabilidad desde la Laplaciana	$\chi^2_{(27)} = 166{,}61$	0,000	Dependencia
Estimación de la probabilidad desde la Frecuencial	$\chi^2_{(27)} = 60{,}713$	0,000	Dependencia
Estimación de la probabilidad desde la Equiprobabilidad	$\chi^2_{(33)} = 363{,}758$	0,000	Dependencia
Estimación de la probabilidad desde la Experiencial	$\chi^2_{(12)} = 18{,}216$	0,109	Independencia

Estos resultados nos pueden ayudar a dilucidar la complejidad del pensamiento probabilístico. A pesar de la falta de asociación entre las tendencias de pensamiento probabilístico y los niveles propedeúticos de los estudiantes, hemos realizado un análisis pormenorizado de la presencia de cada una de ellas por nivel.

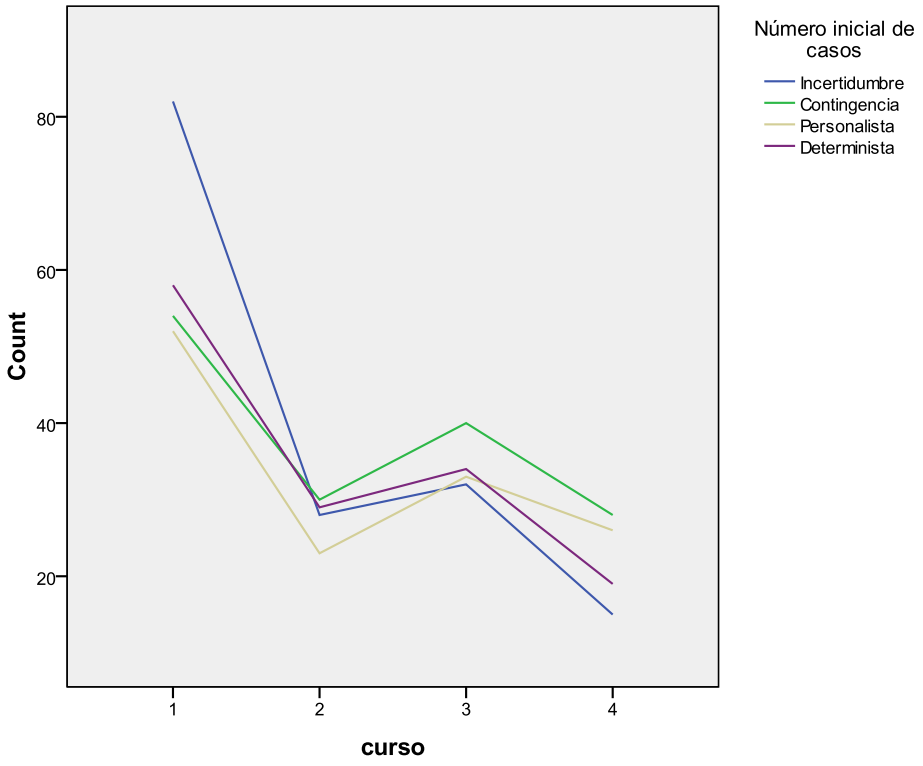


Figura 1. Gráfico de líneas de las tendencias de pensamiento probabilístico en función del nivel propedeútico.

En el Gráfico de líneas y la Tabla 2 , se muestra que en el primer curso de la carrera, la tendencia hacia la incertidumbre es la que tiene mayor frecuencia; en donde se destaca la presencia de los estudiantes más jóvenes. Esta tendencia se caracteriza por alcanzar el mayor reconocimiento de la aleatoriedad y estimar la probabilidad desde la equiprobabilidad (Lecoutre, 1985, 1992; Lecoutre & Durand, 1992; Lecoutre y Cordier, 1990; Lecoutre, M.P.; Rovira, K.; Lecoutre, B. & Poitevineau, J. ;2006), como sesgo; es decir, que no representa un argumento apropiado. En segundo lugar, se presenta en menor medida, la categoría *Determinista,* cuya característica fundamental es el no reconocimiento de la aleatoriedad desde la multiplicidad y la incertidumbre; situación que podría revelar el desconocimiento del significado del término *aleatorio* (Moreno, Cardeñoso y González-García, 2014b); mientras que la estimación de la probabilidad es argumentada desde la equiprobabilidad, denotando la falta de ideas formales acerca de la probabilidad (Moreno, Cardeñoso y González-García, 2012, 2014d).

En el segundo curso, en cambio, aparece la presencia de las tendencias *Contingencia Determinista e Incertidumbre*, las que se presentan en igual medida. La tendencia *Contingencia*, se caracteriza por el reconocimiento de la aleatoriedad desde la multiplicidad y la causalidad, y la estimación de la probabilidad es argumentada desde las categorías contingencia y laplaciana.

En el tercer curso, se destaca la tendencia *Contingencia*, mientras que las otras tres son alcanzadas de manera similar las otras tres.

Finalmente, en el cuarto curso, aparece en primer lugar la tendencia *Contingencia* y luego la tendencia *Personalista*.

Tabla 2
Tabla de contingencia del "nivel propedeútico" y "tendencia de pensamiento"

Nivel Propedeútico	Incertidumbre	Contingencia	Personalista	Determinista
1° curso	33,33 %	21,95 %	21,14 %	23,58 %
2° curso	25,45 %	27,27 %	20,91 %	26,37 %
3° curso	23,02 %	28,78 %	23,74 %	24,46 %
4° curso	17,05 %	31,82 %	29,55 %	21,59 %

Conclusiones y Discusión

Desde nuestra visión ontológica y holística del pensamiento probabilístico, podemos concluir que en los dos primeros niveles; donde predomina la presencia de los estudiantes más jóvenes; las tendencias se polarizan hacia la Incertidumbre y en forma diametralmente opuesta hacia el Determinismo; mientras que los dos últimos niveles es notable la presencia de la tendencia hacia la Contingencia,; hecho que queda justificado por una mayor instrucción de los estudiantes; y en segundo término hacia el personalismo.

Las concepciones que tienen los estudiantes del PMF; influenciadas por su formación matemática (Meletiou-Mavrotheris, 2007), conllevan una visión simplificadora de la realidad; debido a que sus intereses se centralizan *en conceptualizaciones abstractas y deductivas*; y no han logrado el nivel de desarrollo necesario, que les permita interpretar los fenómenos de la vida cotidiana y del mundo físico-natural desde concepciones cercanas a las formales. Sin embargo, podemos señalar, como lo hemos mencionado, que en los dos últimos años de la carrera se detectan concepciones más evolucionadas que en los dos primeros años. Por lo tanto, queda planteada la necesidad de la revisión del currículo del profesorado de Matemática de la provincia de Mendoza, Argentina.

Referencias y bibliografía

Azcárate, P. (1996). *Estudio de las concepciones disciplinares de futuros profesores de primaria en torno a las nociones de aleatoriedad y probabilidad*. Granada: Editorial Comares.

Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. En R. Farfán y cols. (Eds.), *Relime, 8*(3), 247-263.

Cardeñoso, J. M. (2001). *Las creencias y conocimientos de los profesores de primaria andaluces sobre la matemática escolar. Modelización de concepciones sobre la aleatoriedad y probabilidad* (Tesis Doctoral). Universidad de Cádiz, Cádiz.

Lecoutre, M. P. (1985). Effect d'informations de nature combinatoire et de nature fréquentielle sur le judgments probabilistes. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 6*, 193-213.

Lecoutre, M. P. (1992). Cognitive models and problem spaces in "purely random" situations. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 557-568.

Lecoutre, M. P., & Cordier, J. (1990). Effect du mode de présentation d'un problème aleatoire sur les modèles développés par les élèves. *Bulletin de l'APMEP, 372,* 9-22.

Lecoutre, M. P., & Durand, J. L. (1988). Judgements probabilistes et modèles cognitifs: etude d'une situation aleatoire. *Educational Studies in Mathematics, 19*, 357-368.

Lecoutre, M.P., Rovira, K., Lecoutre, B., & Poitevineau, J. (2006). People´s Intuitions about randomness and probability: an empirical study. *Statistics Education Research Journal, 5*(1), 20-35. Alexandria.

Meletiou-Mavrotheris, M. (2007). The Formalist Mathematical Tradition as an Obstacle to Stochastical Reasong. En K. Francois & J-P. Van Bendegen (Eds.), *Phiolophical Dimensions in Mathematics Education.* N.York: Springer.

Moreno, A., Cardeñoso, J. M., & González-García, F. (2012a). Las dificultades detectadas en un grupo de estudiantes del profesorado de educación primaria cuando afrontan la asignación de probabilidades. En M. Marín-Rodríguez , & N. Climent (Eds.)*, Actas Investigación en Educación Matemática. Comunicaciones de los Grupos de Investigación de la SEIEM XV*, *Simposio de la SEIEM,* (pp. 153-178). Ciudad Real: SEIEM. Recuperado el 15 noviembre de 2013 http://www.seiem.es/publicaciones/archivospublicaciones/comunicacionesgrupos/GruposXVSimposio.pdf.

Moreno, A., Cardeñoso, J. M., & González-García, F. (2013). La aleatoriedad desde la perspectiva de los estudiantes del Profesorado de Matemática. En J.M. Contreras, G.R. Cañadas, M.M. Gea, & P. Arteaga (Eds.) *Actas de las I Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria.* Granada: Departamento Didáctica Matemática de la Universidad de Granada, (pp. 367-372). Recuperado 14 noviembre de 2013 desde http://www.jvdiesproyco.es/documentos/ACTAS/Actas%20jornadas.pdf

Moreno, A., Cardeñoso, J.M. & González-García, F. (2014a). La Aleatoriedad en los Profesores de Biología y de Matemática en Formación: Análisis y Contraste de Significados. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias, 11*(2), 198-215.

Moreno, A., & Cardeñoso, J.M. (2014b). Overview of prospective mathematics teachers´ probabilistic thinking. *ICOTS 9. 9th. International Conference on Teaching Statistics.* Flagstaff, Arizona, USA, 13-18 July 2014. "Sustainaility in statistics education".

Moreno, A., Cardeñoso, J. M., & González-García, F. (2014 c). Los significados de la aleatoriedad de los profesores de matemática y de biología en formación. *ALME 27. Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 27, pp. 1963-1972).Comité Mexicano de Matemática Educativa. A.C.

Moreno, A., Cardeñoso, J. M., & González-Garcia, F. (2014d). Los significados de la probabilidad de los profesores de matemática en formación: Un análisis desde la teoría de los modelos mentales. *RELME 28. XXVIII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. Universidad del Atlántico. Barranquilla. Colombia.

A Distribuição Normal e o Conceito de Número: caminhos que se entrecruzam no 1º ano do ciclo de alfabetização do ensino fundamental

Maria Lúcia Lorenzetti **Wodewotzki**
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"-Campus Rio Claro
Brasil
mariallwode@gmail.com
Sandra Gonçalves **Vilas Bôas Campos**
Secretaria Municipal de Educação de Uberlândia
Brasil
sandravilasboas@yahoo.com.br

Resumo

Esta comunicação científica apresenta resultados parciais de uma pesquisa de Doutorado realizada no Programa de Pós Graduação em Educação Matemática da UNESP- Rio Claro - São Paulo - Brasil junto a uma Classe de 1º ano de uma Escola Pública Municipal de Uberlândia-Minas Gerais- Brasil. Para auxiliar na busca de respostas para a questão investigativa desta pesquisa, optamos por fazê-lo na perspectiva da Investigação Matemática e Estatística. Defendemos que as crianças nos primeiros anos de escolaridade são capazes de colocar questões para investigar, organizar respostas, criar representações dos dados e compreendê-los dentro de suas capacidades de crianças. Brincar, jogar e aprender com noções de Probabilidade, Estatística e Sentido de Número é a tônica central da tarefa aqui apresentada. Os primeiros resultados apontam que as atividades de natureza investigativa, por nós elaboradas, contribuem para a construção do conceito de número.

Palavras chave: Estatística, Matemática, Investigação Matemática, Conceito de Número.

Introdução

Nesta comunicação, apresentamos desenvolvimento, investigação e reflexão sobre a aplicação de uma das tarefas desenvolvidas em nossa pesquisa de Doutorado.

No Brasil, em 1996, a LDB (Lei de diretrizes e Base da Educação), sinalizou para um ensino obrigatório de nove anos, a iniciar-se aos seis anos de idade; esse tipo de ensino se tornou meta da Educação Nacional pela Lei nº 10.172, de 9 de janeiro de 2001, que aprovou o PNE (Plano Nacional de Educação).

A criança de seis anos apresenta grandes possibilidades de simbolizar e compreender o mundo, estruturando seu pensamento e fazendo uso de múltiplas linguagens. Vive um momento crucial de sua vida quanto à construção de sua autonomia e de sua identidade. Estabelece laços sociais e afetivos e constrói seus conhecimentos na interação com outras crianças e com adultos

com os quais se relaciona. Entre os conceitos que ela vivencia no seu grupo cultural, um deles, com certeza, é o de número.

Há que se pensar e solucionar sobre "o que" e "o como" se deve ensinar essas crianças nas diferentes áreas do currículo. Quais as dimensões do conhecimento matemático que precisam ser consideradas? O documento "Ensino Fundamental de nove anos: orientações para a inclusão da criança de seis anos de idade" responde a essa nossa questão:

> É necessário encorajar as crianças a identificar semelhanças e diferenças entre diferentes elementos, classificando, ordenando e seriando; a fazer correspondências e agrupamentos; a comparar conjuntos; a pensar sobre números e quantidades de objetos quando esses forem significativos para elas, operando com quantidades e registrando as situações-problema (inicialmente de forma espontânea e, posteriormente, usando a linguagem matemática). É importante que as atividades propostas sejam acompanhadas de jogos e de situações-problema e promovam a troca de ideias entre as crianças (Brasil, 2007, p.60).

É necessário ressaltar que só terá sucesso a efetivação dessa proposta curricular, se a escola criar espaços de trocas e de aprendizagens significativas, em que as atividades didáticas tenham a finalidade de desafiar as crianças, levá-las a prever resultados, simular situações, elaborar hipóteses e refletir sobre as situações do cotidiano.

Ao realizar a revisão bibliográfica para composição do referencial teórico de nossa pesquisa, encontramos alguns pesquisadores que sinalizam a interligação entre o Ensino de Estatística e a constituição do conceito de número pelas crianças; são eles, Souza (2007), Oliveira (2003) e Oliveira (2012).

Baseada em D'Ambrosio (1996), Lopes (2003) considera que Matemática e Educação são estratégias contextualizadas e totalmente interdependentes. Percebe-se que a Estatística, a Matemática e a Educação manifestam uma relação reciprocamente dependente, dando origem à Educação Estatística que centraliza seus objetivos no desenvolvimento do pensamento Probabilístico e Estatístico.

Também nos PCN (Parâmetros Curriculares Nacionais) de Matemática encontramos esta conexão Matemática e Estatística, quando enunciam que no ensino de Matemática, há dois aspectos básicos:

> [...] um consiste em relacionar observações do mundo real com representações (esquemas, tabelas, figuras); outro consiste em relacionar essas representações com princípios e conceitos matemáticos. Nesse processo, a comunicação tem grande importância e deve ser estimulada, levando-se o aluno a "falar" e a "escrever" sobre Matemática, a trabalhar com representações gráficas, desenhos, construções, a aprender como organizar e tratar dados (PCN, 2001, p.19).

É nesse quadro que destacamos a importância de nossa pesquisa, reforçando que é no campo do estudo de problemas e situações reais, em uma perspectiva de investigação contextualizada, que a Educação Estatística é chamada a dar a sua contribuição para a Educação matemática.

Para nortear a pesquisa, elegemos, assim, a seguinte pergunta: **de que forma a abordagem do Ensino de Estatística pode contribuir para que crianças que estudam em turmas de 1º ano do ciclo de alfabetização construam hipóteses sobre o conceito de número?**

Quadro teórico que circunstancia o estudo: Para auxiliar na busca de resposta da questão investigativa desta pesquisa, optamos por fazê-lo na perspectiva da Investigação Matemática e Estatística, uma vez que, segundo Ponte (2009), as investigações numéricas contribuem, de modo decisivo, para desenvolver a compreensão global dos números e das operações, bem como capacidades matemáticas importantes como a formulação e teste de conjecturas e a procura de generalizações.

Sobre o Ensino de Estatística/Educação Estatística: A criança chega à escola cheia de curiosidade**.** A Educação Estatística ajuda a valorizar o desenvolvimento dessa curiosidade. Por exemplo, se uma criança, questiona: "qual o sorvete preferido de meus colegas?" o professor pode direcionar esse questionamento para uma investigação e, ainda, provocar novas questões para investigação a partir dos dados coletados. A Estatística cumpre aí o papel de auxiliar as investigações, das quais muitos dados estão presentes na própria sala de aula, nos espaços da comunidade escolar, na família e se ampliam para outros espaços

O National Council of Teachers of Mathematics recomenda que, desde as séries iniciais do Ensino Fundamental, sejam trabalhados conteúdos de Estatística e Probabilidade (NCTM, 1991). No Brasil, somente a partir de 1997, com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais, é que a preocupação com o ensino de Estatística, bem como com seu enfoque, se fez presente já nos anos iniciais, constituindo-se em um grande avanço para o Ensino Fundamental.

Contudo, não bastam os planos curriculares para que os alunos passem a aprender Estatística. É necessário que as práticas dos professores se encaminhem ao encontro do que é preconizado por Gal e Garfield (1997), ao destacarem que o principal objetivo da Educação Estatística é possibilitar aos alunos que desenvolvam competências que lhes permitam descrever, julgar e inferir opiniões acerca de dados, argumentando e interpretando-os. Os autores reforçam que os números têm que ser analisados como números num contexto.

Para Ponte, (2009), o ensino de Estatística assume uma perspectiva investigativa, quando seu objetivo fundamental é o desenvolvimento da capacidade de formular e conduzir investigações recorrendo a dados de natureza quantitativa. Para esse autor, os alunos devem trabalhar com problemas reais, participando em todas as fases do processo que tem o seu início pela escolha dos métodos e recolha dos dados, envolve a organização, representação, sistematização, e interpretação dos dados e culmina com o tirar de conclusões finais. O autor caracteriza este processo de "*ciclo de investigação"*.

A concepção de Educação Estatística que assumimos nesta pesquisa valoriza as práticas de Estatística aplicadas às problemáticas do cotidiano dos alunos; e defendemos que as crianças, nos primeiros anos de escolaridade, são capazes de colocar questões para investigar, organizar as respostas, criar suas representações dos dados e compreendê-los dentro de suas capacidades de crianças. É nessa perspectiva que esta pesquisa propõe iniciar a formação das crianças com espírito investigativo.

Sobre a criança e o número: Não se pode analisar o processo de formação do conceito de número, sem considerar que a criança traz consigo as influências do meio social, pois desde a infância e até a vida adulta, em diferentes situações e com os mais diferentes propósitos, estamos em confronto com os vários significados do número. Nesse sentido, é fundamental pensar o processo de construção desse conceito, possibilitando o conhecimento de seus diversos significados, quais sejam: "memória da quantidade; memória da posição; códigos; expressar grandezas; prever resultados" (Parra & Saiz *apud* Moreno, 2006, p.59).

O conceito de número, segundo Ponte (2009), ocupa lugar de destaque na Matemática Escolar. O autor destaca que desenvolver o sentido do número, ou seja, adquirir uma compreensão global dos números e das operações e usá-los de modo flexível para analisar situações e desenvolver estratégias úteis para lidar com os números e operações é um objetivo central da aprendizagem da Matemática.

Sobre atividades de natureza investigativa: Em uma atividade Matemática de natureza investigativa, os alunos partem inicialmente de uma questão desafiante, consideram estratégias alternativas, discutem com o par, testam as suas ideias e depois comunicam, discutem e refletem com toda a turma (Jesus & Serrazina, 2005, p. 07). Em função de as crianças estarem no início da escolarização e de sua pequena idade (6 anos), nesta pesquisa, optamos para que, inicialmente, essas etapas fossem realizadas com o auxílio da pesquisadora e da professora. No entanto, no decorrer da pesquisa, estimulamos as crianças a elaborarem os questionamentos e, com isso, acreditamos que se tornarão mais autônomas para realizar as investigações matemáticas. Essa maneira de condução permite garantir que o trabalho dos alunos vá fluindo e seja significativo do ponto de vista dos conceitos que se desejam alcançar perante a atividade em exercício, sem, no entanto, comprometer a autonomia das crianças.

Estas etapas são conduzidas segundo Ponte *et al.* (2009, p. 47), procurando interagir com os alunos e tendo em conta as necessidades particulares de cada um, sem perder de vista os aspectos gerais da situação didática.

Nesse movimento, as atividades de Estatística desenvolvidas com as crianças, são assim, de natureza investigativa e, contemplam aspectos que possibilitem a formação do conceito de número. A investigação, a descoberta, a reflexão e a validação se destacam, pois são vistas como elementos básicos nesse processo de construção do conhecimento.

Metodologia - Procedimentos de investigação e de análise

A nossa investigação, realiza-se com alunos de uma turma de 1º ano do Ciclo de Alfabetização de uma escola da Rede Municipal de Uberlândia - Minas Gerais.

Adotamos uma metodologia de investigação de natureza qualitativa, nos moldes de Bogdan & Bicklen (1994), quais sejam: ocorre num contexto natural de trabalho e pretende descrever essa realidade levando em consideração uma preocupação com os processos e os significados atribuídos pelas crianças à situação. Jesus & Serrazina (2005) destacam que uma investigação qualitativa procura a compreensão e não a avaliação, tendo como fonte direta o local de investigação.

Até o presente momento da pesquisa, atuando como membro integrante da ação, procuramos descrever, refletir, interpretar e compreender os fenômenos, além de identificar como as crianças interagem entre si e com os saberes envolvidos no processo de desenvolvimento da atividade. Resgatamos o contexto envolvido tal como ele se deu em seu momento histórico, sem descuidar da sua complexidade e sem a intenção de generalizar os resultados.

Como fonte de dados, contamos com: relatório das aulas, textos produzidos coletivamente pelos alunos ressaltando o que aprenderam com a atividade (a opção por texto coletivo se dá porque os alunos ainda estão em processo de alfabetização); gravações em vídeo, fotos, registro das atividades resolvidas pelos alunos, relato da professora da turma e "Emocionômetro" (Painel avaliativo em que registra como os alunos se sentiram ao realizar as atividades).

A pesquisa em ação: aplicação, desenvolvimento e considerações sobre a tarefa

Passamos a relatar o desenvolvimento de uma tarefa de natureza investigativa desenvolvida em nossa pesquisa de Doutorado, intitulada "Possibilidades Matemáticas e Estatísticas do jogo Campeonato dos Números.

O papel que o jogo assume nesta tarefa: Os jogos são atividades importantes ao desenvolvimento cognitivo das crianças. Buscamos um jogo que permita elaborar tarefas que sirvam para alcançar objetivos concretos de aprendizagem, aquisição de novos conhecimentos e desenvolvimento de capacidades cognitivas e sociais.

O jogo em nossa pesquisa é visto como Jogo Didático, tal qual nos coloca Franco (1996), ao anunciar que o Jogo Educativo busca uma relação mediadora entre o lúdico e o educativo. A autora destaca, ainda, que o Jogo Educativo se transforma em *Jogo Didático* quando apresenta um "sentido restrito", ou seja, quando é utilizado como material ou situação que exige ações orientadas com vistas à aquisição de conhecimento de conteúdos específicos ou de habilidades intelectuais.

O jogo que apresentamos às crianças tem como objetivo, introduzir noções primeiras de probabilidade, contagem e operação de adição que tenha sentido para as crianças e seja realizada de forma prazerosa.

Para o jogo, são necessários um tabuleiro contendo todos as possíveis somas para o lançamento simultâneo de dois dados, marcadores suficientes para a quantidade de jogadores e dois dados. Seu desenvolvimento acontece do seguinte modo: O primeiro jogador lança os dois dados simultaneamente e soma os pontos obtidos; Coloca o seu marcador na "casa" que indica a soma dos pontos obtidos; Os próximos jogadores repetem o processo; Se o resultado já tiver sido marcado o jogador passa a vez; O vencedor será aquele que mais "casas" marcar.

Sendo assim, "Brincar, jogar e aprender" com noções de Probabilidade, Estatística e Sentido de Número é a tônica central da tarefa aqui apresentada. Para sua realização, dividimo-la em quatro momentos com encontros semanais.

Momento 1: o jogo coletivo (2h/aula)

Inicialmente, dispusemos a sala em círculo em torno do tabuleiro. Quando as crianças se sentaram, elas se agruparam segundo suas afinidades. Diante dessa disposição, achamos por bem manter a escolha delas e dividi-as em quatro equipes, segundo a cor dos marcadores (azul, rosa, laranja e amarelo). Tomamos esse cuidado, pois, segundo Ponte *et al.*(2009) o sucesso de uma investigação depende também do ambiente de aprendizagem que se cria na sala de aula; o aluno deve sentir que suas proposições são valorizadas.

De acordo com a opção que fizemos, em uma tarefa de natureza investigativa, os alunos partem, inicialmente, do reconhecimento da situação e de uma questão desafiante. Nesse sentido, iniciamos a atividade investigando sobre o dado: 1- Quais são os números que aparecem nas faces do dado? – Fomos mostrando cada face do dado para as crianças e perguntando quantos pontos estavam marcados em cada face. Começamos pela face de 1 ponto e, em sequência a face de seis pontos; e lhes perguntamos: uma "bolinha" (referia-se ao ponto marcado no dado) mais seis "bolinhas" quanto dá? "*Sete eles responderam em uníssono".* Na sequência, fomos relacionando 5 com 2 e 3 com 4. A investigação se dava em torno da soma dos pontos das faces opostas do dado ser sempre 7. Como as crianças não sabiam o significado da palavra oposta, fomos investigar; colocamos duas crianças de costas um para outra e pusemos o número de

pontos na frente da cada uma, assim elas compreenderam perfeitamente Quantas faces ele tem? - "*Seis elas responderam em uníssono".* Diante dessa resposta perguntamos: qual dos números tem mais chance de ser sorteado? No primeiro momento elas ficaram em silêncio, percebemos que elas não sabiam o significado da palavra "chance"; fomos mostrando as faces e explicando. Assim elas concluíram que todas as faces tinham a mesma chance de ser sorteada.

O próximo item a ser investigado foi o tabuleiro: o que está escrito dentro de cada "casinha"? - *números* (todos responderam tranquilamente). Quais números aparecem no tabuleiro? - as crianças foram falando e fomos anotando na lousa, deixando de lado as repetições. Quantas casinhas tem o tabuleiro? A contagem foi feita coletivamente chegando ao total 36.

Dentro da proposição das atividades com natureza investigativa, encaminhamos para estratégias alternativas; nessa etapa, conduzimos os alunos a perceberem as regras do jogo. Nesse sentido perguntamos: – por que temos dois dados? – "*para jogar".* Como devemos jogá-los? Alguns *responderam: – "os dois juntos", outros responderam: – "um de cada vez"?* O que faremos com os pontos dos dados? Alguns poucos timidamente disseram – "*marcar o tabuleiro"*. Mas temos dois dados vamos marcar duas vezes? Muitos concordaram, outros disseram – "*juntamos os pontos".* O que faremos com essas fichas? - *"Colocamos no tabuleiro"*.

Institucionalizada a investigação, fomos juntando as respostas e explicamos as regras fazendo simulações com lançamento dos dados e marcando no tabuleiro. Neste momento omitimos a regra "quando a casa já está marcada, o jogador passa a vez". O objetivo foi dar oportunidade aos alunos para investigarem esta situação.

Testar e verificar a hipótese é o que Ponte *et al.*(2009) e Jesus & Serrazina (2005) preconizam para ser feito na sequência. Nessa tarefa, compreendemos que essa etapa se refere ao ato de jogar. Para decidir a equipe que iniciaria o jogo, optamos pela Laranja (era a única equipe composta de meninos e uma menina). Foi combinado também que dois alunos lançariam os dados simultaneamente e um terceiro colocaria o marcador no tabuleiro. Esse período foi cheio de estratégias e de considerações. Fomos fazendo o jogo coletivamente, a cada jogada, fazíamos as seguintes perguntas: quais números foram sorteados? Quanto é a soma? – para responder a primeira pergunta grande parte dos alunos tinha que contar o número de pontinhos (bolinhas é o termo usado pelas crianças) da face sorteada e, para a segunda pergunta eles contavam novamente começando no primeiro dado e passavam para o segundo. Para a contagem, os alunos usavam os dedos das mãos. O momento de "marcar a casa no tabuleiro" também era debatido entre os alunos, uns falavam: *"coloca aqui",* apontando para a casa escolhida por eles, outros falavam *"coloca ali",* todos queriam apontar a sua escolha para a criança "marcadora" daquele instante. Para mediar o debate, dissemos a eles que a opção seria da criança "marcadora" da rodada (essa opção se deu porque esse também era um momento para verificar se as crianças sabiam associar a quantidade à representação numérica).

Como havia omitido a regra "passa a vez", durante o jogo, ao chegar a essa situação, encaminhamos a discussão com novos questionamentos para uma nova investigação com estratégias alternativas. A situação de jogo era a seguinte: a equipe laranja lançou os dados e saiu os números 6 e 1 (o que dá soma 7), no entanto todas as casas com número 7 já estavam marcadas. Assim, as crianças questionaram: "e agora não tem casa para colocar" – retornamos a eles a pergunta – O que podemos fazer? As expressões ditas foram: *"fica sem jogar", "fica sem marcar", "passa a vez"*. Com essa investigação, a regra do jogo ficou completamente conhecida. Daí em diante, sempre que ocorria uma situação assim, as outras equipes

comemoravam, pois já haviam inferido que, se uma equipe não colocasse o marcador, aumentaria a chance de outra ser vencedora. Durante todo o jogo, as crianças iam comparando a quantidade de marcadores das demais equipes para verificar sua situação no jogo (a equipe que mais tinha esta preocupação era a equipe Azul, formada somente por meninos que já mostram habilidade em Matemática)

Para finalizar a atividade, Jesus & Serrazina (2005) e Ponte *et al*.(2009), afrmam que esse é o momento de comunicar, discutir e refletir com toda a turma. Ao final do jogo, contamos coletivamente quantas casas foram marcadas por equipe, tendo como vencedor a Equipe Amarela. Nesse momento, soou o sinal e não foi possível fazer essa etapa, no entanto, refletimos que esse não seria um bom momento, pois as crianças estavam bastante eufóricas. Sendo assim, retornamos à escola no dia seguinte para concluir nossa atividade. Relatamos, na sequência: – Esse momento não foi possível realizar com toda a turma reunida em sala de aula. Combinamos com a professora de levar para o refeitório uma equipe por vez. Consideramos que foi ótimo, pois pudemos conversar mais tranquilamente com as crianças. Entregamos-lhes os tabuleiros pequenos para colorir e fomos dialogando. As questões foram as seguintes: o que vocês aprenderam com o jogo? *"os números", "ler os números", "contar os números", "fazer continhas de números", "fazer continhas de somar"*. Como vocês pensaram para chegar no resultado dos pontos dos dois dados? *"contamos nos dados e fomos contando nos dedos da mão"*- Como era o jogo, quem sabe falar? – "*o jogo era assim, tinha uma equipe rosa, laranja, amarelo e azul*, a*í tinha um tabuleiro, tinha um capitão do time* – Você era a capitã da sua equipe. E aí? - *Duas pessoas jogavam o dado, aí se parava no 5 e o outro no 2, a gente tinha que fazer continha de mais, a gente fazia continha assim* (ela ia mostrando os dedinhos) *e dava 7, aí a gente pegava uma fichinha e colava no tabuleiro"*.

Considerações: Esse foi um momento rico que permitiu às crianças, quando confrontadas com as situações do jogo, discutir com a sua equipe e até mesmo com as demais equipes (já que a maioria das crianças queria participar da jogada das outras equipes), testar e verificar suas hipóteses (testando os pontos obtidos e sua respectiva soma) e expressar suas conclusões aos colegas (marcando o tabuleiro com sua ficha).

Esse momento permitiu a abordagem de diferentes conceitos Matemáticos e Estatísticos, quais sejam: Comparação (ao comparar a pontuação das demais equipes), Correspondência (associaram as "bolinhas" do dado aos dedos da mão); Contagem (em média 85% das crianças precisam contar cada "marca" do dado para saber o quanto está representado ali); Sobre contagem (algumas crianças começam a contar a partir dos pontos de um dos dados e continuam a contagem para encontrar a soma dos pontos); Conceito de juntar e/ou agrupar (para saber o total de pontos a maioria das crianças precisavam representar nos dedos da mão cada ponto do dado, recitando uma sequência numérica, passando do primeiro dado para o segundo); Conceito de adição (Quatro (12%) crianças já realizam a operação de adição sem recurso dos dedos; Noções primeiras de probabilidade (distribuição de probabilidade, quando discutimos o lançamento de um dado onde cada face tem a mesma probabilidade de ocorrência que é 1/6) e a representação no tabuleiro de todos as possíveis somas para o lançamento simultâneo de dois dados).

Momento 2: As equipes jogam entre si (2h/aula)

O objetivo principal desse momento foi formar grupos menores para que as crianças pudessem participar de modo mais dinâmico e interativo. Para tal, organizamos os materiais do jogo da seguinte maneira: 1- tabuleiro, agora menor, foi colorido pelas crianças no dia em que realizamos a entrevista (mencionado anteriormente) e montado pela pesquisadora, 2- dois dados pequenos, 3- marcadores (tampinhas de refrigerante).

O jogo foi realizado no pátio da escola, assim as crianças teriam um melhor ambiente de aprendizagem.

Como já havíamos realizado as investigações coletivamente na aula anterior, optamos, para esse, momento ir aos grupos e observar como as crianças interagiam e como as estratégias de cálculo das somas eram realizadas pelas crianças. Indagamos como "pensavam" e/ou procediam para chegar à soma. Seguem alguns relatos: - "*eu conto nos dedos assim oh!* (Mostrou 3 em uma mão e 2 na outra) *o resultado é 5*". A maioria das crianças também utilizava esse procedimento. Interessante destacar um procedimento realizado por uma criança: em um lançamento de 6 pontos e 5 pontos esta criança contou assim, e foi mostrando: *"coloco 5 dedos em uma mão e um dedo na outra dá 6 e continuo contando nos dedos do pé mais 5 dedos e chego no 11"*.

Considerações: As crianças conseguiram realizar o jogo, com tranquilidade. Apesar de já terem jogado uma vez e de saberem que quando a casinha está marcada o jogador perde a vez, percebemos que as crianças ainda não se atentaram para quais números (somas) aparecem mais no tabuleiro. Elas ficam torcendo para conseguir nos dados uma soma mais alta. Nas próximas aulas investigaremos esses aspectos.

Além dos conhecimentos de conteúdo já mencionados no Momento 1, as crianças têm adquirido importantes saberes atitudinais. Nesse momento, como as crianças ficaram mais livres para realizar o jogo, percebemos, em nossas observações e na filmagem, que essa forma de trabalhar em grupo, permite que elas desenvolvam a capacidade de tomar decisões, assumir responsabilidades, de conviver aprendendo a respeitar as diferenças individuais dos participantes. Entre as crianças do grupo estabeleceu-se uma relação em que todos se ajudavam mutuamente, independente da qual equipe faziam parte. Ao final do jogo, sem que solicitássemos, as crianças recolheram todo o material e o guardaram. Esse ato denota responsabilidade por parte das mesmas e cuidado para conservação do material e do ambiente.

Momento 3: Investigando as possíveis somas (2h/aula)

Esse momento teve como objetivos: escolher o nome do jogo; discutir o significado dos números constantes no tabuleiro; determinar as possíveis somas do lançamento simultâneo dos dois dados.

Iniciamos a aula perguntando às crianças se haviam percebido que não tínhamos apresentado a elas o nome do jogo. Esse fato não havia sido atentado por elas. Propusemos, então, uma votação para escolher o nome do jogo e as sugestões foram a seguintes: "Jogo dos Números", "Jogo de Contar os Números", "Campeonato dos Números", "Jogar os dados e fazer contas", "Jogar os dados e Somar", "Jogo dos dados". O jogo foi, assim, intitulado **"Campeonato dos Números".** Atingimos assim o primeiro objetivo da aula.

Retomamos os momentos de investigação coletiva. Partimos, novamente, de uma questão desafiante. Para tal, optamos retomar ao tabuleiro, uma vez que ele se tornara familiar a elas. Perguntamos: o que significa esses números no tabuleiro? As crianças foram levantando suas

hipóteses – *"para jogar números", "para jogar dados", jogar os dados e onde que parar os números", "quando nós jogar os dados nós conta e coloca a tampinha no número que tá no negócio* (ele se refere ao tabuleiro) *que parar a conta".* Dentro da proposição da tarefa com natureza investigativa, encaminhamos para estratégias alternativas que conduzam os alunos a perceberem o significado dos números que aparecem no tabuleiro. Nesse sentido, continuamos o diálogo testando e verificando as hipóteses conforme orientam Jesus & Serrazina (2005) e Ponte *et al.*(2009). Qual o menor número que aparece no tabuleiro? *"1"* - alguma criança gritou do meio da sala – é! Onde está? Vamos procurar? – *"não tem"*, e começaram a falar ao mesmo tempo *"4, 3, 5",* no entanto, uma aluna levantou a mão e passei a palavra a ela – *"2"* – correto, parabenizamo-la; – Qual número vem depois? *"3"* – Vamos conferir no tabuleiro. Nesse instante, eles perceberam que havia uma sequência numérica e começaram a responder em uníssono recitando até o 13 – Atenção! Vamos conferir se aparece o número treze no tabuleiro? *"Não"* – Qual é o último? É quando sorteia 6 nos dois dados. É o maior número? *"12"* (alguns falaram 10 e 11*).* Atingimos assim o segundo objetivo da aula.

Apresentamos o próximo item da tarefa. Esse momento, segundo Ponte *et al.* (2009, p.25), é o instante em que o professor faz a proposta a turma. O item proposto para o terceiro objetivo da aula foi que as crianças preenchessem uma tabela contendo colunas imagéticas das faces dos 2 dados e uma coluna para a representar a soma. Em função da pequena idade das crianças (6 anos), essa foi a maneira "lúdica" que encontramos para construir a tabela de dupla entrada ou o diagrama de árvore de possibilidades para o lançamento simultâneo de dois dados. As crianças não apresentaram nenhuma dificuldade na realização (exceto para as somas 11 e 12). Continuaram com o mesmo processo de contagem que haviam feito no jogo, qual seja, correspondiam cada pontinho do dado a um dedinho de sua mão e contavam quantos tinham ao todo. Isso feito, fomos conferir os resultados e as crianças foram mostrando umas para as outras e para a pesquisadora as somas obtidas.

Considerações: O Momento 3 nos ofereceu a possibilidade de trabalhar com as crianças o exercício do voto ao escolher o nome do jogo. Esse ato, tão importante na formação de um cidadão crítico, explicita o papel da interação social na aprendizagem da Matemática e da Estatística. Ofereceu-nos, também, a possibilidade da abordagem de diferentes conceitos Estatísticos e Matemáticos, quais sejam: Correspondência (um pontinho para cada dedinho); Contagem (a cada item (36) verificou-se a soma/quantidade de pontos nas colunas imagéticas das faces dos dados); Explorar o conceito de adição. Permitiu também abordagem de diferentes conceitos Estatísticos, quais sejam: Coleta de dados (votação do nome do jogo); Tabulação dos dados da votação; Organização e apresentação dos dados em tabela (resultado da votação); Tabela de possibilidades (Representação do espaço amostral – Pares ordenados e soma dos elementos de cada par de ocorrência do lançamento simultâneo dos dois dados).

Momento 4: Investigando a Distribuição dos Dados – 2h/aula

Esse momento teve como objetivo: investigar quantas somas iguais são possíveis ao lançar simultaneamente dois dados, representar a distribuição em forma de tabela e gráfico e, por último analisar os resultados.

Iniciamos novamente uma etapa de investigação nos moldes de Jesus & Serrazina (2005) e Ponte *et al.*(2009), lançando as questões desafiantes, quais sejam: Quantas somas vocês encontraram? Realizamos a contagem coletivamente – *"1, 2, ... 36"* – Quantas somas iguais vocês encontraram?

Para testar e verificar as hipóteses, propusemos outra tarefa, por meio de uma tabela relacionando as cores às somas, (Exemplo - na coluna da soma, pinte de azul escuro todas as somas 3). As crianças deveriam pintar na folha da tarefa da aula anterior. Isso feito, fomos para etapa de apresentação dos resultados. As crianças compartilharam, mostrando umas para as outras, para a professora e para a pesquisadora a "aquarela" em que se transformara a folha da tarefa. Este exercício possibilitou enxergar melhor a classificação por categorização dos dados (somas iguais), pois, ao pintar a soma 3 de azul escuro, a criança realizará essa ação duas vezes; ao pintar a soma 4, a criança realizará três vezes essa ação e assim por diante. Essas ações fazem com que a criança amplie sua percepção de semelhança e visualize a classificação mais facilmente.

Representação da distribuição dos dados em forma de tabela: Construímos coletivamente a tabela, durante o diálogo, as crianças foram anotando na tabela de duas colunas, em que a primeira representava a categoria "Soma" e a segunda, "quantas vezes cada soma apareceu". Fomos conduzindo, associando soma e cor, qual seja: que cor pintamos o 2 – *"amarelo"* – quantas soma 2 temos? *"Uma"* e, assim por diante, até chegar na soma 12. Quando as crianças divergiam na resposta, fazíamos questionamentos sobre quem estava certo e pedíamos para verificarem e discutissem, até que chegassem à resposta correta. Logo que terminamos de construir a tabela a fala de uma criança nos deixou encantada – *"Tia* (é assim que as crianças dos anos iniciais chamam as professoras no Brasil) *vai indo e voltando"* – Como? "É *tia! vai subindo e quando chega no seis"* ... (frequência da soma 7) ... "*vai descendo de um em um"*. O que nos encantou foi o fato de uma criança de seis anos conseguir fazer uma inferência tão importante sem mesmo olhar para a construção gráfica. Coletivamente, testamos e verificamos as hipóteses, lançando alguns questionamentos, quais sejam: Qual o número total de somas que foi possível obter? *"36"* – quantas vezes apareceu a soma 2? *"1"* e assim por diante até chegar à soma 12, neste instante, fizemos associação com o tabuleiro, confirmando a frequência das somas. Qual soma mais aparece? *"7"* Por que? *"Porque tem seis"* - Vamos comparar a soma 2 com a 12? (As crianças não entenderam a pergunta). O que elas têm de igual ou diferente? *"Ah! as duas tem um só"*. Continuamos a investigação comparando as demais somas com frequências iguais. Ressalto que as crianças realizaram esta etapa sem dificuldades e se mostraram bastante interessada.

Representação dos dados em forma de gráfico: optamos por realizá-la de duas maneiras, quais sejam: **1) Construção com material manipulável** – entregamos uma lata de Coca-Cola (cada lata representava a ocorrência de uma soma) para as crianças preencherem as colunas da soma segundo a tabulação dos dados. Fizemos essa opção, por acreditarmos que a aprendizagem é significativa se for vivenciada fisicamente. Esse ato possibilita à criança associar a lata de refrigerante (algo que é prazeroso para ela) à quantidade que está sendo representada no gráfico, tornando intuitiva a construção do gráfico no papel. Este foi um momento bem animado e participativo e, ao final as crianças degustaram o refrigerante geladinho. **2) Construção no ambiente "lápis e papel":** foi entregue uma folha quadriculada para a representação das somas.

Para a discussão dos resultados, novamente levantamos e validamos hipóteses. Nesse sentindo, adotando os gráficos como referência, estabelecemos um diálogo com as crianças pautado nas seguintes questões: Quantas vezes a resultado 2 apareceu? Quantas vezes a resultado 12 apareceu? Quantas vezes a resultado 3 apareceu? E assim por diante, investigando cada uma das colunas; Quais são as colunas que tem o mesmo tamanho? Quais foram os resultados que menos apareceram? Qual foi o resultado que mais apareceu? Quantos resultados são menores

que 7? Quais são eles? Quantos resultados são maiores que 7? Quais são eles? Aqui foi possível perceber nitidamente o termo *"indo e vindo"* utilizado pela criança durante as discussões dos resultados da tabela. Com isso retomamos a discussão e mostramos no gráfico este movimento (simetria das somas), as crianças concluíram que: *"o sete divide no meio antes dele vai subindo e depois dele vai descendo do mesmo jeito"*. Intuitivamente as crianças perceberam o aspecto gráfico de uma distribuição normal.

Considerações: o momento 4 nos ofereceu possibilidade de abordar diferentes conceitos Estatísticos e Matemáticos, quais sejam: Classificação (categorizar os dados segundo somas iguais); Correspondência (uma lata de Coca-Cola para cada soma); Contagem (contar a quantidade de somas iguais), Comparação (comparar as diferentes frequências no gráfico). Permitiu também abordagem de diferentes conceitos Estatísticos, quais sejam: Tabulação dos dados e representação em forma de tabela (quantidade de pares que tem a mesma soma); Construção de gráficos (representação gráfica da frequência de cada soma); e discussão dos resultados (análise dos dados e/ou comportamento da frequência das colunas de Soma e Observação no gráfico da simetria das somas tendo como referência a frequência da soma 7).

Considerações finais

Vale destacar, que no decurso da realização das tarefas, durante as quatro semanas, a obtenção de êxito, constituiu um ponto de apoio importante para a criança ir adquirindo confiança nas suas capacidades para a Estatística e a Matemática. Ressaltamos que esta autoestima é decisiva para modelar seu comportamento futuro.

Consideramos que as atividades de natureza investigativa por nós elaboradas, o seu desenvolvimento, a interação de conceitos Estatísticos envolvidos na tarefa com os conceitos Matemáticos de correspondência, comparação, classificação, agrupamento, contagem, sobre contagem, e operação de adição, contribuem para formação do conceito de número.

Por fim, com os resultados desta pesquisa, o professor poderá compreender as dificuldades e superações das crianças do primeiro ano do ciclo de alfabetização e, possivelmente, desenvolver um trabalho mais adequado com a Matemática e a Estatística em função da construção do conceito de número e demais conceitos.

Nesse sentido, acreditamos ser necessário buscar uma visão curricular para o Ensino de Estatística e Probabilidade diferente da linear, rompendo com o determinismo que predomina nos currículos de Matemática, olhando para os aspectos da aproximação, do aleatório e da estimativa, considerando que os conceitos podem ser extraídos de problemáticas diversas pertencentes ao contexto dos envolvidos.

Referências

APA. (2009). American Psychological Association. Publication Manual. Disponível em <http://www.apastyle.org/>. Acesso em set. 2014.

Bogdan, R., & Bicklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação*. Porto: Porto.

Brasil. Ministério da Educação Secretaria de Educação Básica. (2004). *Ensino Fundamental de nove anos* – orientações gerais. Departamento de Políticas de Educação Infantil e Ensino.

Brasil, Ministério da Educação. (2001). *PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais*. Secretaria de Educação Fundamental (3ª ed.). Brasília: MEC, SEB.

Franco, Â. (1996). *O pensar e o jogo nas relações numéricas.* Belo Horizonte: Lê.

Gal, I, & Garfield, J. B. (1997). "Curricular Goals and Assessment Challenges in Statistics Education". In I. GAL, e J. B. Garfield (Orgs), *The Assessment Challenge in Statistical Education*. Voorburg: IOS Press.

Lopes, Celi A. Espasadim (2003). *O conhecimento profissional dos professores e suas relações com estatística e Probabilidade na Educação* (Tese de Doutorado). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas. Campinas.

Moreno, B. (2008). O ensino do número e do sistema de numeração na educação infantil e na 1a série. In M. Panizza et al. (Cols.), *Ensinar matemática na educação infantil e nas séries iniciais: analise e propostas* (pp. 43-76). Tradução Antônio Feltrin. Porto Alegre: Artmed.

Oliveira, E.M. (2012). *A construção do sentido numérico no 1º ano do ensino fundamental e o processo de intervenção pedagógica* (Dissertação de Mestrado). Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte.

Oliveira, P. C. (2003). *O processo de aprender noções de Probabilidade e suas relações no cotidiano das séries iniciais do Ensino Fundamental: uma história de parceria*. (Tese de Doutorado). UNICAMP – Universidade Estadual de Campinas, São Paulo.

Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2009). *Investigações Matemáticas na sala de aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

Serrazina, L., & Jesus, A. M. (2005). Actividades de natureza investigativa nos primeiros anos de escolaridade. *QUADRANTE-Revista de Investigação em Educação Matemática*, *XIV*(1). Lisboa, Portugal.

Souza, A. C. (2007). *A Educação Estatística na Infância*. (Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo.

La herramienta tecnológica como instrumento cognitivo sobre el concepto de Correlación Lineal

Gessure Abisaí **Espino** Flores
Universidad Autónoma de Nayarit
México
gessure@uan.edu.mx
Enrique **Hugues** Galindo
Universidad de Sonora
México
ehugues@mat.uson.mx
José Trinidad **Ulloa** Ibarra
Universidad Autónoma de Nayarit
México
jtulloa@uan.edu.mx

Resumen

Debido a los cambios constantes en la sociedad actual, las nuevas herramientas tecnológicas han adquirido un grado de mayor importancia en la educación matemática. En el caso particular de la educación estadística no ha sido exenta del impacto de las nuevas tecnologías, en el presente trabajo se presentan los resultados de una investigación en desarrollo docente, cuyo propósito fue estudiar el impacto que tienen las herramientas tecnológicas, particularmente el uso del GeoGebra en la clase de estadística sobre el concepto de correlación bivariada y de aquellos elementos intervinientes como la regresión lineal. Se utilizó el marco teórico de representaciones funcionales (Hitt, 2007) para el diseño de los applet y de las hojas de trabajo. Bajo las consideraciones anteriores se muestra que los alumnos hacen uso de sus representaciones pragmáticas, las cuales les permiten dar sentido a aquellos conceptos sobre los procesos estadísticos a estudiar en torno a la correlación.

Palabras clave: correlación lineal, educación estadística, GeoGebra, representaciones funcionales.

Introducción

El potencial de las nuevas tecnologías en los procesos de enseñanza y aprendizaje es uno de los retos actuales con que cuenta la educación matemática y más precisamente la educación estadística; debido a estas nuevas herramientas tecnológicas se vislumbran beneficios que ofrecen las calculadoras, computadoras, software, internet, etc., debido a que permiten un almacenamiento, procesamiento y transmisión de datos o información; no obstante tales procesos educativos no están exentos de dificultades, sobresaliendo aquellas asociadas con la naturaleza representacional (Hitt, 2003) y aunado a una complejidad conceptual sobre aquellos procesos relacionados.

Objetivos

Para el presente trabajo se tiene el objetivo de estudiar la evolución sobre el concepto de correlación bivariada, apoyada en el uso de applets para desarrollar comprensión de

ideas claves y su relación con elementos estadísticos básicos así como capacidades de comunicación y cooperación. Además se presenta una serie de consideraciones a tomar en cuenta para seleccionar una metodología apropiada, contemplando en particular la participación activa de los alumnos. Por otra parte se reportan aquellos resultados del análisis de los desempeños de los alumnos en actividades que les fueron planteadas para orientar su interacción con los applets, en donde la elaboración de representaciones tiene un papel trascendente.

Elementos Teóricos Metodológicos

La educación estadística no pretende que el alumno aprenda el uso de algoritmos para la realización de cálculos, o los procedimientos necesarios para elaborar representaciones en diversos registros; sino que a través de estos y con el apoyo de las herramientas tecnológicas pueda describir de manera apropiada el conjunto de datos sobre la génesis de la situación problema, y a su vez entender o comprender aquellos conceptos intervinientes en dicho proceso estadístico así como el proceso mismo.

Uno de los elementos estadísticos que se ha trabajado es la correlación, esta ha sido abordada desde distintas perspectivas. Autores como Fernández y Monroy (1995) plantean iniciar la conceptualización en torno a la correlación y regresión comparando gráficos con diferentes configuraciones (*Figura 1*), abarcando situaciones desde una intensa relación lineal negativa hasta una intensa relación lineal positiva y planteando la posibilidad de proporcionar un modelo apropiado que refleje la relación entre dos variables x e y: "*al estudiante se le dice que debe proponer algún tipo de expresión algebraica con base en sumas o productos y que involucre todos los datos (x, y)*" (Fernández y Monroy, 1995). En su reporte indican que, ante la presentación inicial de gráficos y pidiendo sólo una expresión algebraica que los describa lo mejor posible, no surgen ideas (espontaneas) por parte de los alumnos, quedando de manifiesto la existencia de dificultades en la interpretación de un gráfico.

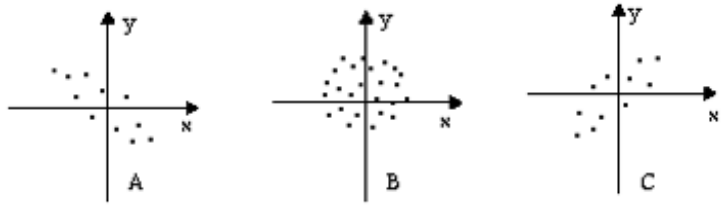


Figura 1. Gráficos presentados a alumnos para la construcción del concepto de correlación de Pearson.

Si bien para el uso de una expresión algebraica resulta innecesaria la naturaleza de los datos y el contexto en que fueron obtenidos o la graduación de los ejes como en la figura mostrada, parece que desde una perspectiva didáctica hay consideraciones por hacer a este respecto. Por ejemplo, la graduación de ejes permitiría uniformidad en ideas que pueden surgir entre los individuos o equipos formados en un grupo, facilitando una discusión colectiva sobre las expresiones resultantes, el por qué y el cómo se ha llegado a ellas.

Por otra parte, se han realizado propuestas de acercamientos intuitivos y constructivos del concepto de correlación. Por ejemplo, Holmes (2001) plantea introducir al alumno en la concepción del coeficiente de correlación de Pearson (de hecho de la

covarianza) a través de los diagramas de dispersión auxiliándose inicialmente de estrategias de conteo partiendo de una reconfiguración del plano cartesiano en cuatro nuevos sub-cuadrantes a partir de las rectas $x = \bar{x}$ e $y = \bar{y}$ (*Figura 2*), lo que permitiría inferir al estudiante sobre el sentido de la relación entre dos variables pero poniéndolo en consideración de ideas cercanas a la covarianza toda vez que tiene que considerar el signo del producto de la "distancia" de cada punto a los nuevos ejes ($x - \bar{x}$ e $y - \bar{y}$). Particularmente esta propuesta resalta la identificación de elementos intervinientes en el coeficiente de correlación y de su interpretación, como que el signo de la correlación determina la inclinación de la recta y que esto ayuda a describir la tendencia de la nube de puntos.

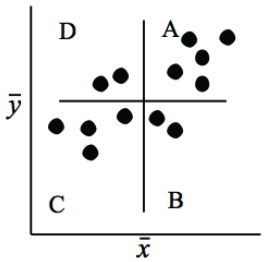


Figura 2. Propuesta de conteo de datos por Holmes.

En lo que corresponde a la determinación de una ecuación que exprese la relación entre dos variables, esta es una tarea que se presenta aún en situaciones no aleatorias: de hecho, la obtención de un modelo, por ejemplo de una recta de regresión, utiliza los mismos procedimientos que cuando se supone una relación determinística entre dos variables. En consecuencia, como lo consideran Agnelli, Konic; Peparelli, Zón y Flores (2009), una posible carga determinística en los métodos utilizados en la resolución de los problemas estadísticos constituyen un obstáculo para el acercamiento y conceptualización de sus componentes aún cuando un obstáculo sea considerado (como Brosseau, 1983, citado por Agnelli et al, 2009) como un conocimiento no una falta de conocimiento. Sucede que dicho conocimiento es adecuado a las necesidades del alumno para producir respuestas correctas en un determinado contexto, pero resulta insuficiente para abordar situaciones de contexto diferente.

Es por lo anterior que se opta por hacer uso de las herramientas tecnológicas como apoyo a la educación estadística, debido a que son capaces de mediar entre el manejo de datos y aquellas comprensiones pretendidas para la educación estadística; entre ellas se encuentra un abanico de herramientas pertinentes para los procesos de enseñanza y/o aprendizaje de la estadística, así como distintas estrategias para dichos procesos que pueden ser incorporadas en el aula de clase, esto con el propósito de potenciarlos. Pero ¿cuáles pudieran ser las consideraciones o principios a seguir para una incorporación, no digamos ya óptima, sino razonablemente pertinente?

Intentando dar respuesta a ese tipo de inquietudes, de la revisión de opiniones encontradas en la literatura, se pueden señalar algunos puntos.

- Permite mediar y posibilitar la experimentación, observación y exploración sobre conceptos e ideas abstractas y difíciles de comprender por los estudiantes, proporcionando experiencias estocásticas frecuentemente inaccesibles en la vida real, especialmente a través de la simulación. (Blanco, 2004)

- Contribuye al diseño de ambientes de aprendizaje, centrados en escenarios que permitan recrear ambientes donde el alumno sea el investigador por medio de la manipulación de estos entornos, que difícilmente pueden ser diseñados fuera de entornos informáticos.
- Favorece la visualización de conceptos matemáticos ya que manipulables tecnológicos, como los proporcionados por la simulación, llegan a tener gran influencia en el proceso de formación de conjeturas y sobre el pensamiento matemático permitiendo mostrar "instantáneamente" tantas representaciones como sean necesarias de los conceptos u objetos, lo que posibilita percibir no sólo sus componentes sino también y relaciones que eventualmente llevan a la comprensión del concepto (Duval, 2006).
- Ayuda a visualizar y comprender las relaciones que existen entre los conceptos y los objetos estadísticos, sobre todo por la capacidad dinámica con que cuentan los softwares para la enseñanza de la estadística y la capacidad de mostrar las múltiples representaciones con que cuentan. (Inzunsa, 2010)

En la actualidad y al alcance del ámbito educativo se encuentra un abanico de múltiples herramientas tecnológicas con distintos propósitos, algunos de ellos diseñados para realizar tareas con fines técnicos (como EXCEL, R o SPSS) y otros creados con fines didácticos (FATHOM, TINKERPLOTS o GEOGEBRA), existiendo incluso calculadoras avanzadas con algunas funcionalidades similares. La elección de un software estadístico debe de ser pertinente al objetivo perseguido y al rol asignado en él al uso de la herramienta tecnológica.

Respecto esto último, adelantamos:

1. Una herramienta tecnológica tendrá mayor potencialidad didáctica en la medida en que para su uso se requiera menor instrucción, permita el manejo de múltiples representaciones de datos (numérica, tabular, gráfica y simbólica), flexibilidad para modificar representaciones, vinculación dinámica entre ellas, facilidades para la simulación de datos, brinde posibilidades para la interacción con el alumno y entre alumnos, y realmente esté a su disposición y alcance, entre otras.
2. El uso didáctico de herramientas tecnológicas estará condicionado por las necesidades o alcances propuestos en una intervención didáctica en que resulte pertinente, como pudiera ser para apoyar: la construcción activa del conocimiento por los alumnos al "hacer" y "ver" estadísticas, oportunidades de que los alumnos reflexionen sobre los fenómenos observados, la transición cognitiva en el desarrollo de conceptos estadísticos, la renovación de la educación y el currículo estadístico apuntalado en un fuerte interrelación equilibrada entre contenido, pedagogía y tecnología.

La consideración base para el presente trabajo fue la elección apropiada de una metodología que ceda un aprendizaje significativo de la estadística a través de la resolución de problemas, organizando alrededor de esta el trabajo grupal y reflexiones individuales, la conformación de pequeños equipos y la presentación de argumentos grupalmente aceptados, jugando esto último un papel clave para la interacción entre el alumno y el profesor a la manera que se propone en ACODESA, siglas en francés de "Aprendizaje

Colaborativo, Debate Científico y Auto-reflexión" (Hitt y Cortés, 2009), aunque con alguna adaptación menor (de hecho se contemplan las cinco fases de la metodología aunque en algunas actividades se repiten dos de ellas en dos ocasiones).

Presentación de la propuesta y sus resultados

Guiados por las consideraciones presentadas se diseño una propuesta didáctica, la cual consta de cuatro actividades organizadas siguiendo la metodología ACODESA, contándose para cada actividad con hojas de trabajo en papel e incorporando el uso del GeoGebra a través de applets diseñados ex profeso.

Las actividades didácticas fueron planeadas para contribuir el desarrollo docente en la educación estadística a nivel superior, específicamente en carreas de ciencias sociales que dentro de sus programas de estudios abordan conceptos como la correlación lineal, regresión lineal y aquellos conceptos involucrados pero no un amplio bagaje matemático. Las actividades se exploraron con estudiantes de psicología, aunque aquí sólo se mostrará información breve de lo ocurrido con la primera actividad que corresponde a un acercamiento de manera más intuitiva al concepto de regresión lineal en lo fundamental aunque incipientemente al de correlación, lo que se consideró como indispensable para abordar el concepto de correlación bivariada en actividades subsecuentes.

Actividad sobre "El camino y las localidades".

La actividad tiene la finalidad de permitir un acercamiento al concepto de regresión lineal y aquellos conceptos involucrados, esto por medio de una perspectiva intuitiva, se consideró necesario que el alumno aborde el tema como preámbulo a la correlación lineal. La actividad es presentada a través de una serie de preguntas en base a una problemática inicial, la cual se expone enseguida:

"En un municipio existen doce localidades ubicadas como se muestra en la Imagen 1 (representadas por puntos) y se planea comunicarlas a través de un camino que además las una a dos carreteras federales que las delimitan (las rectas punteadas en la imagen). Si bien se ha decidido que el camino siga la dirección ***Suroeste (SO)*** *a* ***Noreste (NE)*** *por la distribución de las localidades, los diferentes comisarios plantean que el camino pase por su comunidad pero esto no es del todo posible pues también habría que optimizar costos y bajo estas condiciones aún no han podido llegar a un acuerdo."*

A continuación se presentan algunas de las preguntas que se consideran claves para el desarrollo del concepto de regresión lineal, así como las respuestas, estrategias y usos de la tecnología por parte de los alumnos para la presente actividad.

Pregunta 1. Tratando de ayudar a estas comunidades, ¿qué les propondrías como un camino más adecuado?

A los alumnos individualmente se les pedía bosquejar en hoja de trabajo el camino con que responderían la pregunta y que le llamasen C1. Posteriormente, se les solicita revisar si su camino puede ser mejorado, en cuyo caso bosquejen y le llamen C2 y C3, sucesivamente, siendo C2 una producción individual mientras que C3 una de equipo.

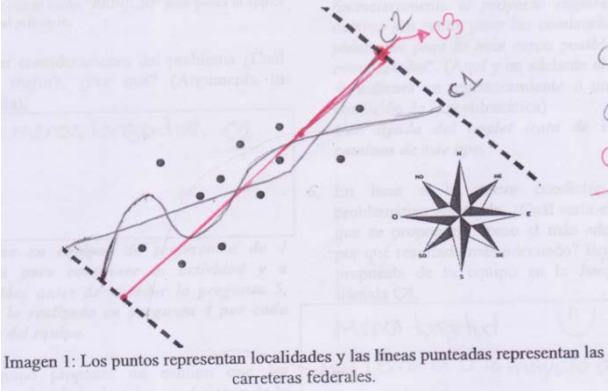


Figura 3. Muestra de una hoja de trabajo en que alumnos han plasmado los caminos C1, C2 y C3, respectivamente.

La *Figura 3* muestra los distintos caminos que realizó un alumno, él ha considerado la dirección solicitada para la realización del camino, además de que en todos los caminos propuestos "dividen" las doce localidades (puntos) de manera equitativa por encima y por debajo del camino. Adicionalmente se observa (*Figura 3*) que los caminos de C1 a C3, van perdiendo "curvatura" (dejando de ser una línea poligonal), pareciendo que se considera por parte de los alumnos que un mejor camino es aquel que tiene menos puntos, resultando a la vez que la longitud del camino es cada vez menor (*Figuras 4 y 5*).

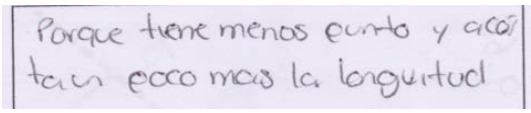


Figura 4. Argumento alumno.

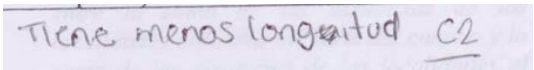


Figura 5. Argumento complementario.

Las representaciones espontáneas surgidas en las primeras preguntas de la actividad, son exploradas a través del applet SC_1.ggb (*Figura 6*), ya en equipos. Se probaron diferentes caminos con distintas configuraciones, respecto al número de puntos a elegir definiendo segmentos para formar caminos poligonales, proporcionando el applet la longitud total del camino, siendo tales caminos fueron representaciones aproximadas a las realizadas en papel y lápiz.

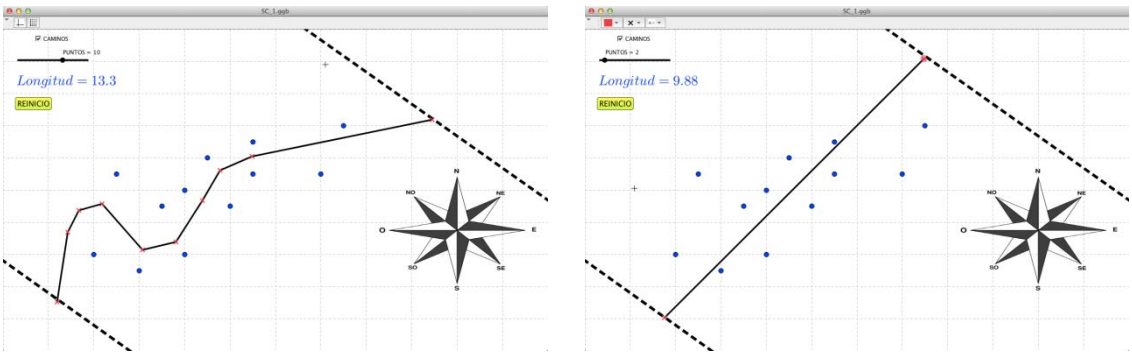


Figura 6. Pantallas del ambiente gráfico para introducir al alumno en el concepto de regresión lineal.

En base al trabajo realizado en equipo conjuntamente con las distintas representaciones realizadas en el applet (como se ve en la *Figura 6*) se acuerda elaborar un camino recto, el cual tiene una longitud menor a las propuestas que se realizaron en forma

individual. Uno de los argumentos suscitados al interior del equipo fue la cercanía del camino C3 (*Figura 7*) a los puntos y, las distancias de estos a la recta. Una vez acordado el camino más apropiado hasta el momento se realizaron las anotaciones de los caminos C1, C2, C3, sobre las longitudes mostradas por el applet (*Figura 8*).

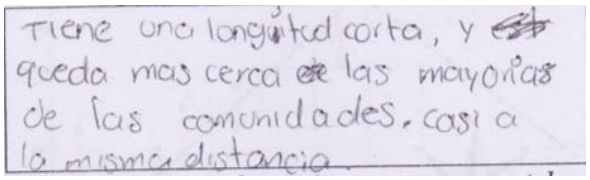


Figura 7. argumentación sobre la elección de un camino recto

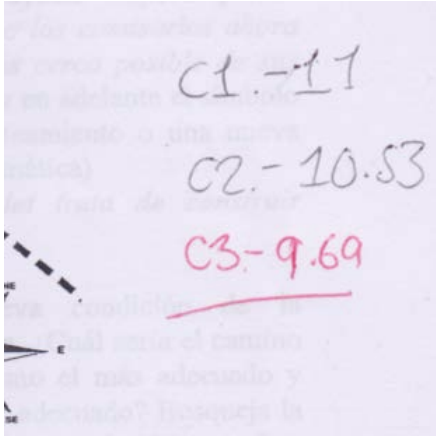


Figura 8. longitudes proporcionadas por el applet

El argumento principal por parte de los alumnos al trazar un camino bajo las consideraciones iniciales, fue el costo que implicaba la construcción de este así como el tiempo de construcción. El condición en donde el camino pase lo más próximo a las localidades se deja de lado, otorgando desde un inicio mayor relevancia a los costos y más tratándose de una obra pública.

De hecho, junto a nuevas preguntas se van introduciendo nuevas condiciones al problema, de este modo previo a la pregunta 6 se plantea que: "*Ante las limitaciones presupuestales… la instancia gubernamental… (*financiadora del*)… proyecto sugiere que el camino sea recto…*", y después de la pregunta 7: "*Los comisarios de las localidades… sugieren que la diferencia entre la suma de las distancias de las localidades ubicadas al* ***Norte*** *del camino y la suma de las distancias de las localidades al* ***Sur*** *del camino debe de dar cero o un valor muy próximo a éste; … para un acuerdo justo*", que problematizan al alumno en nuevos aspectos de la situación.

Pregunta 8. ¿Cuáles son las distancias del Norte y las del Sur?, acuerda las medidas con tu equipo y anótalas en azul y rojo respectivamente *en la* ***Tabla 1.***

Al abordar esta pregunta, los distintos equipos acordaron medir las distancias de la comunidad (punto) al camino (recta) propuesto a través de segmentos verticales, esto debido a que facilita la toma de medidas sobre el gráfico conteniendo la hoja de trabajo (*Figura 9*).

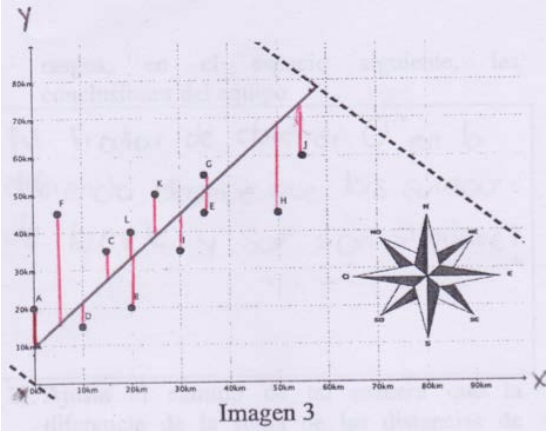


Figura 9. realización de segmentos para medir la longitud del punto a la recta.

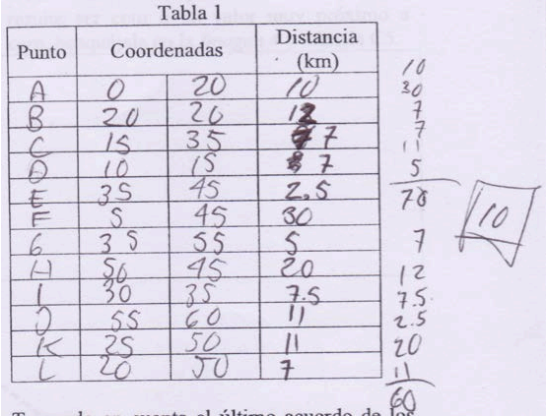


Tabla 1

Punto	Coordenadas		Distancia (km)
A	0	20	10
B	20	26	12
C	15	35	7
D	10	15	7
E	35	45	2.5
F	5	45	30
G	35	55	5
H	50	45	20
I	30	35	7.5
J	55	60	11
K	25	50	11
L	20	50	7

Figura 10. medidas correspondientes a las longitudes tomadas de los segmentos.

Debido a que las coordenadas eran múltiplos de 5 km, se les facilito identificarlas, no así los puntos en el camino pero los equipos realizaron mediciones aproximadas (*Figura 10*). Por la condición de que el camino fuese justo conforme al criterio distancias norte – sur, después de realizar las operaciones necesarias y encontrar diferencias que consideraron grandes llegaron a la conclusión de la propuesta del equipo aún necesitaba ajustes (*Figura 10*).

Ante el cuestionamiento de si ajustarían su propuesta (pregunta 9), basándose en el análisis de los números en tabla, algunos equipos decidieron que el camino ("*diagonal*") deberían de hacerlo "*hacia abajo*" (rotarlo), lo que se observa en diagramas realizados (*Figura 11*), hipótesis que bien pudieron haber corroborado utilizando el applet SC_2.ggb que brinda esa oportunidad (*Figura 12*).

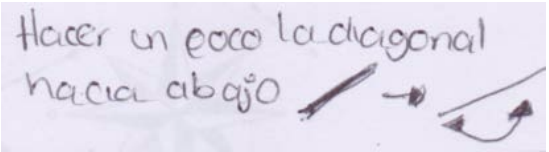


Figura 11. utilización de diagramas para exponer ideas concretas

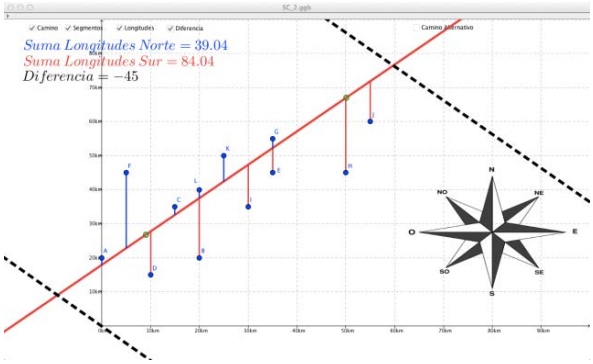


Figura 12. pantalla del applet SC_2.ggb

Pregunta 13. Recurriendo de nueva cuenta al applet, activa la casilla "*Camino Alternativo*" e intenta probar tu conjetura del punto anterior. ¿A qué conclusión se puede llegar con estas nuevas exploraciones? ¿Cuál(es) es(son) la(s) propiedad(es) clave(s) para tal conclusión? ¿Existe algún punto en especial?, de ser así anótalo en la *Tabla 2*.

Tras las transformaciones que realizaron en el applet SC_2.ggb observaron que la recta (camino) podía variar su longitud, sin embargo la suma de las longitudes de los puntos (localidades) a la recta se mantenía muy próxima (*Figura 13*).

Después de diferentes transformaciones con la dirección Suroeste – Noreste sobre la recta alternativa proporcionada por al applet, pudieron observar que existía un punto en común, aproximadamente con coordenadas (20, 30), dándose cuenta que contener este punto es una característica para que las rectas tuvieran una diferencia de distancias a localidades próxima a cero, siendo en realidad sus coordenadas las medias de los datos.

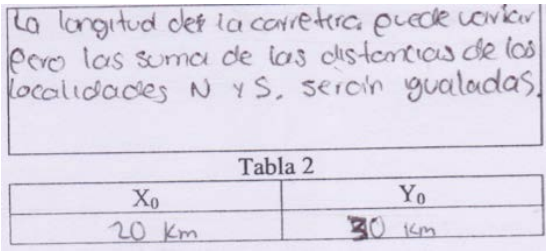

La longitud de la carretera puede variar pero las suma de las distancias de las localidades N y S, serán igualadas.

Tabla 2

X_0	Y_0
20 Km	30 km

Figura 13. coordenadas del punto (X_0, Y_0).

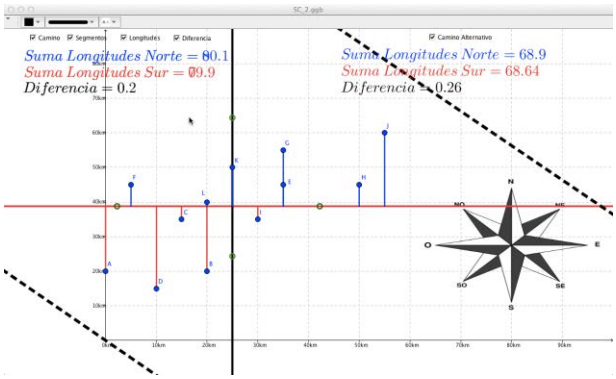


Figura 14. rectas ($x = \bar{\bar{x}}$ e $y = \bar{\bar{y}}$) perpendiculares a los ejes.

La realización del debate a posteriori se dio una vez expuestos los distintos resultados de varios equipos seleccionados por el moderador (profesor), a manera de conclusión, surgieron ideas como: buscar que la diferencia entre la suma de las localidades en la parte norte debe de ser igual a la de la parte sur, similar al equilibrio en una balanza debido a que se quería que la suma fuera igual en ambas partes, y la recta resultante no era única pues se presenta una especie de mecanismo de compensación de errores siendo unos positivos (Norte) y otros negativos (Sur) al restar las partes una de ellas debería de tener valores negativos.

Dado que no podía haber distancias negativas, en el debate, surge la propuesta de elevar al cuadrado las diferencias entre la ordenada de los puntos representando a las localidades y el de aquel punto sobre la recta tomado para formar el segmento que luego se mide para calcular la distancia de los puntos a la recta, como criterio para medir su cercanía, consensándose que la recta para el mejor camino debía optimizar la suma resultante de cuadrados. En esta percepción, sin embargo, no consideraron el caso en que las rectas fueran perpendiculares a los ejes (*Figura 14*), sino sólo arreglos en los que se empleaban direcciones Suroeste – Noreste como inicialmente les fue solicitado.

Pregunta 15. ¿Qué pasa con la Suma de Cuadrados cuando la recta se aleja de la masa de puntos?

Ya empleando el applet SC_3.ggb, que permite visualizar la formación de cuadrados sobre segmentos proporcionando errores para una recta propuesta como camino, la suma de cuadrados (áreas) y la ecuación de la recta. A través de transformaciones permitidas se pudo observar que la suma de cuadrados aumentaba cuando la recta se posicionaba alejada del punto especial identificado (realmente el punto de intersección de las rectas $x = \bar{x}$ e $y = \bar{y}$) o cuando era rotada alejándole de la orientación Sur-Norte de los puntos (*Figura 15*), habiendo de disminuirla cuando esta se ubicaba al interior de la masa o nube de puntos (*Figura 16*).

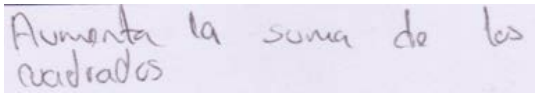


Figura 15. conclusión sobre la traslación de la recta y los cuadrados

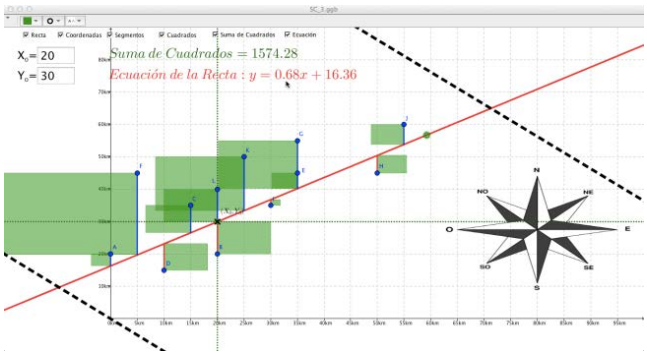


Figura 16. vista gráfica de la suma de cuadrados.

Conclusiones

No es difícil aceptar que un gran número de estudiantes en carreras de ciencias sociales presentan resistencia a manipular objetos matemáticos sin excepción de los estadísticos, de hecho tienen dificultades para realizar algunas de las tareas implicadas en la actividad didáctica descrita. No obstante el ambiente que se generó mediante el uso del GeoGebra (sin una instrucción previa) y las condiciones de la actividad, aunado a la estrategia para la interacción entre pares captó el interés y permitió deliberar hasta un punto cercano a la reflexión sobre la conceptualización de la regresión lineal y de aquellos conceptos involucrados, algunos útiles también para un acercamiento a la correlación.

Particularmente, lo mostrado en la *Figura 16* lleva en sí misma la idea de una correlación positiva de alta intensidad en base a la ubicación de puntos en los cuadrantes resultantes de visualizar a las rectas auxiliares ($x = \bar{x}$ e $y = \bar{y}$) como ejes coordenados alternativos (Holmes, 2001), pero además está su relación con la recta propuesta como camino, particularmente con su ecuación, y la oportunidad de conceptualizar la acción de minimizar a la suma de cuadrados como criterio para la búsqueda del camino óptimo requerido.

El uso del GeoGebra permitió un análisis más profundo sobre la situación planteada y sobre aquellos elementos que fueron surgiendo como necesarios, debido a las características con que cuenta el software como el ocultar las herramientas que pueden ser un posible distractor para el estudiante durante el desarrollo de la actividad didáctica y, la metodología empleada fue idónea para la actividad realizada. En cierta medida el uso de la tecnología permitió una visión más amplia sobre las situaciones estadísticas, esto gracias a las distintas representaciones que proporciona el software en una misma pantalla.

El profesor requiere ser el "experto" en el aula, no sólo de aquellos conceptos estadísticos trabajados durante la actividad, sino también sobre el uso de los applet que se utilizan en la actividad didáctica, lo cual va desde el uso básico del software como abrir, cerrar, guardar, mover deslizadores, entre otros; ya que ante cualquier fallo los alumnos recurrirán a él por una solución sobre la herramienta tecnológica.

Referencias y bibliografía

Agnelli, H., Konic, P., Peparelli, S., Zón, N., & Flores, P. (2009). La función lineal obstáculo didáctico para la enseñanza de la regresión lineal. *UNIÓN Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *17*, 52-61

Blanco Blanco, Á. (2004). Enseñar y aprender Estadística en las titulaciones universitarias de Ciencias Sociales: apuntes sobre el problema desde una perspectiva psicológica. En J. C. Torre, & E.Gil (Eds. lit.), *Libro homenaje a Pedro Morales Vallejo, S. J.* (pp. 143-189).

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME*, *1*(1), 143-168

Fernández, F., & Monroy, O. L. (1995). Experiencias en el manejo del coeficiente de correlación de Pearson en un curso de Estadística. En P. Gómez, C. Carulla, M. Castro, F. Fernández, C. Gómez, V. Mesa, P. Perry, & P. Valero (Eds.), *Aportes de "Una empresa docente" a la IX CIAEM.* (pp. 107-117). Bogotá, Colombia.

Hitt, F. (2003). Una Reflexión sobre la construcción de Conceptos Matemáticos en ambientes con Tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, *X*(2), 213-223.

Hitt, F. (2007). Utilisation de Calculatrices symboliques dans le cadre d´une méthode d´apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d´auto-réflexion. En M. Baron, D. Guin, & L. Trouche (Eds.), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l´apprentissage: conception et usages, regards croisés* (Coll. Systèmes de formation et d´enseignement) (pp. 1-25).

Hitt, F., & Cortés, J. (2009). Planificación de actividades en un curso sobre la adquisición de competencias en la modelación matemática y uso de calculadora con posibilidades gráficas. *Revista Digital Matemática, Educación e Internet*, *10*(1), 1-30.

Holmes, P. (2001). Correlation: From Picture to Formula. *Teaching Statistics*, *23*(3), 67-71.

Inzunsa, C., S. (2010). Entornos virtuales de aprendizaje. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *15*(45), 423-452. abril-julio.

La toma de decisiones en una situación de riesgo

José Antonio **Orta** Amaro
Escuela Nacional para Maestras de Jardines de Niños
México
jortaa@gmail.com
Ernesto Alonso **Sánchez** Sánchez
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional
México
esanchez0155@gmail.com

Resumen

En este informe de investigación, se presentan las justificaciones de alumnos de tercer año de educación secundaria a un problema de comparación de conjuntos de datos, enmarcado en una situación de tratamientos médicos. Los argumentos de los estudiantes permiten conocer algunas de sus ideas sobre la toma de decisiones en un escenario que implica riesgo, asociado a la variabilidad de los datos. Para el análisis de las respuestas se utilizó la taxonomía SOLO, la cual permite jerarquizar las respuestas de los alumnos en diferentes niveles de complejidad estructural. Los resultados indican que la mayoría de los estudiantes no hacen comparaciones combinando ideas de centro y dispersión. No obstante, algunos asocian adecuadamente la variabilidad con el riesgo; esto sugiere que se puede lograr que los estudiantes de este nivel consigan una mejor comprensión de la variabilidad en situaciones de riesgo realizando más actividades, en el aula, como la presentada aquí.

Palabras clave: Riesgo, variabilidad, estudiantes de secundaria, toma de decisiones, comparaciones de conjuntos de datos, SOLO.

Introducción

Muchos autores han destacado la importancia de la variabilidad estadística (Moore, 1990; Watson, Kelly, Callingham y Shaughnessy, 2003; Wild y Pfannkuch, 1999). La variabilidad está relacionada con varias ideas estadísticas fundamentales: representación, centros, distribución, inferencia. Garfield y Ben-Zvi (2008) observan que "la comprensión de las ideas de dispersión o variación en los datos es una componente clave en la comprensión del concepto de distribución y es esencial para hacer inferencias estadísticas" (p. 203).Aunque la variabilidad es una característica fundamental de un conjunto de datos, su uso para hacer inferencias o tomar decisiones (esto es su interpretación) no es del todo claro. El objetivo principal de este trabajo es mostrar los argumentos de los estudiantes de educación secundaria (14 a 15 años), cuando resuelven y analizan datos en situaciones de riesgo, y aproximarse, a la manera en que interpretan la variabilidad, cuando esta se enmarca en una situación como la mencionada. Las situaciones de riesgo, en una de sus vertientes se basan, entre otros análisis, en probabilidades, frecuencias o estadísticos que permiten cuantificarlo. En el nivel escolar en el que se llevó a cabo esta investigación, los estudiantes han estudiado medidas de centro y

dispersión, en particular, la media aritmética, el rango y la desviación media (SEP, 2011). Con base en lo anterior se planificaron y adaptaron problemas, que pudieran ser resueltos por los alumnos y así conocer la manera en que asocian la variabilidad a una situación de toma de decisiones (de riesgo).En los párrafos siguientes se presentará esta investigación.

Enfoque teórico

La interpretación de la dispersión depende de la situación de la cual provienen los datos. Una de ellas es en términos de riesgo: Cuando la incertidumbre presente en el resultado de un proceso implica alguna amenaza en la bondad de un resultado, entonces se llama riesgo. La idea de riesgo puede definirse como algo que puede pasar o no, además de presentarse en escenarios en los que la gente valora ciertas cosas y condiciones antes de tomar una decisión en presencia de incertidumbre. Aven y Renn (2010) se refieren a esta idea como valor esperado, una distribución de probabilidad, como incertidumbre y como un evento. Para Fischhoff y Kadvany (2011), el riesgo supone amenazas a resultados en situaciones que valoramos. Por ello, proponen que definir riesgo significa especificar esos resultados de tal manera que sea posible hacer elecciones sobre ellos, además de integrar situaciones de valor a diferentes niveles. Las definiciones anteriores, pueden dividirse en dos categorías: 1) el riesgo se expresa por medio de probabilidades y valores esperados y 2) el riesgo se expresa a través de eventos/consecuencias e incertidumbre (Aven y Renn, 2010). Kahneman y Tversky (2000) señalan que el ejemplo paradigmático de la decisión con riesgo, es la aceptación de un juego con resultados en dinero y probabilidades específicas. Además de las situaciones monetarias, también se han llevado a cabo estudios en otros escenarios. Eraker y Sox (1981), caracterizaron las actitudes de pacientes al tomar una decisión sobre resultados terapéuticos inciertos. Estos autores señalan dos actitudes en la toma de decisiones: la propensión y la aversión al riesgo. Una persona es *adversa al riesgo* cuando prefiere una situación sin riesgo, sobre una incierta (o arriesgada) de igual o mayor valor esperado. Una persona propensa el riesgo prefiere una situación incierta sobre una situación cierta de igual o mayor valor esperado. Los problemas de Kahneman y Tversky (2000), así como los de Eraker y Sox (1981) implican los conceptos de probabilidad y valor esperado. En nuestra propuesta consideramos que existe una posible conexión entre los problemas paradigmáticos de decisión bajo riesgo y algunos propuestos para el estudio del razonamiento de los estudiantes sobre el concepto de variabilidad (por ejemplo el de Shaughnessy, 2006). Los problemas paradigmáticos de riesgo son sobre tomar una decisión en la cuál es necesario calcular y comparar las esperanzas matemáticas. Esto sugiere formular problemas en los cuales una lista de datos es proporcionada, de tal manera que la esperanza debe ser calculada a partir de ella, por los estudiantes. Otra característica de estos problemas es que el riesgo es medido con una probabilidad, pero en el caso de conjuntos de datos esta no corresponde a un modelo probabilístico conocido (como es el caso del propuesto en este artículo), el riesgo debe asociarse a la variabilidad en los datos, a mayor rango de estos, el riesgo se incrementa.

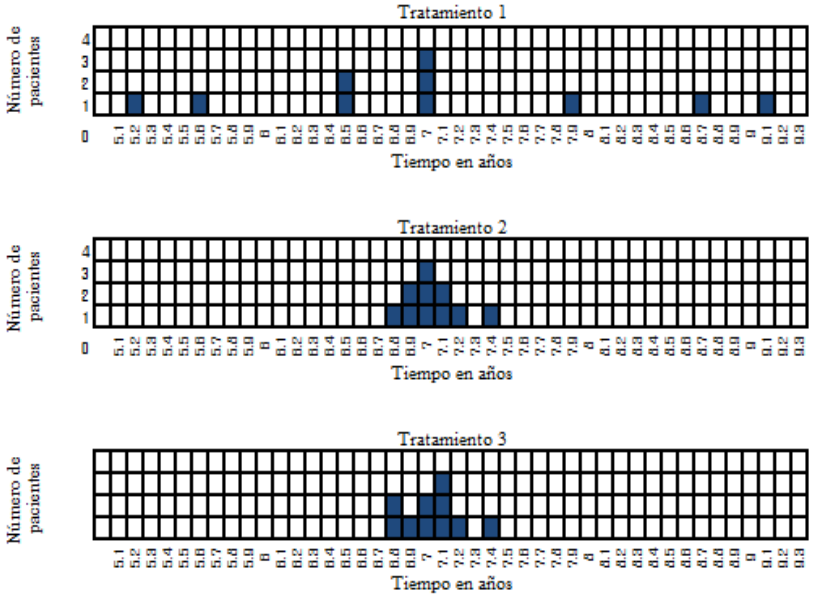
Metodología

Este es un estudio cualitativo de carácter exploratorio sobre la percepción e interpretación espontánea de los estudiantes frente a problemas en situaciones de riesgo. El contexto corresponde con un tratamiento médico. Participaron estudiantes de educación secundaria, un profesor y los autores. Los estudiantes estaban distribuidos en cuatro grupos que cursaban el tercer año de secundaria (14-15 años) en una escuela privada de la Ciudad de México. El profesor tenía 3 años de experiencia y realizó una maestría en educación

matemática. Se diseñaron y realizaron dos actividades de enseñanza. Los estudiantes resolvieron un cuestionario de tres problemas que se administraron antes y después de las actividades de enseñanza. En esta comunicación se informa de los resultados de uno de los problemas del cuestionario (Figura 1).

Considera que debes aconsejar a una persona que padece una enfermedad grave, incurable y mortal, pero que es tratable con medicamentos que pueden extender la vida por varios años más. Es posible elegir entre tres tratamientos. Las personas tienen diferentes reacciones a las medicinas, para algunas tienen el resultado previsto, mientras que para otras pueden ser más benéficas o más prejudiciales. En las siguientes listas se muestran los años que han vivido varios pacientes que se han tratado con una de las opciones mencionadas; cada dato de las listas corresponde al tiempo que ha sobrevivido un paciente con el respectivo tratamiento. Después se muestran las gráficas correspondientes a los tratamientos.

Tiempo en años (Tratamiento 1)	Tiempo en años (Tratamiento 2)	Tiempo en años (Tratamiento 3)
5.2	6.8	6.8
5.6	6.9	6.8
6.5	6.9	6.9
6.5	7.0	7.0
7.0	7.0	7.0
7.0	7.0	7.1
7.0	7.1	7.1
7.8	7.1	7.1
8.7	7.2	7.2
9.1	7.4	7.4



¿Qué tipo de tratamiento preferirías (1, 2 ó 3)? ¿Por qué?

Figura 1. Problema de los tratamientos médicos resuelto por los estudiantes.

El problema es de comparación de conjuntos de datos, y se cuestiona a los estudiantes qué tipo de tratamiento preferirían y porqué. Hay que notar que la media aritmética y el número de elementos es la misma en los tres conjuntos de datos y la dispersión es distinta. Esto con el objetivo de enfocar la atención de los estudiantes en esta última característica. Las actividades de enseñanza tuvieron como eje dos problemas uno en contexto de medición y otro en contexto de juego; el segundo contexto implicaba riesgo. Los problemas también fueron de

comparación de conjuntos de datos y se condujo a los estudiantes a considerar el rango y la desviación media. Estas actividades se llevaron a cabo entre las dos aplicaciones del cuestionario (previa y posterior).

Procedimientos de análisis

Para categorizar las respuestas de los estudiantes se utilizó la taxonomía SOLO (Structure of the Observed Learning Outcome) de Biggs y Collis (1991,1982), esta considera cuatro niveles jerárquicos organizados de acuerdo con la estructura de las respuestas que se estén analizando: 1) nivel pre-estructural, la estructura de la respuesta no muestra que se hallan considerado aspectos relevantes del problema en cuestión. 2) Nivel uni-estructural, la estructura de las respuestas muestran que ha sido considerado un aspecto relevante del problema propuesto. 3) Nivel multi-estructural, la estructura de las respuestas muestran que han sido considerados dos o más aspectos relevantes del problema propuesto, pero sin relacionarlos convenientemente. 4) Nivel relacional, la estructura de las respuestas muestran que han sido considerados dos o más aspectos relevantes de la tarea, y estos han sido relacionados de manera conveniente. A continuación se muestra la jerarquía propuesta para analizar las respuestas de los alumnos que participaron en esta investigación (Tabla 1).

Tabla 1
Jerarquía para analizar las respuestas al problema de tratamientos médicos.

Nivel pre-estructural: Las respuestas en este nivel eligen un tratamiento y su justificación tiene alguna de las siguientes características: a) no lo justifican sino simplemente afirman que con él se vive más b) utilizan una idea ajena a los datos c) opinan que cualquiera de los tres es igual sin argumentar d) se refieren a la dispersión pero sin indicar cómo se relaciona con la bondad del tratamiento.
Nivel uni-estructural: Las respuestas en este nivel eligen un tratamiento y la justificación se basa en la comparación de uno, y sólo uno, de los siguientes parámetros de los conjuntos de datos a) la moda, b) el máximo, c) el mínimo.
Nivel multi-estructural: Las respuestas en este nivel eligen un tratamiento y en la justificación consideran de una forma u otra el rango de ambos conjuntos o la suma de todos los datos.
Nivel relacional Las respuestas de este nivel consideran centro, rango y ponderan el riesgo

Resultados

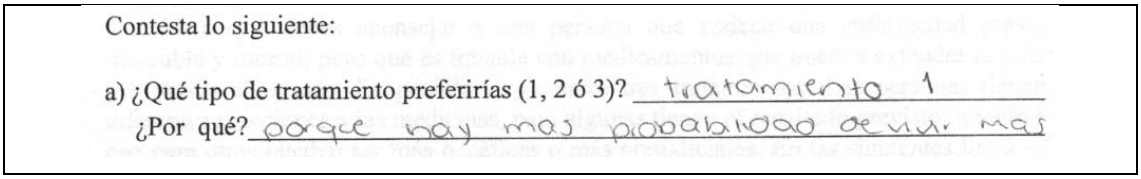
Para conocer las ideas de los estudiantes, se les plantearon las preguntas: ¿qué tipo de tratamiento preferirías (1, 2 ó 3)? ¿Por qué? En la Tabla 2 se expone el conteo de las justificaciones después de ser categorizadas con la jerarquía SOLO propuesta. Es posible observar en la tabla una mejoría en cuanto al desempeño de los alumnos después de las sesiones de enseñanza, ya que hubo un descenso en las respuestas pre-estructurales y uni-estructurales, así como un aumento en las respuestas multi-estructurales y relacionales.

Tabla 2
Conteo de las respuestas por nivel

Nivel	Cuestionario previo	Cuestionario posterior
Pre-estructural	56 (64 %)	47 (61 %)
Uni-estructural	21 (24 %)	12 (15 %)
Multi-estructural	10 (11 %)	16 (21 %)
Relacional		2 (3%)
Total	87 (100%)	77 (100%)

A continuación se muestran ejemplos de las justificaciones dadas por los estudiantes en los diferentes niveles en que fueron agrupadas.

Nivel pre-estructural. En las respuestas clasificadas en este nivel, las justificaciones se basaron en alguna de las características mencionadas en la Tabla 1. Por ejemplo, en la Figura 2, se observa que el tratamiento elegido fue el número 1 y la justificación: "porque hay más probabilidad de vivir más". Como se mencionó antes, la razón por la cual se propone que se vive más no está descrita en la respuesta. Quizás la atención se dirige al valor máximo de la distribución (9.1). En otras respuestas, se eligió el tratamiento 3 y la justificación fue la misma, vivir más, pero sin explicar por qué. Es posible que en estos casos los estudiantes enfocaran su atención al valor modal (7.1), sin embargo, los estudiantes no lo aclaraban en su respuesta.


Contesta lo siguiente:

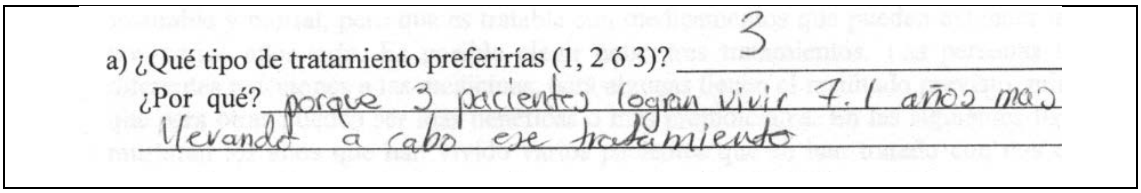
a) ¿Qué tipo de tratamiento preferirías (1, 2 ó 3)? tratamiento 1

¿Por qué? porque hay mas probabilidad de vivir mas

Figura 2. Respuesta pre-estructural donde se comenta que se puede vivir más.

En otro tipo de respuestas pre-estructurales se justificó la elección, posiblemente, con base en la cardinalidad de los conjuntos de datos. Cuando las justificaciones quizás se basan en el número de elementos de los conjuntos, la respuesta al tratamiento elegido es cualquiera de los tres, y un ejemplo de estas justificaciones fue: "tienen las mismas posibilidades las tres tienen mismos datos".

Nivel uni-estructural. Las respuestas clasificadas en este nivel muestran que la justificación de la elección de uno de los tratamientos, se basó en el valor modal de una de los conjuntos de datos o en los valores extremos de estos.


a) ¿Qué tipo de tratamiento preferirías (1, 2 ó 3)? 3

¿Por qué? porque 3 pacientes logran vivir 7.1 años mas llevando a cabo ese tratamiento

Figura 3. Respuesta uni-estructural enfocada en el valor modal.

En el ejemplo de la Figura 3, se observa que el tratamiento elegido fue el número 3 y la justificación: "porque 3 pacientes logran vivir 7.1 años más llevando a cabo ese tratamiento". En la explicación, se menciona el valor modal de esa distribución (7.1). En la literatura relacionada con la variabilidad se ha señalado que los valores modales son referencias representativas para los estudiantes, sin embargo, la atención sólo se enfoca en esa columna y se ignoran los otros valores o características como la variación del conjunto de datos (Bakker y

Gravemeijer, 2004). En otras respuestas de nivel uni-estructural, se mencionó uno de los valores extremos del conjunto de datos, para justificar la elección. Un ejemplo de estas justificaciones fue: "porque vives años buenos años y hay mucha probabilidad de que te salga 6.8 para arriba". Es claro que el aspecto que se consideró como referencia para resolver el problema, fue el valor mínimo del conjunto de datos correspondiente con el tratamiento número 2.

Nivel multi-estructural. En este nivel las respuestas a la elección de un tratamiento, generalmente, se basaron en ambos valores extremos de los conjuntos de datos para hacer una elección. En el ejemplo de la Figura 4, la justificación fue: "Porque tal vez no viva 09 años más pero así tengo asegurados de 6.8 a 7.4". El tratamiento elegido es el 3 y además de que ambos extremos fueron considerados para tomar la decisión, se puede percibir aversión al riesgo, un periodo de vida sin tanta variación.

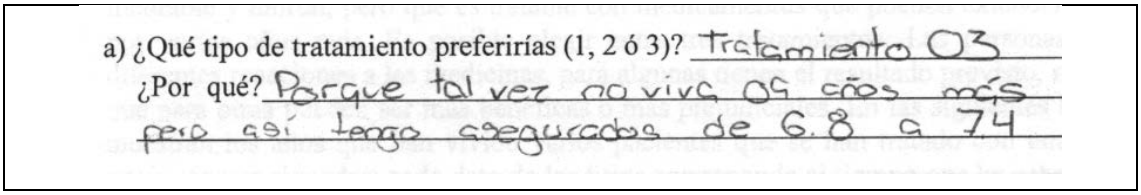
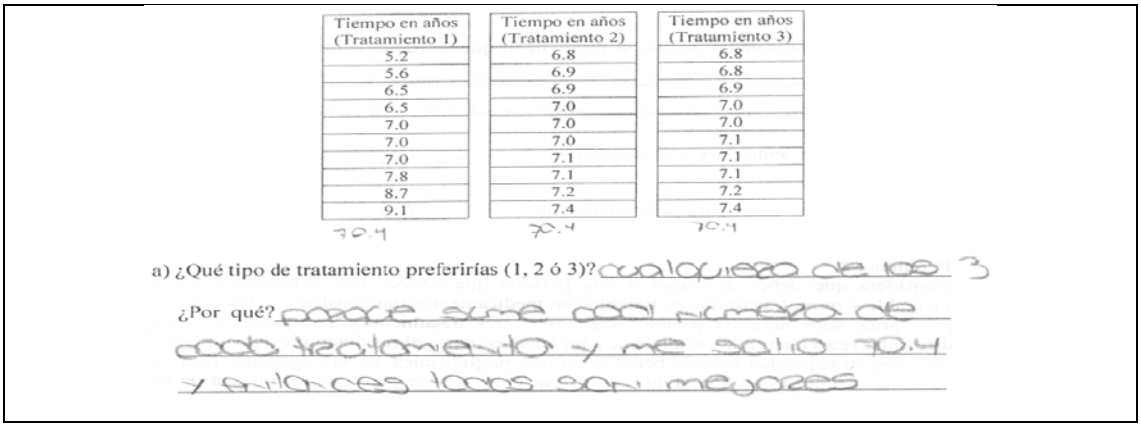

a) ¿Qué tipo de tratamiento preferirías (1, 2 ó 3)? Tratamiento 03
¿Por qué? Porque tal vez no viva 09 años más pero así tengo asegurados de 6.8 a 7.4

Figura 4. Respuesta multi-estructural basada en ambos datos extremos.

En otras respuestas de tipo multi-estructural fueron sumados los datos de cada uno de los tratamientos y se obtuvo el mismo resultado, por lo que parte de las justificación era que cualquier tratamiento era viable, Figura 5.

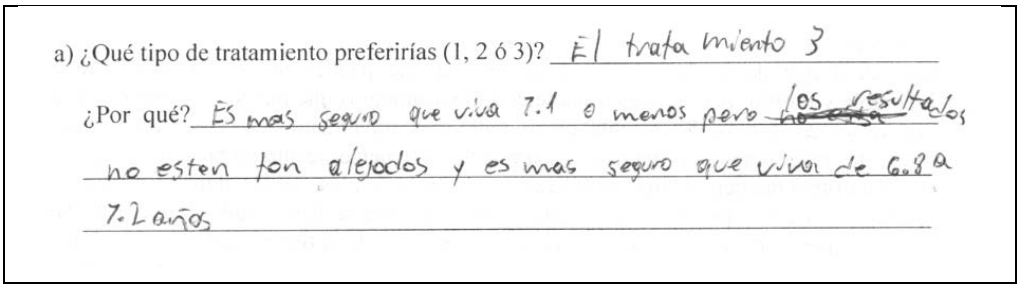


Tiempo en años (Tratamiento 1)	Tiempo en años (Tratamiento 2)	Tiempo en años (Tratamiento 3)
5.2	6.8	6.8
5.6	6.9	6.8
6.5	6.9	6.9
6.5	7.0	7.0
7.0	7.0	7.0
7.0	7.0	7.1
7.0	7.1	7.1
7.8	7.1	7.1
8.7	7.2	7.2
9.1	7.4	7.4
70.4	70.4	70.4

a) ¿Qué tipo de tratamiento preferirías (1, 2 ó 3)? cualquiera de los 3
¿Por qué? porque sume cada numero de cada tratamiento y me salio 70.4 y entonces todos son mejores

Figura 5. Respuesta multi-estructural basada en la suma de los datos.

Nivel Relacional. Sólo se presentaron dos respuestas de este nivel y en ambas se relacionan ideas de centro, dispersión y quizás aversión al riesgo. En el ejemplo mostrado en la Figura 6, el conjunto de datos elegido es el 3, y la respuesta dice: "Es más seguro que viva 7.1 o menos, pero los resultados no están tan alejados y es más seguro que vivan de 6.8 a 7.2." En la justificación se consideran: el valor modal (7.1), la dispersión (6.8 y 7.2) y se manifiesta el hecho de asegurar un periodo de vida lo que podría interpretarse como aversión al riesgo.


a) ¿Qué tipo de tratamiento preferirías (1, 2 ó 3)? El tratamiento 3

¿Por qué? Es mas seguro que viva 7.1 o menos pero los resultados no esten tan alejados y es mas seguro que vivan de 6.8 a 7.2 años

Figura 6. Respuesta de tipo relacional.

Discusión y conclusiones

Después de categorizar las respuestas de los estudiantes, a los cuestionarios previo y posterior, con base en la jerarquía SOLO propuesta observamos los siguientes cambios en los niveles estructurales de las justificaciones: las repuestas pre-estructurales y uni-estructurales disminuyeron de 64 % a 61 %, y de 24 % a 15 % respectivamente, mientras las multi-estructurales aumentaron de 11 % a 21 %. En el cuestionario posterior hubo dos respuestas de nivel relacional. Estos cambios pudieron haberse debido a las sesiones de enseñanza, aunque debe mencionarse que las justificaciones no fueron diferentes entre un cuestionario y otro. Los aspectos en los que los estudiantes basaron su elección fueron los mismos: valores modales, valores extremos, el rango y la suma de los valores mostrados. En el caso de las respuestas relacionales los estudiantes integraron centro, dispersión y riesgo para justificar su elección.

Una característica importante en la que los estudiantes centran su atención son los valores extremos de los conjuntos de datos. En el nivel pre-estructural haciendo una alusión vaga a estos, por ejemplo cuando comentan que en uno de los tratamientos pueden vivir más y en niveles superiores mencionando específicamente el valor del dato o combinando ambos extremos de la distribución para elegir entre una alternativa y otra. El uso del promedio como un valor representativo de los conjuntos de datos es casi nulo en las respuestas.

Consideramos que los problemas en escenarios de riesgo, como el mostrado en este informe de investigación, ofrecen varias ventajas en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. Una de ellas es que los estudiantes se involucran en el problema, y es posible realizar discusiones con base en el análisis de los conjuntos de datos en las cuales se reflexiones sobre centro, dispersión y gráficas. Las decisiones finales de los estudiantes dependerán de sus actitudes ante el riesgo. En esta propuesta, se observa que las situaciones de riesgo ofrecen una problemática en la cual se interprete la variabilidad de los conjuntos de datos a través del concepto de rango. Para esto es necesario hacer uso de la media aritmética (o mediana) para sintetizar los datos y así contar con un valor representativo para cada conjunto. Después de una primera comparación, la cual mostraría que las medias son iguales, es necesario considerar la variabilidad en términos de mayor o menor riesgo. Como se dijo antes la decisión final depende del individuo.

No es fácil para los estudiantes de educación secundaria asociar el rango con su interpretación en el problema propuesto, sin embargo algunos estudiantes lo hicieron como lo observamos en las respuestas de nivel multi-estructural y relacional. Se sugiere diseñar problemas con esquemas similares pues representan un reto para los estudiantes y pueden llegar a solucionarlos, lo que da testimonio de un buen problema para aprendizaje. El proponer y discutir este tipo de problemas en el aula puede contribuir a una mejor comprensión de la variabilidad y a estudiar con los alumnos la manera de realizar toma de decisiones.

Bibliografía y referencias

Aven, T. & Renn, O. (2010). *Risk, Governance and Society*. Berlin, Heildelberg: Springer. ISBN: 978-3-642-13925-3

Bakker, A., & Gravemeijer, K. P. E. (2004). Learning to reason about distribution. In D. Ben-Zvi, & J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning, and thinking* (pp. 147-168). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers. ISBN: 1-4020-2277-8

Biggs, J. B., & Collis, K. (1982). *Evaluating the Quality of Learning: the SOLO taxonomy*. New York: Academic Press. ISBN: 0-12-097550-5

Biggs, J., & Collis, K. (1991). Multimodal learning and the quality of intelligent behavior. In H. Rowe (Ed.), *Intelligence, Reconceptualization and Measurement* (pp. 57-76). New Jersey: Laurence Erlbaum Assoc. ISBN: 0-8058-0942-2

Eraker, S. A., & Sox, H. C. (1981). Assessment of patients' preferences for therapeutic outcomes. *Medical Decision Making, 1*, 29-39. doi:10.1177/0272989X8100100105

Fischhoff, B, & Kadvany, J. (2011). *Risk: A very short introduction*. Oxford: Oxford University Press. ISBN: 978-0-19-957620-3

Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice*. New York: Springer. ISBN: 978-90-481-7862-9

Kahneman, D., & Tversky, A., (2000). Choices, values, and frames. In D. Kahneman & A. Tversky (Eds.), *Choices, Values, and Frames.* Cambridge: Russell Sage Foundation.ISBN:0 521 62749 4

Moore, D. (1990). Uncertainty. In L. A. Steen (Ed.), *On the shoulders of giants: New approaches to numeracy* (pp. 95-137). Washington, DC: National Academy Press. ISBN 0-309-04234-8

SEP. (2011). *Programas de Estudio. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas.* México, DF: Secretaría de Educación Pública. ISBN: 978-607-467-219-0

Shaughnessy, M. J. (2006). Research on student´s understanding of some big concepts in statistics. En G. F. Burrill, & P. C. Elliot (Eds), *Thinking and Reasoning with Data and Chance* (pp. 77-99). United States of America: National Council of Teachers of Mathematics, Inc. ISBN: 978-0-87353-588-5

Watson, J., Kelly, B., Callingham, R. & Shaughnessy, M. (2003). The measurement of school students´ understanding of statistical variation. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *34*(1), 1-29. doi:10.1080/0020739021000018791

Wild, D. J. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, *67*(3), 223-265. doi: 10.1111/j.1751-5823.1999.tb00442.x

Letramento Estatístico e o Exame Nacional de Ensino Médio

Amari **Goulart**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo
Brasil
moivre2@yahoo.com.br
Cileda de Queiroz e Silva **Coutinho**
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Brasil
cileda@pucsp.br

Resumo

Este artigo é um recorte de pesquisa ainda em andamento. O objetivo neste texto é o de analisar se as organizações praxeológicas, presentes nas questões do Exame Nacional de Ensino Médio (ENEM), que envolvam conhecimentos estatísticos, efetivamente diagnosticam o nível do Letramento Estatístico dos estudantes. Foram analisadas 28 questões presentes nas edições do ENEM de 2009 a 2012. Á partir desta análise observou-se que tais questões não permitem aos avaliadores identificar o nível de Letramento Estatístico.

Palavras chave: Educação Estatística, ENEM, Letramento Estatístico, Organização Praxeológica.

Introdução

O presente trabalho é um recorte de nossa tese de doutorado, ainda em andamento, cujo principal objetivo é identificar quais são as articulações entre as noções estatísticas e probabilísticas que são necessárias em um currículo que vise à formação de professores de Matemática para o desenvolvimento do Letramento Estatístico dos alunos da Escola Básica.

No Brasil, a Educação Básica é dividida em Ensino Fundamental e Ensino Médio. O Ensino Fundamental tem a duração de nove anos e o Ensino Médio tem a duração de três anos, totalizando os doze anos de escolaridade obrigatória, atendendo crianças e jovens dos seis aos dezoito anos de idade.

Tópicos de Probabilidade e Estatística fazem parte do ensino de Matemática, na Educação Básica brasileira, desde os anos iniciais de escolaridade (BRASIL, 1997, 1998, 2002). Baseando-nos no trabalho de Moreira (2004), partimos do pressuposto de que as noções probabilísticas e estatísticas necessárias na formação dos professores que atuarão nesta modalidade de ensino tem que ter, como ponto de partida, o que é proposto nos documentos oficiais e os tópicos que são cobrados nos exames oficiais. Além disso, consideramos um aprendizado que não se apoie em um conjunto de procedimentos e fórmulas, isto é, não basta somente a abordagem dos conteúdos estatísticos e probabilísticos, mas conjuntamente com a formulação de questões instigadoras que permitam a mobilização destes conhecimentos na análise crítica de uma situação do cotidiano pessoal, cultural ou profissional. Tal tipo de mobilização é condicionada ao nível de Letramento Estatístico dos alunos e dos professores que formarão esses alunos.

No presente artigo discutiremos o Exame Nacional de Ensino Médio (ENEM) com o objetivo de responder se as organizações praxeológicas, no sentido proposto por Chevallard (1999), identificadas nas questões que envolvam conteúdos estatísticos que foram cobradas neste exame, permitem identificar a presença do Letramento Estatístico.

O Exame Nacional de Ensino Médio

O Exame Nacional de Ensino Médio (ENEM) é uma avaliação de larga escala que o Ministério da Educação institucionou para alunos no final da escolaridade básica. Ele tem por objetivo avaliar habilidades e competências dos estudantes no final do ensino médio.

Este exame foi criado a partir das mudanças educacionais ocorridas após a promulgação da Lei de diretrizes e bases da educação nacional, lei 9.394 de 20 de dezembro de 1996. Aplicado pela primeira vez em 1998, ele era composto por 63 questões de múltipla escolha e uma redação, sendo que, as questões de múltipla escolha eram estruturadas a partir de uma matriz composta por cinco competências e 21 habilidades.

Este exame começou a ganhar importância, quando sua nota começou a ser utilizada como componente para o acesso a cursos superiores, principalmente de universidades públicas, começando também a influenciar mudanças nos livros didáticos de matemática.

A partir do ano de 2009, este exame sofreu várias alterações, entre elas, a utilização da Teoria da Resposta ao Item (TRI) para permitir uma medida mais apropriada da proficiência do aluno. O número de questões de múltipla escolha passou de 63 para 180, a matriz de competências e habilidades também foi alterada, e os exames passaram a ser realizados em dois dias devido ao aumento do número de questões. A Matemática passou a ser considerada como área de conhecimento, denominada “Matemática e suas Tecnologias”.

Com a criação do Sistema de Seleção Unificado (SISU) passou a ser utilizado como única forma de acesso na maior parte das Universidades públicas brasileiras, além de permitir o acesso às bolsas de estudos para alunos que optarem pelo ingresso em universidades privadas (PROUNI).

Justifica-se a associação feita neste texto entre a organização praxeológica identificada nas questões propostas pelo ENEM e a formação de professores pela influência deste exame na organização dos livros didáticos e também pela sua influência no próprio currículo escolar.

O Letramento Estatístico

Neste artigo adotaremos a definição de letramento estatístico proposta por Gal (2002). Para este autor, o letramento estatístico é a competência das pessoas de interpretarem e avaliarem criticamente a informação estatística, além de discutir e/ou comunicar suas ideias sobre tais informações estatísticas.

Para este autor existem dois componentes inter-relacionados no letramento estatístico: o componente cognitivo e o componente de disposição. O componente cognitivo é o responsável pela competência das pessoas para compreender, interpretar e avaliar criticamente as informações estatísticas. Ele é composto por cinco elementos, são eles: a alfabetização estatística (capacidade de ler informações textuais, gráficos e tabelas), os conhecimentos estatísticos, os conhecimentos matemáticos, o conhecimento do contexto e a competência para elaborar questões críticas.

Por sua vez, o componente de disposição é o responsável pela postura ativa diante da informação estatística. Ele é composto por dois elementos, o primeiro é a postura crítica, que segundo Silva (2007) é a propensão de um adulto ter um comportamento questionador diante de informações quantitativas, que podem ser unilaterais, viesadas ou incompletas, possuindo ou não intencionalidade. O segundo elemento são as crenças e as atitudes. Segundo a mesma autora, se um indivíduo acredita ser capaz de interpretar informações estatísticas (crença) e tem uma atitude positiva em relação à investigação estatística, ele tende a apresentar uma postura crítica em relação às informações estatísticas.

Todavia, Gal (2002) chama a atenção para o fato de que a ocorrência do letramento estatístico depende dos conhecimentos básicos de Matemática e de Estatística.

A Teoria Antropológica do Didático

Para a análise das questões do ENEM utilizaremos como referencial teórico a Teoria Antropológica do Didático (TAD), proposta por Chevallard (1999), e particularmente o conceito de Organização Praxeológica. Segundo essa teoria, uma organização praxeológica é composta por uma tarefa, pelo menos uma técnica associada a esta tarefa, uma tecnologia associada a esta técnica e uma teoria associada a esta tecnologia.

Para Chevallard (1999), a tarefa é a ação que é demandada por um problema, a técnica associada a esta tarefa são os procedimentos necessários para executar esta tarefa, a tecnologia associada a esta técnica é a justificativa da técnica e a teoria associada a esta tecnologia é o campo do saber que justifica a tecnologia.

A tarefa e a técnica constituem o bloco do "saber-fazer", a tecnologia e a teoria constituem o bloco do "saber", que neste artigo, designaremos por discurso teórico-tecnológico.

A análise dos dados

Analisaremos as questões que abordam os conteúdos estatísticos presentes nas edições do ENEM de 2009, 2010, 2011 e 2012, na área de conhecimento "Matemática e suas Tecnologias". As edições anteriores a 2009 foram desconsideradas porque optamos por analisar as questões a partir do ano em que ocorreram as mudanças deste exame.

Os números de questões que abordam conteúdos estatísticos, das edições de 2009 a 2012, estão apresentados na Tabela 1.

Tabela 1
Número de questões de estatística nas avaliações de 2009, 2010, 2011 e 2012 do ENEM

Ano de realização do ENEM	Número de questões de estatística
2009	8
2010	4
2011	8
2012	8
Total	28

Fonte: os autores.

Nas quatro edições avaliadas foram elaboradas 180 questões da área de conhecimento Matemática e suas tecnologias, sendo que, 28 delas abordaram conteúdos estatísticos, constituindo, em média, 15,5% das questões cobradas na área de conhecimento analisada.

Analisando as 28 questões sob a ótica da TAD, foram encontrados nove tipos de tarefas, listados na Tabela 2.

Tabela 2
Tipo de tarefas identificadas a partir da análise das questões de conteúdos estatísticos

Tipo de Tarefa	Descrição
1	Interpretar um gráfico de barras
2	Interpretar um gráfico de linha poligonal
3	Interpretar uma tabela de frequências
4	Calcular a amplitude de um conjunto de dados
5	Calcular o valor da mediana de um conjunto de dados
6	Calcular o valor da média aritmética de um conjunto de dados
7	Calcular o valor da média ponderada de um conjunto de dados
8	Calcular o valor da moda de um conjunto de dados
9	Calcular a variância dado o desvio padrão

Fonte: os autores.

Entretanto, as tarefas não estão distribuídas de maneira adequada ao objetivo de identificar o letramento estatístico dos alunos. Numerando as 28 questões a partir da ordem em que elas aparecem nas provas do ENEM, a Tabela 3, apresenta a distribuição dos tipos de tarefas em relação aos itens do exame.

Tabela 3
Tipos de Tarefas obtidas na tabela anterior e as questões em que tais tarefas são solicitadas

Tipo de Tarefa	Questões em que as tarefas t_i aparecem
1	09, 18
2	01, 02, 03, 20, 21, 22, 24, 25, 28
3	04, 05, 06, 07, 08, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 19, 23, 26
4	12
5	07, 13
6	05, 10, 12, 13, 14, 26
7	10
8	13, 28
9	27

Fonte: os autores.

De acordo com a Tabela 3, das 28 questões analisadas, 27 pedem como tarefa a interpretação de gráficos e/ou tabelas (tarefas t_1, t_2, t_3). Devido a este resultado, optamos por determinar qual é o nível de compreensão de leitura de gráficos e tabelas estas questões exigem dos alunos. Para tal, utilizamos os níveis diferenciados de compreensão da leitura de gráficos de Curcio (1989) e dos níveis de compreensão para a leitura e interpretação de tabelas de Wainer (1995).

Curcio (1989) define três níveis diferenciados para a compreensão da leitura de gráficos: Leitura dos dados (nível 1), leitura entre os dados (nível 2) e leitura além dos dados (nível 3). O nível 1 diz respeito a leitura literal dos gráficos, neste caso, os alunos não necessitam interpretar os dados para além do que está efetivamente colocado e perceptível na representação. O nível 2 inclui a interpretação e a integração dos dados no gráfico e, requer dos alunos, a habilidade de comparar quantidades e uso de conceitos matemáticos. O nível 3 requer dos alunos uma

inferência a partir dos dados, ele deve ser capaz de extrair esquemas e padrões subjacentes existentes, isto é, informações que não estão explícitas no gráfico.

Em relação à compreensão para a leitura e interpretação de tabelas, Wainer (1995), propõe três níveis de compreensão. O primeiro nível de compreensão refere-se ao nível elementar, neste nível, o indivíduo tem a capacidade de extrair dados pontuais da tabela, sem exigir qualquer comparação ou análise dos mesmos. O segundo nível é o intermediário, neste nível o indivíduo tem que descobrir quais são as relações existentes entre os dados que são apresentados na tabela, e finalmente, o terceiro e último nível é o avançado, aqui há o envolvimento de uma compreensão mais ampla da estrutura dos dados apresentados na tabela, geralmente comparando tendências e analisando relações implícitas na tabela.

Para atingir os níveis mais elevados do desenvolvimento do letramento estatístico proposto por Gal (2002), fazemos a hipótese que o aluno precisa atingir o nível 3 proposto por Curcio (1989), para a compreensão e leitura de gráficos e o nível avançado para a compreensão e leitura de tabelas proposto por Wainer (1995).

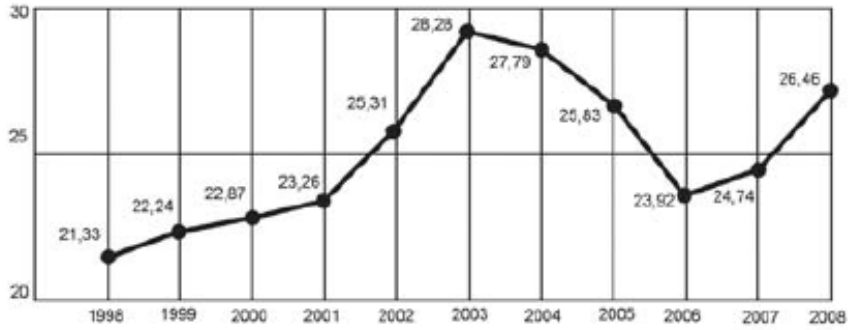
Entretanto, nas questões que envolvem a interpretação de gráficos há o predomínio do gráfico de linhas e, apenas duas outras questões, envolvem a interpretação do gráfico de barras. Nenhuma questão solicita a interpretação de gráfico de setores e do histograma, cuja abordagem é sugerida nos documentos oficiais brasileiros para a Educação Básica e que estão presentes nos livros didáticos, além de aparecerem constantemente nos meios de comunicação. Ou seja, gráficos cuja compreensão é fundamental para o desenvolvimento do letramento estatístico: a competência das pessoas de interpretarem e avaliarem criticamente a informação estatística, além de discutir e/ou comunicar suas ideias sobre tais informações.

Além disso, aproximadamente 64% dessas questões, exigem somente a leitura dos eixos para os alunos encontrarem a resposta correta, isto é, as questões são do nível 1 segundo a proposta de Curcio (1989). Neste nível não se exige do aluno a interpretação dos dados para além do que está posto e perceptível no gráfico e o custo cognitivo é muito baixo. Abaixo um exemplo deste tipo de questão.

Questão 1:

O termo agronegócio não se refere apenas à agricultura e à pecuária, pois as atividades ligadas a essa produção incluem fornecedores de equipamentos, serviços para a zona rural, industrialização e comercialização dos produtos.

O gráfico seguinte mostra a participação percentual do agronegócio no PIB brasileiro:



Centro de Estudos Avançados em Economia Aplicada (CEPEA). **Almanaque abril 2010**. São Paulo: Abril, ano 36 (adaptado).

Esse gráfico foi usado em uma palestra na qual o orador ressaltou uma queda da participação do agronegócio no PIB brasileiro e a posterior recuperação dessa participação, em termos percentuais.

Segundo o gráfico, o período de queda ocorreu entre os anos de:

A) 1998 e 2001. B) 2001 e 2003. C) 2003 e 2006. D) 2003 e 2007. E) 2003 e 2008

Fonte. Exame Nacional de Ensino Médio, Brasil, 2011.

O tipo de tarefa identificada nesta questão, interpretar um gráfico de linha poligonal, exige apenas a leitura dos eixos do gráfico, caracterizando o nível 1 proposto por Curcio (1989). Nesse nível, a leitura dos dados, o aluno constata visualmente que a queda começa em 2003 e termina em 2006, levando à alternativa C, que é a resposta correta.

Por outro lado, todas as questões que envolvem a interpretação de tabelas envolveram conhecimentos matemáticos e/ou estatísticos. Os conhecimentos matemáticos exigidos foram as operações fundamentais, frações e porcentagens, e os conhecimentos estatísticos são os apresentados nas tarefas (t_4, t_5, t_6, t_7, t_8).

Comparando as questões que envolvem a interpretação de tabelas, com os níveis propostos por Wainer (1995), observamos itens que estão no nível elementar e outros que estão no nível intermediário. Não observamos nenhuma questão que exija que o indivíduo esteja no nível avançado para respondê-la. Abaixo uma questão classificada por nós como nível intermediário.

Questão 2:

Brasil e França têm relações comerciais há mais de 200 anos. Enquanto a França é a 5ª nação mais rica do planeta, o Brasil é a 10ª, e ambas, se destacam na economia mundial. No entanto, devido a uma série de restrições, o comércio entre esses dois países ainda não é adequadamente explorado, como mostra a tabela seguinte, referente ao período 2003-2007.

Investimentos Bilaterais (em milhões de dólares)		
Ano	Brasil na França	França no Brasil
2003	367	825
2004	357	485
2005	354	1.458
2006	539	744
2007	280	1.214

Disponível em: www.cartacapital.com.br. Acesso em: 7 jul. 2009.

Os dados da tabela mostram que, no período considerado, os valores médios de investimentos da França no Brasil foram maiores que os investimentos do Brasil na França em um valor

A. inferior a 300 milhões de dólares.

B. superior a 300 milhões de dólares, mas inferior a 400 milhões de dólares.

C. superior a 400 milhões de dólares, mas inferior a 500 milhões de dólares.

D. superior a 500 milhões de dólares, mas inferior a 600 milhões de dólares.

E. superior a 600 milhões de dólares.

Fonte. Exame Nacional de Ensino Médio, Brasil, 2009.

Esta questão é um exemplo de tipo de tarefa que demanda descobrir relações entre os dados que são mostrados na tabela (nível intermediário de Wainer (1995)), porque somente com a leitura direta da tabela não se chega à resposta correta. É necessário, então, que o aluno calcule a média dos investimentos do Brasil na França, para, em seguida, calcular a média dos investimentos da França no Brasil e depois comparar as duas médias, concluindo que a alternativa D é a correta.

A única questão em que não aparecem tarefas relativas à interpretação de gráficos e/ou tabelas é a questão abaixo.

Questão 3:

Um produtor de café irrigado em Minas Gerais recebeu um relatório de consultoria estatística, constando, entre outras informações, o desvio padrão das produções de uma safra dos talhões de suas propriedades. Os talhões têm a mesma área de 30 000 m^2 e o valor obtido para o desvio padrão foi de 90 kg/talhão. O produtor deve apresentar as informações sobre a produção e a variância dessas produções em sacas de 60 kg por hectare (10 000 m^2). A variância das produções dos talhões expressa em $(\text{sacas/hectare})^2$ é:

A-) 20,25 B-) 4,50 C-) 0,71 D-) 0,50 E-) 0,25

Fonte. Exame Nacional de Ensino Médio, Brasil, 2012.

Nesta questão, o tipo de tarefa é o cálculo da variância dado o desvio padrão. Os conhecimentos matemáticos envolvidos são as conversões de unidades de medidas de área e de massa. Nesta questão, a ênfase são as fórmulas e os cálculos matemáticos. Ou seja, a técnica relacionada à tarefa pode ser desenvolvida apenas pelo cálculo matemático, sendo que o discurso teórico-tecnológico relacionado é a definição desvio padrão como sendo a raiz quadrada da variância.

Do nosso ponto de vista, trata-se de uma questão de conversão de medidas, e depois elevar o resultado ao quadrado (a variância é o desvio padrão ao quadrado) e chega-se na alternativa E que é a resposta correta.

A ênfase dada aos cálculos matemáticos aparece também em outras questões que envolvem os conceitos de medidas de tendência central, opção esta que segundo Ben-Zvi e Garfield (2004) não levam os alunos a pensarem estatisticamente e consequentemente não desenvolve o letramento estatístico.

Conclusão

A análise das questões estatísticas do ENEM nos revela que a sua concentração é em tarefas que exigem a interpretação de gráficos e tabelas, sendo pouco exigido o cálculo e a interpretação das medidas de tendência central e de medidas de dispersão.

Há uma concentração muito grande na interpretação do gráfico de linhas e a ausência de gráficos importantes que fazem parte do dia a dia do cidadão, como por exemplo, o gráfico de setores.

As interpretações de gráficos exigem que os alunos estejam no nível 1, segundo a classificação de Curcio (1989), ou seja, demandam apenas a leitura dos dados (leitura dos eixos). Na interpretação de tabelas, na maior parte das questões é suficiente que os alunos estejam no

nível elementar (leitura dos dados apresentados na tabela), e poucas questões exigem que os alunos estejam no nível intermediário, segundo a classificação de Wainer (1995).

Para que os alunos sejam considerados letrados estatisticamente, segundo Gal (2002), fazemos a hipótese de que é necessário que eles se encontrem no nível 3 na compreensão da leitura de gráficos, proposto por Curcio (1989) e no nível avançado de compreensão para a leitura e interpretação de tabelas, proposto por Wainer (1995). Ou seja, é necessário que o professor tenha conhecimentos estatísticos e nível de letramento estatístico mais elevado do que o que precisam desenvolver os seus alunos. Somente assim poderá conceber e fazer a gestão de situações de aprendizagem que favoreçam o desenvolvimento do letramento de seus alunos.

Referências e bibliografia

Ben-Zvi, D., & Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning and thinking: Goals, definitions and challenges. In D. Ben-Zvi, & J. Garfield (orgs), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 3-15). Dordretch: Kluwer Academic Publishers.

Brasil. (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.* Brasília: MEC/SEF. 142p.

Brasil. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEF. 148p.

Brasil. (2002). *Parâmetros Curriculares Nacionais, Ensino Médio +: Ciências da natureza, Matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC/SEM. 141p.

Chevallard, Y. (1999). L´analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologie Didactique. In *Recherches en Didactiques des Mathématiques* (pp. 221-266).

Curcio, F. R. (1989). *Developing graph comprehension elementary and middle school activities*. Virginia: NCTM.

Gall, I. (2002). Adult´s Statistical Literacy: meanings, components, responsibilities. *Internacional Statistical Review, 70*(1), 1-25.

Moreira, P. C.(2004). *O conhecimento matemático do professor: formação na licenciatura e prática docente na Escola Básica.* Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

Silva, C. B.(2007). *Pensamento estatístico e raciocínio sobre variação: um estudo com professores de Matemática*. Pontifícia Universidade de São Paulo, São Paulo.

Wainer, H. (1995). A study of Display Methods for NAEP Results: I. Tables. *Program Statistics Research. Technical: Report nº 95,1.* Educacional Testing Service. Princeton. Disponivel em http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1002/j.2333-8504.1995.tb01645.x/pdf. Acesso em: 1 set. 2014.

Livro paradidático no ensino de Estatística no ensino fundamental

Ailton Paulo de **Oliveira** Júnior
Universidade Federal do Triângulo Mineiro
Brasil
drapoj@uol.com.br
Roberta **Costa**
Escola Estadual Santa Terezinha
Brasil
roberta.costa@uberabadigital.com.br
Beatriz Cristina da Silva **Delalíbera**
Universidade Federal do Triângulo Mineiro
Brasil
beatriz_delalibera@yahoo.com.br
Luana Aparecida **Alves**
Universidade Federal do Triângulo Mineiro
Brasil
alves.luanaap@live.com
Gessica Rodrigues da **Silva**
Universidade Federal do Triângulo Mineiro
Brasil
gessicarodrigues_8@yahoo.com.br
Lorena Silva **Oliveira**
Universidade Federal do Triângulo Mineiro
Brasil
lorena.uberaba@hotmail.com.br
Edmeire Aparecida **Fontana**
Universidade Federal do Triângulo Mineiro
Brasil
edmeirematematica@gmail.com

Resumo

O trabalho aqui apresentado trata da apresentação do processo de elaboração de um livro paradidático no Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência – PIBID subprojeto Matemática no eixo temático: Tratamento da Informação da Universidade Federal do Triângulo Mineiro – UFTM em parceria com escolas públicas de Uberaba-MG. A elaboração de um livro paradidático sobre o ensino de Estatística nos anos finais do Ensino Fundamental proporcionou reflexão e debate a respeito da produção deste material didático bem como do aprofundamento dos conhecimentos estatísticos que serão ministrados quando estiverem efetivamente em serviço. Com a criação do paradidático, não apenas contribuiu-se para expor uma história e a importância dos livros paradidáticos, mas também para abrir portas e estimular as produções acadêmicas, além de mostrar aos alunos, o quanto é importante a leitura para enriquecer o vocabulário dos alunos, seu conhecimento de mundo, sem sair de sua cidade, e melhorar sua escrita e oralidade.

Palavras chave: ensino de estatística, livro, paradidático, ensino fundamental, Pibid.

Introdução

A Lei de Diretrizes e Bases 9394/96(LDB) em seu artigo 32, inciso I, aponta a grande necessidade de trabalhar com leitura, escrita e interpretação de textos na Educação Básica, com o intuito do desenvolvimento da capacidade de aprender, devendo se voltar para a construção de futuros leitores competentes, desenvolvendo um trabalho interdisciplinar, estimulando o aluno a ser sujeito do seu próprio aprendizado.

Segundo Smole e Diniz (2001), a predominância do silêncio, no sentido de ausência de comunicação, ainda é comum nas aulas de Matemática. O excesso de cálculos mecânicos, a ênfase em procedimentos e a linguagem usada para ensinar Matemática são alguns dos fatores que tornam a comunicação pouco frequente ou quase inexistente.

Smole e Diniz (2001) defendem que propostas que objetivem uma aprendizagem significativa em Matemática devem abordar uma variedade de ideias matemáticas, sejam numéricas, geométricas, relativas às medidas e às noções de estatística, entre outras, de modo que seja proporcionado ao aluno diferentes formas de perceber a realidade e o conhecimento matemático.

Estima-se que o surgimento dos livros paradidáticos, data-se da década de 60 a 70, porém, no Brasil começa a circular com maior intensidade nas escolas há, aproximadamente, vinte anos. No entanto, muito pouco se tem feito em termos de estudos científicos com o intuito de caracterizar este gênero de livros ou mesmo de compreender sua origem e suas funções pedagógicas.

Nacarato e Lopes (2005) enfatizam que os processos como comunicação de ideias, interações, práticas discursivas, representações matemáticas, argumentações e negociação de significados, vêm permeando as recentes discussões na área.

Nesse sentido, faz-se necessário propiciar aulas de Matemática que incluam atividades oportunizadoras da construção da linguagem matemática por meio da leitura e da escrita.

Fonseca e Cardoso (2005) apresentam aspectos da interação discursiva nas aulas de Matemática através de práticas de leitura de textos matemáticos, ou de textos trazidos à cena escolar para ensinar Matemática, ou ainda de textos que demandam a mobilização de conhecimentos matemáticos para a leitura.

Dalcin (2007) abordou em sua pesquisa acerca dos paradidáticos de Matemática, a relação entre a simbologia matemática, as imagens e o texto escrito dentre as diversas abordagens do conteúdo matemático.

Nos dias de hoje é comum ouvirmos falar em livros paradidáticos, porém foi na década de 1970 que passaram a serem assim chamados (Ramos, 1987; Munakata, 1997; Dalcin, 2002), devido à popularização do gênero.

Não se sabe ao certo quem criou o termo, mas segundo Munakata (1997), o termo surgiu dentro da Editora Ática e segunda reza a lenda que o termo paradidático foi cunhado pelo saudoso professor Anderson Fernandes Dias, diretor-presidente da Editora Ática, no início da década de 70. Afinal, foi a Ática que criou a primeira coleção de alcance nacional destinada a apoiar, aprofundar, fazer digerir a disciplina muitas vezes aridamente exposta no livro didático.

Para entender a razão da criação do termo paradidático, Borelli (1996) apresenta o sentido do termo paraliteratura, a partir da interpretação da formação da palavra como “o prefixo para

denota tanto o significado de proximidade – ao lado de, ao longo de – quanto à conotação de acessório, subsidiário, e, também, o sentindo de funcionamento desordenado ou anormal".

Segundo Lima (2012) a opção de nomear esses livros de paradidático e não paraliteratura, ou outro termo qualquer tenha se dado pelo primeiro termo sugerir uma aproximação com os livros didáticos.

Consideramos também a definição de Munakata (1997) ao afirmar que os livros paradidáticos são livros que têm características próprias. Diferente dos livros didáticos, eles não seguem uma seriação e nem uma sequência de conteúdos conforme preconiza o currículo oficial.

Buscando definir os livros paradidáticos, Yasuda e Teixeira (1995), dizem que são consideradas paradidáticas as obras produzidas para o mercado escolar sem as características funcionais e de composição do manual didático.

Em suma, o que define os livros paradidáticos é o seu uso como material que complementa (ou mesmo substitui) os livros didáticos. Tal complementação (ou substituição) passa a ser considerada como desejável, na medida em que se imagina que os livros didáticos por si sejam insuficientes ou até mesmo nocivos. (Munakata, 1997)

Segundo Machado *apud* Trevizan (2008), nos textos paradidáticos os temas costumam ser apresentados de forma menos comprometido com o isolamento e a fragmentação, possibilitando assim a relação com outras áreas de conhecimento.

Somente a partir de 1986 as primeiras coleções de paradidáticos de Matemática começaram a surgir, com as coleções Vivendo a Matemática, da editora Scipione, e A Descoberta da Matemática, da Ática (Dalcin, 2002).

Além de todos os aspectos anteriormente destacados, as informações estatísticas sempre estiveram presentes na vida dos cidadãos e assim como muitas pessoas confiam e utilizam para nortear suas decisões, outras olham, desconfiam e/ou atacam sua verossimilhança (Cazorla e Castro, 2008).

No final da década de 90, os conceitos básicos de Estatística, antes quase ignorados na Educação Básica, passaram a ser discutidos pela comunidade educacional e acadêmica, tendo sido incorporados oficialmente à estrutura curricular da disciplina de Matemática do Ensino Fundamental e Médio com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (Lopes, Coutinho e Almouloud, 2010).

Os PCN sugerem aos professores que incentivem os alunos a observar os fenômenos, conjeturar hipóteses, fazer levantamento de dados, tratá-los e analisá-los do ponto de vista da investigação científica. Também incentivam a leitura e a interpretação de gráficos, de tabelas e de medidas publicadas pelos diversos meios de comunicação, a fim de que o aluno saiba posicionar-se de forma crítica diante dessas informações e fornecer-lhes ferramentas para arguir e "desmantelar" informações porventura falaciosas ou mal-intencionadas (Lopes, Coutinho e Almouloud, 2010).

Ao ensino de Matemática fica o compromisso de não só ensinar o domínio dos números, mas também a organização de dados e a leitura de gráficos, que são elementos da Estatística. Desta forma, ao professor de Matemática, cabe não se limitar à mera transmissão de fórmulas e algoritmos, mas deve dar sentido e vida a essa matemática escolar que, embora pareça distante, se faz cada vez mais necessária.

Nos conteúdos de Estatística previstos nos Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (Brasil, 1997 e 1998), relativamente ao Tratamento da Informação para o Segundo Ciclo do Ensino Fundamental (3° e 4° anos), o trabalho a ser desenvolvido a partir da coleta, organização e descrição dos dados possibilita aos alunos compreender as funções de tabelas e gráficos usados para comunicar esses dados: a apresentação global da informação, a leitura rápida e o destaque dos aspectos relevantes. Lendo e interpretando os dados apresentados em tabelas e gráficos, os alunos percebem que eles permitem estabelecer relações entre acontecimentos e, em alguns casos, fazer previsões.

A partir da verificação dos conteúdos estatísticos previstos nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Brasil, 1997 e 1998) tem-se como objetivo geral a criação de material paradidático para dar subsídios ao ensino de conteúdos estatísticos para professores de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Os objetivos específicos são:Caracterizar, analisar e classificar os livros paradidáticos publicados no mercado editorial brasileiro;

1. Elaborar atividades a serem desenvolvidas a partir dos paradidáticos, ou seja, a produção de material que contemple aspectos relacionados aos conteúdos estatísticos e à leitura;
2. Avaliar e validar o material elaborado, bem como seu aperfeiçoamento.

Procedimentos Metodológicos

Nesse contexto, consideramos oportuno elaborarmos trabalho que forneça subsídios para a implementação de novas práticas pedagógicas, a partir do estudo e discussão de textos alternativos como os paradidáticos de Estatística.

O desenvolvimento desse trabalho será desenvolvido em duas etapas, sendo a primeira caracterizada pela análise e classificação de livros paradidáticos publicados no mercado editorial brasileiro.

A análise dos paradidáticos será guiada por roteiro, a saber:

1. Os conteúdos estatísticos e matemáticos e os temas transversais (Brasil, 1998) abordados;
2. As atividades utilizadas na abordagem do conteúdo estatístico; as tendências de ensino de Estatística utilizadas pelo autor;
3. A interação entre outras áreas do conhecimento (Fazenda, 1994);
4. A presença de elementos lúdicos (Huizinga, 1971);
5. A diversidade de registros de representações semióticas (Duval, 2011);
6. A oportunidade de participação do leitor na construção do próprio conhecimento; os tipos de ilustrações utilizadas (Dalcin, 2007);
7. A possibilidade de utilização da obra em diversos momentos do estudo de determinado conteúdo – na introdução, no decorrer, na finalização.

A segunda etapa da pesquisa será a elaboração de atividades a serem desenvolvidas a partir dos paradidáticos, ou seja, a produção de material que contemple aspectos relacionados aos conteúdos estatísticos e à leitura, com o intuito de proporcionar aos alunos a vivência dos processos apontados por Nacarato e Lopes (2005), ou seja, que processos como comunicação de

ideias, interações, práticas discursivas, representações matemáticas, argumentações e negociação de significados; sejam utilizados.

O material será produzido considerando os seguintes aspectos que podem ser realizados concomitantemente:

1. Criar a estória que será o fio condutor das ações a serem desenvolvidas;
2. Criar personagens;
3. Escolher os conteúdos que serão abordados;
4. Desenhar as ilustrações e gravuras;
5. Elaborar o texto.

A terceira etapa será a aplicação deste material nas escolas do subprojeto para identificarmos possíveis problemas e a possibilidade de sua aplicação no dia a dia do ensino do Tratamento da Informação.

Publicação de livros paradidáticos em Estatística no Brasil

Um dos livros publicados é referente à Série "Investigação Matemática" da Editora Scipione que pretende partir de situações cotidianas para trabalhar conceitos onde o aluno se familiariza com o tema e pode adquirir conhecimentos para resolver jogos e atividades propostas em forma de quebra cabeças, jogos, trilhas, labirintos e dobraduras.

Um de seus volumes é referente aos conteúdos estatísticos, Figura 1, Smoothey (1998) aborda: levantamento de dados, tabelas de frequências, amostragens, pictogramas, gráficos de barras e de setores, cálculo de média, moda e da mediana, amplitude e gráfico de linhas.

Figura 1. Paradidático: atividades e jogos com Estatística.

A coleção "Pra que Serve a Matemática" da Editora Atual pretende mostrar ao aluno a utilidade prática da Matemática, relacionando-a com fatos do dia a dia. Com um visual de revista de histórias em quadrinhos, apresenta textos curtos, agrupados por temas, como "Estatística", Figura 2, de Imenes, Jakubo e Lellis (2001).

Figura 2. Paradidático: Estatística: "Pra que Serve a Matemática".

Apresenta os conteúdos estatísticos através de notícias de jornal, charges, cartuns e quadrinhos, pretendendo apresentar de forma clara a importância da Estatística na tomada de

decisões e na solução de problemas. Apresentam dados sobre: a evasão escolar; o trabalho infantil; a eficácia dos remédios; os acidentes de trânsito e a taxa de inflação.

Os desafios e exercícios propostos, além de firmarem o conceito matemático e abordando temas transversais como o Meio Ambiente, Ética, Saúde, Trabalho e Consumo.

Gonçalves e Strapasson (2007), Figura 3, afirmam que se o aluno tiver a sua frente diversas tabelas e gráficos e sendo eles levados a observar cuidadosamente o que os dados apresentam, os alunos poderão se tornar cidadãos mais esclarecidos, com um senso crítico mais refinado, tornando-se mais preparados para enfrentar a realidade da vida cotidiana.

Figura 3. Paradidático: O Tratamento da Informação: Estatística para o Ensino Fundamental.

O Guia Mangá de Estatística de Takahashi e Pro (2010), Figura 4, é um guia em quadrinhos para auxiliar na aprendizagem da Estatística. Este guia contém exercícios (e respostas) para que você se possa praticar o que é apresentado. No material o paciente professor Yamamoto ensina Luy a:

1. Calcular a média, a mediana e o desvio-padrão de pontuações de boliche;
2. Representar os preços de diversos tipos de lámen (tipo de comida japonesa) em um histograma;
3. Determinar a probabilidade de tirar a nota máxima em um teste de matemática; dentre outros. Estes e outros exemplos da vida real pretendem facilitar o aprendizado daquilo que a maioria das pessoas tem dificuldade para dominar.

Figura 4. Paradidático: Guia Mangá da Estatística.

Criação do livro paradidático

A ideia de criação do paradidático "As aventuras do Tio Ailton e Sua Turma no Mundo da Estatística" foi proposta no dia 02 de abril de 2014 na primeira reunião do novo Subprojeto Matemática – eixo temático: Tratamento da Informação do PIBID – Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência da UFTM – Universidade Federal de Uberaba, edital n° 061 de 2013.

O grupo realizou levantamento bibliográfico de outros livros paradidáticos com conteúdos matemáticos, analisou sobre o contexto a ser empregado, as características de linguagem, adequação à faixa etária e nível de escolaridade, discutiu as ideias, e incrementadas as propostas.

Na maioria das vezes, a prática de leitura e escrita em aulas de matemática, se restringe à leitura dos enunciados de problemas ou textos complementares, presentes nos livros didáticos, que ilustram um tema. Raramente leva-se um artigo de jornal ou revista para os alunos lerem e analisarem.

Durante a criação do livro paradidático, houve grande reflexão e debate no grupo a respeito da experiência matemática que possuíam, diante de sua escolarização. Essas análises favoreceram, o (re)visitar da matemática que já haviam aprendido durante sua vida escolar, comparando-a com a que os alunos do Ensino Fundamental recebem nos dias atuais, além de tentar abordar no livro, o conteúdo matemático de forma adequada e atualizada para os alunos do Ensino Fundamental.

As ideias foram surgindo a partir do filme *Toy Story*, Figura 5, onde os brinquedos tomam vida na ausência de seus donos.

Figura 5. Personagens do filme "*Toy Story"* que despertou a ideia de construção dos personagens do livro paradidático.
Fonte: http://www.colorir-desenhos.com/2011/05/desenhos-toy-story-para-colorir.html

Assim, nomes foram dados ao compasso (Sr. Perninha), ao transferidor (Transferildo), ao Lápis (Estatildo), a régua (Reguita), a borracha (Medialina) e ao apontador (Modacildo). O grupo também fará uma homenagem ao professor Ailton Paulo de Oliveira Júnior, coordenador do Subprojeto Matemática do PIBID/ UFTM. Ele será o mestre, ensinando aos personagens conteúdos ligados à Estatística.

Os objetos tomaram vida na hora do recreio em que todos os alunos saem da sala de aula e começam a conversar sobre o número de vezes em que foram utilizados e a partir daí, com a ajuda do "Tio Ailton", os personagens foram apresentando os conceitos básicos de Estatística, distribuição de frequência, frequência absoluta e relativa, média, moda, mediana e confecção de gráficos de colunas, barras e setores.

Além disso, foram propostas atividades voltadas aos conceitos apresentados. Ao final de cada atividade, apresentam-se os cálculos e as resoluções.

É importante ressaltar, que será criado um concurso na Escola Estadual Santa Terezinha – Uberaba/ MG, em que os alunos serão os criadores dos personagens do livro paradidático.

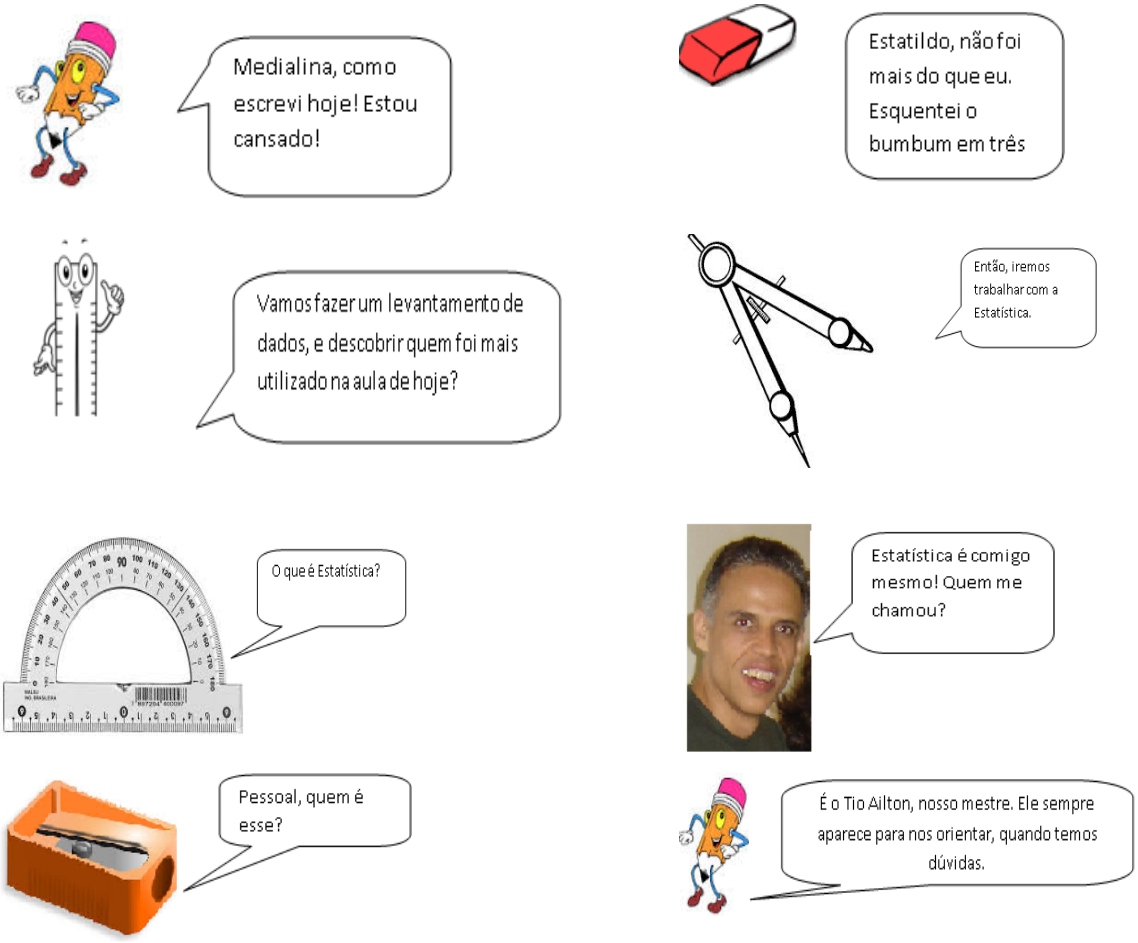
O grupo pretende com este livro, não apenas contribuir para expor uma história e a importância dos livros paradidáticos, mas também para abrir as portas e estimular as produções acadêmicas e publicações de novos títulos e até mesmo de coleções, além de mostrar aos alunos, o quanto é importante a leitura para abranger seu vocabulário, seu conhecimento de mundo, sem sair de sua cidade, de melhorar sua escrita e oralidade. E por se tratar de uma atividade diferenciada, elimina o estereótipo de que para saber matemática não é preciso realizar leitura.

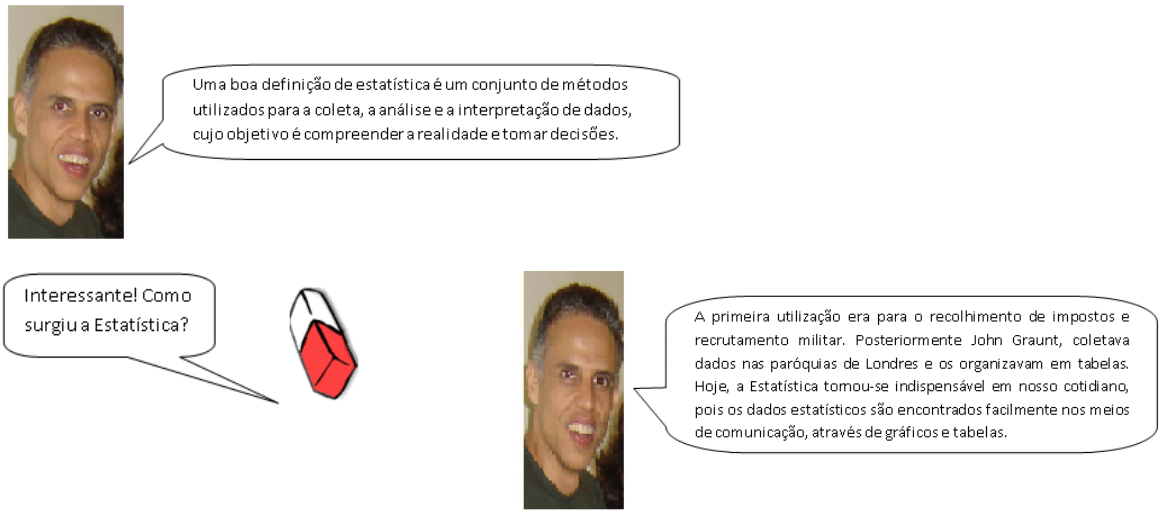
A seguir apresentam-se alguns elementos já elaborados quanto à estrutura do paradidático:

Os personagens estão em sala de aula. (criar imagem de sala de aula com carteiras, alunos e a professora. Não se esquecer de colocar os objetos utilizados pelos alunos sobre as carteiras).

Toca o sinal para o recreio e os alunos saem em disparada...

Os personagens tomam vida.





Uma atividade elaborada e que fará parte do livro paradidático consta de curiosidades ou caça palavras a partir de um grupo de palavras (termos básicos da Estatística) em uma cartela (Figura 6).

Ora, naquele tempo, foi publicado um edito de César Augusto, mandando recensear o mundo inteiro. Esse primeiro recenseamento teve lugar na época em que Quirino era governador da Síria. Todos iam se fazer recensear, cada qual em sua própria cidade. José também subiu da cidade de Nazaré, na Galileia, à cidade de Davi, que se chama Belém, na Judéia, porque era da família e da descendência de Davi, para se fazer recensear com Maria, sua esposa, que estava grávida. (Lucas 2: 1-5 Almeida Revista e Atualizada).

Para descontrair, encontre no Caça-palavras abaixo as seguintes palavras:

Gráficos	Análise
Recenseamento	Interpretação
Informação	Realidade
Tabelas	Dados
Estatística	Coleta

R	R	A	B	T	A	B	E	L	A	S	B	I
A	E	S	T	A	T	I	S	T	I	C	A	N
Z	C	S	B	F	A	C	D	T	U	B	N	T
C	E	L	L	G	M	R	D	E	C	F	A	E
I	N	F	O	R	M	A	C	A	O	R	L	R
T	S	H	M	R	R	V	B	I	L	V	I	P
T	E	S	S	C	O	A	A	D	E	J	S	R
I	A	L	T	M	D	B	Ç	T	T	I	E	E
O	M	F	I	U	A	C	I	A	A	C	I	T
R	E	A	L	I	D	A	D	E	O	H	Ç	A
P	N	D	C	A	O	B	G	L	P	T	V	C
D	T	J	T	I	S	L	M	C	A	O	Z	A
G	O	L	G	R	A	F	I	C	O	S	B	O

Figura 6. Caça palavras de termos básicos da Estatística.

Outra atividade constante do paradidático corresponde inicialmente ao apresentado na Figura 7.

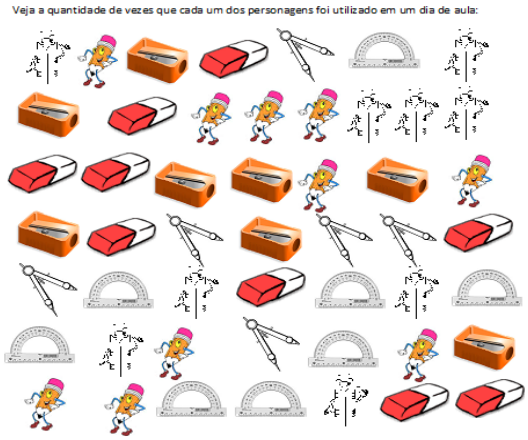


Figura 7. Atividade em relação à frequência de dados.

Solicitando, na sequência que se preencha a Tabela 1, e respondendo a seguinte questão: "Vamos organizar em uma tabela de dados?"

Tabela 1

Modelo proposta para a construção de uma tabela de distribuição de frequências.

Personagem	**Número de vezes que o personagem foi utilizado**
(Estatildo)	
(Modacildo)	
(Transferildo)	
(Senhor Perninha)	
(Medialina)	
(Reguita)	

Conclusões

A elaboração deste material, não apenas contribui para expor uma história e a importância dos livros paradidáticos, mas também para abrir as portas e estimular as produções acadêmicas e publicações de novos títulos para o Ensino de Estatística, além de nos mostrar o quanto é importante a leitura para abranger seu vocabulário, seu conhecimento de mundo, sem sair de sua cidade, de melhorar sua escrita e oralidade.

O trabalho realizado revela que o material paradidático, embora faça parte de um mesmo gênero de livro, diferencia-se em função do tipo de abordagem do conteúdo e do modo como são articulados a simbologia estatística, as imagens e o texto escrito.

Destacamos também a importância desse tipo de produção para que se desenvolva a autonomia enquanto produtor de conhecimento.

Referências

Borelli, S. H. S. (1996). *Ação, suspense, emoção*: Literatura e cultura de massa no Brasil. São Paulo: EDUC/Estação Liberdade.

Brasil. (1996). Ministério da Educação e Cultura. *Lei n. 9.394/96 de 20 de dezembro de 1996. Diretrizes e Bases da Educação*. LDB.

Brasil. (1997). Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.* Brasília: MEC/SEF.

Brasil. (1998). Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.* Brasília: MEC/SEF, 1998.

Cazorla, I. M., & Castro, F. C. de. (2008). O papel da estatística na leitura do mundo: o letramento estatístico. *UEPG Humanit. Sci., Appl. Soc. Sci., Linguist*, Lett. Arts, Ponta Grossa, 16 (1), 45-53.

Dalcin, A. (2002). *Um olhar sobre o paradidático de matemática*. Dissertação em Educação Matemática. Faculdade de Educação da Universidade de Campinas, Campinas, São Paulo.

Dalcin, A. (2007). Um olhar sobre o paradidático de matemática. *Zetetiké*. Unicamp, 15(27), 25-35.

Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma*. São Paulo: PROEM.

Fazenda, I. C. A. (1994). *Interdisciplinaridade*: história, teoria e pesquisa. Campinas: Papirus.

Fonseca, M. C., & Cardoso, C. A. (2005). Educação matemática e letramento: textos para ensinar matemática e matemática para ler o texto. In Nacarato, A. M., & Lopes, C. A. E. *Escritas e leituras na educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.

Gonçalves, C. F. F.; Strapasson. E. E. (2007). *O tratamento da informação: estatística para o ensino fundamental.* Londrina: EDUEL.

Huizinga, J. (1971). *Homo ludens:* o jogo como elemento da cultura. São Paulo: Perspectiva.

Imenes, L. M., Jakubo, J. J., & Lellis, M. (2001). *Para que serve a Matemática? – Estatística*. São Paulo: Editora Atual.

Jacobi, L. F., & Kessler, A. L. F. (2009). *Estatística para os anos iniciais do Ensino Fundamental.* Caderno Didático, nº 3, Série Naturais & Exatas, Santa Maria: UFSM – CCNE.

Lima, E. G. (2012). *Iconografias no livro didático de história*: leituras e percepções de alunos do Ensino Fundamental. Pará de Minas, MG: Virtual Books.

Lopes, C.E.; Coutinho, C.Q.; Almouloud, S. (2010). *Estudos e reflexões em Educação Estatística*. (1. ed.). Campinas: Mercado de Letras.

Munakata, K. (1997). *Produzindo livros didáticos e paradidáticos*. Tese de Doutorado em História e Filosofia da Educação. Faculdade de Educação da Pontifícia Universidade de São Paulo: PUC/SP.

Nacarato, A. M., & Lopes, C. A. E. (2005). *Escritas e leituras na Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.

Ramos, M. C. M. (1987). *O paradidático, esse rendoso desconhecido*. São Paulo: Tese de Doutorado em Educação. Faculdade de Filosofia, Letras e Ciências Humanas da Universidade de São Paulo, São Paulo.

Smole, K. S.; DIniz, M. I. *Ler, escrever e resolver problemas*: habilidades básicas para aprender Matemática. Porto Alegre: Artmed Editora, 2001.

Smoothey, M. (1998). *Atividades e Jogos com Estatística*. São Paulo: Editora Scipione.

Takahashi, S., & Pro, T. (2010). *Guia Mangá da Estatística*. (1 ed.). São Paulo: Editora NOVATEC.

Trevizan, W. A. (2008). *O uso do livro paradidático no ensino de matemática*. Recuperado em 15 Jun. 2014 de www.usp.br/siicusp/Resumos/16Siicusp/807.pdf..

Yasuda, A. M. B. G., & Teixeira, M. J. C. (1995). A circulação do paradidático no cotidiano escolar. In: Brandão, H; Micheletti, G. *Aprender a ensinar com livros didáticos e paradidáticos*. São Paulo: Cortez.

Livro paradidático no ensino de Probabilidade no ensino fundamental

Ailton Paulo de **Oliveira** Júnior
Universidade Federal do Triângulo Mineiro
Brasil
drapoj@uol.com.br
Valéria **Ciabotti**
Universidade Federal do Triângulo Mineiro
Brasil
valeria_ciabotti@hormail.com
Camila Marega **Giardulo**
Universidade Federal do Triângulo Mineiro
Brasil
camilinha_marega@hotmail.com
Joana dos Santos **Silva**
Universidade Federal do Triângulo Mineiro
Brasil
jo.uftm@hotmail.com
Luana Mitsue **Segawa**
Universidade Federal do Triângulo Mineiro
Brasil
luana_segawa@hotmail.com
Roberta Cristina de Faria **Moreira**
Universidade Federal do Triângulo Mineiro
Brasil
betinha20cris@hotmail.com

Resumo

Reconhecendo-se como aspecto importante para o ensino de Probabilidade, os livros paradidáticos se apresentam como um recurso que exige objetivo e significados que irá ser adquirida para interagir com as demais matérias, sem ser confundida com elas de forma positiva e produtiva para matemática. Portanto, este trabalho apresenta a elaboração de um paradidático especificando conteúdos probabilísticos, registrando a possibilidade de trabalhar esse tema em aulas de matemática, tomando por base o livro paradidático em elaboração. Apresenta-se uma lista de livros paradidáticos que já foram produzidos no mercado brasileiro e que podem ser elementos para os professores utilizarem em suas aulas. Dentro de um contexto pedagógico a forma de aprendizagem é de fundamental importância no que diz respeito a sedimentação de conhecimentos de conteúdos probabilísticos. Portanto, a criação do livro vem a colaborar com a literatura da Matemática e da Probabilidade, integrando seus diversos assuntos com o cotidiano.

Palavras chave: ensino de probabilidade, livro, paradidático, ensino fundamental, PIBID.

Introdução

A Lei de Diretrizes e Bases 9394/96 (LDB) em seu artigo 32, inciso I, aponta a grande necessidade de trabalhar com leitura, escrita e interpretação de textos na Educação Básica, com o intuito do desenvolvimento da capacidade de aprender, devendo se voltar para a construção de futuros leitores competentes, desenvolvendo um trabalho interdisciplinar, estimulando o aluno a ser sujeito do seu próprio aprendizado.

Segundo Smole e Diniz (2001), a predominância do silêncio, no sentido de ausência de comunicação, ainda é comum nas aulas de Matemática. O excesso de cálculos mecânicos, a ênfase em procedimentos e a linguagem usada para ensinar Matemática são alguns dos fatores que tornam a comunicação pouco frequente ou quase inexistente.

Para Machado (2011), compreender é apreender o significado de um objeto ou de um acontecimento; é vê-lo em suas relações com outros objetos ou acontecimentos; os significados constituem, pois, feixes de relações que, por sua vez, se entretecem, se articulam em teias, em redes, construídas socialmente e individualmente, e em permanente estado de atualização.

Smole e Diniz (2001) defendem que propostas que objetivem uma aprendizagem significativa em Matemática devem abordar uma variedade de ideias matemáticas, sejam numéricas, geométricas, relativas às medidas e às noções de estatística, entre outras, de modo que sejam proporcionadas ao aluno diferentes formas de perceber a realidade e o conhecimento matemático.

Nacarato e Lopes (2005) enfatizam que os processos como comunicação de ideias, interações, práticas discursivas, representações matemáticas, argumentações e negociação de significados, vêm permeando as recentes discussões na área. Nesse sentido, faz-se necessário propiciar aulas de Matemática que incluam atividades oportunizadoras da construção da linguagem matemática por meio da leitura e da escrita.

Fonseca e Cardoso (2005) apresentam aspectos da interação discursiva nas aulas de Matemática através de práticas de leitura de textos matemáticos, ou de textos trazidos à cena escolar para ensinar Matemática, ou ainda de textos que demandam a mobilização de conhecimentos matemáticos para a leitura.

Dalcin (2007) abordou em sua pesquisa acerca dos paradidáticos de Matemática, a relação entre a simbologia matemática, as imagens e o texto escrito dentre as diversas abordagens do conteúdo matemático.

Para Benetti (2008), sob o ponto de vista editorial, o paradidático é definido como um livro comercial, sem compromisso com a formalidade científica, tendo como objetivo trazer informações sobre a ciência de forma descontraída e informal.

Consideramos também a definição de Munakata (1997) ao afirmar que os livros paradidáticos são livros que têm características próprias. Diferente dos livros didáticos, eles não seguem uma seriação e nem uma sequência de conteúdos conforme preconiza o currículo oficial. Geralmente, são adotados no processo de ensino e aprendizagem como material de consulta do professor ou como fonte de pesquisa e de apoio às atividades do educando.

Buscando definir os livros paradidáticos, Yasuda e Teixeira (1995), dizem que são consideradas paradidáticas as obras produzidas para o mercado escolar sem as características funcionais e de composição do manual didático.

Em suma, o que define os livros paradidáticos é o seu uso como material que complementa (ou mesmo substitui) os livros didáticos. Tal complementação (ou substituição) passa a ser considerada como desejável, na medida em que se imagina que os livros didáticos por si sejam insuficientes ou até mesmo nocivos. (Munakata, 1997)

Segundo Machado *apud* Trevizan (2008), nos textos paradidáticos os temas costumam ser apresentados de forma menos comprometido com o isolamento e a fragmentação, possibilitando assim a relação com outras áreas de conhecimento.

Somente a partir de 1986 as primeiras coleções de paradidáticos de Matemática começaram a surgir, com as coleções Vivendo a Matemática, da editora Scipione, e A Descoberta da Matemática, da Ática (Dalcin, 2002).

Além de todos os aspectos anteriormente destacados, as informações estatísticas sempre estiveram presentes na vida dos cidadãos e assim como muitas pessoas confiam e utilizam para nortear suas decisões, outras olham, desconfiam e/ou atacam sua verossimilhança (Cazorla e Castro, 2008).

No início do século XX já se alertava que para ser um cidadão pleno, este deveria estar capacitado para calcular, pensar em termos de média, máximo e mínimo, assim como a ler e escrever (Ruberg e Mason, 1988).

No final da década de 90, os conceitos básicos de Estatística e Probabilidade, antes quase ignorados na Educação Básica, passaram a ser discutidos pela comunidade educacional e acadêmica, tendo sido incorporados oficialmente à estrutura curricular da disciplina de Matemática do Ensino Fundamental e Médio com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (Lopes, Coutinho e Almouloud, 2010).

Nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, Brasil (1998) sugerem aos professores que incentivem os alunos a observar os fenômenos, conjeturar hipóteses, fazer levantamento de dados, tratá-los e analisá-los do ponto de vista da investigação científica. Também incentivam a leitura e a interpretação de gráficos, de tabelas e de medidas publicadas pelos diversos meios de comunicação, a fim de que o aluno saiba posicionar-se de forma crítica diante dessas informações e fornecer-lhes ferramentas para arguir e "desmantelar" informações porventura falaciosas ou mal-intencionadas (Lopes, Coutinho e Almouloud, 2010).

Relativamente ao Tratamento da Informação para o Segundo Ciclo do Ensino Fundamental (3° e 4° anos), o trabalho a ser desenvolvido a partir da coleta, organização e descrição dos dados possibilita aos alunos compreender as funções de tabelas e gráficos usados para comunicar esses dados: a apresentação global da informação, a leitura rápida e o destaque dos aspectos relevantes. Lendo e interpretando os dados apresentados em tabelas e gráficos, os alunos percebem que eles permitem estabelecer relações entre acontecimentos e, em alguns casos, fazer previsões. Também, ao observar a frequência de ocorrência de um acontecimento ao longo de um grande número de experiências, desenvolvem suas primeiras noções de probabilidade.

Assim, os PCN, em relação à Probabilidade, consideram que esta pode promover a compreensão de grande parte dos acontecimentos do cotidiano que são de natureza aleatória, possibilitando a identificação de resultados possíveis desses acontecimentos. Destacam o acaso e a incerteza que se manifestam intuitivamente, portanto cabendo à escola propor situações em que as crianças possam realizar experimentos e fazer observações dos eventos.

A partir da verificação dos conteúdos probabilísticos previstos nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Brasil, 1997 e 1998) tem-se como objetivo geral a criação de material paradidático para dar subsídios ao ensino de conteúdos probabilísticos para professores de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental.

Procedimentos Metodológicos

Nesse contexto, consideramos oportuno elaborarmos trabalho que forneça subsídios para a implementação de novas práticas pedagógicas, a partir do estudo e discussão de textos alternativos como os paradidáticos de Probabilidade.

O desenvolvimento desse trabalho será desenvolvido em três etapas, sendo a primeira caracterizada pela análise e classificação de livros paradidáticos publicados no mercado editorial brasileiro.

A análise dos paradidáticos será guiada por roteiro, a saber:

1. Os conteúdos probabilísticos e matemáticos e os temas transversais (Brasil, 1998) abordados;
2. As atividades utilizadas na abordagem do conteúdo probabilístico; as tendências de ensino de Probabilidade utilizadas pelo autor;
3. A interação entre outras áreas do conhecimento (Fazenda, 1994);
4. A presença de elementos lúdicos (Huizinga, 1971);
5. A diversidade de registros de representações semióticas (Duval, 2011);
6. A oportunidade de participação do leitor na construção do próprio conhecimento; os tipos de ilustrações utilizadas (Dalcin, 2007);
7. A possibilidade de utilização da obra em diversos momentos do estudo de determinado conteúdo – na introdução, no decorrer, na finalização.

A segunda etapa será a elaboração de atividades a serem desenvolvidas a partir dos livros paradidáticos, ou seja, a produção de material que contemple aspectos relacionados aos conteúdos probabilísticos e à leitura, com o intuito de proporcionar aos alunos a vivência dos processos apontados por Nacarato e Lopes (2005), ou seja, que processos como comunicação de ideias, interações, práticas discursivas, representações matemáticas, argumentações e negociação de significados; sejam utilizados.

O material será produzido considerando os seguintes aspectos que podem ser realizados concomitantemente:

1. Criar a estória que será o fio condutor das ações a serem desenvolvidas;
2, Criar personagens;
3. Escolher os conteúdos que serão abordados;
4. Desenhar as ilustrações e gravuras;
5. Elaborar o texto.

A terceira etapa será a aplicação deste material nas escolas do subprojeto para identificarmos possíveis problemas e a possibilidade de sua aplicação no dia a dia do ensino do Tratamento da Informação.

Os conteúdos probabilísticos considerados serão os listados no Conteúdo Básico Comum (CBC) Matemática - do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental do estado de Minas Gerais, Minas Gerais (2008), no Eixo Temático IV – Tratamento da Informação – Probabilidade – Conceitos Básicos de Probabilidade, e considerados como conteúdos a serem ministrados no 9º ano, quais sejam:

1. Relacionar o conceito de probabilidade com o de razão;
2. Resolver problemas que envolvam o cálculo de probabilidade de eventos simples.

Publicação de livros paradidáticos em Probabilidade no Brasil

No caso do ensino de Probabilidade, os livros paradidáticos existentes são de ficção tal como "As Novas Aventuras de Sherlock Holmes - Casos de Lógica, Matemática e Probabilidade", Figura 1, onde Bruce (2003) elucida mistérios matemáticos que fazem parte da atmosfera de jogadores ambiciosos, empresários distraídos e vigaristas sem escrúpulos por meio de profundos conhecimentos de Probabilidade, Estatística e Teorias dos Jogos, Sherlock Holmes resolve crimes e protege inocentes. Alguns episódios apresentam questões de diversas áreas da matemática, lógica e teoria dos jogos, lembrando que às vezes podemos tropeçar em escolhas aparentemente simples, sobretudo quando envolvem Probabilidade ou Estatística. Além disso, os conteúdos abordados e os episódios, a nosso ver, não são acessíveis à compreensão dos elementos probabilísticos abordados por alunos do Ensino Fundamental.

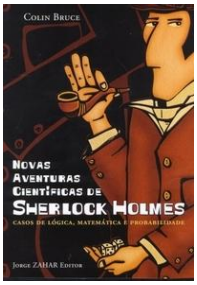


Figura 1. Paradidático: As Novas Aventuras de Sherlock Holmes - Casos de Lógica, Matemática e Probabilidade.

O paradidático "O Segredo da Nuvem" de Brandão (2006), Figura 2, focado a alunos de 4 a 10 anos, conta a estória de um personagem que vê sua vida cotidiana e monótona desmoronar, porque surge, de uma hora para outra, uma situação absurda e inexplicável. É abordado aspectos intuitivos da probabilidade quando é dito que não há nenhuma probabilidade de uma nuvem aparecer sobre a cabeça de uma pessoa. No entanto, aconteceu. Desvendar os enigmas dessa narrativa é um grande exercício de criatividade.

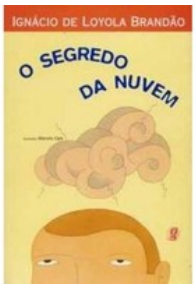


Figura 2. Paradidático: O segredo da Nuvem.

Já Smith (2013) em seu livro "A Probabilidade Estatística do Amor à Primeira Vista", considerada como juvenil, Figura 3, diz que às vezes pode-se ter um "clic" e percebe-se que tudo mudou. Por uma coincidência. Uma fatalidade. Ou algo trivial. Nada será como antes. E quatro minutos podem mesmo mudar tudo, sendo que as possibilidades são muitas.

Figura 3. Paradidático: A Probabilidade Estatística do Amor à Primeira Vista.

Na Figura 4 apresenta-se os livros paradidáticos de Candido *et al*. (2000) chamados: "Independência e Chance" do Projeto Escola e Cidadania que Enfoca a independência de dois eventos por meio da resolução de problemas práticos, recuperando o conceito de probabilidade; e "Que é Probabilidade?" também do Projeto Escola e Cidadania que introduz os conceitos de evento, amostra e probabilidade de um evento.

Figura 4. Paradidáticos: "Independência e Chance" e "O que é Probabilidade?".

Criação do livro paradidático

Primeiramente o grupo escolheu o conteúdo de Probabilidade dos anos finais do Ensino Fundamental como tema principal do paradidático. Definiram-se então os tópicos que seriam abordados no livro de acordo com o Conteúdo Básico Comum – CBC (2008), Matemática – do 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental do estado de Minas Gerais, e os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), 1998, Matemática – Terceiro e Quarto Ciclos do Ensino Fundamental, sendo estes: Conceito de Aleatoriedade e Determinístico; Experimento Aleatório; Espaço Amostral; Evento e Definição de Probabilidade. Relacionando ainda Probabilidade com razão e porcentagem.

Após a definição do tema pensou-se em como elaborar a estória principal do livro abordando os tópicos citados acima. Teve-se então, a ideia de desenrolar a estória com base em uma olimpíada, em que alunos de várias escolas competiriam, passando por várias etapas, sendo elas, municipal, estadual e finalmente nacional, onde se declararia o vencedor da olimpíada.

Acreditamos que os jogos podem ser atividades excelentes para a introdução de conceitos do campo da Probabilidade. Vários tipos deles ajudam a compreender a diferença entre situações aleatórias e determinísticas ou a diferenciar possibilidades de probabilidade (Brasil, 2010).

Dessa forma, decidiu-se utilizar jogos para se trabalhar os conteúdos probabilísticos, inserindo esses jogos como etapas das olimpíadas em que os personagens irão participar para se tornarem campeões nacionais.

Para a escolha dos personagens, tomou-se bastante cautela, pensando em representar vários grupos étnicos que compõem a sociedade brasileira, pois segundo Rocha (2006) é indiscutível que os livros devam refletir as contribuições dos diversos grupos étnicos para a formação da nação e cultura brasileiras. Omitir essas contribuições, ou não reconhecê-las na sua totalidade, é uma forma de discriminá-las.

Assim os personagens principais que compõe a estória são: um branco, um índio, um japonês, um negro e um pardo. A respeito do sexo dos personagens havia sido decidido que seriam duas meninas e dois meninos, porque não havia sido incluído o personagem índio.

Após a inclusão do personagem índio, definiram-se então os personagens como três meninas e dois meninos, utilizando como critério a pesquisa realizada pela PNAD (Pesquisa Nacional de Amostra por Domicílio), divulgado em 2012[1] pelo IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística) em que no Brasil tem mais mulheres do que homens, sendo que de uma população de 196,9 milhões de habitantes 51,3% são mulheres e 48,7% são homens.

Foram definidos então os seguintes personagens principais: o personagem índio (Caue), o personagem pardo (Rafael), a personagem japonesa (Kaori), a personagem branca (Gabriela), a personagem negra (Luíza) e a professora (Rita).

O enredo da estória ainda está em desenvolvimento. Tem-se trabalhado também nas atividades (jogos) onde os alunos que utilizarão o paradidático deverão fazer para ajudar os personagens principais a vencer a Olimpíada, além de caça-palavras e cruzadinhas como entretenimento.

Esses jogos serão aplicados para testar a eficácia, para ser introduzido na estória e tem a função de fixar o conteúdo já inserido pela professora.

Um destes jogos é o Rapa que é um dos mais tradicionais jogos de Portugal e que trás possibilidades em trabalhar conceitos da probabilidade. As Figuras 5 e 6 apresentam as regras do jogo e uma atividade a ser desenvolvida a partir da sua estrutura.

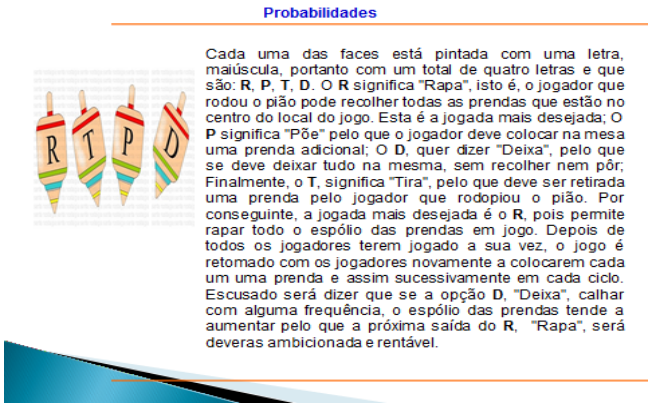


Figura 5. Regras do Jogo RAPA.

[1] http://www.ibge.gov.br/home/estatistica/populacao/trabalhoerendimento/pnad2012/default_sintese.shtm

Figura 6. Atividade a ser desenvolvida com o jogo RAPA.

Atividades propostas

a) Rafael vai lançar um rapa (R; T; P; D) duas vezes consecutivas. Quantos são os resultados possíveis?

b) Gabriela resolveu criar um código de acesso ao seu *Facebook*. O código é uma sequência de três letras do rapa e dois dígitos. Quantos códigos ela pode formar?

Outro jogo que será utilizado é o "Bingo das Probabilidades" que foi criado pelo grupo, onde são fornecidas cartelas aos jogadores contendo seis números. O jogo funciona como um bingo, mas as cartas sorteadas são perguntas sobre probabilidade e na cartela do jogador apresenta valores que o mesmo deverá marca se for a resposta correta da pergunta sorteada. Esse jogo compõe um das etapas da olimpíada em que o grupo formado pelos personagens principais terão que vencer para passar para a próxima etapa.

O aluno deverá saber a resposta certa e marcar o valor correspondente em sua cartela. Sendo que esta cartela é a mesma dos personagens que estão participando do jogo.

Com este jogo o aluno poderá:

- Desenvolver o raciocínio probabilístico;
- Trabalhar utilizando conceito de Espaço Amostral;
- Utilizar Razões.

Definiram-se as seguintes perguntas:

1. No lançamento de um dado não viciado, qual a probabilidade de se tirar um número par?

2. No lançamento de um dado não viciado, qual a probabilidade de se tirar um número ímpar?

3. No lançamento de um dado não viciado, qual a probabilidade de se tirar um número menor que 5?

4. No lançamento de dois dados não viciados, qual a probabilidade de se obter o número 3?

5. No lançamento de dois dados não viciados, qual a probabilidade de se obter o número 7?

6. No lançamento de dois dados não viciados, qual a probabilidade de se obter o número 1?

A cartela que estará contida no livro paradidático é apresentada na Figura 7.

$\frac{6}{36}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{36}$
$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{6}$

Figura 7. Cartela a ser utilizada no jogo "Bingo das Probabilidades".

Assim, os alunos terão que responder as perguntas no local indicado e marcar na cartela as respostas corretas. Serão apresentadas aos alunos três cartelas, mas apenas uma com todos os valores corretos, assim após marcarem as respostas corretas eles terão a cartela vencedora, ajudando assim os personagens a vencer a etapa da Olimpíada.

Conclusão

A proposta deste trabalho é mostrar que a elaboração um livro paradidático pode contribuir para o estudo dos conteúdos probabilísticos de 6º a 9º anos, e desta forma incentivar a leitura que desenvolve a habilidade em interpretar textos e também tornar o estudo de probabilidade mais prazeroso.

A intenção da construção do paradidático não é substituir o livro didático e sim complementá-lo e inserir este material como elementos essencial na formação dos alunos da Educação Básica.

É necessário ressaltar também a importância do aluno ter contato com a leitura, escrita, interpretação de textos e até mesmo na comunicação em sua educação inicial, podendo ser auxiliada com o livro paradidático onde ele trabalhará esses três tópicos de uma forma implícita e prazerosa. Além disso, podemos perceber que esse tipo de livro traz uma linguagem matemática fazendo com que o educando possa familiarizar-se com esse tipo de linguagem e até mesmo que possa ajudá-lo no uso da mesma.

Em termos de conteúdo podemos ressaltar que o paradidático tem maior facilidade de trabalhar a interdisciplinaridade, o que trabalha com a relação dessas disciplinas e auxilia na parte cultural do educando, fazendo com que o aluno veja sua realidade através dos conhecimentos.

Referências

Almeida, P. N. (1998). *Educação Lúdica, prazer de estudar – Técnicas e jogos pedagógicos.* Rio de Janeiro: Loyola.

Benetti, M. (2008). O jornalismo como gênero discursivo. *Galáxia***.** 8(15). São Paulo: PUC-SP.

Brandão, I. L. (2006). *O Segredo da Nuvem*. 1 ed. São Paulo: Global.

Brasil. (1996). Ministério da Educação e Cultura. *Lei n. 9.394/96 de 20 de dezembro de 1996***.** Diretrizes e Bases da Educação. LDB.

Brasil. (1997). Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEF.

Brasil. (1998). Secretaria de Educação Fundamental**.** *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEF.

Brasil. (2010). *Coleção explorando o Ensino*. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica.

Bruce, C. (2003). *Novas Aventuras Científicas de Sherlock Holmes***.** (1. ed.) Rio de Janeiro: Zahar.

Candido, S. L., Zampirolo, M. J. C. V., & Scordamaglio, M. T. (2000). *Independência e Chance***.** Coleção: Projeto Escola e Cidadania. 1 ed. Salvador: Editora do Brasil.

Candido, S. L., Zampirolo, M. J. C. V., & Scordamaglio, M. T. (2000).*Que é probabilidade?* Coleção: Projeto Escola e Cidadania. 1 ed. Salvador: Editora do Brasil.

Cazorla, I. M., & Castro, F. C. de. (2008). *O papel da estatística na leitura do mundo*: o letramento estatístico. *UEPG Humanit. Sci., Appl. Soc. Sci., Linguist., Lett. Arts*, Ponta Grossa, 16(1) 45-53.

Dalcin, A. (2002). *Um olhar sobre o paradidático de matemática*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Campinas: UNICAMP.

Dalcin, A. (2007). *Um olhar sobre o paradidático de matemática*. Zetetiké. Unicamp, 15(27), 25-35.

Duval, R. (2011). *Ver e ensinar a matemática de outra forma*. São Paulo: PROEM.

Fazenda, I. C. A. (1994). *Interdisciplinaridade*: história, teoria e pesquisa. Campinas: Papirus.

Fonseca, M. C.; Cardoso, C. A. (2005). *Educação matemática e letramento*: textos para ensinar matemática e matemática para ler o texto. In Nacarato, A. M., & Lopes, C. E. Escritas e leituras na educação matemática. Belo Horizonte: Autêntica.

Huizinga, J. (1971). *Homo ludens:* o jogo como elemento da cultura. São Paulo: Perspectiva.

Imenes, L. M., Jakubo, J. J., & Lellis, M. (2001). *Para que serve a Matemática? – Estatística*. São Paulo: Editora Atual.

Lopes, C.E., Coutinho, C.Q., & Almouloud, S. (2010). *Estudos e reflexões em Educação Estatística*. 1. ed. Campinas : Ed. Mercado de Letras.

Machado, N. J. (2011). *Matemática e língua materna*: análise de uma impregnação mútua. São Paulo: Cortez.

Menezes, E. T. de., & Santos, T. H. dos. (2002). Paradidáticos (verbete). *Dicionário Interativo da Educação Brasileira* - EducaBrasil. São Paulo: Midiamix Editora. Recuperado em 14 Jun. 2014 de http://www.educabrasil.com.br/eb/dic/dicionario.asp?id=143.

Minas Gerais. (2008). Secretaria de Educação. *Conteúdo Básico Comum*. Belo Horizonte: SEE-MG, 2008. Recuperado em 28 de jun. 2014 de http://crv.educacao.mg.gov.br/..

Mlodinow, L. (2009). *O Andar do Bêbado*: Como o acaso determina nossas vidas. Rio de Janeiro: Jorge Zahar.

Munakata, K. (1997). *Produzindo livros didáticos e paradidáticos*. Tese (Doutorado em História e Filosofia da Educação). São Paulo: PUC.

Nacarato, A. M., & Lopes, C. E. (2005). *Escritas e leituras na Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.

Ruberg, S. J., & Mason, R. L. (1988). Increasing public awareness of Statistics as a science and profession starting in high school. *The American Statistician*, 42(3), 67-170.

Smith, J. E. (2013). *A Probabilidade Estatística do Amor à Primeira Vista*. (1 ed.) São Paulo: Galera Record.

Smole, K. S., & Diniz, M. I. (2001). *Ler, escrever e resolver problemas*: habilidades básicas para aprender Matemática. Porto Alegre: Artmed Editora.

Smoothey, M. (1998). *Atividades e Jogos com Estatística*. São Paulo: Editora Scipione.

Souza, M. F. G. (2002). *Fundamentos da Educação Básica para Crianças*. Volume 3, In: Módulo 2. Curso PIE – Pedagogia para Professores em Exercício no Início de Escolarização. Brasília, UnB.

Trevizan, W. A. (2008). *O uso do livro paradidático no ensino de matemática*. Recuperado em 15 Jun. 2014 de www.usp.br/siicusp/Resumos/16Siicusp/807.pdf.

Yasuda, A. M. B. G., & Teixeira, M. J. C. (1995). *A circulação do paradidático no cotidiano escolar*. In Brandão, H., & Micheletti, G. Aprender a ensinar com livros didáticos e paradidáticos. São Paulo: Cortez.

O ensino de Estatística no curso de Engenharia de Produção

Geraldo Bull da **Silva Junior**
Universidade Cruzeiro do Sul
Brasil
gbulljr@bol.com.br
Celi Espasandin **Lopes**
Universidade Cruzeiro do Sul
Brasil
celilopes@uol.com.br

Resumo

Este artigo apresenta e discute ideias e concepções iniciais sobre a disciplina de Estatística que foram apresentadas por estudantes de um Curso de Graduação em Engenharia de Produção (EP). É um recorte de uma pesquisa qualitativo-interpretativa para uma tese de doutoramento, cujo trabalho de campo foi realizado com uma turma de uma Instituição Federal de Ensino. Para a constituição das categorias a partir de um questionário e de uma entrevista semiestruturada foi utilizada a Análise de Conteúdo. O referencial teórico é baseado em trabalhos de pesquisadores da Educação Crítica, da Educação Matemática Crítica e da Educação Estatística. Os resultados indicam, por parte dos alunos, uma percepção inicial sobre o papel da Estatística na sua futura atuação profissional. A análise aponta a necessidade da disciplina de Estatística iniciar sua inserção na complexa teia de relações da futura atuação do Engenheiro de Produção no diálogo com as demais disciplinas do curso.

Palavras chave: Educação, Estatística, Engenharia de Produção, Ensino Superior, Análise de Conteúdo.

Introdução

O presente trabalho resulta da análise de parte dos dados de uma tese de Doutoramento, que trata do ensino de Estatística na Graduação em EP. O objetivo principal do presente texto é discutir ideias e concepções iniciais que os estudantes de um Curso Superior na área de EP apresentaram sobre a disciplina de Estatística. O artigo pode ser classificado como um estudo teórico, de acordo com Demo (2000), pois procura elementos para compor um quadro de referências, cujas finalidades são discutir e aprimorar elementos teóricos a partir do diálogo e da reconstrução de conceitos pertencentes a diferentes campos do saber.

O trabalho de campo foi realizado em uma instituição Federal de Ensino, no município de Cariacica, no Espírito Santo e, para a coleta inicial de dados, aplicou-se um questionário a fim de verificar o perfil da turma na disciplina Introdução à Estatística, em junho de 2013. Na época e aplicação do instrumento os alunos cursavam Estatística I, oferecida no terceiro período da graduação em EP, ministrada em trinta horas/aula. O objetivo principal da aplicação do

questionário foi obter dados relativos aos seguintes itens: 1) o significado da Estatística para cada um dos informantes; 2) a capacidade de diferenciar uma Variável Qualitativa de uma Quantitativa; 3) a capacidade de diferenciar a Variável Discreta da contínua; 4) que gráficos melhor se adaptariam à descrição dessas variáveis; 5) se o aluno sabia atribuir significados para a palavra Variabilidade; 6) se o aluno considerava a Estatística e a Matemática instrumentos capazes de serem utilizados para influenciar comportamentos; 7) se o aluno considerava que a Estatística e a Matemática contribuem para o reconhecimento de aspectos sociopolíticos no exercício de sua profissão. Neste trabalho, abordar-se-ão as respostas dadas aos itens de número 1, 5, 6 e 7. Com isso, pode-se verificar o estágio em que os alunos se encontravam frente a determinados conceitos estatísticos. Também foram obtidos dados pessoais, tais como faixa etária, escolaridade antes de entrar no curso de EP e, se o aluno já havia cursado Estatística alguma vez.

O outro instrumento utilizado para a obtenção de dados foi a entrevista não padronizada, na modalidade *Semiestruturada*, como opção para se dar forma às anotações de campo. Quando da aplicação do segundo instrumento, os alunos cursavam Estatística II, oferecida no quarto período da graduação em EP, ministrada em quarenta e cinco horas/aula. A Entrevista constituiu-se de perguntas, em forma de roteiro, organizadas em blocos, com base nas Diretrizes Curriculares propostas pela Associação Brasileira de Engenharia de Produção (doravante abreviada ABEPRO). Com a aplicação do questionário, buscou-se saber se o aluno associava a Estatística às seguintes habilidades: a) comunicar-se nas formas escrita, oral e gráfica, compreendendo e aplicando a ética e a responsabilidade na profissão, incluindo a avaliação do impacto das atividades da Engenharia no contexto socioambiental; b) reconhecer se a Estatística capacitaria o aluno a considerar aspectos humanos, econômicos, sociais e ambientais, dentro de uma visão ética e humanística, atendendo às demandas da sociedade; c) identificar, modelar e resolver problemas; d) compreender problemas administrativos, socioeconômicos e do meio ambiente; e) ter responsabilidade social e ambiental; f) verificar as ligações existentes entre os conteúdos estatísticos estudados e as demandas sociais, posicionando-se politicamente e identificando os itens mais significativos a esse respeito.

O registro das falas ocorreu por meio de gravações em áudio, cujas transcrições e análises ocorreram posteriormente. Do contato com as transcrições resultaram a escolha do universo de documentos e composição do *corpus* (conjunto de documentos a serem analisados e os arquivos com as respostas produziram textos nos quais manifestaram-se indicadores, explicitados durante a análise). Para a exploração das respostas dadas tanto às perguntas do questionário quanto às da entrevista, utilizamos o procedimento de Análise de Conteúdo, um método de tratamento e análise de dados. Pretendia-se compreender os textos a partir de convergências e incidências de palavras e frases (Bardin, 2011). Para tal, foram utilizadas informações explícitas e implícitas, as quais passaram por procedimentos metodológicos, a fim de que efetivamente lhes fosse dada a devida interpretação.

Nesse ínterim, seguiu-se o roteiro proposto por Bardin (2011): pré-análise, exploração do material e análise dos dados. Na etapa de pré-análise, ocorreu o primeiro contato com a documentação em si. Os questionários e as transcrições das entrevistas foram lidos, momento em que as respostas foram organizadas, para que pudessem ser feitas as primeiras considerações. A categorização e a análise final possibilitaram a verificação do perfil dos sujeitos, logo no início da pesquisa. Posteriormente, as informações foram analisadas com base em pressupostos teóricos que consubstanciam esta pesquisa: o papel da Estatística na EP.

Os pressupostos teóricos

Quanto ao referencial teórico, foram utilizadas: as considerações da *American Statistics Association* (ASA) sobre o ensino de Estatística do GAISE - *Guidelines for assessment and instruction in statistics education*, documento elaborado em 2005; a ideia de Educação Crítica, de Skovsmose (2007); a proposta de diálogo em Educação, de Alro e Skovsmose (2010); as diretrizes curriculares propostas pela ABEPRO (2013).

A proposta da ABEPRO elaborada nas reuniões do grupo de trabalho de graduação em EP em 1997 e 1998 apresenta uma lista de habilidades necessárias ao exercício da profissão de Engenheiro de Produção. São elas: 1) desenvolver a capacidade de leitura, interpretação e expressão de dados e informações, por meio de gráficos; 2) ter visão crítica da aplicação do conceito de ordem de grandeza; 3) dominar técnicas computacionais; 4) ser capaz de identificar, modelar e resolver problemas; 5) compreender problemas administrativos, sócio-econômicos e ambientais; 6) ter responsabilidade social e ambiental.

O documento também lista conteúdos de disciplinas básicas e informa o que o Engenheiro de Produção deve aprender a utilizar durante a sua formação: a) expressão gráfica; b) Matemática, Probabilidade e Estatística; c) Controle Estatístico da Qualidade; d) Programação Matemática e Processos Estocásticos. Portanto, o Engenheiro de Produção é um profissional do qual se espera o desenvolvimento de múltiplos e diferentes saberes, não cabendo uma formação fragmentada.

Alrø e Skovsmose (2010) consideram que existe uma ideologia escolar dominante sustentada pelo racionalismo científico, a qual levou a Educação Matemática para os caminhos hoje considerados tradicionais. Os autores se contrapõem a esse tradicionalismo, iniciando suas críticas a partir de considerações sobre os currículos escolares existentes. Eles estudaram situações externas à escola e discutiram o conhecimento matemático frente à democracia em sociedades altamente impregnadas por tecnologias. A ideia defendida é a de que a Educação Matemática seja desenvolvida criticamente, ao contrário dos moldes tradicionais, que submetem professores e alunos a padrões repetitivos de atitudes. Um dos fatores que colaboram para a manutenção de tais atitudes é a obrigação de se resolverem exercícios presentes no livro didático, utilizando fórmulas e privilegiando a aplicação de procedimentos algorítmicos.

Skovsmose (2007) discute mais detidamente como o conhecimento matemático voltado para a Educação, presente nos currículos escolares de diferentes países, tende a ser utilizado para produzir a estratificação social e ocultar aspectos sociais, políticos e culturais. Para ele, a Matemática é utilizada como instrumento de estratificação quando, nos currículos escolares, se ignoram aspectos sociais, políticos e culturais. Os procedimentos tradicionais de ensino também influenciam o desempenho individual do aluno. Enquanto a minoria consegue se adaptar a processos rotineiros, que favorecem a adequação ao exercício de profissões valorizadas socialmente, a maioria, excluída pelos processos formais de escolarização, é posta à disposição da sociedade (e sujeita à execução de atividades com remuneração e condições de trabalho precárias). Assim, o conhecimento cumpre o papel de ser um instrumento para seleção social, demarcando competências e legitimando a segregação dos indivíduos incapacitados de lidar com a cadeia produtiva.

A ASA produziu o GAISE, no qual são discutidas diretrizes para o ensino de Estatística em cursos universitários. A proposta do GAISE (Franklin et al, 2005) foi fundamentada no estudo de normas e orientações para o ensino de Estatística existentes na época. Os autores do documento

chegaram a importantes conclusões sobre o ensino e a avaliação da disciplina, estipulando uma lista com as seguintes recomendações:

> 1) enfatizar a literacia estatística e desenvolver o pensamento estatístico; 2) utilizar dados reais; 3) enfatizar o entendimento conceitual ao invés de concentrar o ensino apenas na apreensão de procedimentos de cálculo; 4) promover a aprendizagem ativa na sala de aula; 5) utilizar a tecnologia para o desenvolvimento da compreensão conceitual e análise de dados; 6) utilizar as avaliações como instrumento de melhora da aprendizagem dos alunos (Gaise, 2005, p. 5).

Na elaboração desse documento, foram consideradas as recomendações que enfatizam elementos importantes para o estudante conseguir bom desempenho na aprendizagem de Estatística em cursos introdutórios. A Estatística, da mesma forma que outros campos de conhecimento científico, possui linguagens, conceitos e símbolos próprios. Nesse documento, considera-se que o desenvolvimento da literacia estatística ocorre ao associar-se a capacidade de compreensão das ideias fundamentais da Estatística e de entendimento da linguagem utilizada em sua comunicação (termos estatísticos, símbolos de escrita e gráficos).

A aprendizagem da Estatística requer leitura, construção e atribuição de sentido. O pensamento estatístico pode ser definido como aquele utilizado pelos estatísticos na abordagem ou resolução de problemas da própria área. Ele inclui a necessidade da compreensão de dados e do reconhecimento da importância de sua produção. Também faz parte do cenário de formação do pensamento estatístico o reconhecimento da quantificação, da variabilidade e da explicação desses dados.

Verifica-se uma relação entre as ideias de Skovsmose (2007) com as do GAISE (Franklin et al, 2005), em se tratando da necessidade de desenvolver a literacia (no caso em estudo, a literacia Estatística). Este termo deve ser entendido como a capacidade do aprendiz compreender as ideias fundamentais da Estatística. O desenvolvimento da literacia estatística inclui a capacidade de entender a linguagem utilizada na comunicação: os termos estatísticos, os símbolos de escrita e os diferentes tipos de gráficos estatísticos. Para o desenvolvimento da literacia estatística, sugere-se, como uma das práticas metodológicas, pedir aos alunos a interpretação ou a crítica de artigos, notícias e matérias provenientes da mídia em geral.

A análise dos dados

O questionário foi respondido por vinte e uma pessoas, das quais dezoito declararam não ter feito Curso Superior antes do atual: a Graduação em EP. Dezesseis estudaram Estatística no Ensino Médio, e nenhum deles havia cursado a referida disciplina anteriormente, em quaisquer semestres do Nível Superior.

Após leituras do material e durante a categorização das declarações, surgiram inquietações, à medida que o processo avançava, principalmente quando foram analisadas as respostas dadas às perguntas durante as entrevistas. Em destaque, os seguintes itens: capacidade de considerar aspectos humanos, econômicos, sociais e ambientais; ligações entre o conteúdo de Estatística, demandas sociais e posicionamento político.

A categoria *Estatística como disciplina curricular* apresentou 11 (onze) ocorrências, havendo a repetição de expressões, sendo 4 (quatro) delas inusitadas e 11 (onze) repetidas. A categoria das *aplicações das ciências estatísticas* ocorreu 16 (dezesseis) vezes; a da *Estatística como instrumento para tratar dados ou informações*, 12 (doze), e a da Estatística como

disciplina de caráter matemático, 8 (oito). Também houve associação da Estatística à eficiência e, inicialmente, o grupo de alunos apresentava ideias vagas a respeito da referida Ciência e de sua relação com outras disciplinas, como, por exemplo, a Matemática.

O conceito de *variabilidade* apresentou-se problemático por 12 (doze) informantes, que não souberam atribuir significado ao termo. Do total, 6 (seis) deles não viam possibilidades de articular a Estatística e a Matemática a instrumentos de influência de comportamentos. A Estatística e a Matemática não foram citadas como instrumentos capazes de contribuir para o reconhecimento de aspectos sociais e políticos no exercício da profissão de Engenheiro de Produção.

A última pergunta do questionário abria espaço para o aluno escrever livremente alguma sugestão sobre o ensino de Estatística, quando foram pedidas sugestões para as aulas de Estatística. Os alunos sugeriram trabalhar com pesquisa de campo, com o uso da Informática, com aplicações práticas e o uso de dados verdadeiros.

Sobre as entrevistas, cabe uma explicação em relação à escolha dos alunos, pois não foram sorteados aleatoriamente. O processo foi intencional, e a composição do grupo se deu sob os seguintes critérios: a) entrosamento com a professora no andamento das aulas; b) na primeira prova do semestre a nota não deveria ser a mais alta (acima da média da instituição - nota 6,0 - mas não entre os maiores valores); c) um aluno reprovado em Estatística I completou a composição do grupo de entrevistados.

O Aluno 1 nasceu em 1994 e não havia feito outro curso superior. Foi escolhido para a entrevista porque, durante a observação das três primeiras aulas, destacou-se pela frequente interação com a professora, tanto ao perguntar sobre os procedimentos específicos quanto pela facilidade com a qual dialogava sobre os conteúdos. O Aluno 2 foi escolhido pelo mesmo motivo do Aluno 1: ter se destacado pela interação e facilidade com a qual dialogava a com a professora a respeito dos conteúdos. Nascido em 1991, estava no terceiro semestre do curso quando a pesquisa foi iniciada. Não havia feito outra graduação, mas havia cursado técnico em Administração durante o Ensino Médio Regular e havia estudado Estatística no Ensino Médio. O Aluno 3 foi sorteado para a entrevista. O motivo foi a sua nota acima da média na primeira prova e que, entretanto, não estava entre as mais altas. Nascido em 1994, estava no terceiro período e não havia passado por outro curso superior. Não havia feito curso técnico e seu Ensino Médio foi regular, tendo estudado Estatística nessa época. O Aluno 4 foi sorteado pelo mesmo motivo do aluno 3: nota acima da média sem, entretanto, estar entre as maiores. Nascido em 1992, também estava no terceiro período quando do início da pesquisa. Não fez curso superior nem técnico anteriormente e já havia cursado Estatística no Ensino Médio Regular. O Aluno 5 foi escolhido por ter sido reprovado na disciplina, no semestre em que o trabalho foi iniciado. Nascido em 1984, também estava no terceiro período quando a pesquisa foi iniciada. Havia cursado gestão empresarial em curso técnico no Ensino Médio Regular, no qual estudou Estatística. Já havia cursado parte da graduação em EP em uma instituição privada. Todos os entrevistados estudaram Estatística no Nível Médio.

O Aluno 1 inicialmente não enxergava aplicações diversificadas para os estudos estatísticos, afirmando que, ao ingressar no Nível Superior, sua visão a esse respeito era restrita, em função do que aprendera na fase estudantil anterior, quando teve acesso aos conceitos de

moda[1], média e variância. Ressaltou que passou a ver a Estatística como algo muito mais real, pois explora o que pode acontecer no dia a dia, incluindo o fato de que nada é exato (relatividade). O Aluno 2 declarou que, após um certo período, passou a observar que utilizava muito mais o conhecimento estatístico do que imaginava. A mudança em seu ponto de vista ocorreu paralelamente ao andamento de outras disciplinas (aplicabilidade). O Aluno 4 afirmou que, a partir do momento em que passou a compreender as diferentes situações propostas pela professora, começou a assimilar melhor a Estatística, interpretando melhor os textos e aplicando o conteúdo estudado. O Aluno 4 destacou que, na disciplina Estatística II, a parte conceitual e as informações básicas aprendidas em Estatística I passaram a ser mais aplicadas (aplicabilidade). O Aluno 5 vislumbra a Estatística como um instrumento para diminuir a margem de erro e estipular um plano para melhorar a produção (mensuração e controle). O quadro 1 apresenta o significado atribuído à disciplina de Estatística, obtidas a partir do questionário.

Quadro 1
Termos ligados à imagem que os entrevistados têm da Estatística.

CATEGORIAS	EXPRESSÕES
Noção de Estatística como disciplina curricular	É um estudo que; disciplina que ...; estudo de ...; a/uma matéria que; uma capacitação para ...
Aplicações da Ciência Estatística	Obter melhorias/soluções para situações reais; analisar alguns aspectos sociais; achar uma tendência; tentar obter previsões; é uma simplificação; ferramenta para tomada de decisões; extrair informações sobre eles; ferramenta que auxilia o engenheiro; avaliar o desempenho da produção; conhecer seu comportamento e poder prever sua variação; melhor entendimento de um processo; demonstrar informações; prever dados futuros; seguir uma linha de raciocínio; analisar respostas obtidas; ser importante instrumento para o nosso dia a dia.
A Estatística como instrumento para tratar dados ou informações	Dados são analisados; análise de valores associados a dados; através da coleta e análise de dados; estudos de dados numéricos; método para análise mais eficiente dos dados; análise de dados; instrumento para se compreender amostras e dados; coleta e análise de dados para obter informações; ferramenta para obter dados; análise dos dados de uma amostra; análise de informações; recurso para tratar os dados e obter informações; organizador e coletor de dados.
Disciplina de caráter matemático	Disciplina que utiliza linguagem matemática; disciplina que envolve números e gráficos; um conjunto de ferramentas matemáticas; método de análise matemática; análise matemática de dados; uma área da Matemática; cálculo de probabilidade; gráficos, matrizes, entre outros.

Fonte: Silva Jr, 2014.

O quadro 2 apresenta respostas dadas à pergunta "Até o presente momento, em relação à sua formação em EP, que temas da Estatística foram mais significativos para você?"

[1] O valor que ocorre em maior quantidade em um conjunto de dados.

Quadro 2
Termos ligados ao que os entrevistados julgaram mais significativo na Estatística.

CATEGORIAS	ELEMENTOS DA FALA
Relevância	Importante entender a *análise amostral* e a *análise populacional*, para gerar dados e obter informações; A *curva normal* é importante por mostrar onde os dados estão mais centrados; O primeiro tema significativo foi a *média*: o comportamento médio diz muita coisa; A *moda* não é tão importante, e a *média* diz mais sobre comportamento geral; No começo, a Estatística era sem muito significado e não muito representativa; Ao entrar no Nível Superior, tinha uma visão muito restrita da Estatística ligada ao Ensino Médio e, agora, estou vendo o quanto é necessário saber o que é *moda* e *desvio padrão*; Não basta saber calcular *integral* se as aplicações não se enquadram em padrões de veracidade; Conteúdos e análises gráficas e de probabilidades são bastante úteis; Desenvolve a leitura de textos e a aplicação do conteúdo; Ajuda a melhor entender as diferentes situações propostas pela professora.
Relatividade	Não poder dizer se o que é gerado pela Estatística se constitui em verdades absolutas; As respostas dependem do ambiente estudado; Não se deve ver a Estatística como uma ciência exata, como a Matemática, pois a primeira não tem a exatidão da segunda; A Estatística fornece proximidades com grande chance de efetivamente ocorrerem os fatos; Oscilações bruscas não dizem muito sobre coisas pontuais; Não é prático trabalhar os extremos, porque a influência desses dados é pequena; A Estatística é muito mais real, mesmo porque, no mundo, nada é exato nem pode ser tratado como algo que pode acontecer; Por trás das teorias estatísticas, existem cálculos exatos, mas, a aplicabilidade não é exata; Os resultados não são exatos, existindo probabilidades; Na Estatística, diz-se que é possível apresentar dados exatos.
Mensuração e Controle	Calcular a probabilidade de encontrar elemento defeituoso; Diminuir a margem de erro e estipular um plano para melhorar a produção; Melhorar o cenário de investimento, usando a Estatística para encontrar formas de melhor aplicar o dinheiro; Variância para calcar a possibilidade de variação da produção; Importante para enxergar demanda a partir das informações; Métodos para medir, tirar conclusões e encontrar aproximações; O conhecimento estatístico ajuda a desenvolver noções sobre medir e, a calcular aproximações, clareando a visão sobre uma situação; A média pode dizer sobre o comportamento geral a ser utilizado; Utilizando análise estatística e probabilidade, se consegue analisar mercados futuros; Sobre o cálculo do PIB, pode informar, pelos gráficos divulgados, se houve crescimento ou não, sendo a Estatística importante para compreender o tema.
Aplicabilidade	A parte conceitual e as informações básicas estão sendo muito mais aplicadas; Consegue-se informações que servem para posicioná-las, em relação ao que é analisado; Análises de *probabilidade* e *demanda*, *análise de população* e *do ambiente* foram vistas com mais utilidade; Estudando *hipótese nula* e *hipótese alternativa* em Econometria, constatou-se elos entre a disciplina e a Estatística; O destaque da *curva normal* deve-se ao fato de que, por meio dela, é possível ver onde estão concentrados os resultados; Saber onde há maior concentração, facilitando o trabalho; É difícil encontrar problemas simples em contextos globais; Complexidades emergem e é, a partir da complexidade da disciplina, que se pode observar a aplicabilidade; Não se vê aplicabilidade para os assuntos *Cálculo Diferencial* e *Integral* no dia a dia; Reconhece-se o mundo aplicável, excluindo dele o dos físicos; As análises de *média*, *variância* e *desvio-padrão* são consideradas úteis; Todos os conteúdos da Estatística são considerados úteis dentro da Engenharia de Produção; Para a Engenharia de Produção, não seria prático trabalhar com dados extremos (referindo-se à *média*); Por meio dos cálculos, é possível descobrir resultados que têm existência real; O *valor médio* foi considerado importante, por ser um norteador da produção.

Fonte: Silva Jr, 2014.

A partir das respostas dadas, pode-se perceber que, para os entrevistados, inicialmente a Estatística Descritiva (Estatística I) é concebida como uma disciplina de conhecimentos pouco aplicados, sendo constituída por temas secundários, que são desenvolvidos de forma excessivamente teórica e ensinados longe da complexidade do mundo real. O Aluno 1 afirma que havia se questionado sobre qual seria a serventia da Estatística e que, após iniciar o estudo de Probabilidades, percebeu que ela é muito importante, pois é mais útil saber o que pode acontecer com maior probabilidade. Para ele, é muito superficial alguém dizer que algo é provável. A mudança de opinião sobre o conhecimento estatístico consolidou-se durante a Estatística II. Antes de estudar *probabilidade* e *curva normal*, não percebia utilidade para a Estatística, o que agora já concebe.

Também pode-se perceber que, inicialmente, os conteúdos de Estatística Descritiva não eram vistos como aplicáveis a diversas situações, sendo necessárias mais informações para se confirmar sua aplicabilidade. Esse fato inclusive levou-o a questionar a validade da Estatística para a formação do Engenheiro de Produção. O quadro foi revertido à medida que os conteúdos de Estatística foram utilizados nas aulas de outras disciplinas. Portanto, foi a utilização do referido assunto em outras disciplinas (e não o desenrolar da própria disciplina de Estatística) que validou a utilidade dos conteúdos.

Algumas constatações podem ser feitas a partir do confronto do quadro de habilidades necessárias ao exercício da profissão, postulado pela ABEPRO (2013), e a forma em que as disciplinas são desenvolvidas durante a formação: 1) O depoimento de um aluno deixa evidente que se desenvolve a capacidade de leitura, mas, de forma restrita, a interpretação de enunciados em livros-texto; 2) A expressão de dados e informações por meio de gráficos é atendida; 3) A capacidade de identificar, modelar e resolver problemas é atendida, mas, voltada apenas para a análise do desempenho da produção (compreender problemas administrativos), não alcançando a interpretação de questões socioeconômicas, ambientais e as relativas às responsabilidades social e ambiental.

Voltando a Alrø e Skovsmose (2010), pode-se considerar que, mesmo diante das recomendações de caráter social que fundamentam a proposta de uma associação de classe, a ideologia escolar dominante continua, colaborando para a sustentação de um racionalismo científico, ainda tendendo a trilhar os caminhos tradicionais. Vale ressaltar que as situações estudadas ainda são externas ao ambiente industrial e, consequentemente, ainda não adentraram à sala de aula. Embora o curso de Engenharia esteja cada vez mais impregnado de diferentes tecnologias, seus conceitos não são postos a serviço do desenvolvimento crítico.

Considerando o que afirma Skovsmose (2007), vemos que o conhecimento estatístico presente no currículo volta-se para a estratificação social e não lança luzes sobre aspectos sociais e culturais. Logo, procedimentos tradicionais no ensino de Estatística acabam influenciando a percepção e o desempenho do aluno de Engenharia, levando-o à análise de processos rotineiros e centrados no ambiente industrial. Sendo assim, não cumpre seu papel de instrumento de seleção social, o que demarca e legitima competências que acabam sendo utilizadas restritamente dentro da cadeia produtiva.

As recomendações apontadas no do GAISE (Franklin et al, 2005) mostram a necessidade de não se ensinar apenas a distinguir saberes, meros conceitos. Existem outros aspectos envolvidos no processo de ensino da Estatística como, por exemplo, a necessidade de se lidar com situações abertas, cujo padrão de resolução ainda não foi delineado. Não basta que o

professor detenha o conhecimento científico especificamente falando. Antes, precisa conhecer diferentes teorias sobre as melhores formas de ensinar sua disciplina. No caso em questão, sua ação não deve limitar-se a instrumentalizar para o trabalho analítico restrito, deixando à margem do processo o aprofundar-se no conhecimento conceitual e, em suas ligações com a realidade socioeconômica, na qual o estudante de EP está inserido.

As propostas de Skovsmose (2007) e do GAISE (Franklin et al, 2005) sobre o desenvolvimento da literacia estatística não pode ser colocado apenas a serviço do desenvolvimento da capacidade de se entender uma linguagem utilizada na comunicação, deixando de proporcionar meios de entendimento e crítica de contextos. Considerando que a elaboração e a comunicação de conceitos científicos podem afetar a sua aprendizagem, é necessário incluir formas de diálogo e reflexão, quando se pensar nos meios utilizados para ensinar uma disciplina tão específica como a Estatística.

Considerações finais

Em diferentes níveis, o ensino de uma disciplina que utiliza conhecimento científico específico deve partir da escolha de estratégias com uma abordagem que não exclua a associação de seus conteúdos à realidade em torno do educando. Como realidade, deve ser entendido o conjunto de aspectos da vida social, e não apenas o que ocorre nas comunidades onde se está inserido. A utilização de fatos restritos à vida cotidiana mais próxima (por exemplo, a vizinhança na qual o aprendiz reside ou, o seu local de trabalho) é apenas uma forma fragmentada de se tratar a realidade. Isso porque se deve focar não somente o que acontece em seu dia a dia, mas também o que ocorre fora deles. Os fatos sociais podem ser buscados além da comunidade mais próxima: na cidade, no país e até em outros continentes, evitando o risco de restringir e direcionar excessivamente a visão do estudante. Vale lembrar que, em cada fase da vida escolar, a Educação deve dotar o indivíduo não apenas de conhecimentos e habilidades para lidar com o que aprendeu em diferentes atividades cotidianas. Também necessita cumprir o papel de desenvolver competências para a compreensão de fatos e fenômenos que não apenas aqueles que ocorrem próximo de si.

Uma análise inicial das respostas dadas aos itens do questionário e também às perguntas destacadas na entrevista aponta justamente para a necessidade do ensino de Estatística encarar a complexidade do exercício da profissão de engenheiro e o fato de cada disciplina do Curso encontrar-se em uma complexa teia de relações. Lançar mão de diferentes instrumentos, tal como a pesquisa de campo, pode levar ao uso de dados reais e de ferramentas da Informática, possibilitando a mobilização de conceitos estatísticos em aplicações práticas. Outro aspecto a ser mencionado é a dinamização dos trabalhos a serem propostos pelo professor, colaborando para uma formação técnica que favorecerá ao profissional situar-se política e socialmente, utilizando o conhecimento construído durante a formação profissional. Dessa forma, pode-se ter um indivíduo tecnicamente bem formado e um profissional capaz de fazer da própria atuação um instrumento capaz de desenvolver a sociedade, não apenas do ponto de vista de produção, mas também sob o enfoque da geração e do acúmulo de riquezas, com vistas à qualidade de vida.

Do ponto de vista da necessidade de avaliar a aprendizagem, os resultados obtidos nesta pesquisa podem ser utilizados para que o professor verifique quais habilidades já foram desenvolvidas e que conteúdos ainda necessitam ser aprofundados. Além disso, é oportuno lembrar que o processo avaliativo ocorrido paralelamente ao do ensino permite a elaboração de novas estratégias, o que futuramente favorecerá a abordagem a ser trabalhada com outras turmas.

Não basta pensar na formação profissional como uma das fases do aprendiz, na qual ocorre a mera habilitação para a execução de tarefas específicas numa futura rotina de trabalho. A Estatística pode e deve colaborar para o desenvolvimento de competências do futuro Engenheiro de Produção, de maneira que seja capaz de observar até mesmo as consequências que o próprio exercício da atividade acarretará na sociedade da qual faz parte.

No mundo de hoje, a Estatística pode ser mais um instrumento para que as realidades sociais sejam entendidas e trabalhadas. Além disso, a passagem por uma formação profissional não deve apenas servir para o adestramento de uma profissão. Favorecer a entrada de profissionais no mercado de trabalho é uma forma de perpetuar a fragmentação do indivíduo em detrimento do fato de seu desenvolvimento em realidades de cunhos social e econômico.

Em uma época quando muito se discute a formação e o comportamento ético, é importante desenvolver a literacia e o pensamento estatístico, para que, durante e depois da formação do profissional da EP, o torne habilitado para pautar eticamente o exercício de sua profissão. Engenheiros lidam com a manutenção de diversos recursos de produção, sendo também os responsáveis pela manutenção desses instrumentos. É necessário que, além de protegê-los, também sejam capazes de garantir a segurança de quem opera diretamente na cadeia produtiva, atentando para a existência de outros cidadãos que, embora não participem do processo produtivo, especificamente falando, venham a usufruir de suas conquistas.

Logo, existe a necessidade de se utilizarem conceitos estatísticos como instrumentos de Educação. Em qualquer nível de escolaridade e em especial no Superior deve-se buscar um caminho que possibilite ao aprendiz ultrapassar o simples desenvolvimento de habilidades para o desempenho de tarefas específicas. Orientar a Educação apenas para a aquisição de habilidades técnicas não contribui para a expansão da capacidade de compreender contextos sociopolíticos, como também não amplia o horizonte crítico do educando-cidadão. Este deve ser continuamente desafiado a romper o estágio de conhecimento no qual se encontra para que deixe de ser apenas um acumulador de saberes e um executor de procedimentos técnicos.

Conteúdos conceituais técnicos específicos não são instrumentos que, por si mesmos, favorecem o desenvolvimento de atitude crítica e reflexiva da realidade onde o estudante está imerso. Ensinar Estatística focalizando basicamente a utilização de algoritmos não colabora para o desenvolvimento da capacidade de síntese e de posicionamento crítico por parte do aluno. Faz-se necessária a discussão de contextos nos quais os conteúdos sejam instrumentos de interpretação da realidade, levando o desempenho profissional à prática de reflexões. Por último, para que se consiga revelar tanto as relações de poder na sociedade quanto os interesses existentes por trás dos currículos, não basta estudar apenas detalhes técnicos de uma disciplina.

Finalmente, dois pontos a respeito da pesquisa podem ser considerados: uma fragilidade e uma perspectiva futuras. A fragilidade constituiu-se na impossibilidade em acompanhar todas as aulas para verificar de que forma se deu a mobilização do conhecimento na totalidade da turma em questão. Como perspectiva futura, vemos a necessidade e possibilidade de verificar como ocorre a aprendizagem de Estatística em turmas de outros cursos superiores além das Engenharias.

Referências

Associação Brasileira de Engenharia de Produção. (1998). Referências curriculares. Disponível em <http://www.abepro.org.br/arquivos/websites/1/DiretrCurr19981.pdf> Acesso 18 jul. 2013.

AlrØ, H., & Skovsmose, O (2010). *Diálogo e aprendizagem em educação Matemática* (2ª ed). Belo Horizonte: Autêntica.

Bardin, L. (2011). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Demo, P. (2000). *Metodologia do conhecimento científico.* São Paulo: Atlas.

Franklin, C. et al. (2005). American Statistical Association (2005). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education: College report*. San Francisco: American Statistical Association.

Silva Jr, G. B. (2014). *O Ensino da Estatística da Formação Inicial do Engenheiro de Produção* (Tese de Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática). 196 f. Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo.

Skovsmose, O. (2007). Educação Crítica: incerteza, matemática, responsabilidade. São Paulo: Cortez.

O ensino de gráficos estatísticos no contexto da Educação Crítica

Celso Ribeiro **Campos**
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Brasil
crcampos@pucsp.br
Otávio Roberto **Jacobini**
Pontifícia Universidade Católica-Campinas
Brasil
otavio@puc-campinas.edu.br
Denise Helena Lombardo **Ferreira**
Pontifícia Universidade Católica-Campinas
Brasil
lombardo@puc-campinas.edu.br
Maria Lúcia Lorenzetti **Wodewotzki**
Universidade Estadual Paulista-Rio Claro
Brasil
mariallw@rc.unesp.br

Resumo

A Educação Crítica surgiu como uma contestação ao tradicionalismo no sistema educacional e, em sua perspectiva, professor e alunos assumem o papel de investigadores interessados em problemáticas relacionadas à sua realidade social, construindo conhecimento e realizando atividades intelectuais voltadas à investigações, consultas e críticas. Na Educação Estatística também observamos uma preocupação com os recursos que a Estatística oferece para o desenvolvimento de uma postura investigativa, reflexiva e crítica do aluno. O objetivo deste trabalho é descrever uma ação pedagógica de ensino de gráficos estatísticos tomando a Educação Crítica como princípio norteador. A experiência aqui relatada foi realizada em um curso de nível superior, mas é aplicável ao ensino médio e fundamental. Mostramos que as oportunidades de inserção de temáticas relacionadas aos problemas sociais e políticos ocorrem em diversos momentos e cabe ao educador aproveitar essas situações para incentivar o espírito crítico, investigativo e contestador dos estudantes.

Palavras chave: educação crítica, educação estatística, gráficos, ensino, ação pedagógica

Introdução

Diversos pensadores, em diferentes lugares do mundo, incomodados com a preocupação exclusiva com o ensino e a aprendizagem de conteúdos matemáticos na sala de aula começaram, a partir do início da década de 1980, a questionar o papel da Educação Matemática. Tais pensadores buscavam, com posicionamentos críticos, refletir sobre a razão e a finalidade

pedagógicas da Matemática. Essas reflexões envolveram, principalmente, posturas democráticas, questões sociais, econômicas, culturais, constantes diálogos sobre cidadania e eliminação de preconceitos e da estrutura de poder tanto na relação professor-aluno como na relação dos alunos entre si (Jacobini & Wodewotzki, 2006). Esse conjunto de atitudes educacionais, que tem em Skovsmose (2001; 2005; 2007) um dos seus mais importantes proponentes, tem a ver com a inserção dos pressupostos da Educação Crítica no processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Skovsmose (op, cit), ao propor tal inserção, alinha-se principalmente com os pensamentos de Freire (1965; 1970; 1979), de Giroux (1997) e de D'Ambrósio (1991; 2002; 2005).

Do mesmo modo, no âmbito da Educação Estatística pôde-se observar uma preocupação mais acentuada com os recursos que a Estatística pode oferecer, não apenas para a pesquisa científica, mas também para o desenvolvimento de uma postura investigativa, reflexiva e crítica do aluno em uma sociedade globalizada, marcada pelo acúmulo de informações e pela necessidade de tomada de decisões em situações de incerteza (Campos, 2007).

Nessa linha os estudos apresentam, em seus aspectos teóricos, como relevante no processo pedagógico de conteúdos estatísticos, o desenvolvimento de três competências relacionadas entre si: a literacia, o pensamento e o raciocínio estatísticos. Essas competências, baseadas principalmente na interpretação e na compreensão críticas de informações provenientes de dados reais, estão associadas com uma educação voltada para a formação de uma cidadania crítica e se encontram, portanto, em concordância com os princípios que norteiam a Educação Crítica.

Neste artigo, imbuídos dessas ideias, buscamos descrever uma ação pedagógica que criamos para o ensino de gráficos, baseada em exemplos reais que abrem diversas janelas para discussões críticas a respeito de problemáticas sociais e políticas, entre outras. Sendo assim, não vamos nos ater a discutir o desenvolvimento das competências acima mencionadas, mas vamos principalmente focar na Educação Crítica.

A Educação Estatística no contexto da Educação Crítica

A Educação Crítica tem como uma de suas principais fontes de inspiração a Teoria Crítica da Sociedade, elaborada na Alemanha, na década de 1930, tendo como principal modelo, a crítica empreendida por Marx quanto à formação capitalista da sociedade e de seus valores.

Assim, a Educação Crítica surgiu como uma contestação ao tradicionalismo no sistema educacional. Enquanto a escola tradicional desenvolve um discurso positivista, com preocupações relacionadas com técnicas pedagógicas e com transmissão do conhecimento, os teóricos educacionais críticos afirmam, "com base em argumentos teóricos e em muitas evidências empíricas, que as escolas são, na verdade, agências de reprodução social, econômica e cultural" (Giroux, 1997, p. 148).

A construção do pensamento crítico na educação se deve a dois grandes pensadores do século XX: Jurgen Habermas, na Alemanha e Paulo Freire, na América Latina. Para Freire, a Educação Crítica, tem muito a ver com questões sociais, fruto do aprofundamento das desigualdades no mundo capitalista, com discussões sobre liberdade, participação política, com o problema do preconceito e com contrastes educacionais. Em resumo, a Educação Crítica para Freire tem a ver com uma democracia plena.

O pensamento de Educação Crítica de Paulo Freire foi incorporado por Skovsmose (2001), ao realizar seus estudos sobre a Educação Matemática Crítica: "[...] para que a educação, tanto

como prática quanto como pesquisa, seja crítica, ela deve estar a par dos problemas sociais, das desigualdades, [...] e deve tentar fazer da educação uma força social progressivamente ativa" (p.101). Para o autor, na Educação Matemática Crítica, o processo educacional não pode estar desvinculado da comunidade escolar. Ao contrário, deve relacionar-se com problemas encontrados em situações do cotidiano do aluno.

Com a opção pelo trabalho pedagógico na perspectiva da Educação Crítica, professor e seus alunos aceitam e assumem o papel de investigadores interessados em problemáticas que dizem respeito à realidade social que se encontra ao seu redor, criando possibilidades múltiplas para a construção do conhecimento e realizando atividades intelectuais relacionadas com investigações, consultas e críticas.

É nessa sala de aula crítica que o professor e seus alunos tomam consciência de problemáticas sociais muitas vezes deles despercebidas e, por meio de atitudes voltadas para a práxis social, eles se envolvem com a comunidade, transformando reflexões em ação. É no contexto dessa sala de aula crítica que concebemos a Educação Estatística.

Metodologia e descrição

Nossa proposta aqui não é apresentar uma sequência didática a ser validada quantitativamente pela efetividade de aprendizagem de um conteúdo específico. Nossa intenção é apresentar uma abordagem que configura uma ação pedagógica alternativa para o ensino de gráficos estatísticos, com foco em um estilo de aula que concebe a Educação Crítica como princípio norteador.

Essa abordagem tem o objetivo de mostrar as possibilidades pedagógicas de discussão de problemas políticos e sociais e de interpretação crítica de informações quantitativas, que diariamente circulam em diferentes tipos de mídia.

Dessa forma, concebemos uma aula atípica para o ensino de gráficos em Estatística, na qual nos baseamos em contra-exemplos, ou seja, em situações nas quais os gráficos são construídos erradamente, de forma a induzir uma interpretação equivocada da realidade retratada por ele.

Aplicamos essa aula em um Curso Tecnológico de Gestão, em uma faculdade privada da cidade de São Paulo, Brasil, na disciplina de Estatística Instrumental. Esse tipo de curso representa uma possibilidade de formação superior rápida, pois tem a duração de apenas dois anos. Os alunos são, em sua maioria, adultos, trabalhadores (o curso é noturno), oriundos da periferia, egressos de escolas públicas e dependentes de ajuda governamental (PROUNI e FIES) para custear seus estudos.

A ação pedagógica

Após uma aula introdutória sobre o assunto, na qual o professor apresentou os diversos tipos de gráficos e suas aplicações, deu-se a ação pedagógica que aqui descrevemos. Com o apoio de um notebook e de um projetor multimídia, o professor passou a mostrar diversos exemplos de gráficos veiculados em diferentes tipos de mídia, os quais continham algum erro ou viés de construção que modificava substancialmente a interpretação da informação quantitativa ali contida. Dessa forma, cada exemplo gerava uma discussão, um debate acerca da problemática ali retratada ou da forma como foi feita sua construção. Professor e alunos discutiam principalmente as intenções das tais construções equivocadas. Apresentamos na sequência alguns slides que utilizamos nessa abordagem.

A figura 1 apresenta o primeiro slide mostrado aos alunos:

Figura 1. Gráfico em colunas como mostrado na tela de uma televisão.

O erro desse gráfico está na escala utilizada na última coluna, referente ao ano de 2013. Ele foi mostrado em um programa de televisão fechada, em um canal de notícias que é amplamente conhecido no Brasil. Olhando-se a imagem, a interpretação imediata é a de que em 2013 a inflação no Brasil atingiu um valor mais alto que nos quatro anos anteriores. Contudo, essa interpretação é equivocada, pois a altura da última coluna está errada.

Os alunos se mostraram indignados e inconformados sobre o erro e inferiram que a interpretação equivocada contribui para uma dar uma noção viesada sobre a efetividade da condução da política econômica pelo governo federal.

Na figura 2 apresentamos o segundo slide:

Figura 2. Gráfico em colunas referente a índices de inflação no Brasil em 2013 como mostrado na tela de uma televisão.

O erro agora está na inversão da ordem cronológica dos meses. Considerando que essa imagem aparece na tela da televisão por poucos segundos, a interpretação imediata é de que a inflação subiu drasticamente no período. A realidade, contudo, é inversa, ou seja, a inflação caiu substancialmente de um mês para o outro. A indignação e revolta dos alunos foi acentuada, gerando comentários que classificavam o erro como obsceno, proposital, manipulador, etc.

Insta apontar que a imagem da figura 2 foi veiculada pelo mesmo canal de notícias mostrado na figura 1.

A figura 3 mostra dois gráficos em colunas e refere-se ao terceiro slide:

Figura 3. Duas imagens capturadas de uma emissora de TV aberta do Brasil.

As informações contidas nos gráficos foram veiculadas por uma rede de TV aberta do Brasil em 2008 e foram alvo de diversas críticas na internet. O erro de escala, grifado em vermelho na imagem, é gritante e não há como esconder a intenção de manipulação, prontamente rechaçada pelos alunos. A essa altura a indignação dos alunos era tanta que observamos risos e piadas sobre o exemplo.

Para mostrar que os erros não são cometidos apenas no Brasil, a figura 4, que representa o quarto slide, mostra um exemplo da Venezuela:

Figura 4. Gráfico em colunas mostrado em um *site* de uma emissora de TV venezuelana.

Como se vê na imagem, a figura 4 representa porcentagens de voto na eleição presidencial da Venezuela em 2013. Embora a diferença entre os candidatos seja de apenas 1,59 pontos percentuais, a manipulação da escala a faz parecer muitíssimo maior. A reação dos alunos a essa imagem não foi tão forte e interpretamos que isso se deu pelo fato de que a realidade em outro país não lhes chama tanto a atenção. Contudo, a imagem foi útil para mais uma vez chamar a atenção aos detalhes de construção de um gráfico que podem causar interpretações erradas.

A figura 5 trata de um exemplo de gráfico em setores que comete um equívoco básico:

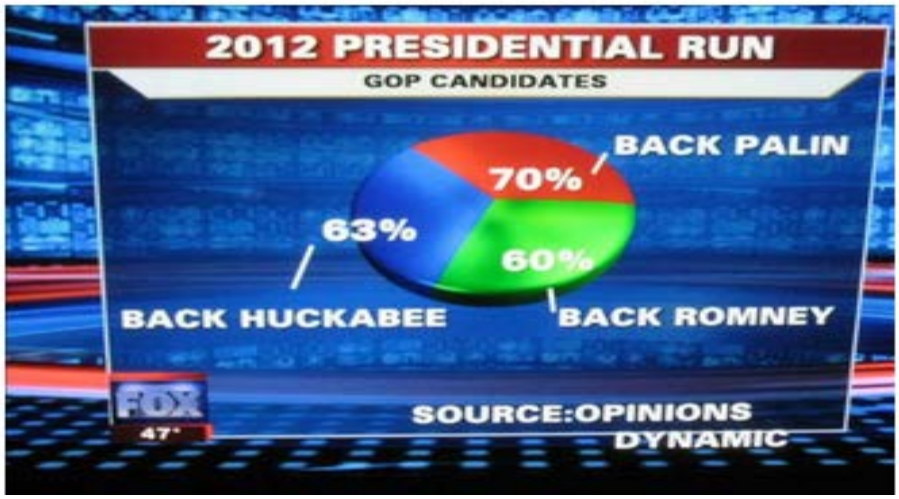


Figura 5. Exemplo de gráfico em setores veiculado em uma emissora de TV norte-americana.

Como a realidade descrita no gráfico da Figura 5 não é familiar aos alunos, tratamos apenas de avaliar suas percepções quanto ao erro. Com efeito, não demorou mais do que um minuto para os alunos perceberem que a soma das porcentagens supera 100%, o que foi classificado pelos alunos como erro infantil e vergonhoso.

O gráfico 1 compôs o sexto slide e representa um gráfico em setores demonstrando os resultados de uma pesquisa do Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada (IPEA), órgão ligado ao governo federal, apresentados em 27/03/2014:

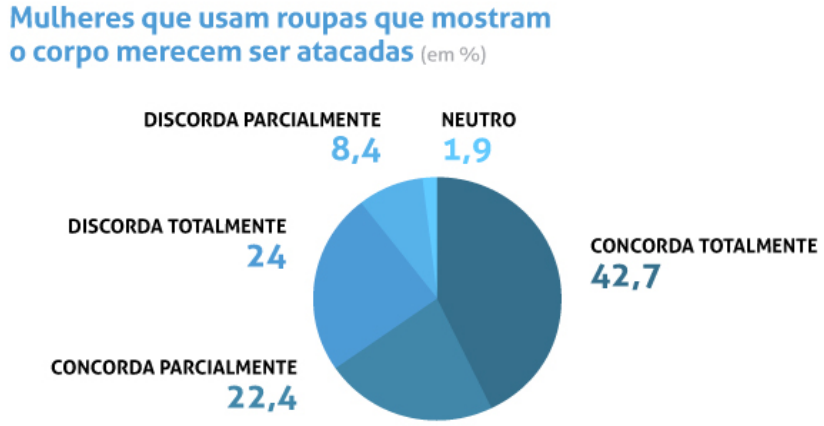


Gráfico 1. Resultados de pesquisa do IPEA divulgados em http://noticias.uol.com.br/cotidiano/ultimas-noticias/2014/03/27/maioria-diz-que-mulher-com-roupa-curta-merece-ser-atacada-aponta-pesquisa.htm.

A divulgação dessa pesquisa provocou protestos, mobilizou artistas e autoridades, entre elas a presidente Dilma Rousseff, e teve ampla repercussão nas redes sociais. As manifestações de repúdio tinham como alvo o retrato de um comportamento machista e de incitação à violência contra a mulher revelado na pesquisa. Tal foi a indignação popular que, na semana seguinte, o IPEA divulgou uma nota esclarecedora, pedindo desculpas pelo erro de divulgação dos resultados da pesquisa e mostrando outros resultados, supostamente corretos, bastante diferentes dos que haviam sido divulgados anteriormente. Além disso, o IPEA comunicou o pedido demissão do diretor de Estudos e Políticas Sociais.

O debate que se seguiu na sala de aula foi em torno do tema da violência contra a mulher, com participação entusiasmada dos alunos, revoltados com o erro grosseiro do IPEA e com a realidade da mulher brasileira, vítima contumaz de atos de violência que muitas vezes ocorre em sua própria residência.

Não passou despercebido dos alunos outro erro cometido no gráfico: a soma das porcentagens é 99,4 e não 100% como deveria ser.

Análise e considerações finais

À luz da Educação Crítica, a ação pedagógica aqui mostrada foi eficaz no sentido de trazer para a sala de aula questionamentos de natureza política e social. As discussões e debates, em alguns momentos acalorados e incisivos, mostraram o engajamento dos estudantes nos temas abordados, fazendo-os refletir sobre sua realidade social e política. Nesses debates, o professor, atuando como moderador, fez emergir em sua aula um ambiente democrático e desierarquisado. Os alunos, por sua vez, tiveram a oportunidade de vivenciar situações que os incitaram a uma tomada de postura, deixando a passividade de lado e manifestando abertamente suas ideias e críticas.

Quanto à Educação Estatística, observamos que o trabalho com dados reais foi importante para levar os alunos a perceberem a importância de saber ler e interpretar gráficos. A estratégia da aula foi favorável ao engajamento dos alunos ao tema proposto e ficou evidenciada na reação dos alunos a satisfação em aprender ao mesmo tempo em que se discute problemas ligados à sua realidade.

Em nossa visão, a interação da aula de Estatística ao contexto da Educação Crítica se mostrou importante porque valoriza o aluno, não apenas no que diz respeito à sua formação intelectual, mas, igualmente, como cidadão, na medida em que o incentiva a olhar para si e para o mundo que o cerca, o leva a tomar conhecimento e a partilhar dos problemas sociais e políticos da realidade em que ele vive, e o motiva a questionar essa realidade. Esse questionamento traz em si um não-conformismo e incentiva uma reação no sentido de mudar, de melhorar, de exigir posturas e atitudes éticas, comprometidas com o bem público, com o bem estar das pessoas.

Nosso interesse ao relatar essa experiência foi o de mostrar que as oportunidades de inserção de temáticas relacionadas aos problemas sociais e políticos ocorrem em diversos momentos da ação pedagógica e cabe ao educador aproveitar essas situações para incentivar o espírito crítico, investigativo e contestador dos estudantes, que se sobressai quando ele é colocado frente a frente com uma problemática social que envolve a sua realidade.

Por fim, cabe ressaltar que o tema trabalhado nessa ação pedagógica não é exclusivo do ensino superior. Essa mesma estratégia pode ser aplicada em uma aula de ensino médio ou mesmo fundamental, pois a interpretação de gráficos estatísticos é recomendada para os diversos níveis educacionais.

Referências e Bibliografia

Campos, C. R. (2007). *A Educação Estatística: uma investigação acerca dos aspectos relevantes à didática da Estatística em cursos de graduação* (Tese de Doutorado em Educação Matemática). IGCE- UNESP, Rio Claro, SP.

D'Ambrosio, U. (1991). Matemática, Ensino e Educação: uma proposta global. *Temas & Debates*, *3*(IV), 1-15. Rio Claro, SP: SBEM.

D'Ambrosio, U. (2002). *Etnomatemática– Elo entre tradições e modernidade*. (2ª ed.). Belo Horizonte: Autêntica.

D'Ambrosio, U. (2005). Armadilha da mesmice em Educação Matemática. *BOLEMA*, *24*(18), 95-109. Rio Claro, SP: UNESP.

Freire, P. (1965). *Educação e liberdade*. Rio de Janeiro: Paz e Terra.

Freire, P. (1970). *Pedagogia do oprimido*. Rio de Janeiro: Paz e Terra.

Freire, P. (1979). *Educação e mudança*. Rio de Janeiro: Paz e Terra.

Giroux, H. A. (1997). *Os professores como intelectuais: rumo a uma pedagogia crítica* (Tradução de Daniel Bueno). Porto Alegre: Artes Médicas.

Jacobini, O. R., & Wodewotzki, M. L. L. (2006). Uma reflexão sobre a modelagem matemática no contexto da Educação Matemática Crítica. *BOLEMA*, *25*(19), 71-88. Rio Claro, SP: UNESP.

Skovsmose, O. (2001). *Educação Matemática Crítica: a questão da democracia* (Tradução de Abgail Lins e Jussara de Loiola Araújo). Campinas: Papirus.

Skovsmose, O. (2005). Guetorização e globalização: um desafio para a Educação Matemática. *Zetetiké*, *13*(24), 113-142. Campinas, SP: UNICAMP.

Skovsmose, O. (2007). *Educação Crítica: Incerteza, Matemática, Responsabilidade* (Tradução de Maria Aparecida Viggiani Bicudo). São Paulo: Cortez.

O meio ambiente como tema transversal articulado ao estudo dos conceitos estatísticos

Karine Machado Fraga de **Melo**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
karinemfm@ig.com.br
Claudia Lisete Oliveira **Groenwald**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
claudiag@ulbra.br

Resumo

Este artigo apresenta uma investigação sobre o estudo dos conceitos estatísticos articulados com o tema transversal meio ambiente. A presente pesquisa buscou investigar como a implementação de uma sequência didática eletrônica contextualizada com questões ambientais contribui para o processo de ensino e aprendizagem de conceitos estatísticos a serem desenvolvidos nos anos finais do Ensino Fundamental. Para isso foi realizada uma experiência com uma amostra de 33 alunos de uma escola pública do Rio Grande do Sul, Brasil. Os resultados apontam que a aplicação da sequência didática eletrônica contextualizada com questões ambientais contribuiu para o processo de ensino e aprendizagem de conceitos estatísticos visto que: proporcionou aos alunos a revisão e o aprofundamento dos conceitos estatísticos que já haviam sido estudados em sala de aula e o acréscimo de novos conceitos, sob uma nova forma de abordá-los, contemplando a contextualização de questões de urgência social.

Palavras chave: Ensino de Estatística. Sequência Didática Eletrônica. Temas Transversais. Meio Ambiente .Tecnologias da Informação e Comunicação.

Summary

This article presents an investigation about the statistical concepts linked whith the environment transversal theme. The present research seeked to investigate as an implement of a eletronic sequence didactic structured with environmental questions contributes to a teaching and learning process about the statistical concepts to be developed in the final years of Fundamental Course. For this it was accomplished an experience with a sample of 33 students fron a public school in Rio Grande do Sul, Brazil. The results point that the application of the eletronic sequence didactic structured with environmental questions contributed to the teaching and learning process of statistic concepts in as much as: it provided to the studensts the review and the Deep of the statistics concepts that had abready been studied in classroom and the increase of new concepts, under a new way to approach them, observing the context of social urgency questions.

Key words: statistics teaching, electronic didactic sequence, transversal themes, environment, technological resources.

Introdução

Neste artigo apresenta-se uma discussão sobre o estudo dos conceitos estatísticos integrados com o tema transversal meio ambiente através da aplicação de uma sequência didática eletrônica, que está implementada no Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem (SIENA), direcionada para alunos do 9º ano do Ensino Fundamental.

O SIENA é uma plataforma de ensino desenvolvida para estudos de um tema qualquer, resultado da parceria entre o Grupo de Estudos Curriculares de Educação Matemática (GECEM), da Universidade Luterana do Brasil e o Grupo de Tecnologias Educativas da Universidade de La Laguna (ULL). Este sistema possui duas opções de uso: a primeira serve para os alunos estudarem determinado conteúdo, realizando testes para avaliarem os conhecimentos adquiridos e, a segunda oportuniza aos estudantes a realização do teste e a recuperação individualizada das dificuldades que o estudante apresentou. Nesta investigação o SIENA foi utilizado para estudo de um tema.

É essencial à formação dos alunos o desenvolvimento de atividades estatísticas contextualizadas que envolvam desde uma estratégia de resolução de problemas até uma análise de resultados obtidos, a fim de garantir a possibilidade de desenvolvimento de uma Estatística que contribua para a formação de cidadãos críticos e participativos.

A Matemática e a Estatística articuladas com o tema transversal meio ambiente

Segundo Groenwald e Silva (2001), a construção de um currículo matemático, considerando os temas de relevância social, confere ao mesmo uma perspectiva integradora e nesse sentido, sua organização se estabelece em torno de situações e problemas de interesse que permitam uma leitura, compreensão e interação da realidade social, cultural, política e natural. Um tema de relevância é sem dúvida a Educação Ambiental.

A degradação ambiental causada pelo consumismo desenfreado é fruto dos valores adotados pela sociedade capitalista, no qual,

> [...] se vive para ganhar o máximo que puder e consumir na mesma medida. Vivemos em um mundo onde o lucro é mais importante que as consequências. Nossas reservas naturais estão sendo destruídas de maneira mais rápida do que o planeta possa repor. As perspectivas sobre o futuro do planeta não são nada animadoras (Perez; Paulo, 2008, p. 1).

Nos PCN (Brasil,1998) incorporam-se, nas áreas já existentes, temas de urgência social, sendo um deles o Meio Ambiente. De acordo com Perez e Paulo (2008), uma das medidas urgentes é reavaliar o processo educacional vigente. Torna-se necessário repensar as ações pedagógicas e caminhar para uma educação que vise à formação de alunos capazes de refletir sobre as questões ambientais.

A preservação do Meio Ambiente passa, indiscutivelmente, pela mudança de mentalidade, e essa pode ser alcançada através da educação, trabalhando esses conceitos na escola, a qual é um polo divulgador e um dos responsáveis pelas mudanças de atitudes (Groenwald; Silva, 2001).

O ensino de Matemática pode auxiliar o aluno na compreensão do cotidiano e na sua intervenção no Meio Ambiente, portanto, colaborar na formação de um cidadão crítico (Possas, 2003, p. 3). Através da Matemática é possível entender e discutir questões econômicas, sociais e ambientais, perceber e questionar as injustiças, comparar as diferenças salariais, entender índices e gráficos, entre outros.

De acordo com os PCN, (Brasil, 1998) o conhecimento matemático, deve contribuir para a capacidade crítica reflexiva na formação do educando, levando-o a entender o verdadeiro papel da Matemática em nossa sociedade.

> A matemática é muito mais do que a Ciência dos números, das abstrações ou do espaço, ela é constituída de um amplo espectro de Matemáticas que se intercomunicam numa lógica de relações fundamental para as aprendizagens do ser humano (Gigante; Santos, Silva, 2009, p. 37).

O ser humano faz parte do Meio Ambiente e estabelece relações de acordo com o espaço que está ao seu redor e com todos os outros elementos ou seres vivos que com ele interagem. As relações sociais, econômicas e culturais fazem parte do meio e, portanto, envolvem o homem que habita uma área ambiental. Ao longo da história, o homem transformou-se pela modificação do meio ambiente, criou cultura, estabeleceu relações econômicas, modos de comunicação e precisou refletir sobre como essas relações socioeconômicas e ambientais estão avançando, para tomar decisões adequadas a cada passo, na direção das metas desejadas por todos: o crescimento cultural, a qualidade de vida e o equilíbrio ambiental (Lima, 2008, p. 49).

Esse tema pode apresentar de acordo com o conteúdo matemático, a forma procedimental da coleta, organização e interpretação de dados estatísticos e outras situações que possam auxiliar a tomada de decisões sobre a prevenção do Meio Ambiente (como, a camada de ozônio, desmatamento, poluição). Segundo Lima (2008, p. 49), "[...] com a quantificação, é permitido fazer as intervenções necessárias, por exemplo, reciclagem e aproveitamento de materiais. Além disso, (a) possibilita a interpretação dos resultados e levanta discussões acerca da preservação do Meio Ambiente; (b) estimula a pesquisa entre os alunos para além do livro didático".

Assim, consideramos que o estudo de conceitos estatísticos contextualizados a questões de importância social tornam-se relevantes para os anos finais do Ensino Fundamental, pois possibilitam aos alunos o desenvolvimento da capacidade de coletar, organizar, interpretar e comparar dados para obter e fundamentar conclusões, que segundo Lopes (2008), é a grande base do desempenho de uma atitude científica.

Metodologia da Investigação

Para investigar como a implementação de uma sequência didática eletrônica contextualizada com questões ambientais contribui para o processo de ensino e aprendizagem de conceitos estatísticos a serem desenvolvidos nos anos finais do Ensino Fundamental, foi necessário a construção do ambiente de investigação, no sistema inteligente de ensino SIENA, desenvolvido com as seguintes ações:

- construção do grafo com nodos[1] sobre os conceitos básicos de Estatística;
- elaboração da sequência didática eletrônica, com os conceitos básicos de Estatística para os anos finais do Ensino Fundamental, inseridas no SIENA, para cada nodo do grafo;
- construção do banco de questões, que foram cadastradas no SIENA. As questões foram elaboradas e adaptadas, tendo como base a análise das atividades didáticas e exercícios presentes em livros didáticos para o nono ano. Para cada nodo do grafo foram desenvolvidas 30 questões, classificadas em fáceis, médias e difíceis, com cinco opções de resposta cada uma, para a realização dos testes adaptativos em cada nodo do grafo. As

[1] São os conceitos que fazem parte do grafo.

questões elaboradas tiveram por finalidade a identificação das dificuldades dos alunos nos conceitos de Estatística estudados e a autoavaliação.

Foi realizada uma experiência, utilizando o ambiente construído no SIENA, com uma amostra de 33 alunos que estavam cursando o 9º ano do Ensino Fundamental, em uma escola Estadual do munícipio de Porto Alegre.

Construção do Ambiente de Investigação no SIENA

Para a implementação da experiência no SIENA, o grafo dos conteúdos a serem estudados foi construído no *software Compendium* e importado para o SIENA, possuindo seis nodos: *Introdução à Estatística*; *Tabelas*; *Gráficos*; *Medidas de Tendência Central; Estatística e Educação Ambiental Resolução de Problemas* e *Conceitos Básicos de Estatística,* conforme representados na Figura 1.

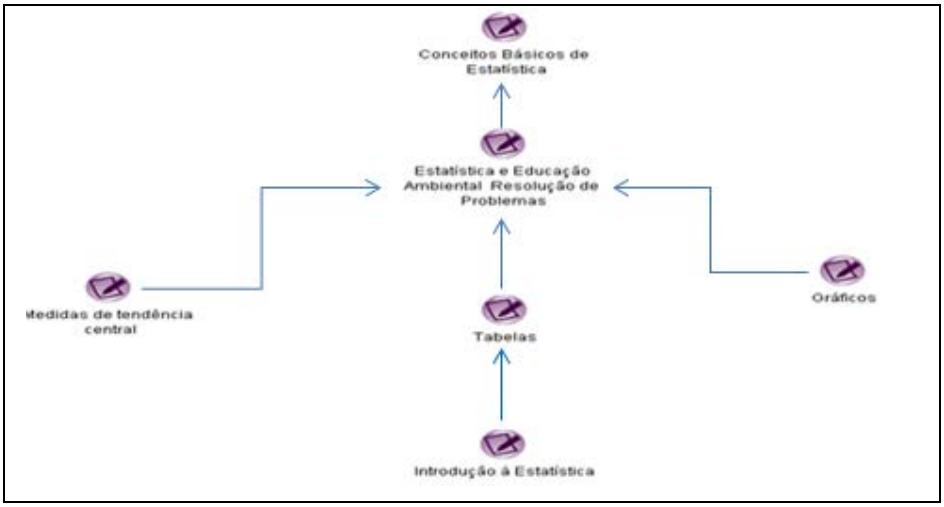


Figura 1. Grafo dos nodos com os conceitos estatísticos.
Fonte: http://siena.ulbra.br

O sistema SIENA foi utilizado para os alunos estudarem os conteúdos de cada nodo do grafo e, após, realizarem os testes adaptativos, para informar quais são seus conhecimentos sobre os conceitos estatísticos estudados, servindo como autoavaliação para o aluno e para o professor acompanhar o desempenho dos mesmos. O trabalho foi desenvolvido em grupos de dois ou três alunos. O SIENA considera que um nodo é predecessor do outro e só avança quando o aluno consegue obter um desempenho maior ou igual a 0,6, em uma escala de 0,0 a 0,10.

Para cada nodo do grafo foi desenvolvida uma sequência didática eletrônica com conceitos estatísticos integrados com os conteúdos referentes ao tema transversal Meio Ambiente seguindo as orientações dos PCN (Brasil, 1998).

A temática Meio Ambiente é abordada com o objetivo de incorporar as questões ambientais e a valorização da vida na prática educacional, buscando contribuir para a formação da cidadania, ou seja, visa não formar a competência e sim propor atividades que colaborem para o desenvolvimento da mesma. Portanto, as questões elaboradas para os testes adaptativos não visam avaliar o nível de compreensão dos alunos referente aos conteúdos do Meio Ambiente e, sim contribuir para o desenvolvimento de posturas pessoais e comportamentos sociais que lhes permitam viver numa relação construtiva consigo mesmo e com seu meio, colaborando para que a sociedade seja ambientalmente sustentável e justa.

Assim, primeiro foram realizados, pelos grupos, o estudo da sequência didática eletrônica do nodo *Introdução à Estatística*. Após terem estudado os conceitos estatísticos apresentados na sequência didática eletrônica, os alunos realizaram o teste e à medida em que estes foram sendo aprovados, o SIENA disponibiliza a sequência didática eletrônica do nodo seguinte. Caso o aluno não fosse aprovado no teste de cada nodo, o SIENA apresenta um *link* denominado recuperação de conteúdos, para o aluno retornar à sequência e retomar os estudos e atividades sobre o conceito abordado, para então realizar um novo teste sobre este mesmo conceito, e assim sucessivamente.

A sequência didática eletrônica com os conceitos estatísticos articulados com o tema transversal meio ambiente

A sequência didática eletrônica desenvolvida está implementada no sistema SIENA, disponível no endereço eletrônico: *http://siena.ulbra.br*. Para o desenvolvimento da sequência didática eletrônica, inicialmente foi realizado um estudo bibliográfico das orientações estabelecidas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), referentes ao bloco de conteúdo Tratamento da Informação (Brasil, 1998) e ao tema transversal Meio Ambiente (Brasil, 1998). Após investigou-se a história da Estatística, a abordagem didática do conteúdo e as atividades sobre os conceitos estatísticos em livros didáticos de Matemática para os anos finais do Ensino Fundamental.

Para a construção das sequências didáticas eletrônicas para cada conceito foram utilizados os seguintes recursos informáticos: editor de apresentação gráfica (o editor utilizado nas sequências didáticas foi o *Power Point* da *Microsoft*, salvo em *ispring* para a apresentação do material de estudos contendo os conceitos estatísticos a serem estudados; atividades lúdicas desenvolvidas no aplicativo *JClic*; jogos *online*; *sites* informativos referentes a questões ambientais.

Em cada nodo do grafo há uma porta de entrada, com os links de cada atividade, que permite aos alunos estudarem conforme suas preferências, ou seguirem a ordem indicada. Buscou-se apresentar os conceitos estatísticos integrados aos conceitos ambientais, pois de acordo com Filippsen e Groenwald (2003),

> [...] há a necessidade de uma proposta de Educação Matemática que se torne formadora de hábitos, atitudes e comportamentos que devem identificar, formular propostas e atuar no sentido de preservação do Meio Ambiente, bem como, desenvolver e aprofundar os conteúdos de Matemática, com compreensão e com uma visão crítica, formadora da cidadania.

A Figura 2 ilustra a abordagem do conceito de média aritmética integrado aos conceitos *conhecimento e valorização de alternativas para a utilização dos recursos naturais* e *análise crítica de atividades de produção e prát icas de consumo*.

Figura 2. Material de Estudo com o conceito de média aritmética.
Fonte: http://siena.ulbra.br

Com relação aos conceitos estatísticos abordados, buscou-se apresentá-los aos alunos de maneira contextualizada. A Estatística em sala de aula "[...] deve estar em consonância com as necessidades, os interesses e as experiências de vida dos alunos" (ROSETTI, 2007 apud ALVES; SANTOS, 2011, p. 3). O objetivo principal centra-se nos alunos coletarem, organizarem e interpretarem a informação. Baseados na análise da informação, os mesmos devem formular conjecturas, tirar conclusões e fundamentá-las.

Na sequência didática eletrônica, para cada nodo do grafo, também foram desenvolvidos, com o *software JClic*, projetos de atividades. Para os projetos foram elaboradas atividades de preencher lacunas, resposta escrita, completar texto, associação simples e complexa, identificar células, cata palavras, jogo da memória e palavra cruzada. Segundo o *National Council of Supervisors of Mathematics [NCTM]* (1991),

> os alunos deverão ser envolvidos em atividades de aprendizagem ricas e diversificadas, nomeadamente a realização de trabalhos de grupo e de projetos, atividades interdisciplinares com o uso de calculadora e computadores, no sentido de enfrentarem os problemas, do mundo que nos rodeia, com confiança.

Neste sentido, foram desenvolvidas atividades para o aluno ler e interpretar dados apresentados em gráficos e tabelas. A Figura 3 ilustra uma atividade de preencher lacunas, desenvolvida para o nodo *Gráficos*, na qual o aluno deveria ler e interpretar os dados apresentados pelo gráfico para responder às questões propostas. Nesta modalidade de atividade de texto a resposta é escondida, o aluno é que deve completar. Se a resposta estiver correta, as palavras que completam a frase ficam em azul e automaticamente passa para a próxima pergunta, se a resposta estiver errada, as palavras que completam a frase ficam em vermelho e não é possível responder a próxima questão até acertar a resposta. Acertando as questões o aluno recebe a mensagem *"Ei! Mandou bem!!!"*.

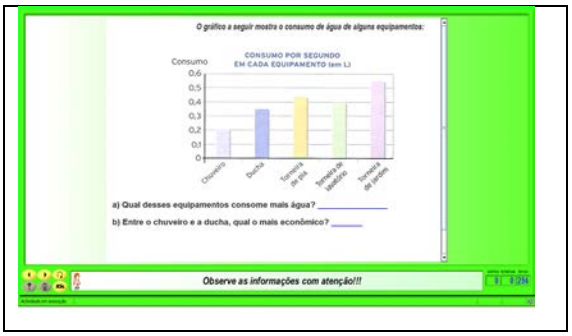


Figura 3. Atividade de preencher lacunas .
Fonte: http://siena.ulbra.br

Na sequência didática também foram apresentados *sites* informativos referentes a questões ambientais. Para acessar estes *sites* era necessário acessar a porta de entrada de cada nodo do grafo e clicar nos *links Curiosidades.*

A seleção dos *sites* foi feita de acordo com o conteúdo ambiental abordado em cada nodo do grafo, tendo como objetivo ressaltar a complexidade dos problemas ambientais e, em consequência, a necessidade de desenvolver o sentido crítico e as atitudes necessárias para resolvê-los. Para a sequência didática eletrônica desenvolvida para o nodo *Estatística e Educação Ambiental Resolução de Problemas* foi selecionado o jogo *online Glória da Estatística*, disponível no endereço eletrônico: *http://www.alea.pt/ttml/trivial/html/jgloria/Gloria3ciclo/gloria.htm*. Este jogo foi desenvolvido no âmbito do projeto Ação Local Estatística Aplicada (ALEA). A Figura 4 apresenta o referido jogo.

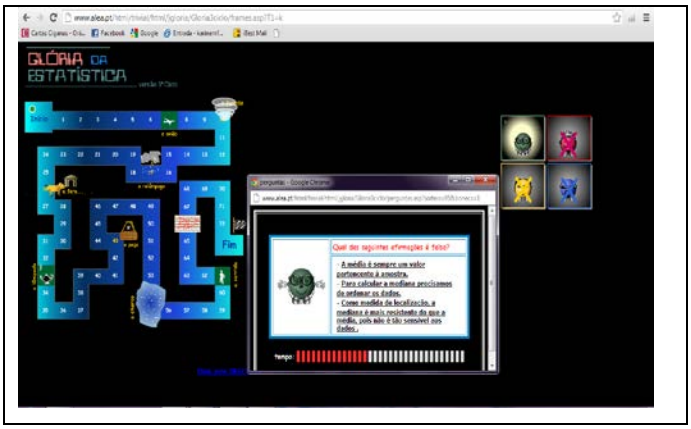


Figura 4. Jogo online A Glória da Estatística.
Fonte: http://www.alea.pt/html/trivial/html/jgloria/jgloria.htm#

O jogo *Glória da Estatística* consiste em um tabuleiro com um conjunto de casas onde cada jogador (até um máximo de 4) deve percorrer até alcançar a última casa. No decorrer do jogo, o jogador deverá responder a diversas questões sobre Estatística, para progredir. O objetivo do jogo é chegar ao fim do tabuleiro em 1º lugar

Analise dos Dados

O desempenho dos grupos foi analisado através dos dois bancos de dados, gerados pelo SIENA, para cada teste realizado pelos alunos em cada conceito do grafo. As notas estão compreendidas no intervalo [0,1 e 1], sendo que foi estabelecido o índice 0,6 para o desempenho considerado satisfatório para cada conceito do grafo.

A Tabela 1 apresenta os resultados que os grupos obtiveram nos testes adaptativos para cada conceito.

Tabela 1
Avaliação dos grupos nos Testes Adaptativos Informatizados

Conceitos	Introdução à Estatística		Tabelas		Gráficos		Medidas de Tendência Central		Estatística e Educação Ambiental Resolução de Problemas	
Grupos	Teste 1	Teste 2	Teste 1	Teste 2	Teste 1	Teste 2	Teste 1	Teste 2	Teste 1	Teste 2
EEA1	0,385	0,997	0,593	0,610	0,954	- - -	0,100	0,901	0,143	0,610
EEA2	0,100	0,754	0,966	- - -	0,994	- - -	0,983	1,000	0,962	- - -
EEA3	0,100	0,997	1,000	- - -	0,999	- - -	0,999	- - -	1,000	- - -
EEA4	0,766	- - -	0,273	0,999	0,999	- - -	0,385	0,991	0,143	0,773
EEA5	0,200	0,997	0,100	1,000	0,999	- - -	0,984	- - -	0,100	0,923
EEA6	0,484	0,991	1,000	- - -	0,999	- - -	0,964	- - -	0,280	0,964
EEA7	0,100	0,996	0,100	1,000	0,999	- - -	0,493	0,998	0,996	- - -
EEA8	0,974	- - -	0,100	1,000	1,000	- - -	1,000	- - -	1,000	- - -
EEA9	0,200	0,976	0,999	0,994	0,999	0,936	0,999	- - -	0,978	- - -
EEA11	0,983	- - -	0,593	1,000	0.999	- - -	1,000	- - -	0,980	- - -
EEA12	0,988	- - -	1,000	- - -	1,000	- - -	0,997	- - -	1,000	- - -
EEA13	0,467	0,701	1,000	- - -	0,999	- - -	0,998	- - -	0,998	- - -
Média	0,479		0,644		0,995		0,824		0,715	

Fonte: banco de dados SIENA [http://siena.ulbra.br]

De acordo com as médias do teste 1, observou-se que, neste primeiro teste, no conceito *Introdução à Estatística*, um maior número de grupos apresentou dificuldades, pois oito dos doze grupos que realizaram o teste obtiveram desempenho inferior a 0,6. Os alunos não apresentaram dificuldades na leitura e interpretação de gráficos, observou-se que nenhum dos grupos necessitou fazer a recuperação de estudos para este conceito, a média no teste foi de 0,995. Os grupos, nos conceitos *Tabelas*, *Medidas de Tendência Central* e *Estatística e Educação Ambiental Resolução de Problemas* apresentaram um rendimento satisfatório.

Além disso, observou-se que para os conceitos em que os grupos obtiveram desempenho inferior a 0,6, o SIENA direcionou-os para realizar estudos de revisão e atividades didáticas propostas na sequência didática eletrônica, a fim de possibilitar uma recuperação do conteúdo proposto no nodo não aprovado, para então realizar um segundo teste.

Para os alunos que realizaram o segundo teste, nos nodos em que não haviam alcançado o índice 0,6, após os estudos de recuperação, os dados fornecidos pelo banco de dados do SIENA, conforme a Tabela 1, apontam uma melhora significativa no desempenho destes.

Nesse sentido, o uso de recursos informáticos, de acordo com Groenwald e Ruiz (2006), pode influenciar beneficamente quando utilizados como suporte ao trabalho docente, contribuindo para a agilização das tarefas dos mesmos, como fonte de informação do conhecimento real dos alunos, ou na utilização de sistemas inteligentes, que auxiliem o professor na sua docência.

Considerações Finais

Nesta investigação, a partir da análise dos dados coletados com os instrumentos de pesquisa, foi possível constatar que a aplicação da sequência didática eletrônica contextualizada com questões ambientais, contribuiu para o processo de ensino e aprendizagem de conceitos estatísticos desenvolvidos nos anos finais do Ensino Fundamental, visto que esta foi utilizada como recurso didático para estudo dos conceitos que já haviam sido trabalhados em sala de aula, o que possibilitou aos alunos: revisar, aprofundar e acrescentar novos conceitos aos já estudados, sob uma nova forma de abordá-los, contemplando: a contextualização de questões de urgência social; o trabalho em grupo como meio de favorecer a troca de conhecimento e discussões entre os alunos, contribuir para o desenvolvimento de atitudes de cooperação e o uso das Tecnologias da Informação e Comunicação como recurso didático no processo de ensino e aprendizagem dos conceitos estatísticos.

Possibilitou, também, que a rotina das aulas de Matemática fosse quebrada, pela primeira vez nesta escola, os alunos foram ao laboratório de informática com a finalidade de realizar atividades para a disciplina de Matemática. O que antes havia sido apresentado aos alunos de uma maneira tradicional, através da aula expositiva, sendo utilizados pela professora, como recursos didáticos, apenas o quadro, o giz e o livro didático, foi apresentado de forma diferenciada, utilizando as Tecnologias da Informação e Comunicação como recurso didático, o que proporcionou aos alunos: a apresentação dos conceitos com a realização de atividades lúdicas desenvolvidas no aplicativo *Jclic,* o acesso a um jogo *Online* referente aos conceitos que estavam sendo estudados e o acesso a *sites* informativos referentes às questões ambientais. Assim, os alunos deixaram de receber o mesmo conteúdo ao mesmo tempo e passaram a percorrer caminhos diferenciados, de acordo com o perfil de cada estudante e com o desempenho apresentado pelo mesmo.

Referências

Alves, Marcos Wederson; Santos, Rosiane de Jesus. (2011). Uma Abordagem do Ensino de Estatística no Ensino Fundamenltal. In: XII Conferência Interamericana de Educação Matemática, 2011, Recife. Anais. Recife.

Brasil. (1998). Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática. Brasília: MEC/SEF.

Filippsen, Rosana Maria Jardim; Groenwald, Claudia Lisete Oliveira. (2003). *Educação matemática e educação ambiental*: educando para o desenvolvimento sustentável. Canoas,. Disponível em: <http://www.liberato.com.br/upload/arquivos/0131010716351516.pdf > Acesso em 07 de set. de 2010

Gigante, Ana Maria Beltrão; Silva, Maria Rejane Ferreira da; Santos, Monica Bertoni dos.(2009). *Referências curriculares do Estado do Rio Grande do Sul*: matemática e suas tecnologias/Secretaria de Estado da Educação. Porto Alegre:SE/DP.

Groenwald, Claudia Lisete Oliveira; Silva, Carmen Kaiber da. (2001). Integrando a matemática ao tema educação ambiental. *Paradigma*. Maracay. v.22, n.2, p.151-170, dezembro.

Groenwald, Claudia Lisete Oliveira; Ruiz, Lorenzo Moreno. (2006). Formação de Professores de Matemática: uma proposta de ensino com novas tecnologias. *Acta Scientiae,* Canoas, v.8, n.2, jul./dez.

Lima, Claudine Assumpção.(2008).Aproximações entre ciência-tecnologia-sociedade e os temas transversais no livro didático de matemática do ensino fundamental de 5ª A 8ª séries. 200p. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica), Faculdade em Educação, Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, 2008. Disponível em:< http://www.ppgect.ufsc.br/dis/53/dissert.pdf> Acesso em 19 jun de 2010.

Lopes, Celi E. (2008).O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e aformação dos professores. *Cad. Cedes*, Campinas, SP, v. 28, n. 74, p. 57-73,jan./abr. 2008. Disponível em http://www.cedes.unicamp.br.

NCTM, National Council of Teachers of Mathematics (1991). *Normas para o currículo e a avaliação em matemática escolar*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática e Instituto de Inovação Educacional.

Perez, Jeferson de Freitas; Paulo, Rosa Monteiro de. (2008). *Educação Ambiental*: em busca de caminhos e perspectivas. Disponível em: <http://www2,rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/195-1-a-gt9_perez_ta.pdf>. Acesso em 5 de jul. de 2010.

Possas, Ana Raquel Oliveira da Costa.(2003). *A prática pedagógica enquanto mediação entre a etnomatemática e a educação ambiental*. 152 p. Dissertação (Mestrado em Desenvolvimento Sustentável), Centro de desenvolvimento sustentável, Universidade de Brasília, Macapá, 2003. Disponível em: < http://www.unbcds.pro.br/publicaçoes/AnaRaquel.pdf> Acesso em: 06 de jul. de 2010.

O trabalho com conceitos de contagem e de Probabilidade através de um jogo de dominós

José Marcos **Lopes**
Universidade Estadual Paulista
Brasil
jmlopes@mat.feis.unesp.br

Resumo

Apresentamos neste trabalho um jogo de dominós associado ao Triângulo de Pascal que pode ser utilizado para o ensino de conceitos básicos de Contagem e de Probabilidade. O jogo consiste de uma modificação das regras do tradicional Jogo de Dominós duplo 6. Baseado no jogo, formulamos alguns problemas que podem subsidiar o trabalho de professores que ensinam esses conteúdos. Seguindo as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), o material aqui apresentado deve ser utilizado no terceiro ano do Ensino Médio.

Palavras chave: ensino-aprendizagem, análise combinatória, probabilidade, resolução de problemas, jogos.

Introdução

Os conteúdos de Análise Combinatória e de Probabilidade são indispensáveis na vida de um cidadão do século XXI. Desde que nos levantamos pela manhã somos chamados a tomar decisões e uma boa decisão depende de conhecimentos mínimos de conceitos presentes nesses dois tópicos da matemática. De uma maneira geral podemos dizer que a Análise Combinatória enumera as possibilidades de um certo evento enquanto a Probabilidade mede com que grau de percepção ou crença este evento poderá ocorrer.

É importante para o aluno do Ensino Médio saber interpretar as pesquisas eleitorais, um diagnóstico médico ou ainda entender as suas reais chances de ganhar um premio nos inúmeros jogos de azar disponíveis na atualidade, e muitos deles, gerenciados e patrocinados pelo próprio governo.

A contagem, além de propiciar uma abordagem mais completa da probabilidade, permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório. Ou seja, decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação (Brasil, 2002, p. 126).

Sobre a importância do estudo da Análise Combinatória, Millán (2013) conclui que:

> Os esquemas combinatórios são fundamentais na formação de ideias de azar e probabilidade; a capacidade combinatória expressa um esquema operacional fundamental para o raciocínio lógico e que é necessário a instrução das técnicas combinatórias já que estas não são adquiridas espontaneamente.

A principal finalidade para o estudo da Probabilidade é a de que o aluno compreenda que muitos dos acontecimentos do cotidiano são de natureza aleatória e que se podem identificar possíveis resultados desses acontecimentos e até estimar o grau da possibilidade acerca do resultado de um deles. As noções de acaso e incerteza, que se manifestam intuitivamente, podem ser exploradas na escola, em situações em que o aluno realiza experimentos e observa eventos (Brasil, 1997, p. 52).

De nossa experiência com o desenvolvimento de projetos com professores do Ensino Médio, de nossa região, observamos que os conteúdos de Análise Combinatória e Probabilidade geralmente apresentam dificuldades não só para os alunos como também para os professores. Muitos professores não tiveram em sua formação básica um trabalho adequado com esses conteúdos.

Na Espanha parece que a situação é a mesma.

> Uma condição para melhorar o ensino de probabilidade é uma adequada preparação dos professores. [...]. Ainda que muitos professores da educação secundária sejam licenciados em ciências ou matemática, são poucos os professores que receberam uma formação específica sobre didática da estatística ou da probabilidade. [...]. Os conhecimentos matemáticos não são suficientes para que os docentes possam ensinar probabilidade de maneira efetiva e desenvolver em seus estudantes um adequado raciocínio probabilístico. (Contreras, Diaz, Batanero, & Ortiz, 2010, p. 182).

Ainda sobre o ensino de probabilidade, se a formação inicial dos professores se centrou nas competências matemáticas então eles podem se sentir inseguros com enfoques mais informais e mesmo tratar de omitir ou reduzir o ensino desse tema (Contreras, Diaz, Batanero, & Ortiz, 2010).

Para o caso da Probabilidade, Corbalán (2002) sugere que os seus conceitos sejam apresentados de forma lúdica. Assim, o uso de um jogo pode se tornar uma proposta atrativa tanto para os alunos como para os professores que ministram esses conteúdos.

O uso de jogos no ensino de matemática

Muitos autores defendem a utilização de jogos para o ensino de Matemática. Não o jogo pelo jogo, mas o jogo como desencadeador de conteúdos e conceitos matemáticos. O jogo pode ser "uma fonte de criação de situações-problemas de Matemática e, assim, propicia o desenvolvimento de atividades matemáticas. Esta não é parte do jogo propriamente dito, mas é a partir das situações criadas em jogo que produzimos problemas matemáticos" (Muniz, 2010, p. 19).

Os PCN consideram o recurso aos jogos como sendo um possível caminho para se "faze Matemática" em sala de aula.

> Um aspecto relevante nos jogos é o desafio genuíno que eles provocam nos alunos, que gera interesse e prazer. Por isso, é importante que os jogos façam parte da cultura escolar, cabendo ao professor analisar e avaliar a potencialidade educativa dos diferentes jogos e o aspecto curricular que se deseja desenvolver (Brasil, 1997, p. 48).

Existe na literatura especializada um grande número de trabalhos que utilizam jogos para o estudo de conceitos matemáticos (Elorza, 2013). Já para o estudo de conceitos de Análise Combinatória e de Probabilidade este número é bem reduzido, principalmente em língua portuguesa. Neste último caso, destacamos os trabalhos de: Lopes (2011), Lopes (2013), Lopes & Balieiro Filho (2011) e Lopes & Rezende (2010).

Apresentamos neste trabalho um jogo original que utiliza o tradicional Jogo de Dominós duplo 6 associado ao Triângulo de Pascal, o qual denominamos de "Dominó Triangular". Além do trabalho com o jogo propriamente dito, o profesor poderá trabalhar com problemas envolvendo situações do jogo. Apresentamos aquí alguns problemas que exploram conceitos de contagem e também de probabilidade. Para a solução da maioria dos problemas usamos a Árvore de Possibilidades.

Os diagramas de árvore representam um recurso potente que se emprega de maneira habitual para enumerar todas as posibilidades lógicas de uma sequência de eventos, em que cada evento pode ocorrer de um número finito de maneiras e, por tanto também pode ser considerado como um recurso na resolução de problemas em geral, não somente nos problemas de combinatória e probabilidade (Guerra & Febles, 2011).

Nossa proposta didático-pedagógica, por utilizar um jogo, pode tornar as aulas mais atraentes e motivadoras para os alunos. Todos eles gostam de jogar, e ninguém gosta de perder. Assim, para ganhar, é necessário compreender bem os conceitos envolvidos e também procurar obter a melhor estratégia para o jogo.

O Jogo Dominó Triangular

Este jogo utiliza as 28 peças de um dominó comum duplo 6. Entretanto, a disposição das peças deve ser feita em um tabuleiro de forma triangular atendendo à determinadas regras. O formato do tabuleiro deve ser conforme o descrito na figura 1. Pode ser jogado por até 4 jogadores. Cada jogador coloca uma peça de cada vez e pode-se estabelecer o sentido horário para a realização das jogadas.

Regras

1. As peças são embaralhadas com as faces numeradas viradas para baixo. Cada jogador escolhe 7 peças.
2. O jogador que possui a peça $0:0$ inicia a rodada. O jogador que possui a peça $1:0$ é o segundo a jogar e coloca sua peça imediatamente abaixo da peça $0:0$ obedecendo a disposição da figura 1. Colocadas as peças $0:0$ e $1:0$ o terceiro jogador possui duas opções: pode colocar a peça $1:1$ do lado direito da peça $1:0$ ou colocar a peça $2:0$ imediatamente abaixo da peça $1:0$, sempre obedecendo a disposição da figura1.
3. A partir do quarto jogador as regras gerais são: colocada a peça $n:m$, a próxima peça a ser colocada pode ser $n:m+1$ ou $n+1:m$, desde que essas peças existam. Onde n e m são números naturais menores ou iguais a 6 com $m \leq n$.
4. Quando o jogador não tem peça para realizar a sua jogada então ele compra peças do monte ou passa sua vez, se não existirem mais peças à serem compradas.
5. Se o jogador colocar uma peça de forma errada esta peça deve ser retirada e o jogador perde sua vez de jogar. A jogada passa para o próximo jogador.
6. O jogador que terminar suas peças em primeiro lugar recebe 10 pontos, o segundo a terminar suas peças recebe 7 pontos, o terceiro recebe 5 pontos e o quarto recebe 3 pontos. Vence o jogo quem conseguir somar mais pontos em três rodadas.

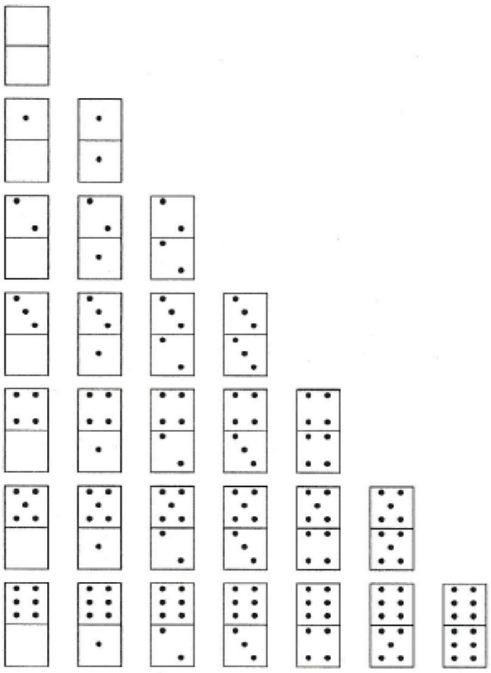


Figura 1. Disposição das peças no Jogo Dominó Triangular.

Comentários sobre o jogo

Se o jogo Dominó Triangular é disputado entre 4 jogadores então a peça $0:0$ sempre estará com um desses jogadores e a rodada pode ser iniciada. Agora, caso o jogo seja disputado por um número menor de jogadores e a peça $0:0$ não esteja com nenhum desses jogadores, então as peças devem ser novamente embaralhadas e escolhidas até que um dos jogadores tenha a peça $0:0$.

O tabuleiro (triângulo) sempre será formado. Não existe a possibilidade do jogo ficar "trancado" como no tradicional jogo de dominó.

Trata-se de um jogo de estratégia. O jogador deve realizar sua jogada em função das peças que dispõe e também procurando prever as peças de seus oponentes. No tradicional jogo de dominó, jogadores experientes conseguem prever as peças de seus adversários através de suas peças e das peças que já saíram no jogo.

O jogador pode colocar uma peça adjacente à direita ou abaixo de uma peça já colocada. Como exemplo, supondo já colocada a peça $5:3$ o jogador tem duas opções: pode colocar a peça $5:4$ ou colocar a peça $6:3$. As peças duplas, com números iguais, admitem apenas peças adjacentes abaixo. Como exemplo, a peça $5:5$ admite apenas a colocação da peça $6:5$. Não é permitido a colocação de peça adjacente à esquerda. Como exemplo, supondo já colocada a peça $5:3$ não é permitido a colocação da peça $5:2$. A peça 5:2 poderá ser colocada se uma das peças 4:2 ou 5:1 já foi colocada no tabuleiro.

Associando-se a cada peça $n:m$ do jogo Dominó Triangular, o *Número Binomial* C_n^m, e considerando-se a disposição triangular de seu tabuleiro, temos que as 28 peças do jogo correspondem exatamente aos 28 números binomiais que formam as sete primeiras linhas do Triângulo se Pascal, veja a figura 2.

$$
\begin{array}{lllllll}
C_0^0 & & & & & & \\
C_1^0 & C_1^1 & & & & & \\
C_2^0 & C_2^1 & C_2^2 & & & & \\
C_3^0 & C_3^1 & C_3^2 & C_3^3 & & & \\
C_4^0 & C_4^1 & C_4^2 & C_4^3 & C_4^4 & & \\
C_5^0 & C_5^1 & C_5^2 & C_5^3 & C_5^4 & C_5^5 & \\
C_6^0 & C_6^1 & C_6^2 & C_6^3 & C_6^4 & C_6^5 & C_6^6
\end{array}
\quad \text{ou} \quad
\begin{array}{lllllll}
1 & & & & & & \\
1 & 1 & & & & & \\
1 & 2 & 1 & & & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & & & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & \\
1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & \\
1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1
\end{array}
$$

Figura 2. As sete primeiras linhas do Triângulo de Pascal.

O número C_n^m também chamado de *Número Combinatório* (Morgado, Carvalho, Carvalho, & Fernandez, 2004) representa o número de combinações simples de classe m de n objetos e é definido por:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}, \quad 0 \le m \le n.$$

Depois do trabalho com o Jogo Dominó Triangular e de sua associação com o Triângulo de Pascal, os alunos poderão se sentirem mais motivados a estudarem as principais propriedades desse triângulo, como por exemplo, os teoremas: das linhas, das colunas, das diagonais e também a relação de Stifel.

Alguns problemas relacionados com o Jogo Dominó Triangular

Apresentamos a seguir alguns problemas que envolvem situações do Jogo Dominó Triangular. Os quatro primeiros trabalham com conceitos de contagem.

Problema 1. A peça $6:6$ será sempre a última a ser colocada no tabuleiro do Jogo Dominó Triangular? Justificar sua resposta.

Comentários e sugestões.

A resposta é não. Dependendo das jogadas anteriores e desde que a peça $6:5$ já foi colocada, no tabuleiro, a peça $6:6$ pode ser colocada antes que outras peças. Assim, a peça $6:6$ não pode ser considerada a peça "mico" do jogo.

O jogador que possuir a peça $6:6$ deve estabelecer uma adequada estratégia para que esta peça não fique para o final da rodada. No jogo de dominó tradicional a peça $6:6$ é a primeira a ser jogada.

Problema 2. No Jogo Dominó Triangular a peça 2:0 é sempre colocada no tabuleiro antes que a peça 2:1? Justificar sua resposta.

Comentários e sugestões.

A resposta é não. Uma situação possível onde a peça 2:0 é colocada depois da peça 2:1 é a seguinte: 0:0; 1:0; 1:1; 2:1; 2:0; ... .

Problema 3. De quantas maneiras diferentes podemos preencher um tabuleiro com apenas as 3 primeiras linhas usando as regras do Jogo Dominó Triangular? Justificar sua resposta.

Comentários e sugestões.

Vamos supor que o tabuleiro possui apenas as três primeiras linhas. Cada peça do Jogo Dominó Triangular possui uma posição fixa no tabuleiro e sempre deve ser colocada nesta posição. Entretanto, as três primeiras linhas do tabuleiro podem ser preenchidas de várias maneiras diferentes. A solução pode ser obtida através da árvore de possibilidades como a descrita na figura 3.

Cada ramo da árvore corresponde a uma maneira diferente de preencher o tabuleiro. Temos neste caso 6 possibilidades diferentes, ou seja: 0:0 - 1:0 - 1:1 - 2:0 - 2:1 - 2:2; 0:0 - 1:0 - 1:1 - 2:1 - 2:0 - 2:2; 0:0 - 1:0 - 1:1 - 2:1 - 2:2 - 2:0; 0:0 - 1:0 - 2:0 - 1:1 - 2:1 - 2:2; 0:0 - 1:0 - 2:0 - 2:1 - 1:1 - 2:2 e 0:0 - 1:0 - 2:0 - 2:1 - 2:2 - 1:1.

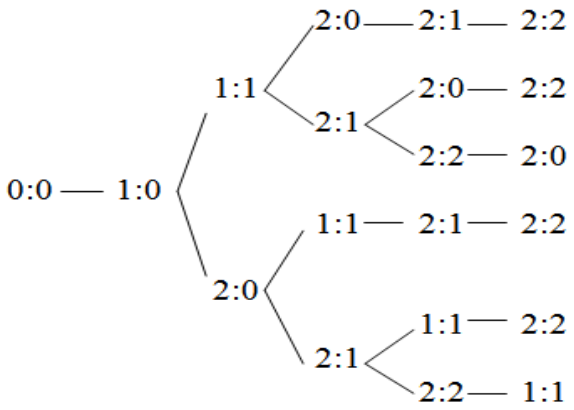


Figura 3. Maneiras diferentes de preencher um tabuleiro com apenas as três primeiras linhas.

Problema 4. De quantas maneiras diferentes podemos preencher um tabuleiro com apenas as 4 primeiras linhas usando as regras do Jogo Dominó Triangular e supondo que as peças 0:0; 1:0; 1:1; 2:0 e 3:0 já estão no tabuleiro? Justificar sua resposta.

Comentários e sugestões.

Neste caso estamos supondo que o tabuleiro possui apenas as quatro primeiras linhas e que as peças 0:0; 1:0; 1:1; 2:0 e 3:0 já foram colocadas. Usando a árvore de possibilidades podemos descrever todos os casos possíveis conforme a figura 3.

Temos neste caso um total de 12 maneiras diferentes de preencher as quatro primeiras linhas do tabuleiro considerando-se as peças 0:0; 1:0; 1:1; 2:0 e 3:0 já colocadas. Uma delas é a seguinte: 0:0; 1:0; 1:1; 2:0; 3:0; 3:1; 3:2; 3:3; 2:1 e 2:2.

Para o caso geral e supondo que nenhuma peça ainda foi colocada, podemos mostrar através da árvore de possibilidades que existem 90 formas diferentes de preencher as quatro primeiras linhas do tabuleiro.

Na sequência, por uma questão de simplicidade, vamos supor que o tabuleiro possui apenas as três primeiras linhas. Vamos supor também que os jogadores colocam suas peças de maneira aleatória respeitando-se apenas as regras do Jogo Dominó Triangular. Os problemas 5, 6, 7 e 8 trabalham com conceitos de probabilidade. Utilizamos aqui a concepção Laplaciana de Probabilidade (Morgado et al., 2004, p. 119).

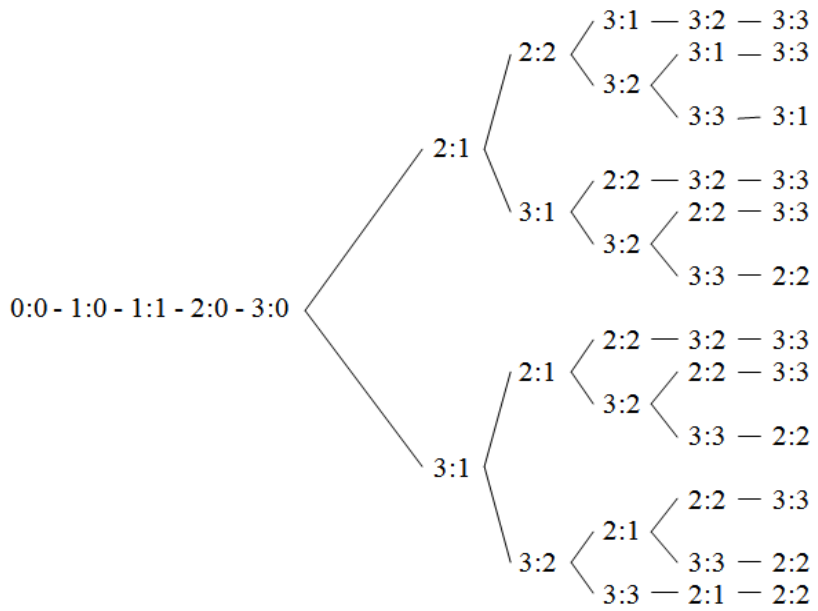


Figura 4. Maneiras diferentes de preencher o tabuleiro com as hipóteses do problema 3.

Problema 5. Calcular a probabilidade da peça 1:1 ser a última a ser colocada no tabuleiro do Jogo Dominó Triangular? Justificar sua resposta.

Comentários e sugestões.

Como estamos supondo um tabuleiro com apenas as três primeiras linhas e que os jogadores colocam suas peças de maneira aleatória, temos a árvore de probabilidades descrita na figura 5. As respectivas probabilidades estão indicadas sobre cada ramo da árvore.

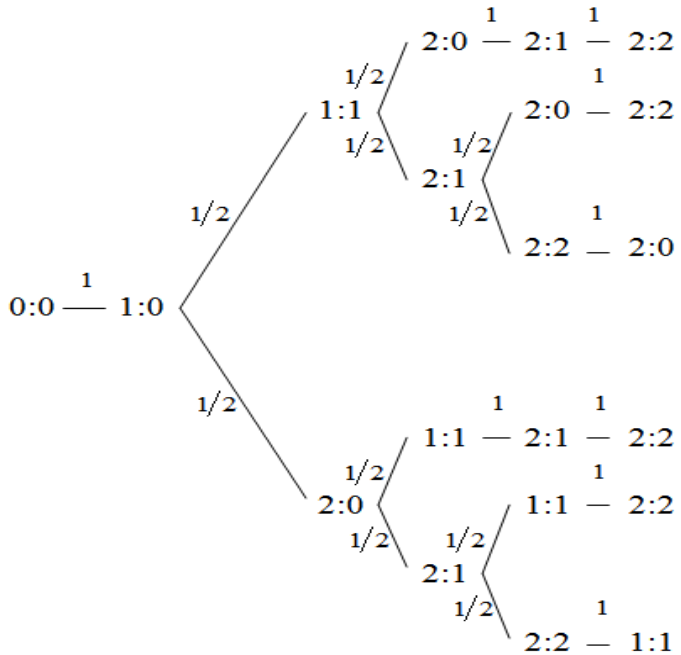


Figura 5. Árvore de probabilidades para um tabuleiro com apenas as três primeiras linhas.

A probabilidade da peça 1:1 ser colocada por último corresponde ao ramo: 0:0 - 1:0 - 2:0 - 2:1 - 2: 2 - 1:1; com probabilidade p dada por:

$$p = 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{8}.$$

Problema 6. Calcular a probabilidade da peça 2:0 ser colocada no tabuleiro do Jogo Dominó Triangular antes do que a peça 2:1? Justificar sua resposta.

Comentários e sugestões.

Usando a árvore de probabilidades dada na figura 5 temos que a probabilidade p neste caso é dada por:

$$p = 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 + 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 + 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 + 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{3}{4}$$

A probabilidade $p = \frac{3}{4}$ corresponde a soma das probabilidades dadas pelo primeiro, quarto, quinto e sexto ramo da árvore da figura 5.

Problema 7. Calcular a probabilidade da peça 2:2 ser a última a ser colocada no tabuleiro do Jogo Dominó Triangular? Justificar sua resposta.

Comentários e sugestões.

De maneira análoga ao problema 6 temos neste caso $p = \frac{3}{4}$.

Problema 8. Calcular a probabilidade da peça 1:1 ser a terceira peça a ser colocada no tabuleiro do Jogo Dominó Triangular sabendo-se que a peça 2:2 foi a última peça colocada? Justificar sua resposta.

Comentários e sugestões.

Este é um problema um pouco mais difícil que os anteriores pois envolve o conceito de probabilidade condicional. Vamos definir os dois seguintes eventos:

A = { a terceira peça colocada no tabuleiro é a peça 1:1};

B = { a última peça colocada no tabuleiro é a peça 2:2}.

Desejamos calcular a probabilidade condicional $P(A \mid B)$. Da solução do problema 7 sabemos que $P(B) = \frac{3}{4}$. Agora, $P(A \cap B) = 1 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{8}$, que corresponde a probabilidade dada pelo segundo ramo da árvore da figura 5.

Assim, usando a definição de probabilidade condicional temos que:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/8}{3/4} = \frac{1}{6}.$$

Considerações finais

O jogo e os problemas aqui apresentados podem servir de subsídio para os professores que trabalham com os conteúdos de combinatória e probabilidade no Ensino Médio. Relacionamos

um jogo muito antigo e conhecido, o Jogo de Dominós, com o importante e também muito conhecido Triângulo de Pascal.

O jogo serve de motivação para o estudo da matemática e os problemas são diferentes daqueles tradicionais: escolha de bolas de cores diferentes em duas urnas, ou jogo de dados e de moedas.

Por questões de cidadania, consideramos importante que os alunos do Ensino Médio aprendam a tomar "boas" decisões, o Jogo Dominó Triangular pode contribuir com este propósito.

Referências e bibliografia

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais*: *terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental* **-** *matemática.* Brasília: MEC/SEF.

Brasil. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. (2002). *PCN*+ - *Ensino Médio*. Brasília: MEC.

Contreras, J. M., Diaz, C., Batanero, C., & Ortiz, J. J. (2010). Razonamiento probabilístico de profesores y su evolución em um taller formativo. *Educação Matemática Pesquisa*, *12*, 181-198. São Paulo.

Corbalán, F. (2002). *Juegos matemáticos para secundaria y bachillerato*. Madrid: Sintesis.

Elorza, N. S. L. (2013). *O uso de jogos no ensino e aprendizagem de matemática nos anos iniciais do ensino fundamental*: levantamento de teses e dissertações (Dissertação de Mestrado em Educação, Faculdade de Ciências e Tecnologia). Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Presidente Prudente, Brasil.

Guerra, A. T. A., & Febles, M. C. E. (2011). Resolución de juegos cotidianos com árboles de decisión: aportaciones de uma experiência com alumnos de secundaria. *Educación Matemática*, *23*(2), 33-63.

Lopes, J. M., & Rezende, J. C. (2010). Um novo jogo para o estudo do raciocínio combinatório e do cálculo de probabilidade. *Bolema, 23*(36), 657-682. Rio Claro.

Lopes, J. M. (2011). Uma proposta didático pedagógica para o estudo da concepção clássica de probabilidade. *Bolema*, *24*(39), 607-628. Rio Claro.

Lopes, J. M. (2013). Una propuesta para la enseñanza del teorema de Bayes a través de un juego de dados y de la resolución de problemas. *Revista de Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria*, *2*, 601-608. Granada.

Lopes, J. M., & Balieiro Filho, I. F. (2011). Percepções de professores do ensino médio sobre mudanças de suas práticas de ensino de probabilidade. *Revista de Educação Matemática*, *13*(15), 37-54. São Paulo

Millán, E. F. (2013). Razonamiento combinatorio y el currículo español. *Revista de Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 2*, 539-554. Granada.

Morgado, A. C. O., Carvalho, J. B. P., Carvalho, P. C. P., & Fernandez, P. (2004). *Análise combinatória e probabilidade*. Coleção do Professor de Matemática. Rio de Janeiro: SBM.

Muniz, C. A. (2010). *Brincar e jogar: enlaces teóricos e metodológicos no campo da educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica Editora.

O uso do jogo Max_Min – Estatístico em sala de aula

José Marcos **Lopes**
Universidade Estadual Paulista
Brasil
jmlopes@mat.feis.unesp.br

Resumo

O objetivo deste trabalho é o de analisar as possíveis contribuições que o uso de um jogo, em sala de aula, pode trazer para o estudo de conceitos da Estatística Descritiva. Utilizamos o jogo Max_Min – Estatístico, que pode ser caracterizado como um jogo de treinamento, para o estudo das principais medidas de posição e de dispersão da Estatística Descritiva. O jogo utiliza simultaneamente uma medida de posição e uma de dispersão e foi utilizado em duas salas do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola estadual de uma cidade do interior do estado de São Paulo - Brasil. Da análise dos dados e também dos relatos das professoras acreditamos que a proposta-didático pedagógica aqui considerada pode contribuir de maneira positiva ao processo de ensino e aprendizagem para os conceitos básicos da Estatística Descritiva.

Palavras chave: ensino médio, ensino-aprendizagem, estatística descritiva, jogos.

Introdução

As noções básicas de Estatística são indispensáveis nos dias atuais. É comum nos defrontarmos com informações estatísticas apresentadas pelos meios de comunicação em forma de gráficos, de pesquisas médicas e eleitorais, por exemplo. Nesta perspectiva, uma pessoa para exercer sua cidadania plena necessita ser minimamente letrada em Estatística.

A presença constante da Estatística no dia a dia de qualquer cidadão se justifica pelo fato que através de seus conceitos e métodos para coletar, organizar e analisar informações diversas, é possível transformar uma informação bruta em dados que permitem ler e compreender a realidade (Lopes, 2014a).

No Brasil os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) recomendam o estudo da Estatística desde os primeiros ciclos da formação básica até o último ano do ensino médio.

O estudo da estatística viabiliza a aprendizagem da formulação de perguntas que podem ser respondidas com uma coleta de dados, organização e representação. Durante o ensino médio, os alunos devem aprimorar as habilidades adquiridas no ensino fundamental no que se refere à coleta, à organização e à representação de dados. [...]. Os estudantes precisam ser capazes de explicar como o ponto médio é influenciado por valores extremos num intervalo de dados, e o que acontece com o ponto médio e a mediana em relação a esses valores. [...]. Vale destacar a necessidade de se intensificar a compreensão sobre as medidas de posição (média, moda e mediana) e as medidas de dispersão (desvio médio, variância e desvio padrão) (Brasil, 2006, p. 78-79).

A importância que hoje recebe o ensino de estatística, devese também a necessidade reclamada pela UNESCO e outras instituições de proporcionar uma cultura estatística que permita ao cidadão participar ativamente da atual sociedade da informação (Batanero, 2013).

O uso de jogos no estudo de conceitos da Estatística Descritiva

Existe na literatura especializada um grande número de trabalhos que utilizam jogos para o estudo de conceitos matemáticos (Elorza, 2013). Já para o estudo de conceitos estatísticos este número é bem reduzido, principalmente em língua portuguesa. Neste último caso, destacamos os trabalhos de: Dukes (1987), Kraus (2010), Leech (2008), Lopes (2012) e Lopes, Corral & Resende (2012).

O professor pode trabalhar com uma ampla variedade de jogos em sala de aula, "desde que não sejam utilizados somente como fins em si mesmos, mas transformados em material de estudo e ensino (na perspectiva do profissional), bem como em aprendizagem e produção de conhecimento (na perspectiva do aluno)" (Macedo, Petty e Passos, 2000, p. 18).

Os PCN asseguram que a participação em jogos de grupo representa uma conquista cognitiva, emocional, moral e social para os alunos e um estímulo para o desenvolvimento do seu raciocínio lógico. Afirmam também que "um aspecto relevante nos jogos é o desafio genuíno que eles provocam no aluno, que gera interesse e prazer. Por isso, é importante que os jogos façam parte da cultura escolar, cabendo ao professor analisar e avaliar a potencialidade educativa dos diferentes jogos e o aspecto curricular que se deseja desenvolver" (Brasil, 1997, p. 49).

Nesse modo, consideramos que o jogo Max_Min – Estatístico, aqui apresentado, caracteriza-se como um jogo de treinamento. Segundo Borin (2004), os *Jogos de Treinamento* são idealizados para auxiliar a memorização ou a fixação de conceitos, fórmulas ou técnicas relacionadas a algum tópico do conteúdo. Este tipo de jogo pode ser utilizado para substituir as enfadonhas listas de exercícios, tão comuns no ensino de Matemática. Ainda, convém salientar que esse tipo de jogo deve ser utilizado pelo professor após já ter trabalhado em sala de aula as medidas de posição e de dispersão.

Segundo essa mesma autora, como os Jogos de Treinamento se caracterizam pela repetição, o professor, ao utilizá-los, deve ter claros os objetivos que quer alcançar, para evitar a mera memorização e para não correr "o risco de transformá-los em apenas um instrumento de valorização do pensamento mecânico e algorítmico" (Borin, 2004, p. 15).

O jogo Max_Min – Estatístico foi apresentado pela primeira vez, com suas regras, e uma relação de oito problemas sobre situações de jogo em Lopes (2013). Por envolver simultaneamente a utilização de duas medidas (posição e dispersão) da Estatística Descritiva e conforme nossa experiência , consideramos que esse jogo seja mais adequado para alunos do Ensino Médio.

No ensino básico, as aulas de Estatística Descritiva geralmente se resumem ao cálculo das medidas de posição e dispersão para variáveis discretas e/ou contínuas. Os alunos devem realizar contas e mais contas para obter um número, e pouco se trabalha com as interpretações dos resultados e com a comparação entre essas medidas. Acreditamos que seria mais interessante calcular essas medidas usando-se uma calculadora, ou o próprio computador, e se preocupar mais com a discussão e interpretação dos resultados obtidos.

Nossa proposta didático-pedagógica, por utilizar um jogo, pode tornar as aulas mais atraentes e motivadoras para os alunos. E, conforme relatos, todos eles gostam de jogar, e

ninguém gosta de perder. Assim, para ganhar, é necessário compreender bem os conceitos envolvidos e também procurar obter a melhor estratégia para o jogo. Durante as rodadas de cada partida, os jogadores deverão calcular duas medidas, uma de posição e uma de dispersão. Com o uso do jogo e com um maior traquejo, os alunos serão capazes de calcular mentalmente os valores aproximados para essas medidas e definir rapidamente qual a sua melhor jogada.

O Jogo Max_Min – Estatístico

O jogo Max_Min – Estatístico é um jogo (original) de treinamento que pode ser utilizado para fortalecer os conceitos de Média, Mediana, Moda, Desvio Padrão e Desvio Médio da Estatística Descritiva. O jogo utiliza simultaneamente, em cada rodada, uma medida de posição e uma medida de dispersão. Assim, em cada rodada o jogador deve estabelecer uma estratégia que combina essas duas medidas.

O jogo pode ser disputado por dois ou mais jogadores. O jogo se completa com a realização de seis rodadas. As medidas de posição e de dispersão utilizadas em cada rodada são obtidas por meio de sorteio de fichas apropriadas. Assim, cada ficha contempla uma medida de posição e uma de dispersão.

Material

Cinco dados honestos, com faces numeradas de 1 a 6; seis fichas que indicam as medidas de posição e dispersão:

Média x Desvio Padrão	Média x Desvio Médio	Mediana x Desvio Padrão
Moda x Desvio Padrão	Moda x Desvio Médio	Mediana x Desvio Médio

A utilização de calculadora pode ser opcional; um copo plástico para o lançamento dos dados e uma folha de papel para anotar as pontuações de cada rodada.

Regras

No início de cada rodada é sorteada uma das seis fichas. Desse modo, a ficha define quais medidas serão utilizadas naquela rodada.

Cada jogador poderá efetuar até três lançamentos em cada rodada. O primeiro lançamento é sempre realizado com os cinco dados. Posteriormente, o jogador decide se aproveitará ou não seus outros dois lançamentos. Para o segundo lançamento o jogador pode reservar alguns dados e lançar apenas aqueles não reservados. De forma análoga para o terceiro lançamento. Vale a face de cima dos dados.

Após a finalização da sua jogada, o jogador anota em uma folha de papel os valores das faces obtidas nos cinco dados e os valores que obteve para as correspondentes medidas de posição e de dispersão.

Ao final de cada rodada o jogador que obteve a maior medida de posição marca dois pontos; o que obteve a segunda maior medida de posição marca 1 ponto; o que obteve a menor medida de dispersão marca 3 pontos; o que obteve a segunda menor medida de dispersão marca 2 pontos; e o que obteve a terceira menor medida de dispersão marca 1 ponto. Quando ocorrer

empate cada jogador recebe a pontuação correspondente. Caso o jogador calcule de maneira errada uma das medidas, então não marcará pontos naquela rodada.

Após a realização das seis rodadas cada jogador soma seus pontos e vence aquele que obteve a maior pontuação.

Comentários sobre o jogo

O jogo Max_Min – Estatístico é uma variante do jogo MEDVAR apresentado em Lopes (2012). O jogo MEDVAR utiliza a média e a variância. Agora, o jogo aqui proposto, considera as três principais medidas de posição: média , mediana e moda e também as duas principais medidas de dispersão: desvio padrão e desvio médio da Estatística Descritiva.

Os dados reservados tanto no primeiro como no segundo lançamento não podem ser modificados; ou seja, dado reservado não pode ser utilizado nos lançamentos subsequentes.

A ordem em que cada jogador realiza seus lançamentos pode ser estabelecida em sorteio ou de comum acordo entre os jogadores. Conforme nossa experiência, consideramos que mais de quatro jogadores pode tornar o jogo cansativo e desmotivar os alunos.

Como o jogo utiliza dados o fator sorte não pode ser totalmente desprezado. Entretanto, trata-se de um jogo de estratégia. Em cada jogada o jogador deve procurar obter a maior medida de posição, mas também obter a menor medida de dispersão; ou seja, o jogo auxilia na compreensão da variabilidade dos dados de uma amostra, conceito fundamental no estudo da Estatística. O jogador deve estabelecer uma estratégia que combine esses dois objetivos: maior medida de posição e menor medida de dispersão.

Uma simulação de jogada pode ser como segue. Suponha que a ficha sorteada foi

Média x Desvio Padrão

.

O jogador obteve no primeiro lançamento as faces: 3, 3, 3, 4 e 5. Reserva o dado com a face 5 e lança novamente os outros quatro dados e obtém as faces 1, 3, 4 e 6 . Reserva o dado com a face 6 e lança novamente os outros três dados obtendo as faces: 1, 1 e 5. Assim, o jogador obteve nesta rodada as faces : 1, 1, 5, 5 e 6 e obteve média igual a 3,6 e desvio padrão igual a 2,15. Caso o jogador tivesse ficado apenas com o seu primeiro lançamento; ou seja, não tivesse utilizado os outros dois lançamentos, então teria obtido a média 3,6 e desvio padrão 0,8.

Portanto, nesse caso, teria a mesma média, mas um desvio padrão aproximadamente três vezes menor, isto é, uma jogada muito melhor para o jogo Max_Min – Estatístico.

Metodologia

Com o objetivo de analisar a adequação e a viabilidade do uso do jogo Max_Min – Estatístico em sala de aula, utilizamos duas turmas do terceiro ano do Ensino Médio de uma escola estadual de uma cidade do interior do Estado de São Paulo - Brasil. Os sujeitos desta investigação foram 46 alunos, sendo 35 alunos da turma A e 11 alunos da turma B.

Elaboramos um questionário (Anexo) com 10 questões de múltipla escolha, envolvendo conceitos das medidas de posição e de dispersão da Estatística Descritiva. Cada questão constou de cinco alternativas, sendo a última delas "não sei". Algumas questões foram baseadas no questionário utilizado por Lopes, Corral & Resende (2012).

As três primeiras questões são questões conceituais. A primeira questão, tratou de conceitos matemáticos presentes nas medidas de posição: média, mediana e moda; a segunda e terceira questões envolvem conceitos matemáticos presentes no desvio padrão e no desvio médio. A quarta questão, envolve apenas o domínio algorítmico da média, da mediana e da moda. Já a quinta questão, apresentou uma propriedade das medidas de posição referente a aditividade de um valor fixo a todos os dados. Na sexta questão solicitou-se o cálculo do desvio padrão e desvio médio de um conjunto de sete dados; ou seja, procurou-se apenas verificar o domínio do algoritmo para o cálculos dessas duas medidas de dispersão. A sétima questão envolve o mesmo tipo de propriedade daquela apresentada na questão cinco, só que agora para o desvio padrão. As questões oito e nove, também, envolvem apenas o domínio do algoritmo para cálculo da média, da mediana e da moda. Finalmente, a questão dez é uma questão conceitual e discute a representação de dados por meio das medidas de posição.

Quando do uso do jogo em sala de aula, as duas professoras, titulares das turmas, já haviam trabalhado com os alunos as medidas de posição e dispersão usando os "*cadernos*" fornecidos pela Secretaria de Estado da Educação de São Paulo - São Paulo (2008).

Antes do uso do jogo as professoras aplicaram o questionário (pré-teste), fizeram uso do jogo e, posteriormente reaplicaram o questionário (pós-teste). A professora da turma A aplicou o pré-teste em 01/10/2013 e o pós-teste em 05/11/2013. Já a professora da turma B aplicou o pré-teste em 01/10/2013 e o pós-teste em 16/10/2013. A turma A é do período matutino, enquanto a turma B é do período noturno.

A utilização do jogo Max_Min - Estatístico em sala de aula

O jogo Max_Min – Estatístico foi utilizado por duas professoras de uma escola estadual de uma pequena cidade do noroeste paulista. A professora A usou o jogo na turma 3º A e a professora B na turma 3º B, ambas do terceiro ano do Ensino Médio.

Desenvolvemos desde 2006 uma trabalho colaborativo com professoras dessa escola. Nos primeiros anos trabalhamos com temas relacionados ao ensino de Análise Combinatória e Probabilidade. A partir de 2010 começamos a desenvolver o projeto de pesquisa " Conceitos de Estatística Descritiva através da Resolução de Problemas para o Ensino Fundamental". Alguns resultados desse trabalho, sobre o ensino de conceitos da Estatística Descritiva, poderão ser encontrados em: Lopes, Corral & Resende (2012), Lopes (2013) e Lopes (2014).

O menor número de alunos da turma do 3º B pode ser justificado por tratar-se de alunos que estudam no período noturno. Esses alunos geralmente trabalham durante o dia e estudam à noite, chegam cansados na escola e o número de faltas é grande. Consideramos aqui apenas os alunos que responderam ao pré e ao pós-teste.

Para a realização do jogo as professoras dividiram os alunos em grupos, com no máximo quatro alunos por grupo. As duas primeiras rodadas foram realizadas sem a preocupação de anotar as pontuações e serviram para que os alunos compreendessem e memorizassem as regras do jogo. Depois disso foram realizadas algumas partidas do jogo Max_Min – Estatístico.

Durante a realização do jogo cada aluno anotou seus resultados em uma tabela previamente formulada. A anotação dos resultados do jogo é uma importante forma de conferir os resultados e mais do que isso, compreender os conceitos matemáticos presentes nas medidas de posição e de dispersão.

Análise dos dados

Como estamos interessados em amostras com valores do tipo "*antes* e *depois*"; ou seja, dados emparelhados, consideramos apenas aqueles alunos que responderam tanto o pré como o pós-teste. As figuras 1 e 3 apresentam o número de acertos por alunos e as figuras 2 e 4 apresentam as porcentagens de acertos por questões no pré - teste (antes) e no pós - teste (depois) para as duas turmas.

O índice médio de acertos por questão no pré-teste foi de 50.28% e 58.18% respectivamente para as turmas A e B. Já para o pós-teste o índice médio de acertos foi de 59.14% e 52.72% respectivamente para as turmas A e B. Assim, o índice médio de acertos por questão aumentou na turma A e diminuiu na turma B, depois da aplicação do jogo.

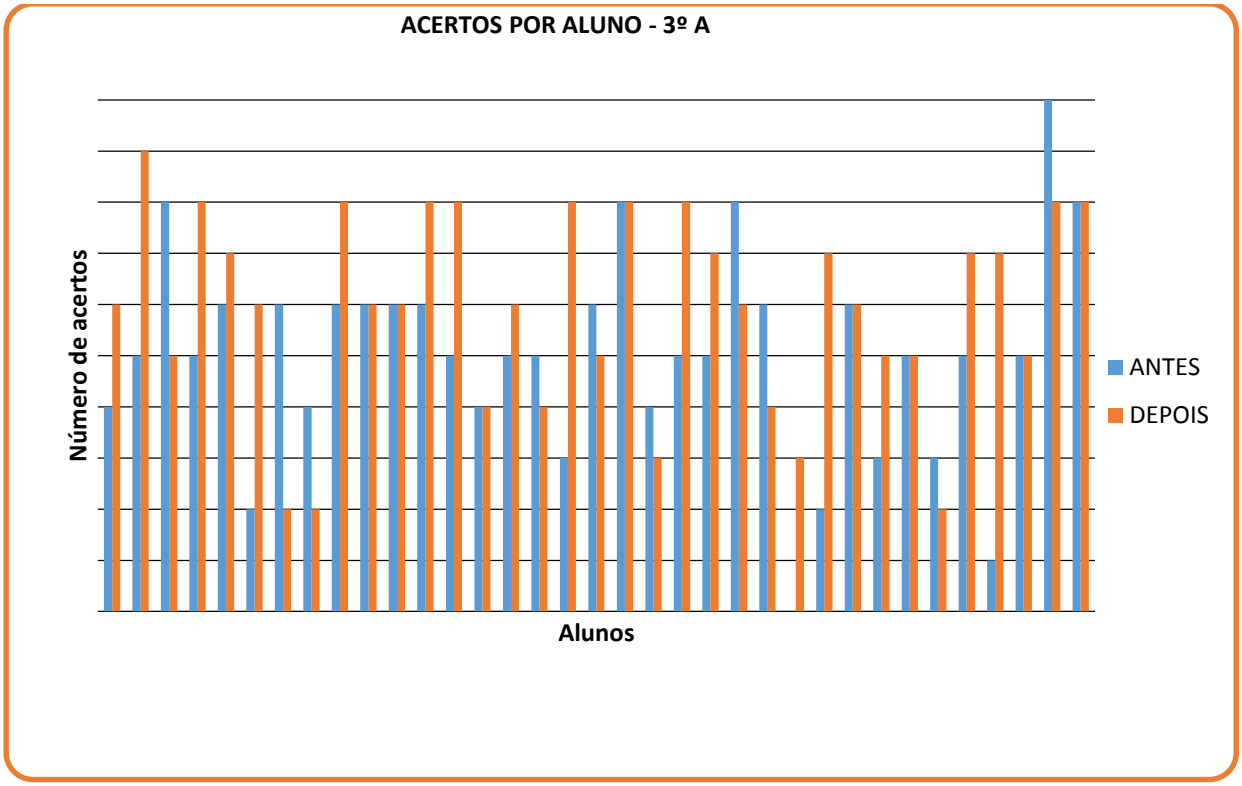


Figura 1. Índice de acertos no pré e no pós-teste para os alunos do 3º A.

A maior diferença positiva no índice de acertos para a turma A ocorreu na questão 7 passando de 14.28% para 62.85%. Já para a turma B a maior diferença positiva ocorreu na questão 1 passando de 54.54% para 100% no pós-teste. A maior diferença negativa ocorreu na questão 6 para a turma A passando de 62.85% para 42.85% e para a turma B também na questão 6 passando de 72.72% para 18.18% no pós-teste.

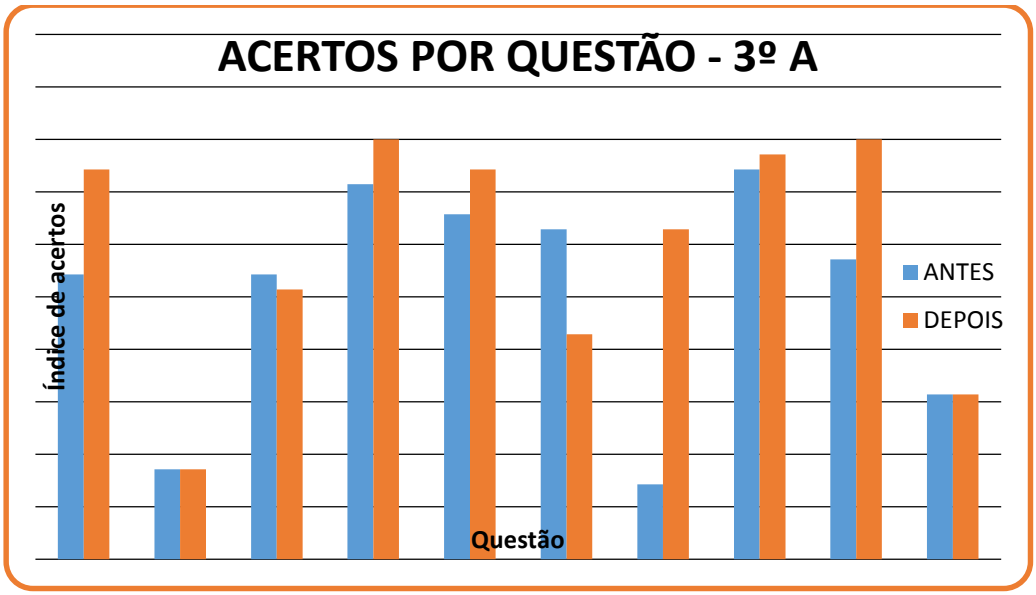


Figura 2. Índice de acertos por questões no pré e no pós-teste para os alunos do 3º A.

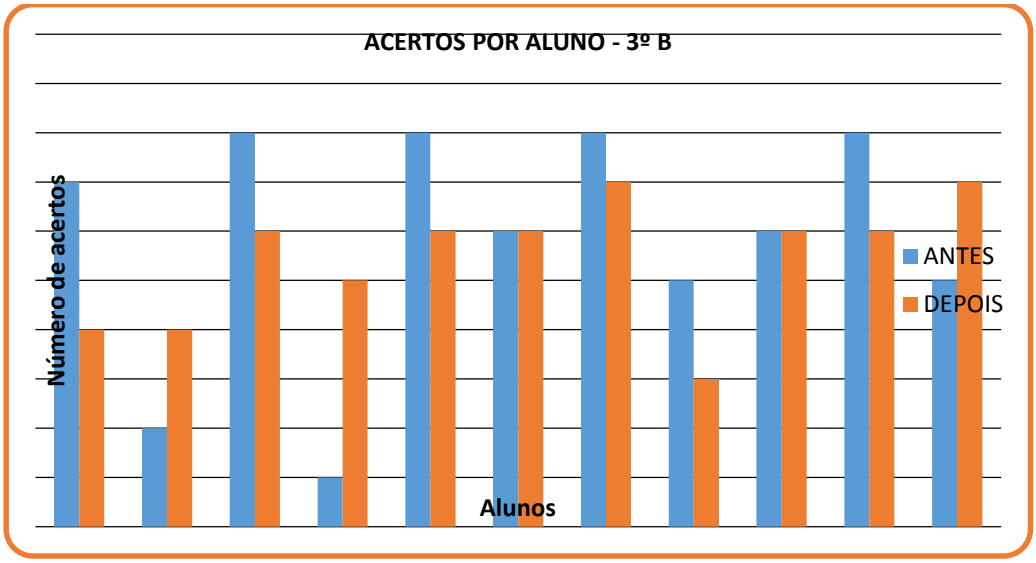


Figura 3. Índice de acertos no pré e no pós-teste para os alunos do 3º B.

No pré-teste a questão 7 apresentou o menor índice de acertos para as duas turmas, sendo de 14.28% e 36.36% respectivamente para as turmas A e B, e a questão 8 foi aquela que apresentou o maior índice de acertos, sendo de 74.28% e 90.90%, respectivamente para as turmas A e B.

O baixo índice de acertos para a questão 7 já era esperado, visto que trata-se de uma propriedade do desvio padrão quando os dados permanecem com a mesma variabilidade; ou seja, o desvio padrão não é alterado quando adicionamos um mesmo valor constante a todos os dados da amostra. Esta propriedade nem sempre é trabalhada em sala de aula.

A questão 8 era relativamente simples, pois envolvia o conceito (definição) de moda. Neste caso, tínhamos uma amostra com duas modas ou bimodal. Para essa questão, o índice de acertos da turma A aumentou de 74.28% para 77.14% e o da turma B se manteve em 90.90%.

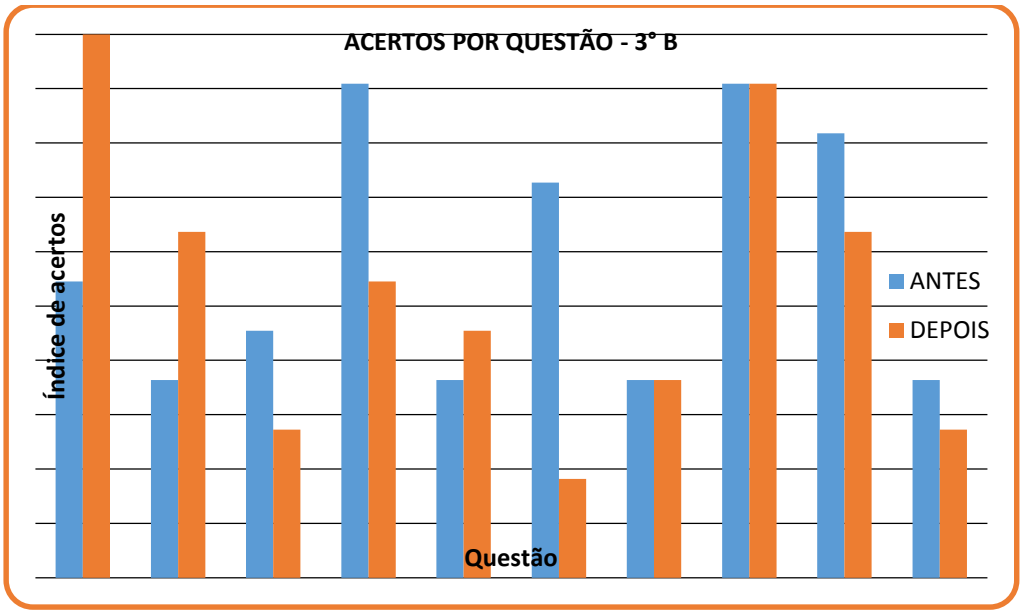


Figura 4. Índice de acertos por questões no pré e no pós-teste para os alunos do 3º B.

A alternativa (e) "não sei" foi pouco utilizada pelos alunos. Quando decidimos incluir essa alternativa em todas as dez questões tínhamos como objetivo tentar perceber as maiores dificuldades dos alunos em relação a algum conceito ou descobrir conceitos pouco trabalhados em sala de aula. Infelizmente, esse objetivo não foi alcançado. Para a turma A, aquela alternativa foi indicada em 2,29% e 0,57% das respostas para o pré e o pós-teste respectivamente. Já para a turma B foi indicada em 0,86% e 0% das respostas para o pré e o pós - teste respectivamente.

Assim, acreditamos que os alunos mesmo não tendo certeza em sua resposta preferiram "chutar" uma alternativa, já que a escolha da alternativa (e) não entraria no cômputo de acertos.

Para uma comparação entre o antes e o depois da utilização do jogo utilizamos o Teste t pareado. Para os sujeitos da turma A foi obtido o p-valor 0,01838. Assim, para um nível de significância $\alpha = 5\%$, rejeitamos a hipótese de igualdade das médias de acerto, admitindo, no caso, o melhor desempenho no pós-teste. Já para os sujeitos da turma B foi obtido o p-valor 0,7019, mas nesse caso não houve evidência para rejeitar o mesmo desempenho no pré e no pós-teste.

Com os resultados do pré-teste e considerando a variável número de acertos por alunos testamos a hipótese de que os alunos das duas turmas estavam igualmente preparados em Estatística Descritiva, contra a hipótese alternativa que as turmas tinham conhecimentos diferentes. Neste caso, o teste de Wilcoxon-Mann-Whitney bilateral forneceu $W_{pré} = 139.5$ com o p-valor 0,1682. Assim, não houve evidência para rejeitar o mesmo desempenho no pré-teste para as turmas A e B.

Para os testes estatísticos mencionados anteriormente utilizamos o software livre R (R core team, 2014).

As professoras relataram o interesse dos alunos quando da utilização do jogo em sala de aula. "Você observa um (aluno) ajudando o outro a fazer as contas. Mesmo aquele que geralmente na aula não vai tão bem, ai derrepente você observa ele ensinando o outro e vai aquele clima de competição [...]. Este conteúdo chama a atenção deles". (Professora A).

A professora A, também observou que o uso do jogo ajudou os alunos nas provas do SARESP - Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo e do ENEM - Exame Nacional do Ensino Médio. Já a Professora B, mencionou que duas alunas que prestaram vestibular afirmaram que o conteúdo desenvolvido com o jogo ajudou na hora da prova.

Considerações finais

De nossa experiência, de mais de dez anos, no desenvolvimento e utilização de jogos, em sala de aula, temos observado o grande interesse dos alunos em participar deste tipo de atividade.

O uso do jogo em sala de aula, se adequadamente planejado como uma atividade didática, pode favorecer a aquisição de conhecimento, pois o sujeito aprende sobre si próprio (como age e pensa), sobre o próprio jogo (o que caracteriza, como vencer), sobre as relações sociais relativas ao jogar (tais como competir e colaborar) e, também, sobre conteúdos (semelhantes a certos temas trabalhados no contexto escolar). Manter o espírito lúdico é essencial para o jogador entregar-se ao desafio da "caminhada" que o jogo propõe. Como conseqüência do jogar, há uma construção gradativa da competência para questionar e analisar as informações existentes. Assim, quem joga pode efetivamente desenvolver-se (Macedo, Petty e Passos, 2000, p. 23-24).

Da análise dos dados aqui apresentados acreditamos que o uso do jogo Max_Min – Estatístico pode contribuir no processo de ensino e aprendizagem de conceitos básicos da Estatística Descritiva.

Da mesma forma que para o ensino de Matemática, não existe uma única e melhor forma para se ensinar Estatística, o professor deve conhecer várias alternativas e procedimentos no sentido de motivar e melhorar o conhecimento de seus alunos naquilo que pretende ensinar.

Referências e bibliografia

Batanero, C. (2013). Sentido estadístico: componentes y desarrollo. In *Jornadas virtuales de didáctica de la estadística, la probabilidad y la combinatoria*, 1. Granada: Ugr.

Borin, J. (2004). *Jogos e resolução de problemas*: *uma estratégia para as aulas de matemática*. São Paulo: IME-USP.

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. (1997). *Parâmetros curriculares nacionais*: *matemática*. Ensino de primeira à quarta série. Brasília: MEC/SEF.

Brasil. Ministério da Educação. (2006). *Orientações curriculares para o ensino médio*. Secretaria de Educação básica; vol. 2. Brasília: MEC.

Dukes, R. L. (1987). Teaching statistics with non simulation games. *JSTOR*: *teaching sociology*, *15*(2),184-190. Disponível em: <http://www.jstor.org/discover/10.2307/1318034?uid=3737664&uid=2129&uid=2&uid=70&uid=4&sid=21100980006163>.

Elorza, N. S. L.(2013). *O uso de jogos no ensino e aprendizagem de matemática nos anos iniciais do ensino fundamental*: levantamento de teses e dissertações (Dissertação de Mestrado em Educação). Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Presidente Prudente, Brasil.

Kraus, S. (2010). Monstrous methods for teaching central tendency concepts. *Teaching Statistics*, *32*, 21-23. doi: 10.1111/j.1467-9639.2009.00403.x

Leech, L. N. (2008). Statistics poker: reinforcing basic statistical concepts. *Teaching Statistics*, *30*, 26-28. doi: 10.1111/j.1467-9639.2007.00309.x.

Lopes, C. E. (2014a) As narrativas de duas professoras em seus processos de desenvolvimento profissional em educação estatística. *Bolema*, *28*(49), 841-856.

Lopes, J. M. (2012). Uma proposta para o estudo dos conceitos de média e variância. In *Encontro Anual de Professores de Matemática*. Coimbra: APM.

Lopes, J. M., Corral, R. S., & Resende, J. S. (2012). O estudo da média, da mediana e da moda através de um jogo e da resolução de problemas. *Revista Eletrônica de Educação*, *6*, 250-270.

Lopes, J. M. (2013). O jogo Max_Min - Estatístico. *Revista de Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria, 1*, 481 - 487.

Lopes, J. M. (2014). O uso de um jogo de treinamento no ensino dos conceitos de média e variância. *Revista Eletrônica de Educação*, *8*(2), 345-362.

Macedo, L., Petty. A. L. S., & Passos, N. C. (2000). *Aprender com jogos e situações-problema*. Porto Alegre: Artmed.

R core team. (2014). A language and environment for statistical computating. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. Disponível em: http://www.R-project.org/.

São Paulo (Estado). (2008). Secretaria de Educação. *Caderno do professor*: matemática, ensino médio 3ª série, 4º bimestre. São Paulo: SEE.

Anexo – Questionário

Este questionário faz parte da pesquisa "Conceitos de Estatística Descritiva por meio do uso de Jogos e da Resolução de Problemas para o Ensino Médio", e deve ser respondido pelos alunos da terceira série do Ensino Médio. Solicitamos o seu empenho na leitura e resposta cuidadosa das questões propostas. Obrigado pela colaboração!

NOME: _____ Idade : ____ Turma: ___ Data: _____

1 – Considerando-se as três medidas de posição: média, mediana e moda é correto afirmar que:

(a) a média é sempre maior do que a mediana.

(b) as três medidas de posição: média, mediana e moda podem ser iguais.

(c) a média é sempre maior do que a moda.

(d) a moda é sempre diferente da mediana.

(e) não sei.

2 – Considerando-se as duas medidas de dispersão: desvio padrão e desvio médio é correto afirmar que:

(a) o desvio padrão pode ser igual ao desvio médio.

(b) o desvio padrão é sempre maior do que o desvio médio.

(c) o desvio padrão é sempre menor do que o desvio médio.

(d) o desvio padrão é sempre igual ao desvio médio.

(e) não sei

3 – Considerando-se as duas medidas de dispersão: desvio padrão e desvio médio é falso afirmar que:

(a) o desvio médio é igual a média aritmética dos valores absolutos dos desvios tomados em relação a medida de tendência central média.

(b) o desvio padrão mede a discrepância dos dados em relação a média.

(c) o desvio médio é uma medida da dispersão dos dados amostrais ou populacionais.

(d) o desvio padrão é uma medida de dispersão pouco usada, pois seu cálculo é muito difícil.

(e) não sei

Os dados a seguir referem-se as idades em anos de sete alunos da quinta série da Escola Cantinho do Céu: 11, 10, 12, 11, 11, 12 e 17. Usando esses dados responda as questões 4, 5, 6 e 7.

4 – A média, a mediana e a moda das idades dos alunos da quinta série da Escola Cantinho do Céu são respectivamente dadas por:

(a) 12, 11 e 11 **(b)** 12, 12 e 11 **(c)** 11, 11 e 12 **(d)** 10, 11 e 12 **(e)** não sei

5 – Daqui a três anos é correto afirmar que a idade:

(a) média dos sete alunos da quinta série da Escola Cantinho do Céu será 14.

(b) mediana dos sete alunos da quinta série da Escola Cantinho do Céu será 15.

(c) moda dos sete alunos da quinta série da Escola Cantinho do Céu será 11.

(d) média dos sete alunos da quinta série da Escola Cantinho do Céu será 15.

(e) não sei

6 – O desvio padrão e o desvio médio das idades dos alunos da quinta série da Escola Cantinho do Céu são respectivamente:

(a) 4,58 e 1,43 **(b)** 4,58 e 0,43 **(c)** 2,14 e 1,43 **(d)** 2,14 e 0,43 **(e)** não sei

7 – Daqui a três anos é correto afirmar que o valor do desvio padrão das idades dos sete alunos da quinta série da Escola Cantinho do Céu:

(a) não se altera **(b)** será o dobro do valor atual **(c)** será o triplo do valor atual

(d) será o valor atual acrescido de três **(e)** não sei

A fábrica de biscoitos *DD – Doce Delícia* possui 8 funcionários cujos salários são: R$ 500,00; R$ 500,00; R$ 560,00; R$ 600,00; R$ 620,00; R$ 620,00; R$ 700,00 e R$ 4.700,00.

8 – Considerando-se os salários dos funcionários da fábrica DD é correto afirmar que:

(a) a moda é igual a R$ 4.700,00. **(b)** a moda é igual a R$ 550,00.

(c) temos duas modas: uma igual a R$ 500,00 e outra igual a R$ 620,00.

(d) a moda é maior do que a média. **(e)** não sei.

9 – Considerando-se os salários dos funcionários da fábrica DD é correto afirmar que:

(a) a mediana é maior do que a média. **(b)** a mediana é menor do que a média.

(c) a mediana é igual a média. **(d)** a mediana é igual a moda.

(e) não sei.

10 - Considerando-se os salários dos funcionários da fábrica DD é correto afirmar que:

(a) o valor da média é um indicador representativo da tendência dos salários dos funcionários.

(b) o valor da média é pouco afetado pelo valor extremo R$ 4.700,00.

(c) o valor da mediana não é um bom representante para o conjunto de todos os salários.

(d) o valor da moda é um indicador representativo da tendência dos salários dos funcionários.

(e) não sei. setembro/2013

Projetos de aprendizagem no ensino da Estatística

Mauren **Porciúncula** Moreira da Silva
Universidade Federal do Rio Grande
Brasil
mauren@furg.br
Suzi **Samá** Pinto
Universidade Federal do Rio Grande
Brasil
suzisama@furg.br

Resumo

Entendemos que educar consiste em prover caminhos que levem a construção de conhecimentos, que tenham significado para o estudante, e não simplesmente apresentar conceitos e estabelecer procedimentos a serem executados mecanicamente. Nesse sentido, o objetivo desta oficina é apresentar Projetos de Aprendizagem (PA) como uma alternativa pedagógica para a promoção da construção do conhecimento Estatístico. Primeiramente, serão apresentados os fundamentos teóricos que subsidiam o trabalho com PA no ensino da Estatística. Na sequência, será desenvolvido, com os participantes, a construção de um PA. Por fim, serão apresentadas estratégias metodológicas já aplicadas na condução do desenvolvimento de Projetos de Aprendizagem no Ensino de Estatística em cursos de graduação de diversas áreas do conhecimento, a fim de nortear ações futuras dos participantes. Espera-se que esta oficina promova novas aprendizagens e remeta a novos saberes e fazeres na prática docente de Estatística.

Palavras chave: educação, estatística, didática, projetos de aprendizagem, construção do conhecimento.

Introdução

O ensino de Estatística vem conquistando crescente importância na sociedade contemporânea. O mercado de trabalho vem exigindo dos profissionais a capacidade de tomar decisões com base nas informações disponíveis. O volume de informação aumenta vertiginosamente, o que impede a análise com base em toda a informação. Por isso, o conhecimento de conceitos estatísticos é uma competência essencial àqueles que terão a responsabilidade de tomar decisões.

O processo educacional deve gerar conflito e dúvidas, exigindo que o estudante fique instigado a buscar respostas a situações problemas, criando, modificando e construindo seu próprio conhecimento. O importante é que o estudante sinta prazer em aprender. O aprender deve estar relacionado a aspectos sociais, afetivos, ao conhecimento prévio do estudante e suas ações. Constituindo-se em uma verdadeira ação-reflexão. E o processo de reflexão só é possível a partir do desequilíbrio (problematização) e não pela cópia ou memorização.

Além disso, precisamos considerar o tempo de aprendizagem de cada estudante. No entanto, o que observamos é uma excessiva preocupação em "vencer" os conteúdos. Não há interesse em conhecer as particularidades de cada aluno. Geralmente, o professor adota sempre a mesma metodologia de ensino, utiliza as mesmas listas de exercício ano após ano, pois parte do pressuposto de que todos os estudantes encontram-se no mesmo domínio de conhecimento. Ignora a diferença entre os sujeitos, e ensina todos da mesma maneira. Nesse contexto, o estudante e seu tempo particular para aprender são negados. O tempo que o aluno leva para aprender é considerado o mesmo que o professor gasta para ensinar!

Além disso, em geral, os exemplos de aplicação são descontextualizados e apresentados a partir de aulas expositivas, o que acaba levando muitos alunos a desistirem ou evadirem dessa disciplina, o que ratifica a necessidade de se repensar as estratégias de ensino de Estatística levando a uma nova prática docente.

Frente a este cenário, vários pesquisadores, como Batanero (2001), Vendramini & Brito (2001), Gal (2002), Cazorla (2004), Campos, Coutinho & Almouloud (2006), Garfield & Ben-Zvi (2008), Salcedo (2014) vêm realizando estudos sobre o processo de ensinar e aprender Estatística. Há um consenso da importância de se repensar o modo como concebemos a prática educacional e implantar outras formas de ensino. Práticas essas que preparem o aluno para "[...] aprender a aprender ao longo de toda a vida [...] no desenvolvimento da capacidade autônoma de aprender e pensar" (Castells, 2003, p. 227), especialmente em um mundo em constante mudança.

Bayer, Echeveste & Seibert (2010) tem auxiliado na superação da mera aprendizagem de fórmulas e cálculos, passando a enfatizar "a importância da interpretação e do entendimento dos conceitos estatísticos no contexto da pesquisa procurando fazer com que o aluno valorize a aplicação destes conceitos na tomada de decisão" (p. 6).

Neste mesmo sentido, o Grupo de Pesquisa em Educação Estatística de nossa Universidade vem realizando diversas ações com o intuito de contribuir para a construção do conhecimento estatístico pelos estudantes. O trabalho do grupo fundamenta-se na Epistemologia Genética de Piaget (1976), Teoria da Biologia do Conhecer de Maturana & Varela (2005).

Fundamentação Teórica

Acreditamos que só se aprende nas vivências, nas interações que fazemos com o ambiente, com o espaço em que convivemos. Segundo a Teoria de Maturana & Varela (2005) assumir a interação como um pré-suposto para o aprender, significa, repensar as práticas e estratégias pedagógicas, a fim de que se possibilite a participação efetiva de cada estudante na construção de seu conhecimento, bem como no desenvolvimento de competências que realmente importam para os estudantes no fluxo do viver.

A construção de conhecimentos estatísticos promovida pelos Projetos de Aprendizagem leva à ação e aproxima fronteiras entre 'o que fazer' e 'por que fazer desta maneira'. Segundo Piaget (1976), quando o sujeito alcança esses níveis, as práticas se apoiam em teorias. A riqueza das maneiras de pensar, das formas de ver o mundo, acarreta em um aperfeiçoamento das abstrações empíricas. Pela construção de novos esquemas assimiladores, é permitido a nós "observar" nos objetos características a um contato inicial não visto. Desta forma, podemos afirmar que, quanto mais evoluírem nossas abstrações reflexionantes, mais aperfeiçoadas ficarão nossas observações empíricas. Esse aumento de conhecimentos, passando da não-diferenciação para a diferenciação, permite a coordenação de diferentes ações. Coordenar significa relacionar, o que resulta na criação de um sistema de significações, ou seja, a aprendizagem.

Entendemos que educar consiste em prover caminhos que levem a construção de conhecimentos, que tenham significado para o estudante, e não simplesmente apresentar conceitos e estabelecer procedimentos a serem executados mecanicamente. Pela Teoria da Biologia do Conhecer, proposta por Maturana & Varela (2005), a construção do conhecimento é ativa, e desenvolvida nas interações com o mundo. O conhecimento é resultante de uma construção, e não preexiste antes de um fazer, pois "[...] todo fazer é um conhecer e todo conhecer é um fazer" (p. 31).

"Em suma: se a vida é um processo de conhecimento, os seres vivos constroem esse conhecimento não a partir de uma atitude passiva e sim pela interação. Aprendem vivendo e vivem aprendendo." (Maturana & Varela, 2005, p.12).

Maturana (1993, p. 31) vê a aprendizagem "como um processo de adaptação, de acomodação a uma circunstância diferente daquela em que o organismo – a pessoa, a criança, o estudante – se encontrava originalmente". Ciente disto, o professor passa a ter o papel de desencadeador de perturbações que levem a uma adaptação, promovendo mudanças estruturais no estudante de forma que este desenvolva outras aprendizagens. Sendo assim, faz-se necessário mudar a maneira de organizar o processo de ensinar e de aprender, bem como abandonar a antiga ideia de que basta o professor "ensinar" um conteúdo de forma coerente e organizada para que o estudante aprenda.

O estudante precisa ser provocado, passar por uma série de desequilíbrios e reequilibrações, e construir a espiral de seu próprio conhecimento. Segundo Piaget (1976), é necessário romper o estado de equilíbrio, de certezas, para o sujeito agir visando uma nova reequilibração, uma nova aprendizagem. Esta nova reequilibração é alcançada através da adaptação, resultante do equilíbrio dinâmico entre assimilação e acomodação. A assimilação ocorre quando o indivíduo utiliza as estruturas cognitivas que possui para incorporar novos objetos aos sistemas de esquemas existentes, e a acomodação, quando se torna necessária a modificação das estruturas existentes, ou até mesmo a criação de novas para incorporar as suas aprendizagens. A alternância entre esses dois processos complementares é responsável pela equilibração cognitiva, ou seja, o aprendizagem

Essa aprendizagem não pode ser alcançada no isolamento do indivíduo, ela se dá na relação com o meio, com o contexto, com a experiência e a história de vida dos que buscam aprender. Compartilhar vivências é necessário para reconstrução de conceitos, para compreender o próprio conhecimento e o mundo que emerge a partir das trocas. Nesse mesmo sentido, Gal (2002) destaca que para ocorra a Literacia Estatística é necessário a compreensão de que os dados estatísticos não são unicamente números, mas números inseridos num determinado contexto; estar familiarizado com os conceitos básicos de estatística descritiva; compreender noções básicas de probabilidade; e entender o mecanismo do processo inferencial, ao tomar decisões estatísticas.

Assim, a construção dos conceitos estatísticos ocorre a partir da ação e interação dos estudantes, considerando seus conhecimentos e o meio em que vivem. Cada um, sujeito de seu processo de aprendizagem.

Projetos de aprendizagem

A Pedagogia de Projetos de Aprendizagem, amplamente utilizada e referenciada teoricamente pelo LEC – Laboratório de Estudos Cognitivos da UFRGS - cuja experiência piloto

foi realizada pelo Projeto Amora (Cap/UFRGS), em 1995-96. O Grupo de Pesquisa em Educação Estatística da Universidade Federal do Rio Grande - FURG adaptou esta estratégia pedagógica no Ensino da Estatística em cursos de graduação.

Essa alternativa pedagógica, reconhecida como inovadora, apresenta resultados significativos quanto ao desenvolvimento cognitivo e a melhoria da aprendizagem, especialmente na construção de conceitos, pois fazer um Projeto de Aprendizagem significa desenvolver atividades de investigação sobre uma questão que "incomoda", desperta a atenção e excita a curiosidade do sujeito.

O desenvolvimento de um Projeto de Aprendizagem consiste na busca por informações que esclareçam as indagações de um sujeito sobre a sua realidade. Essas indagações se manifestam por inquietações advindas de suas vivências e de necessidades em conhecer e explicar o mundo.

O educar pela pesquisa caracteriza-se por uma situação de aprendizagem mais abrangente, pois para que o aluno pesquise e estude um tema, é preciso aprofundar determinados conceitos específicos trabalhados na disciplina. Isto permitirá que o estudante entenda as particularidades destes conceitos, faça relações mais complexas e integre-as no âmbito global do Projeto de Aprendizagem proposto, buscando confirmar suas certezas temporárias e superar suas dúvidas provisórias. Para Prado (2006) conceber e realizar um projeto implica esforço e envolvimento pessoal, bem como ser capaz de gerir a complexidade das situações que vão surgindo. Mesmo assim, constitui um desafio que pode ser muito estimulante para os estudantes que estão dispostos a assumir um papel ativo no seu processo de aprendizagem e no seu desenvolvimento profissional.

O objetivo é o desenvolvimento de um processo de aprendizagem que alcance a construção de novos conhecimentos, no qual o aprendiz possa sistematizar informações, ampliando sua rede de significações, e reestruturar o raciocínio lógico sobre os novos significados enquanto elabora sínteses de respostas descritivas e explicativas para sua curiosidade. Durante o desenvolvimento do projeto, os sujeitos constroem uma rede de conhecimentos em torno da questão investigada.

Segundo Fagundes, Sato & Laurino-Maçada (1999), o primeiro passo é selecionar uma curiosidade que, para fins didáticos, denomina-se de questão de investigação. A seguir é feito um inventário dos conhecimentos (sistemas nocionais ou conceituais dos aprendizes) sobre a questão. Esses conhecimentos podem ser classificados em dúvidas e certezas. As certezas para as quais não se conheça os fundamentos que a sustentem são denominadas de provisórias, e as dúvidas são sempre temporárias, de modo que o processo de investigação consiste no esclarecimento das dúvidas e na validação das certezas.

O trabalho com projetos se desenvolve segundo um plano de interação intensiva. No plano, os itens do inventário são agrupados em unidades de investigação, segundo suas afinidades, e ocorre a previsão de um tempo para sua realização, a definição de recursos e a escolha de uma metodologia. O esclarecimento/validação de um item requer: coleta de informação, análise, debates e, por fim, elaboração de uma síntese descritiva e/ou explicativa. No decorrer da investigação, surgem novas dúvidas e novas certezas; com isso, o inventário é modificado e o planejamento, consequentemente, refeito.

Em torno de um projeto se articula uma rede de cooperação, formada por autores dos projetos, outros sujeitos (construtores de outros projetos, orientadores) sendo, neste caso,

orientadora/pesquisadora e eventuais colaboradores externos. Vale ressaltar que "essas coletividades não são somente constituídas por sujeitos humanos e por tecnologias, mas também por suas relações" (Maraschin, 1995).

O trabalho em grupo tem como objetivo proporcionar a discussão de ideias e melhorar a aprendizagem de forma dinâmica, refinando a integração do processo de aprendizagem, estimulando e apoiando a cooperação entre os estudantes. Silva (2001) considera importante uma prática docente compartilhada entre aquele que ensina e aquele que aprende, estabelecendo, assim, um processo de produção de sentido que torna o estudante capaz de construir seu próprio percurso de aprendizagem.

Na proposta de Projetos de Aprendizagem, o papel do professor é orientado pelas diferentes funções que venha a assumir na interação com os estudantes (Fagundes, Sato & Laurino-Maçada, 1999). Ele poderá ser um articulador entre objetivos, interesses e estilos de aprender dos alunos, cabendo a ele a função de organizar o contexto de aprendizagem no que diz respeito às possíveis áreas de interesse e as suas necessidades e dos sujeitos, desenvolvendo-as presencialmente ou via mecanismos de interação e comunicação digitais; coordenar a reflexão que envolve a prática docente e discente, organizando o planejamento conjunto de novas ações e analisando continuamente os resultados de modo a oportunizar a reorganização do contexto de aprendizagem; fortalecer as trocas que favoreçam a integração entre os conceitos trabalhados por orientador/pesquisador a partir das ações disciplinares ou interdisciplinares. O orientador de projetos deve estimular e auxiliar a viabilização busca e organização de informações, frente às indagações do grupo. Ele ainda questiona, apresenta desafios, argumenta e provoca a contra argumentação dos aprendizes, provocando a atividade de pensar criticamente para refazer suas buscas e as atuais construções.

O professor/orientador também é responsável por proporcionar o estabelecimento de contatos com os especialistas das diferentes áreas do conhecimento, sempre que um projeto assim demandar, de maneira que os conceitos sejam aprofundados.

Atividades da oficina

O primeiro passo é a diferenciação de um Projeto de Aprendizagem de um Projeto de Ensino, bem como conhecer o desenvolvimento de projetos de Aprendizagem, os papéis de cada sujeito e apresentação das teorias que fundamentam esta estratégia pedagógica.

A seguir, os participantes serão divididos em grupos. Cada grupo desenvolverá cooperativamente, uma proposta para um Projeto de Aprendizagem. Esta atividade tem por objetivo possibilitar que os participantes da oficina vivenciem as diversas fases de um Projeto de Aprendizagem: a escolha da questão de investigação, o inventário dos conhecimentos o qual inclui as certezas provisórias e as dúvidas temporárias, as formas de coleta e organização dos dados e a organização geral do projeto de aprendizagem.

Ao final cada grupo apresentará sua proposta de projeto de aprendizagem evidenciando a diferenciação desse a um projeto de ensino, as possibilidades a serem exploradas a partir dessa proposta e as dificuldades enfrentadas ao longo do processo.

Ao término desta atividade será realizada uma análise reflexivo-crítica da mesma, discutindo as possibilidades, limites e forma de articulação com os conceitos estatísticos, assim como ao longo de toda a oficina serão estimuladas discussões que promovam a reflexão sobre a finalidade, a adequação e as potencialidades pedagógicas dos Projetos de Aprendizagem.

Encaminhamentos finais

Espera-se com esta oficina que os participantes vislumbrem o potencial da utilização de Projetos de Aprendizagem como uma estratégia pedagógica capaz de contribuir para a construção de conceitos estatísticos e sua abstração, sem utilizarem a memorização e a repetição. Com base nesta ideia é que será desenvolvida esta oficina, a fim de promover a construção do conhecimento, ou seja, a diferenciação, a coordenação de diferentes ações, a tomada de consciência das ações, as novas aprendizagens (conceituação), que remeterão a construção de conceitos estatísticos e, que possibilitem novos saberes e fazeres na prática docente de Estatística.

Bibliografia e referências

Batanero, C. (2001). *Didáctia de la Estadística*. Retrieved from http://www.ugr.es/~batanero

Bayer, A., Echeveste, S., & Seibert, L. (2010). Classificação dos erros mais frequentes na resolução de problemas estatísticos. In *5 Congresso Internacional de Ensino da Matemática*. Canoas. Anais. Canoas: V CIEM, 2010.

Castells, M. (2003). *A galáxia da internet: reflexões sobre a internet, os negócios e a sociedade*. Rio de Janeiro: Jorge Zahar.

Campos, T. M. M., Coutinho, C. Q. S., & Almouloud. S. A. (2006). Mathematics Education and Statistics Education: meeting points and perspectives. In *International Conference on Teaching Statistics*, 7., 2006, Salvador. Anais. Salvador: ICOTS.

Cazorla, I. (2004). Estatística ao alcance de todos. In *6 Encontro Nacional de Educação Matemática*. Universidade Federal de Pernambuco.

Fagundes, L, Sato, L., & Laurino-Maçada, D. (1999). *Aprendizes do futuro: as inovações começaram!* Brasília: Secretaria da Educação a Distância, Ministério da Educação.

Gal, I. (2002). Adult's Statistical literacy: Meanings, Components, Responsabilities. *International Statistical Review*, *70*, 1-25.

Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing Students' Statistical Reasoning Research and Teaching Practice*. Springer Publishers, California.

Maraschin, C. (1995). *Escrever na Escola: da alfabetização ao letramento* (Tese de doutorado). UFRGS, Porto Alegre.

Maturana, H. R. (1993). Uma nova concepção de aprendizagem. *Dois Pontos*, *2*(15), 28-35, Belo Horizonte.

Maturana, H. R., & Varela, F. (2005). *A árvore do conhecimento: as bases biológicas da compreensão humana*. (5th ed.). São Paulo: Palas Athena.

Piaget, J. (1976). *A Equilibração das Estruturas Cognitivas - o problema central do conhecimento*. Rio de Janeiro: Kahar Editores.

Prado, M. E. B. B. (2006). A mediação pedagógica: suas relações e interdependências. *In 17 Simpósio Brasileiro de Informática na Educação*. Brasília.

Salcedo, A. (2014) *Educacion Estadística en America Latina*. Retrieved from http://www.pucrs.br/famat/viali/tic_literatura/anais/Educacion.pdf

Silva, M. (2001). *Sala de Aula Interativa*. Rio de Janeiro: Quarter.

Vendramini, C. M. M., & Brito, M. R. F. (2001). Relações entre atitude, conceito e utilidade da estatística. *Psicologia Escolar e Educacional*, *5*(1). Campinas.

Proporção simples: um estudo de caso sobre o raciocínio de estudantes brasileiros do ensino fundamental

Marlí **Schmitt Zanella**
Universidade Estadual de Maringá.
Brasil
marlischmitt@hotmail.com
Idelmar André **Zanella**
Universidade Estadual de Maringá.
Brasil
andrezanel@yahoo.com.br

Resumo

O presente artigo tem por objetivo investigar o raciocínio multiplicativo mobilizado por alunos brasileiros do quinto ano do Ensino Fundamental, durante a resolução de situações problemas da estrutura multiplicativa, envolvendo proporção simples, bem como, descrever e categorizar as estratégias apresentadas por eles. Foram aplicadas seis questões, três da classe de correspondência um para muitos, e três questões da classe de correspondência muitos para muitos. Observamos que a maioria dos alunos apresentaram raciocínio multiplicativo para resolver as questões, e a primeira classe, de correspondência um para muitos foi a que os estudantes obtiveram maior sucesso. Em relação a segunda classe, de correspondência muitos para muitos, a questão Q4 teve o maior número de acertos, apenas 1 aluno (A6) resolveu corretamente a questão Q6, e nenhum aluno acertou Q5, embora, quatro alunos apresentaram desenvolvimento de resolução por meio do raciocínio multiplicativo, mas equivocaram-se no cálculo.

Palavras chave: Educação Matemática; Ensino Fundamental; Estrutura Multiplicativa; Proporção Simples; Teoria dos Campos Conceituais.

Introdução

A presente pesquisa se pauta na hipótese de que as atividades e a variedade de situações problemas utilizadas nos processos de ensino e de aprendizagem da Matemática são, particularmente, necessárias à conceitualização do campo conceitual multiplicativo.

Neste sentido, uma das teorias que tem apresentado contribuições para a Educação Matemática contemporânea é a Teoria dos Campos Conceituais – TCC, desenvolvida pelo professor e pesquisador Gérard Vergnaud. Há muito, suas ideias têm ajudado pesquisadores a entender a formação dos conceitos matemáticos por parte dos alunos, a partir de observações de suas estratégias de ação na resolução de diferentes situações de um mesmo conceito.

No Brasil, muitas pesquisas são fundamentadas por essa teoria, sobretudo aquelas voltadas para o estudo da estrutura multiplicativa de números Naturais, nos anos iniciais do Ensino Fundamental (Silva, 2010; Teixeira, Vansconcelos, & Guimarães, 2009).

Neste estudo, propomo-nos a investigar o raciocínio mobilizado por estudantes brasileiros do quinto ano do Ensino Fundamental, durante a resolução de situações problemas da estrutura multiplicativa, envolvendo proporção simples, bem como, descrevemos e categorizamos as estratégias apresentadas por eles.

Teoria dos Campos Conceituais – TCC

A didática da matemática estuda as situações inerentes aos processos de ensino e de aprendizagem, dá importância à significação das tarefas e das atividades propostas aos educandos, privilegia a relação entre a elaboração de conceitos e as atividades a serem trabalhadas em sala de aula, de tal forma que, favoreçam a formação e o desenvolvimento dos conceitos. Para colocar em discussão os conteúdos teóricos e práticos do ensino e os métodos e procedimentos que lhe são associados, a didática tem como objetivos analisar os comportamentos e os discursos produzidos pelos alunos, bem como as escolhas e as ações dos docentes.

Nesse aspecto, destacamos a Teoria dos Campos Conceituais - TCC, que proporciona o estudo das ações dos alunos e as condições de produção, registro e comunicação durante situações de aprendizagem. Ademais, proporciona ao professor uma compreensão das ações do estudante, fornecendo subsídios para a organização dos conteúdos em sala de aula, de modo a privilegiar uma diversidade de situações relacionadas ao mesmo conceito.

A ação operatória de um conceito deve ser analisada por meio de uma variedade de situações. A TCC valoriza os aspectos estruturais dos invariantes, analisando-os do ponto de vista dos próprios saberes constituídos. De acordo com Vergnaud (1993) a TCC procura dar um conteúdo matemático às organizações das condutas observáveis em situação. Com isto, podemos compreender a reciprocidade do processo de transformação das situações e dos conhecimentos em sua relação com os conceitos.

Neste contexto, estabelecer classificações às situações problemas, descrever procedimentos, analisar a estrutura e a função dos enunciados e das representações simbólicas é de interesse para a aprendizagem em Matemática, especialmente nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

O conceito amplamente teorizado em diversas pesquisas e definido por Vergnaud (1991) é a ideia de um Campo Conceitual, que é um conjunto de situações, cujo domínio progressivo exige uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em estreita conexão. Isso significa que um conceito não se encontra isolado, por isso é necessário trabalhar os diferentes significados de um conceito por meio de diferentes tipos de problemas. A multiplicação e a divisão são exemplos de conceitos que ganham sentido quando considerados como parte de um Campo Conceitual, o campo da estrutura multiplicativa (Vergnaud, 1991).

Campo Conceitual Multiplicativo

O campo conceitual da estrutura multiplicativa é o conjunto de situações cujo domínio requer uma ou várias multiplicações ou divisões, e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar estas situações como atividades matemáticas, tais como "proporção simples e múltipla, função n-linear, razão escalar direta e inversa, quociente e produto de dimensões, combinação linear e aplicação linear, fração, razão, número racional, múltiplo e divisor" (Vergnaud, 1993, p. 9).

Para uma análise da aprendizagem das estruturas multiplicativas, diferente das estruturas aditivas, que são compostas por relações ternárias, deve-se considerar relações quaternárias e por isso, esta estrutura não é representada pela escrita convencional da multiplicação, $a \times b = c$, pois essa representação escrita possui apenas três termos (Zanella & Barros, 2014).

Nas relações multiplicativas, Vergnaud (2009) ressalta que podemos distinguir duas categorias principais, o isomorfismo de medidas e o produto de medidas. Estas possuem relação entre si, pois quando realizamos uma análise dimensional e utilizamos, por exemplo, um operador-função para a solução de situações problemas de isomorfismo de medidas, podemos encontrar o produto de medidas. Para compreender esta afirmação, vamos discutir a seguinte situação problema: "Um avião voa durante 6 horas à velocidade de 650 quilômetros por hora. Que distância ele percorre?" (Vergnaud, 2009, p. 258).

Para interpretar os dados da situação vamos distribuí-los adequadamente por tempo em horas e distância em quilômetros, indicado na Tabela 1. Esta relação forma um isomorfismo de medidas.

Tabela 1
Exemplo de isomorfismo

Tempo em horas	**Distância em quilômetros**
1	650
6	*x*

Fonte: Autores.

A resolução desta situação consiste em multiplicar a medida 6 horas pelo operador-função 650 Km/h. Note que esta relação pode também ser interpretada da seguinte forma:

$$x\ km = 6\ horas\ \times 650\ km/hora$$

Temos para a dimensão a equação:

$$medida\ da\ dist\hat{a}ncia = medida\ em\ horas\ \times medida\ da\ velocidade$$

Representada por: $d = t \times v$ ou $d = v \times t$.

Esta equação retoma a relação definida por Vergnaud (2009) como produto de medidas.

De acordo com Vergnaud (2009) pode-se interpretar o produto de medidas como um isomorfismo duplo, ou, dupla proporcionalidade. Geralmente, os estudantes possuem mais dificuldades com o produto de medidas do que com o isomorfismo, a não ser que este seja interpretado como dupla proporção. O autor destaca também que existem dimensões simples, como comprimento, tempo, peso, custo, dimensões produto compostas por área e volume, e as dimensões quociente, dos quais pertencem a velocidade, densidade ou valor unitário. Entretanto, estas duas últimas dimensões, são muitas vezes, compostas por dimensões simples. Por exemplo,

$$\text{área} = \text{comprimento} \times \text{largura},\ \text{velocidade} = \frac{dist\hat{a}ncia}{tempo}.$$

Desta forma, os conjuntos de composições numéricas – multiplicações, divisões, regra de três simples e composta, e composições sobre as dimensões pertencem às relações multiplicativas.

Na sequência, descrevemos as classes de problemas do tipo multiplicativo, o isomorfismo de medidas, proposto por Vergnaud (2009). Para compreender as diferenças destas categorias

apresentamos esquemas relacionais inerentes ao mesmo domínio de referência, fornecemos exemplos correspondentes, e realizamos análises das equações numéricas equivalentes aos esquemas.

O isomorfismo de medidas é uma relação quaternária entre quatro quantidades, sendo, duas a duas, medidas diferentes, e uma dessas quantidades corresponde ao valor unitário. Há três classes de problemas, subdivididas em multiplicação, divisão em que se busca o valor unitário, e a divisão em que se busca a quantidade de unidades. Vergnaud (2009) destaca que essas três classes do isomorfismo de medidas, podem ser subdivididas em numerosas subclasses, variando apenas o conjunto numérico (inteiros pequenos e grandes, números decimais e decimais inferiores a 1), bem como a busca pelo valor unitário ou a quantidade de unidades.

Primeira classe de isomorfismo de medidas

Na multiplicação conhecemos o valor unitário e outras duas quantidades, em dois tipos de medidas, conforme indicadas no esquema representado no Quadro 1.

Quadro 1
Isomorfismo de medidas - conhecendo o valor unitário

Quantidade a	Quantidade b
1 →	a
b →	x

Situação: Ana tem 4 pacotes de canetas. Em cada pacote há 3 canetas. Quantas canetas Ana possui? O esquema que Vergnaud (2009) propõe é representado no Quadro 2.

Quadro 2
Exemplo de isomorfismo de medidas – conhecendo o valor unitário

Quantidade de pacotes de canetas	Quantidade de canetas
1 →	3
4 →	x

A equação correspondente é: $\frac{1}{4} = \frac{3}{x} \Longrightarrow 1.x = 4.3 \Longrightarrow x = 12$, ou seja, Ana tem 12 canetas. O cálculo relacional desta situação ocorre pela multiplicação. Conforme Vergnaud (2009b), os valores 1 e 4 representam quantidades de pacotes de canetas, e 3 e x representam a quantidade de canetas, ou seja, são todos medidas, mas de naturezas distintas.

Assim, há duas possibilidades de determinar a quantidade x de canetas. A primeira consiste em aplicar o operador sem dimensão ($\times$ 4) à quantidade de três (03) canetas. A segunda consiste em aplicar a função relacional: quantidade de quatro (04) pacotes vezes um três canetas/pacote ($\times$ 3) para obter a quantidade de canetas.

Essa análise permite compreender que, efetuando-se a multiplicação 4×3, é fornecida uma relação entre a quantidade de pacotes e canetas/pacote. Essa relação quaternária também pode ser analisada das seguintes maneiras:

- *x* canetas estão para 3 canetas, assim como 4 pacotes de canetas estão para 1 pacote de caneta.
- *x* canetas estão para 4 pacotes de canetas, assim como 3 canetas estão para 1 pacote de canetas.

Segunda classe de isomorfismo de medidas

Na *divisão: busca do valor unitário* temos o esquema a seguir, indicado no Quadro 3.

Quadro 3
Isomorfismo de medidas – busca do valor unitário.

Quantidade a		Quantidade b
1	→	X
b	→	c

Situação: Carlos pagou R$9,00 por 3 revistas. Quanto custa cada revista? O esquema referente a esta situação é indicado no Quadro 4.

Quadro 4
Exemplo de isomorfismo de medidas – busca do valor unitário.

Quantidade de revistas		Valor pago (R$)
1	→	X
3	→	9

A equação correspondente é: $\frac{1}{3} = \frac{x}{9} \Longrightarrow 3.x = 1.9 \Longrightarrow x = \frac{9}{3} \Longrightarrow x = 3$, ou seja, Carlos pagou R$3,00 em cada revista. O cálculo relacional desta situação ocorre por divisão de valores com intuito de obter o valor unitário da revista.

Terceira classe de isomorfismo de medidas

Na <u>*divisão: busca da quantidade de unidades*</u> temos o esquema a seguir, representado no Quadro 5.

Quadro 5
Isomorfismo de medidas – busca da quantidade de unidades

Quantidade a		Quantidade b
1	→	A
x	→	c

Situação: João tem R$20,00 e quer comprar cadernos que custam R$5,00 cada um. Quantos cadernos poderá comprar? O esquema referente a esta situação é indicado no Quadro 6.

Quadro 6
Exemplo de isomorfismo de medidas – busca da quantidade de unidades.

Quantidade de cadernos		Preço (R$)
1	→	5
x	→	20

A equação correspondente é: $\frac{1}{x} = \frac{5}{20} \Longrightarrow 5.x = 1.20 \Longrightarrow x = \frac{20}{5} \Longrightarrow x = 4$, ou seja, João poderá comprar 4 cadernos iguais.

Destacamos que os exemplos apresentados anteriormente são relações quaternárias e pertence ao eixo Proporção Simples (Magina, Santos, Merlini, 2014). Neste eixo há duas classes, no qual as três situações apresentadas pertencem a primeira classe, de correspondência um para muitos. A segunda classe é aquela que prevalece a correspondência muitos para muitos, e são examplificadas na Tabela 2.

Método

Neste artigo, apresentamos um estudo de caso sobre o raciocínio de estudantes brasileiros do Ensino Fundamental na resolução de situações problemas da estrutura multiplicativa, específicamente, relações quaternárias – eixo proporção simples.

Tabela 2
Situações problemas de proporção simples.

Proporção Simples	
Classe 1: Correspondência um para muitos	Classe 2: Correspondência muitos para muitos
(Q1) Um carro percorre 55 Km em 1 hora. Se ele mantiver o mesmo ritmo, que distancia o carro vai percorrer em 4 horas?	(Q4) Na feira do produtor, 12 laranjas custam R$3,50. Quanto vai custar 6 laranjas?
(Q2) Rita comprou 6 pacotes de maçãs. Em cada pacote há 11 maçãs. Quantas maçãs Rita comprou?	(Q5) Por 5 mini pães, Clara pagou R$0,75. Quanto ela pagará por 18 mini pães?
(Q3) Paula tem R$20,00 e quer comprar cadernos que custam R$5,00 cada um. Quantos cadernos ela poderá comprar?	(Q6) Ana comprou 25 canetas e pagou por elas R$31,25. Quanto ela vai pagar por 40 canetas?

Fonte: Autores.

Baseados nos principios da pesquisa descritiva (Severino, 2007), investigamos o raciocínio multiplicativo mobilizado pelos participantes durante a resolução de situações problemas envolvendo proporção simples, bem como, descrevemos e categorizamos as estratégias apresentadas por eles.

Um teste, contendo seis questões de proporção simples, foi aplicado a onze (11) alunos do quinto ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do Estado do Paraná. O instrumento de coleta de dados apoiou-se na Teoria dos Campos Conceituais, de Vergnaud (2009). No Quadro 01, apresentamos as questões aplicadas, divididas em duas classes. A primeira classe contempla a correspondência um para muitos (questões Q1, Q2 e Q3) e a segunda classe, a correspondência muitos para muitos (questões Q4, Q5 e Q6).

Resultados

Os resultados obtidos nesta pesquisa são apresentados por meio de uma análise quantitativa e qualitativa.

Análise Quantitativa

A análise quantitativa apresenta o percentual de acerto dos estudantes nas questões aplicadas (descritas na Tabela 2), conforme mostra o gráfico da Figura 1.

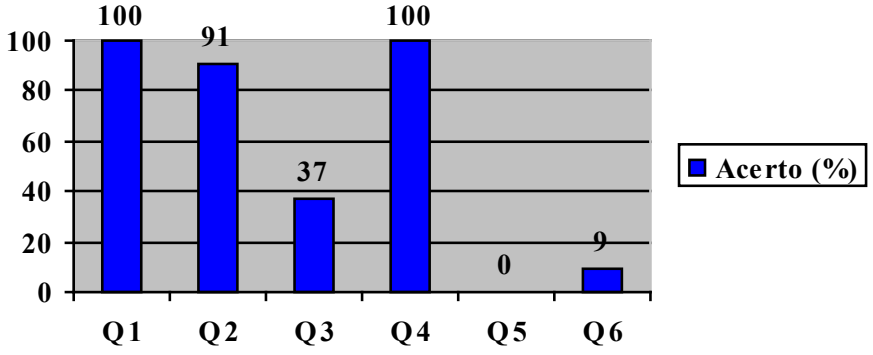


Figura 1. Representação do percentual de acerto dos estudantes.

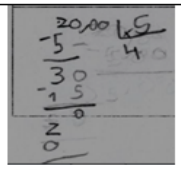
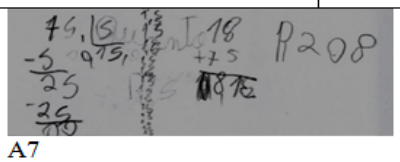
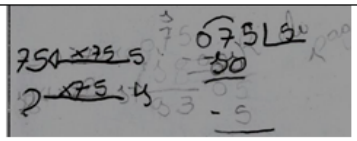
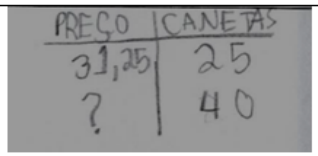
O gráfico da Figura 1 explicita que os estudantes tiveram melhor desempenho nas questões da primeira classe, de correspondência um para muitos. Nesta classe, a relação unitária é explicitada (Q1: em 1 hora o carro percorre 55 Km; Q2: 1 pacote de maçãs tem 11 maçãs; Q3: 1 caderno custa R$5,00). As questões da segunda classe, de correspondência muitos para muitos, a relação fixa está implícita, o que as torna de níveis de complexidade distintos. Nesta classe, para se obter o resultado deve-se coordenar duas operações, primeiro uma divisão para identificar a relação fixa (um para muitos) e na sequência realizar a multiplicação. Na sequência apresentamos uma análise qualitativa das respostas dos alunos.

Análise Qualitativa

A análise qualitativa é realizada com intuito de descrever e categorizar o raciocínio multiplicativo mobilizado pelos estudantes envolvidos na resolução das situações elencadas na Tabela 2. A categorização apresentada nesta pesquisa é baseada em Magina, Santos, Merlini (2014), que identificaram quatro níveis de raciocínio para a estrutura multiplicativa: Nível 1 – Incompreensível; Nível 2 – Pensamento Aditivo; Nível 3 – Transição do Pensamento Aditivo para o Multiplicativo; Nível 4 – Pensamento Multiplicativo. Na sequência descrevemos essas categorias e apresentamos os protocolos dos estudantes identificados em cada categoria.

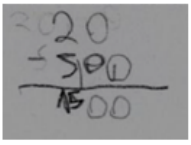
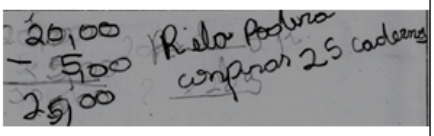
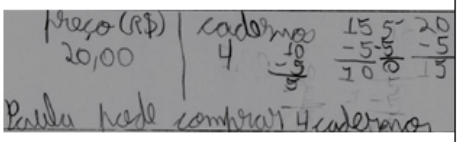
N1 – Incompreensível: são classificadas as respostas em que o estudante não explicitou uma resposta para a situação problema, ou quando o fez, não foi possível identificar o raciocínio utilizado. No Quadro 2, apresentamos protocolos de alunos, para as respectivas questões, que não foi possível identificar o raciocínio empregado pelo estudante. Na questão Q3, para esta categoria, foi identificado que três (03) alunos deixaram-na em branco. Esta categoria está representada no Quadro 7.

Quadro 7
Exemplo de respostas dos alunos – N1 – Incompreensível

Questão	Quant. alunos	Protocolo-Aluno	
Q3	3 deixaram em branco (A9, A10, A11) 1 fez esboço (A8)	 A8	O aluno A8 apresenta uma divisão, da quantidade em dinheiro R$20,00 por 5 (preço de cada caderno). Mas o processo desenvolvido possui equívocos, como: 2-5=3
Q5	5 deixaram em branco (A4, A5, A8, A9, A11) 2 fizeram esboço (A3, A7)	 A7	 A3
Q6	8 deixaram em branco (A2, A3, A4, A5, A7, A8, A10, A11) 2 fizeram esboço (A9, A1)	 A9 e A1	Os alunos A9 e A1 apresentam um esboço para a atividade, identificam uma relação quaternária, com duas quantidades de natureza distintas (preço e canetas), mas não desenvolvem uma solução para a situação.

N2 – Pensamento Aditivo: são classificadas, neste nível, as respostas em que o estudante apresentou resolução por meio de contagem ou por meio de da operação de adição. No Quadro 8, apresentamos protocolos de alunos, para as respectivas questões, que não foi possível identificar o raciocínio empregado pelo estudante.

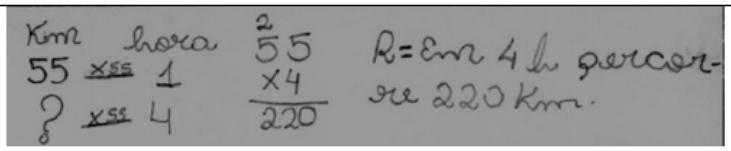
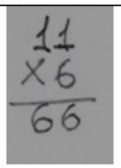
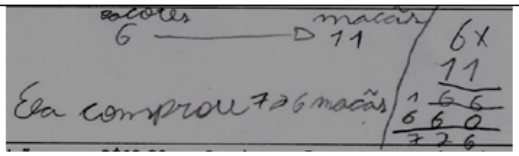
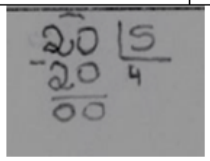
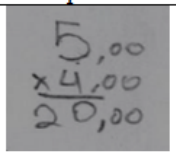
Quadro 8.
Exemplo das respostas dos alunos – N2 – Pensamento Aditivo

Pensamento aditivo – algoritmo adição		Pensamento aditivo - agrupamento
Protocolo A4 e A7	Protocolo A3	Protocolo A1
 Os alunos A4 e A7 realizaram subtração (20-5=15). Indicaram como resposta, a compra de 15 cadernos.	 O aluno A3 realizou a operação de adição entre o valor de um caderno e o total em dinheiro. Como resposta, indicou a compra de 25 cadernos.	 O aluno A1 realizou quatro subtrações de grupos de 5. 20-5=15 15-5=10 10-5=5 5-5=0 Indicou como resposta a compra de 4 cadernos.

Destacamos que a questão Q3, os alunos A3, A4 e A7 utilizaram o raciocínio aditivo, por meio da operação de adição ou subtração (estrutura aditiva) e o aluno A1 utilizou subtrações sucessivas por grupos de 5 unidades.

N3 – **Pensamento Multiplicativo**: são classificadas, neste nível, as respostas em que o estudante utilizou o raciocínio multiplicativo. Nos Quadros 09 e 10, apresentamos protocolos de alunos, para as respectivas questões, em que foi possível identificar o raciocínio multiplicativo, empregado pelo estudante para resolver as questões.

Quadro 9
Exemplo das respostas dos alunos para as questões Q1, Q2, Q3: Pensamento Multiplicativo (N3).

Questão	Quantidade	Protocolo dos alunos			
Q1	11 acertos Os demais protocolos foram semelhantes.	 A6			
Q2	10 acertos	 A6 Acerto	 A10 O aluno A10 equivocou-se no cálculo, embora tenha utilizado o raciocínio multiplicativo.		
Q3	3 acertos (A2, A5, A6)	 A6	A6 realizou uma divisão, do valor que possuia pelo valor unitário do caderno.	 A2 e A5	Os alunos A2 e A5 apresentaram um cálulo inverso, multiplcaram o preço de um caderno por 4 cadernos, obtendo o valor R$20,00.

As questões Q1 e Q2 foram as que apresentaram maior percentual de acertos. Destacamos que a Q1, o raciocínio envolvido predominante foi o raciocínio multiplicativo. Já a questão Q2, o apenas um estudante equivocou-se no cálculo, e realizou a multiplicação de 6 por 11, obtendo como resultado 726 maçãs.

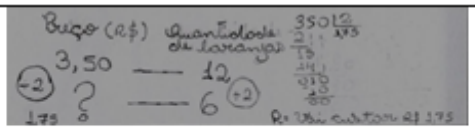
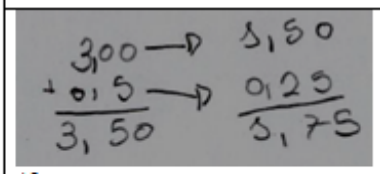
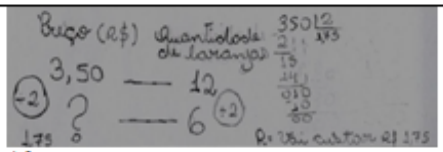
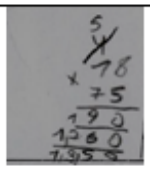
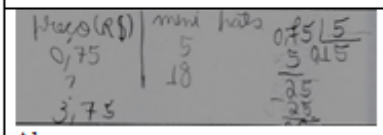
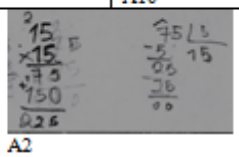
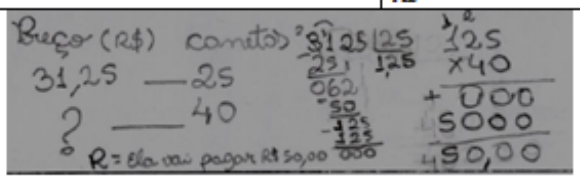
A questão Q3, com apenas 3 acertos, mostra uma dificuldade maior dos estudantes, uma vez que apenas um deles utilizou a operação de divisão para resolvê-la. Dois alunos tentaram resolver por meio da operação inversa, ou seja, quantos cadernos de R$5,00 podem ser comprados com R$20,00.

Na sequência, apresentamos no Quadro 10, as respostas dos alunos obtidas nas questões Q4, Q5 e Q6.

No nível 3 (N3), observamos que a maioria dos alunos apresentaram raciocínio multiplicativo para resolver as questões, e a primeira classe, de correspondência um para muitos foi a que os estudantes obtiveram maior sucesso.

Quadro 10

Exemplo das respostas dos alunos para as questões Q4, Q5, Q6: Pensamento Multiplicativo (N3).

Q4	11 acertos	 A6 e demais alunos	Os alunos realizam a divisão de 3,50 por 2, pois observam que compraram a metade da quantidade de laranjas.
		 A3	O aluno A3 redistribui o valor 3,50=3,00+0,50. E divide por 2. Obtendo o valor para 6 laranjas.
Q5	4 – raciocínio multiplicativo, mas apresentaram equívocos no cálculo.	 A6	 A10
		 A1	 A2
Q6	1 acerto	 A6	

Em relação a segunda classe, de correspondência muitos para muitos, a questão Q4 teve o maior número de acertos, apenas 1 aluno (A6) resolveu corretamente a questão Q6, e nenhum aluno acertou Q5, embora, quatro alunos apresentaram desenvolvimento de resolução por meio do raciocínio multiplicativo, mas equivocaram-se no cálculo.

Considerações

O objetivo deste artigo foi investigar o raciocínio multiplicativo mobilizado por alunos brasileiros do quinto ano do Ensino Fundamental durante a resolução de situações problemas envolvendo proporção simples, bem como, descrever e categorizar as estratégias apresentadas por eles.

Elencamos três categorias, que emergiram a partir da análise qualitativa dos dados. O nível 1 – incompreensível, revelou o que os alunos ainda não dominavam, ou não conseguiram explicitar. O nível 2 – pensamento aditivo, identificado apenas para as resoluções da questão Q3, permitiu observar a presença do pensamento aditivo, pois este, é para os alunos a operação mais familiar, o que corrobora para a ideia apresentada por Magina, Santos e Merlini (2014), de que a multiplicação passa primeiro pela noção de que multiplicar é adicionar/subtrair parcelas repretidas. O nível 3 – pensamento multiplicativo, a classe de problemas em que a correspondência um para muitos prevalece, é a classe em que os estudantes possuem maior facilidade (questões Q1, Q2 e Q3). A classe de correspondência muitos para muitos, é aquela que precisa ser mais explorada no âmbito escolar, visto o baixo índice de acertos.

O estudo proposto evidenciou a importância da análise da produção matemática dos estudantes, com intento de compreender os processos de constituição do raciocínio multiplicativo nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Referências e bibliografia

Magina, S. M. P., Santos, A., & Merlini, V. L. (2014). O raciocínio de estudantes do Ensino Fundamental na resolução de situações problemas das estruturas aditivas. *Ciência e Educação*, *20*(2) 517-533.

Severino, A. J. (2007). *Metodologia do trabalho científico.* São Paulo: Editora Cortez.

Silva, S. R. F. (2010). *Um estudo das estruturas multiplicativas nos Guias de Planejamento e Orientações Didáticas do Programa Ler e Escrever* (Dissertação. Programa de Pós Graduação em Educação Matemática). 216f. Universidade Bandeirante – UNIBAN., São Paulo.

Teixeira, L. M. R., Vasconcelos, M., & Guimarães, S. D. (2009). A resolução de problemas multiplicativos de produto de medidas: um caso exemplar. In M. Bittar, & C. A. Muniz (Orgs.), *A aprendizagem matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais* (pp.77-93). Curitiba: Editora CRV.

Vergnaud, G. (1991). A Teoria dos Campos Conceptuais. In J. Brun, *Didáctica das Matemáticas* (Tradução: Maria José Figueiredo, pp. 155-191). Lisboa: Instituto Piaget – Horizontes Pedagógicos.

Vergnaud, G. (1993). Teoria dos Campos Conceituais. In *Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro, 1993, UFRJ* (pp. 1-26). Rio de Janeiro: Projeto Fundão – Instituto de Matemática – UFRJ.

Vergnaud, G. (2009). *A Criança, a Matemática e a Realidade: Problemas do Ensino da Matemática na Escolar Elementar* (Tradução de Maria Lucia Faria Moro; Revisão técnica Maria Tereza Carneiro Soares). Curitiba: Editora da UFPR.

Zanella, M. S., & Barros, R. M. O. (2014). *Teoria dos Campos Conceituais: Situações Problemas da Estrutura Aditiva e Multiplicativa de Naturais***.** Curitiba: Editora CRV.

Transnumeración de los datos: el caso de las tablas de frecuencia

Soledad **Estrella**
Instituto de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile
soledad.estrella@ucv.cl
Raimundo **Olfos**
Instituto de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile
raimundo.olfos@ucv.cl

Resumen

La transnumeración (Wild y Pfannkuch, 1999) aborda el cambio entre representación de los datos para obtener más comprensión del fenómeno a investigar. La transnumeración de los datos incluye pensar en la reclasificación de los datos, el cálculo de promedios de los datos agrupados en una variable particular, o en representar los datos en bruto o transformados en tablas o gráficos. Este trabajo entrega evidencia del pensamiento transnumerativo según las producciones de 80 alumnos de grado 3 como respuesta a una situación de aprendizaje sobre análisis de datos. Las producciones fueron clasificadas según etapas de la conceptualización de las tablas de frecuencia (listas, seudo tablas, tablas) de una investigación previa (Estrella, 2014; Estrella y Mena, 2013) y según las técnicas transnumerativas de Chick (2004). Los resultados muestran que dada la situación de aprendizaje, las producciones dan evidencia de siete técnicas transnumerativas de un total de diez propuestas por Chick (op.cit.).

Palabras clave: transnumeración, tablas de frecuencia, representación de datos, didáctica de la estadística.

Introducción

Wild y Pfannkuch (1999) han identificado cinco componentes fundamentales del pensamiento estadístico en una indagación empírica de cualquier área: el reconocimiento de la necesidad de los datos, la variación, el razonamiento con modelos estadísticos, la integración de lo estadístico y lo contextual, y la transnumeración. Considerando estos componentes como el núcleo del pensamiento estadístico, desde la Didáctica de la Estadística, surge el imperativo de promover el desarrollo del pensamiento estadístico en nuestros estudiantes. Esta comunicación pretende aportar en esa línea entregando conocimiento acerca de la transnumeración, del cual hay escasas investigaciones que lo aborden en los primeros años de escolaridad.

Marco Teórico

El estudio explora la comprensión de alumnos de primaria y la toma de sentido de la tabla de frecuencia estadística a través del examen de las producciones de los alumnos enfrentados a una situación sobre organización de datos. Dada la situación de análisis de datos, importa reconocer cómo los alumnos pasan de una representación a otra para obtener más comprensión. Con el fin de obtener evidencia de los procesos transnumerativos de los alumnos, se aborda el

marco de las técnicas transnumerativas de Chick (2004), las que se basan en las ideas germinales de Wild y Pfannkuch (1999).

El marco de transnumeración propuesto por Chick (2004), ver Tabla 1, se aplica con el objetivo de encontrar y mostrar el comportamiento de los datos. Cada técnica trasnumerativa involucra algún "cambio en la representación", creando una nueva variable, organizando los datos en forma diferente, o representándolos en una forma visual. Tanto graficar, tabular como cambiar de representación son tipos de transnumeración. En general, estas representaciones de los datos se producen en las etapas finales para mostrar los resultados del análisis de datos, pero también se realizan durante la exploración previa de los datos. Chick (2004) destaca que otras etapas de transnumeración preceden a la tabulación y graficación, como transformar los datos para representarlos (calcular frecuencias en los datos, realizar conteos).

Tabla 1
Marco de técnicas transnumerativas.

Técnica	Descripción
Ordenamiento	Los datos se ordenan por algún criterio. No surgen nuevas variables.
Agrupamiento	Los datos se agrupan de acuerdo a algún criterio. Esto crea una nueva variable. El cambio de variable puede involucrar de antemano un tipo de transnumeración.
Selección de subconjunto	Un subconjunto de datos se selecciona para obtener más comprensión.
Cambio de tipo de variable	Una variable numérica se piensa en términos categóricos o una variable categórica se piensa en términos numéricos u ordinales.
Cálculo de frecuencia	Las frecuencias de ocurrencia de valores de una variable categórica. Crea una nueva variable.
Cálculo de proporción	Proporciones, fracciones en relación al todo. Esto crea una nueva variable.
Graficación/Tabulación	Algunas o todas las variables en los datos (en su forma presente) son graficadas o tabuladas.
Cálculo de tendencia central	Una medida de tendencia central (p.e., la media) para una variable. Puede crear una nueva variable.
Cálculo de medida de dispersión	Alguna medida de dispersión de los valores asociado con una variable numérica. Puede crear una nueva variable.
Otros cálculos	Término genérico, reconocer que son posibles otros cálculos estadísticos sobre los datos (p.e., suma, coeficientes de correlación).

Fuente: Chick, 2004 (traducción de Soledad Estrella).

Esta comunicación que se presenta es parte de una investigación más amplia que busca identificar el proceso de conceptualización de la tabla de frecuencia de nivel escolar, caracterizándolo a partir de las resoluciones de los alumnos de grado 3 en situación de análisis de datos.

Las preguntas principales abordadas son, ¿Cómo se presenta la transnumeración en el proceso de conceptualización de la tabla? esto es ¿Cómo los alumnos tratan de construir significados desde los datos? y ¿Qué representaciones producen cuando se enfrentan a una tarea de análisis de datos?

Metodología

Bajo un enfoque de investigación cualitativo se analizaron las relaciones matemáticas que subyacen en las operaciones que realizan los alumnos para resolver una situación. En concordancia con el marco de transnumeración se recabaron las técnicas trasnumerativas para describir las producciones de los alumnos.

Sujetos

Los participantes pertenecían a dos cursos de grado 3 de primaria de primer semestre de escuelas urbanas, elegidos por la accesibilidad a sus profesores. Un curso se componía de 38 alumnos, 16 niñas y 22 niños, de edades entre 7 y 8 años. El otro curso tenía 42 alumnos, 30 niñas y 12 niños, cuyas edades fluctuaban entre 7 y 9 años.

Recogida de datos

Se implementó una situación de aprendizaje de estadística con papel y lápiz que busca la emergencia de tablas antes de la enseñanza explícita, los datos de este estudio emergen desde las producciones de los alumnos enfrentados a la situación.

La situación se enmarca en el eje Datos y Probabilidades de la asignatura de Matemática de grado 3 del currículo chileno (MINEDUC, 2012) que solicita "Realizar encuestas, clasificar y organizar los datos obtenidos en tablas y visualizarlos en gráficos de barra". El objetivo de la clase implementada fue organizar y clasificar datos para obtener información. En torno al objetivo, se ideó un contexto de interés para los alumnos relativo a la calidad de las colaciones que consumen en la escuela. Bajo la premisa que los datos fuesen reales y motivadores para los alumnos, los profesores establecieron el contexto de las colaciones que los alumnos llevan a la escuela diariamente. En base a las propias colaciones entregadas por los alumnos se diseñó una lámina con los datos de las colaciones en forma de íconos (ver Figura 1). La pregunta central de la clase fue ¿De qué manera podemos ordenar y organizar los datos de nuestras colaciones para saber si estamos en riesgo de contraer alguna enfermedad?

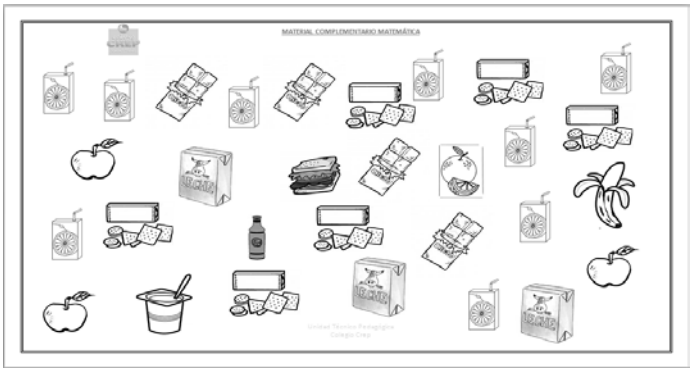


Figura 1. Hoja de las Colaciones de los niños.

La descripción de la clase puede encontrarse en Estrella y Olfos (2013).

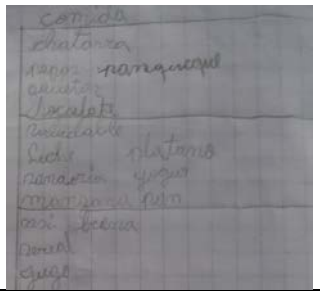
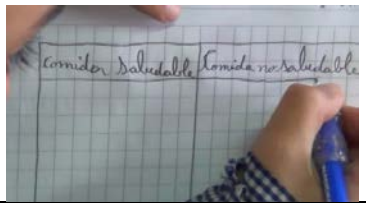
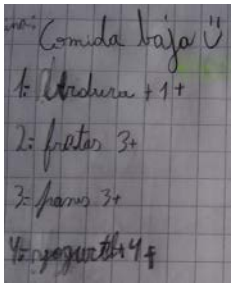
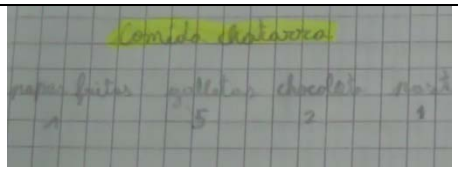
Análisis de datos y resultados

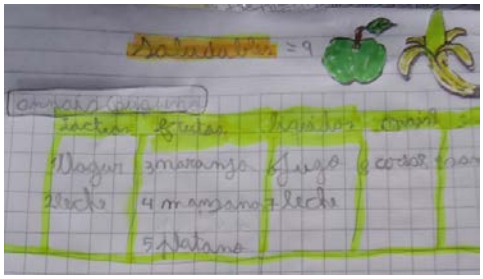
Para indagar en cómo los alumnos actúan con los datos para obtener más comprensión de los mismos, interesa aproximarse desde la Didáctica de la Estadística a la interrogante ¿Cómo se presenta la transnumeración en el proceso de conceptualización de la tabla de frecuencia?

Las producciones dieron evidencias de las técnicas trasnumerativas (Chick, 2004) puestas en juego al buscar y mostrar el comportamiento de los datos de la situación de colaciones. Entre

las diez técnicas propuestas por Chick, en las producciones de los alumnos se observaron siete de estas técnicas. La Tabla 2 describe algunas de las transnumeraciones realizadas por estos alumnos y muestra algunas evidencias de las mismas.

Tabla 2
Ejemplos de producciones que evidencian técnicas de transnumeración en la situación Colaciones de grado 3

Técnica	Evidencia	Descripción
Ordenamiento		Los datos se ordenan según aparezcan y sean “recortados desde la lámina” (por ejemplo, los yogurt no están agrupados entre ellos, tampoco el cereal).
Agrupamiento		Un nueva variable "calidad nutritiva de las colaciones" (implícita) se crea usando los datos de las colaciones, con valores "saludable", "medio" (casi buena) y "no saludable" (chatarra).
Selección de subconjunto		Datos asociados con calidad nutritiva de las colaciones que considera solo "saludable" y "no saludable" (“medio” o “casi saludable” no se considera).
Cambio de tipo de variable		"Calidad nutritiva de las colaciones" (variable categórica) puede darse en estado ordinal, al ordenar las colaciones según grado de saludable (uso de signo +).
Cálculo de frecuencia		Número de tipos de colaciones en cada subcategoría de la variable "calidad nutritiva de las colaciones".

Graficación		Construcción de gráfico de frecuencia de calidad nutritiva de las colaciones "saludables"
Otro cálculo		Suma total de las frecuencias de cada categoría de la variable "calidad nutritiva de las colaciones": saludables y no saludables

Discusión

Las producciones obtenidas de los 80 alumnos corresponden al espectro de listas, seudotablas y tablas. Las producciones se caracterizaron por ser homogéneas, pese a ocurrir entre grupos distintos, en distintas instituciones y distintos enseñantes, -lo cual valida el hallazgo, en tanto técnica de triangulación-, y permite sugerir que las representaciones que producen los aprendices del grado 3 enfrentados a una tarea de análisis de datos son en orden de complejidad: listas, seudotablas y tablas.

Desde el grupo de 80 alumnos, solo 5 de ellos llegan a producir lo que reconocemos como tabla de frecuencia, es decir, una tabla de frecuencias en su aspecto más básico como un arreglo rectangular con una estructura que comprende un conjunto de filas y columnas, que permite presentar los datos correspondientes a una variable –característica del fenómeno bajo estudio– en forma ordenada y resumida, que facilitaría ver el comportamiento de los datos y la comprensión de la información que se puede extraer. Por tanto, se considera una tabla de frecuencia como aquella que posee las características anteriores y explícitamente presenta los elementos de cada clase (subcategoría), el conteo de cada elemento de la clase y –eventualmente– sus totales marginales (conteo de la categoría).

Las interrogantes referidas a ¿Cómo los alumnos tratan de construir significados desde los datos? y ¿Qué representaciones producen cuando se enfrentan a una tarea de análisis de datos? son analizadas desde las técnicas transnumerativas, pues los esquemas que se evocan no solo son matemáticos, sino estadísticos, donde los datos y el contexto se integran, y las representaciones toman relevancia para comunicar los hallazgos (Estrella y Olfos, 2012).

Para aproximarnos a las respuestas a estas interrogantes, el proceso de transnumeración entrega herramientas que relevan el sentido de organizar los datos para obtener información. Para el aprendiz, la construcción de significados desde los datos resulta pertinente si la categorización es adecuada y disjunta, y los conteos de elementos de la clase como de la categoría le permiten responder a la pregunta del problema inicial.

Tabular los datos requiere determinar la presentación de datos con claridad y sin ambigüedades, ello involucra realizar una abstracción de las variables cuantitativas y cualitativas desde el contexto para construir la tabla. En la acción de pasar de los datos a una transformación y luego a una tabulación, se esperaría que los alumnos con pensamiento transnumerativo, por tanto más complejo, notasen patrones al observar o en el proceso de interpretar dicha tabla.

A modo de conclusión desde el análisis transnumerativo realizado, y enfocado en las tablas de frecuencias, la conformación de esta tabla debe evidenciar al menos el uso de las técnicas de agrupamiento (donde toman lugar las categorías disjuntas de la variable), el cálculo de la frecuencia (conteo de la clase respectiva) y la tabulación (que permita al menos una localización de fila y columna del elemento de la clase y/o del conteo respectivo) con o sin líneas demarcadas explícitamente.

Reconocer las técnicas transnumerativas que espontáneamente utilizan los niños, permite tener herramientas para formar alumnos alfabetizados estadísticamente que usan las representaciones para buscar más comprensión en los datos, y ayuda al profesor a valorar los procesos con el fin de profundizar en la comprensión y desarrollar un pensamiento estadístico.

Las tablas de frecuencia deben tener una enseñanza explícita en la escuela, en su diversidad de modos, en su forma y contenido; y el aprendizaje de organizar los datos en tablas debe ofrecer a los niños la oportunidad de interactuar con los datos reales, y con ellos lleguen a "hacer Estadística".

Agradecimientos. Se agradece al financiamiento del Programa FONDECYT a través del Proyecto N°11140472, "Análisis de datos estadísticos y sus representaciones en los niveles kínder a cuarto grado: el caso de las tablas".

Referencias y bibliografía

Chick, H. (2004). Tools for transnumeration: Early stages in the art of data representation. *Mathematics education for the third millennium: Towards 2010*, 167-174.

Estrella, S. (2014). El formato tabular: una revisión de literatura. *Revista Actualidades Investigativas en Educación*, *14(*2), 1-23.

Estrella, S., & Mena-Lorca, A. (2013, septiembre). *Vergnaud's Theory Applied to Basic School Students' Statistical Representations*. Poster presentado en 6th International Conference on Educational Research, ICER13, Khon Kaen, Tailandia.

Estrella, S., y Olfos, R. (2013). Estudio de clases para el mejoramiento de la enseñanza de la estadística en Chile. En A. Salcedo (Ed.), *Educación Estadística en América Latina: Tendencias y Perspectivas* (pp. 167 – 192). Programa de Cooperación Interfacultades. Universidad Central de Venezuela, 2013. ISBN: 978-980-00-2744-8.

Estrella, S., & Olfos, R. (2012). La taxonomía de comprensión gráfica de Curcio a través del gráfico de Minard: una clase en séptimo grado. *Revista Educación Matemática*, *24*(2), 119-129.

MINEDUC (2012). *Bases Curriculares 2012: Educación Básica Matemática.* Santiago de Chile: Unidad de Curriculum y Evaluación.

Pfannkuch, M., & Rubick, A. (2002). An exploration of students' statistical thinking with given data. *Statistics Education Research Journal*, *1*(2), 4-21.

Wild, C., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, *67*(3), 223-248.

Uma formação profissional colaborativa para o ensino de Probabilidade e Estatística: abordagens empíricas com alunos do ensino fundamental

Leandro de Oliveira **Souza**
Universidade Federal do Amazonas
Brasil
olileo@ig.com.br
Celi Espasandin **Lopes**
Universidade Cruzeiro do Sul
Brasil
celilopes@uol.com.br

Resumo

Neste artigo apresenta-se uma discussão sobre um estudo de caso de uma formação realizada com a participação de 16 professores dos anos finais do Ensino Fundamental na rede municipal de São José dos Campos-SP, voluntários, especializados em Matemática. Os participantes desenvolveram atividades empíricas sobre temas estatísticos e probabilísticos e construíram aulas com foco na resolução de problemas por simulação. Neste texto analisa-se uma das atividades planejadas em dupla, implementada por uma professora. Evidenciou-se que o professor se constituiu um produtor de conhecimento que mobiliza seus saberes em prol de gerar situações de ensino que favoreçam a aprendizagem discente. Durante o processo de ensino, os alunos apresentaram concepções equivocadas sobre os conceitos de sorte, azar e causalidade, exigindo que o professor gerenciasse um processo que permitiu a eles a reelaboração de tais ideias e a apropriação de novos elementos para a compreensão do fazer estatístico.

Palavras chave: ensino de Estatística, ensino de Probabilidade, formação de professores, trabalho colaborativo, atividades empíricas.

Introdução

A integração da análise estatística com distribuições probabilísticas e os pressupostos subjacentes a esses modelos ainda apresentam verdadeiros enigmas no ensino (Pfannkuck, 2005). Identificamos, por meio de questionários, que professores têm mostrado relutância, ao introduzir conceitos de Probabilidade no Ensino Fundamental e que, muitas vezes, isso ocorre pela falta de conhecimento sobre as relações da Probabilidade com a Estatística. Outras duas das razões apontadas por Serradó, Azcárate e Cardeñoso (2006) são que os professores acreditam que a Probabilidade não seja um assunto básico; e o fato de que os livros didáticos continuam apresentando o conteúdo de Probabilidade de maneira tradicional, formal, pautado na resolução de problemas matemáticos e sem relação com a Estatística.

Apesar de esforços para afastar abordagens tradicionais de ensino da Estatística, por meio de novos currículos, orientações e pesquisas (Batanero & Diaz, 2010; Carvalho, 2008; Lopes, 2003), diversos paradigmas ainda necessitam ser superados, principalmente quanto à

compreensão da forma como se desenvolve o raciocínio estatístico e dos processos de formação dos professores. Existe uma grande demanda e a necessidade de aprofundar pesquisas que analisem o raciocínio informal (não sistematizado cientificamente) e formal inferencial estatístico e de implantar melhores propostas para capacitar professores e alunos para fazerem conexões entre Probabilidade e inferência estatística (Pfannkuch, 2005).

Neste texto analisamos uma atividade de simulação probabilística elaborada e planejada por uma dupla de professores participantes da formação continuada e depois aplicada a uma turma de alunos, analisada e comunicada ao grupo em formação por uma das docentes. Nosso objetivo foi construir e analisar dados durante um projeto de formação colaborativa, de modo que, por meio da observação da prática docente, pudéssemos compreender como o desenvolvimento, o planejamento e a implementação de uma atividade de simulação probabilística, depois de um ciclo de oficinas, modificariam as abordagens pedagógicas e as atitudes docentes durante o processo de ensino. A análise foi feita a partir de questionários respondidos durante a formação e da videogravação dos encontros.

A formação foi fundamentada numa proposta de pesquisa-ação com base no trabalho colaborativo de 16 professores de Matemática que lecionam para alunos dos anos finais do Ensino Fundamental, com idades de 10 a 14 anos. Em duplas, os professores desenvolveram atividades pedagógicas direcionadas aos seus estudantes, iniciando por uma problemática que exigia a coleta de dados para análise e compreensão do problema. Para isso, expusemos os professores a uma fase inicial de oficinas, em que estudaram e participaram de atividades empíricas e tiveram contato com o modelo de Wild e Pfannkuch (1999), que descreve os processos de raciocínio estatístico em ambientes de investigação. Durante a fase de planejamento, os docentes foram orientados a utilizar as estratégias descritas no modelo, de modo que levassem os alunos a inferir, começando por um problema, planejando, coletando dados, construindo gráficos, analisando e, por último, tirando conclusões sobre o problema proposto.

A formação de professores para a Educação Estatística

O atual cenário do ensino da Estatística reforça a necessidade de investigar formas adequadas e eficientes para melhorar o conhecimento matemático e profissional dos professores, levando-os ao domínio pedagógico de abordagens investigativas, atividades empíricas e produção de informações pautadas na análise de dados. Na visão de Batanero e Diaz (2012), da mesma forma como os alunos constroem seus conhecimentos de maneira ativa, por meio de resolução de problemas e interação com os colegas de classe, os professores deveriam ser preparados para o ensino, especialmente se esperamos que eles utilizem uma abordagem construtivista e social em sala de aula. Acreditamos também, como Soares; e Goulart (2008), que o compartilhamento de aulas e a análise dos resultados obtidos pelos docentes podem gerar formas originais de agir e de pensar que serão absorvidas e ressignificadas pelos alunos futuramente.

É relevante que os professores compreendam que o ensino de Estatística não deve ocorrer em um processo linear, pois requer o conhecimento do contexto que dá origem aos dados, para poder escolher, entre as variáveis, a mais adequada. Faz-se necessário compreender as etapas de coleta, o agrupamento, a análise e a comparação de dados, bem como perceber as características da distribuição, a identificação de agrupamentos e valores atípicos, a análise de medidas, a mudança de itinerário dos procedimentos aplicados ao contexto (Gattuso & Ottaviani, 2011).

Acrescentam-se a isso o conhecimento de Combinatória e a visão não determinista da Probabilidade.

O professor de Matemática, ao ensinar Estatística por meio de processos investigativos, precisa estar preparado para apoiar, conduzir e, se necessário, corrigir os erros dos alunos em soluções matemáticas; deve eximir-se de expressar a sua opinião sobre as interpretações e as argumentações do aluno, para não influenciá-lo; e, ao mesmo tempo, deve provocar questionamentos que permitam ao estudante certa reflexão (Ponte, 2011). A comunicação deve ser conduzida com imparcialidade, mas promovendo a argumentação. O papel docente é refinar as afirmações dos alunos por meio de questionamentos que os façam refletir sobre o processo empregado na análise de cada etapa do ciclo da investigação estatística.

Neste estudo, ao analisar uma aula desenvolvida e implementada por uma dupla de professores, verificamos que o projeto de formação foi essencial para desenvolver a percepção desses profissionais sobre as diversas formas de raciocínio de seus alunos, pois lhes permitiu redirecionar as atividades pedagógicas, quando necessário.

A seguir, descreveremos a metodologia de formação e pesquisa que adotamos para auxiliar os professores participantes da investigação a modificar suas abordagens de ensino.

Assim, discutimos evidências que mostram como o projeto de formação colaborou para modificar a visão conceitual da professora sobre como abordar conteúdos de Probabilidade.

Metodologia

Este estudo de caso refere-se a uma pesquisa-ação realizada durante o curso de doutorado. Nele assumimos a perspectiva de Barbier (2004), que considera a pesquisa-ação como um processo concebido e decidido pelo pesquisador para facilitar mudanças intencionais na prática dos professores. Ações são prioridade neste tipo de pesquisa, porém, os pesquisadores exploram, durante o processo de formação, as consequências das ações, com a finalidade de pesquisa acadêmica. Optamos por analisar e coletar dados durante o processo de formação colaborativa que, para Tripp (2005), é o processo pelo qual as pessoas trabalham juntas como copesquisadores em um projeto em que todos têm igual participação. Nosso objetivo com a formação foi ajudar todos os envolvidos a tomar consciência dos conceitos mais importantes a serem ensinados, para que pudessem desenvolver uma ação coletiva para melhoria da própria prática.

A pesquisa-ação, neste projeto, foi concebida para favorecer mudanças intencionais na prática docente, decididas pelos pesquisadores. Os 16 professores de Matemática que lecionam nos anos finais do Ensino Fundamental do munícipio de São José dos Campos, no interior de São Paulo, que participaram voluntariamente da pesquisa, estiveram presentes em 11 encontros quinzenais, com duração de duas horas e meia.

Os encontros foram divididos em três fases – oficinas, planejamento e comunicação. A primeira fase, de oficinas, consistiu em quatro encontros nos quais os professores tiveram seu primeiro contato com abordagens investigativas e com recursos tecnológicos (*software* Fathom e aplicativos livres da internet) para o ensino de Estatística. A segunda fase também foi organizada em quatro encontros. Nessa fase, selecionamos aleatoriamente, por meio de um sorteio, um conteúdo das disciplinas de Estatística ou Probabilidade, para que, em dupla, os professores elaborassem e planejassem uma aula com a assistência pedagógica do pesquisador. Depois disso, convidamos os docentes para que desenvolvessem a lição planejada com um grupo de estudantes, fazendo notas das suas observações, para repassar a experiência para todo o grupo. A

última fase consistiu na comunicação. Nessa etapa, os professores fizeram a socialização da dinâmica, esclarecendo como ocorreu o desenvolvimento da aula planejada e implementada, comunicando as observações que fizeram durante a aula e explicando como intervieram no processo de ensino, durante as respostas de seus alunos. No processo de discussão e reflexão, os próprios professores elencaram intervenções que foram beneficiadoras do processo de ensino e aprendizagem e aquelas que não os favoreceram.

Em resposta ao nosso objetivo de compreender como o planejamento, a implementação, o desenvolvimento e a comunicação de uma aula de simulação probabilística modificaria as abordagens pedagógicas e as atitudes docentes durante o processo de ensino, analisamos neste artigo um estudo de caso. O foco foi em dois momentos da formação: no primeiro, os questionários aplicados na fase de oficinas trouxeram à tona necessidades práticas dos professores com relação ao ensino de Estatística; o segundo momento consistiu na fase de planejamento, implementação e comunicação de uma aula por uma das professoras em formação.

O propósito deste estudo não foi generalizar uma teoria, mas aprender, por meio da análise da prática da professora, a lidar, nas aulas de Estatística, com as crenças dos alunos em relação aos conceitos de sorte, azar e causalidade e também com as crenças dos próprios professores. Escolhemos analisar as atividades dessa professora porque envolveram simulação probabilística e trouxeram à tona novos conhecimentos para a docente, os quais modificaram seus sentimentos de insegurança e suas abordagens de ensino de Estatística.

O processo de desenvolvimento

No início do projeto, Alice, que tem aproximadamente três anos de experiência docente e é formada em Matemática, afirmou ter clareza sobre todos os temas que devem ser trabalhados no Ensino Fundamental, apontando os eixos descritos nos *Parâmetros curriculares brasileiros* – PCN (Brasil, 1997). Além disso, revelou que nunca tinha lido nada a respeito do eixo Tratamento de Informação (Combinatória, Probabilidade, Estatística), pois não tinha frequentado um curso de formação continuada que tratasse desse assunto, e em sua formação inicial a abordagem havia sido praticamente baseada no paradigma da resolução de exercícios.

No primeiro questionário, perguntamos aos professores sobre como foram ministrados conteúdos relacionados a Estatística na sua formação inicial (graduação). A professora Alice relatou: "*A metodologia utilizada era preencher tabelas, calcular média, desvio padrão e construir gráficos utilizando papel para isso, nunca houve preocupação com a inferência ou com a metodologia de ensino que seria repassada aos alunos*". Sobre recursos tecnológicos, a professora Alice confirmou: "*Nunca tive contato com nenhum software para ensinar Estatística, embora já tivesse utilizado softwares para ensinar as quatro operações e equações de primeiro grau*".

Questionada sobre os obstáculos que encontra para lecionar esse tema, a professora respondeu: "*Na minha formação, eu aprendi o conteúdo, porém, não aprendi como abordá-lo e por isso não me sinto preparada*". A respeito de suas expectativas sobre a formação, Alice afirmou: "*Espero relembrar Estatística. Já faz tempo que não estudo esse tema. Espero aprender metodologias que contribuam para a dinâmica das minhas aulas e aprender a utilizar softwares úteis para abordar Estatística*".

Pelo questionário inicial, de maneira geral, confirmamos que, além de terem aprendido Estatística de maneira procedimental, professores relataram se sentir inseguros para ensinar esse

assunto. As respostas da professora Alice foram muito similares às dos outros professores do grupo.

Alice assim enxergava as diferenças entre ensinar Estatística e Matemática: "[ ]... Acredito que a Estatística está dentro da Matemática. A Estatística trata mais de levantamento de dados, pesquisas e interpretação, enquanto a Matemática tem mais a ver com Álgebra" (Professora Alice, 19 maio 2011).

E, referindo-se à metodologia de ensino de Estatística, revelou: "[...] A melhor maneira para se ensinar Estatística é através da pesquisa de campo, de modo que os alunos sejam agentes participativos, construindo questionários, coletando os dados, projetando, transformando e concluindo sobre informações" (Professora Alice, 19 maio 2011). Além disso, ela acreditava que a Probabilidade e os recursos tecnológicos poderiam ser de fundamental importância.

Muitas eram as dificuldades para modificar as abordagens de ensino, isso foi apontado pelo grupo em formação: para preparar uma aula que eles consideravam de qualidade, faltavam a eles domínio do conteúdo; disponibilidade de materiais didáticos simples e adequados; tempo para o planejamento, que, na maioria das vezes, era feito em casa e solitariamente; e equipamentos de informática disponíveis.

Embasados no relato da professora Alice e nos dos outros professores na fase inicial da pesquisa, acreditamos que, em muitas universidades brasileiras, o ensino de Estatística permanece sendo abordado de maneira procedimental, hierárquica, linear e tradicional. É bem provável que essa perspectiva de formação descrita pelos docentes resulte, para eles, em dificuldades pedagógicas para contextualizar os conteúdos de Estatística e aplicá-los a problemas relacionados à realidade dos estudantes e a problemas reais que permeiam outras ciências.

No próximo item, descreveremos como foi planejada e desenvolvida a atividade da professora Alice em colaboração com outro professor, aproximadamente vinte anos mais experiente, escolhido ao acaso, por sorteio. Além dessa aula, o processo de pesquisa-ação colaborativa que aplicamos gerou seis outras aulas planejadas pelos professores, e cada uma delas foi objeto de análise individual. Escolhemos discutir a atividade desenvolvida por essa dupla, por ter sido uma aula planejada e implementada por uma professora recém-formada, menos propensa a ter suas abordagens e sua visão influenciadas pelas problemáticas que permeiam a prática docente dentro do sistema escolar.

A fase de planejamento e implementação

O processo de planejamento e construção da atividade pela dupla de professores iniciou-se com o tópico "A probabilidade de urnas e roletas". A dupla, a princípio, pesquisou na internet por algum *software* que pudesse auxiliá-la no planejamento da aula. Como ambos encontraram apenas um aplicativo com tutorial classificado para o Ensino Médio, tiveram dificuldades para adaptá-lo ao Ensino Fundamental e desistiram de utilizá-lo. A maior complicação para a dupla era que o sistema gráfico do *software* não era visualmente claro e, além disso, tratava a Probabilidade de modo tal que não permitia a exploração dos dados coletados: basicamente, o aplicativo simulava a retirada de bolinhas coloridas de uma urna, construindo um gráfico de colunas das retiradas.

De maneira geral, os professores necessitariam de mais tempo para adaptar as ferramentas. Além disso, reclamaram que não encontravam nada parecido nos livros didáticos e que as atividades ali encontradas, na maioria das vezes, tratavam apenas da interpretação de gráficos e

tabelas, do cálculo e da leitura, deixando de lado conceitos importantes, como o estudo sobre a variação, o contexto da problemática em questão e as relações da Probabilidade com a Estatística.

Em razão de o *software* não ter tido aceitação pelos professores, sugerimos que planejassem uma atividade a partir da utilização de algum material concreto, por exemplo, bolinhas coloridas e saquinhos opacos. Dessa forma, seria possível que os estudantes compreendessem a Lei dos Grandes Números por meio de simulação real. Propusemos que construíssem gráficos a partir dos dados coletados pelos alunos em grupos e que fossem acrescentando, aos poucos, mais dados, conforme a cor de cada bolinha retirada do saquinho, para que pudessem fazer observações e inferências durante o processo de construção dos gráficos.

Depois das sugestões, a dupla decidiu que não iria utilizar nenhum *software* e iniciou o planejamento de uma atividade. A princípio, pensaram em fazer uma simulação, em que colocariam três bolinhas da cor verde e sete da cor vermelha em um saco opaco, de modo que os alunos não pudessem saber quantas bolinhas havia e qual a cor de cada uma.

Em duplas, os alunos, com idade aproximada de 12 anos, iriam retirar uma bolinha, anotar sua cor em uma tabela, devolvê-la ao saco, misturar e retirar outra bolinha, anotando também sua cor. Esse procedimento deveria se repetir pelo menos 20 vezes para cada dupla. Depois de completa cada tabela, os professores iriam somar os dados coletados, para construir um gráfico na lousa, questionando os alunos, durante a construção, sobre qual bolinha tinha saído mais vezes.

Aparentemente, esse processo ajudaria os alunos na construção cognitiva de uma habilidade probabilística. Provavelmente, após algumas retiradas de bolinhas, os alunos poderiam dizer com certeza qual cor ocorrera mais vezes. A ideia inicial era aumentar a quantidade de retiradas, gradualmente, anotando em uma tabela, transformando os resultados em porcentagem para, depois, construir gráficos de coluna ou de setores com os resultados. Enquanto esse processo de construção ia ocorrendo, os professores, de posse de algumas perguntas previamente preparadas, conduziriam o desenvolvimento cognitivo dos alunos, até que eles pudessem prever a porcentagem de bolinhas de cada cor, após uma série de retiradas.

Traçados os planos iniciais, sugerimos, então, que os professores aproveitassem essa atividade para introduzir questões de jogos de azar. Ao aceitarem a proposta, sugeriram fazer apostas com os alunos, usando cópias de cédulas de dinheiro. A ideia era que, dividida a sala em duplas e depois que eles soubessem quantas bolinhas de cada cor havia nos saquinhos, todos os alunos chegassem a um consenso se apostariam na bolinha de cor verde ou vermelha. O professor apostaria na cor não escolhida pelos alunos.

A regra do jogo seria: A cada retirada de bolinha da cor verde, o apostador que a tivesse escolhido receberia R$ 16,00 do oponente e, a cada retirada da bolinha de cor vermelha, pagaria R$ 8,00. A questão problema nesse caso seria: quem vai ganhar mais dinheiro?

As bolinhas nos saquinhos eram 3 da cor verde e 7 da cor vermelha. A previsão era de que, após 100 retiradas, por exemplo, quem tivesse escolhido as bolinhas vermelhas ganharia por volta de R$ 560,00 (70 x 8), enquanto quem tivesse optado pelas bolinhas verdes ganharia por volta de R$ 480,00 (30 x 16). Estimulando os alunos a raciocinar por meio das apostas, os professores proporiam a simulação mais algumas vezes. Depois disso, conduziriam os alunos,

por meio de questões, à previsão dos resultados das apostas, desmistificando a ideia de sorte ou azar, quando o jogo não contempla chances iguais para os dois apostadores.

O objetivo da atividade traçada pelos docentes seria levar os alunos a entenderem que, mesmo que pudessem ganhar a aposta algumas vezes, se conhecessem as regras do jogo e apostassem na cor certa, teriam o domínio da situação e ganhariam muito mais dinheiro do que perderiam, conforme a quantidade de retiradas. Seguindo esse plano, os alunos seriam preparados para compreender empiricamente a Lei dos Grandes Números, "o primeiro teorema fundamental de Probabilidade".

A fase de comunicação dos resultados

Um mês após a discussão dessa atividade, a professora Alice iniciou seu seminário, explicando como ocorreram o planejamento e o desenvolvimento da aula com o seu parceiro. Embora parecesse bem empolgada com o desenvolvimento do projeto, que eles nomearam a Estatística das Urnas, a professora relatou que tiveram muita dificuldade para encontrar material que os auxiliasse, principalmente nos livros didáticos que, segundo sua óptica, não abordavam a Estatística de maneira exploratória, pois limitavam o trabalho à leitura e à interpretação de gráficos. Isso os fez perder tempo.

Para construir a atividade, os professores adaptaram a ideia de um aplicativo que pode ser encontrado em *Mais recursos educacionais*[1] e a aplicaram a alunos de oitavos anos do Ensino Fundamental. O procedimento adotado pelos professores foi o mesmo descrito anteriormente.

A atividade foi aplicada pelos dois professores em dois grupos diferentes, um de 30 e outro de 16 alunos. Neste artigo, descreveremos apenas o relato da professora Alice, que aplicou a atividade no grupo menor.

Segundo ela, os alunos foram instruídos a escolher uma das cores, de modo que a classe toda chegasse a um consenso. Ela avisou aos alunos que faria uma única aposta. Eles retirariam as bolinhas do saco opaco, uma a uma, com reposição. Depois de decidido, cada dupla fez 20 retiradas, anotando os resultados em uma tabela. A professora explicou aos alunos que a honestidade era essencial para que a atividade fosse assimilada e que confiaria plenamente nos resultados anotados, entendendo que ninguém trapacearia. A professora Alice relatou:

> [ ]... Antes de iniciarmos a atividade, distribui R$ 200,00 de mentira para cada dupla e pedi para eles escolherem. Ou eles escolheriam a cor verde e receberiam R$ 16,00 a cada retirada ou eles escolheriam a cor vermelha e receberiam R$ 8,00 a cada retirada. No caso de retirarem a cor diferente da que escolheram, deveriam pagar os mesmos valores estipulados. Cada dupla recebeu um saquinho com as 10 bolinhas. A aposta seria alunos contra professor, ou seja, a sala deveria entrar num consenso e escolher uma cor. Quando pedi para que os alunos escolhessem uma cor eles ficaram indecisos porque não sabiam com qual cor poderiam ganhar mais. Os alunos discutiram por uns 5 minutos, depois disso prevaleceu a liderança de uma das alunas que era muito boa em Matemática. Ela escolheu a cor que havia sete bolinhas, alguns alunos foram contrários. Os alunos contrários justificaram que as bolinhas verdes pagariam R$ 16,00. Eu sabia que eu iria perder, mas eu não interferi. Prevaleceu a liderança dessa aluna (ProfessoraAlice, gravação em vídeo, 29 set. 2011).

[1] Disponível em: http://www.mais.mat.br/wiki/Probabilidade_com_urnas Último acesso em 14 de agosto de 2014.

Observando o relato inicial da professora Alice, vemos que a atividade começou por uma questão investigativa que instigou os alunos. Quem ganharia mais dinheiro no jogo: quem escolheu as bolinhas verdes ou quem escolheu as vermelhas? Essa maneira de apresentar o problema levou os alunos a elaborarem hipóteses. A primeira hipótese levantada pelos alunos foi de que havia mais bolinhas da cor vermelha. A segunda hipótese foi de que a cor verde pagaria um valor maior. Quando os professores planejaram a atividade, eles previram que isso ocorreria. O fato de os alunos não saberem exatamente qual seria a resposta para o problema fez com que tivessem que negociar. Depois, a ansiedade de responder às questões e a vontade de não perder dinheiro permitiram que eles observassem os resultados do jogo com atenção.

A professora Alice continuou:

> [ ]... Enquanto faziam as retiradas, os alunos foram marcando em uma tabela a quantidade de bolinhas de cada cor. Quando finalizaram, os alunos, por conta própria, multiplicaram a quantidade de bolinhas verdes por dezesseis e as bolinhas vermelhas por oito. Quando passei nos grupos, alguns já haviam feito a subtração para acertar o dinheiro. Durante a atividade, fui fazendo algumas perguntas: "Quem vocês acham que vai ganhar o jogo?", "Vocês acham que é questão de sorte?". A maioria, depois do jogo, respondeu que era questão de sorte, e uma aluna respondeu que tinha a ver com Estatística. Alguns alunos, influenciados pela resposta da colega, disseram que era questão de Estatística, mas provavelmente nem soubessem o significado. Muitos ficaram em dúvida e disseram que ainda acreditavam que a questão era sorte. Isso ocorreu na primeira rodada e, obviamente, eu perdi porque os alunos haviam escolhido as bolinhas que valiam R$ 8,00. Então eu falei: "Vamos jogar de novo. Quem vocês acham que vai ganhar? Eu tenho chances de ganhar?". Os alunos responderam que eu também tinha chances de ganhar. Eu perguntei: "Vocês acreditam nisso?". Os alunos responderam que sim e justificaram que era questão de sorte. Eu disse: "Então vamos jogar". (Professora Alice, gravação em vídeo, 29 set. 2011)

Nessa etapa do jogo, Alice percebeu que teria que lidar com as crenças dos alunos. E, por isso, foi elaborando e reelaborando as perguntas, de modo que os alunos fossem modificando suas crenças. Essa abordagem é uma etapa importante para que os alunos comecem a perceber que um processo investigativo não permite respostas preconcebidas. Outro aspecto que percebemos nessa abordagem foi a ênfase que a professora Alice deu à observação. Depois de observar que alguns alunos não haviam modificado sua argumentação inicial, ela decidiu fazer a simulação mais uma vez, para tentar convencer os alunos de que não era apenas questão de sorte.

> [ ]... Nós jogamos mais uma vez. Cada dupla fez vinte retiradas e é obvio que perdi novamente. Ao final, perguntei: "Vocês ainda acham que a questão é sorte?". Alguns alunos mudaram a resposta e começaram a argumentar que a questão era de lógica porque eu havia perdido duas vezes. Eu perguntei: "Se continuarmos jogando, vocês acreditam que irei continuar perdendo?". Eles responderam que provavelmente eu continuaria perdendo. Então eu falei: "Vamos ver quais são as chances?". Eu peguei as bolinhas vermelhas e perguntei: "Nós temos sete bolinhas dessa cor; são dez no total, qual é a chance que temos de retirar uma bolinha dessa cor?". Aquela aluna exemplar respondeu: "Setenta por cento, professora.". Daí todo mundo respondeu setenta por cento. E aí eu perguntei da outra cor, ela respondeu: "Trinta por cento, professora". (Professora Alice, gravação em vídeo, 29 set. 2011)

O processo investigativo exige reflexão sobre as possibilidades de um evento ocorrer. Por meio das perguntas, Alice conduziu seus alunos a refinarem o raciocínio. Isso não significa que todos tivessem atingido a resposta esperada; no entanto, futuramente cada um estaria mais

preparado para lidar com essas questões, melhorando suas respostas sobre os processos investigativos. Modificar crenças não é um processo simples, demanda tempo e compreensão das razões que levam alguém a acreditar em algo. A abordagem determinista matemática não ajuda as pessoas a lidarem com essas questões dentro da Estatística.

Alice finalizou:

> [ ]... No final, mesmo fazendo a retirada algumas vezes e com as perguntas, alguns alunos foram embora acreditando que era questão de sorte. Achei muito interessante aplicar essa atividade, porque percebi que alguns alunos já têm essa noção da questão da probabilidade, mas são poucos. A maioria acredita que é questão de sorte. Eu gostei muito de ter aplicado essa atividade, eu nunca havia trabalhado com Estatística dessa maneira, apenas havia trabalhado com gráficos e tabelas. Acho que valeu a pena ter feito. (Professora Alice, gravação em vídeo, 29 set. 2011)

Embora Alice tivesse observado que alguns alunos ainda acreditavam que a questão era de sorte, ela percebeu que a sua mudança de abordagem a ajudou a observar comportamentos cognitivos dos alunos que ela ainda não havia notado. Isso a estimulou e provocou satisfação com os resultados da sua aula. Provavelmente, em aulas futuras, com diferentes experimentos, esses alunos também modificariam suas crenças com relação à Estatística.

A atividade com bolinhas realizada pela professora Alice mostrou a importância de desenvolver saberes sobre análise de possibilidades. Quando os alunos tentavam entender o porquê de uma das cores das bolinhas trazer maiores retornos financeiros, pensavam em possibilidades e traziam argumentos para justificar suas inferências. Essa fase do processo é importante para que as pessoas desenvolvam saberes reflexivos, de modo que não aceitem o primeiro resultado como certo. Desenvolver o ensino por meio de um questionamento que traga uma resposta incerta determina a necessidade de explorar uma medida quantitativa de chance de um evento ocorrer. Esse é um importante passo para desmistificar a questão de sorte sobre eventos que ocorrem aleatoriamente. Professores precisam vivenciar diferentes situações investigativas que envolvam probabilidade, para que tenham repertório para adaptar suas atividades.

A professora Alice concluiu que, apesar de nunca ter trabalhado com Estatística dessa maneira, é muito interessante observar os processos de construção da aprendizagem nos alunos, pois ela própria, anteriormente, só havia aprendido pela interpretação de gráficos e tabelas. No decorrer da aula, percebeu que poucos tinham a noção do significado de probabilidade e, apesar de alguns terem mudado de ideia, outros continuaram afirmando que o jogo era apenas questão de sorte. No relato, a docente deixou claro que ficou muito entusiasmada com os resultados do seu experimento.

Autoavaliação e reflexões finais da professora Alice

Ao longo do processo de construção da professora Alice e dos outros professores, observamos significativas mudanças na sua compreensão a partir do momento que tiveram que planejar sua aula para apresentar aos colegas: os professores perceberam que uma abordagem procedimental não seria adequada e, por isso, revisitaram as oficinas, fazendo esforços para adaptá-las. Algumas evidências se revelam na autoavaliação:

> [ ]... No início da pesquisa, achei que estávamos sem direção, conhecendo alguns softwares, mas sem um objetivo comum, a não ser contribuir com a pesquisa. Eu acreditei que iríamos apenas aprender maneiras diferentes de ensinar Estatística aos nossos alunos de um modo

> mais fácil, então me senti meio perdida nos primeiros encontros. As atividades que nós realizamos no laboratório de informática foram importantes para mim, eu não conhecia e nunca tinha visto aplicações de probabilidade da maneira como foram mostradas nas oficinas. A formação ganhou significado para mim quando começou a envolver os alunos. Aprendi muito com a aula que tive que planejar baseada nos programas que vimos nos encontros anteriores. (Professora Alice, questionário, 04 de agosto de 2011)

O relato da professora mostrou-nos que, mesmo achando importante ter participado da fase de oficinas, ela encontrou dificuldades para transformar sua prática. O que fizemos naquela fase foi encorajar os professores a construir e planejar materiais em conjunto. Isso, segundo Roseth, Garfield e Ben-Zvi (2008), é de extrema importância para a aprendizagem dos alunos. O envolvimento com o material ajuda o professor a conectar seus objetivos de ensino ao currículo e à avaliação. A discussão e a decisão em grupo sobre o que ensinar, como ensinar e como avaliar favorecem uma atmosfera de time de trabalho e melhoram o envolvimento e a satisfação com a profissão docente (Rumsey, 1998). Além disso, o professor sente-se responsável, como "proprietário" da atividade, e isso aguça a sua curiosidade e seus esforços para vê-la funcionar.

O planejamento de uma atividade própria em colaboração é de fundamental importância. O professor que planeja uma atividade a ser desenvolvida por ele mesmo procura compreender as dificuldades que os alunos apresentam e apresentarão. Se isso for feito em colaboração com um colega, o trabalho passa a ser ainda mais produtivo, porque um docente aprende, ganhando conhecimento, quando conhece a prática do outro. Compreender as dificuldades dos alunos é de fundamental importância, quando se espera que o professor desenvolva saberes para investigação estatística. Os relatos da professora Alice revelam que docentes que planejam sua própria aula pautada em referências de investigação no ensino tornam-se propensos a utilizar uma abordagem não determinista e menos procedimental para a Educação Estatística.

Esse processo também foi eficiente para que, ao longo do projeto de pesquisa, a visão da professora Alice sobre a Estatística fosse modificada. Após alguns encontros, ela passou a afirmar em seu questionário: "*A Matemática e a Estatística são dependentes uma da outra. Acredito que a Matemática é uma ferramenta da ciência estatística porque é necessária durante a fase de coleta e sintetização dos dados*". Esse argumento opõe-se ao anterior, dela própria, que dizia que a Estatística estava dentro da Matemática.

Considerações finais

Por meio da observação do desenvolvimento da atividade descrita e pelos dados coletados durante o desenrolar do projeto, ficou claro que, para que ocorram mudanças na abordagem dos professores para o ensino de Estatística, torna-se necessário adotar algumas estratégias que permitam a troca de experiência no processo de formação e a experimentação em sala de aula.

A etapa de oficinas deve incluir a realização de diferentes experimentos, isso porque, os professores não estão habituados a ensinar Estatística por meio da coleta de dados. Normalmente, as aulas de Estatística na educação básica são desenvolvidas por uma abordagem que envolve apenas a leitura e a interpretação de dados, o que fica claro no relato da professora Alice. Essa forma de abordar o ensino priva o aluno de desenvolver saberes necessários para uma atuação crítica e investigativa na sociedade, para a qual se faz necessário o aprimoramento das percepções sobre a diferença entre o fazer matemático e o fazer estatístico. Cabe, portanto, aos processos de formação docente para o ensino da Estatística, explorar a diferença entre esses dois fazeres. Um dos recursos que acreditamos ser eficiente para explorar essa discussão é iniciar a

formação por meio de questionamentos que necessitem de dados para serem respondidos, sem que *a priori* se conheçam as respostas.

Situações investigativas que envolvem a probabilidade normalmente se iniciam pela observação. Simulações que utilizam apenas dados, moedas e bolinhas não são suficientes para explorar essas percepções, porque, quando realizamos experimentos com esses objetos, já conhecemos os resultados, e desconhecê-los é essencial para que ocorra a investigação.

O processo de construção dessa atividade e de outras, que não estão descritas neste artigo, emergiu das ideias e das experiências próprias de cada professor. A partir do momento em que os professores começaram a planejar, eles passaram a envolver-se com suas atividades. Durante a fase de planejamento, sentaram-se e contaram histórias sobre a própria prática. Depois, os que escutavam respondiam com suas próprias histórias, com questões que lhes permitiam investigar detalhes ou com questões críticas, que exploravam a essência do processo de ensino e aprendizagem ocorrido no contexto da história. Isso se constituiu em um processo reflexivo que gerou a construção de novas ideias.

Não raro, a formação continuada na área de Matemática oferece modelos de aulas prontas, para que os professores sigam como exemplos; outras vezes, a discussão fica tão aberta que acaba perdendo o objetivo. Relatos dos professores revelaram que, por falta de opção e de tempo para preparar-se, mesmo acreditando que as atividades oferecidas pelos livros didáticos não sejam adequadas, eles as acabam utilizando. Porém, ao final do projeto, os docentes afirmaram que a melhor maneira de aprender novas metodologias de ensino é por meio da interação com outros professores e com um suporte teórico adequado ao tema em estudo.

Por último, outro elemento importante a ser relatado é que, embora tenhamos evidências de que os docentes superaram parte dos sentimentos de insegurança, uma mudança de abordagem exige continuidade, ciclos de formação, e demanda a realização de outras pesquisas, para assegurar o aprimoramento da Educação Estatística de professores e estudantes.

Referências e bibliografia

Batanero, C., & Diaz, C. (2010). Training teachers to teach statistics: What can we learn from research? *Statistique et Enseignement, 1*(1), 5-20. Retrieved setember 18, 2014, from, http://math.univ-lyon1.fr/irem/IMG/pdf/Batanero_Diaz.pdf.

Batanero, C., & Diaz, C. (2012). Training school teachers to teach probability: reflections and challenges. *Chilean Journal of Statistics*, *3*(1), 3-13. Retrieved setember 18, 2014, from, http://chjs.soche.cl/index.php?option=com_content&view=article&id=58&Itemid=56.

Barbier, R. (2004). *A pesquisa ação*. Brasília, Brasil: Líber Livro Editora.

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais: introdução aos parâmetros curriculares nacionais.* Brasília: MEC/SEF.

Carvalho, C. (2008). Collaborative work in statistics classes: Why do it? In C. Batanero, G. Burrill, C. Reading, & A. Rossman (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics. Challenges for teaching and teacher education. Proceedings of the Joint ICMI Study 18 and 2008 IASE Round Table Conference,* Mexico: ICMI. Retrieved setember 18, 2014, from http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/rt08/T1P7_Carvalho.pdf.

Gattuso, L. & Ottaviani, M. (2011). Complementing mathematical thinking and statistical thinking in school mathematics. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school*

mathematics - Challenges for teaching and teacher education: A joint ICMI/IASE study (pp. 121-132). New York: Springer.

Lopes, C. E. (2003). *O conhecimento profissional dos professores e suas relações com Estatística e Probabilidade na Educação Infantil* (Tese de Doutorado). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, Brasil.

Pfannkuch, M. (2005). Probability and statistical inference: How can teachers enable learners to make connection? In G. A. Jones (Ed.), *Exploring probability in school: Challenges for teaching and Learning* (pp. 267-294). New York: Springer.

Ponte, J. (2011). Preparing teachers to meet the challenges of Statistics education. In C. Batanero, G. Burrill, & C. Reading (Eds.), *Teaching statistics in school mathematics - Challenges for teaching and teacher education: A joint ICMI/IASE study* (pp. 299-309). New York: Springer.

Roseth, J., Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2008). Collaboration in Learning and Teaching Statistics. *Jornal of Statistics Education*, *16*(1). Retrieved setember 18, 2014, from http://www.amstat.org/publications/jse/v16n1/roseth.html.

Rumsey, D. (1998). A Cooperative Teaching Approach to Introductory Statistics. *Journal of Statistics Education, 6*(1). Retrieved setember 18, 2014, from, http://www.amstat.org/publications/jse/v6n1/rumsey.html.

Serradó, A., Azcárate, P., & Cardeñoso, J. (2006). Analyzing teacher resistance to teach probability in compulsory education. In *Proceedings of ICOTS-7 International Conference in Teaching Statistics Salvador*, Bahia, Brazil. Retrieved setember 18, 2014, from, http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/17/2E4_SERR.pdf.

Soares, E. S., & Goulart, M. I. M. (2008). Aulas Compartilhadas na formação de licenciados em matemática. *Revista Brasileira de Educação*, *13*(38), 306–412.

Tripp, D. (2005). Pesquisa ação uma introdução metodológica. *Educação e Pesquisa, 31*(3), 443-466.

Wild, C. & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, *67*(3), 223-265. Retrieved setember 18, 2014, from http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/publications/isr/99.Wild.Pfannkuch.pdf.

Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS) para o ensino de Estatística na educação básica

Arno **Bayer**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
arnob@ulbra.br
Camila da Silva **Nunes**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
ncamilas@yahoo.com.br
Norton Pizzi **Manassi**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul-Campus Erechim
Brasil
norton.manassi@erechim.ifrs.edu.br

Resumo

Neste artigo discutimos a produção e a implementação de um material de aprendizagem destinado ao Ensino de Estatística. Na elaboração desse material utilizamos os passos e princípios de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS), visando auxiliar o estudante no processo de construção de uma aprendizagem significativa do assunto. Sendo assim, no decorrer deste artigo, apresentamos brevemente aspectos da aprendizagem significativa, bem como os princípios para a construção de uma UEPS. Em outro momento, discutimos o que é uma unidade de ensino, bem como um breve relato sobre sua implementação. O material em questão foi aplicado na disciplina de Matemática em uma turma de terceiro ano do Ensino Médio, em uma escola pública estadual no Munícipio de Gravataí/RS.

Palavras chave: Aprendizagem Significativa. Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS). Ensino de Estatística. Educação. Matemática.

Indrodução

Neste artigo queremos investigar e discutir o uso de uma Unidade de Ensino Potencialmente Significativa (UEPS), como uma forma de qualificar o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, mais especificamente, Estatística na Educação Básica.

O Ensino de Estatística na Educação Básica é tratado como integrante do currículo de Matemática e considerado muito importante para a formação dos estudantes. Considerando a importância deste conhecimento, queremos contribuir para melhorar a aprendizagem deste conteúdo.

Antes de elaborar o material, os alunos responderam um questionário que versava sobre questões de Estatística, relacionadas ao seu cotidiano. O objetivo desse questionário foi investigar os conhecimentos prévios dos estudantes em relação à Estatística, para poder elaborar um material significativo.

Após a implementação da UEPS, os alunos responderam um questionário no qual tiveram a oportunidade de dar sua opinião a respeito do trabalho realizado.

Baseado na literatura de Ausubel, Novak e Hanesian (1980) e Moreira (2011a), na opinião dos estudantes e na observação das aulas é possível afirmarmos que para produzir um material potencialmente significativo é fundamental levar em consideração os conhecimentos prévios dos alunos e as experiências por eles vivenciadas dentro ou fora da escola.

Os estudantes poderão compreender melhor a importância dos novos conhecimentos, bem como, os impactos que eles podem causar em sua vida. Além disso, a interação dos conhecimentos anteriores com os novos conhecimentos é uma das premissas básicas para a construção de uma aprendizagem significativa.

Aprendizagem Significativa

A teoria da aprendizagem significativa ou teoria da assimilação de Ausubel é uma teoria cognitivista que propõe explicar o processo de aprendizagem que ocorre na mente humana. Segundo Moreira (2011a, p.150), para Ausubel "[…] aprendizagem significa organização e integração do material na estrutura cognitiva". A estrutura cognitiva é o resultado dos processos por meios dos quais se adquire e utiliza o conhecimento. (Moreira, 2011a).

Um dos conceitos mais importantes da teoria de Ausubel, Novak e Hanesian (1980, p. ix) sobre o ensino e aprendizagem, pode ser resumido na seguinte frase:

> Se eu tivesse que reduzir toda a psicologia educacional a um único princípio, diria isto: o fator isolado mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já conhece. Descubra o que ele sabe e baseie nisso os seus ensinamentos.

Segundo Moreira (2011a, p. 160),

> Novas ideias e informações podem ser aprendidas e retidas na medida em que conceitos relevantes e inclusivos estejam adequadamente claros e disponíveis na estrutura cognitiva do indivíduo e funcione, dessa forma, como ponto de ancoragem às novas ideias e conceitos.

A experiência cognitiva abarca alterações significativas nos atributos da estrutura cognitiva pela influência do novo material. Há, um processo de interação por meio dos quais conceitos mais expressivos e inclusivos interagem com o novo material, atuando como ancoradouro, isto é, abrangendo e integrando este material e, ao mesmo tempo modificando-se em função dessa ancoragem.

A teoria de Ausubel tem como foco a aprendizagem significativa. Segundo Ausubel, aprendizagem significativa é o processo que envolve interação da nova informação com uma estrutura de conhecimento específica, a qual ele define como subsunçor, existente na estrutura cognitiva do indivíduo. (Moreira, 2011a).

Conforme Moreira (2011a), Ausubel visualiza a conservação de informações no cérebro humano como sendo organizado, formando uma escala conceitual, na qual elementos mais específicos de conhecimentos são conectados e assimilados a conceitos mais gerais e inclusivos.

A aprendizagem significativa acontece quando uma nova informação ancora-se em conceitos relevantes, já existentes na estrutura cognitiva de cada pessoa. Moreira (2011a, p.161) explica que estrutura cognitiva é "uma estrutura hierárquica de conceitos que são experiências sensoriais do indivíduo".

Ausubel *et al.* (1980) aconselha o uso de organizadores prévios que sirvam de âncora para a nova aprendizagem e levem ao desenvolvimento de conceitos classificadores que facilitem a aprendizagem posterior. Moreira (2011a, p. 163) destaca que organizadores prévios "são materiais introdutórios apresentados antes do material a ser aprendido em si".

A principal função dos organizadores prévios é servir de ponte entre o que o aprendiz já sabe e o que ele deve saber a fim de que o material possa ser aprendido de forma significativa. Os organizadores prévios facilitam a aprendizagem na medida em que funcionam como pontes cognitivas. (Moreira, 2011a).

Em Estatística, por exemplo, se os conceitos de média e moda já existem na estrutura cognitiva do aluno, eles servirão de subsunçores para o entendimento de informações e dados estatísticos que envolvem medidas de tendência central e medidas de dispersão, nas diversas áreas do conhecimento.

> Por exemplo, os dados sobre a temperatura média mensal das zonas urbanas relacionam-se significativamente com o conceito de clima, e esses dados relacionam-se, por sua vez, com ideias sobre irradiação solar, posição orbital da Terra, e assim por diante, num encadeamento geralmente coerente. (Ausubel *et al.,* 1980, p. 37).

O processo de ancoragem da nova informação resulta em crescimento e alteração do conceito subsunçor. Desta forma, os subsunçores existentes na estrutura cognitiva podem ser bem desenvolvidos, limitados ou pouco desenvolvidos, dependendo da frequência em que ocorre aprendizagem significativa em conjunto com um dado subsunçor.

No exemplo acima, uma ideia trivial de média e moda serviriam como subsunçor para novas informações referentes a medidas de tendência central e medidas de dispersão. No entanto, na forma em que esses novos conceitos fossem aprendidos de modo significativo, resultaria no crescimento e execução dos conceitos subsunçores iniciais. Assim, os conceitos de média e moda ficariam mais elaborados, inclusivos e capazes de servir como subsunçores para novas informações relativas a estes conceitos.

Em contraposição com a aprendizagem significativa está à aprendizagem mecânica (ou automática). Na qual Ausubel *et al.* (1980) definem como sendo a aprendizagem de novas informações com pouca ou nenhuma interação com conceitos relevantes existentes na estrutura cognitiva. Na aprendizagem mecânica não existe interação entre a nova e a informação já armazenada. Desta forma, o conhecimento fica distribuído na estrutura cognitiva, sem conectar-se a conceitos, subsunçores específicos. (Moreira, 2011a).

Conforme Manassi (2014, p. 23) "o prejuízo da aprendizagem mecânica é que a capacidade de reprodução do conhecimento perdura durante pouco tempo, depois da memorização e logo pode ser perdida".

Desta forma, aprender mecanicamente é simplesmente decorar e do ponto de vista cognitivo, as informações são internalizadas praticamente sem interação com conhecimentos prévios. (Moreira, 2011b).

Ausubel, *et al.* (1980, p. 34) ressaltam que

> A essência do processo de aprendizagem significativa é que as ideias expressas simbolicamente são relacionadas às informações previamente adquiridas pelo aluno através de uma relação não arbitrária e substantiva (não literal). Uma relação não arbitrária e substantiva significa que as ideias são relacionadas a algum aspecto relevante existente na estrutura cognitiva do aluno, como, por exemplo, uma imagem, um símbolo, um conceito ou uma preposição.

Duas condições para a ocorrência da aprendizagem significativa são propostas por Ausubel. A primeira condição refere-se ao material a ser aprendido, pois este deve estar relacionado à estrutura cognitiva do aprendiz, de maneira não arbitrária e não literal. Para que a aprendizagem significativa ocorra é importante que o aprendiz tenha os subsunçores adequados disponíveis em sua estrutura cognitiva.

> O potencial significativo do material a ser aprendido varia não somente em relação à experiência educacional prévia como também a fatores tais como idade, Q.I., ocupação, condições socioculturais. (Ausubel *et al.,* 1980, p. 37).

Pode-se dizer então, que um material é potencialmente significativo quando levam em consideração os conhecimentos prévios dos alunos e as condições do meio no qual os estudantes estão inseridos.

A segunda condição conforme Moreira (2011a) "é que o aprendiz manifeste uma disposição para relacionar de maneira substantiva e não arbitrária o novo material, potencialmente significativo, à sua estrutura cognitiva".

Cabe ressaltar que mesmo sendo o material potencialmente significativo, não quer dizer que o aluno vai aprender de forma significativa, pois se a intenção do aprendiz for apenas memorizar, arbitrariamente e literalmente os tópicos desenvolvidos, o resultado final da aprendizagem será mecânico.

Da mesma forma, se o aluno estiver disposto para aprender, porém, se o material e o processo não forem potencialmente significativos, o produto, a aprendizagem, não será significativa.

Em resumo, para que a aprendizagem ocorra de forma significativa é necessário disposição do indivíduo para relacionar o conhecimento, existência de um conteúdo mínimo em sua estrutura cognitiva, com subsunçores suficientes para suprir as necessidades relacionadas e materiais a serem assimilados com potencial significativo.

Segundo Ausubel *et al.* (1980, p. 48) na aprendizagem significativa "o processo de obtenção de informações produz uma modificação tanto na nova informação como no aspecto especificamente relevante na estrutura cognitiva com a qual a nova informação estabelece relação".

Ausubel *et al.* (1980, p. 58) destacam que:

> [...] a aquisição de novas informações depende amplamente das ideias relevantes que já fazem parte da estrutura cognitiva, e que a aprendizagem significativa nos seres humanos ocorre por meio de uma interação entre o novo conteúdo e aquele já adquirido. O resultado da interação, que ocorre entre o novo material e a estrutura cognitiva existente, é a assimilação dos significados velhos e novos, dando origem a uma estrutura mais altamente diferenciada.

Moreira (2011b, p.51) ressalta que "o significado está nas pessoas, não nas coisas". Deste modo, não existe livro significativo ou aula significativa, mas, livros, aulas, materiais instrucionais de um modo geral, podem ser potencialmente significativos. Para isso, devem ter significado lógico (ter estrutura, organização, exemplos, linguagem adequada, enfim, serem aprendíveis) e os sujeitos devem ter conhecimentos prévios adequados para dar significado aos conhecimentos veiculados por esses materiais. (Moreira, 2011b).

A UEPS, proposta por Moreira (2011b), é uma alternativa para a construção de materiais potencialmente significativos; materiais que carregam em si uma boa estrutura e desencadeamento lógico (coerência de argumentos), e ainda, que façam sentido ao grupo ao qual se pretende apresentar determinado conteúdo. Sendo assim, o material deve estar em consonância com os conhecimentos prévios dos estudantes. Somente dessa forma ele será relacionável à estrutura cognitiva do sujeito que aprende e, assim, possibilitará a construção de significados psicológicos, por parte do mesmo.

O objetivo da UEPS é a construção de materiais que contribuam para um aprendizado de maior qualidade, que se distancie do aprendizado mecânico. Segundo Moreira (2011b, p. 43), "são sequências de ensino fundamentadas teoricamente, voltadas para a aprendizagem significativa, não mecânica, que podem estimular a pesquisa aplicada em ensino, aquela voltada diretamente à sala de aula".

Moreira (2011b, p. 44), afirma que "Só há ensino quando há aprendizagem e esta deve ser significativa; ensino é o meio, aprendizagem significativa é o fim; materiais de ensino que busquem essa aprendizagem devem ser potencialmente significativos".

Em todas as etapas, os materiais e a metodologia de ensino devem ser variados, de modo a estimular o diálogo e a crítica. Conforme Alro e Skovsmose (2006, p. 142), "ensino e aprendizagem dialógicos são importantes para a prática de sala de aula que apoia uma Educação Matemática para a democracia". A Educação Matemática crítica preocupa-se com aspectos políticos da educação e segundo Dalla Vecchia (2012, p. 42), "a corrente sócio crítica tem como uma de suas finalidades abrangerem o aspecto reflexivo".

De acordo com Skovsmose (2006, p.101),

> [...] para que a educação, tanto como prática quanto como pesquisa, seja crítica, ela deve discutir condições básicas para a obtenção do conhecimento, deve estar a par dos problemas sociais, das desigualdades, da supressão etc., e deve tentar fazer da educação uma força progressivamente ativa.

Em consonância com Skovsmose (2006), Moreira (2011a) afirma que "aprendizagem significativa crítica é aquela perspectiva que permite ao sujeito fazer parte de sua cultura e, ao mesmo tempo, estar fora dela".

O foco deste trabalho visa o ensinamento de Estatística na Educação Básica, através da elaboração de uma UEPS. No entanto, antes de elaborar a UEPS, o docente deve observar e conhecer o grupo de alunos com o qual vai trabalhar, e, além disso, deve verificar quais são suas apreciações e conhecimentos prévios à cerca do conteúdo a ser abordado.

A elaboração de materiais potencialmente significativos será baseada nas etapas de construção de uma UEPS que são propostas por Moreira (2011b), visando novas possibilidades

para o desenvolvimento e aprendizagem significativa dos conteúdos de Matemática na Educação Básica, principalmente no Ensino de Estatística.

Implementação e investigação de uma UEPS voltada ao Ensino de Estatística

A UEPS foi elaborada para ser desenvolvida e investigada com 25 alunos do terceiro ano do Ensino Médio na disciplina de Matemática, durante os meses de outubro e novembro do ano de 2013. A investigação ocorreu através de dezoito encontros, sendo que os dois encontros inicias serviram para investigar os conhecimentos prévios dos alunos. Os outros dezesseis encontros serviram para o desenvolvimento e aplicação da UEPS, sendo que foram divididos em quatro encontros semanais, onde cada um correspondeu a 45 minutos. O local de realização da pesquisa foi uma escola pública estadual no munícipio de Gravataí/RS.

O conteúdo foi desenvolvido e implementado através de uma UEPS voltada para o Ensino de Estatística na Educação Básica. Inicialmente os alunos responderam um questionário com 15 perguntas, que tinha como objetivo verificar os conhecimentos prévios dos estudantes em relação ao conteúdo de Estatística. Uma das perguntas foi a seguinte: O que você entende por Estatística?

Algumas respostas fornecidas pelos alunos estão colocadas abaixo:

Aluno A:

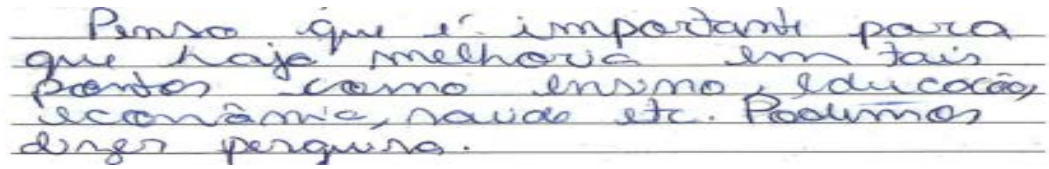

Penso que é importante para que haja melhoria em tais pontos como ensino, educação, economia, saúde etc. Podemos dizer pesquisa.

Figura 1 – Declaração de um aluno participante da UEPS.
Fonte: A pesquisa

O aluno B escreveu:

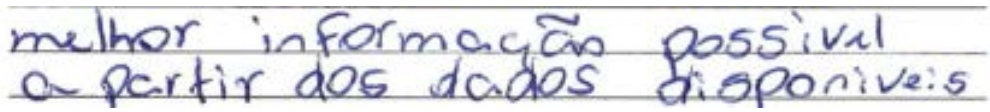

melhor informação possível a partir dos dados disponíveis

Figura 2 – Declaração de um aluno participante da UEPS.
Fonte: A pesquisa

O aluno C respondeu, escrevendo: "*Não me lembro dessa matéria"*.

Dos 25 alunos pesquisados, apenas dois responderam a questão tentando dizer o que é estatística. Os demais estudantes deixaram a questão em branco ou responderam de forma semelhante ao aluno C.

Outra pergunta foi a seguinte: O que você entende por moda no contexto da Estatística?

Um dos alunos respondeu que: *"moda é uma tendência, ou seja; as roupas que as pessoas mais estão usando em uma determinada estação, como por exemplo, a moda praia ou moda verão"*. Em uma das respostas uma aluna afirma que *"moda é o que acontece nos desfiles do São Paulo Fashion Week. Eu amo moda e por isso, quero ser estilista"*.

A maioria dos alunos optou por não responder esta questão, pois nunca haviam estudado o conceito de moda. As demais perguntas do questionário estavam relacionadas às questões do

Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM), e envolviam análises de tabelas, gráficos e outras informações estatísticas.

Após a entrega do questionário, pelo menos dezesseis alunos relataram que tiveram dificuldades para analisar os gráficos. Um dos alunos disse que *"eu não consegui entender aqueles gráficos e também não sei construir os tais gráficos de pizza, não sei nem por onde começar. Você poderia nos relembrar e nos ensinar, não é mesmo professora?"*

Partindo desses pressupostos e dos conhecimentos prévios dos alunos, elaborou-se e aplicou-se com esse grupo de estudantes, uma UEPS voltada para o Ensino de Estatística na Educação Básica.

A UEPS foi dividida em quatro módulos, sendo que o primeiro módulo versava sobre conceitos básicos de Estatística, o segundo módulo tratava das distribuições de frequências, construção e interpretação de gráficos, o terceiro módulo estava relacionado às medidas de tendência central e o quarto e último módulo destacava as medidas de dispersão.

Todos os alunos receberam material impresso, contendo os tópicos fundamentais de Estatística, bem como situações-problema do seu cotidiano.

Segue abaixo, algumas das questões desenvolvidas durante a aplicação da UEPS:

1. A escola de Carlos promoveu uma olimpíada de Matemática entre os alunos do ensino fundamental. Todos os 1000 alunos participaram da olimpíada que utilizou os seguintes critérios de avaliação: ótimo, bom, regular e ruim. Veja os resultados no quadro abaixo:

Tabela 1.
Quadro com os critérios de avaliação.

Avaliação	Número de alunos
Ótimo	200
Bom	600
Regular	150
Ruim	50

Fonte: Brasil Escola

Com base nos resultados acima, construa um gráfico de setores.

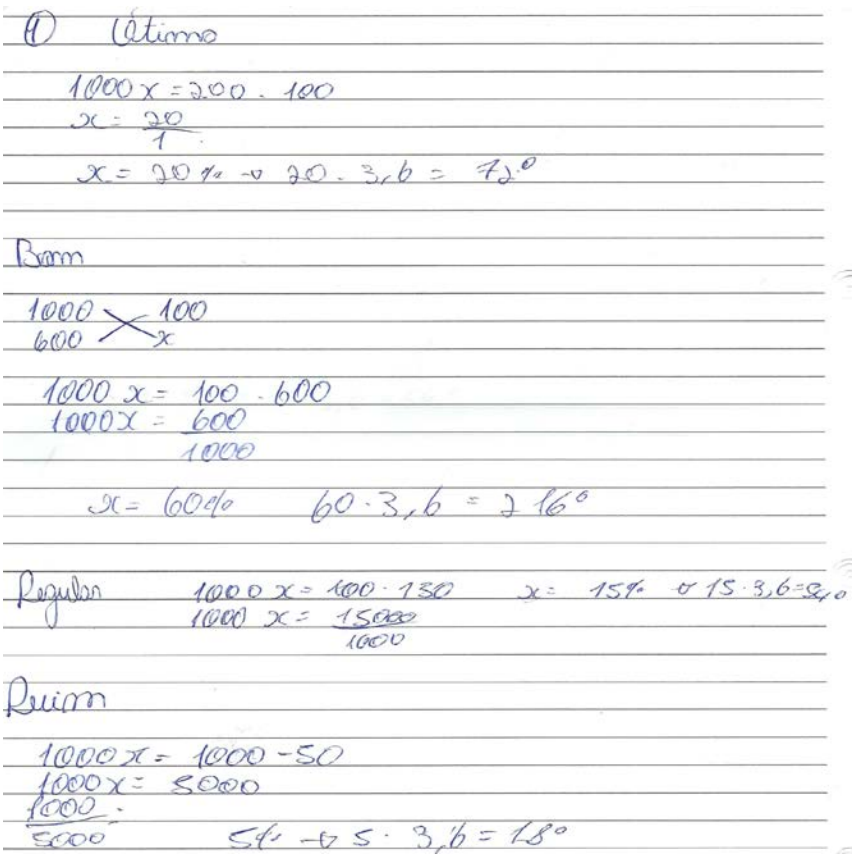


Figura 3. Cálculos desenvolvidos pelos alunos.
Fonte: A pesquisa

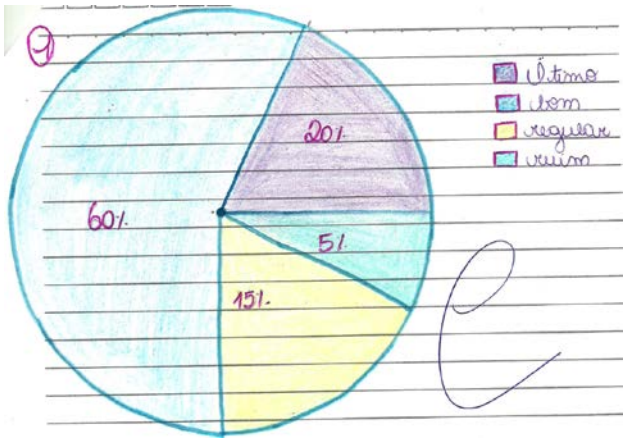


Figura 4. Gráfico construído pelos alunos.
Fonte: A pesquisa

A questão foi resolvida em duplas e discutida com os demais colegas da classe.

2. (ENEM-MEC) O gráfico apresenta o comportamento de emprego formal surgido, segundo o CAGED, no período de janeiro de 2010 a outubro de 2010. Com base no gráfico, o valor da parte inteira da mediana dos empregos formais surgidos no período é:

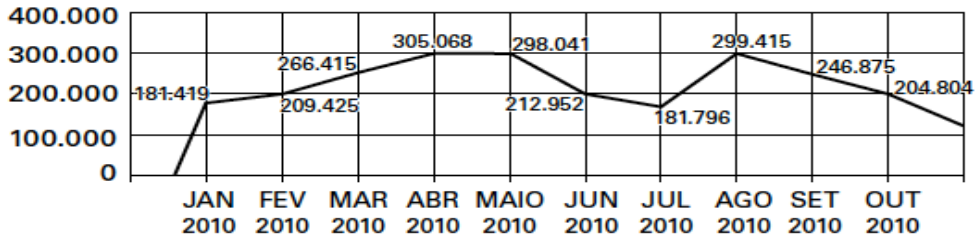


Gráfico 1. Gráfico dos empregos formais.
Fonte: ww.mte.gov.br. Acesso em: 28 fev. 2012 (adaptado)

a) 212.952 b) 229.913 c) 240.621 d) 255.496 e) 298.041

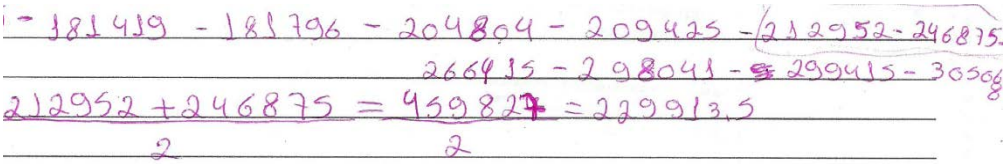


Figura 5. Cálculos desenvolvidos pelos alunos.
Fonte: A pesquisa

A segunda questão foi resolvida individualmente em um primeiro momento, no entanto, após todos buscarem alternativas para resolvê-la, discutiu-se com a turma, meios para sua solução e no final a educadora juntamente com os questionamentos dos alunos, resolveu a atividade no quadro.

Cabe destacar que a presente pesquisa esta em fase de conclusão e por isso, os dados foram analisados parcialmente, no entanto, foi possível perceber a evolução dos alunos no decorrer da UEPS.

Na avaliação final, que tinha por objetivo analisar o aprendizado dos alunos e a própria UEPS, os alunos responderam questões objetivas e dissertavas a respeito do conteúdo estudado, no caso a Estatística.

Algumas perguntas da avaliação final foram semelhantes às questões da investigação inicial, como por exemplo: Que ideia você tem hoje da Estatística?

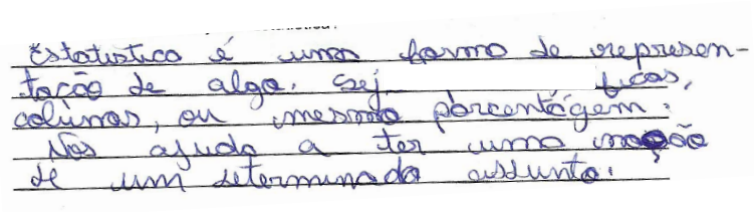


Figura 6. Declaração de um aluno participante da UEPS**.**
Fonte: A pesquisa

A declaração do aluno acima representa a sua interpretação do vem a ser Estatística e ele busca trazer este conhecimento para sua realidade.

> As disciplinas escolares quase sempre representam a nossa interpretação cultural de algum aspecto do mudo real ou algumas construções lógicas (como a matemática), que, portanto, têm necessariamente um sentido lógico. (Ausubel *et al.*, 1980, p. 36).

Outra pergunta semelhante foi a seguinte: Com base na Estatística, o que você entende por moda? Pelo menos vinte alunos responderam de forma semelhante, que *"moda é o valor que ocorre com maior frequência em um conjunto de dados, isto é, o valor mais comum"*.

A partir dos conhecimentos prévios dos alunos foi possível criar o conceito de moda em estatística. Segundo Ausubel o conhecimento prévio dos alunos é a chave para a aprendizagem significativa.

> À medida que o novo material aprendido é assimilado pela estrutura cognitiva, é relacionado e interage com o conteúdo relevante já estabelecido. A aquisição de novos significados é um produto dessa interação. Durante o tempo de retenção, os novos significados são armazenados (associados) e organizados em relação as suas ideias básicas relevantes. (Ausubel *et al.*, 1980, p. 97).

Desta forma, os novos conhecimentos sobre Estatística foram assimilados, relacionados e interagiram com os conceitos que os alunos já tinham em suas estruturas cognitivas. Portanto, pode-se dizer que os alunos tiveram aquisição de novos conceitos e significados sobre o conteúdo abordado.

Considerações Finais

O relato de aplicação e investigação de uma UEPS voltada para o Ensino de Estatística na Educação Básica, apresentado neste trabalho pode servir como base para a construção de novos materiais que busquem uma aprendizagem por meio da interação e assimilação entre os conhecimentos já adquiridos pelos estudantes e os novos assuntos a serem estudados.

A participação dos estudantes favoreceu de forma mais ativa, o processo de ensino e aprendizagem e, por consequência, a construção de um conhecimento mais rico em significados. A partir da pesquisa realizada observou-se que os materiais construídos fundamentados nos conhecimentos prévios dos alunos constituem uma alternativa mais eficiente e viável no processo de construção do conhecimento.

Referências

Alro, H.; & Skovsmose, O. (2010). *Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática.* Belo Horizonte: Autêntica.

Ausubel, D. P.; Novak, J. D. & Hanesian, H. (1980). *Psicologia Educacional.* Trad. Eva Nick e outros. Rio de Janeiro: Interamericana.

Dalla Vecchia, R. (2012). *A modelagem matemática e a realidade do mundo cibernético.* Tese de doutorado, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, SP, Brasil.

Manassi, N. P. (2014). *A calculadora hp17bii + como aporte tecnológico no ensino de matemática financeira no Pronatec: maior possibilidade de aprendizagem significativa.* Dissertação de mestrado, Universidade Luterana do Brasil, Canoas, RS, Brasil.

Moreira, M. A. (2011a). *Teorias de aprendizagem.* São Paulo: EPU.

Moreira, M. A. (2011b). *Unidades de Enseñanza Potencialmente Significativas.* Aprendizagem Significativa em Revista, v. 1, p. 43-63. Recuperado em 15 agosto, 2014 de http://www.if.ufrgs.br/asr/artigos/Artigo_ID10/v1_n2_a2011.pdf

Skovsmose, O. (2006). *Educação Matemática Crítica: a questão da democracia.* 3 ed. Campinas, São Paulo: Papirus.

Utilização do *dotplot* na aprendizagem da variabilidade estatística no ensino médio

Mário Marcos Araújo **Moreno**
Colégio Estadual Octacílio Gomes, Secretaria da Educação do Estado da Bahia
Brasil
morenouba@yahoo.com.br
Irene Mauricio **Cazorla**
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual de Santa Cruz
Brasil
icazorla@uol.com.br

Resumo

O trabalho relata as contribuições da utilização do gráfico de pontos (*dotplot*) na aprendizagem da variabilidade estatística. Como fundamentação teórica foram utilizadas as concepções de Letramento Estatístico de Gal e do desenvolvimento do conceito de variabilidade de Garfield e Ben-Zvi. A abordagem metodológica foi de cunho qualitativo, envolvendo oito estudantes do 3º ano do Ensino Médio, de uma escola pública do interior da Bahia, Brasil. Foi utilizada uma Sequência de Ensino utilizando o *dotplot* e as atividades foram gravadas em vídeo e áudio. Os resultados mostram que os estudantes não tinham conhecimentos prévios sobre medidas de dispersão, mas revelaram ter ideias intuitivas de variabilidade; a construção e a utilização do *dotplot* contribuíram para explicitar a natureza e a compreensão da variabilidade estatística; as atividades de comparação entre variáveis diferentes em um mesmo grupo e de uma mesma variável entre grupos favoreceram o reconhecimento da natureza da variabilidade.

Palavras chave: Estatística, variabilidade, *dotplot,* aprendizagem.

Letramento estatístico e as recomendações do ensino de Estatística na Educação Básica

Segundo Gal (2002), o letramento estatístico é a habilidade para interpretar e avaliar criticamente informações estatísticas, esperada para os cidadãos adultos, no contexto de leitura, inseridos numa sociedade industrializada permeada por diversas informações e como um componente necessário esperado do resultado da escolaridade dos mesmos.

Para isso, o autor propõe um modelo que envolve dois componentes: o cognitivo e o de disposição. O componente cognitivo, pela sua vez, envolve o letramento, o conhecimento matemático, o conhecimento estatístico, o conhecimento de contexto e a capacidade de elaborar questionamentos críticos. Já o componente de disposição envolve a postura crítica e é moldada pelas crenças e atitudes.

Assim, o cidadão deve ser letrado na língua materna, devendo ser capaz de ler e escrever informações em gráficos e tabelas, compreender mensagens estatísticas, que requerem a ativação de várias habilidades de processamento de texto para extrair significado das informações apresentadas; bem como, saber comunicar por escrito e, de forma clara, as suas interpretações a

respeito das informações. O conhecimento matemático refere-se, principalmente, à compreensão dos números e cálculos matemáticos envolvidos na geração de resultados estatísticos. O conhecimento estatístico tem como base a compreensão da necessidade de uma pesquisa e como os dados são gerados; a familiaridade com termos e ideias relacionadas com a estatística descritiva básica; a familiaridade com termos e ideias relacionadas às representações gráficas e tabulares básicas; compreensão de noções básicas de probabilidade e o conhecimento de como as conclusões e inferências estatísticas são alcançadas. A capacidade para fazer questionamentos críticos, refere-se à percepção da razoabilidade das informações estatísticas; sobre a suficiência do tamanho de uma amostra; se o processo e os instrumentos de coleta de dados expressam confiabilidade; se as formas de apresentação dos dados são tendenciosas e; se as medidas estatísticas utilizadas são adequadas para poder avaliar a qualidade das informações e dos processos que as geram. O componente de disposição refere-se à motivação do cidadão para manter uma postura crítica frente às informações estatísticas o que é moldado pelas crenças e as atitudes do cidadão.

Nesse sentido, segundo Cazorla e Castro (2008) a formação do professor deve possibilitar o desenvolvimento de atitudes, de reflexão crítica e de novas abordagens educativas envolvendo situações do cotidiano nas quais o estudante possa formar opinião, de maneira autônoma e se posicionar, tomando decisões com base em ferramentas aprendidas na escola, possibilitando a leitura do mundo de uma forma mais efetiva.

Reconhecendo a importância do letramento estatístico dos cidadãos, o Brasil, assim como outros países, introduziu o ensino de Estatística e Probabilidade no currículo da Educação Básica, conforme as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), no componente curricular de Matemática para o Ensino Médio:

> A **Estatística** e a **Probabilidade** devem ser vistas, então, como um conjunto de ideias e procedimentos que permitem aplicar a Matemática em questões do mundo real, mais especialmente aquelas provenientes de outras áreas. Devem ser vistas também como formas de a Matemática quantificar e interpretar conjuntos de dados ou informações que não podem ser quantificados direta ou exatamente. Cabe à Estatística, por exemplo, analisar a intenção de voto em uma eleição ou o possível êxito do lançamento de um produto no mercado, antes da eleição em si e da fabricação do produto. Isso é feito através da pesquisa estatística, que envolve amostras, levantamento de dados e análise das informações obtidas (Brasil, 2002, p. 126).

Nesse documento os conteúdos matemáticos foram organizados em três eixos ou temas estruturadores: Álgebra: números e funções; Geometria e medidas e Análise de dados. Nesse último eixo encontram-se os conteúdos de Estatística para o Ensino Médio, no qual se propõe o estudo de *média, moda e mediana, variância e desvio padrão* relacionados com as habilidades propostas, de *descrição de dados, representações gráficas e análise de dados*.

Os PCN para o Ensino Médio recomendam trabalhar o conceito de variabilidade e sugerem o ensino do histograma, da variância e do desvio padrão, que são de difícil compreensão para este nível de ensino. Neste trabalho advogamos a utilização do *dotplot* que pode contribuir na apropriação e desenvolvimento do conceito de variabilidade, de forma mais intuitiva, preparando assim para a compreensão da variância e desvio padrão.

Assim, neste trabalho relatamos as contribuições da utilização do *dotplot* na aprendizagem da variabilidade estatística por estudantes do Ensino Médio, verificando a influência dos dados

dispostos em formato tabular, da construção e leitura dos dados no dotplot; bem como, da influência da comparação entre variáveis, dentro e entre grupos.

Variabilidade Estatística

Podemos dizer que, em geral, a variabilidade permeia nosso mundo. Basta observar ao nosso redor para encontrar inúmeras situações. Tomando como exemplo a altura das pessoas, vemos que essa depende da idade, do sexo, da raça, das características genéticas, do meio ambiente, dentre outros fatores que interferem no crescimento dessas pessoas. Mesmo que encontrássemos duas pessoas da mesma idade, do mesmo sexo, da mesma raça, de características genéticas e condições ambientais similares, suas alturas poderão não ser idênticas. Ainda que essas duas pessoas tivessem as mesmas alturas, suas medidas dependeriam do instrumento de medida e da pessoa que toma essas medidas. Se medirmos com barbante, fita métrica, trena ou instrumentos mais sofisticados, obteremos diferentes valores. Além disso, se fixarmos o instrumento de medida e variarmos os "medidores", pessoas que tomam as medidas, também poderemos obter valores diferentes.

A compreensão da variabilidade é tão importante que muitos avanços da humanidade foram possíveis graças ao seu entendimento e ao desenvolvimento de tecnologias para controlá-la. Um exemplo muito intuitivo é a produção de alimentos. Podemos perguntar: Do que depende a produtividade de uma planta? Podemos citar, dentre outros fatores, a variedade da própria planta, a qualidade da semente, as condições do solo, do clima, o ataque de pragas, de doenças, do manejo do cultivo. Cada um desses fatores, por sua vez, também apresenta diversos graus de variabilidade. Assim, o homem investigou como cada um deles interfere na produtividade e desenvolveu mecanismos de controle.

Para muitos autores a variabilidade, entendida aqui como variabilidade estatística, é o componente central do pensamento estatístico: "A variação é a razão pela qual as pessoas tiveram que desenvolver métodos estatísticos sofisticados para filtrar as mensagens de dados a partir da dispersão no ambiente." (Wild e Pfannkuch, 1999, p. 236).

Segundo Franklin et al. (2007), existem muitas fontes de variabilidade e apontam a variabilidade *natural, das medições*, *a induzida e a da amostragem* como as mais importantes. A variabilidade *natural* é apresentada como característica da própria natureza como, por exemplo, medidas biométricas, aptidões, opiniões, respostas emocionais, dentre outras. A variabilidade das *medições* é produzida pelo uso de diferentes instrumentos de medida (medir o comprimento com palmos, barbante, régua, trena etc.) ou de diferentes pessoas que tomem essas medidas. A variabilidade *induzida* quando se controla as fontes de variação, como exemplo, um teste em que sementes são plantadas em dois campos, um com fertilizante e outro sem. A variabilidade da *amostragem* acontece mesmo em amostras de mesmo tamanho, escolhidas sob um mesmo critério; como por exemplo, a proporção de eleitores que votam em um determinado candidato que pode ser utilizada para estimar a proporção populacional.

Segundo Garfield e Ben-Zvi (2005) para o alcance de uma profunda compreensão do conceito de variabilidade são necessárias diferentes atividades que motivem os estudantes a descrever e interpretar dados e raciocinar sobre a variabilidade. O autor argumenta que a forma básica da variabilidade nos dados é a variação dos valores *dentro* de uma distribuição e que, ao comparar as distribuições, cria-se o impulso para considerar outros tipos de variabilidade que existe *entre* os grupos. Esses autores apontam a carência de pesquisas que apontem aspectos intuitivos para a compreensão da variabilidade. Eles descrevem os componentes de um modelo

que denominam de epistemológico, o qual consiste em um conjunto de ideias agrupadas em sete áreas, que podem ser vistas como blocos de construção para uma formação mais consistente do conceito de variabilidade, descritos a seguir.

Modelo epistemológico para o conceito de variabilidade

1. **Desenvolvimento de ideias intuitivas de variabilidade**: reconhecer que a variabilidade está em toda parte. Os indivíduos variam em muitas características, e as medições repetidas na mesma característica são variáveis. Variáveis qualitativas quanto quantitativas revelam variabilidade de dados. Perceber que algumas coisas variam um pouco, outras variam muito. Buscar respostas para as diferentes razões e fontes de variabilidade analisando as variáveis. Considerar o conjunto de dados, ao invés de valores individuais ou como uma combinação, reconhecendo a variabilidade como uma característica geral ou global de um conjunto de dados.

2. **Descrição e representação da variabilidade**: representações gráficas diferentes podem apontar aspectos diferentes da variabilidade dos dados e mostrar como os dados variam, revelando padrões para nos ajudar a focar nas características globais de distribuições e identificar a causa do espalhamento. Utilizar um número que represente uma característica global (tal como a variabilidade) da distribuição, visto que diferentes resumos numéricos dizem coisas diferentes sobre a dispersão em um conjunto de dados. Por exemplo, a amplitude total nos diz a dispersão global do maior para o menor valor, enquanto o desvio padrão nos diz a variação em torno da média. A amplitude interquartílica informa a dispersão dos dados em relação à metade da mediana da distribuição. Utilizar, de forma concomitante, medidas de variabilidade e de posição, visto que estas, separadamente, são mais ou menos informativas para diferentes tipos de distribuição. Por exemplo, a média e o desvio padrão prestam informações úteis sobre distribuições simétricas, em especial, a distribuição normal. Para distribuições assimétricas, a mediana e o intervalo interquartílico são resumos mais úteis.

3. **Uso da variabilidade para fazer comparações**: comparar dois ou mais conjuntos de dados, examinando seus gráficos na mesma escala permite comparar a variabilidade e especular sobre por que há diferenças nos conjuntos de dados. Usar resumos globais de dispersão e centro é mais vantajoso que comparar dados pontuais ou porções dos gráficos. Analisar tanto a variabilidade dentro de um grupo (observando para a forma como os dados variam dentro de um ou mais conjuntos de dados) quanto a variabilidade entre os grupos (a variabilidade das medidas usadas para resumir e comparar os conjuntos de dados), e distinguir entre estes dois tipos de variabilidade.

4. **Consideração da variabilidade como parte do pensamento estatístico**: em investigações estatísticas, é primordial começar com exame e discussão da variabilidade dos dados, cuja produção é concebida com a variação em mente. O estudante deve ter ciência quando as fontes de variação são atípicas, evitar amostras auto selecionadas, insistir na comparação em estudos experimentais e apresentar a variação prevista para a produção de dados pelo uso de aleatoriedade. Na análise estatística, a meta é explicar a variação buscando os efeitos sistemáticos por trás da variabilidade aleatória de indivíduos e medições.

Além dessas quatro ideias têm outras três que são: reconhecimento da variabilidade em tipos especiais de distribuições; identificação de padrões de variabilidade em modelos ajustados

e o uso da variabilidade para prever resultados em amostras aleatórias; ideias que são trabalhadas no Ensino Superior.

Para Garfield e Ben-Zvi (2005) as atividades e discussões que revelam os diferentes aspectos e usos da variabilidade podem começar nos primeiros níveis de ensino e ser incluídas progressivamente nas aulas de Estatística. Desta forma, intuitivas, noções informais de variabilidade podem, gradualmente, ser usadas para construir compreensão mais formal e complexa.

O *dotplot*

Bussab e Morettin (2012) definem o *dotplot* como um *gráfico de dispersão unidimensional* em que os valores são apresentados por pontos ao longo da reta (provida de uma escala) e os valores repetidos são "empilhados" e, segundo Wilkinson (1999), os *dotplots* têm sido usados há mais de cem anos para descrever distribuições.

O *dotplot* é um gráfico que contribui na análise da forma da distribuição e do grau de dispersão na compreensão do comportamento da variável. Quando a variável é homogênea, apresentam-se pontos concentrados, quando é dispersa, os pontos apresentam-se espalhados. Tem sido utilizado em muitas pesquisas voltadas para a aprendizagem da variabilidade.

Na pesquisa de Bakker (2004), por exemplo, o *dotplot* foi utilizado pelos estudantes para representar os dados e verificar a forma da distribuição, buscando descrever a variabilidade quando o tamanho da amostra era aumentado.

Como o *dotplot* é um gráfico simples de construir, permite visualizar a distribuição dos dados e partir dele pode ser construído o boxplot e o histograma dando-lhes sentido, advogamos o seu ensino antes da formalização do desvio padrão e do histograma.

Arcabouço metodológico

A pesquisa, de abordagem qualitativa, foi realizada com oito estudantes do 3º ano do Ensino Médio, de uma escola pública do interior da Bahia. Os estudantes coletaram dados com os colegas da escola, dentre esses a altura (A) e o perímetro cefálico (PC), ver Figura 1.

Foi utilizada uma Sequência de Ensino que contemplando ideias e conteúdos que visaram desenvolver a compreensão da variabilidade estatística lendo, construindo e interpretando o *dotplot* com os dados coletados, bem como interpretando *dotplots* prontos. Foram entregues folhas de papel milimetrado, régua e canetas *hidrocor*.

O Diretor da escola, os pais e os estudantes do 3º ano foram consultados e convidados para participar, de forma voluntária, assinando o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido. As atividades foram aplicadas na escola colégio, no turno oposto ao das aulas, em duplas e gravadas em vídeo e áudio.

A sequência de ensino foi elaborada por Silva, Kataoka e Cazorla (2014) e neste trabalho relatamos sete atividades. As Atividades 1 e 2 solicitava ao estudantes descrever a altura (A) e o perímetro cefálico (PC) disposto em forma tabular (lista), sendo a Atividade 1 com 12 dados e a Atividade 2 com 60 dados. A Atividade 3 solicitava a construção e a leitura do dotplot para altura e perímetro cefálico dos 60 dados. A Atividade 4 solicitava a construção e a leitura dos *dotplots* para altura e perímetro cefálico por gênero. A Atividade 5, 6 e 7 solicitavam a leitura de *dotplots* prontos com 200 dados, sendo que a atividade 7 solicitava comparar uma mesma variável em dois grupos.

Figura 1. Coleta das medidas da altura e do perímetro cefálico pelos estudantes.

Para categorizar as respostas das tarefas utilizamos a Taxonomia SOLO - *Structure of Observing Learning Outcome* de Biggs e Collis (1982, 1991), cujos níveis, descrição das categorias e relação com a variabilidade são reapresentados no Quadro 1.

Quadro 1
Níveis de respostas e sua relação para a variabilidade

Categoria (Códigos)	**Descrição**	**Respostas**
Pré-estrutural (0)	O estudante comete erros de entendimento fundamental, apresentando respostas não significativas.	Vagas ou incorretas; nenhum reconhecimento de variabilidade.
Uniestrutural (1)	O estudante apresenta diversas conclusões, que podem ser corretas, mas que não são coerentes entre si, focando apenas um aspecto relevante.	Com apenas um aspecto de variabilidade: medidas estatísticas e expressões que remetem à variabilidade.
Multiestrutural (2)	O estudante mostra entendimento, discute o conteúdo de forma significativa, tem conhecimento de uma quantidade razoável de conteúdos com várias respostas relevantes, mas não coordenadas, podendo apresentar algumas inconsistências.	Com dois ou mais aspectos de variabilidade, sem inter-relacionar esses aspectos totalmente.
Relacional (3)	O estudante integra as partes dentro de um todo de forma coerente, isto é, apresenta uma conclusão capaz de relacionar todos os aspectos relevantes.	Corretas para as tarefas solicitadas com argumentos que se relacionam com diferentes aspectos da variabilidade de uma maneira formal ou informal.

Análise dos resultados

A Atividade 1 solicitava descrever a altura e o perímetro cefálico de 12 estudantes dispostos em representação tabular (lista) e a Atividade 2 com 60 dados. Todas as duplas calcularam a média das duas variáveis com os 12 dados. Diante dos 60 dados esperava-se que os estudantes tentassem outras estratégias. No entanto, começaram a calcular a média na mão, até que solicitaram calculadoras, concluindo os cálculos. Nenhuma dupla usou qualquer outra medida ou representação gráfica.

Observamos que apesar dos estudantes não possuírem conhecimento prévio sobre as medidas de dispersão, quando solicitados a comparar as duas variáveis, eles mostraram que possuíam ideias intuitivas sobre variabilidade.

A Atividade 3 solicitava a construção do *dotplot* para a altura (Figura 2) e outro para a o perímetro cefálico (Figura 3) dos 60 estudantes; bem como a descrição do comportamento das duas variáveis a partir da leitura dos *dotplots* construídos.

A construção do *dotplot* tinha como objetivo verificar se a configuração dos dados neste tipo de gráfico possibilitaria o surgimento de respostas que denotassem utilização do raciocínio de variabilidade para a descrição e comparação dos dados baseadas em estratégias como "*modal clump*", valor máximo e mínimo e amplitude. Diante da tarefa, observamos que nenhum estudante conhecia o *dotplot,* para sanar essa lacuna mostramos um *dotplot* construído e fizemos uma breve descrição de sua construção, o que foi rapidamente assimilado.

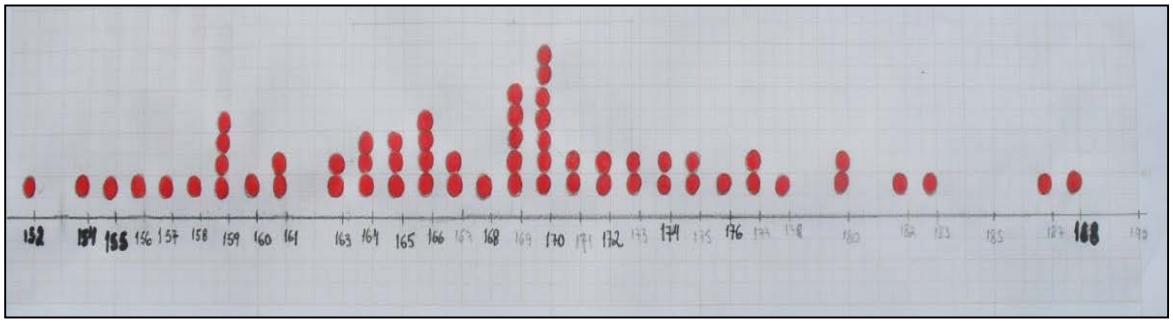


Figura 2. Dotplot da altura construído pela Dupla 1.

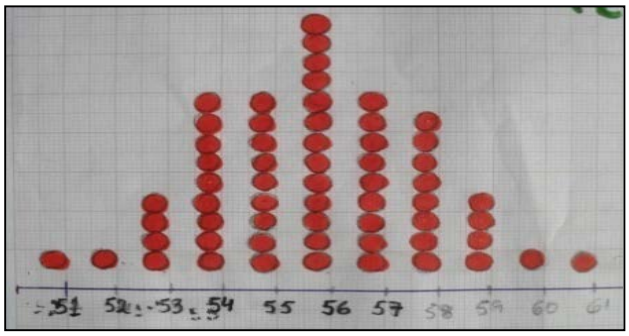


Figura 3. Dotplot do perímetro cefálico construído pela Dupla 4.

A Atividade 4 solicitava a construção e interpretação de um *dotplot* por gênero para a altura (Figura 4) e outro para o perímetro cefálico (Figura 5) dos 60 estudantes. O gênero foi representados por cores, sendo vermelho para o feminino e azul para o masculino.

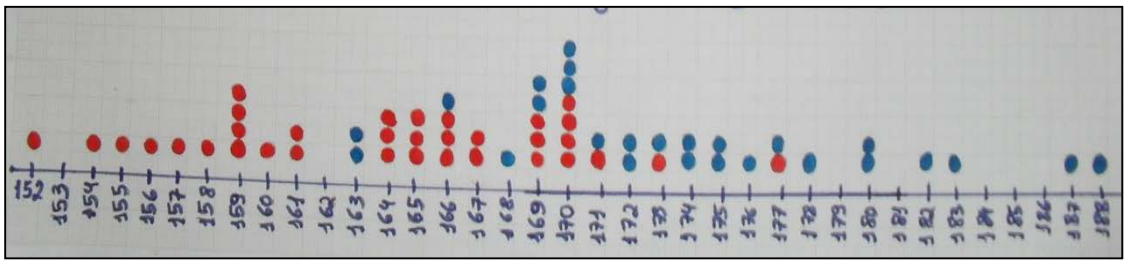


Figura 4. Dotplot da altura, por gênero, construído pela Dupla 2.

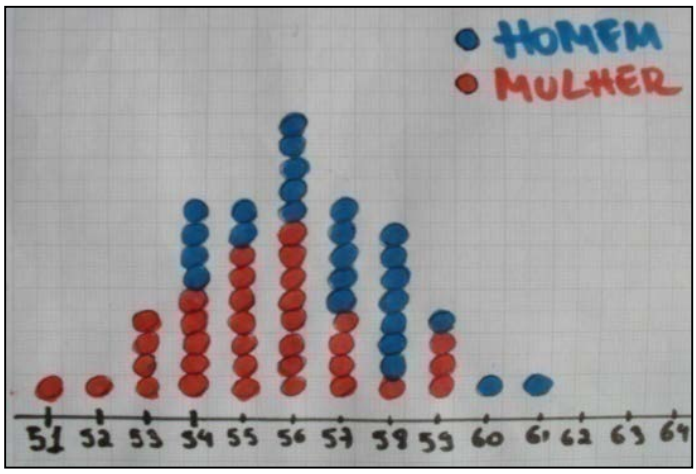


Figura 5. *Dotplot* do perímetro cefálico, por gênero, construído pela Dupla 3.

Em geral, os estudantes mostraram muito envolvimento em todas as atividades, mas a construção do *dotplot* e as atividades com esse gráfico tinham melhor receptividade. Logo que as duplas terminaram a construção de cada *dotplot* e fizeram a comparação de cada variável, por gênero.

A Atividade 5 consistia em descrever o comportamento da variável idade em que 200 mães tiveram o seu primeiro filho a partir de um *dotplot* pronto. Da mesma forma a Atividade 6 apresentava o dotplot com as notas de Matemática de 200 estudantes. A Atividade 7 solicitava descrever e comparar o comportamento da variável idade em que 200 mães e 200 pais tiveram o seu primeiro filho a partir da leitura de dois *dotplots,* um por gênero, na mesma escala, um embaixo do outro.

A Tabela 1 apresenta o desempenho dos estudantes nas sete tarefas. Os resultados indicam que a leitura dos *dotplots* foi, de forma geral, bem sucedida. Os estudantes conseguiram chegar ao nível Multiestrutural, sendo que na comparação das idades uma dupla conseguiu chegar ao nível Relacional.

A construção do *dotplot* permitiu aos estudantes utilizar estratégias como o *modal clump* e; usaram expressões tais como: “mais altos”, “variam”, “maiores”, “maioria”, “minoria”, “mais dispersos”, “concentração”, “densidade”, dentre outros. Já a construção do *dotplot* por gênero permitiu aos estudantes comparar o comportamento das variáveis, que além de utilizar intervalos do gráfico, o *modal clump*, áreas de maior e menor densidade, utilizar expressões que denotam aspectos da variabilidade; bem como permitiu aos estudantes perceberem que as medidas masculinas se concentravam mais à direita do gráfico, enquanto as medidas femininas estavam mais à esquerda, com maior diferença nas alturas e no perímetro cefálico. Isto é, permitiu perceber a variabilidade dentro dos grupos e entre os grupos.

Na leitura da variabilidade a partir do *dotplot* prontos o desempenho foi superior, permitindo aos estudantes tentar explicar as causas da variabilidade fazendo inferências sobre os motivos de se ter ou não filhos em determinadas idades.

Tabela 1
Comparativo do desempenho nas atividades envolvendo o dotplot

Dupla	Leitura em formato tabular (lista)						Construção e leitura do dotplot (n=60)					Leitura de dotplot prontos (n=200)		
	Ativ. 1 (n=12)			Ativ. 2 (n=60)			Ativ. 3			Ativ. 4 *Comparação* por gênero		Ativ. 5 Idade de mães	Ativ. 6 Notas	Ativ. 7 Comparação da idade de mães e pais
	A	PC	C	A	PC	C	A	PC	C	A	PC			
1	0	0	1	0	0	1	1	1	3	2	1	2	2	3
2	-	-	-	-	-	-	0	0	1	1	1	2	2	2
3	0	0	1	0	0	0	1	1	1	1	2	1	2	2
4	0	0	1	0	0	2	2	2	1	-	-	2	2	-

A=Altura; PC=Perímetro Cefálico; C=Comparação

Os resultados indicam que a utilização do *dotplot* para descrever a variabilidade foi, de forma geral, bem sucedida. Os estudantes conseguiram chegar ao nível Multiestrutural. O melhor desempenho nas atividades de leitura nos *dotplots* prontos deveu-se ao fato dos estudantes já conhecerem o dotplot, pois já o haviam construído

Quanto às tarefas de comparação das variáveis por grupo contribuíram significativamente para o nível de respostas, quando confrontado com as tarefas de descrição das variáveis de forma isolada, favorecendo o aparecimento de respostas com aspectos da variabilidade.

Com relação ao desempenho entre o *dotplot* construído e o *dotplot* pronto observamos um melhor desempenho na leitura no *dotplot* pronto, o que pode ser explicado pelo fato dos dois gêneros estavam em dotplots separados, na mesma escala, na mesma página; enquanto que, o *dotplot* por gênero, construído pelos sujeitos, distinguia os gêneros apenas pela cor num mesmo *dotplot*. O empilhamento num mesmo valor, apesar das cores diferentes, parece não ser tão eficiente, quanto os *dotplots* separados.

Estes resultados, de certa forma, eram esperados, pois o ideal é a construção de vários gráficos, uma atividade muito cansativa que requer o uso de ferramentas computacionais.

Considerações finais

A grande vantagem do *dotplot* é que este gráfico explicita a configuração dos dados como os valores mínimos e máximos, a concentração e dispersão dos dados, locais de maior ou menor concentração; permite comparar grupos de forma sintética e, ainda, tem ligação com os dados concretos, o que permitiu aos estudantes perceber e compreender a natureza da variabilidade dos dados apresentados.

Nas atividades, os estudantes conseguiram atingir quatro aspectos da formação do conceito de variabilidade (Garfield; Ben-Zvi, 2005): *desenvolvimento de ideias intuitivas de variabilidade, descrição e representação da variabilidade, uso da variabilidade para fazer comparações e a consideração da variabilidade como parte do pensamento estatístico.* Esses aspectos foram, também, detectados nas atividades dos professores na pesquisa de Silva (2007) que envolveu a interpretação da média e do desvio padrão.

O contexto da pesquisa envolveu os estudantes na construção e interpretação (ou apenas interpretação) de gráficos que não conheciam previamente, mas que se familiarizaram sem

dificuldade. Na leitura desse novo gráfico, os estudantes precisaram mobilizar aspectos do *letramento* ao interpretar novas formas de representação gráfica, o que pode implicar em aumento de *conhecimento estatístico* que impulsiona a *capacidade de fazer questionamentos críticos*, ter *postura crítica* e, consequentemente, contribuir para o desenvolvimento do letramento estatístico dos mesmos.

Referências

Bakker, A. (2004). Reasoning About Shape as a Pattern in Variability. *Statistics Education Research Journal*, *3*(2), 64-83.

Biggs, J., & Collis, K. (1982). *Evaluating the Quality of Learning the SOLO taxonomy*. New York: Academic Press.

Biggs, J., & Collis, K. (1991). Multimodal learning and the quality of intelligent behavior. In H. A. H. Rowe (Ed.), *Intelligence: Reconceptualization and measurement.* New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Brasil. Ministry of Education. Department of Media and Technology Education. (2002). *PCN +: Secondary - Supplemental Educational Guidelines the National Curriculum Guidelines*. Brasília: MEC.

Bussab, W. O., & Morettin, P. A. (2012). *Basic Statistics* (7th ed.). São Paulo: Saraiva.

Cazorla, I. M., & Castro, F. C. (2008). The Role of Statistics in reading the world: the statistical literacy. *UEPG: Humanities, Social Sciences, Linguistics, Letters and Arts*, *16*(1), 45-53.

Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE) report: A pre-K–12 curriculum framework*. Endorsed by the American Statistical Association in 2005. Alexandria (VA, USA).

Gal, I. (2002). Adult's Statistical Literacy: meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review*, *70*(1), 1-25.

Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2005). A framework for teaching and assessing reasoning, about variability. *Statistics Education Research Journal*, *4*(1), 92-99.

Silva, C. B., Kataoka, V. Y., & Cazorla, I. (2014). Analysis of teacher's understanding of variation in the *dot-boxplot* context. In *9th International Conference on Teaching Statistics (ICOTS 9)*. Flagstaff, Arizona, USA: International Statistical Institute.

Wild, C., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical Thinking in Empirical Enquiry. *International Statistical Review*, *67*(3), 223-265.

Wilkinson, L. (1999). Dot plots. *American Statistician, 53*(3), 276-281.