

Educación Matemática en las Américas 2015

Volumen 7: Investigación



© 2015
Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM)
Paseo de la Reforma 383., 7° Piso,
Colonia Cuauhtémoc, Delegación Cuauhtémoc,
México D.F. CP 06500, MÉXICO

www.ciaem-iacme.org
ciaem.iacme@gmail.com

Educación Matemática en las Américas 2015
Volumen 7: Investigación
Editado por Patrick (Rick) Scott y Ángel Ruiz
Colaboradora: Sarah González.

ISBN Volumen: 978-9945-603-04-0

ISBN Obra Completa: 978-9945-415-97-1

El Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM) es una organización fundada en 1961 asociada a la International Commission on Mathematical Instruction. Busca potenciar la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en las Américas.

Se permite la reproducción de cualquier parte de este libro para fines no lucrativos siempre que se consignen los créditos a los autores y al Comité Interamericano de Educación Matemática.

Para citar este libro y este volumen:

Comité Interamericano de Educación Matemática (2015). *Educación Matemática en las Américas: 2015. Volumen 7: Investigación*. Editores: Patrick (Rick) Scott y Ángel Ruiz. República Dominicana.

Tabla de Contenidos

Presentación	i-iii
A conceitualização de volume como grandeza à luz da teoria dos campos conceituais Leonardo Morais-BR	1-12
A formação do pedagogo para o ensino de matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: reflexões dedutiva e epistemológica Maria José Costa dos Santos-BR	13-21
A incongruência entre as palavras do enunciado do problema e a operação usada para resolvê-lo: uma contribuição para o debate Sandra Magina-BR, Eurivalda Santana-BR, Vera Merlini-BR	22-31
A não congruência das palavras nas situações de comparação multiplicativa: quando ‘vezes mais’ vira divisão Vera Merlini-BR, Rogério Pires-BR, Eurivalda Santana-BR	32-43
A Sequência Fedathi na formação inicial do pedagogo para o ensino de Geometria básica: a importância da sessão didática Romilson dos Santos-BR, Maria José dos Santos-BR, Marta da Silva-BR	44-52
A Sequência Fedathi para uma aprendizagem significativa da função afim: uma proposta didática com o uso do software Geogebra Antonio Marcos de Souza-BR, Joilson Pedrosa-BR, Maria José Santos-BR	53-62
Abordagem da formalização do conceito de área em livros do 6º ano do ensino fundamental Walenska Santana-BR, Amanda Silva-BR	63-71
Actividad de aprendizaje de estudiantes de 6o grado: las medidas de tendencia central desde las actividades orientadoras de enseñanza Luz Agudelo-Palacio-CO, Diana Jaramillo Quiceno-CO	72-83
Alguns exemplos da relação entre o pensamento matemático avançado e as ideias de Fischbein William Vieira-BR, Vera Helena Giusti de Souza-BR, Roberto Seidi Imafuku-BR	84-94
Ambiente informal: saberes e fazeres matemáticos presentes na construção civil Edelaine Andrade-BR, Sergio Arruda-BR, Marinez Passos-BR	95-104
Análise das justificativas de alunos em questões de fração envolvendo os invariantes ordem e equivalência. Raquel Canova-BR, Angélica Garcia Silva-BR, Tânia Maria Campos-BR, Rosivaldo Santos-BR	105-115

Análise diagnóstica do uso da pergunta pelo professor de Matemática dos anos iniciais do ensino fundamental, à luz da Sequência Fedathi Francisco de Sousa-BR, Hermínio Borges Neto-BR, Marta Alves da Silva-BR	116-126
Aproximación a las concepciones usadas en la resolución de problemas de variación y cambio Edwin López Velandia-CO, Jorge Fiallo Leal-CO	127-136
As aplicações da Matemática como um <i>ver-cómo</i> wittgensteiniano Paulo da Silva-BR, Valdomiro Teixeira Júnior-BR, João Malheiro-BR	137-144
Atividades investigativas para o ensino médio por meio do uso de um material didático manipulável Renata Geromel Meneghetti-BR, Ricardo Kucinkas-BR, Tiago Santos Junior-BR	145-154
Baixo rendimento dos alunos do 6º ano na disciplina de matemática em uma escola pública de Ji-Paraná, Rondônia, Brasil: falta de motivação? Enoque da Silva Reis-BR, Simone dos Santos França-BR, Nei Araujo Silva-BR	155-162
Cambio de concepciones sobre la gestión del proceso enseñanza-aprendizaje Luis Bohórquez-CO	163-174
Características dos Três Mundos da Matemática que emergem na resolução de um problema de proporcionalidade direta Maria Elisa Galvão-BR, Vera Helena De Souza-BR, Ana Maria Poggio-BR	175-186
Caracterización de la actividad argumentativa de estudiantes de educación media cuando trabajan en procesos de matematización de situaciones Oscar Gonzalez Pinilla-CO, Camilo Arévalo Vanegas-CO	187-198
Clasificando provas de alunos do ensino médio segundo a tipologia de Balacheff Leonardo Da Silva-BR, Alexis Silveira-BR, Gesse Ferreira-BR	199-208
Comportamiento de estudiantes universitarios al usar definiciones matemáticas Valeria Aguirre Holguín-US	209-215
Concepciones de profesores de bachillerato sobre la demostración matemática en contexto escolar María Ramos Abundio-MX, Gema Moreno Alejandri-MX, Efrén Marmolejo-MX	216-226
Construcción de la matriz cambio de base: un análisis cognitivo en términos de la Teoría APOE Esteban Mendoza-MX, Solange Roa Fuentes-MX, Flor M. Rodríguez-MX	227-237

Creencias y una aproximación de la concepción de los profesores de pre-cálculo sobre el proceso de enseñanza e aprendizaje de la función exponencial Iván Velásquez Millones-PE, Norma Rubio Goycochea-PE	238-250
Cuando la Matemática se deja fotografiar-un viaje del lenguaje visual al lenguaje matemático Miguel Ángel Martínez-AR, Silvia Fachal-AR	251-259
De la estimación aproximada de la magnitud a la conformación de la precisión, base del valor discreto numérico. María Martínez de la Mora-MX	260-271
Diseño de categorías de aprendizaje en matemáticas Patricia Camarena Gallardo-MX, Irma Flores Allier-MX	272-283
El impacto del lenguaje matemático en el aprendizaje. Una experiencia con alumnos del nivel superior. Ana Vozzi-AR, Mónica Caserio-AR	284-292
El tipo de cantidad en proporcionalidad con problemas de valor faltante Juan Ramírez Maciel-MX, Claudia Acuña Soto-MX	293-303
Errores y concepciones de los alumnos en álgebra Nora Olmedo-AR, Marcela Galíndez-AR, Javier Peralta-AR, Miryam Di Bárbaro-AR	304-316
Explorando una consecuencia de la comprensión matemática Asela Carlón Monroy-MX, Sergio Cruz Contreras-MX	317-328
Frações, decimais e porcentagem: É possível trabalhar de forma integrada? Janilson Lotério-BR	329-339
Geometría escolar: una batalla entre percepción versus lógica y razonamiento. Melissa Andrade-Molina-DK	340-348
Habilidades inherentes al pensamiento variacional de estudiantes de nuevo ingreso a la universidad Nelson Rueda Rueda-CO, Sandra Parada Rico-CO, Jorge Fiallo Leal-CO	349-357
Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde una visión de construcción social José Zaldívar Rojas-MX	358-369
Interpretación de la relación funcional en estudiantes de grado noveno Enzo Fabian Marines Lamprea-CO, Cristian Jair Ayala Vargas-CO	370-379

Investigações matemática sobre Análise Combinatória por alunos do ensino médio do Instituto Federal do Tocantins Albano Dias Pereira Filho-BR, Nielce Lobo Da Costa-BR, Elias Junior-BR	380-392
La constitución de la unidad similar a partir de las formas geométricas de la sección áurea concebida como proceso de matematización Liz Acero Molina-CO, Angello Chaparro Fonseca-CO	393-398
La construcción continua de la demostración como medio para enseñar y aprender a validar matemáticamente Víctor Larios Osorio-MX	399-412
La maestra Luna y la enseñanza de la multiplicación Lorena Trejo Guerrero-MX, Marta Elena Valdemoros Álvarez-MX	413-422
La transmisión del conocimiento matemático en la formación de profesores en Matemática Daniela Emmanuele-AR, Marta Risso-AR, Florencia Rodil-AR, Cintia Vernazza-AR	423-435
Linguagem matemática e tradução: movimentos e discussões acerca da polissemia Janeisi Meira-BR, Robson Barata de Medeiros-BR, Marisa Abreu da Silveira-BR	436-443
Los usos del conocimiento matemático en un escenario de educación no formal Plácido Hernández Sánchez-MX, Gabriela Buendía Abalos-MX	444-455
Matriz asociada a una transformación lineal. Una Mirada desde la Teoría APOE. Isabel Maturana Peña-CL, Marcela Parraguez G-CL, María Trigueros Gaisman-MX	456-466
O desempenho de alunos do 6º ano em questões que envolvem a decomposição de um número em fatores primos e seu uso para simplificar cálculos Gabriela Barbosa-BR, Sandra Maria Magina-BR	467-477
O laboratorio de educação matemática e a microinvestigação: aliados na formação do professor pesquisador Américo Junior Silva-BR	478-488
O método jigsaw e a mobilização de estilos de pensamento matemático por estudantes de engenharia Eloiza Gomes-BR, Benedito Silva-BR, Gabriel Lima-BR	489-500
O uso de materiais manipulativos no ensino da subtração: uma experiência com material dourado e dinheiro chinês Ariana Costa Silva-BR, José Lamartine da Costa Barbosa-BR	501-510

Representaciones dinámicas como apoyo para la interiorización del concepto de transformación lineal César Fabián Romero Félix-MX, Asuman Oktaç-MX	511-522
Roles, organizaciones e interacciones en el aula de Matemáticas Rossmajer Guataquira López-CO, Jorge Lurduy Ortegón-CO	523-530
Subjetividad del profesor de matemática. Discursos que circulan Alex Montecino Muñoz-DK	531-538
Uma análise dos artigos que tratam da formação de professores em matemática a partir de critérios de cientificidade Carla Tambarussi-BR, Edson Reginaldo-BR, Paulo Wichnoski-BR, Tiago Klüber-BR	539-547
Uma revisão crítica da tendência investigação Matemática no Brasil Paulo Wichnoski-BR, Tiago Klüber-BR	548-556
Un taller de matemáticas para Ingeniería Estadística de una universidad pública en Chile Claudia Vargas Díaz-CL, Nicolas Thériault-CL	557-569
Una mirada al proceso matemático de elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos en la resolución de problemas con el que ingresan los estudiantes a la universidad Claudia Barajas Arenas-CO, Sandra Parada Rico-CO	570-580

Presentación

La **XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática** realizada en Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México, del 3 al 7 de mayo del 2015, contó con la participación de cerca de 1000 personas de 23 países y la presentación de más de 500 trabajos (conferencias plenarias y paralelas, mesa redonda, minicurso, diálogos, comunicaciones, talleres y posters) Esta fue una reunión regional de la *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI). El CIAEM es la organización afiliada al ICMI con mayor antigüedad. Su creación se remonta al año 1961 cuando se realizó la primera conferencia en Bogotá, Colombia.

Un gran nivel científico dominó los trabajos, en un ambiente cultural muy especial, con una gran hospitalidad por parte de los colegas de Chiapas.

Los conferencistas plenarios fueron Michèle Artigue (Francia), Carlos Vasco (Colombia), Diane Briars (USA), Abraham Arcavi (Israel-Argentina), Celia Hoyles (Reino Unido), María Teresa Tatto (USA) y Alicia Ávila (México). Ellos también desarrollaron *Diálogos* especiales, espacios adicionales de conversación e intercambio.

Una mesa plenaria organizada por la *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe* contó con la participación de Carlos Sánchez (Cuba), Nelly León (Venezuela), Edison de Faría (Costa Rica), Luis Carlos Arboleda y Jhony Villa (Colombia).

El evento tuvo conferencias paralelas y minicursos impartidos por académicos invitados, entre ellos: Gabriele Kaiser (Alemania), Richard Noss (Reino Unido), Manuel Santos (México), Gert Schubring (Alemania), José Chamoso (España), José Luis Lupiáñez (España), Arthur Powell (USA), Alessandro Ribeiro (Brasil), Roberto Araya (Chile), Gilberto Obando (Colombia), Uldarico Malaspina (Perú).

Los dos temas principales fueron la *Preparación de docentes que enseñan matemáticas* y el *Uso de tecnologías en la Educación Matemática*.

El congreso tuvo el valioso patrocinio de varias instituciones internacionales y nacionales: International Commission on Mathematical Instruction; Universidade Luterana do Brasil; Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas, y Centro de Investigación y Formación en Educación Matemática de la Universidad de Costa Rica; Secretaría de Educación del Estado de Chiapas; Universidad del Valle de México; Sindicato de Trabajadores de la Educación de México; Centro Regional de Formación Docente e Investigación Educativa (CRESUR); Oficina de Convenciones y Visitantes de Chiapas; Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas de México; Escuela Normal Superior de Chiapas; Universidad de Costa Rica; HP; CASIO; y EduSystems.

Desde el 2007 el CIAEM ha logrado, entre otras cosas:

- Potenciar la calidad académica en los trabajos, la organización eficiente y la proyección de las conferencias interamericanas
- Consolidar la publicación de trabajos seleccionados de la Conferencias en la revista *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* (editada en Costa Rica)

- Fortalecer la relación del CIAEM con la comunidad internacional de Educación Matemática, especialmente con el ICMI y la *International Mathematical Union*.
- Crear y consolidar la Medalla *Luis Santaló*
- Apoyar el desarrollo del *Capacity and Networking Project* del ICMI en América Latina (Costa Rica 2012, Perú 2016)
- Auspiciar la creación y las actividades de la *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe*
- Apoyar la organización del *I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe*, celebrado en Santo Domingo, República Dominicana, en noviembre del 2013
- Consolidar el uso intenso de tecnologías de la comunicación en todas las actividades del CIAEM
- Crear una comunidad virtual del CIAEM de gran proyección tanto a través de su sitio web principal como de su página en Facebook
- Fundar en México el *Comité Interamericano de Educación Matemática* con personalidad jurídica para atender los múltiples compromisos formales que posee
- Traducir al español y publicar algunos textos del NCTM relacionados con la temática *Principles to actions* y continuar una línea importante de colaboración con el *National Council of Teachers of Mathematics* de los USA

En la XIV CIAEM fue confirmada la decisión de tener la XV CIAEM en Medellín, Colombia, en el 2019. Será desde hará 58 años la segunda ocasión en que se realizará una CIAEM en tierra colombiana.

CIAEM es el evento internacional más importante en Educación Matemática en América Latina. Constituye un punto de referencia para investigadores, docentes y estudiantes en todo el continente.

La mayoría de los textos de base para las presentaciones plenarias o paralelas ha sido incluidas en el número 15 de los *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* que se edita en Costa Rica: <http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem>.

Las comunicaciones, talleres, minicursos y posters han sido incluidas en esta colección digital de volúmenes que titulamos *La Educación Matemática en las Américas: 2015*. Los trabajos se han organizado de la siguiente manera:

- Volumen 1 *Educación Matemática en las Américas 2015: Formación Inicial para Primaria*
- Volumen 2 *Educación Matemática en las Américas 2015: Formación Inicial para Secundaria*
- Volumen 3 *Educación Matemática en las Américas 2015: Formación Continua*
- Volumen 4 *Educación Matemática en las Américas 2015: Uso de Tecnología*
- Volumen 5 *Educación Matemática en las Américas 2015: Etnomatemática y Sociología*
- Volumen 6 *Educación Matemática en las Américas 2015: Currículum, Evaluación y Competencias*
- Volumen 7 *Educación Matemática en las Américas 2015: Investigación*
- Volumen 8 *Educación Matemática en las Américas 2015: Estadística y Probabilidad*
- Volumen 9 *Educación Matemática en las Américas 2015: Geometría*
- Volumen 10 *Educación Matemática en las Américas 2015: Álgebra y Cálculo*

- Volumen 11 *Educación Matemática en las Américas 2015: Educación Primaria*
- Volumen 12 *Educación Matemática en las Américas 2015: Historia y Epistemología*
- Volumen 13 *Educación Matemática en las Américas 2015: Nuevos Enfoques y Relación con Otras Áreas*
- Volumen 14 *Educación Matemática en las Américas 2015: Necesidades Especiales*
- Volumen 15 *Educación Matemática en las Américas 2015: Resolución de Problemas*
- Volumen 16 *Educación Matemática en las Américas 2015: Modelación*
- Volumen 17 *Educación Matemática en las Américas 2015: Talleres y Minicursos*
- Volumen 18 *Educación Matemática en las Américas 2015: Posters*

El CIAEM desea agradecer a todos los autores que presentaron sus trabajos en la XIV CIAEM y que incluimos en esta colección de volúmenes. Y a todos los revisores, directores de tema, y colaboradores que participaron en la revisión científica de las ponencias de este magno evento.

La organización detallada y la edición en sus diversas dimensiones fue realizada por nuestro segundo vicepresidente Patrick Scott (Estados Unidos) quien dedicó un esfuerzo extraordinario para tener estas *Memorias* disponibles. Quiero expresar en nombre de nuestra organización nuestro agradecimiento a Rick. Nuestra compañera Sarah González (Vocal para El Caribe) se encargó de tramitar su registro en República Dominicana que contó con el apoyo de la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra de ese país, a las que también expresamos nuestra gratitud.

Los enlaces de estos volúmenes se han colocado en las páginas web oficiales del CIAEM.

Esperamos que la publicación de todos estos trabajos contribuya al progreso de la investigación y la acción de aula en la Educación Matemática de las Américas.



Angel Ruiz
Presidente
Comité Interamericano de Educación Matemática

A conceitualização de volume como grandeza à luz da teoria dos campos conceituais

Leonardo Bernardo de **Morais**

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano
Brasil

leonardob.morais@gmail.com

Resumo

O presente artigo é um recorte de uma pesquisa de dissertação que investigou a abordagem da grandeza volume nos livros didáticos brasileiros de Matemática para o ensino médio. Usou-se como aporte teórico a teoria dos campos conceituais de Gerárd Vergnaud (1990) e o modelo teórico de quadros propostos por Règine Douady e Perrin-Glorian (1989) para a conceitualização de área como grandeza. Neste artigo, analisaram-se os possíveis teoremas em ação passíveis de serem formulados pelos alunos diante das situações de comparação e de produção de volume elencadas nos livros didáticos analisados. Dentre os resultados, constatou-se que as situações de comparação e de produção possibilitam o desenvolvimento de estratégias variadas, bem como a formulação de teoremas em ação que conduzem a conceitualização de volume como grandeza.

Palavras chave: grandezas e medidas, ensino médio, livro didático, volume, teoria dos campos conceituais.

Introdução

O presente artigo é um recorte de uma investigação mais ampla na qual se investigou a abordagem da grandeza volume em livros didáticos de Matemática brasileiros para o ensino médio.

O campo das grandezas e medidas há mais de dez anos vem recebendo notória atenção ao ser colocado em publicações curriculares brasileiras (Brasil, 1998) como um dos grandes blocos de conteúdos do ensino fundamental ao lado de Números e Operações, Espaço e Forma e Tratamento da Informação. Além disso, o mesmo tem despertado, mais recentemente, a realização de diversos estudos por inúmeras razões, dentre as quais elencamos duas: o baixo desempenho dos alunos diante de situações que envolvem grandezas e sua importância no meio social e científico.

O campo das grandezas e medidas é extremamente vasto e sua análise remete à identificação de grandezas de naturezas diversas como temperatura, massa, tempo, entre outras. Nesse campo, destacam-se as grandezas geométricas comprimento, área, volume e ângulo, pois além serem recorrentes em atividades cotidianas, possibilitam a articulação com outros conteúdos matemáticos e com outras áreas do conhecimento.

Nosso interesse em investigações no campo das grandezas e medidas se volta para as grandezas geométricas e mais especificamente para volume.

Na pesquisa acima mencionada, usamos como aporte teórico a teoria dos campos conceituais de Gerard Vergnaud (1990) e tendo como objetivos mapear e classificar as situações que abordam a grandeza volume nos livros didáticos de Matemática de ensino médio e identificar as propriedades do conceito de volume e as representações simbólicas exploradas nesses livros didáticos.

Dentre os resultados constatados nessa investigação mais ampla, elencamos os tipos de situações menos frequentes observadas nos livros didáticos analisados, a fim de fazer um estudo mais minucioso, cujos resultados são apresentados neste artigo. Diante disso, delimitamos como objetivo deste estudo, identificar as propriedades do conceito de volume exploradas nos livros didáticos de Matemática do ensino médio que podem ser exploradas em situações de comparação e de produção da grandeza volume.

Considerações de volume como grandeza

A análise das instruções curriculares nacionais oficiais mostra que volume está presente desde a educação infantil até o ensino médio. Inicialmente, o ensino foca o conceito de capacidade (volume interno de recipientes) e mais tarde incorpora o volume de sólidos maciços. Nos 3º e 4º ciclos, são sugeridas atividades envolvendo as unidades de medida mais usuais como metro cúbico, centímetro cúbico, litro e mililitro, além de cálculo do volume de paralelepípedos retângulos por contagem de cubinhos e de prismas retos por composição/decomposição (Brasil, 1998). Por fim, no ensino médio, recomenda-se a identificação de instrumentos mais adequados para medir o volume de objetos geométricos e a exploração das fórmulas de volume mais usuais (Brasil, 2002b).

No que tange à abordagem de comprimento, área, volume e ângulo, estudos têm defendido o ensino dos referidos conceitos na perspectiva de grandeza, que consiste em associar/dissociar o sólido, o numérico e a grandeza. Essa proposta fundamenta-se nas pesquisas desenvolvidas por Régine Douady e Marie-Jeanne Perrin-Glorian (1989), as quais elaboraram e experimentaram uma engenharia didática, em que investigaram a construção da noção de área como grandeza por alunos com idade entre nove e 12 anos.

Segundo essas pesquisadoras, a construção desse conceito requer a compreensão de área como grandeza autônoma, fazendo-se necessário fazer duas distinções básicas: a) área, que é uma grandeza, e a superfície, que é um objeto geométrico; b) a grandeza área e sua medida que nesse modelo, é um número. Esse modelo tem influenciado diversos estudos, os quais confirmaram sua pertinência (Lima, 1995; Baltar, 1996; Bellemain & Lima, 2002; Teles, 2007) e o estenderam para a conceituação de outras grandezas como comprimento (Barbosa, 2002), volume (Oliveira, 2002, 2007; Barros, 2002; Anwandter-Cuellar, 2008) e ângulo (Lima & Bellemain, 2010).

Assim por analogia, compreender volume como grandeza consiste em distinguir volume do sólido geométrico e volume de sua medida, que é um número real positivo.

Estudos realizados por Oliveira (2002) e Barros (2002) constataram que alunos dos anos finais do ensino fundamental revelaram uma compreensão insuficiente de volume como grandeza, uma vez que os sujeitos investigados pouco articularam/dissociaram os três componentes: o número, o sólido e a grandeza. Ainda nessa etapa de ensino, Anwandter-cuellar (2008) verificou, no ensino francês, que os alunos têm uma concepção predominantemente numérica de volume, ou seja, prevalece a identificação do volume a um número e não a uma

grandeza. Figueiredo (2013) verificou que alunos do ensino médio brasileiro apresentam dificuldades na conceitualização de volume quando o representaram utilizando unidades de áreas. Além disso, alguns não reconhecem as fórmulas adequadas para o cálculo de volume de um sólido.

Esses resultados sugerem novos estudos que possibilitem aos alunos uma construção pertinente do conceito de volume. Para tanto, optamos por analisar a abordagem dessa grandeza nos livros didáticos de Matemática brasileiros do ensino médio, tendo em vista a relevância desse recurso didático para alunos e professores no ensino de conceitos matemáticos, em particular o de volume.

No que tange ao livro didático, alguns estudos (Gérard & Roegiers, 1998; Carvalho & Lima, 2010) apontam sua relevância no ensino. O primeiro ressalta que o livro didático é dotado de conceitos matemáticos e de escolhas didáticas (sequências didáticas), uma vez que traz para esse contexto o seu autor, o qual passa a interagir com o aluno e com o professor, reforçando, portanto, a importância em ter nesses livros uma abordagem que favoreça o ensino dos conteúdos matemáticos.

Volume como componente de um campo conceitual

Usamos como aporte teórico a teoria dos campos conceituais de Gérard Vergnaud (1990), a qual conduz, em nossa investigação, na identificação de situações, de invariantes operatórios e de representações simbólicas em problemas sobre volume explorados nos livros didáticos analisados. Ainda na perspectiva da teoria dos campos conceituais, volume situa-se no campo conceitual das grandezas geométricas, no qual, por um lado, são estabelecidas relações com comprimentos, áreas, ângulos, função linear, proporcionalidade, fórmulas, figuras geométricas planas e espaciais, números, instrumentos de medida, entre outros conceitos e procedimentos matemáticos. Por outro lado, no âmbito desse campo conceitual, articulam-se grandezas físicas básicas como massa, temperatura, velocidade e muitas outras.

O entendimento da grandeza volume como componente de um campo conceitual remete à identificação de tipos de situações, de propriedades (fórmulas, definições, etc.) e de representações simbólicas que permitem dar sentido ao referido conceito.

As situações que possibilitam dar sentido a volume como grandeza são medição, comparação e produção, desenvolvidas a partir de estudos realizados por Baltar (1996) e Anwandter-cuellar (2008). As situações de medição consistem em atribuir um número, numa dada unidade, ao volume de um sólido. As situações de comparação consistem em decidir, em um dado conjunto de sólidos, qual deles tem maior/menor volume ou se têm volumes iguais. E, por fim, as situações de produção caracterizam-se pela produção de um sólido com volume menor, maior ou igual a um volume dado.

Situações de produção e de comparação

Conforme dito antes, neste artigo analisaremos apenas as situações de comparação e de produção, por serem menos frequentes em relação às situações de medição.

Aqui, seguem as estratégias e variações que podem ser mobilizadas e/ou interferir na resolução dos problemas de comparação e de produção.

Nas situações de comparação podem ser usadas estratégias como visual (perceptiva), inclusão, decomposição/recomposição, imersão; medição e comparação das medidas,

comparação das massas e princípio de Cavalieri. Para tanto, há como variações a quantidade de sólidos, sua natureza (sólidos ocos X sólidos maciços) e sua representação (ausência da figura, figura em perspectiva, vistas planas, planificações, presença da figura que permite gerar o sólido, presença de sólidos concretos).

Na comparação do volume de três ou mais sólidos é suficiente compará-los dois a dois e por transitividade, ordená-los segundo seus volumes. Portanto, essa estratégia faz intervir o conceito em ação da transitividade.

Em se tratando de sólidos maciços e/ou ocos, está em jogo o conceito de volume propriamente dito ou o conceito de volume interno (capacidade). Nesse caso, cabe enfatizar que volume é um atributo de sólidos ocos e maciços, enquanto capacidade associa-se apenas ao primeiro.

Em se tratando de sólidos ocos e maciços, em que pelo menos um dos sólidos for oco, favorece-se a estratégia de inclusão, na qual um sólido pode ser inserido no outro, o que permite levantar o teorema em ação “volume e capacidades são grandezas de mesma natureza”.

O teorema em ação acima mencionado decorre da ação do sujeito ao comparar o volume dos sólidos. E mesmo sem estar consciente dessa propriedade, ele está comparando uma capacidade com um volume (ou seja, está implícito na ação do sujeito que capacidade e volume são comparáveis e, portanto são de mesma natureza). Isso permite afirmar que o sujeito está mobilizando o teorema em ação, segundo o qual volume e capacidade são grandezas de mesma natureza, embora esse sujeito não seja necessariamente capaz de explicitar essa propriedade, mesmo se a utiliza na ação.

A ausência/presença da figura ou dos objetos concretos que permite a visualização ou manipulação pode conduzir a estratégias como a visual perceptiva, na qual a comparação é feita do ponto de vista geométrico e a composição-recomposição, em que um sólido é decomposto e recomposto.

A comparação das massas possibilita comparar o volume de sólidos em se tratando de objetos de mesma densidade. Esse tipo de situação, sobretudo sem a interferência da medida, possibilita dissociar o sólido e a grandeza como nas atividades com argila e as que permitem decompor e recompor um sólido. Esse tipo de estratégia favorece o teorema em ação sólidos diferentes podem ter mesmo volume, o que conduz a distinção entre o sólido e a grandeza volume.

Em se tratando das situações de produção, as mesmas possibilitam o uso de estratégias como composição, decomposição-recomposição e princípio de Cavalieri.

Assim como nos problemas de comparação, esse tipo de situação favorece a distinção entre o sólido e a grandeza que permite observar a independência entre volume e o objeto geométrico.

A estratégia de composição consiste em produzir um sólido compondo as unidades de medida; e o princípio de Cavalieri caracteriza-se pela construção de uma figura a partir do que afirma tal princípio. O uso das referidas estratégias pode remeter ao teorema em ação “diferentes sólidos podem ter o mesmo volume”, o qual favorece a compreensão de volume enquanto grandeza.

A estratégia de decomposição-recomposição versa sobre a produção de um “novo” sólido com volume maior/menor ou igual ao volume de um sólido dado.

Com isso, foram analisados o que os exercícios propostos nos referidos livros didáticos permitem explorar no que se referem às estratégias, variações e elaboração de possíveis teoremas em ação e propriedades subjacentes ao conceito de volume.

Método

Para a coleta dos dados, foram analisadas as sete coleções aprovadas no PNLD 2012 (Brasil, 2011), explicitadas na tabela 1:

Tabela 1

Coleções aprovadas no PNLD 2012

Coleção	Autor (a)	Editora
Conexões com a Matemática	Juliane Matsubara Barroso	Moderna
Matemática- Contexto e Aplicações	Luiz Roberto Dante	Ática
Matemática – Paiva	Manoel Paiva	Moderna
Matemática Ciência e Aplicações	David Degenszajn, Gelson Iezzi, Nilze de Almeida, Osvaldo Dolce, Roberto Périgo	Saraiva
Matemática Ciência, Linguagem e Tecnologia	Jackson Ribeiro	Scipione
Matemática Ensino Médio	Maria Ignez Diniz, Kátia Stocco Smole	Saraiva
Novo Olhar – Matemática	Joamir Souza	FTD

Nas análises as coleções não foram identificadas, pois nosso interesse não é de natureza comparativa.

Foram elaborados critérios que nortearam a análise minuciosa dos livros didáticos. Esses critérios emergiram de indicações pontuadas no Guia do PNLD 2012 (Brasil, 2011), de sugestões propostas nos documentos de orientações curriculares brasileiros, de pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem da grandeza volume (e de modo geral das grandezas geométricas) e da fundamentação didática e matemática do conceito de volume.

Tendo em vista o objetivo deste artigo, ou seja, a identificação de possíveis teoremas em ação que possibilitam conceituar volume como grandeza em situações de comparação e produção, delimitaram para a condução das análises, as questões seguintes, as quais permitem compreender o conceito de volume à luz do tripé da teoria dos campos conceituais (Vergnaud, 1990) e do modelo didático de quadros (Douady & Perrin-Glorian, 1989).

Questões

- Que propriedades da grandeza volume os livros didáticos exploram ou permitem trabalhar?
- Que representações simbólicas referentes à grandeza volume são exploradas?
- Há articulação entre os quadros geométrico, numérico e da grandeza?

Foi feito um mapeamento minucioso nos livros didáticos analisados a fim de identificar os capítulos em que volume é objeto de estudo. Feito isso, foram analisadas tanto as explicações como os exercícios propostos.

Após a listagem dos exercícios propostos, os mesmos foram categorizados em situações de medição, comparação ou produção, conforme definidas anteriormente.

Principais resultados

Conforme mostra a tabela 2, as situações de medição são as mais exploradas nos livros didáticos analisados. Para a contagem dos tipos de situações usamos como unidade de análise os exercícios propostos e quando uma atividade trazia itens (a, b, c, etc.), eles eram contados como um exercício.

Elencamos as situações de comparação e de produção para a análise mais minuciosa, tendo em vista a menor ocorrência das mesmas quando comparadas com as situações de medição.

Tabela 2

Quantidade de situações identificadas¹

Coleção	Total	Medição		Comparação		Produção	
		#	%	#	%	#	%
A	98	94	95,9	3	3,1	1	1,0
B	111	105	94,6	3	2,7	3	2,7
C	92	81	88,0	7	7,6	4	4,3
D	97	93	95,9	2	2,1	2	2,1
E	122	111	91,0	4	3,3	7	5,7
F	71	68	95,8	1	1,4	2	2,8
G	113	100	88,5	8	7,1	5	4,4
Total	704	652	92,6	28	4,0	24	3,4

Conforme dito antes, as situações de comparação consistem em comparar o volume de dois ou mais sólidos e as de produção em produzir sólidos com volumes menor/maior ou igual a volumes dados.

Foram elencados exercícios dos livros didáticos analisados categorizados em situações de comparação e de produção, a fim de identificarmos os invariantes operatórios que favorecem a conceitualização de volume enquanto grandeza.

Situações de comparação

De acordo com a tabela 2, foram listados apenas 28 exercícios classificados como de comparação, o que consideramos insuficiente, sobretudo, em relação aos de mediação.

Para a inferência dos possíveis teoremas em ação nas situações de comparação, selecionamos os exercícios mostrados nas figuras 1, 2, 3, 4 e 5.

¹A soma das quantidades de situações dos três tipos não é o total, porque há situações que não foram classificadas e que serão comentadas adiante.

76 Junte-se a um colega e resolvam o exercício. (ENEM) Os três recipientes da figura têm formas diferentes, mas a mesma altura e o mesmo diâmetro da boca. Neles, são colocados líquidos até a metade de sua altura, conforme indicado nas figuras.

Representando por V_1 , V_2 e V_3 o volume de líquido em cada um dos recipientes, tem-se: **b**

a) $V_1 = V_2 = V_3$ d) $V_3 < V_1 < V_2$
 b) $V_1 < V_3 < V_2$ e) $V_1 < V_2 = V_3$
 c) $V_1 = V_3 < V_2$

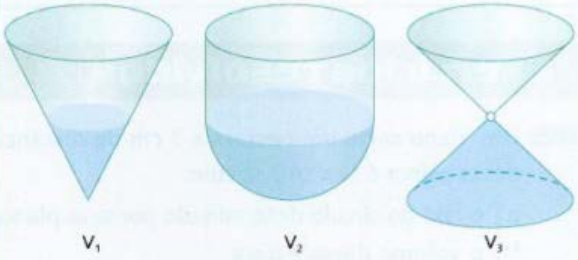
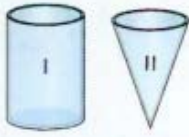


Figura 1. Situação de comparação, coleção C (2010, p. 156).

Nesse exemplo, está em jogo a comparação não numérica de volume, o que pode remeter ao quadro geométrico. É possível também que sejam mobilizadas estratégias do ponto de vista algébrico. De todo modo, a não explicitação de medidas é um dado relevante, uma vez que as mesmas são demasiadamente recorrentes em situações de medição. A imagem auxilia o sujeito na mobilização de conceito em ação, como o princípio de Cavalieri. Além disso, a quantidade de recipientes remete ao conceito em ação da transitividade, em que o aluno compara os volumes dos sólidos dois a dois e, por transitividade, decide qual deles têm maior/menor volume.

Destaca-se, portanto, nesse exercício a possibilidade da comparação de volumes sem necessariamente medi-lo, o que leva ao desenvolvimento de estratégias não convencionais (manipulações algébricas) e, sobretudo, a ideia de que os recipientes podem ser comparados segundo suas capacidades ou volume interno, o que leva ao teorema em ação “o volume se distingue do sólido”.

48 Junte-se a um colega e resolvam o exercício. (UFMT – MT) Admita que os interiores dos recipientes I e II da figura tenham, respectivamente, as formas de um cilindro circular reto e de um cone circular reto, de áreas das bases iguais e alturas iguais. Sabe-se que o recipiente I está com a metade de sua capacidade ocupada por água.



Se toda a água do recipiente I for despejada no recipiente II, pode-se afirmar: **b**

a) Todo o recipiente II será preenchido e sobrar água correspondente a $\frac{1}{3}$ da capacidade do recipiente I.
 b) Todo o recipiente II será preenchido e sobrar água correspondente a $\frac{1}{6}$ da capacidade do recipiente I.
 c) Faltará água correspondente a $\frac{1}{6}$ da capacidade do recipiente I para preencher todo o recipiente II.
 d) Faltará água correspondente a $\frac{1}{3}$ da capacidade do recipiente I para preencher todo o recipiente II.
 e) Todo o recipiente II será preenchido e não sobrar água no recipiente I.

Figura 2. Situação de comparação, coleção C (2010, p. 146).

Nesse exercício, além da comparação não numérica, relacionam-se os volumes do cilindro e do cone (para o caso em que ambos têm bases de mesma área). Aqui, novamente valorizam-se estratégias do quadro geométrico, ou seja, sem uso de procedimentos numéricos-algébrico. Como no exemplo anterior, a presença da imagem favorece o desenvolvimento de estratégias variadas. Comparações no campo algébrico podem aparecer, uma vez que o volume de um cone (mantida as condições dadas no problema) equivale a um terço do volume do cilindro. Essa atividade possibilita também a verificação empírica, o que leva a consolidação da relação entre o volume dos recipientes em jogo. Cabe ressaltar a não necessidade da medição dos volumes, mostrando que nem sempre o interesse é determinar o volume dos sólidos.

O exemplo seguinte compara o volume de dois recipientes com bases e alturas iguais (de mesma área e mesmo comprimento, respectivamente).

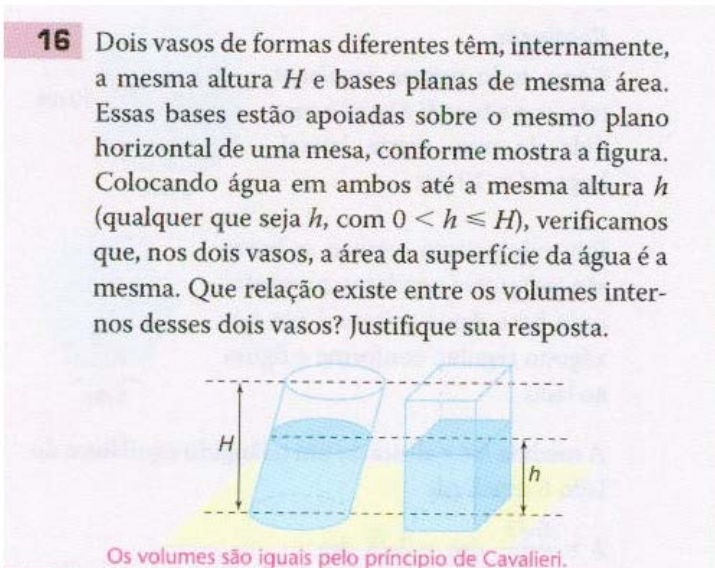


Figura 3. Situação de comparação, coleção F (2009, p. 224).

Nessa atividade, explicitam-se as alturas dos recipientes, o que pode levar ao uso de procedimentos algébricos. No entanto, o princípio de Cavalieri é uma estratégia favorecida, uma vez que se toma como hipótese a igualdade das áreas das bases dos sólidos. Do ponto de vista do modelo de quadros (Douady & Perrin-Glorian, 1989), esse exercício permite explorar também o invariante operatório “sólidos diferentes podem ter mesmo volume”. Novamente, como no exemplo 1, a comparação dos recipientes é feita segundo seus volumes, o que possibilita concluir que tal grandeza é um atributo do recipiente e, portanto, se distingue do mesmo.

Os exemplos das situações de comparação mostrados anteriormente revelam a não necessidade de recorrer a medições e que nem sempre o interesse é medir.

Essas situações destacam-se também por favorecer o uso de estratégias variadas. Na figura 1, por exemplo, é possível comparar os volumes dos sólidos a partir do quadro geométrico e na figura 3, recorrendo ao princípio de Cavalieri. Além disso, situações dessa natureza permitem explorar outras características da grandeza, como sólidos diferentes podem ter mesmo volume, sem necessariamente recorrer a procedimentos numéricos-algébricos, os quais são exaustivamente trabalhados em situações de medição.

Diante das estratégias variadas e dos possíveis teoremas em ação que podem emergir nas situações de comparação, consideramos insuficiente a quantidade observadas nos livros didáticos analisados, principalmente aquelas que dispensam procedimentos numéricos-algébricos, pois constatamos também exercícios nos quais é necessário recorrer a medições para comparar os volumes, como mostram as figuras 4 e 5.

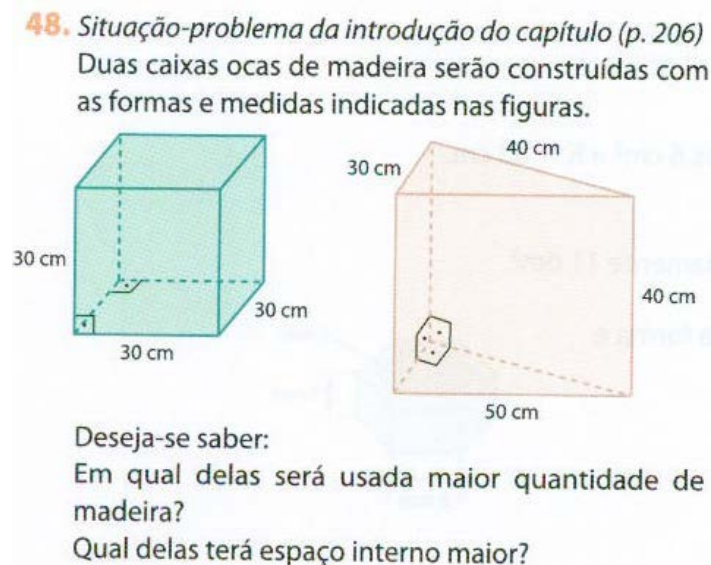


Figura 4. Situação de comparação, coleção D (2010, p. 226).

A tarefa principal desse exercício é comparar o espaço interno das caixas. Para isso, recorre-se a medições tendo em vista a explicitação dos comprimentos das caixas. Embora esteja em jogo a comparação do volume das caixas, a estratégia favorecida é o uso de fórmulas, o que remete à situação de medição. Tal estratégia é valorizada também na atividade seguinte.

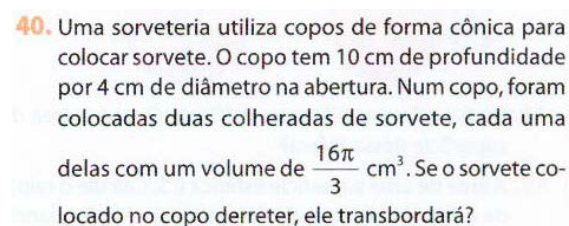


Figura 5: Situação de comparação, coleção D (2010, p. 261).

Nessa atividade, o uso da fórmula e, portanto a medição, é claramente valorizada, tendo em vista o domínio numérico do volume das “colheradas de sorvete”, a saber, $16\pi/3$. A comparação empírica, ainda que improvável, torna-se inviável, pois as medidas em jogo são números irracionais.

Embora não apresentamos todas as situações de comparação observadas nos livros didáticos analisados, explicitamos aquelas que contemplam as demais. A partir dos exemplos apresentados é possível perceber que essas situações têm um papel relevante para a construção do conceito de volume como grandeza que dificilmente pode ser explorado nas situações, por exemplo, de medição. A distinção entre o sólido e seu volume é claramente favorecida nas situações de comparação, assim como o desenvolvimento de estratégias variadas, a exemplo do princípio de Cavalieri.

Situações de produção

As situações de produção também são pouco abordadas, uma vez que identificamos apenas 24 exercícios desse tipo para um total de 704 exercícios classificados (ou analisados). Além disso, constatamos ocorrências de atividades de produção que remetem a procedimentos numéricos-algébricos como mostra o exemplo seguinte.

32. Qual deve ser a medida da aresta de uma caixa-d'água cúbica para que ela possa conter 8 000 ℓ de água?

Figura 6. Situação de produção, Coleção D (2010, p. 222).

Nessa atividade é dado um volume e pede-se o comprimento da aresta de uma caixa que o contenha. Tendo em vista que o volume é dado em litros, para a obtenção do sólido são requeridos procedimentos numéricos-algébricos. A ausência de imagem e a especificidade do sólido a ser obtido pode favorecer o uso de fórmulas. Porém, tem-se uma atividade importante por explorar a produção de um sólido dado o seu volume. É possível também que sejam produzidos sólidos com volume maior que o volume dado, pois é suficiente que tal sólido contenha 8000 l de água. Por exemplo, um recipiente cúbico com 2,5 m de aresta contém 15 625 litros de água e, portanto, contém 8000 litros.

No exercício mostrado na figura 7, tem-se uma situação de produção que possibilita explorar estratégias e teoremas em ação diversos.

Muitas embalagens de leite que utilizamos têm a forma de um prisma com a base retangular e capacidade de 1 litro.

- Como você deve cortar uma dessas embalagens de leite de modo a obter um recipiente que permita medir no máximo meio litro?
Procure duas maneiras diferentes de fazer esse corte.
- Usando ainda embalagens desse tipo, como você faria para obter recipientes que permitissem medir um terço de litro, um quarto de litro, ..., um decilitro?
- E se as embalagens tivessem a forma de um prisma de base pentagonal, como você faria para obter meio litro?

Figura 7. Situação de produção, coleção E (2010, p. 283).

Esse exercício envolve a produção de sólidos com volume menor que um volume dado. Estratégias numérico-algébricas não são favorecidas, pois não são dadas as medidas das arestas da caixa. No item *a*, por exemplo, é possível fazer diferentes cortes de modo que a caixa contenha meio litro como: um corte com um plano que contém a diagonal do prisma e é perpendicular ao plano tomado como base; e outro, cujo plano de corte é paralelo ao plano tomado como base intersectando as arestas em seus respectivos pontos médios. A produção de diferentes sólidos com mesmo volume possibilita distinguir o objeto geométrico da grandeza.

Bem como nas situações de comparação, elencamos os exercícios que representam o conjunto daqueles observados nos livros didáticos. Constatamos também para as situações de produção, a possibilidade de formular teoremas em ação e o uso de estratégias que auxiliam na conceitualização de volume como grandeza, que em outras situações não são evidenciadas.

Conclusões

As situações de comparação e de produção contempladas neste artigo são necessárias para a conceitualização de volume enquanto grandeza, assim como as de medição. Entretanto, esta última predomina em relação às demais.

Como já mencionado, as situações de comparação e de produção favorecem o desenvolvimento de estratégias diversas e a formulação de teoremas em ação verdadeiros, os quais auxiliam na conceitualização de volume como grandeza, ou seja, que consiste em distinguir o sólido (recipiente, em se tratando de capacidade) de seu volume e da medida do volume, numa dada unidade. Essa distinção/associação é demasiadamente favorecida nas situações aqui analisadas, conforme mostram as análises em que, por exemplo, dois sólidos qualitativamente diferentes podem ter mesmo volume (figura 3) e a possibilidade da produção de diferentes sólidos com mesmo volume (figura 7).

Diante disso, sugerimos que seja dada mais ênfase às situações de comparação e de produção nos livros didáticos de matemática analisados, pois entendemos que as mesmas são importantes para a compreensão de volume como grandeza e o enfoque dado nesses manuais escolares são insuficientes. Além disso, a efetiva abordagem das situações mencionadas pode contribuir significativamente para a superação de entraves e dos baixos desempenhos constatados por Oliveira (2002), Barros (2002), Anwandter-Cuellar (2008) e Figueiredo (2013) na construção do conceito de volume.

Referências e bibliografia

- Anwandter-Cuellar, N. (2008). *Etude de conceptions d'élèves à propos du concept de volume* (Mémoire de master - 2 HPDS, Histoire Philosophie et Didactique des Sciences). Université Montpellier 2.
- Barroso, J. M. (2011). *Conexões com a Matemática* (Vol. 1, 2, 3). Ed. Moderna.
- Baltar, P. M. (1996). *Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surfaces planes: une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège* (Tese de Doutorado). Université Joseph Fourier, Grenoble.
- Barros, J. S. (2002). *Investigando o conceito de volume no ensino fundamental: um estudo exploratório* (Dissertação de Mestrado em Educação). Programa de Pós Graduação em Educação, Centro de Educação, UFPE, Recife.
- Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. (1998). *Parâmetros Curriculares para o Ensino Fundamental*. Brasília.
- Brasil. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. (2002b). *PCN+: Ensino Médio orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília.
- Carvalho, J. B. P., & Lima, P. F. (2010). *Escolha e uso do livro didático* (Vol.17, pp.15-30). Brasília, Dante, L. R. (2010). *Matemática: contexto e aplicações* (Vol. 1, 2 e 3). São Paulo: Ática.
- Douady, R., & Perrin-Glorian. M-J. (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. *Educational Studies in Mathematics*, 20(4), 387 424.
- Figueiredo, A. P. N. B. (2013). *Resolução de problemas sobre a grandeza volume por alunos do ensino médio: um estudo sob a ótica da Teoria dos Campos Conceituais* (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Centro de Educação, UFPE, Recife.

- Gérard, F.M., & Roegiers, X. (1998). *Conceber e avaliar manuais escolares*. Porto: Porto Editora.
- Iezzi, G., Dolce, O., Degenszajn, D., Rérigio, R., & Almeida, N. (2010). *Matemática: ciência e aplicações* (Vol. 1, 2 e 3, 6ª ed.). São Paulo: Saraiva.
- Lima, P.F. (1995). Considerações sobre o conceito de área. In *Anais da Semana de Estudos em Psicologia da Educação Matemática*. Recife.
- Morais, L. B. (2013). *Análise da abordagem da grandeza volume em livros didáticos de Matemática do ensino médio* (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática). Programa de Pós Graduação em Educação Matemática e Tecnológica, Centro de Educação, UFPE, Recife.
- Oliveira, G. R. F. (2002). *Construção do Conceito de Volume no Ensino Fundamental: um estudo de caso* (Dissertação de Mestrado em Educação). Programa de Pós Graduação em Educação, Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife.
- Ribeiro, J. (2010). *Matemática: ciência, linguagem e tecnologia* (Vol. 1, 2 e 3). São Paulo: Scipione.
- Paiva, M. (2009). *Matemática – Paiva* (Vol. 1, 2 e 3). São Paulo: Moderna.
- Smole, K. C. S., & Diniz, I. S. V. (2010). *Matemática: ensino médio* (Vol. 1, 2 e 3, 6ª ed.). São Paulo: Saraiva.
- Souza, J. R. (2010). *Novo olhar matemática* (Vol. 1, 2 e 3, 1ª ed.). São Paulo: FTD.
- Teles, R. (2007). *Imbricações entre campos conceituais na matemática escolar: um estudo sobre as fórmulas de área de figuras geométricas planas* (Tese de Doutorado em Educação). Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), Recife.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches em Didactique des Mathématiques – RDM*, 10(2, 3), 133 – 170. Grenoble.

A formação do pedagogo para o ensino de Matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: reflexões dedutiva e epistemológica

Maria Jose Costa dos Santos
Universidade Federal do Ceará
Brasil
mazzesantos@ufc.br

Resumo

Objetivamos com esse estudo compreender a epistemologia do pedagogo para o ensino de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, a fim de propormos um modelo epistemológico, para que esse profissional se reconheça também como professor de Matemática. Para contemplar nosso objetivo, observamos, analisamos e mediamos à prática pedagógica de alunos do curso de Pedagogia, nas salas de aulas das disciplinas que envolvem os conteúdos matemáticos, tais como as disciplinas de Ensino de Matemática (96h/a) e Tópicos em Educação Matemática (64h/a) da Faculdade Educação/FACED da Universidade Federal do Ceará/UFC. Os resultados apontaram que o pedagogo compreende que não detém os conceitos matemáticos elementares para ensinar matemática, apresentando *déficit* epistemológico, pois cursa apenas uma disciplina obrigatória, sendo a outra optativa, portanto, não são suficientes. Consideramos as análises sobre o desenvolvimento da epistemologia do pedagogo pertinentes para propormos modelos epistemológicos adequados.

Palavras chave: conhecimento, saber matemático, epistemologia, pedagogo, metodologia, modelo.

Introdução

O ensino de Matemática, em pleno século XXI, ainda constitui um grande desafio ao pedagogo, que é o responsável pelo ensino nos anos iniciais do Ensino Fundamental. O pedagogo para desenvolver bem sua docência, enfrenta desafios que podem ser de cunho didático ou epistemológico. Didático, porque o professor ainda apresenta uma metodologia instrucional, e menos construtivista, epistemológico porque faz-se necessário desenvolver conhecimentos matemáticos ainda elementares desde sua escolarização básica.

A Matemática, por sua complexidade, exige um pouco mais de atenção, Machado (1994, p. 8), sobre isso, assinala que “...a falta de clareza com relação ao papel que a matemática deve desempenhar no corpo de conhecimentos sistematizados pode ser o principal responsável pelas dificuldades crônicas de que padece seu ensino. Dessa forma, esses desafios refletem diretamente nos processos de ensino e de aprendizagem dos conceitos matemáticos, cuja concepção tem sua confirmação na *práxis* das salas de aulas e que precisam ser mais bem compreendidos para serem melhores trabalhados.

Ensinar Matemática ainda é uma tarefa difícil de ser realizada, pelo pedagogo, mesmo no século XXI. Segundo Borges Neto & Santos(2006), é preciso uma boa formação para os

professores de uma forma geral e constatamos que essa formação precisa ser mais bem elaborada nos cursos de Pedagogia, pois esses profissionais vão lecionar Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, com alguns conceitos construídos de forma equivocada, ainda na educação básica, podemos destacar por exemplo, o conteúdo das operações fundamentais, especificamente, a subtração, quando ao invés de trabalhar com as trocas, desagrupamentos, usam “pedir emprestado.”

No Brasil, no final do século XX, nos anos 90, diante dos insucessos no ensino e na aprendizagem (de Linguagem e Matemática), foram criadas propostas pedagógicas e políticas públicas, visando habilitar os professores da rede pública para a melhoria em sua formação docente. Assim, a formação dos professores, se tornou alvo das reflexões e alterações nas visões das instituições de Ensino Superior-IES. Desse modo, ressaltamos a LDBEN/9394/96, que visa um ensino regido pelos princípios de uma formação mais próxima da realidade epistemológica do aprendiz. Nesse sentido, algumas propostas vêm se implementando na educação brasileira, dentre elas podemos destacar além da LDBEN (Brasil), os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática-PCNM, (Brasil, 1997), o programa Fundo de Manutenção e Desenvolvimento do Ensino Fundamental e de Valorização do Magistério, conhecido como FUNDEF (BRASIL, 1998), as Novas Diretrizes para a Formação de Professores da Educação Básica, instituída pela Resolução CNE/CP Nº 1, de 18 de fevereiro de 2002 e o Fundo de Manutenção e Desenvolvimento da Educação Básica e de Valorização dos Profissionais da Educação – FUNDEB (substituto do FUNDEF) que foi criado pela Emenda Constitucional nº 53/2006 e regulamentado pela Lei nº 11.494/2007 e pelo Decreto nº 6.253/2007 que vigorará no período de 2007-2020. Todas essas políticas públicas educacionais foram criadas com o objetivo de melhoria do ensino e da aprendizagem nas escolas de Educação Básica, públicas do Brasil.

Ainda , nessa perspectiva, o Governo Federal, apresenta o Programa Nacional da Alfabetização na Idade Certa-PNAIC (Brasil, 2013), embora não concordando com a ideia de que existe a idade certa para aprender, como ressalta o referido programa, assinalamos que do 1º. ao 3º. ano seria a idade adequada para a criança aprender não somente a ler, mas a calcular, interpretar dados da realidade, de sua vivência.

As propostas de mudanças no âmbito educacional, não somente pelos documentos oficiais, mas também pelas próprias necessidades sociohistoricasulturais, provocam uma reflexão sobre a formação dos professores nas licenciaturas, e nos instiga questionar sobre quais habilidades profissionais são necessárias para que o pedagogo exerça com competência a docência, como professor de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Visando entender a importância desse questionamento, pensamos outras formas de propor uma reorganização (construção/reconstrução) conceitual, para contribuir na formação epistemológica do pedagogo para o ensino de Matemática.

Concepções epistemológicas para o ensino de Matemática

As pesquisas sobre a epistemologia do professor têm evoluído de modo não só quantitativo, mas também qualitativo. Com base nessas pesquisas, podemos afirmar que epistemologia é um conjunto de convicções, crenças de conhecimentos e de saberes científicos, os quais tendem a descrever os

Saberes dos sujeitos ou de grupos de pessoas, para constituir sua legitimidade, verificando como aprendem e como ensinam, assim, a epistemologia é uma tentativa de identificar e de

unificar percepções epistemológicas distintas e concernentes a determinadas ciências e movimentos intelectuais, de grupos de pessoas, de instituições, ou de culturas. (D'Amore, 2007)

Com base no parágrafo anterior, ressaltamos aqui o lugar e o papel da epistemologia docente, pois o professor desenvolve suas concepções, crenças, conhecimentos, processualmente ao longo da carreira profissional e não importa com que qualidade desenvolvemos os programas de formação, pois sempre os professores estarão em processo de *construção epistemológica*. ¹(Santos, 2014).

É importante que a formação do professor para o ensino de Matemática considere a sua epistemologia, seus modelos epistemológicos, e que esses modelos venham contribuir de forma eficaz para subsidiar a relação da teoria com a prática, fazendo-os vivenciar experiências que lhes possibilitem associar o que aprendem com o que ensinam.

Segundo Lorenzato (2006), o ato de ensinar difere da ação de dar aulas e propõe 25 ações que para o professor de Matemática, das quais selecionamos: ensinar com o devido conhecimento; investir em sua formação; aproveitar o conhecimento do aluno; valorizar os erros dos alunos; propiciar a experimentação; favorecer a redescoberta; historiar o ensino; e assumir a melhor atitude profissional, nessas ações propostas pelo autor, ressaltamos que é relevante considerar, ainda, o modelo epistemológico que o professor se propõe a seguir.

Encontramos a partir de nossos estudos que os *modelos epistemológicos* mais presentes na prática docente do pedagogo, no que diz respeito às aulas de matemática, são polarizados, de um lado o Instrucionismo (tradicional) e de outro Construtivismo (Intuicionista). Considerando os modelos ora apresentados, Fossa (2001) retrata dois modelos de salas de aula em que cada professor assume um papel diferenciado. Na sala de aula tradicional, o professor dá aos alunos vários exemplos do conceito a ser aprendido; o professor define o conceito; o professor insere no processo vários exercícios de fixação e depois, por meio de uma “avaliação objetiva”, verifica se os alunos aprenderam.

No outro modelo de sala de aula, que o autor caracteriza como intuicionista, os alunos são os protagonistas, o professor organiza as atividades estruturadas; trabalha o erro com contraexemplos; estimula a criação de outros conceitos; estimula outras formas de trabalhar o conteúdo e avalia os alunos por meio dos diálogos e projetos. Nesse mesmo pressuposto, destacamos a metodologia Sequência Fedathi, (Santos, 2007) a qual contempla as concepções epistemológicas do professor que tem como crença um ensino baseado na construção, reflexão, investigação, no fazer matemático, tendo o aluno como protagonista e o professor como mediador dos processos de ensino e de aprendizagem.

Para assumir a melhor posição, o professor precisa ter definido que papel quer exercer diante do processo de ensinar, se de um professor tradicional ou intuicionista. O modelo epistemológico de professor construtivista (Intuicionista) ainda é raro nas salas de aula de matemática, pois ainda presenciamos professores retratando modelos que em sua formação lhes foram repassados/transferidos. Desse modo, enquanto os professores não forem os protagonistas de seu desenvolvimento profissional, enquanto a formação do professor não assumir uma

¹ Construção epistemológica é a construção perene de crenças e conhecimentos, nas esferas: sociais, culturais, políticas, históricas, entre outras, a partir do desenvolvimento profissional do professor. (Santos, 2014).

identidade, definir o modelo epistemológico mais adequado, o docente seguirá carente de reflexões sobre a sua *práxis*.

O fracasso na Matemática, de acordo com os índices de programas avaliadores, como o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes-PISA (2012) apontou que de 65 países, o Brasil assumiu a 58ª posição em Matemática. Os resultados apontaram que 2 em cada 3 alunos brasileiros de 15 anos não conseguem interpretar situações que exigem apenas deduções diretas da informação dada, não são capazes de entender percentuais, frações ou gráficos.

Esses índices refletem os problemas de aprendizagem dos alunos em Matemática, principalmente, porque a Matemática é uma das áreas do conhecimento mais difíceis de compreensão, por ser baseada em raciocínio crítico e lógico, contudo ela é uma disciplina onde se buscam os resultados dentro de si, para desenvolver o senso crítico e autonomia.

Sobre as concepções epistemológicas que cercam a formação do professor de Matemática, D'Ambrosio (1993) aponta algumas características relevantes para esse profissional que vai atuar no século XXI, que são a visão do que vem a ser a Matemática; do que constitui a atividade Matemática; do que constitui a aprendizagem Matemática; do que constitui um ambiente propício à aprendizagem Matemática. Analisando essas proposições, podemos dizer que o conceito de formação de professores é algo que precisa sempre ser pensado e repensado, pois é relevante que a formação contemple o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático, fundamental para todas as áreas do conhecimento, capital até para a resolução dos problemas cotidianos, comuns, de um cidadão normal que nos leva refletir sobre as seguintes questões - é possível ensinar sem conhecimento? Qual o modelo epistemológico assumido pelo pedagogo no ensino de matemática?

Por considerarmos essa discussão relevante é que entendemos ser preciso também uma mudança de atitude dos professores, pois muitos ainda partem do automatismo para a compreensão, colocando os alunos diante de regras e fórmulas sem significados, sem fazer relação alguma com a realidade do aluno, atingindo somente a parte superficial do aprendizado, e como resultado temos um aprendizado imediatista, com pouca compreensão.

Os alunos sentem necessidade de coisas novas, de atividades que lhes tragam algum significado. São curiosos o suficiente para iniciar um processo investigativo, bastando que o professor direcione atividades que sejam significativas e do interesse do aluno, pois há uma necessidade de os novos professores compreenderem a Matemática como uma disciplina de investigação. Uma disciplina em que o avanço se dá como consequência do processo de investigação e resolução de problemas.”(D'Ambrosio, 1993).

Para enfatizar esse modelo de ensino Mendes diz (2001, p.23):

A pesquisa em Educação tem apresentado sugestões de alternativas para a superação das dificuldades encontradas por professores e alunos em relação ao ensino-aprendizagem da Matemática, procurando enfatizar o caráter investigatório do processo de construção do edifício matemático afim de levar alguns estudiosos dessa área, a elaboração, testagem e avaliação de atividades de ensino centradas na utilização de informações históricas relacionadas aos tópicos que pretendem investigar.

Para sentir que o conteúdo faz sentido em sua vida, que faz parte de suas vivências e não mais de uma situação alheia a sua realidade, ... *é importante que o professor entenda que a*

matemática estudada deve de alguma forma, ser útil aos alunos, ajudando-os a compreender, explicar ou organizar sua realidade ” (D’Ambrosio, 1993).

Os cursos de Pedagogia e Magistério que se propõem trabalhar com o ensino de matemática devem refletir sobre ensino a partir de um modelo epistemológico adequado, compreendendo o profissional como sujeito autônomo. A Matemática ainda é vista como uma Ciência nobre, perfeita, e que nem todos estão aptos a tomar posse desses saberes e, portanto, terão que escolher carreiras em que não sejam necessários esses conhecimentos.

A ideia de que alguns dos alunos que procuram os cursos de Pedagogia sentem desprazer em aprender Matemática, traz embutida a concepção de que essa disciplina é para “mentes brilhantes”, tal concepção permeia de forma nefasta e impede o sucesso dos alunos que serão os professores nos anos iniciais do Ensino Fundamental. É preciso democratizar o ensino dessa disciplina, pois ela é um componente importante na consolidação da cidadania e contribui para transformar a realidade dos sujeitos.

Nesse sentido, segundo Perrenoud (2000) é competência do professor verificar se os programas estão a anos-luz dos alunos, para então adaptá-los, além de torná-la compreensível. É com base nessa afirmação tão pertinente que devemos analisar previamente as habilidades e inabilidades do professor que vai lecionar Matemática, além de conhecer sua epistemologia. Assim, de acordo com Moreira e David (2005), a formação precisa fazer relação do conhecimento acadêmico (científico) com o conhecimento escolar (saberes).

Segundo Perraudeau (1996) as dificuldades em aprender Matemática são gritantes e, no entanto, não são vistas com a mesma seriedade como são as dificuldades com a linguagem. Perraudeau coloca ainda que a ideia central de Henri Planchon consistia em fazer compreender que falhar em Matemática não é nenhuma fatalidade, muito pelo contrário, o insucesso nessa disciplina deve ser interpretado como uma disfunção passageira de uma construção, que é sempre possível remodelar; e que o principal objetivo em reaprender está em domínios como o raciocínio, a abstração, a organização e a mentalização. Mesmo com toda essa concepção de reeducação e de reaprendizagem, o ensino de Matemática depende da epistemologia do professor.

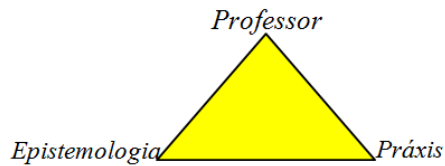
A práxis e a epistemologia do pedagogo

Constatamos que ao longo desta pesquisa (e também em outras investigações, como a de Lima (2007) ao afirmar que o pedagogo em sua grande maioria não gosta, não entende, não compreende os conteúdos matemáticos de uma forma geral) ainda na Educação Básica o professor dá muita ênfase à parte instrumentalista e não se preocupa muito com o raciocínio matemático (Borges Neto, 1997).

Por conta destas falhas, ainda detectadas na Educação Básica, que Borges Neto (1997), aponta que os pedagogos chegam ao curso apenas com noções da Aritmética elementar. Ele aconselha que esses conhecimentos sejam ampliados para os estudos sobre Geometria e Álgebra, para maximizar também o raciocínio, trabalhando assim, a passagem do pensamento geométrico para o algébrico. As contribuições de ferramentas como o computador, o conhecimento sobre o conteúdo ajudam a instigar a criatividade do sujeito.

Propomos que o pedagogo possa desenvolver uma epistemologia no sentido de mostrar a relevância da prática investigativa que lhe fará compreender melhor os fenômenos ocorridos em

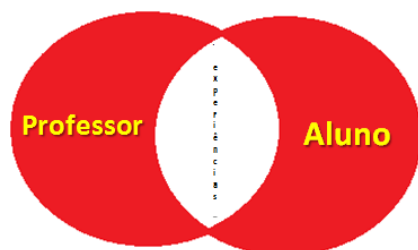
seu contexto de atuação, proporcionando-lhe uma ação reflexiva, fazendo uma correlação entre o tripé:



Com isso, a partir de Becker (2009, p. 92-99) vale ressaltar três modelos epistemológicos e as tendências pedagógicas que se apresentam com a mesma concepção e relação dos processos de ensino e de aprendizagem: **1) Empirismo e a Pedagogia Diretiva:** O conhecimento é transmitido, o aluno “aprende” o que o professor “ensina”. O aluno é considerado uma “tábula rasa”. Diante de um novo conteúdo, considera-se que o aluno não possui nenhum conhecimento prévio. O sujeito apenas recebe o que o objeto lhe reproduz. Só reproduz o que já está pronto, o aluno não aprende a pensar, criar, questionar e ter segurança em suas ações. **2) O Apriorismo e a Pedagogia Não-Diretiva:** O aluno tem em sua bagagem hereditária conhecimentos. O professor apenas auxilia e interfere o mínimo possível, para que o aluno aprenda por si mesmo. A aprendizagem julga-se absoluta, autossuficiente, desautorizando o ensino, que não deve interferir, pois prejudica o aluno. Essas dificuldades são relacionadas à cultura socioeconômica, em que a marginalização da sociedade é considerada sinônimo de problemas cognitivos. **3) O Construtivismo e a Pedagogia Relacional:** O aluno é incentivado a pensar, questionar.

Assim, constrói seu conhecimento em uma relação mútua com o professor: ambos ensinam e aprendem. A partir da assimilação de algo do meio em que se vive, o aluno busca respostas para desenvolver seu conhecimento, refazendo-se sobre si mesmo. Neste momento acontece a acomodação, um equilíbrio, onde aumenta-se o nível do conhecimento cognitivo do sujeito ao criar uma ideia ou conceito novo. Para o professor, o aluno sempre pode aprender, recriar o que já sabe e criar conhecimentos novos, “novas respostas para antigas perguntas e novas perguntas refazendo antigas respostas”.

Este é o modelo epistemológico que consideramos mais adequado e que, portanto, seguimos - o construtivismo. Pois é possível construir por meio de investigação, a partir do protagonismo do aluno, novos conhecimentos (não apenas reproduzi-los, mas [re]elaborá-los), sendo possível transformar, reconstruir, agir e desafiar-se, fazendo história e ajudando a ser e formar cidadãos na/para a cidadania.



Conforme Becker (2001) tem-se aqui a superação dos dogmas impostos pelos modelos citados anteriormente, pois professor e aluno desenvolvem juntos o trabalho, numa contínua troca de experiências e saberes.

Resultados

Como vimos Becker (2001) apresenta três diferentes formas de ensinar e de aprender em sala de aula, cabe ao pedagogo desenvolver sua *epistemologia* a partir de um modelo de ensino que mobilize seu raciocínio e, portanto, seu pensamento matemático, que em algumas vezes ainda é governado pelo outro – heteronomia.

Nesse sentido, a seguir apresentamos algumas falas dos pedagogos (alunos) que discutem sobre como deve o professor de matemática no século XXI, vejamos:

O professor do século XXI está sendo desafiado de tantas maneiras perante o processo de dinamização e na construção de conhecimentos, valores éticos, sociais, políticos.. que estão presentes na sociedade e que interferem na prática educativa. Vale ressaltar que esse profissional da educação tem que ter um olhar crítico perante a produção intelectual e educativa dos anos ou séculos anteriores com o intuito de refletir sobre o seu fazer pedagógico e a realidade vigente. O professor tem que assumir a postura de mediador e não como mero transmissor de conhecimento. Aliar o conhecimento instrucional com a realidade vivenciada buscando despertar a criticidade por parte dos educandos (aluno A).

Mesmo com todas as mudanças que ocorreram ao longo dos anos dentro da educação, é fato que a matemática ainda é vista de forma bastante tradicional, sem muito dinamismo, pela grande maioria dos alunos e até mesmo dos professores. Vale ressaltar que alguns casos se destacam no avanço desta disciplina, procurando alinhar o conhecimento do aluno a fim de que ele possa investigar e assim resolver as situações problemas de maneira útil. Um exemplo é o Enem, que em suas questões é notório o envolvimento da matemática nas questões como um desafio para o aluno proporcionando uma visão matemática. No meu ponto de vista percebo que em nossa formação como futuros pedagogos, precisamos aprender a ter esse olhar da visão matemática. Um olhar que nos possibilite reconstruir os conceitos matemáticos (aluno B).

Eu penso que um dos grande entraves enfrentados ainda no ensino da matemática sejam os métodos anacrônicos, que fındam por tornar enfadonho o seu aprendizado. De nada adiantará o uso das TIC ou qualquer outra ferramenta, sem a proporcionalidade de uma aula diferenciada, e aqui, refiro-me a uma aula que possa contemplar dinâmicas que explorem a curiosidade dos alunos, que possa captar a atenção desse aluno na aula de matemática, sem margem para o típico: "cansei dessa matéria chata! (Aluno C).

Temos um grande problema ainda hoje no ensino de matemática no Brasil. A maioria dos educadores trabalham com a metodologia tradicional e não fazem os alunos a pensar a matemática de forma a mexer com o seu raciocínio lógico e mental. O trabalho é realizado com fórmulas e conteúdo para decorar. Isso torna a disciplina um terror para grande parte dos alunos que sentem dificuldade e não gostam. Existe um desafio tanto dos licenciados em matemática como dos pedagogos em desenvolver metodologias para uma matemática que mexa com o imaginário e a mente dos estudantes tornando a matemática uma ciência criativa e produtiva. Só que nas universidades a formação do matemático é baseada no método tradicional e não valoriza novas forma de ensino e didática e alguns professores fogem essa regra. E na pedagogia o ensino de matemática é insuficiente para uma educação de qualidade de fato. O desafio é que dentro dessas limitações os educadores encontrem formas eficazes para melhorar o ensino de matemática (Aluno D).

Diante dos depoimentos acima, vale ressaltar que o entendimento e o desenvolvimento da *práxis* pedagógica e seus modelos epistemológicos, precisam ser melhores trabalhados durante as

disciplinas matemáticas, enfatizando não só os conteúdos, que são fundamentais, mas também despertá-los para o desenvolvimento de suas *construções epistemológicas*.

Considerações

Consideramos que a formação do pedagogo deve ter seus pressupostos na raiz epistemológica da Pedagogia, e fundar-se na premissa de que é essa a ciência que deve organizar a concretização dos meios e processos educativos por meio da investigação dos conhecimentos e saberes que se constituem historicamente, fundamentando as bases epistemológicas das diretrizes e orientações da *práxis* educativa. Assim, concluímos em linhas gerais que a formação matemática do pedagogo deve permear à questão da *práxis* pedagógica, como descrita nesse texto, visando o pedagogo como um professor de matemática, preocupado com a realidade educativa, com os processos de inovação a partir de modelos epistemológicos capazes de proporcionar uma formação do pedagogo como pesquisador, mediador dos processos de ensino e de aprendizagem. Por fim, caberá ao pedagogo transformar o senso comum pedagógico, em atos científicos, sob a luz de valores educacionais, para assim, interpretar sua *práxis* pedagógica sob a epistemologia dos conteúdos matemáticos, do 1º ao 5º ano dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Referências e bibliografia

- Becker, F. (2012). *Epistemologia do professor de matemática*. Petrópolis, RJ: Vozes.
- Becker, F. (2009). *Epistemologia do professor: o cotidiano da escola* (14ª Edição). Petrópolis, RJ: Vozes.
- Becker, F. (2001). *Educação e construção do conhecimento*. São Paulo: Artmed.
- Borges Neto, H., & Santos, M. J. C. (2006). O Desconhecimento das Operações Concretas e os Números Fracionários. In *Entre Tantos: Diversidade na Pesquisa educacional* (Vol.1, pp. 190-199). ed. Fortaleza: Editora UFC.
- Brasil. (1997). *Secretaria da Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais/PCN: Matemática*. Brasília: MEC/SEF.
- Brasil. (1999, 2001, 2003). *Sistema de Avaliação da Educação Básica*. Brasília: MEC/SEF.
- Brasil. (1998). *Fundo de Manutenção e Desenvolvimento do Ensino Fundamental e de Valorização do Magistério/FUNDEF*. Brasília: MEC/SEF.
- Carvalho, D. L. (1994). *Metodologia do ensino Matemática* (2ª Edição). São Paulo: Cortez.
- D'Ambrosio, B. S. (1993). "Formação de professores de matemática para o século XXI: o grande desafio". *Pró-posições*, v. 4, 1(10), 35-41.
- Machado, N.J. (1994). *Matemática e realidade* (3ª ed.). São Paulo-SP: Cortez.
- Machado, O, S. D. A. (1999). "Engenharia Didática". In A. Franchi, et al, *Educação Matemática: Uma introdução* (1ª ed.). São Paulo-SP. EDUC.
- Moreira, M. A. (1999). *Aprendizagem significativa* (1ª ed.). Brasília-DF: Universidade de Brasília.
- Mendes, Iran Abreu. (2001). *O uso da História da Matemática: reflexões teóricas e experiências*. EDUEPA. Belém.
- Miguel, A., & Miorim, M. A. (1986). *Ensino de Matemática*. São Paulo: Atual.
- Nunes, T. (1997). *Crianças fazendo Matemática*/ Terezinha Nunes e Peter Bryant (Trad. Sandra Costa). Porto Alegre: Artes Médicas.

Nunes, T. (2003). *Por que ainda há Quem não aprende?: A Teoria/* Esther Pillar Gossi, (Organizadora). Petrópolis, RJ: Vozes.

Piaget, J. (1976). *A equilibração das estruturas cognitivas*. Zahar Editores: RJ.

Perradeau, M. (1996). *Aprender de Outra Forma na Escola* (Tradução de Joana Chaves, 1ª ed.). Lisboa-Portugal: Armand Colin Éditeur.

A incongruência entre as palavras do enunciado do problema e a operação usada para resolvê-lo: uma contribuição para o debate

Sandra **Magina**

Universidade Estadual de Santa Cruz

Brasil

sandramagina@gmail.com

Eurivalda Ribeiro **Santana**

Universidade Estadual de Santa Cruz

Brasil

eurivalda@hotmail.com

Vera Lucia **Merlini**

Universidade Estadual de Santa Cruz

Brasil

vera.merlini@gmail.com

Resumo

O objetivo do presente estudo foi investigar a possível influência que a incongruência entre o enunciado de situações aditivas e a operação a ser realizada exerce sobre o desempenho de estudantes da 3ª série do Ensino Fundamental. Para tanto consideramos a Teoria dos Campos Conceituais e nas ideias de Vygostky no que tange à formação de conceitos espontâneos e não espontâneos. A amostra era de 98 estudantes da 3ª série do Ensino Fundamental, que responderam quatro situações-problema do Campo Aditivo, duas de menor complexidade e duas de maior nível de complexidade cognitiva. Em cada nível de complexidade havia situação-problema com incongruência entre palavras do enunciado e a operação a ser realizada e outra não. Os resultados mostram que a incongruência influenciou mais no desempenho dos estudantes do que o nível de complexidade das situações-problema. Sobre os tipos de erro, o procedimento mais frequente foi o uso da operação inversa.

Palavras chave: Situações-problema, Campo Aditivo, incongruência, formação de conceitos, Ensino Fundamental.

Introdução

Nas últimas décadas, vários estudos, na área de Educação Matemática, buscam compreender o baixo desempenho de estudantes das séries iniciais do Ensino Fundamental¹ ao resolverem situações-problema² que envolvem adição e/ou subtração. No Brasil, desde os idos

¹ Na época da recolha dos dados deste estudo o Ensino Fundamental brasileiro era composto por 8 séries, sendo que as quatro primeiras eram ensinadas por professores generalistas, que tinham responsabilidade pelo ensino de todos os conteúdos. Essas primeiras quatro séries eram chamadas de “séries iniciais do Ensino Fundamental”.

² Para este estudo, adotamos os termos situação-problema e situação como sinônimos. Usamos as duas formas durante todo o texto para nos referir aos problemas matemáticos em questão.

dos anos 70 do século passado, Franchi (1977, p. 123-124) já identificava tais desempenhos e os justificava explicando que a criança, costuma utilizar a experiência cotidiana que ela já tem com as palavras contidas no enunciado da situação-problema para ajuda-la a resolver essa situação, afirmando que “[...] condições do uso da linguagem produzem uma associação entre os significados dos termos “mais” e “juntar”, “acrescentar”, ..., “menos” e tirar”. Na década seguinte Hudson (1983) divulga estudo na mesma direção. Ele realiza uma pesquisa com 94 crianças de 4 a 8 anos, explorando situações de comparações cujos enunciados faziam uso de termos “quantos a mais”, “quantos a menos” e conclui que a dificuldade da criança está na compreensão linguística.

Na década seguinte Vasconcelos (1998) publica um artigo em que abordou modelos teóricos e práticas de ensino para a resolução de situações-problema aditivas. A autora colocava que as dificuldades dos estudantes na resolução das situações aditivas surgiam desde o 1º ano do Ensino Fundamental, continuavam nas séries seguintes e tinham parte de sua origem na forma como o ensino escolar estava estruturado. Essa autora enfatizava que a prática de ensino de resolução de situações-problemas de maneira geral se caracterizava por alguns aspectos, dentre esses, estava o trabalho com as “palavras-dica”, a partir de regras fornecidas para a criança, como:

Se a situação [...] envolve ganhar, [...], a operação a ser realizada é adição e, quando [...] for perder, [...], a operação é subtração”. Esse recurso tenta evitar a famosa pergunta: “tia essa conta é de mais ou de menos?”, e permite que diversos problemas sejam resolvidos [...], essa resolução é fruto não da compreensão das relações entre os dados do problema, mas, sim, da “dica” da palavra-chave. (Vasconcelos, 1998, p. 55).

Em seu estudo Vasconcelo (Ibid) já se apoiava nas considerações de Figueiredo (1985) que argumentava que, se o estudante aprendesse a resolver as situações por meio dessa prática, quando ele fosse defrontado com situação-problema em que a “palavra-dica” era incongruente com a operação a ser realizada, ele não conseguiria resolvê-la.

Mais recentemente, Campos et al. (2007), ao realizarem um estudo com o objetivo de comparar os desempenhos de estudantes de 1ª a 4ª série dos estados de São Paulo e Bahia, no que se refere à resolução de situações-problema aditivas, detectou que, em ambos os grupos, as crianças partem de patamares de sucesso muito baixos em situações que envolvem os conceitos de transformação de quantidades. As autoras justificaram tal resultado pela incongruência semântica que a situação-problema apresenta. O estudo ainda detectou que, enquanto o crescimento no percentual de acertos, por série, das crianças baianas é pequeno, esse crescimento é significativo entre as crianças do grupo paulista. Essa “trajetória crescente mostrada pelos estudantes de São Paulo pode significar que esses, através da instrução, conseguem cada vez mais superar essa ‘armadilha’, o que parece não ter acontecido com os estudantes da Bahia” (Campos et al., 2007, p. 234).

Na mesma direção dos estudos acima referidos, nossa pesquisa, que investigava os vários aspectos da apropriação e extensão do campo conceitual aditivo por estudantes de 3ª série, também encontraram comportamentos similares desses estudantes aos descritos pelos estudos acima. Por essa razão decidimos investigar especificamente a possível influência que a incongruência entre o enunciado de situações aditivas e a operação a ser realizada exerce sobre o desempenho de estudantes da 3ª série do Ensino Fundamental. O estudo se propõe, ainda, a

analisar os tipos de erros cometidos pelos estudantes quando a incongruência está presente ou quando está ausente³.

Fundamentação Teórica

A Teoria dos Campos Conceituais (TCC) é uma teoria cognitivista que foi desenvolvida pelo psicólogo, professor e pesquisador francês Gérard Vergnaud. Essa teoria tem uma forte herança da teoria de Piaget e, também, alguns pontos da teoria de Vygotsky.

Ela possibilita um diagnóstico referente à aprendizagem e oferece elementos por meio dos quais é possível basear a análise do desenvolvimento de competências e da aprendizagem de competências dos estudantes, as quais são consideradas complexas. Dessa forma, a sua finalidade principal é fornecer informações que tornam possível estudar as filiações e rupturas entre os conhecimentos⁴ do ponto de vista do saber fazer e dos saberes expressos envolvidos.

Para Vergnaud (1982) o conhecimento pode ser visto dentro de Campos Conceituais e pode ser entendido como um “conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações estruturas, conteúdos e operações do pensamento, conectados uns com os outros e, provavelmente, entrelaçados durante o período de aquisição” (Vergnaud, 1982, p.40). Assim, o domínio de um campo conceitual que ocorre dentro de um longo período de tempo, envolve a maturação, experiência e aprendizagem da pessoa.

Para Vergnaud (1996, 2009), um conceito não pode ser reduzido a sua definição, pelo menos quando nos interessa a sua aprendizagem e o seu ensino. Nesse sentido, estamos assumindo o termo conceito como a formulação de uma ideia através das palavras e do pensamento; e o termo definição como o ato de determinar a extensão e os limites de um objeto ou assunto. Um conceito não tem sentido em si mesmo, mas adquire sentido quando está envolvido numa situação-problema a ser resolvida (Ibid. 1996).

Na TCC, a construção de um conceito envolve uma terna de conjuntos, a qual é representada simbolicamente por $C=(S, I, R)$, em que:

S é um conjunto de situações que tornam o conceito significativo; **I** é um conjunto de invariantes (propriedades e relações) que podem ser reconhecidos e usados pelo sujeito para analisar e dominar essas situações; **R** conjunto de formas pertencentes e não pertencentes à linguagem que permitem representar simbolicamente o conceito, as suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (o significante). (Vergnaud, 1996, p. 166).

O conjunto de situações é o referente do conceito, os invariantes são os significados do conceito, enquanto que as representações simbólicas são os significantes.

Na TCC, a situação é colocada no sentido de tarefa, de modo que toda situação complexa pode ser vista como uma combinação de tarefas. Quando nos referimos ao desempenho dos estudantes nas tarefas com as quais são confrontados, somos direcionados a analisar esse

³ Estamos utilizando o termo “incongruência” como o antônimo de “congruência”, isto é, ‘a ausência do ato de concordância, de coincidência; a inexistência de uma relação direta entre uma coisa ou fato com o fim a que se destina’ (Michaelis, 1998, p. 562).

⁴ Podemos pensar, por exemplo, na filiação entre os conhecimentos relativos às estruturas aditivas e às multiplicativas, considerando que uma das filiações poderia ser a ideia de que multiplicar é formar grupos de mesma quantidade de elementos repetidas vezes, o que envolve uma estrutura aditiva nessa contagem de grupos.

processo a partir de cada subtarefa, pois o desempenho em cada subtarefa afeta o desempenho global.

Dessa forma, são as situações que dão sentido aos conceitos, tornando-se o ponto de entrada para um dado Campo Conceitual. Contudo, um só conceito precisa de uma variedade de situações para tornar-se significativo. Da mesma maneira, uma só situação precisa de vários conceitos para ser analisada. Ao organizar a sua ação diante de uma dada situação, o estudante está lançando mão de esquemas de ação que, de acordo com Vergnaud (1996), são geralmente compostos, de forma essencial, por invariantes operatórios.

A partir dessa visão geral da TCC, focaremos, na sequência, no campo conceitual aditivo, ou simplesmente estruturas aditivas, já que nosso artigo restringiu-se a essas estruturas.

As Estruturas Aditivas

De acordo com Vergnaud (1996) as estruturas aditivas são, ao mesmo tempo, o conjunto das situações cujo tratamento implica uma ou várias adições ou subtrações, e o conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar essas situações como tarefas matemáticas. Nessa direção, ele coloca que a análise da aprendizagem dessas estruturas requer que se leve em consideração as mudanças ao longo do tempo e, também, o uso do modelo de uma operação unária. Além disso, deve-se considerar que existem fatores inatos a própria criança, dentre eles podemos citar os procedimentos e os erros.

Dessa forma, ao analisar o desempenho do estudante é preciso considerar os fatores: mudanças que ocorrem com o passar do tempo, bem como a dimensão (unidimensional, bidimensional, tridimensional) na qual o estudante opera os elementos envolvidos na situação.

A classificação, em categorias de relações, para as situações-problema aditivas, foi feita com vistas a ajudar na interpretação dos procedimentos e, conseqüentemente, dos erros que os estudantes fazem ao tentar resolver as situações. Segundo Vergnaud (1982), essa classificação oferece uma estrutura teórica que permite entender o significado das diferentes representações simbólicas da adição e da subtração, além de servir como base para o desenho de experimentos sobre esses processos matemáticos.

Vergnaud restringe a análise das relações aditivas a seis relações ternárias⁵ fundamentais, e deixa explícita tal restrição: “as relações aditivas são relações ternárias que podem ser encadeadas de diversas maneiras e resultar em uma grande variedade de estruturas aditivas” (Vergnaud, 2009, p. 200).

Compreendemos que as seis categorias apresentadas pelo autor estão baseadas na relação entre três elementos – que podem ser estados, transformações ou relações – que se entrelaçam de maneira a gerar a estrutura de situações-problema aditivas. Seguindo essa concepção, o autor as nomeou da seguinte maneira: composição; transformação; comparação; composição de duas transformações; transformação de uma relação; e composição de duas relações.

Tomando como base os seis esquemas ternários fundamentais apresentados na Teoria dos Campos Conceituais e conservando os raciocínios básicos definidos por Vergnaud (1982, 1991, 1996), Magina e cols. (2008) ampliaram as possibilidades de relações dentro de cada situação-problema e, conseqüentemente, dentro de cada categoria.

⁵ “Relações ternárias são aquelas que relacionam três elementos entre si.” (Vergnaud, 1991, p. 16).

Magina et al. (2008) apresentou uma subdivisão das três primeiras categorias determinadas por Vergnaud (1982, 1991, 1996) (composição, transformação e comparação) em subcategorias, as quais vão de protótipos a extensões. Para a classificação em extensões, as autoras colocam: “[...] as extensões não tratam de níveis de desenvolvimento estanques a serem alcançados, mas, sim, de um conjunto de situações-problema que possibilitarão à criança ampliar sua representação sobre essas estruturas.” (Magina et al., 2008, p. 33). Segundo as autoras, as extensões são estabelecidas seguindo o percurso de apropriação do conceito feito pela criança. Nos resultados dos estudos realizados por Campos et al. (2007) e Santana et al (2008) tem-se que as dificuldades dos estudantes aumentam a medida que o percurso das extensões vão aumentando, ou seja, nas extensões menores os estudantes obtêm melhores desempenhos, e nas maiores, piores desempenhos. Abaixo apresentamos a Classificação de Magina et al (2008), a partir de uma ordem crescente de complexidade das extensões.

Protótipos: nessa extensão encontram-se as situações de menor complexidade e podem ser de composição quando são dadas as partes e se pede o todo, ou de transformação, quando são dados o estado inicial e a transformação, e se pede o estado final. Segundo Magina et al (2008), são situações em que a maior parte das crianças, antes de entrar nas séries iniciais do Ensino Fundamental, não apresenta dificuldades para resolver.

1ª extensão: As situações de 1ª extensão podem ser de composição, quando são dados uma parte (ou mais) e o todo, e se busca outra parte, ou de transformação, quando são dados o estado inicial e o final, e se pede a transformação.

2ª extensão: As situações de 2ª extensão são apenas de comparação quando são dados o referente⁶ e a relação, e se busca o referido.

3ª extensão: Assim como na 2ª extensão, aqui também se trata de situação de comparação em que é dado o valor do referente e do referido, e se busca a relação entre eles.

4ª extensão: As situações de 4ª extensão podem ser de comparação, quando são dados o referido e a relação, e se busca o referente, ou de transformação, quando são dados a transformação e o estado final, e se busca o estado inicial.

Uma vez apresentada a TCC e em especial a estrutura aditiva e, ainda, a classificação dessa estrutura proposta por Magina et al (2008) a partir de sua interpretação da TCC, apresentamos a seguir as ideias de Vygotsky no que tange à formação de conceitos espontâneos e não espontâneos (em particular os conceitos científicos). Tais ideias nos interessam porque notamos que muitas vezes os estudantes respondem às situações-problema matemáticos ancorados nos conceitos espontâneos.

Conceitos espontâneos e não espontâneos

Vygotsky (2001) explica que esses dois tipos de conceitos, embora tenham origens e desenvolvimentos distintos, completam-se no processo de aprendizagem da criança. O conceito espontâneo está relacionado a situações vivenciadas pela criança no seu cotidiano, por meio de suas experiências ao interagir com os objetos a sua volta. Não raro, em muitas atividades a criança faz uso dele sem, contudo, ter consciência disso. A não consciência vem do fato que a

⁶ Referente e referido são termos usado por Magina et al. (2008) para identificar as medidas da categoria comparação. Estou definindo-as como: referente é a medida tomada como referência, isto é, a partir dela é que se determina o valor da outra medida; referido é a medida referida, aquela que depende da referência.

sua atenção está voltada para a sua interação com o objeto e não com o conceito por meio do qual ela interage com esse objeto. Um exemplo de uma situação em que a presença (e uso) do conceito científico é utilizado pela criança, sem que ela tenha consciência disso, é o ato de andar de bicicleta. Para que uma pessoa possa andar de bicicleta ela precisa estar em consonância com os conceitos de equilíbrio, de energia, de força. Porém, ela muito provavelmente não tem consciência disso, tampouco seria esse seu foco de interesse. Tudo o que ela quer é interagir com o objeto bicicleta. E mais, se pedirmos a uma criança (e a maioria dos adultos) para nos ensinar a andar de bicicleta, isto é, se perguntarmos como se aprende a andar de bicicleta, obteremos respostas evasivas ou do tipo: “sente no selim, segure o guidão e pedale. Talvez você caia nas primeiras vezes, mas depois vai dar certo”. Aqui houve a formação dos conceitos espontâneos de equilíbrio. Força e energia. Nas aulas de Física esses conceitos ser-lhe-ão ensinados e nesse momento haverá a formação do conceito científico, aquele que desde o início é apreendido de maneira generativa para ser utilizado em n situações.

De maneira simplificada, podemos tomar que uma das diferenças entre os dois tipos de conceitos é que enquanto os conceitos espontâneos são apropriados para dar conta de uma situação particular e aprendidas longe da escola, o científico tem um domínio de validade amplo, valendo para n situações. Isto implica em dizer que o conceito espontâneo é ascendente – forma-se na vivência de uma situação e pode, eventualmente, expandir-se – enquanto o conceito científico segue caminho descendente – forma-se na escola e sua abrangência é generativa, podendo, se bem apropriado, caminhar para explicar e/ou ser utilizado em uma situação particular.

Os conceitos (formados a partir da apropriação de seu significado) expressos por meio de palavras surgem espontaneamente, em ambientes fora da escola. Palavras como “mais”, “ganhar”, “receber” costumam ser vivenciadas em situações que levam a um aumento de quantidade. Ao chegar à escola tais palavras tendem a serem ressaltadas pelo professor quando esses estão ensinando a operação de adição. Elas vão servir de “dica” para que a criança identifique com mais facilidade a operação que deve utilizar para resolver um determinado problema. De maneira análoga, palavras como “perder, menos, emprestar” servirão de *dicas* para a utilização da operação de subtração.

Não vemos mal algum em se lançar mão de conceitos espontâneos para o ensino de conceitos científicos. Nossa preocupação reside quando tais palavras são ressaltadas ao extremo a ponto de substituir o ensino de determinado conceito. Ao invés de trabalhar o raciocínio aditivo do estudante, de forma a estimular que este forme e expanda tal conceito, não raro esse elo associativo entre a palavra dica e operação a ser usada para resolver uma situação é a única estratégia de ensino do professor. Nesse caso apenas o conceito espontâneo estaria sendo trabalhado, pois a criança não mais teria que raciocinar sobre a operação, mas sim usaria a operação em um ato automático, tal qual acontece com os conceitos de força, equilíbrio e energia no ato de andar de bicicleta.

O Estudo

O estudo apoiou-se nos paradigmas da pesquisa descritiva. Tratou-se de um estudo que teve por objetivo conhecer e interpretar determinados fenômenos ligados à realidade sem nela interferir para modificá-la (Rudio 2001). Dessa forma, o presente estudo investigou a possível influência que a incongruência entre o enunciado de situações aditivas e a operação a ser realizada exerce sobre o desempenho de estudantes da 3ª série do Ensino Fundamental. O estudo

se propõe, ainda, a analisar os tipos de erros cometidos pelos estudantes quando há incongruência no enunciado e quando não há.

Para tanto, foi aplicado um teste em 98 estudantes de quatro classes da 3ª série do Ensino Fundamental de uma escola pública do estado da Bahia, Brasil. O teste foi composto de 18 questões que contemplavam diversas situações do Campo Conceitual Aditivo, aplicado coletivamente aos estudantes que o responderam individualmente. A aplicação foi conduzida por uma das pesquisadoras.

Para efeito deste artigo analisaremos o desempenho e erros cometidos pelos estudantes em quatro questões. Duas das questões envolviam situações de transformação, dentro da classe de 1ª extensão, sendo que um dos enunciados apresentava incongruência e o outro não. As duas questões restantes envolviam situações de comparação, dentro da classe de 3ª extensão e seus enunciados também se distinguiam pela presença ou ausência da incongruência.

Abaixo apresentamos as quatro questões que são analisadas neste artigo. Para facilitar as análises comparativas, enumeramos as questões de transformações de 1ª extensão com o número **1** e as de comparação de 3ª extensão com o número **2**. No que tange à presença ou ausência de congruência, as questões **A** são aquelas que apresentam congruência e as **B** as que não apresentam congruência (há incongruência entre os enunciados e as operações requeridas para resolver as questões).

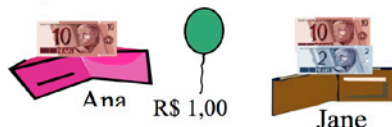
Situação de Transformação de 1ª extensão	
Questão 1A (Q1A) COM congruência CARINE TINHA SORVETES EM SEU ISOPOR. SUA PRIMA TOMOU ALGUNS DOS SORVESTES DE CARINE. VEJA O DESENHO.  CARINE QUER SABER QUANTOS SORVETES DELA SUA PRIMA TOMOU.	Questão 1B (Q1B) SEM congruência CARLOS TINHA 4 BOLAS DE GUDE. GANHOU ALGUMAS E AGORA ELE TEM 10 BOLAS DE GUDE. QUANTAS BOLAS ELE GANHOU?
Situação de Comparação de 3ª extensão	
Questão 2A (Q2A) COM congruência LEILA TEM R\$ 9,00. CLÁUDIO TEM R\$ 13,00. QUEM TÊM MENOS REAIS? QUANTOS REAIS A MENOS?	Questão 2B (Q2B) SEM congruência DUAS MENINAS TÊM DINHEIRO NAS CARTEIRAS, O DESENHO ABAIXO MOSTRA QUANTOS REAIS TEM DENTRO DA CARTEIRA DE CADA UMA DELAS. ELAS QUEREM COMPRAR BALÕES. CADA BALÃO CUSTA R\$1,00.  A) QUEM PODE COMPRAR MAIS BALÕES? B) QUANTOS BALÕES A MAIS ELA PODE COMPRAR?

Figura 1: As quatro situações-problema do estudo.

De posse dos resultados, a análise foi estruturada em duas partes: uma quantitativa e outra qualitativa. A análise quantitativa refere-se ao desempenho dos estudantes considerando: (a) análise global dos desempenhos nas quatro questões, e (b) congruência versus incongruência, dentro de cada situação/extensão (transformação de 1ª extensão e comparação de 3ª extensão) e entre situações/extensão. A análise qualitativa, por sua vez, será realizada com base na

identificação dos tipos de erros. A próxima seção será destinada para apresentação e análise dos resultados.

Análise dos Resultados

Iniciamos esta análise apresentando os desempenhos gerais dos estudantes nas quatro situações-problema. Para tanto apresentamos a figura 2, a qual traz um gráfico, acompanhado de uma tabela que traz os resultados obtidos nos testes estatísticos do qui-quadrado.

Os resultados apontam que o melhor desempenho (54,08%) ocorreu na situação de transformação de 1ª extensão, quando não existia incongruência entre palavras do enunciado e a operação a ser realizada, e o mais baixo desempenho ocorreu na comparação de 3ª extensão, quando ocorreu incongruência entre palavras do enunciado e a operação a ser realizada.

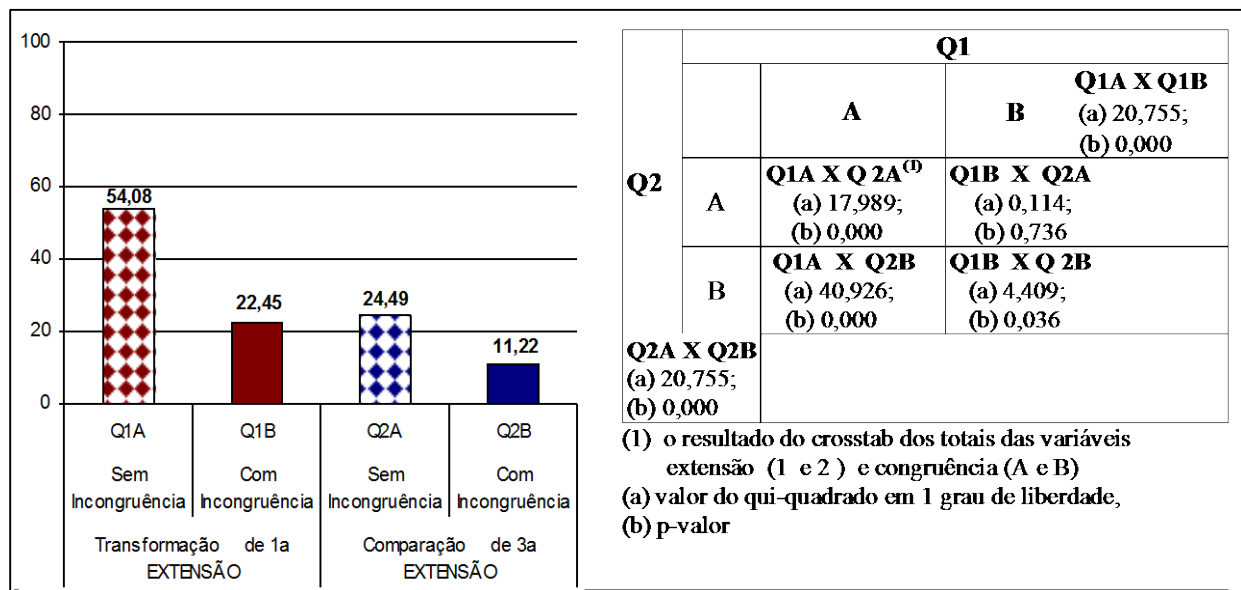


Figura 2: Gráfico com os percentuais de acerto das quatro situações-problema, acompanhado de tabela que mostra os resultados obtidos nos testes estatísticos do qui-quadrado.

O desempenho dos estudantes, tanto ao comparar as duas situações de transformação quanto as duas de comparação, foram estatisticamente diferentes. Isso significa que as situações que apresentavam incongruência entre as palavras do enunciado e a operação necessária para resolver a situação, apresentaram percentuais de acerto significativamente inferior as que se encontravam na mesma extensão, mas sem tal incongruência. Revela-se aqui que, mesmo tendo a mesma estrutura e envolvendo os mesmos conceitos matemáticos, as situações que apresentam incongruência mostraram-se mais difíceis para os estudantes do que aquela em que tal incongruência não aparece.

Esses resultados nos permitem pensar que a incongruência exerceu forte influência no desempenho desses estudantes. Tal influência se mostrou tão efetiva a ponto de não provocar diferença significativa entre o desempenho dos alunos numa questão com incongruência de 1ª extensão e na questão de 3ª extensão sem incongruência. Em outras palavras, parece que a incongruência foi um fator de dificuldade tão grande que o desempenho dos estudantes em um problema classificado como de 1ª extensão, quando o ser enunciado apresentava incongruência com a operação a ser utilizada, ficou no mesmo níveis de acertos que no problema de 3ª extensão em que o enunciado era congruente com a operação.

Considerações Finais

O ponto inicial de nossas considerações dizem respeito a necessidade de se realizar mais pesquisas sobre a influência de fatores linguísticos no desempenho das crianças ao resolverem problemas matemáticos que apresentem enunciados pautados em situações da vida cotidiana das pessoas, colocados em língua natural. Esses estudos poderiam, por exemplo, avançar pesquisando um maior número de situações e, ainda, pesquisar com estudantes de diferentes níveis de escolarização.

Tal ponderação implica no reconhecimento de que nossa pesquisa investigou poucas situações e, ainda, que pesquisou apenas poucos estudantes e todos de um mesmo ano escolar. Contudo, nós acreditamos que nossos resultados trazem algumas considerações pedagógicas interessantes para a Educação Matemática, uma vez que eles foram contundentes..

A nossa hipótese é que os procedimentos adotados pelos estudantes desta pesquisa, podem ser reflexo da maneira pela qual é introduzida para o estudante a resolução de situações-problema aditivas. De fato, com o intuito de oferecer ao estudante uma maneira eficaz de identificar qual operação ele deve realizar para resolver uma situação-problema, existe certa cultura em se relacionar a escolha da operação a algumas palavras.

Assim, se no enunciado da situação constam palavras tais como “adicionar”, “mais”, “ganhar”, “receber”, chama-se atenção para elas no sentido de estarem relacionadas à operação de adição. Da mesma forma, quando em um enunciado há palavras como “perder”, “dar”, “menos”, “emprestar”, então se deve realizar uma operação de subtração. Essas “dicas” são válidas para muitas situações-problema, principalmente as que são classificadas como protótipos (as mais trabalhadas na escola), ou, de maneira geral, quando existe congruência entre a “palavra-dica” e a operação a ser realizada.

Elas, contudo, estão longe de ter validade universal, por isso, muitas vezes conduzem o estudante a resolver incorretamente situações não tão sofisticadas, como, por exemplo, aquelas enquadradas em situações de transformação de 1ª extensão, do tipo “*Maria tem 4 bonecas, ganhou algumas no seu aniversário e agora tem 9 bonecas. Quantas bonecas ela ganhou?*” Ao se deter na palavra *ganhou* como indicador da operação a ser realizada, o estudante termina por realizar uma adição com os valores 4 e 9, chegando ao resultado errôneo de 13 bonecas, ao invés das 5 bonecas que Maria teria ganhado no aniversário.

No presente estudo, a escolha da operação inversa foi o procedimento de erro de maior incidência. Ocorreu mais frequentemente nas situações-problema que apresentavam incongruência entre uma palavra do enunciado e a operação escolhida pelo estudante. Apesar desse procedimento ter surgido em situações-problema de transformação (1ª e de 4ª extensões) e em comparação (3ª e 4ª extensões), as maiores repetições ocorreram nas situações de transformação de 1ª extensão e comparação de 4ª extensão, sendo um pouco mais incidente nessa última. Após a intervenção de ensino, elas continuaram mais recorrentes na comparação de 4ª extensão. Esses resultados trazem evidências da relação desse tipo de erro com a complexidade inerente à categoria e à incongruência entre a palavra e a operação.

Dessa forma, as evidências levam a inferir que o grau de complexidade da situação é efetivamente um fator que deve ser levado em consideração quando se analisa a escolha do estudante pela operação inversa.

Referências bibliográficas

- Campos, T. ; Magina, S ; Cazorla, I. ; Santana, E. (2007). As estruturas aditivas nas séries iniciais do Ensino Fundamental: um estudo diagnóstico em contextos diferentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, México, v. 10, p. 219-239.
- Figueiredo, A. M. (1985). A resolução de problemas de matemática no primeiro grau e o uso de palavras-chave como método de ensino. Dissertação de Mestrado. Mestrado em Psicologia, Universidade Federal de Pernambuco.
- Franchi, A. (1977) *O problema do ensino da subtração na 1ª série do 1º grau*. Master thesis, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo: PUC/SP.
- Hudson, T. (1983). Correspondences and numerical differences between Sets. *Child Development*, 54, 84-90.
- Michaelis (1998) *Moderno dicionário da língua portuguesa*. São Paulo: Melhoramentos.
- Magina, S.; Campos, T. M. M.; Nunes, T. e Gitirana, V. (2008). *Repensando Adição e Subtração: Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais*. São Paulo: PROEM 3ª edição.
- Rudio, F. V. (2001) *Introdução ao Projeto de Pesquisa Científica*. Petrópolis: Vozes, 32ª ed.
- Santana, E. R. S.; Magina, S.; Cazorla, I.; Campos, T. M. M. (2008). What relations can we make between primary teacher's conceptions and students performance regarding to additive structures? An analysis of two studies in brazilian schools. In: 11th International Congress on Mathematical Education, 2008, Morélia-México. *Anais do 11th International Congress on Mathematical Education*, p. 1-7.
- Vasconcelos, L. (1998) Problemas de adição e subtração: modelos teóricos e práticos de ensino. In. Shliemann, A.; Carraher, D. (Org.). *A compreensão de conceitos aritméticos: ensino e pesquisa*. Campinas, São Paulo: Papyrus, 1998. p. 53-72.
- Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. In Carpenter, T., Moser, J. e Romberg, T. (Eds.), *Addition and subtraction: a cognitive perspective*. Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum, 39-59.
- _____. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(23), 133-170.
- _____. (1994). Epistemology and Psychology of Mathematics Education. In Nesher, P. and Kilpatrick, J. (Ed.). *Mathematics and Cognition*. Cambridge: Cambridge University Press.
- _____. (1997). The nature of mathematical concept. In Nunes, T and Bryant, P. (Ed.) *Learning and Teaching Mathematics*. Sussex: Psychology Press
- _____. (1998). A Comprehensive Theory of Representation for Mathematics Education. *JMB*, 17(2), p.167-181.
- _____. (2009) *A criança, a Matemática e a Realidade: problemas do ensino da matemática na escolar elementar*; trad. Maria Lucia Moro. Curitiba: UFPR press.
- Vygotsky, L. (2001). *A Construção do Pensamento e da linguagem*. Tradução de Bezerra, P. São Paulo:

A não congruência das palavras nas situações de comparação multiplicativa: quando ‘vezes mais’ vira divisão

Vera **Merlini**

Universidade Estadual de Santa Cruz

Brasil

vera.merlini@gmail.com

Rogério **Pires**

Universidade Estadual de Santa Cruz

Brasil

rpires25@bol.com.br

Eurivalda **Santana**

Universidade Estadual de Santa Cruz

Brasil

eurivalda@hotmail.com

Resumo

O objetivo desse estudo é pesquisar o desempenho e as estratégias de resolução de estudantes do 3º ao 9º ano do Ensino Fundamental de escola pública, frente a situações do campo conceitual multiplicativo no que se refere à comparação multiplicativa. O aporte teórico está baseado em Vergnaud (1990, 1994, 2009) no que concerne ao Campo Conceitual Multiplicativo, e em Duval (2009, 2011) no que diz respeito a congruência e não congruência da linguagem. Os dados foram coletados de um estudo piloto¹ com 15 situações do Campo Conceitual Multiplicativo, com 14 estudantes do Ensino Fundamental, realizado em duas escolas públicas do sul da Bahia. Esse artigo versa sobre o desempenho e estratégia de resolução dos estudantes em duas situações, referentes à comparação multiplicativa. A partir dos resultados obtidos é possível inferir que as expressões *vezes mais* e *vezes menos* utilizadas nessas situações influenciam na escolha das estratégias de resolução dos estudantes.

Palavras chave: Campo Conceitual Multiplicativo, estudo diagnóstico, Situações-problema, congruência, não congruência, Ensino Fundamental.

Introdução

O ensino formal das operações de multiplicação e divisão nas escolas brasileiras, acontece no final do 3º ano e, de modo geral, tem como ponto de partida a adição de parcelas repetidas. Esse comportamento pressupõe a exploração da continuidade entre o raciocínio aditivo e multiplicativo em que a multiplicação é tida como uma maneira mais rápida eficaz para se resolver situações de adições de parcelas repetidas.

¹ Esse estudo é parte do Projeto Um estudo sobre o domínio das Estruturas Multiplicativas no Ensino Fundamental, do Programa Observatório da Educação financiado pela CAPES.

Esse procedimento pode ser visto nos estudos de Merlini (2012) e Santos (2012) que mostram a crença dos professores o desempenho de seus estudantes, em situações do campo multiplicativo, passa, necessariamente, no domínio de tabelas de multiplicar. Isso significa alegar que ao memorizar a tabuada o estudante poderá resolver com sucesso situações envolvendo as operações de multiplicação e divisão, qualquer que seja, garante o domínio conceitual.

Por outro lado, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (Brasil, 1997) sugerem que o professor trabalhe o conteúdo, seja ele qual for, a partir de situações problema, asseverando que

O ponto de partida da atividade matemática não é a definição, mas o problema; o problema não é um exercício em que o aluno aplica, de forma quase mecânica, uma fórmula ou um processo operatório; aproximações sucessivas ao conceito são construídas para resolver certo tipo de problema; num outro momento, o aluno utiliza o que aprendeu para resolver outros; o aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas; a resolução de problemas não é uma atividade para ser desenvolvida paralelo ou como aplicação da aprendizagem, mas uma orientação para a aprendizagem, pois proporciona o contexto em que se pode apreender conceitos, procedimentos e atitudes matemática (1997, p.43).

Esta ação docente proposta pelos PCN (Brasil, 1997) vem ao encontro das ideias teóricas de Vergnaud (1990, 1994, 2009) no que se refere ao conjunto de situações que dão sentido ao campo conceitual multiplicativo além dos estudos de Magina et.al. (2010) que tratam da competência dos estudantes e da concepção dos professores do Ensino Fundamental I nas diferentes situações do campo conceitual em questão.

Isso posto, temos que o objetivo desse artigo é pesquisar o desempenho e as estratégias de resolução de estudantes do 3º ao 9º ano do Ensino Fundamental de escola pública, frente a duas situações do campo conceitual multiplicativo referentes à comparação multiplicativa.

Fundamentação Teórica

Para subsidiar esta pesquisa escolhemos como aporte teórico, mais apropriado, o Campo Conceitual de Vergnaud (1990), em especial o que diz respeito ao Campo Conceitual Multiplicativo (Ibid, 1994, 2009). Assim, segundo o autor, podemos nos referir a um Campo Conceitual Multiplicativo com sendo um conjunto de situações, cuja análise e tratamento requerem vários tipos de conceitos, procedimentos e representações simbólicas, os quais se encontram em estreita conexão uns com os outros. Entre os conceitos atrelados a esse campo conceitual destacamos: as funções lineares e n-lineares, o espaço vetorial, a análise dimensional, a fração, a razão, proporção, número racional, multiplicação e a divisão.

Tendo como base as ideias teóricas de Vergnaud (1990, 1994, 2009), elaboramos um esquema, retratado na Figura 1, que objetiva descrever, de forma sucinta, as ideias centrais desse campo. Desse modo, a Estrutura Multiplicativa está dividida em duas partes: relações quaternárias e relações ternárias. A primeira parte é formada por dois eixos: proporção simples e proporção múltipla, sendo que cada uma delas são constituídas por duas classes de situações (um para muitos e muitos para muitos), e estas podem ser exploradas levando em consideração os dois tipos de quantidades, quais sejam, contínua e discreta.

A segunda parte da Estrutura Multiplicativa diz respeito às relações ternárias, que também contemplam dois eixos: comparação multiplicativa e produto de medidas, sendo que cada uma dessas partes também apresenta subdivisões. No eixo referente à comparação multiplicativa, esta é composta por duas classes: relação desconhecida e referido/referente desconhecido. Situações

dessa classe admitem os dois tipos de quantidades, discreta e contínua. O eixo produto de medidas, apresenta duas classes de situações distintas: configuração retangular em que permite trabalhar apenas com quantidades do tipo contínua e a combinatória, que, por sua vez, permite trabalhar somente com quantidade discreta.

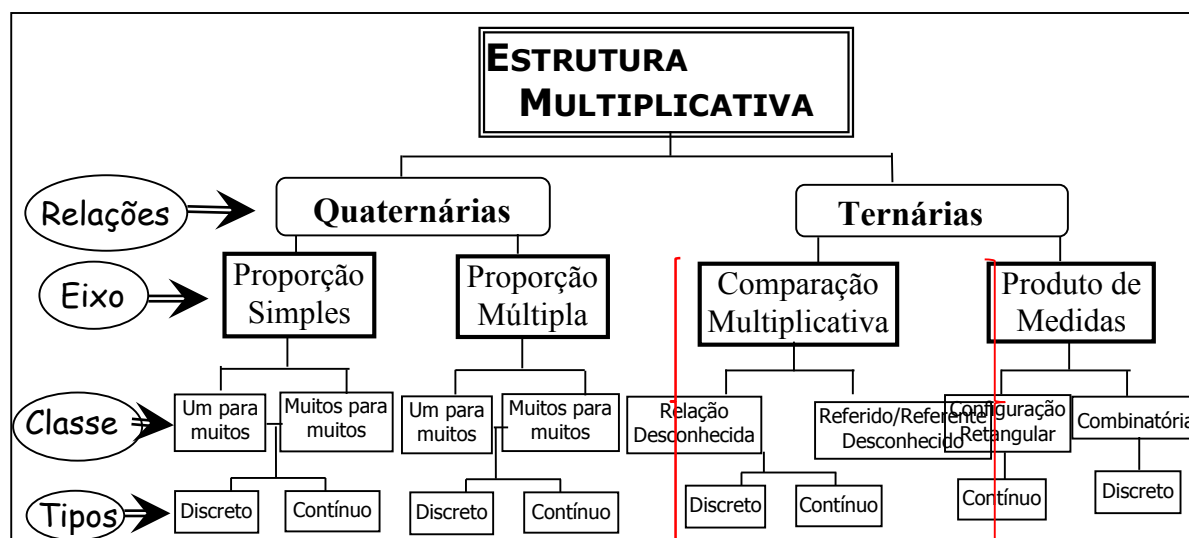


Figura 1. Esquema das Estruturas Multiplicativas elaborado por Magina, Santos e Merlini, 2012.

Cabe ressaltar que para este artigo, não nos deteremos na exploração de todas as situações desse campo conceitual, uma vez que nos limitamos a discutir o desempenho e as estratégias de resolução utilizadas pelos estudantes em situações da relação ternária, especialmente, nas relacionadas ao eixo da comparação multiplicativa.

As situações, que fazem parte dessa classe, comparam duas quantidades de mesma natureza exigindo que pensemos numa relação ternária. Situações simples, como dobro ou metade, podem ser exploradas já no início da escolarização, o que poderíamos considerar como sendo os protótipos² da comparação multiplicativa. Para ilustrar destacamos a seguinte situação:

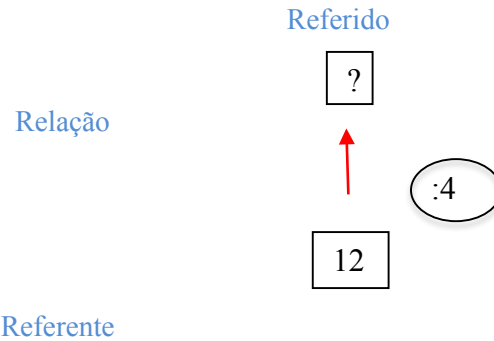
Maria tem o dobro da quantidade de João. Se Maria tem R\$ 10,00, qual é a quantia de João?

Para além desses protótipos, existem situações mais elaboradas que exigem do estudante um maior nível cognitivo. A título de ilustração, apresentamos três exemplos de situações, sendo que o primeiro trata do referido desconhecido, o segundo do referente desconhecido e o último da relação desconhecida e suas respectivas análises.

Exemplo 1: *Na loja um carrinho custa R\$ 12,00. Sabendo que o carrinho custa 4 vezes mais do que um jogo de memória, qual o valor do jogo de memória?*

Podemos representar essa situação no seguinte esquema:

² Empregamos o termo protótipo no sentido de uma situação elementar. O primeiro representante de uma determinada classe de situação.

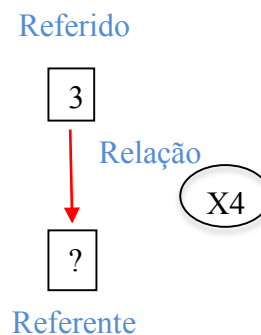


Na situação do exemplo 1, conhecemos o referente (*o preço do carrinho*), a relação (*quatro vezes mais*) e solicita o valor do referido, ou seja, que se calcule o preço do jogo de memória comparativamente ao preço do carrinho. Nesse caso, a divisão é a operação requerida para a resolução, que pode ser representada por: $\text{referente} \div \text{relação} = \text{referido}$ (R\$ 12,00 $\div$ 4 = R\$ 3,00).

Passaremos para o próximo exemplo:

Exemplo 2: *Na loja o valor do jogo de memória é 4 vezes menos do valor de um carrinho. Sabendo que o jogo de memória custa R\$ 3,00, quanto custa o carrinho?*

Podemos representar essa situação no seguinte esquema:

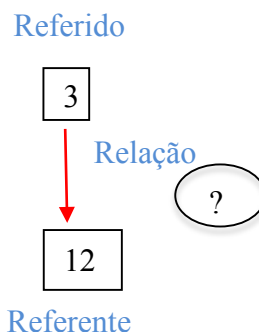


No exemplo 2, é dado o valor do referido (*o preço do jogo de memória*) e a relação (*quatro vezes menos*) e é solicitado o valor do referente (*o preço do carrinho*). A operação requerida, mais apropriada para sua resolução, é a multiplicação. Nesse caso, $\text{referido} \times \text{relação} = \text{referente}$ (R\$ 3,00 $\times$ 4 = R\$ 12,00).

Com último exemplo temos:

Exemplo 3: *Comprei um carrinho por R\$ 12,00 e um jogo de memória por R\$ 3,00. Quantas vezes o carrinho foi mais caro que o jogo de memória?*

Esse exemplo também é possível representá-lo no seguinte esquema:



No terceiro exemplo proposto é dado o referente (*preço do carrinho*), o referido (*preço do jogo de memória*) e pede-se a relação (*quantas vezes mais*) entre os dois preços. Esse tipo de situação requer, para sua resolução, uma operação de divisão, isto é: $\text{referente} \div \text{referido} = \text{relação}$. Cabe salientar que, se o que se deseja descobrir é a relação entre duas quantidades (nesse exemplo 3 a quantidade é o valor dos brinquedos) não importa a expressão, *vezes mais* ou *vezes menos*, a operação requerida para sua resolução será a divisão.

As situações do campo conceitual multiplicativo, que trouxemos nos três exemplos, que envolvem a ideia de comparação multiplicativa podem revelar dificuldades de compreensão mesmo em estudantes mais experientes. Dessa forma é razoável supor que esta dificuldade pode estar atrelada não na habilidade de efetuar a operação de multiplicação/divisão, mas sim na complexidade de compreender o enunciado da situação, de modo a identificar qual operação matemática seria a mais adequada para sua resolução. Esta suposição se apoia no fato que situações de comparação multiplicativa que trazem em seu enunciado expressões como *dobro*, *triplo* ou *metade*, são apresentadas aos estudantes desde cedo e, comumente, não apresentam dificuldades na resolução.

No entanto, destacamos o fato de que na Matemática, os objetos de conhecimento são abstratos, diferente de outras ciências como na Biologia, por exemplo, que quando se estuda um determinado tipo de célula, é possível ter acesso direto ao objeto, estudando a própria célula. Já na Matemática esse acesso não se dá de maneira direta, ele ocorre por meio das representações semióticas do objeto de estudo. Assim, se falamos de uma circunferência, é necessário explorar tal ente matemático por meio de sua representação gráfica, da sua equação, de uma descrição em língua materna, etc.

Desse modo, a mobilização, a manipulação e a coordenação de registros de representação de um objeto são fundamentais na atividade matemática, pois é nesses três aspectos que ela está alicerçada. Neste sentido, Duval (2009) salienta que para um saber matemático ser colocado em funcionamento, é necessário que o aprendiz não manipule apenas um registro, mas pelo menos dois, e que saiba coordenar esses registros, pois a articulação entre eles e a capacidade de fazer a troca entre eles todo momento que for necessário é que determina o quão habilidoso em Matemática é o indivíduo.

Quanto as transformações entre os registros de representação, elas acontecem de duas maneiras completamente distintas: os tratamentos e as conversões. Um tratamento consiste em uma transformação de uma representação semiótica em outra equivalente, permanecendo no mesmo sistema, ou seja, é uma transformação de representação interna a um registro ou sistema. Um exemplo de tratamento é quando temos a representação fracionária $\frac{5}{15}$ e por meio de

processos de simplificação chegamos a $\frac{1}{3}$. Note que houve uma transformação na representação, porém a maneira de registrar permaneceu a mesma, ou seja, o sistema não foi alterado.

Já as conversões se constituem em transformações de uma representação semiótica em outra equivalente, mudando o sistema ou o registro, mas mantendo a referência ao mesmo objeto. Um exemplo disso é quando temos a representação do número decimal 0,25 e ela é transformada em sua representação fracionária $\frac{1}{4}$, sendo possível perceber que o objeto permaneceu o mesmo que é um número racional, contudo o registro foi alterado, ou seja, mudou o sistema.

Considerando as conversões, a tradução dos dados do enunciado de um problema da linguagem natural para as escritas simbólica, numérica ou algébrica, é uma conversão das diferentes expressões linguísticas em outras expressões simbólicas. Entretanto, é fundamental em uma conversão, saber distinguir o objeto da sua representação, ou seja, não confundir a representação com o objeto de conhecimento. Nessa perspectiva, as conversões merecem lugar de destaque na atividade matemática, pois são elas que permitem analisar o funcionamento cognitivo do indivíduo e o quão ele conhece o objeto matemático em jogo.

Nessa direção, a conversão é algo indispensável na tarefa matemática e, normalmente, é a primeira coisa que fazemos quando nos deparamos com uma situação e tentamos resolvê-la. Porém, a maioria dos problemas matemáticos são apresentados na linguagem natural, e de acordo com Duval (2011) existe uma desconexão entre linguajar utilizado na Matemática e aquele empregado fora dela. Segundo o autor, na maioria das vezes os termos e expressões em linguagem natural aplicados na Matemática não tem conexão com aqueles praticados, espontaneamente, fora dela. E, ainda de acordo com esse mesmo autor, também existe um distanciamento cognitivo considerável entre a linguagem natural e os outros registros.

Somado a isso, também estão em jogo os fenômenos de congruência e não congruência presentes na conversão entre registros. Dizemos que uma conversão é congruente quando ela acontece de maneira quase que imediata, sendo possível observar em ambos os sentidos da conversão uma correspondência termo a termo entre as unidades significantes do registro de partida e as mesmas do registro de chegada. Um exemplo desse fenômeno é quando convertemos o enunciado “o dobro de um número” da linguagem natural para a expressão “ $2x$ ”. Observando tal conversão percebemos que é possível estabelecer uma correspondência termo a termo entre as unidades significantes do registro de partida com aqueles do registro de chegada, e também, notamos que a conversão no sentido contrário ocorre com a mesma naturalidade.

Agora, quando a conversão não acontece de forma imediata e as unidades significantes não são suficientes para realizar tal transformação de maneira direta, quase que natural, estamos diante do fenômeno de não congruência. Ao converter a informação que é dada em língua natural “o conjunto dos pontos que pertencem ao eixo y ” para a expressão “ $x=0$ ”, percebemos que não é possível estabelecer uma correspondência entre as unidades significantes do registro de partida com as do registro de chegada e a conversão no sentido oposto não acontece de maneira espontânea.

Nos exemplos citados anteriormente, principalmente o 1 e 3, apresentam uma não congruência entre as palavras utilizadas no enunciado da situação e a operação requerida para sua resolução, o que sugere que o grau de dificuldade da situação atinja patamares mais elevados. Isso significa que o estudante ao se deparar com as expressões *vezes mais* ou *vezes*

menos nem sempre associam com operações do campo conceitual multiplicativo, seja de multiplicação ou divisão. E mesmo que a palavra *vezes* levasse o estudante a relacionar com a operação de multiplicação, esta não seria a operação indicada para a resolução desses dois exemplos especificamente. No exemplo 2, a expressão utilizada é *vezes menos* e a operação requerida para a resolução é a multiplicação, ou seja, há uma não congruência entre a expressão e a operação. Contudo, como há uma congruência entre a palavra *vezes* e a operação de multiplicação, o estudante poderá simplesmente ignorar a palavra *menos* da expressão.

Em suma, não podemos afirmar que a expressão *vezes mais* sempre nos remete à operação de multiplicação (exemplo 1 e 3), assim como a expressão *vezes menos* nem sempre a operação mais indicada para sua resolução é a divisão (exemplo 2). Isso significa afirmar que, ao se tratar de situações do campo conceitual multiplicativo que contemplam a comparação multiplicativa na perspectiva do ensino, cabe ao professor um trabalho cuidadoso com expressões e/ou palavras-chaves que aparecem ao longo da escolaridade, independentemente do nível escolar. Citamos, por exemplo, situações do campo conceitual aditivo que, comumente, é associado a verbos como *ganhar* ou *perder* com as operações de adição e subtração, respectivamente.

Em seus estudos Santana (2010) investigou estudantes do 4º ano do Ensino Fundamental e constatou que o sucesso desses estudantes ao resolverem situações do campo conceitual aditivo estava atrelado não só à complexidade das extensões, como também a congruência entre as palavras do enunciado e a operação necessária para resolver a situação.

Isso posto, é possível que a congruência e a não congruência entre as expressões utilizadas no enunciado das situações aditivas, se apresentem de modo similar na resolução das situações multiplicativas, em particular aquelas relacionadas com a ideia de comparação multiplicativa, em que as expressões *vezes mais* ou *vezes menos* possam ser traduzidas por duas operações consecutivas, multiplicação e adição para a primeira expressão e multiplicação e subtração para a segunda. Cabe ressaltar que, nem sempre a expressão *vezes mais* reflete como solução a operação de multiplicação (vide exemplo 1 e 3), o mesmo acontece com a expressão *vezes menos* que nem sempre está relacionado com a operação de divisão (vide exemplo 2). Em outras palavras, as expressões *vezes mais* ou *vezes menos* em situações de comparação multiplicativa poderão requerer como operação mais indicada para a solução tanto a multiplicação como a divisão, dependendo do contexto em que estão inseridas.

O fenômeno da não congruência, a desconexão entre os termos da língua natural utilizados na Matemática com aqueles empregados fora dela e o distanciamento cognitivo que existe entre a língua natural e os outros registros da Matemática é o que torna difícil a conversão dos enunciados da linguagem natural para a representação em outro registro, podendo ser esse aspecto causador de boa parte das dificuldades dos estudantes na resolução de problemas. Em suma, podemos inferir que esses aspectos linguísticos interferem na escolha da estratégia de resolução dos estudantes e, conseqüentemente, no seu desempenho em situações em que aparecem tais expressões.

O Estudo

Trata-se de um estudo apoiado nos princípios da pesquisa descritiva, o qual o pesquisador tem por objetivo conhecer e interpretar determinados fenômenos ligados à realidade sem nela interferir para modificá-la (Rudio, 2001).

Desse modo, nesse artigo faremos a análise do desempenho e das estratégias utilizadas pelos estudantes em duas situações do campo conceitual multiplicativo. É oportuno salientar que os dados os quais analisaremos, referem-se a duas situações extraídas de um estudo piloto aplicado a 18 estudantes do 1º ao 9º ano (dois estudantes de cada ano escolar), de duas escolas públicas do sul do estado da Bahia. Este instrumento foi constituído por 15 questões todas do campo conceitual multiplicativo. Contudo, como os resultados do diagnóstico dos estudantes do 1º e 2º ano teve efeito de chão, ou seja, não houve acerto, para efeito desse artigo, estamos considerando para a análise somente os protocolos dos estudantes do 3º ao 9º ano, tendo um total de 14 protocolos.

A coleta de dados desse estudo piloto procedeu de modo semelhante nas duas escolas. Dois estudantes de cada ano, escolhidos pela professora, foram encaminhados a uma sala onde estavam a coordenadora da escola acompanhada de três pesquisadores. O instrumento foi aplicado coletivamente pela coordenadora da escola com a supervisão dos pesquisadores. A coordenadora, para garantir a compreensão, leu em voz alta todas as situações. Após esse procedimento, foi dado um tempo para que todos os estudantes pudessem resolver, individualmente, cada situação.

Consideraremos para efeito desse artigo, a análise de duas situações do instrumento piloto, necessariamente aquelas que se referem à comparação multiplicativa. Desse modo, analisaremos o desempenho e as estratégias de resolução de 14 estudantes do 3º ao 9º ano do Ensino Fundamental, dois estudantes de cada ano escolar, nas duas situações de comparação multiplicativa, apresentadas na figura 2.

<i>Situação 1: Felipe comprou uma pipa por 5 reais e uma bola por 4 vezes mais. Quanto custou a bola?</i>	<i>Situação 2: Ontem Tonho ganhou 18 figurinhas. E hoje ele ganhou 3 vezes menos. Quantas figurinhas ele ganhou hoje?</i>

Figura 2. As duas situações do estudo piloto a serem analisadas.

A situação 1 trata-se de uma situação envolvendo a ideia de comparação multiplicativa que se conhece o referente (preço da pipa) e a relação (4 vezes mais) e é solicitado o referido (preço da bola). Na situação 2, também é dado o referente (quantidade de figurinhas ontem) a relação (3 vezes menos) e é procurado o valor do referido (quantidade de figurinhas hoje). As operações requeridas na primeira e na segunda situação são, respectivamente, a multiplicação e a divisão.

A partir dos resultados, a análise foi estruturada sob duas perspectivas: quantitativa e qualitativa discutidas na próxima seção.

Análise dos Resultados

Nessa seção apresentamos, a partir dos resultados obtidos, a análise que foi estruturada sob dois aspectos: um quantitativo e outro qualitativo. A análise quantitativa refere-se ao desempenho dos estudantes nas duas questões, a qualitativa refere-se à identificação dos tipos de estratégia utilizadas pelos estudantes, tanto aquelas que levaram ao sucesso como ao fracasso.

Iniciamos a análise quantitativa observando a Tabela 1 que apresenta o desempenho dos 14 estudantes, distribuídos em dois grupos: o grupo 1 (G1) composto pelos seis do Ensino Fundamental I e, o grupo 2(G2) composto pelos oito estudantes do Ensino Fundamental II, nas duas situações que dizem respeito ao eixo da comparação multiplicativa.

Tabela 1

Quantidade de acertos nas situações 1 e 2 dos estudantes do Ensino Fundamental I e II

	G1 6 estudantes	G2 8 estudantes	Total
Situação 1	6	6	12
Situação 2	1	2	3
Total	7	8	15

Os dados da tabela 1 apontam que na situação 1 tivemos resultados satisfatórios nos dois grupos, demonstrando que os estudantes não tiveram dificuldade na sua resolução, visto que tivemos quase a totalidade de acerto. Em contrapartida, ao observamos os dados dessa mesma tabela na situação 2 os estudantes não tiveram o mesmo êxito, visto que somente três dos 14 responderam corretamente. Esse resultado mostra que a situação 2 na qual a não congruência presente na conversão do registro de partida para o registro de chegada pode ter sido o fator determinante para o insucesso.

Passamos para a análise qualitativa das estratégias utilizadas pelos estudantes do G1 e G2, tanto aquelas que levaram ao sucesso quanto as que acarretaram o fracasso.

Das estratégias bem sucedidas, salientamos que a maioria dos estudantes utilizou o algoritmo da multiplicação, contudo a estratégia empregada por dois estudantes do G1, ambos do 3º ano, foi a pictórica, conforme mostra o protocolo a seguir:

Felipe comprou uma pipa por 5 reais e uma bola por 4 vezes mais. Quanto custou a bola?

Resolução

5 0 0 0 0
 4 0 0 0 0
 0 0 0 0 0
 0 0 0 0 0

Resposta 20

Figura 3. Protocolo do estudante 1231 do G1 referente a situação 1.

Como vimos na tabela 1, na situação 1 foi possível observar apenas dois erros, nos quais num deles a estratégia de resolução estava correta, o estudante apresenta a conta de multiplicação 5×4 , porém ele comete um equívoco no cálculo, dando como resposta o número 25. O segundo erro está atrelado a um equívoco na escolha da estratégia, pois o estudante lança mão de uma operação de subtração entre os dados contidos na situação 1, ou seja, ele apresenta a conta

$$5 - 4 = 1.$$

Uma justificativa o sucesso da maioria dos estudantes nessa situação, pode residir no fato de que a conversão exigida para a resolução da situação é congruente sendo, possível estabelecer uma relação imediata entre as unidades significativas do registro de partida (*vezes mais*) com as mesmas do registro de chegada (multiplicação). Esse fato, segundo Duval (2009, 2011), é esperado, pois as situações que exigem uma conversão congruente são as mais trabalhadas pelos professores.

Com relação à situação 2, conforme observamos na tabela 1, tivemos apenas um acerto no G1 e dois no G2. Nesses protocolos, pudemos notar que em dois deles os estudantes (um de cada grupo) fizeram uso do algoritmo da divisão e no terceiro apresentou apenas a resposta.

Quanto ao insucesso nessa situação, identificamos nos protocolos, dos dois grupos, que a estratégia, em sua maioria, contemplava a operações referentes à estrutura aditiva. No G1, três estudantes utilizaram a operação de subtração, conforme exposto na figura 4:

Ontem Tonho ganhou 18 figurinhas. E hoje ele ganhou 3 vezes menos. Quantas figurinhas ele ganhou hoje?

Resolução

$$\begin{array}{r} 18 \\ -3 \\ \hline 15 \end{array}$$

Resposta 15 figurinhas

Figura 4. Protocolo do estudante 1152 do G1 referente a situação 2.

Analisando o protocolo da figura 4 é possível perceber que existe uma congruência entre o registro de partida (a situação em linguagem natural: *vezes menos*) e o registro de chegada (a estratégia e/ou resposta do estudante), pois o estudante estabeleceu uma relação termo a termo entre as unidades significantes do registro de partida (*menos*) com aquelas do registro de chegada (subtração). Além disso, a expressão *vezes menos*, que comporta o termo *menos*, em contexto fora da matemática está, necessariamente, associado a uma perda, contudo, na matemática esse termo pode ganhar outras conotações dependendo da situação.

Nesse mesmo grupo, duas respostas também fazem referência à estrutura aditiva, contudo nos dá alusão que utilizaram a adição dos números contidos na situação 1. Podemos inferir que a escolha desta operação se deu pelo fato de que a situação apresenta nas três frases a palavra “ganhou” e, pode ter induzido o estudante fazer a adição. Um protocolo apresenta somente a resposta (21) e no outro o estudante explicita sua estratégia de maneira pictórica, conforme a figura a seguir:

Ontem Tonho ganhou 18 figurinhas. E hoje ele ganhou 3 vezes menos. Quantas figurinhas ele ganhou hoje?

Resolução

Resposta 21

Figura 5. Protocolo do estudante 1231 do G1 referente a situação 2.

Na situação 2 é possível perceber que existe uma não congruência entre o registro de partida (a situação em linguagem natural, *ganhou*) e o registro de chegada esperado (a estratégia

e/ou reposta do estudante), pois não é possível estabelecer uma relação termo a termo entre as unidades significantes do registro de partida com aquelas do registro de chegada.

De acordo com Duval (2011) esses fatores e mais o distanciamento cognitivo existente entre os registros em linguagem natural e aqueles específicos da Matemática podem ser os causadores do fracasso dos estudantes.

Considerações Finais

Este artigo teve por objetivo investigar o desempenho e as estratégias de resolução dos estudantes do 3º ao 9º ano do Ensino Fundamental em duas situações pertencentes ao campo conceitual multiplicativo envolvendo a ideia da classe da comparação multiplicativa. Julgamos que, apesar do número diminuto de nossa amostra, os resultados obtidos favorecem algumas considerações relevantes.

Na situação 1 uma justificativa plausível para o sucesso da maioria dos estudantes nessa situação, pode residir no fato de que a conversão exigida para a resolução da situação é congruente sendo, possível estabelecer uma relação imediata entre as unidades significativas do registro de partida (*vezes mais*) com as mesmas do registro de chegada (multiplicação). Outra justificativa que poderíamos supor é que situações que exigem uma conversão congruente são as mais trabalhadas pelos professores.

Em contrapartida, na situação 2 tivemos, das 14 possíveis respostas, apenas três corretas. No enunciado da situação 2 é possível perceber que existe uma não congruência entre o registro de partida (linguagem natural) e o registro de chegada esperado (a estratégia e/ou reposta do estudante). A congruência existe entre os termos do enunciado (*vezes menos*) e a resposta do estudante ao fazer a subtração entre os números descritos na situação 2, ou seja, o estudante estabeleceu uma relação termo a termo entre as unidades significantes do registro de partida com aquelas do registro de chegada.

Os dados apontam que as dificuldades encontradas em situações que envolvem a comparação multiplicativa não residem diretamente no ato de efetuar a operação de multiplicação e/ou divisão, mas sim podem estar relacionadas na congruência e não congruência presentes na conversão entre registros. Não é raro que os termos e expressões na linguagem natural aplicados na Matemática não têm relação com aqueles praticados, espontaneamente, fora dela, existindo distanciamento cognitivo considerável entre a língua natural e os outros registros.

Em síntese, essas considerações nos levam aos postulados da teoria *vergnaudiana* em que um conceito matemático passa a ter sentido a partir de uma variedade de situações e, ainda, que a uma situação está atrelada a vários conceitos. Em outras palavras, uma situação, por mais simples que seja, envolve mais que um conceito, e um conceito não poderá ser apropriado pelo estudante ao lidar apenas com um tipo de situação. Assim sendo, para que haja a apropriação do conceito da estrutura multiplicativa por parte do estudante, ao professor cabe trabalhar tanto as relações quaternárias quanto as ternárias. No que se refere a essa última, para o eixo da comparação multiplicativa, seria interessante começar por situações tidas como protótipos, quais sejam, aquelas que envolvem a relação de dobro e metade.

Referências

- Brasil. (1997) *Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Fundamental (Matemática)*. Brasília.
- Duval, R. (2009). *Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais* (Tradução de Lênio Fernandes Levy & Marisa Rosâni Abreu da Silveira). São Paulo: Livraria da Física.
- Duval, R. (2011). *Ver e ensinar matemática de outra forma: entrar no modo matemático de pensar os registros de representação semiótica*. In T. M. M. Campos (Org.), Tradução de Marleide Alves Dias. São Paulo: Proem.
- Magina, S., Merlini, V. Santos, & Aparecido dos. (2012) A estrutura multiplicativa sob a ótica da teoria dos campos conceituais: uma visão do ponto de vista da aprendizagem. In *3 Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* (pp. 1-12). Fortaleza.
- Merlini, V. (2012). *As potencialidades de um processo formativo para a reflexão na e sobre a prática de uma professora das séries iniciais: um estudo de caso* (Tese de Doutorado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.
- Rudio, F.V. (2001). *Introdução ao projeto de pesquisa científica* (29ª ed.). Petrópolis: Vozes.
- Santana, E. (2010). *Estrutura Aditiva: o suporte didático influencia a aprendizagem do estudante?* (Tese de Doutorado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- Santos, Aparecido dos. (2012). *Processos de formação colaborativa com foco no campo conceitual multiplicativo: um caminho possível com professoras polivalentes* (Tese de Doutorado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10(23), 133-170. Grenoble.
- Vergnaud, G. (1994). Multiplicative conceptual field: what and why? In H. Guershon, & J. Confrey (Eds.), *The development of multiplicative reasoning in the learning of mathematics* (pp. 41-59). Albany, N.Y.: State University of New York Press.
- Vergnaud, Gérard (2009). *A criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino da matemática na escola elementar* (Trad. Maria Lucia Moro). Curitiba: UFPR press.

A Sequência Fedathi na formação inicial do pedagogo para o ensino de Geometria básica: a importância da sessão didática

Romilson Gomes **dos Santos**
Universidade Federal do Ceará
Brasil

romilson@multimeios.ufc.br

Maria José Costa **dos Santos**
Universidade Federal do Ceará
Brasil

mazeautomatic@gmail.com

Marta Alves **da Silva**
Universidade Federal do Ceará
Brasil

marta@multimeios.ufc.br

Resumo

O presente artigo relata a utilização de sessões didáticas¹, fundamentadas nos pressupostos teórico-metodológicos da Sequência Fedathi, e com o auxílio das tecnologias digitais para o ensino de Matemática, especificamente, nos conteúdos da Geometria Básica realizadas durante a disciplina de Tópicos de Educação Matemática, no Curso de Pedagogia da Faculdade de Educação/FACED/UFC. Objetivou-se compreender a metodologia de ensino da Sequência Fedathi como proposta didática, que pode contribuir de forma significativa para ensino de Matemática. A pesquisa foi de natureza quantitativa e qualitativa, realizadas na sala de aula. Como resultados constatou-se que a SF como proposta pedagógica contribui para o ensino dos conteúdos matemáticos e na mudança de postura do professor. Dessa forma, as sessões didáticas, planejadas a partir dos pressupostos metodológicos da Sequência Fedathi, se constitui numa relação pedagógica adequada para auxiliar a formação matemática do pedagogo, no que se refere aos conteúdos de Geometria Básica, da referida disciplina.

Palavras chave: Sequência Fedathi, Sessão didática, ensino de Matemática, Formação do Pedagogo, *Software* GeoGebra.

Introdução

A Geometria Básica é um ramo da Matemática que cada vez mais se destaca no âmbito do ensino de Matemática, pois, vem passando por momentos de evolução provocados pela inserção das tecnologias digitais e de novas propostas de organização de ensino, devido às possibilidades de proporcionar o desenvolvimento do raciocínio matemático em diferentes áreas do conhecimento, inclusive dentro da própria matemática, sendo o referido conteúdo inserido nas

¹ Sessão didática: termo que na proposta da Sequência Fedathi é usado para designar a aula.

Matrizes Curriculares dos cursos de Pedagogia. Na Faculdade de Educação (FACED) da Universidade Federal do Ceará (UFC), por exemplo, o referido conteúdo está presente nas disciplinas Ensino de Matemática e Tópicos de Educação Matemática no Curso de Pedagogia nos turnos diurno e noturno.

Para Turner, Blackledge e Andrews (1998) define a Geometria como um ramo da matemática preocupada com questões de forma, tamanho, posição relativa de figuras e com as propriedades do espaço, sendo posta em forma axiomática por Euclides. Com isso, existem fatores como proposta de ensino e recursos tecnológicos inseridos na formação inicial do pedagogo, que contribuem para o surgimento de problemas no ensino que comprometem a aprendizagem do aluno e, conseqüentemente o uso em seus campos de atuação profissional.

Considera-se, que além dos problemas detectados, tais como: as práticas pedagógicas; inserir recursos tecnológicos nos conteúdos abordados, bem como a formação matemática do pedagogo, que esses problemas e dificuldades se agravam ainda mais, diante de posturas tradicionalistas de ensino que norteiam as ações docentes em sala de aula. No entanto, existe a falta de um olhar voltado para a formação inicial do pedagogo em relação ao domínio dos conteúdos de matemática e a postura do professor em seus métodos, suas estratégias, forma de interagir com a turma e com o saber ensinado.

Frente a esse olhar a metodologia de ensino Sequência Fedathi se preocupa em trabalhar e proporcionar para o docente e discente um maneira diferenciada de ensinar e aprender a matemática, ainda contribuindo para o desenvolvimento de conceitos que aprimorem a aprendizagem do aluno.

Face aos problemas que ocorrem no âmbito do ensino de Matemática, especificamente no conteúdo de Geometria Básica, que o Ministério da Educação, no ano de 2014, busca desenvolver ações para viabilizar mudanças de paradigmas na Matemática. Da mesma forma, o Programa Nacional de Alfabetização na Idade Certa (PNAIC), especificamente, a Alfabetização Matemática (BRASIL, 2014) traz algumas ações que visam: contribuir no debate sobre os direitos de aprendizagem das crianças do ciclo de alfabetização; processos de avaliação e acompanhamento de aprendizagem das crianças; planejamento e avaliação das situações didáticas voltadas para a melhoria da qualidade do ensino no Ciclo de Alfabetização.

Em relação ao desenvolvimento dessas ações e a mudança de paradigma no ensino de Matemática de forma mais clara e objetiva, a SF aponta que o *plateau*² é imprescindível para que o professor tenha consciência do nível de conhecimento dos alunos, ou seja, se têm condições de assimilar o conteúdo a ser abordado levando em consideração seu histórico de vida sobre o contexto da matemática.

De acordo com Santos (2007) a Sequência Fedathi, se caracteriza por possibilitar que o aluno vivencie a experiência Matemática, e por exigir do professor uma atitude diferente, as quais estão acostumadas a ver nas salas de aula, ou seja, ela espera que o professor tenha o hábito de estudar em grupo, pesquisar, motivar e intermediar o trabalho do aluno, bem como intervir pedagogicamente, e conseqüentemente, formalizar esse trabalho.

Por outro lado, a formação inicial do pedagogo para o ensino de Matemática vem sendo considerada um dos grandes desafios para a educação, pois, um dos caminhos a trilhar em busca

² *Plateau* - segundo a Sequência Fedathi, é o nível de conhecimento do sujeito em relação ao conteúdo a ser trabalhado

de alternativas de inserir novas estratégias de ensino nas atividades em sala de aula é na formação do pedagogo. Desse modo, o foco do problema da pesquisa se apresenta na seguinte forma: Como se apresentam os conteúdos de Geometria Básica para a formação matemática dos alunos de Pedagogia?

Diante dessas questões e em busca por possíveis soluções apontou-se a importância das sessões didáticas da Sequência Fedathi (SF) com o uso das tecnologias digitais na formação inicial do pedagogo para o ensino de Matemática. De acordo com Sousa *et al.* (2013) a Sequência Fedathi defende essa perspectiva de ensino através da elaboração de propostas de ensino que motivem os estudantes a agirem como protagonista do conhecimento, trabalhando por descobertas e construção de conceitos sob a devida mediação e assistência ao docente.

Por isso, a partir da vivência e das observações em sala de aula no período de 2013.2 e 2014.1 na disciplina Tópicos de Educação Matemática, realizou-se uma prática interativa e observacional, com o desenvolvimento das etapas (explicadas no tópico 3) elaboradas pela SF que são: Tomada de posição, Maturação, Solução e Prova, através da aplicação das sessões didáticas da SF com o uso do *software* GeoGebra, na sala de aula do Curso de Pedagogia da Faculdade de Educação (FACED) da Universidade Federal do Ceará (UFC). A investigação teve como objetivo analisar as contribuições da sessão didática fundamentada na metodologia de ensino Sequência Fedathi com a interação das tecnologias digitais aplicados nos conteúdos de Geometria Básica na formação inicial do pedagogo.

A pesquisa configurou-se, numa abordagem de caráter bibliográfico a ser consultado através de materiais já publicados em fontes como: artigos científicos, sites educativos, periódicos (CAPES), revistas internacional e nacional de Educação Matemática e livros, de natureza qualitativa e quantitativa. O *lôcus* de investigação foi uma sala de aula com 19 alunos em 2013.2 e 11 alunos no ano de 2014.1 regularmente matriculados na disciplina de Tópicos de Educação Matemática do Curso de Pedagogia da Faculdade de Educação (FACED) da Universidade Federal do Ceará.

Além disso, após a aula presencial os alunos utilizaram os fóruns de discussão do ambiente virtual TelEduc para socializar entre eles e a docente as temáticas que foram discutidas na aula. O uso desse ambiente é de suma importância, pois é um momento de troca de conhecimento, esclarecimento das dúvidas e informações virtualmente entre professor e aluno, servindo ainda para aqueles alunos que nas aulas presenciais não expõem seus pontos de vista sobre o conteúdo abordado.

Dessa forma, nos levou a reflexões constantes sobre as diversas possibilidades e oportunidades que se tem para ter um ensino mais interativo, dinâmico e colaborativo, especificamente para o ensino de Matemática, visando a SF como proposta pedagógica para mudança de paradigmas no ensino da Matemática e contribuindo para formação inicial do pedagogo.

Planejamento de aula fundamentado na Sequência Fedathi na disciplina Tópicos de Educação Matemática

As ideias propostas na metodologia de ensino nessa 'sessão didática' objetivou apontar sugestões didáticas para melhoria na prática docente. Assim, usou a Sequência Fedathi (SF), por se tratar de uma metodologia que dentre outras ações didáticas e pedagógicas, incentiva à

investigação e a descoberta pelos alunos, em relação aos conteúdos matemáticos abordados, no qual propiciou para o aluno uma maior autonomia na construção de sua aprendizagem.

Ainda mais, a metodologia de ensino SF visa nortear a concepção da prática pedagógica antes, durante e depois das sessões didáticas para o planejamento do professor na elaboração da aula, a qual possibilitou a sistematizar e desenvolver as etapas: Tomada de Posição, Maturação, Solução e Prova.

Desse modo, o planejamento é a preparação da sessão didática norteador para a execução da aula, nesse momento a SF é de suma importância, pois, de acordo com a referida sequência o professor deve ter feito inicialmente a análise ambiental (são as ferramentas disponíveis no local da aula) e a análise teórica que compreendem: o diagnóstico do *plateau* (nível de conhecimento e experiência do aluno acerca do assunto a ser abordado). Houve uma preocupação nesse momento inicial com o direcionamento da pergunta de maneiras e visões distintas, bem como na escolha do material e o *locus*. O ponto de partida deve ser uma situação compreendida e entendida pelos alunos, tomando como referência o *plateau* do aluno.

Normalmente, a partir do *plateau*, o avanço necessita de mais atividades lúdicas ou interpretações, usando analogias, contraexemplos, bem como perguntas reflexivas e desafiadoras. De acordo com Sousa *et al.* (2013) essas perguntas tem como objetivo levar o aluno a fazer descobertas, estimulando o pensamento criativo do aluno, podendo gerar uma cadeia de outros questionamentos.

Não é simples nem usual para o professor ter esse tipo de reflexão durante uma sessão didática. Por isso a SF propõe que o professor elabore qualitativamente todas as etapas da metodologia durante a preparação da referida sessão. Tendo como objetivo compreender significativamente os conhecimentos matemáticos explorados na Geometria Básica, subsidiado pelos pressupostos metodológicos da SF por meio das propriedades das figuras geométricas, bem como entender as diversas maneiras de encontrar as áreas, perímetro, simetria e diagonais.

Nessa aula, apresentou-se a metodologia de ensino SF com o uso das tecnologias digitais (no caso, o *software* GeoGebra) com a finalidade de proporcionar uma interatividade entre professor, aluno e os conteúdos matemáticos, promovendo desafios e instigando o aluno a construir suas próprias hipóteses acerca do que está sendo abordado, nessa aula utilizou a figura geométrica paralelogramo.

Outro ponto importante preconizado pela SF é o acordo didático definido como o conjunto de regras que regem a relação na sala de aula envolvendo professor –aluno- conteúdo, prevista na concepção da sessão didática pensada pelo professor, mas objetivando atender as expectativas também dos alunos.

Então, nessas atividades, o professor esperou que os alunos participassem ativamente das ações didáticas em todos os momentos. Já o aluno esperava que o professor os orientasse na atividade, de forma didática que os possibilitassem a avançar na atividade proposta, oferecendo ferramentas didáticas instigando-os a chegar à solução do problema proposto.

Para tanto nessa aula é relevante considerar o desenvolvimento do pensamento matemático, além da construção dos conceitos sobre as figuras geométricas, os quais norteiam as atividades através da interatividade e participação entre professor-aluno-conteúdo, possibilitando uma aprendizagem significativa.

Dessa forma, o professor deve mediar o trabalho em sala de aula para que o aluno possa resolver a situação que lhe foi apresentada. Para isto poderá elaborar hipóteses, escolher e definir estratégias de investigação em busca da solução para a situação apresentada.

Análise do uso da metodologia de ensino Sequência Fedathi durante a sessão didática

A presente sessão didática foi desenvolvida durante as observações em dois semestres 2013.2 e 2014.1 com a finalidade de analisar a Sequência Fedathi como metodologia de ensino com o uso do *software* GeoGebra (disponível em <http://www.geogebra.org>) como recurso didática no conteúdo de Geometria Básica para a formação matemática do pedagogo, proposta no ensino de Matemática dos alunos do Curso de Pedagogia FAGED da UFC.

A Geometria faz parte da história da matemática que nos acompanha desde o princípio da humanidade, pois nos permite explorar o espaço em que vivemos, tais como: elementos naturais, material, localização, tamanho, forma, função, artes, imagens e cor. Assim, estudar a Geometria Básica a partir da formação inicial do pedagogo torna-se relevante, pois, permitirá ao aluno desenvolver as diversas formas de explorar a geometria, como: estabelecer as relações entre as figuras uni, bi e tridimensionais; entender o espaço físico, em especial o da sala de aula e o mundo de forma tridimensional; identificar as diferentes dimensões por meio da visualização, explorar as propriedades da geometria espacial nos conteúdos matemáticos, as caracterizações de objetos, suas propriedades, atribuir propriedades em objetos, caracterizando-os e diferenciando-os.

Com a finalidade de compreender o desenvolvimento da Geometria Básica na formação inicial do pedagogo, apresentada e construída com figuras geométricas, como: quadrado, retângulo, triângulo e paralelogramo. Elegeu-se o paralelogramo por se tratar de uma figura construída a partir de outras figuras e por ser um polígono de quatro lados (quadrilátero) são iguais e paralelos dois a dois, por consequência tem ângulos opostos e iguais.

Desse modo, como foi escolhido o paralelogramo para se trabalhar nessa aula, o problema proposto para os alunos resolver foi: ‘o paralelogramo tem 9 cm de base e 6 cm de altura. Determine sua área e seu perímetro usando as ferramentas do *software* GeoGebra? Dessa forma, para a resolução do problema os alunos resolveram a questão por meio do papel isométrico fazendo suas observações e reflexões em seguida a mesma situação usando o *software* GeoGebra, uma vez que todo esse processo foi conduzido pela metodologia de ensino SF.

No problema abordado para calcular a área e o perímetro da figura geométrica, com os recursos tradicionais (o problema pode ser apresentado por aparatos como quadro, lápis, papel isométrico, jogos, recortes de papel, material reciclado, desenhos, imagens e artes) e com o *software* GeoGebra. A intenção desse problema foi avivar no aluno seu conhecimento prévio sobre o assunto.

Diante da explanação do conteúdo abordado após a compressão e identificação das variáveis envolvidas no problema, os alunos são instigados a buscar soluções através de várias estratégias de resolução, usando seus conhecimentos prévios e a forma como a situação problema é apresentada, identificam quais os elementos contidos no problema, qual a relação entre eles e o que é solicitado pelo problema proposto. É um dos momentos mais importante na construção do raciocínio matemático, pois é destinado à discussão entre professor e alunos a respeito do problema.

É a partir dessas discussões que surgiram os questionamentos dos alunos sobre o problema proposto durante a aula, utilizando os recursos tradicionais e os tecnológicos para responder a questão proposta em sala de aula. De acordo com Souza (2013) os questionamentos podem surgir dos alunos ou serem propostos pelo professor de maneira variada. Em sua maioria, surgem por parte dos alunos no momento em que se debruçam sobre os dados contidos no problema, originando-se a partir daí as reflexões, hipóteses e formulações, na busca de caminhos que conduzam à solução de problemas.

Os alunos se debruçaram sobre a questão do paralelogramo de duas maneiras: de forma convencional e o com o uso do *software* GeoGebra. No primeiro, conforme a figura 1 os alunos usaram lápis e papel isométrico desse modo não houve questionamento por parte dos discentes, pois os referidos utilizaram seus conhecimentos prévios para resolver a questão e não apresentaram dificuldades, (ver figura1).

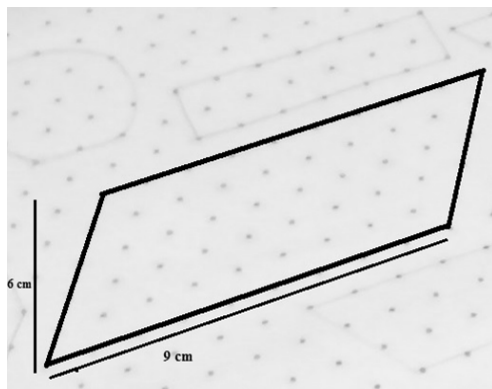


Figura 1. Construção do paralelogramo no papel isométrico

Logo após a construção da figura no papel isométrico conforme apresentado a cima, os alunos apresentaram a resolução do problema, conforme apresentado na figura 2.

Resolução

$$A = b \times h$$

$$A = 9 \times 6$$

$$A = 54 \text{ cm}^2$$

Perímetro

$$P = 2 \cdot (a + b)$$

$$P = 2 \cdot (9 + 6)$$

$$P = 2 \cdot 15$$

$$P = 30$$

Figura 2. Resolução da situação-problema pelo aluno

Em seguida, os alunos resolveram o mesmo problema com o *software* GeoGebra, os referidos desenharam o paralelogramo usando as ferramentas do aplicativo, que a priori tiveram dificuldade de manuseio o *software*, pois não tinham conhecimento da funcionalidade do mesmo, a docente por sua vez seguindo a risco o que é preconizado pela SF, deu-lhes a oportunidade de buscar essa familiarização do GeoGebra por meio de descobertas, fazendo intervenções somente quando necessário, assim ao se debruçarem nas ferramentas do aplicativo fizeram o

paralelogramo apresentado na Figura 3. Vale ressaltar que diante dessa aplicação os alunos apontaram algumas dificuldades de trabalhar a matemática, bem como a resolução do problema proposto, levantando ainda alguns questionamentos, que se sucede abaixo da figura 3.

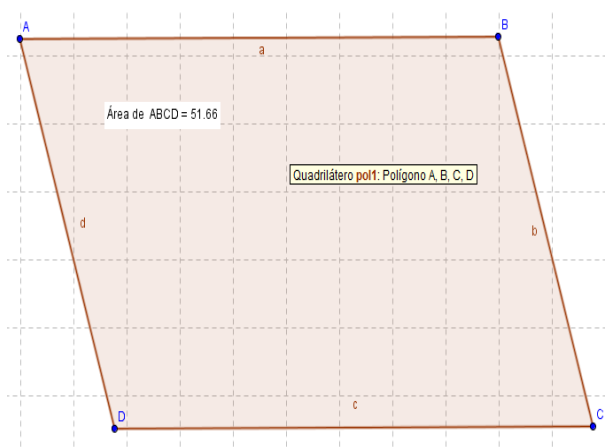


Figura 3. Construção do paralelogramo no GeoGebra

“Por que os valores da altura do paralelogramo no GeoGebra deu 7,21, sendo que no problema e exposto no papel é 6?”

“A reta inclinada apresentou valores diferentes da reta perpendicular, por quê?”;

“Por que o valor da área usando o GeoGebra dá igual ao do tradicional e o perímetro diferente?”

Como os alunos nessa atividade estão vivenciando novas experiências e outras aprendizagens, a docente começou a intervir com indagações que levavam os alunos a refletirem sobre os dois recursos utilizados, levantando indagações como: “você ainda se recordam de alguma propriedade das construções e desconstruções geométricas”? Será que todo quadrilátero é quadrado? O ângulo interfere no resultado da área e perímetro? Quais as propostas que a Sequência Fedathi oferece para ajudar a resolver esse problema?

Após as mediações, os alunos começaram a recordar os conceitos matemáticos, adquiridos em anos anteriores de suas formações e a compreender as vantagens que a proposta de ensino da Sequência Fedathi traz para o ensino de Matemática, e também para a formação inicial.

Em seguida, através das intervenções os mesmos apontaram algumas propriedades relatando que uma delas é “os lados opostos de um paralelogramo são congruentes”, ou seja os lados $AB \cong CD$ e $BC \cong AD$, outra propriedade é “Cada diagonal do paralelogramo o divide em dois triângulos congruentes”, assim sua demonstração é dado por $AB \cong CD$; $AD \cong BC$; $AC \cong AC$ e $\triangle ABC \cong \triangle CDA$, logo após esses apontamentos foram confirmado pela docente.

Nesses aspectos, um aluno da disciplina Tópicos de Educação Matemática do Curso de Pedagogia apresenta seu ponto de vista e a solução do problema após as inquietações e reflexões. Descreve que a partir das indagações percebe que para resolver a área e o perímetro do problema no GeoGebra teria que pensar nas famílias que compõem o paralelogramo, na construção e desconstrução da figura, traçar retas perpendiculares para formar ângulos de 90° , transformando em um retângulo, que dessa forma a área e o perímetro seria igual ao resolvido no papel isométrico. (Ver Figura 4).

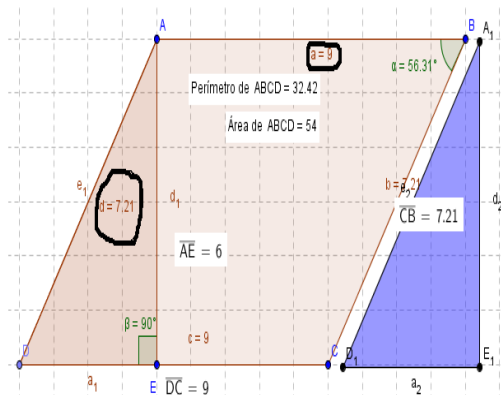


Figura 4. Resposta do aluno da situação-problema

Ainda, uma aluna relata que: o GeoGebra é muito preciso e detalhista, pois qualquer movimento requer uma nova forma de pensar sobre todos os elementos necessários para a solução do problema, por isso ao inclinar a reta para desenhar o paralelogramo apresenta valores diferentes, a partir dessa inclinação e começa a interferir no ângulo, então é preciso fazer a composição das figuras e transformá-lo em retângulo, assim os valores da área e do perímetro darão iguais conforme os valores estabelecidos, ratificou a aluna “achei muito interessante!”.

Quanto ao docente e sobre estes aspectos é preciso fazer as mediações respeitando o tempo que o aluno precisa para resolver o problema através da maturação. Apesar dos alunos possuírem ritmos diferentes no desenvolvimento de suas atividades, o docente deverá ajustar esse tempo de acordo com os tipos de situações estudadas, ao rendimento dos alunos em relação à exploração do problema e ao que pretende realizar no tempo total da aula.

Para consolidar a construção da aprendizagem sobre a situação-problema deverão organizar, argumentar e apresentar formas e soluções de como resolver o problema proposto, ou seja, representação através de esquemas ou modelos que visem à solução do problema inicial, usando o papel isométrico e o *software* GeoGebra.

É importante que durante essas consolidações para a resolução dos problemas os alunos e a docente possam fazer troca de ideias, opiniões e discussões. A docente deverá estimular o aluno e justificar as estratégias utilizadas para resolver o problema e a escolha sobre o modelo criado. É necessário durante as atividades dá tempo aos alunos para que eles pensem e reflitam acerca dessas realizações e se auto avaliem por meio de ensaios, erros e tentativas. Estes domínios são determinantes para a atenção, a compreensão e o surgimento das soluções, bem como na motivação para participarem de forma ativa de toda aula.

Após as discussões realizadas diante da situação-problema ocorre a apresentação e a formalização do modelo matemático pelo professor, ou seja, realizou-se as intervenções cabíveis e adequadas pela docente, através da linguagem matemática formal e resolução do problema proposto, e como consequência houve uma concretização significativa da aprendizagem. O professor apresentou as devidas mediações a partir do conhecimento adquirido do aluno como meio prático e otimizado para conduzir a resposta do problema. A prova constitui a finalização da aula constituindo um novo conhecimento do conteúdo abordado.

De acordo com Souza (2013) uma das características importantes na aplicação da Sequência Fedathi é a realização de forma sequencial, de todas as suas etapas, afirmando que só assim pode-se produzir os resultados esperados na aprendizagem.

Portanto, ao final da sessão didática a docente, apresentou o quanto é importante a referida sessão didática, a partir das reflexões dos alunos formalizou os conteúdos de forma dinâmica e atrativa mostrando as inúmeras possibilidades que os recursos tecnológicos podem oferecer para o desenvolvimento dos conteúdos de forma construtivista. A fim de consolidar os conteúdos matemáticos, após o término da sessão didática, a professora incentivou à participação dos alunos na Plataforma TelEduc, no fórum de discussão sobre o tema da aula.

Considerações finais

O propósito desse artigo foi apresentar uma sessão didática, fundamentada na Sequência Fedathi e o uso do *software* GeoGebra como recurso didático-tecnológico nos conteúdos matemáticos para auxiliar na formação inicial do pedagogo.

Com essa compreensão, entende-se que é relevante investir na sessão didática fundamentada na metodologia de ensino da Sequência Fedathi a partir da formação inicial do pedagogo, pois promoverá nos alunos o desenvolvimento do raciocínio matemático, nos conteúdos de Geometria Básica.

Portanto, a proposta pedagógica a que se refere esse trabalho, com a utilização das sessões didáticas é de grande relevância, para a formação matemática do pedagogo, pois os mesmos se apropriaram desse conhecimento poderão utilizar em suas práticas docentes recursos que os auxiliem no desenvolvimento da aprendizagem e no ensino de Matemática.

Referências e bibliografia

- Brasil. (2014). Plano Nacional pela Alfabetização na Idade Certa -PANAIC. Disponível em: <http://pacto.mec.gov.br/images/pdf/pacto_livreto.pdf> Acessado em 10 de mar. de 2014.
- Santos, M.J.C. (2007). Reaprender Frações por meio de Oficinas Pedagógicas: Desafios para a formação inicial. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza.
- Sousa, et al (Orgs). (2013). Sequência Fedathi: uma proposta pedagógica para o ensino de matemática e ciências. Fortaleza – Ceará: Edições UFC.
- Souza, M. J. A. (2013). Sequência Fedathi: Apresentação e caracterização. In: SOUSA, et al (Orgs). Sequência Fedathi: uma proposta pedagógica para o ensino de matemática e ciências. Fortaleza – Ceará: Edições UFC. 2013.
- Turner, M. J., Blackledge, M., & Andrews, P. R. (1998). "Fractal geometry in digital imaging". Academic Press. p.1. 1998, ISBN 0-12-703970-8, disponível em http://pt.wikipedia.org/wiki/Geometria#cite_ref-1. Acessado em 10 de julho 2014.

A Sequência Fedathi para uma aprendizagem significativa da função afim: uma proposta didática com o uso do *software* Geogebra

Antonio **Marcos** de Souza
Universidade Federal do Ceará
Brasil

prof.ams@hotmail.com

Joilson **Pedrosa** de Sousa
Universidade Federal do Ceará
Brasil

joilsonpedrosa@gmail.com

Maria José Costa dos **Santos**
Universidade Federal do Ceará
Brasil

mazzesantos@ufc.br

Resumo

O presente trabalho propõe um modelo de sessão didática para o estudo da função afim usando a Sequência Fedathi como proposta metodológica de ensino. A proposta está estruturada a partir de alguns pressupostos metodológicos da referida metodologia (plateau, postura 'mão no bolso', contraexemplos) e de alguns princípios da teoria da Aprendizagem Significativa (não arbitrariedade, substantividade, princípios programáticos do conteúdo e mapas conceituais). A sessão didática foi elaborada de forma a possibilitar ao aluno construir, através das ferramentas do *software* Geogebra, a diferenciação do conceito geral e inclusivo função afim em três de suas especificações: função afim crescente, função afim decrescente e função afim constante. Os resultados indicaram que a Sequência Fedathi como metodologia de ensino, associada aos princípios de uma aprendizagem significativa, além de uma ferramenta tecnológica, aqui, o *software* Geogebra, se apresentam como uma relevante proposta didática.

Palavras chave: Função afim, aprendizagem significativa, Geogebra, Sequência Fedathi, construção dos conceitos.

Introdução

O cenário do processo de ensino e aprendizagem da Matemática na educação básica torna-se a cada dia mais desafiador. Possivelmente por se ignorar o processo cognitivo envolvido na aprendizagem, não se compreende por que os estudantes cada vez mais reagem tão negativamente ao modelo de escolaridade vertical. Observa-se ainda que essa reação negativa é diretamente proporcional a multiplicação do acesso as novas tecnologias. Ou seja, quanto mais os alunos são imersos no ambiente tecnológico, mais resistentes eles ficam as metodologias ditas tradicionais, principalmente quando desassociadas aos recursos tecnológicos.

Neste sentido, supõe-se que os problemas de aprendizagem convergem no eixo metodologia *versus* recursos. Considerando que metodologia envolve também conhecimento teórico sobre educação, entende-se que o desconhecimento das teorias da educação por parte dos educadores compromete o aprimoramento de sua prática pedagógica.

Deste modo, o presente trabalho apresenta uma proposta de sessão didática visando uma aprendizagem significativa da função afim com o auxílio do *software* Geogebra, para os alunos do 1º ano do Ensino Médio, levando em consideração os conceitos da Teoria da Aprendizagem Significativa e da metodologia Sequência Fedathi.

A proposta segue uma linha construtivista do ponto vista metodológico, e sugere que o professor elabore atividades, para que os alunos construam o conhecimento utilizando o material de aprendizagem, potencialmente significativo, através da interação com o *software* Geogebra, e o professor é o mediador, como sugere a Sequência Fedathi. Ressaltamos que as sessões foram aplicadas em uma turma de 36 alunos da 1ª série do ensino médio de uma escola pública da cidade de Capistrano, Ceará-Brasil.

Referencial Teórico

A Sequência Fedathi e a teoria da Aprendizagem Significativa

A Sequência Fedathi-SF é uma proposta metodológica de ensino desenvolvida inicialmente para melhorar o ensino da Matemática. Ela é fruto do trabalho de professores, pesquisadores e alunos de pós-graduação da Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará (FACED). (SaNtana, 2006, p.133).

A SF é constituída de quatro etapas sequenciais e interdependentes (Souza, 2013 p.18): **Tomada de posição**, o professor propõe um problema ou uma situação desafiadora envolvendo o conteúdo função afim, por exemplo; foi proposto aos alunos inserir a função $f(x) = ax + b$ no Geogebra. Em seguida, usar o controle deslizante para alterar o valor dos coeficientes **a** e **b** e observar o comportamento do gráfico da função afim.

Maturação, ocasião em que os alunos se debruçam sobre o problema ou situação desafiadora, que juntamente com o professor discutiram os possíveis caminhos que podem levar a solução.

Exemplo: Ao se deparar sobre a atividade o aluno expõe suas dúvidas através de questionamentos. O professor tira as dúvidas através de outros questionamentos como: O que acontece com o gráfico da função afim quando alteramos o valor do coeficiente **a**? O que acontece com o gráfico da função afim quando o coeficiente **a** assume valores positivos? O que acontece com o gráfico da função afim quando o coeficiente **a** assume valores negativos? O que acontece com o gráfico da função afim quando o coeficiente **a** assume valor nulo? O que se pode concluir a respeito do que o coeficiente **a** determina na função afim?

Solução, os alunos deverão organizar e apresentar modelos que possam conduzi-lo a encontrar o que está sendo solicitado (Souza, 2013 p.29).

Exemplo: Fazer um resumo das anotações observadas na etapa anterior usando linguagem Matemática.

Prova, a partir das soluções apresentadas pelos alunos, o professor apresenta o novo conhecimento mostrando os modelos matemáticos cientificamente aceitos. Assim,

fundamentados nas etapas, a Sequência Fedathi pode ser aplicada através de sessões didáticas¹ visando uma aprendizagem significativa.

De modo geral a Sequência Fedathi sugere que o conteúdo não seja exposto ou apresentado diretamente ao aluno, sem que antes seja dada a este a oportunidade de pensar, raciocinar, refletir e propor soluções. O professor assume a postura denominada ‘mão no bolso’, em que se evita dar respostas prontas aos alunos. Assim sendo, o processo de construção do conhecimento é facilitado a partir de uma proposta não arbitrária, possibilitando uma reprodução substantiva deste conhecimento, concretizando a chamada aprendizagem significativa.

Desenvolvida por David Paul Ausubel, a Aprendizagem significativa “é o processo através do qual uma nova informação (ou novo conhecimento) se relaciona de maneira não arbitrária e substantiva (não-literal) à estrutura cognitiva do aprendiz.” (Moreira, 1997 p. 20).

A não arbitrariedade diz respeito a maneira como o novo conhecimento é proposto ao aprendiz. Deve-se considerar o conhecimento prévio existente na estrutura cognitiva do aprendiz, aos quais Ausubel chama de subsunçores. Esse conhecimento prévio, que pode ser ideias, conceitos, proposições (Moreira, 1997 p.2), é relevante, claro e consolidado, e serve de âncora para que o novo conhecimento (ideias, conceitos, proposições) seja aprendido significativamente e torne-se igualmente relevante para o aprendiz. Quando o novo conhecimento é proposto desconsiderando a existência do conhecimento prévio, essa relação é dita arbitrária.

Por exemplo, para ensinar função afim, é preciso assegurar que o aluno tenha consolidado alguns subsunçores como: Compreensão do conceito geral e inclusivo função como uma relação entre grandezas e que pode ser representado de várias maneiras (algébrica, gráfica, tabular); Conhecer o plano cartesiano; Resolver equações do primeiro grau. Na Sequência Fedathi este conhecimento prévio recebe o nome de plateau.

A “substantividade” significa que o que é incorporado à estrutura cognitiva é a substância do novo conhecimento, das novas ideias, não as palavras precisas usadas para expressá-las.” (Moreira, 1997 p.2). Ou seja, o novo conceito aprendido significativamente pode ser apresentado de diversas maneiras. Essa definição contradiz a concepção de só se considerar a informação ou resposta apresentada com as mesmas palavras memorizadas do conceito padronizado (ao pé da letra). Exemplo: quando o aluno não só reconhece a representação algébrica e gráfica de uma função afim, mas também é capaz de representar a função afim através de exemplos originais (para ele), além de fazer considerações usando diferentes linguagens sobre os conceitos envolvendo função afim.

Quando a reprodução do conhecimento não acontece de forma substantiva a aprendizagem é dita mecânica, ou seja, o aluno reproduz o conhecimento de uma única maneira (o conceito tal qual o livro ou o professor lhe apresentou). Este tipo de aprendizagem é bastante comum e atende a objetivos imediatos como fazer uma prova.

No entanto, na aprendizagem mecânica o esquecimento é rápido e praticamente total e a possibilidade de reaprendizagem é quase inexistente, enquanto que na aprendizagem significativa o esquecimento é residual, ou seja, resta um pouco dele no subsunçor, bem como a possibilidade de reaprendizagem é bastante real. (Moreira, 2012).

Segue quadro que destaca algumas diferenças entre essas duas aprendizagens.

Quadro1

Aprendizagem mecânica x aprendizagem significativa

APRENDIZAGEM MECÂNICA	APRENDIZAGEM SIGNIFICATIVA
Esquecimento praticamente total	Esquecimento residual
Praticamente impossível a reaprendizagem	Possibilidade de reaprendizagem
Capacidade de lidar apenas com situações conhecidas e rotineiras	Capacidade de lidar com situações novas

Fonte: pesquisa direta.

Nesse sentido, na estrutura cognitiva do aprendiz o conhecimento é hierarquicamente organizado obedecendo um grau decrescente de generalização, abstração e inclusividade.

Essa teoria contempla os chamados princípios programáticos do conteúdo considerados facilitadores da aprendizagem significativa. São eles: **Diferenciação progressiva**, os conceitos e ideias mais gerais e inclusivos são apresentados no início e vão se diferenciando progressivamente adquirindo um grau de especificidade maior. (Moreira, 1997 p. 18); **Reconciliação integrativa**, relacionar ideias e conceitos apontando similaridades e diferenças. (Moreira, 1997 p. 19); **Organização sequencial**, definir a ordem sequencial dos tópicos de estudo da maneira mais coerente possível, levando em conta os princípios da diferenciação progressiva e da reconciliação integrativa. (Moreira, 1997 p. 19); **Consolidação**, assegurar o domínio do conhecimento prévio antes da introdução do novo conhecimento. A sessão didática proposta neste trabalho segue estes princípios.

A construção dos conceitos função afim crescente, função afim decrescente e função afim constante na presente pesquisa foi desenvolvida seguindo estes princípios. O conceito geral e inclusivo função afim foi diferenciado progressivamente nestas três especificações, através de construções feitas pelos alunos, no ambiente do Geogebra, onde a partir da variação do coeficiente a foi analisado o comportamento da função e identificadas as condições em que ela era crescente, decrescente e constante.

Outro recurso considerado facilitador da aprendizagem significativa são os mapas conceituais, que consistem em uma técnica que, como sugere o próprio nome, enfatiza conceitos e relações entre conceitos à luz dos princípios da diferenciação progressiva e reconciliação integrativa. (Moreira, 1997 p. 20).

Metodologia (Sequência Fedathi)

A proposta completa para o estudo da função afim consiste numa sequência didática composta de cinco sessões didáticas elaboradas a partir de uma análise ambiental (em que se consideram público alvo, objetivos, materiais utilizados etc) e teórica (definição de pressupostos da teoria da aprendizagem significativa como não arbitrariedade, substantividade, princípios programáticos do conteúdo e mapas conceituais, para diferenciação do conceito da função afim). As aulas são estruturadas seguindo as etapas da Sequência Fedathi.

A cinco sessões foram assim intituladas: **Sessão 1**- Conceituação e resolução de problema envolvendo função afim; **sessão 2** – Representação algébrica e gráfica da função afim através do Geogebra; **sessão 3** – Análise do comportamento da função afim a partir da variação do coeficiente a com o auxílio do Geogebra; **sessão 4** - Análise do comportamento da função afim a partir da variação do coeficiente b com o auxílio do Geogebra. **Sessão 5** – resolução de exercícios sobre função afim envolvendo análise gráfica e problemas.

Especificaremos apenas a sessão didática 3, pela relevância da temática para aprendizagem dos alunos.

Sessão Didática 3

Esta sessão tem como tema “Estudo do comportamento da função afim a partir da variação do coeficiente a com o auxílio do software Geogebra” e serão utilizados os procedimentos metodológicos da Sequência Fedathi, para construção do conhecimento referente a função afim. Constata-se que percorrendo as etapas desta sequência, o aluno assume uma postura autônoma em relação ao seu processo de aprendizagem e possa reproduzir de forma mais substantiva o conhecimento explorado.

A preparação da sessão envolve uma análise ambiental e teórica.

Análise ambiental

Onde são discutidos: **Público-alvo** – alunos do Ensino Médio de uma escola pública do estado do Ceará-Brasil; **Objetivo a ser alcançado**- compreender significativamente conteúdos que envolvem o estudo da função afim relacionado a: Comportamento da função a partir da variação coeficiente a . Diferenciar o conceito geral e inclusivo função afim em crescente, decrescente e constante; **Materiais** – necessários para o desenvolvimento da sessão didática: Caderno, lápis, borracha, caneta, quadro branco e pincel. Datashow e computador com o software Geogebra (versão 5.0) instalado ou ligado a internet para acessar o sítio www.geogebra.org . O navegador deve ter plug-ins do aplicativo java.

Análise teórica

O ensino da função afim, tanto quanto os das demais funções, constituem um grande desafio para os professores de Matemática. Talvez pelo fato de ser um conteúdo abrangente e que a medida que se aprofunda exige um grau mais elevado de abstração por parte do aprendente, ou pelo fato de suas construções serem um processo bastante laborioso. Construir um gráfico a partir de sua representação tabular é um exemplo claro disto. A começar pela necessidade de se fazer a estimativa de pontos que sejam apropriados para uma visualização gráfica adequada. É bem verdade que no futuro serão abordadas técnicas que possibilitarão uma construção mais rápida e objetiva dos gráficos. Porém, até lá, é bem provável que muitos estudantes percam a motivação e não estejam mais predispostos a estudar função.

Neste sentido, esta sessão didática propõe o uso do software Geogebra para auxiliar na construção do conhecimento sobre função afim. O Geogebra possibilita a representação de funções na sua forma algébrica e gráfica. Permite uma visualização rápida e precisa da representação gráfica da função uma vez que esta seja inserida na sua forma algébrica no campo entrada. Se forem inseridas várias funções afins e outras não afins, pode-se fazer a exploração da diferença nas representações gráficas entre as funções afins e as que não são afins, alterando o estilo e a cor. Pode-se definir um estilo e uma cor para todas as funções afins, e outro estilo e cor para as funções que não são afins. Assim pode-se destacar a diferença característica na representação gráfica da função afim que a distingue das demais funções.

É interessante que todo este processo seja vivenciado numa experiência de construção, onde os próprios alunos cheguem as conclusões. Para isto é necessário que a atividade proposta seja elaborada nesta perspectiva e que o professor assuma uma postura de mediador fazendo uso da pedagogia “mão no bolso”, nunca dando respostas prontas aos alunos. Em vez disso deve fazer perguntas estimuladoras, orientadoras e esclarecedoras, que os permita redirecionar o seus

olhares sobre o problema e por si mesmos encontrarem a resposta. Esta é uma forma de desenvolver nos alunos uma postura autônoma no processo de aprendizagem.

Com esta sessão didática, pretende-se diferenciar o conceito geral e inclusivo função afim em: função afim crescente, função afim decrescente e função afim constante, a partir da variação do valor do coeficiente a . Para tanto serão utilizadas as ferramentas do Geogebra em uma atividade criteriosamente elaborada para que os alunos, fazendo simulações e observações cheguem a construção destes conceitos.

Espera-se que, após esta experiência de construção a exploração algébrica destes conceitos através de exercícios seja facilitada e que a consolidação deste conteúdo seja concretizada de forma significativa.

O saber científico do conteúdo abordado nesta sessão didática deve convergir para: Uma função $f: R \rightarrow R$ chama-se função afim quando existem dois números reais a e b tal que $f(x) = ax + b$, para todo $x \in R$.

Seja a função afim representada por $f(x) = ax + b$, com a e b reais, pode-se afirmar que: A variação do coeficiente a (que representa a inclinação da reta) diferencia a função f em crescente ($a > 0$), decrescente ($a < 0$) e constante ($a = 0$).

Aplicação da sessão didática:

1ª etapa - Tomada de posição

Apresentação do seguinte **acordo didático** aos alunos: O **professor** espera dos alunos que eles participem ativamente das ações didáticas em todos os momentos. O **aluno** espera que o professor os oriente na atividade, de forma didática que os possibilite avançar na atividade proposta, apontando-lhe ferramentas didáticas que os possibilite chegar a solução do problema proposto. Assim, fica evidente que pelo acordo didático, todos devem participar ativamente da atividade, todos serão protagonistas e a mediação do professor deve ajudar aos alunos a participarem ativamente das atividades.

Os alunos serão divididos em duplas para realização da atividade. Dois alunos por computador no laboratório de informática. Como os alunos já tiveram no mínimo um primeiro contato com o software na aula anterior, o professor já inicia a sessão propondo a seguinte atividade: **Situação desafiadora**: Inserir a função $f(x) = ax + b$ no Geogebra. Em seguida, usar o controle deslizante para alterar o valor dos coeficientes a e b e observar o comportamento do gráfico da função afim para responder as seguintes questões: O que acontece com o gráfico da função afim quando alteramos o valor do coeficiente a ? O que acontece com o gráfico da função afim quando o coeficiente a assume valores positivos? O que acontece com o gráfico da função afim quando o coeficiente a assume valores negativos? O que acontece com o gráfico da função afim quando o coeficiente a assume valor nulo? O que se pode concluir a respeito do que o coeficiente a determina na função afim? Faça um resumo das conclusões usando uma linguagem matemática (simbólica).

2ª etapa -Maturação

Os alunos se debruçaram sobre essa atividade, contextualizando, pensando, questionando, procurando compreender. Serão estimulados a apresentar suas hipóteses. Também poderão expor

suas dúvidas. Nesta etapa se inicia o uso da pergunta. O aluno pode manifestar suas dúvidas através de perguntas, aos colegas ou ao professor, numa interação multilateral.

Hipóteses

É possível que alguns ou todos os alunos tentem inserir diretamente a função na sua forma geral no Geogebra como fizeram com os exemplos da sessão anterior. Caso isto aconteça, o Geogebra abrirá uma janela apresentando este comando como inválido. Dependendo da versão, o próprio programa já sugere uma solução com a seguinte mensagem: “comando inválido. Insira controles deslizantes.”

Caso a versão do programa seja mais antiga a mensagem é apenas acusando o comando inválido. Neste caso é provável que os alunos já iniciem os seus questionamentos. Exemplo:

- Aluno: Professor. Eu não consegui inserir a função. Por que o meu não deu certo?
- professor pode responder com outro questionamento.
- Professor: Por que o programa considerou o comando inválido? O que há de diferente entre esta representação e as que foram usadas anteriormente?
- Possibilidade de resposta:
- Aluno: Por que as outras eram com números e esta é com letras?
- Professor: E o que vocês acham que a gente deve fazer?
- Aluno: Atribuir valores numéricos aos coeficientes **a** e **b**?
- Professor: Sim. Mas como a gente pode fazer isso sem perder a representação genérica?

A ideia é que essa sequência de perguntas levem o aluno a compreender que antes de inserir a função na forma $f(x) = ax + b$, deve-se inserir os coeficientes **a** e **b** atribuindo-lhes algum valor numérico.

3ª etapa - Solução

Os alunos nesse momento começam a fazer as simulações sugeridas nas perguntas da atividade e na interação com os colegas e o professor, organizam respostas e anotam os resultados. O professor continua assistindo ao aluno nas suas dificuldades, mas permanece com a postura ‘mão no bolso’. Como as questões da atividade foram elaboradas seguindo o princípio da **organização sequencial**, de modo que cada uma contribua gradativamente para a construção dos conhecimentos, a ideia é que todas as duplas cheguem a uma solução satisfatória. A interação com o professor e os colegas deve proporcionar a **consolidação**, ou seja, a segunda questão só pode ser iniciada pela dupla depois que a primeira for satisfatoriamente respondida e assim por diante, independente do tempo que isso levará e quantas vezes a dupla tiver que refazer a questão. Aqui está o caráter recursivo da proposta de ensino.

4ª etapa - Prova

Como a atividade foi acompanhada passo a passo pelo professor, a solução encontrada por cada dupla deve ser satisfatória. Se as soluções encontradas pelas duplas forem diferenciadas (modelos e esquemas diferentes), sugere-se a socialização das mesmas com o uso do datashow. Caso contrário, o professor apenas constrói junto com a turma a formalização do conceito (objetivos da aula) no quadro. Nesta sessão as conclusões finais devem convergir para: Seja a

função $f: R \rightarrow R$ definida por $f(x) = ax + b$ e representada graficamente com uma reta. A variação do coeficiente **a** (que representa a inclinação da reta) diferencia a função **f** em crescente ($a > 0$), decrescente ($a < 0$) e constante ($a = 0$).

Este resultado também foi expresso na forma de mapa conceitual como se segue.

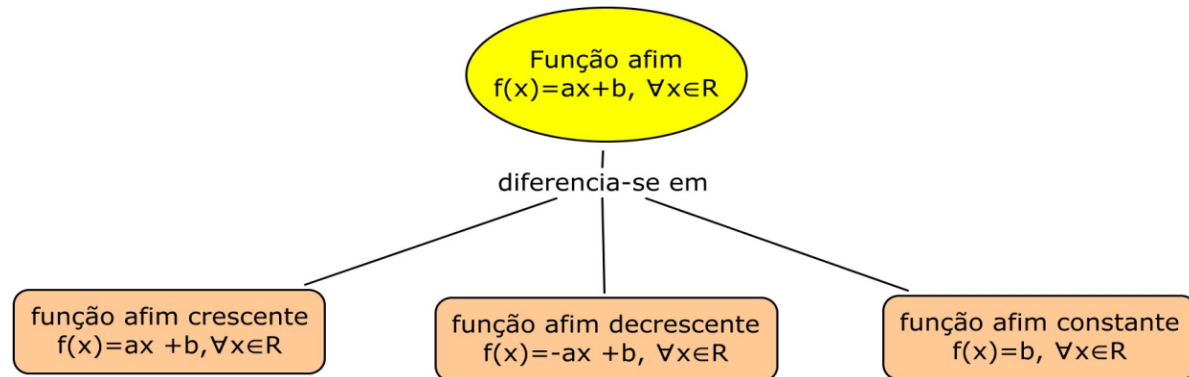


Figura 1. Mapa conceitual da função afim.

Fonte: Pesquisa direta.

Avaliação

A partir do diagnóstico do *plateau*, pode-se verificar se o aluno avançou durante todo o processo didático, mediante sua participação na sistematização das resoluções apresentadas em sala, pelos alunos, ou seja, é o momento de socialização em busca de uma solução que deve contemplar as hipóteses, contraexemplos e estratégias trabalhadas com o aluno pelo professor.

Resultados

As sessões foram aplicadas em uma turma de 36 alunos da 1ª série do ensino médio de uma escola pública da cidade de Capistrano, Ceará-Brasil.

A proposta metodologia Sequência Fedathi com foco na postura ‘mão no bolso’ do professor durante a aula implica uma mudança de postura do aluno. Pelo fato de não mais receber as respostas prontas, o aluno se ver obrigado a assumir uma postura de sujeito da sua aprendizagem. Porém, vale ressaltar, que das 18 duplas formadas, 10 apresentaram uma resistência inicial a realização da atividade, alegando ser esta difícil para o seu nível de conhecimento. Somente a partir dos questionamentos feitos pelo professor, foram aos poucos, percebendo que poderiam realizar a atividade.

A experiência acusou alguns fatores de dificuldade a serem administrado como: heterogeneidade da turma no que diz respeito a ritmos de aprendizagem e dificuldade no manuseio do computador; realização da atividade em intervalos de tempo diferente para cada dupla; necessidade de um intervalo de tempo maior do que seria utilizado em uma aula expositiva para exploração de um conceito; dificuldade para atender a partir da postura ‘mão no bolso’ solicitação de assistência simultânea de várias duplas; ocorrência de ruídos resultantes da comunicação interativa simultânea.

Apesar destes fatores de dificuldade, há indicação de que vale apenas a aplicação desta metodologia pelo fato de proporcionar uma participação ativa do aluno durante a construção do conhecimento.

No entanto, observou-se também que o ambiente criado na sala de aula em virtude desta participação do aluno e da comunicação interativa simultânea, é agitado e barulhento. Os alunos perguntam, o professor responde com outras perguntas, os alunos perguntam entre si, apresentam suas hipóteses, confrontam com as dos colegas, as vezes se aborrecem por não receber as respostas prontas do professor etc. Definitivamente, o ambiente ‘disciplinado’ e silencioso, da aula expositiva tradicional, onde o professor explica e os alunos calados escutam, não é a tônica desta proposta, pelo menos nas etapas de maturação e solução. Porém, pode-se no acordo didático apresentado na tomada de posição, definir que na etapa da prova, quando uma dupla ou o professor estiver socializando uma solução as demais escutam para analisá-la.

Quanto a associação da Sequência Fedathi ao uso do software Geogebra para o desenvolvimento das atividades, observa-se que: Suas ferramentas (do Geogebra) viabilizam a exploração dos conceitos referente ao comportamento da função afim de maneira dinâmica e atraente; constituindo portanto um elemento facilitador da construção dos conceitos através de simulações gradativas; exerce um efeito motivacional que estimula a participação ativa; facilita a **diferenciação progressiva** do conceito geral e inclusivo função afim em suas especificações, uma vez que permite a simulação do comportamento da função através dos controles deslizantes; permite a **reconciliação integrativa** entre os diversos conceitos aos quais a função afim se diferencia. Ou seja, a associação entre a metodologia e o recurso apresentou um resultado positivo. Não necessariamente, por ser o Geogebra. Poderia ser outro software, ou qualquer outro recurso tecnológico ou não. O Geogebra foi escolhido entre outras razões, por ser um software livre, gratuito e de fácil acesso.

Considerações finais

A proposta didática aqui apresentada consiste numa associação entre uma proposta metodológica de ensino (sequência FEDATHI), visando uma aprendizagem significativa da função afim, tendo como ferramenta um *software* educativo (Geogebra). Considera-se que ampliando essa proposta de sessão didática, e aplicando intercaladamente em aulas na sala de aula (convencional) e no laboratório de informática (onde os próprios alunos poderão efetuar as explorações), seja possível concretizar uma aprendizagem significativa da função afim.

Constatou-se que, os benefícios evidenciados por esta proposta metodológica tem um preço: a necessidade do rompimento com o modelo de escolaridade vertical predominante no tradicionalismo. O professor que estiver preso a obsessão de manter seus alunos em todas as aulas calados para ouvir suas explicações, dificilmente terá sucesso neste novo cenário da educação. Essa geração, que é também a geração da tecnologia, exige ser protagonista do processo de aprendizagem. Caso contrário, protestam com sua indiferença. Medir forças com ela é uma batalha desigual onde ambas as partes se frustram.

Deste modo, sugere-se que o educador enriqueça e aprimore constantemente sua prática pedagógica a partir de: conhecimento teórico (teorias cognitivas de aprendizagem), diversificação metodológica e uso de tecnologias de forma integrada ao currículo.

Referências

- Ausubel, D. P. (2003). *Aquisição e retenção de conhecimentos: uma perspectiva cognitiva*. Lisboa: Plátano.
- Hohenwarter, M., & Hohenwarter, J. *Ajuda Geogebra Manual oficial da versão 3.2*. Disponível em www.geogebra.org.

- Moreira, M. A. (1997). Aprendizagem significativa: um conceito subjacente. Em M. A. Moreira, M. C. Caballero, & M. L. Rodríguez (Orgs.), *Actas del Encuentro Internacional sobre el Aprendizaje Significativo* (pp. 19-44). Burgos, España.
- Moreira, M. A. (2012). *O que é afinal Aprendizagem significativa?* Aula Inaugural do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais, Instituto de Física, Universidade Federal do Mato Grosso, Cuiabá, MT, 23 de abril de 2020. Aceito para publicação, *Quirriculum*, La Laguna, Espanha, 2012.
- Santana, J. R. (2006). Educação Matemática: *Favorecendo investigações matemáticas através do computador* (Tese de Doutorado). UFC.
- Souza M. J. A. (2013). *Sequência Fedath: Uma proposta Pedagógica para o Ensino de Ciências e Matemática*.

Abordagem da formalização do conceito de área em livros do 6º ano do Ensino Fundamental

Walenska Maysa Gomes de **Santana**

Faculdade de Ciência e Tecnologia Professor Dirson Maciel de Barros

Brasil

walenska@hotmail.com

Amanda Rodrigues Marques da **Silva**

Universidade Federal de Pernambuco

Brasil

amandarmarques@outlook.com

Resumo

O livro didático tem por objetivo auxiliar o currículo, é um recurso didático que nos dias atuais não é dispensável. O livro didático atualmente passa por um processo seletivo onde através de critérios pré-estabelecidos são julgados, aprovados e distribuídos para análise dos professores nas escolas públicas. As grandezas geométricas geralmente se encontram nos últimos capítulos dos livros que comumente tem sua ordem seguida fielmente pelos professores, os documentos oficiais onde se tratam dos currículos orientam formas diversas para abordar um mesmo conteúdo, visto que para se compreender de fato um conceito este deve ter sido explorado em todas as suas possibilidades. A partir daí analisamos em seis livros didáticos de 6º ano do Ensino Fundamental como é abordada a formalização do conceito de área.

Palavras chave: Livro Didático. Área, Ensino Fundamental

Um breve histórico dos livros didáticos

Voltando-nos para a história podemos encontrar que a ideia de livro didático surgiu por volta de 2500 a.C. na Mesopotâmia, onde os escribas produziam textos com exercícios para casa e manual para uso do professor. Essa espécie de texto que se assemelha aos modelos hoje utilizados de livros didáticos ocorreu em várias civilizações mesmo antes do surgimento da imprensa,

Porém o surgimento da imprensa dá um novo rumo à produção de livros textos para fins de ensino, pois barateou os custos das cópias, e o armazenamento dessas, passou a ser facilitado, com os formatos dos impressos. Assim, começa a ser facilitada a divulgação desses exemplares e a consulta para os interessados passou a ser mais acessível (Silva Junior, 2007).

O surgimento do livro didático como recurso para transmitir o conhecimento científico começou a padronizar o ensino e a partir daí,

O recurso para o currículo, acabou virando o currículo que, de fato, é o que as editoras nos oferecem em seus pacotes didáticos: livro texto do aluno, caderno de atividades, suplementos de atividades experimentais e o manual do professor, com os objetivos gerais, e

programa anual, os objetivos específicos, as estratégias e até instrumentos de avaliação (Mongilnik, 1996, p.57 apud Silva Junior, 2007).

Em 1985, foi criado o Programa Nacional do Livro Didático, o PNLD, a fim de distribuir livros didáticos para todos os alunos do Ensino Fundamental das escolas da rede pública. A partir daí o PNLD sofreu alterações e atualmente é distribuído o Guia de Livros Didáticos, onde os professores devem analisar as recomendações do Guia e os livros e optar por alguma das coleções aprovadas na seleção.

Área como grandeza geométrica

Alguns estudos como os de Bellemain e Lima, Santana (2006) e Silva (2011) ressaltam as dificuldades que os alunos tem na distinção entre a área da figura, a medida da área da figura e da figura propriamente dita, esses aspectos estão contidos nos quadros definidos por Douady (1989) apud Santana (2006) em:

Um **quadro numérico**, constituído pelas medidas de área de figuras planas que pertencem aos números reais não negativos;

Um **quadro dos objetos**, constituído pelas figuras planas;

Um **quadro das grandezas**, constituído por classes de equivalência de figuras da mesma área.

Na maioria das vezes o livro didático e o próprio professor na apresentação do conceito de área enfatizam o quadro numérico, com isso levando o aluno a pensar que a área da figura geométrica é o número que representa sua medida. Partindo dessas referências fizemos uma análise pontual sobre a(s) metodologia(s) utilizada para formalizar o conceito de área em alguns livros didáticos de 6º ano do Ensino Fundamental.

Levantamento, escolha e critérios de análises dos livros didáticos

Pretendendo-se analisar o conceito de área em livros didáticos de Matemática procuramos conhecer as resenhas das coleções dos Guias de Livro Didático produzidas nos PNLD 2011 e PNLD 2014. Selecionamos quatro coleções aprovadas em 2011:

1. A Conquista da Matemática – Edição Renovada de José Rui Giovanni Jr., e Benedicto Castrucci 2009. Editora FTD;
2. Matemática – Idéias e Desafios, Iracema e Dulce, 2009 Saraiva Livresiros Editoras;
3. Matemática Imenes & Lellis, autor Luiz Marcio Imenes, Marcelo Lellis, 2009 Editora Moderna;
4. Projeto RADIX – Matemática, Jackson da Silva Ribeiro, Editora Scipione.

Esses livros didáticos é um dos recursos que os estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental, podem usar para construção dos conteúdos previstos para cada ano de Ensino.

Das coleções aprovadas pelo PNLD 2014, também selecionamos duas coleções:

5. Projetos Telaris: Matemática, Luiz Roberto Dante, 1ª. Edição, São Paulo, Ática;
6. Vontade de Saber Matemática, Joamir Roberto de Souza e Patrícia Rosana Moreno Patare, 2ª. Edição, São Paulo, FTD, 2012;

Essas coleções devem contribuir com o fazer pedagógico nos próximos anos letivos.

Após escolhas das coleções elencamos critérios para análises do conteúdo área no sexto ano do Ensino Fundamental.

a) Apresenta uma abordagem histórica

Conhecer a evolução histórica da construção de um saber e sua contribuição para o desenvolvimento da humanidade pode tornar o aluno mais participativo, motivado e interessado.

b) Composição e Decomposição de Figuras Planas

A ação de cortar uma figura e por justaposição transformá-la em outras ou a manipulação das peças de um quebra-cabeça envolvendo construções de figuras planas permite construir uma classe de equivalência de área, figuras diferentes podem ter mesma área.

c) Unidades de Área: Unidade não padronizada e Unidade Padronizada

Unidade não padronizada

O uso de unidade não padronizada é um dos caminhos a ser percorrido para dar visibilidade da importância da escolha de uma unidade de área, se em uma figura plana a escolha da unidade for modificada, o número que quantifica essa região será alterado.

Unidade padronizada

Permite uma comunicação entre as comunidades científicas e comerciais. Encontrar áreas de figuras utilizando diferentes unidades não padronizadas, como: o quadrado de uma malha quadriculada ou o triângulo, pode colaborar com a construção dos múltiplos e submúltiplos do metro quadrado.

d) Recursos Didáticos

O uso de recursos didáticos diversificados como malhas, lajotas, papel, polígonos, tangram, pode ser uma das etapas necessárias a construção do conceito de área.

Análise dos Livros Didáticos

a) Apresenta uma abordagem histórica

Os livros analisados apresentam três formas de abordar historicamente o conceito de área, como mostra a seguir:

Tabela 1

Tratamento histórico do conceito de área nos livros didáticos

Método utilizado para tratar o conceito de área na história	Livro
Não recorrem a história da matemática	1 e 6
Referência aos lotes de terra as margens do Rio Nilo	3 e 5
Necessidade de padronizar as unidades de medidas	1
Relacionar área com pagamento de impostos	2

Fonte: Análise dos dados da pesquisa, 2013.

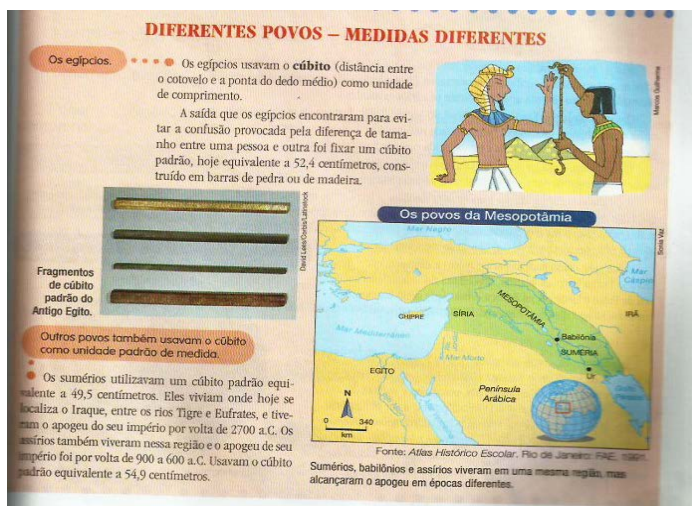


Imagem 1. Abordagem histórica.

Fonte: Livro 1.

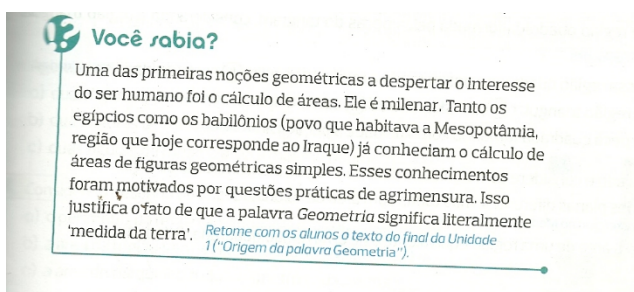


Imagem 2. Abordagem histórica.

Fonte: Livro 6.

b) Composição e decomposição de figuras

Tabela 2

Atividades de composição e decomposição encontrados nos livros didáticos

Método utilizado para compor/decompor figuras	Livro
Com malhas quadriculadas, lajotas, cerâmicas, placas, polígonos e etc.	1, 2, 3, 4, 5 e 6
Com o auxílio do tangram	1, 2, 4 e 6
Com pentaminós	2
Com malha triangular	1

Fonte: Análise dos dados da pesquisa, 2013.

Os livros utilizam a composição e a decomposição de figuras planas, para comparar áreas de figuras que possuem formas parecidas e áreas diferentes, formas diferentes e mesma área. Esse tipo de atividade nos parece importante para que se possa fazer uma distinção entre a figura e a área da figura, porém o campo numérico continua sendo enfatizado, pois as comparações sempre focam a contagem.

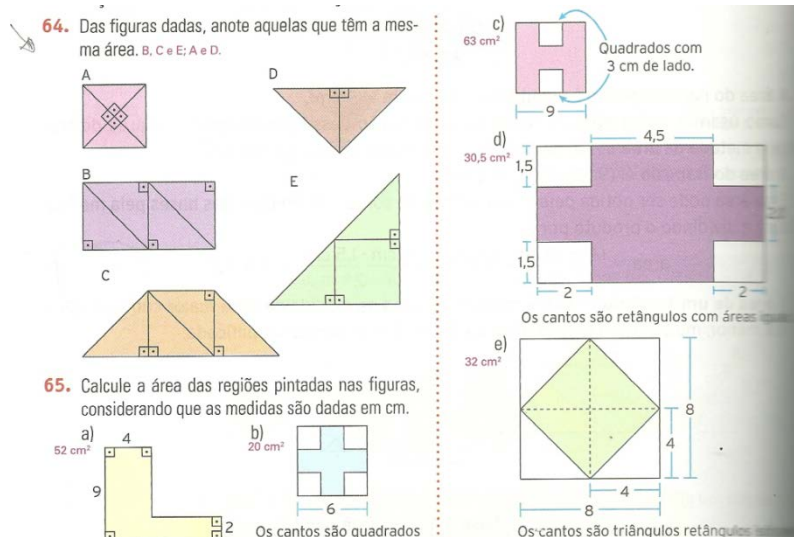


Imagem 3. Atividade de composição e/ou decomposição.

2 Fonte: Livro 2.

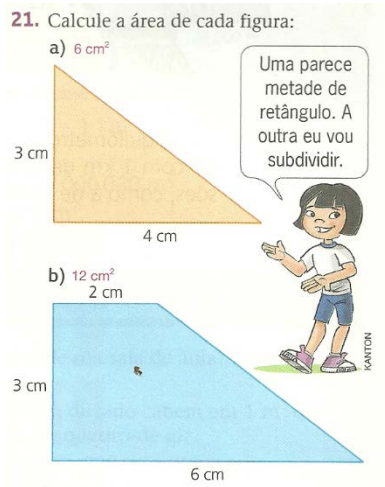


Imagem 4. Atividade de composição e/ou decomposição.
Fonte: Livro 3.

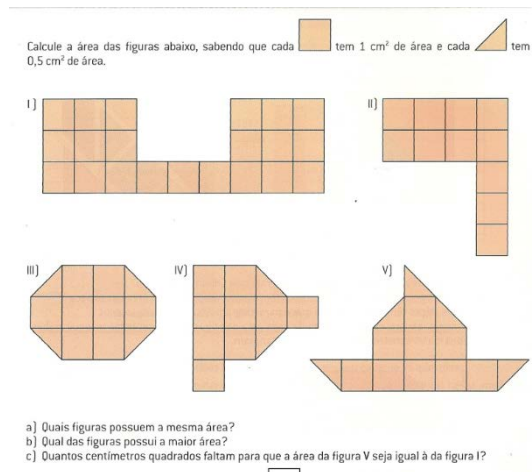


Imagem 5. Atividade de composição e/ou decomposição.
Fonte: Livro 4.

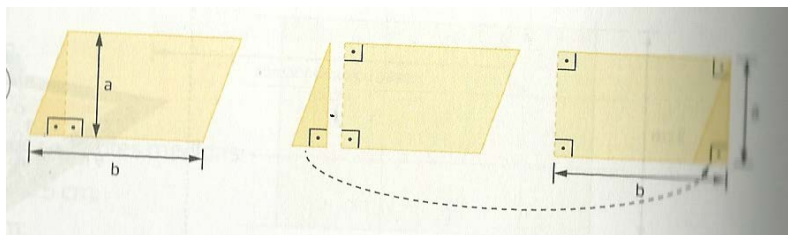


Imagem 6. Atividade de composição e/ou decomposição.
Fonte: Livro 5.

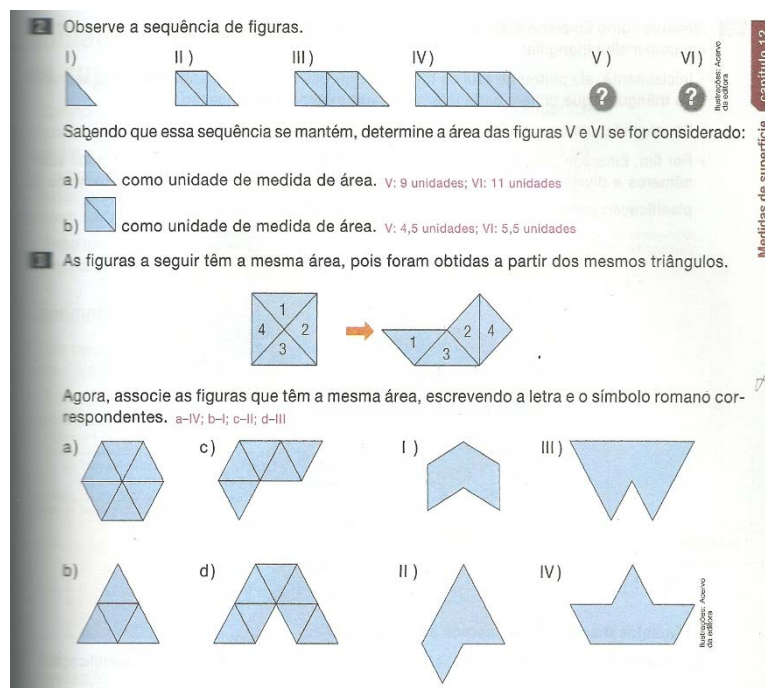


Imagem 7. Atividade de composição e/ou decomposição.

Fonte: Livro 6.

c) Unidades de medida de área padronizadas e não padronizadas

Unidades não padronizadas

Foram encontrados no capítulo que aborda área dos seis livros mais de dez unidades de medida não padronizadas como são descritas abaixo:

Tabela 3

Unidades de medidas não-padronizadas utilizados nos livros didáticos

Unidade de medida	Livro
Cerâmicas, lajotas, placas para revestimento em pisos e paredes.	1, 2, 3, 5 e 6
Campo de futebol	6
Folhas de papel	5 e 6
Peças do tangram	1, 2, 5 e 6
Pentaminós	2
Polígonos desenhados na malha quadriculada	2
Polígonos que compõem outros polígonos, como hexágono, losango, triângulo e trapézio.	2
Quadrado da malha quadriculada	1, 2, 3, 4, 5 e 6
Quadrados e triângulos desenhados fora das malhas	4 e 6
Triângulo da malha triangular	1 e 3

Fonte: Análise dos dados da pesquisa, 2013.

Em nossa visão esse tipo de escolha de unidades de medidas diferentes auxilia a compreensão de que a medida da área vai variar de acordo com a unidade escolhida, mas a área é conservada, favorecendo aí a distinção entre número e área.

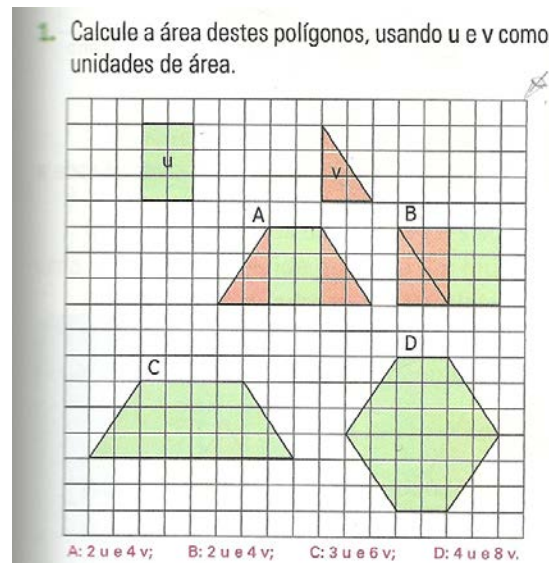


Imagem 8. Unidade de medida não-padronizada.

Fonte: Livro 2.

- 3 • Para medir a superfície de uma mesma figura, Edson utilizou as seguintes unidades.



Se ele utilizou 10 unidades do tipo c para cobrir essa figura, quantas unidades do tipo a ele utilizou? E quantas do tipo b? 40 unidades; 20 unidades

Imagem 9. Unidade de medida não-padronizada.

Fonte: Livro 4.

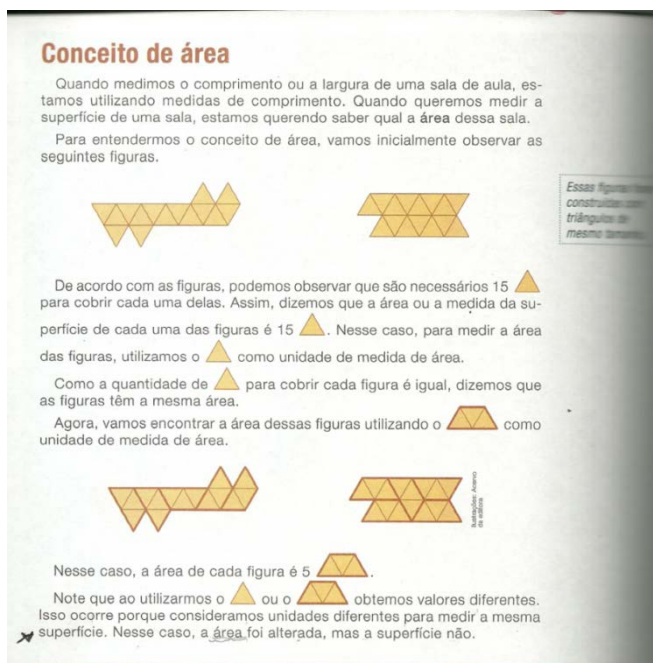


Imagem 10. Unidade de medida não-padronizada.

Fonte: Livro 6.

Unidades padronizadas

Tabela 4

Unidades de medidas padronizadas encontradas nos livros didáticos

Unidade de medida	Livro
km ²	2, 3, 4, 5 e 6
m ²	1, 2, 3, 4, 5 e 6
cm ²	1, 2, 3, 4, 5 e 6
dm ²	5
mm ²	3
Todos os múltiplo e submúltiplos	1 e 2
Hectare	1, 2, 3, 4, 5 e 6
Are	2
Alqueire	4 e 6

Fonte: Análise dos dados da pesquisa, 2013.**d) Recursos Didáticos**

Tabela 5

Tipos de Recursos didáticos utilizados nos livros didáticos

Recursos Didáticos	Livro
Dobraduras	4
Folhas de papel e/ou jornal	5 e 6
Gráficos	4
Mapas e plantas	4
Malha quadriculada	1, 2, 3, 4, 5 e 6
Malha triangular	1, 3 e 6
Placas para revestimento de pisos, jardins e regiões poligonais	1, 2 e 6
Pentaminós	2
Quadrados e/ou triângulos	3 e 6
Recurso Digital: Google Earth	6
Tinta	3

Fonte: Análise dos dados da pesquisa, 2013.**Considerações Finais**

Observamos que em todas as coleções o capítulo destinado a formalizar os conhecimentos sobre área se encontra nos últimos capítulo podendo assim dificultar o trabalho do professor e do aluno neste conteúdo. Partimos para essa observação tendo em vista que, embora a ordem do livro didático não seja uma sequência obrigatória a ser seguida, é uma sequência que geralmente o professor obedece.

Nos manuais para uso do professor podemos encontrar orientações diversas sobre como explorar esse conceito:

- A respeito do livro “A Conquista da Matemática”, não podemos informar sobre seu manual do professor, pois o exemplar analisado foi livro do aluno. A partir daí percebemos a importância de o professor possuir o manual do professor, pois no manual tem-se a extensão da sua formação e auxílio para interpretar o que foi/é proposto no livro-texto;

- No manual do professor do livro “Matemática – Ideias e Desafios” encontram-se alguns comentários sobre o que se espera que o aluno desenvolva no decorrer do capítulo e numa seção desse manual chama “Textos de Aprofundamentos” sugere-se uma atividade com o que ele chama de Primos do Dominó, os pentaminós;
- No “Matemática – Imenes e Lellis” ressalta o cálculo de área por decomposição e composição de figuras que o cálculo de área das figuras como trapézios, losangos e triângulos serão objeto de estudo de outros anos;
- A respeito do manual do professor do projeto RADIX, encontra-se alguns objetivos e atividades complementares, além de alguns jogos e malhas para reprodução;
- No “Projeto Teláris – Matemática” há um esclarecimento sobre o capítulo, dizendo que ele é conceitual e o aluno deve compreender a diferença entre as grandezas área e perímetro;
- No manual do “Vale a Pena Aprender Matemática” encontramos propostas de atividades de decomposição e composição, uso de malhas triangulares e quadriculadas nas representações de figuras não poligonais, o tangram, a construção do m^2 com jornal e ocupação por quatro alunos desse espaço, faz referência de elementos da pré-álgebra na elaboração de esquemas para representar uma região retangular cercada. A decomposição de um retângulo para compor um quadrado e do uso de recurso digital.

De uma maneira geral, observamos que todos os exemplares analisados fazem uso de malhas e de unidades não padronizadas no início do estudo para só depois avançar nos conceitos de unidades padronizadas, transformações e cálculo de área através de fórmulas e que mesmo os que tentam focar na distinção entre os quadros objeto, numérico e grandeza, acabam por enfatizar sempre o quadro dos objetos ou dos números.

Referências

- Bellemain, P. M., & Lima, P. (2002). *Um estudo nas noções de grandeza e implicações no ensino fundamental*. Natal: SBHMat 134p. Série Textos de História da Matemática: v. 8.
- Brasil. MEC. SEF. (2011). *Guia de livros didáticos: Anos finais do Ensino Fundamental*. Brasília.
- Brasil. MEC. SEF. (2014). *Guia de livros didáticos: Anos finais do Ensino Fundamental*. Brasília.
- Rosa, C., Ribas, L., & Barazzutti, M. (2012). *Análise de Livros Didáticos. Escola de Inverno de Educação Matemática*, 3. Santa Maria. Anais. 9p.
- Santana, W. (2006). *O uso de recursos didáticos no ensino do conceito de área: uma análise de livros didáticos para as séries finais do Ensino Fundamental* (Dissertação de Mestrado em Educação). Universidade Federal de Pernambuco, 2006.
- Silva J. (2007). O livro Didático de Matemática e o Tempo. *Revista de Iniciação Científica da FFC*, 7(1), 13-21.

Referência dos livros analisados

- Castrucci, B., & Giovanni Jr., J. (2009). *A conquista da Matemática*. FTD (6º ano).
- Onaga, D., & Mori, I. (2009). *Matemática: Ideias e Desafios*. Saraiva (6º ano).
- Imenes, L. M., & Lellis, M. (2009). *Matemática: Imenes e Lellis*. Moderna (6º ano).
- Ribeiro, J. (2009). *Projeto RADIX: Matemática*. Scipione (6º ano).
- Dante, L. R. (2013). *Projeto Teláris: Matemática*. Ática (6º ano).
- Patere, P. R., & Joamir, R. de. (2012). *Vontade de Saber Matemática*. FTD (6º ano).

Actividad de aprendizaje de estudiantes de sexto grado: las medidas de tendencia central desde las actividades orientadoras de enseñanza

Luz Cristina **Agudelo-Palacio**

Universidad de Antioquia

Colombia

cristiagud7@gmail.com

Diana Victoria **Jaramillo** Quiceno

Universidad de Antioquia

Colombia

diana_jaramillo@hotmail.com

Resumen

En esta comunicación presentamos un avance de una investigación cuyo objetivo es analizar el desarrollo de la actividad de aprendizaje de estudiantes del grado sexto de educación básica secundaria, pertenecientes a una institución pública de Medellín (Colombia), de las medidas de tendencia central, a través de la implementación de las *Actividades Orientadoras de Enseñanza* y bajo un paradigma cualitativo desde un enfoque fenomenológico-hermenéutico de investigación. El objeto de investigación es la actividad de aprendizaje. Así, la pregunta orientadora de esta investigación es ¿Cómo se desarrollan las *actividades de aprendizaje* de las medidas de tendencia central de niños de sexto grado, desde las *actividades orientadoras de enseñanza*? La fundamentación epistemológica, teórica y metodológica del estudio está basada en la perspectiva histórico-cultural de la educación matemática.

Palabras clave: Perspectiva histórico-cultural, Teoría de la actividad, Actividad pedagógica, Estadística escolar.

Presentación

En esta comunicación presentamos una propuesta de investigación cuyo propósito es analizar la *actividad de aprendizaje*, de estudiantes del grado sexto, de las medidas de tendencia central, desde las *actividades orientadoras de enseñanza*. Estos estudiantes pertenecen a una institución pública de la ciudad de Medellín (Colombia).

El objeto de investigación es la *actividad de aprendizaje*, de estudiantes de sexto grado, de las medidas de tendencia central. La pregunta orientadora de esta investigación es: ¿Cómo se desarrolla la *actividad de aprendizaje*, de niños de sexto grado, de las medidas de tendencia central, desde las *actividades orientadoras de enseñanza*?

Esta investigación se desarrollará bajo un paradigma cualitativo, desde un enfoque fenomenológico-hermenéutico. La fundamentación epistemológica, teórica y metodológica del estudio está basada en la perspectiva histórico-cultural de la educación matemática.

Presentamos, a continuación, el planteamiento del problema de investigación; el horizonte teórico desde donde nos aproximamos a asuntos como la *actividad*, la *actividad pedagógica*, la *actividad de aprendizaje*, aprendizaje de las medidas de tendencia central y *actividades orientadoras de enseñanza*; el objetivo de la investigación; el diseño metodológico del estudio; y, por último, algunas conclusiones que hemos obtenido hasta el momento.

Planteamiento del problema

El objeto de estudio central en esta investigación es la *actividad de aprendizaje*, de estudiantes de sexto grado, de las medidas de tendencia central. *Actividad* que está enmarcada en los presupuestos de la *teoría de la actividad* presentados por Davidov (1988) y discutidos en educación matemática por Moura (2010), entre otros autores. Este objeto será estudiado a partir del diseño, puesta en escena y análisis de algunas *actividades orientadoras de enseñanza* (Moura, 2010) relacionadas, específicamente, con las medidas de tendencia central, y dirigidas a estudiantes de sexto grado.¹

Este objeto de investigación surgió desde cuatro componentes: el ambiente escolar; el aprendizaje; el aprendizaje de las medidas de tendencia central; y, por último, estrategias para el aprendizaje de estos elementos estadísticos. Estos componentes dan lugar a la justificación del problema de investigación desde tres elementos: de orden teórico, de orden práctico y de orden metodológico.

Como profesoras estamos interesadas, también, en contribuir en la formación de los estudiantes como sujetos activos y prospectivos de la sociedad en la cual se encuentren inmersos. Estudiantes con un pensamiento crítico desarrollado.

Jaramillo (2009), refiriéndose a las necesidades actuales de la educación, expresa:

(...) Social y políticamente estamos inmersos en el fenómeno de globalización y es en ese escenario que transcurren nuestras acciones y nuestro cotidiano. Entender este fenómeno como telón de fondo en la educación se hace necesario para comprender cómo se transforma el currículo y algunos aspectos inherentes a él ² (p. 153).

En el mismo sentido, Pérez-Jiménez (2003) enuncia que ese fenómeno de globalización nos ha llevado a "entender cómo se ha acelerado la existencia de un mundo cada vez más diverso, heterogéneo y llevado a aceptar la diversidad cultural como un común denominador de las prácticas sociales cotidianas" (p. 39). Así, como profesoras, consideramos que los estudiantes deben estar preparados para moverse dentro de ese fenómeno de la globalización y de la diversidad cultural, pero también de diversidad informativa.

Los sistemas económicos, políticos, sociales y culturales actuales exigen de las personas tener conocimientos sobre la organización, el manejo y la interpretación de una gran cantidad de datos los cuales son fruto de esa diversidad informativa. Esta es una de las razones por las cuales la educación estadística, en palabras de Batanero (2000), "se ha incorporado, de forma generalizada, al currículo de matemáticas de la enseñanza primaria y secundaria" (p. 41). Batanero (2000) expresa, también, que esta inclusión de la estadística en la escuela se debe, en

¹ El sistema educativo colombiano se encuentra organizado en Educación Básica Primaria, en Educación Básica Secundaria y Educación Media. La Educación Básica Secundaria comprende los grados de sexto a noveno.

² Esta y las demás traducciones que aparecen en el texto son propias.

gran medida, al trabajo desarrollado por el Instituto Internacional de Estadística (ISI) a lo largo de tres décadas, desde la promoción de diversos congresos y publicaciones orientados a tal fin.

A casi quince años de esa incorporación generalizada de la educación estadística, referida arriba, y a pesar del reconocimiento que ha tenido la enseñanza de la estadística en el ámbito internacional, consideramos que continúan presentándose dificultades en los procesos de enseñanza y, consecuentemente, en los procesos de aprendizaje relacionados con el conocimiento de lo aleatorio y de los sistemas de datos”.

Un ejemplo de ello, es el caso específico de los estudiantes del grado sexto. Estos estudiantes que inician el ciclo de Educación Básica Secundaria, de acuerdo con los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006), estarían en la capacidad de comprender las medidas de tendencia central y de utilizarlas en situaciones cotidianas. Sin embargo, esta capacidad no parece reflejarse en la solución de ciertos problemas que se les plantean³.

Lo anterior nos ha llevado a preguntarnos acerca del cómo se ha dado el proceso de *aprendizaje* de estadística dentro de los diferentes ambientes escolares colombianos; y, también, acerca de las estrategias que los maestros han utilizado para posibilitar ese *aprendizaje*.

De otro lado, desde la experiencia que hemos tenido como profesoras, continuamente reflexionamos respecto a las estrategias e instrumentos que utilizamos para trabajar en el aula. Somos conscientes de que año tras año llegan a la escuela estudiantes en condiciones sociales, culturales, políticas y económicas diferentes. Pensamos, entonces, si los sujetos —y sus condiciones— que concurren a la escuela se transforman, las metodologías de trabajo en el aula bajo las cuales se orientan los procesos de enseñanza y los procesos de aprendizaje también lo deberían hacer, aún más si se tiene en cuenta que la información a la cual tienen acceso los estudiantes es mucho mayor.

Respecto a ese rol de la escuela frente al proceso de *aprendizaje* del conocimiento matemático, específicamente, Zilberman, Castro y Chara (2008) plantean que:

La concepción que cada persona se va formando de la matemática depende del modo en que va conociendo y usando los conocimientos matemáticos. En este proceso, la escuela tiene un rol fundamental, ya que es allí donde se enseña y se aprende de un modo sistemático a usar la matemática. El tipo de trabajo que se realice en la escuela influirá fuertemente en la relación que cada persona construya con la ciencia, lo que incluye el hecho de sentirse o no capaz de aprenderla (p.18).

Así, desde ese punto de vista, pensamos en la importancia del maestro sobre ese trabajo en el aula, sobre cuál ha de ser la manera de posibilitar la construcción de una “buena” relación con la ciencia. Dicho de otra manera, entendemos cada vez más la importancia que el maestro tiene para posibilitar en sus estudiantes el aprender y el apropiarse de un conocimiento matemático. Un conocimiento en una perspectiva histórico-cultural, que al decir de Jaramillo (2011):

En esta perspectiva, el conocimiento —que emerge, entre otras cosas, de la interacción social, de la dialéctica entre hombre y naturaleza, y entre individuo y colectivo— las formas

³ A modo de información, el Instituto Colombiano para el Fomento de la Evaluación de la Educación (ICFES), encargado de la planeación, construcción y ejecución de las pruebas estandarizadas para los estudiantes de las diferentes instituciones educativas del país, ha presentado en sus informes (2009-2013) cómo dicho componente evaluado en el núcleo común de matemáticas es el componente con menor puntaje y de más bajo de desempeño en los estudiantes colombianos.

como el sujeto accede a él se constituyen como unidad y, al mismo tiempo, (re)constituyen al propio sujeto, a su subjetividad (p.14).

Moura, Sforzi y Araújo (2011) consideran que, al conocer, esa apropiación que hacen los sujetos de los bienes culturales, la cual constituye una finalidad educativa, "nos coloca delante del desafío de encontrar los medios de enseñanza que promuevan esa apropiación" (p. 40), apropiación que de manera general:

[...] Expresa las relaciones esenciales del individuo y la experiencia social. El proceso de apropiación lleva al individuo a la reproducción, en su propia *actividad*, de las capacidades humanas formadas históricamente. Durante la reproducción el niño realiza una *actividad* que es adecuada (pero no idéntica) a la *actividad* encarnada por las personas en estas capacidades (Davidov, 1988, p. 56).

¿Cómo hace el profesor para promover esa apropiación, por parte del estudiante? Para estos autores, la respuesta a esta pregunta hace parte de lo que ellos llaman la organización de la enseñanza que hace el profesor.

Moura, Araújo, Dias, Panossian, & Dias (2010) enuncian que el concepto de *actividad*, propuesto por Leontiev (1978,1983), posibilita fundamentar el trabajo del profesor en cuanto a la organización de la enseñanza —*actividad de enseñanza*—, y, el trabajo del estudiante en cuanto a la apropiación de conocimiento matemático —*actividad de aprendizaje*—. Esa unidad dialéctica entre la *actividad de aprendizaje* y la *actividad de enseñanza* constituyen, al decir de los autores, la *actividad pedagógica* (Moura, 2010).

Dentro de la perspectiva histórico-cultural y a la luz de las reflexiones sobre la *actividad pedagógica* el “Grupo de Estudios e Investigaciones sobre la Actividad Pedagógica (GEPAPe)”⁴ se destaca, en el Brasil, por la planeación, elaboración y puesta en marcha de diversos proyectos de investigación relacionadas con la *actividad de enseñanza*, orientada hacia la formación de maestros en formación inicial y continuada; y otros proyectos relacionados con la *actividad de aprendizaje* de estudiantes de varios grados de escolaridad.

En nuestro medio, trabajos como el de Pérez (2014), enmarcados en la *actividad pedagógica* han posibilitado una mayor comprensión sobre la *actividad de enseñanza* que llevan a cabo profesores de grados de iniciación escolar. Cadavid y Quintero (2011), también apoyadas en los presupuestos de la *Teoría de la Actividad*, muestran en su trabajo cómo se da la *actividad de aprendizaje*, desde procesos de objetivación y subjetivación, del concepto matemático de función, de estudiantes de grado once, a partir de *actividades orientadoras de enseñanza*. Cadavid y Cruz (2011), por su parte y desde los mismos presupuestos, observan cómo las *actividades orientadoras de enseñanza* les posibilitan a los estudiantes "construir sentidos y significados para el concepto de parábola, desde la comprensión de fenómenos en el medio" (p. vi).

Moura (1996a, 2002), citado por Moura et al. (2010), propone el concepto de *actividad orientadora de enseñanza* como una alternativa para superar el desafío que se le presenta al profesor relacionado con la organización de la enseñanza. Así, las *actividades orientadoras de enseñanza* constituyen una estrategia que mantiene la estructura de *actividad* y, en ese sentido,

⁴ El grupo GEPAPe se encuentra adscrito a la Facultad de Educación de la Universidad de São Paulo (Brasil) y sus coordinadores son el profesor Manoel Oriosvaldo de Moura y la profesora Elaine SampaioAraújo.

"concretizan la apropiación de la cultura en el contexto de la educación escolar" (Moura et al. 2010, p.99).

Bajo las anteriores consideraciones, vemos en las *actividades orientadoras de enseñanza* una forma de organizar los procesos de enseñanza, en este caso relacionados con las medidas de tendencia central, pero fundamentalmente, las vemos como una posibilidad para contribuir en el desarrollo de las *actividades de aprendizaje* de los estudiantes de sexto grado, referidas a esa temática y que transgredan las dificultades que se han observado en los estudiantes.

De esta manera, pasamos a enunciar la pregunta que orienta el estudio aquí presentado: ¿Cómo se desarrolla la *actividad de aprendizaje* en niños de sexto grado, de las medidas de tendencia central, desde las *actividades orientadoras de enseñanza*?

Horizonte teórico

Teniendo como referencia una perspectiva histórico-cultural, hemos destacado algunas lecturas, unas de ellas relativas a la *actividad*, y, específicamente a la *actividad de aprendizaje*; otras relacionadas al aprendizaje de las medidas de tendencia central; y las referidas a las *actividades orientadoras de enseñanza*.

La actividad

Para Davidov (1988) la *actividad* es comprendida desde la relación del sujeto —como ser social— con la naturaleza, en procura de su propia transformación. En este caso, no se trata apenas de la *actividad*, se trata, sí, de la *actividad humana*. Frente a esta última, Moura (2010) expresa:

Para que una *actividad* se configure como humana, es esencial, entonces, que sea movida por una intencionalidad, siendo esta, a su vez, una respuesta a la satisfacción de necesidades que se le imponen al hombre en su relación con el medio en que vive, natural o culturizado (p.17).

Así, consideramos que la *actividad humana* es un conjunto de acciones que el sujeto realiza, movilizado desde una intencionalidad para satisfacer algunas necesidades en su relación con el medio que habita.

Moura (2010) se refiere a dos tipos de necesidades que pueden originar la *actividad humana*: por un lado, las necesidades biológicas; y, de otro lado, las necesidades de carácter histórico-cultural. Sánchez Vázquez (1977), citado por Moura (2010), aclara que, aunque algunas de esas necesidades pueden tener semejanzas con las de ciertos animales, la *actividad humana* es inseparable de la *actividad* de la conciencia y constituye una parte esencial de ella. En palabras de Moura (2010):

No es posible comprender la *actividad* humana sin su relación con la conciencia, pues esas dos categorías forman una unidad dialéctica. En las relaciones entre la conciencia y la *actividad*, la conciencia es la forma específicamente humana del reflejo psíquico de la realidad, es decir, es la expresión de las relaciones del individuo con el mundo social, cultural e histórico, que abre al hombre un cuadro del mundo en el que él mismo está insertado. La conciencia se refiere, así, a la posibilidad humana de comprender el mundo social e individual como posibilidad de análisis (Moura, 2010, p. 20).

Retomando los planteamientos iniciales de la *Teoría de la Actividad*, Leontiev (1978), citado por Moura (2010), expresa que no basta con la necesidad, también se requiere del motivo que orienta la *actividad* y, desde allí, se piensa en la *actividad* como un sistema dinámico.

La *actividad* no solo se encuentra en relación directa con la conciencia, sino que, además, existe un elemento que fundamentalmente la humaniza y que posibilita el desarrollo de la cultura: el trabajo. El trabajo considerado como una "*actividad* humana por excelencia" (Moura 2010, p. 16). El trabajo entendido como un "proceso del que participan el hombre y la naturaleza. Proceso en el que el ser humano con su propia acción, impulsa, regula y controla su intercambio de material con la naturaleza" (Marx, 2002, citado por Moura, 2010, p. 19).

Según Moura (2010), es de resaltar que "la comprensión del concepto de *actividad* en su vinculación con el concepto de trabajo, trae implicaciones para el concepto de educación, en especial para la educación humanizadora, tal y como se entiende dentro de la teoría histórico-cultural" (Moura, 2010, p. 24).

Así, resulta importante constituir situaciones para la realización del trabajo del profesor, por ejemplo del trabajo en el aula de clase que posibiliten esa postura de la *educación por el trabajo* a partir del aprendizaje de las matemáticas. Entendemos, con Moura (2010), la educación como esa "vía para el desarrollo psíquico y principalmente humano y no como mera adquisición de contenidos y habilidades específicas" (p.28).

La actividad pedagógica

Comprendemos con Moura (2010) la *actividad pedagógica* como esa unidad dialéctica entre la *actividad de enseñanza* y la *actividad de aprendizaje*. *Actividad pedagógica* asumida como esas acciones, operaciones, necesidades y motivos sobre los cuales se posibilita esa movilización de la conciencia y la constitución de la enseñanza y del aprendizaje como *actividades humanas*. En este sentido, Rigon, Bernardes, Moretti & Cedro (2010), citados por Pérez (2014), dicen:

En lo que se refiere al desarrollo humano vinculado al proceso educativo, se debe dar énfasis al estudio de la *actividad pedagógica*, como unidad dialéctica entre la enseñanza y el aprendizaje, mediada por los significados sociales elaborados por el hombre y constituyentes de los individuos que tienen acceso al conocimiento elaborado históricamente (p. 16).

Para comprender esa *actividad pedagógica* y, particularmente, la *actividad de aprendizaje*, se debe tener presente que el objeto de la *actividad pedagógica* "es la transformación de los individuos en el proceso de apropiación de los conocimientos y saberes" (Moura, 2010, p. 24). Esa transformación se realiza por medio de la *actividad*, ya sea teórica o práctica, y se hace visible o se materializa en una necesidad humana, la necesidad de apropiarse de algunos elementos de la cultura a la cual está vinculado.

Es de aclarar que los autores Moura et al. (2010) expresan que en la *actividad pedagógica* "la *actividad de enseñanza* y la *actividad de aprendizaje* solo pueden ser separadas para fines de explicación didáctica" (p. 100). Por lo anterior, consideramos posible dentro de este trabajo centrar el interés investigativo en la *actividad de aprendizaje*.

La actividad de aprendizaje

El aprendizaje, como lo define Vigotski (2002), citado por Moura (2010), "presupone un carácter social específico y un proceso a través del cual los niños penetran en la vida intelectual de quienes los rodean" (p. 83). Así, la *actividad de aprendizaje* es una *actividad* en la cual los estudiantes hacen una "*apropiación teórica de la realidad*" (Davidov, 1988, p. 76), que, como ya hemos dicho, en el caso particular de esta investigación se desarrolla paralelamente con la *actividad de enseñanza*.

Moura (2010) plantea que para que el aprendizaje ocurra es necesario que el estudiante se encuentre en *actividad*, es decir, que tenga un motivo producto de su intención de satisfacer una necesidad y que de acuerdo con ello plantee una serie de acciones. Moura (2010) llama la atención sobre ese "motivo de aprender". Para este autor, el motivo de aprender es "fundamentalmente una función educativa, que viene siendo menospreciada por gran parte de los educadores" (p.32). Esta se ha convertido en otra razón importante para centrar el interés en esa *actividad de aprendizaje*.

En la unidad dialéctica, que constituyen la *actividad de aprendizaje* y la *actividad de enseñanza*, que da lugar a la *actividad pedagógica*, no es posible separar una de la otra, ya que el motivo que convoca al profesor debe ser convergente, en algún momento de la clase, con el motivo que convoca al estudiante. Motivo referido, en el caso específico de este trabajo a la enseñanza y el aprendizaje de un conocimiento matemático y estadístico (histórica y culturalmente construido). Desde esta perspectiva, y concordando con Moura (2010), la escuela se constituye en el "espacio de aprendizaje y apropiación de la cultura humana elaborada, bien como del modo de proveer a los individuos, metodológicamente, de las formas de apropiación y creación de herramientas simbólicas para el desarrollo pleno de sus potencialidades" (p.82).

Sobre el aprendizaje de las medidas de tendencia central

Los autores Ponte, Brocardo, y Oliveira (2009) expresan que la estadística es un tema relativamente nuevo en el currículo de matemáticas y que algunas de las maneras como este ha sido abordado la ha llevado a considerarse un tema poco agradable de enseñar y de aprender, pero que, no obstante, "desempeña un papel esencial para la educación para la ciudadanía" (p. 91). Batanero y Godino (2002) anotan que en ese panorama actual de la estadística descriptiva, la finalidad principal es presentar resúmenes de un conjunto de datos y de sus características, sin extender, en la mayoría de los casos, las conclusiones a otros datos o poblaciones.

Batanero (2000), al hablar de manera específica del significado y comprensión de las medidas de tendencia central, asegura que "ayudar a los niños y a los jóvenes a comprender progresivamente las ideas estocásticas fundamentales no es un tarea sencilla, puesto que es necesario adaptar estas ideas a sus capacidades cognitivas y diseñar situaciones didácticas que propicien el aprendizaje significativo" (p. 41). Ponte, Brocardo y Oliveira (2009) también expresan que la moda, la media y la mediana son tres medidas que se pueden usar en la caracterización de un conjunto de datos pero que su comprensión en los estudiantes aún es compleja.

Sanchez y Batanero (2011) indican que "muchos profesores suelen creer que la enseñanza de las medidas de tendencia central consiste en promover el aprendizaje de sus definiciones y de los procedimientos para obtenerlas, descuidando sus propiedades y significados" (p. 90). Esto, aunado a otra apreciación de Batanero (2000), "no todos [los profesores] han tenido una formación didáctica específica" (p. 41), no deja ver un panorama alentador cuando se trata de hablar del aprendizaje de estos tópicos.

Sanchez y Batanero (2011) dan un ejemplo en el cual los estudiantes saben calcular la media aritmética, pero la comprensión e implicación de sus propiedades no se logra observar. Investigaciones en esa dirección, llevan a reflexiones en torno de la *actividad de aprendizaje*: ¿los estudiantes se encuentran o no en *actividad de aprendizaje* y consiguen o no la apropiación de ese conocimiento relacionado con las medidas de tendencia central? Este tipo de reflexiones, sin duda, nos lleva a pensar que hay una necesidad inminente de que los maestros diseñen

actividades que movilicen otro tipo de procesos en los estudiantes. *Actividades* que les posibiliten a los estudiantes la apropiación de esas medidas de tendencia central.

Actividades orientadoras de enseñanza

En conformidad con los presupuestos de la teoría histórico-cultural, tal y como lo habíamos mencionado, Moura (2010), y su grupo de investigación, proponen las *actividades orientadoras de enseñanza* como una propuesta de organización de la *actividad de enseñanza* y de la *actividad de aprendizaje*.

Cadavid y Quintero (2011) expresan "las *actividades orientadoras de enseñanza* proponen pensar, planear y desarrollar los encuentros en el aula de clase procurando interacciones que posibiliten retomar el conocimiento matemático socialmente construido" (p.12). Por su parte, Pérez (2014) expresa que "las *actividades orientadoras de enseñanza* dan pie a otra mirada de la enseñanza y del aprendizaje como *actividades* que aportan al desarrollo del pensamiento teórico de los estudiantes" (p.19). Bajo nuestra comprensión, y a la luz de esas apreciaciones, las *actividades orientadoras de enseñanza* constituyen una propuesta metodológica que, partiendo de la organización de la enseñanza, posibilita en los estudiantes la apropiación de un conocimiento matemático, que al ser socialmente construido, da lugar a la interacción del estudiante con la realidad y a desarrollar, así, su *actividad de aprendizaje*.

Moura et al. (2010) reafirman que la *actividad orientadora de enseñanza*:

[...] Es la mediación en la *actividad* del profesor, que tienen como necesidad la enseñanza de un contenido al sujeto en *actividad*, cuyo objetivo es la apropiación de ese contenido entendido como un objetivo social. [...] Así, el profesor, al organizar las acciones que objetivan el enseñar, también recualifica sus conocimientos, y es ese proceso que caracteriza la *actividad orientadora de enseñanza* como unidad de formación del profesor y del estudiante (p. 100).

Por lo anterior es que he seleccionado las *actividades orientadoras de enseñanza* como la posibilidad teórica y metodológica para llevar a cabo este estudio. Así, presento a continuación el objetivo de esta investigación.

Objetivo

Analizar la *actividad de aprendizaje* de estudiantes de sexto grado, de las medidas de tendencia central, desde las *actividades orientadoras de enseñanza*.

Diseño metodológico

En la Figura 1 presento, de manera general, un mapa de la investigación, donde establezco la relación entre ese horizonte conceptual que voy elaborando y el problema mismo de la investigación.



Figura 1. Mapa de la investigación.

Esta investigación está orientada desde un paradigma de investigación cualitativo, bajo un enfoque fenomenológico-hermenéutico, con una producción conjunta de registros y datos a partir de las *actividades orientadoras de enseñanza*, y, finalmente se realizará un estudio de casos para la interpretación y el análisis de los datos constituidos a partir de los registros.

El trabajo de campo de la investigación fue realizado con estudiantes del grado sexto de Educación Básica Secundaria, ubicada en la comuna 5 de la ciudad de Medellín (Colombia). En la institución existen tres grupos de sexto grado, de los cuales una de nosotras es la maestra titular en las asignaturas de matemáticas y geometría.

Para efectos de la investigación, en cuanto al análisis de los resultados, ha sido seleccionado el grupo cuya distribución horaria podría favorecer el desarrollo del trabajo de campo.

Paradigma cualitativo de investigación

La investigación de manera general, "ya sea cualitativa o cuantitativa, es una *actividad* científica que provee los fundamentos para los informes y las representaciones del 'otro'" (Denzin & Lincoln, 2012, pág. 43). Pero cada una de ellas se encuentra interesada en interpretar o explicar un fenómeno, concepto o situación de manera diferente.

Creswell (2009), en su texto sobre paradigmas de investigación, expresa que algunos elementos que constituyen una investigación cualitativa es que incluye a los diversos estamentos que participan, sus experiencias posibilitan interactuar más a fondo con la audiencia, y esto puede mejorar la comprensión de un tópico, sus configuraciones, las interpretaciones de los participantes y el investigador con respecto a un fenómeno. Estas razones hacen que la investigación cualitativa posibilite analizar otros aspectos que van más allá de la cantidad, y esto "a menudo conduce a compromisos en la capacidad para revelar la información" (Creswell, 2009, p. 177).

Dado que el objetivo de esta investigación hace referencia al análisis de la *actividad de aprendizaje*, el paradigma de investigación cualitativa, bajo las concepciones arriba explicitadas, nos posibilita esas otras miradas con respecto al proceso de apropiación de los estudiantes de un conocimiento específico. Concordamos con Denzin y Lincoln (2012) cuando expresan que "la investigación cualitativa es una *actividad* situada, que ubica al observador en el mundo. Consiste en una serie de prácticas materiales e interpretativas que hacen visible el mundo y lo

transforman, lo convierten en una serie de representaciones" (p. 48). Razón por la cual hemos seleccionado este paradigma.

Enfoque fenomenológico-hermenéutico

Teniendo en cuenta que el interés de este trabajo de investigación se encuentra centrado en el análisis de la *actividad de aprendizaje* y en la interpretación de las diversas situaciones que se desarrollan en torno a dicha *actividad*, estos elementos entran en diálogo con lo planteado dentro del enfoque fenomenológico-hermenéutico.

En este enfoque la ciencia "consiste en la comprensión de los fenómenos en sus varias manifestaciones, en la elucidación de los supuestos, de los mecanismos ocultos, de las implicaciones, de los contextos en los cuales se fundamentan los fenómenos." (Sánchez, 1998, págs. 64-65). Así, destacamos la concordancia de esta mirada de ciencia con lo planteado en esta propuesta, donde un aspecto relevante es la comprensión de esos fenómenos, de sus manifestaciones, esto es, en este caso, de la *actividad de aprendizaje* de los estudiantes de sexto grado, sujetos de la investigación.

Producción conjunta de registros y datos

Denzin y Lincoln (2012) consideran que "los investigadores cualitativos despliegan una amplia gama de prácticas interpretativas interconectadas con la esperanza de obtener un mejor conocimiento del objeto de estudio que tienen entre manos" (p. 49).

Para esta investigación y acorde los presupuestos planteados por Creswell (2009) y Denzin y Lincoln (2012) se utilizarán algunos instrumentos para posibilitar la producción de registros y posteriores prácticas interpretativas, a saber:

Documentos entendidos como registros escritos de las *actividades orientadoras de enseñanza* que sean propuestas a los estudiantes. Tendremos en cuenta los cuadernos u otros elementos usados para los apuntes de los estudiantes durante el desarrollo de los encuentros. Será también considerado el diario reflexivo de la investigación, elaborado para dar cuenta de las diversas observaciones y reflexiones que vamos construyendo a medida que los estudiantes desarrollan las *actividades*.

Materiales audio-visuales como fotografías, grabaciones y videos de los diferentes encuentros que se tengan con los estudiantes.

Entrevistas semiestructuradas que provean información directa o indirectamente sobre las diferentes formas de *aprendizaje* de los estudiantes/sujetos de la investigación.

Análisis de datos

Para la sistematización de los registros y para el análisis de los datos hemos considerado el estudio de casos y una triangulación de la información para posibilitar, finalmente, la emergencia de unas categorías de análisis. Las unidades de análisis serán los enunciados escritos u orales de los niños de sexto grado, protagonistas de esta investigación.

Estudio de casos. Las *Actividades orientadoras de enseñanza* han sido realizadas con todos los estudiantes que pertenecen al grado sexto de la institución educativa; pero con la intención de tener un análisis a mayor profundidad implementamos el estudio de casos con tres estudiantes, que han sido seleccionados de acuerdo a sus participaciones durante el desarrollo de las *actividades orientadoras de enseñanza*. Hemos seleccionado este método ya que concuerda con

Yin (2003) cuando enuncia que "es usado en muchas situaciones, al contribuir con nuestro conocimiento de lo individual, grupal, organizacional, social, político, y relato fenomenológico" (p.1).

Triangulación de la información. Se está realizando una triangulación entre los registros y datos referidos a los estudiantes, el diario reflexivo de investigación, nuestras interpretaciones como investigadoras y los referentes teóricos asumidos.

Categorías emergentes. Esperamos que, resultado de este análisis, emerjan algunas categorías. Estas categorías se constituirán en el cuerpo central de la investigación y de la relatoría final de la misma.

A modo de conclusiones

Este estudio está en su etapa terminal, es decir estamos culminando el análisis. Sin embargo, podemos decir, de manera genérica que hemos logrado apreciar de manera general en los estudiantes otras prácticas en su *actividad de aprendizaje*. Prácticas donde se evidencia un aumento en su participación en los diálogos de clase, una actitud activa y de argumentación frente al trabajo de la asignatura de matemáticas.

De manera más específica, en cuanto a los procesos de socialización y puesta en común de las diversas *acciones* adelantadas en el marco de cada una de *actividades orientadoras de enseñanza* propuestas, los estudiantes han tenido la oportunidad de acceder a información con la cual no estaban familiarizados; también han desplegado diversas estrategias que les posibilitan presentar dicha información y generar discusiones dentro de los grupos de trabajo que se han constituido.

Un último elemento que hasta ahora podemos destacar, es la importancia de que el maestro tenga un objeto/motivo claro (Radford, 2011) a la hora de la organización de la enseñanza y bajo el cual él ha diseñado las *actividades orientadoras de enseñanza*. Objeto/motivo que ha de ir al encuentro del estudiante, durante la clase. En ese sentido, es el maestro, como "experto" de ese conocimiento matemático históricamente construido, el posibilitador de la *actividad de aprendizaje* por parte de los estudiantes.

Referencias bibliográficas

- Batanero, C. (2000). Significado y comprensión de las medidas de posición Central. *UNO*, 41-58.
- Batanero, C., & Godino, J. (2002). Estocástica y su didáctica para maestros. En J. D. Godino, *Fundamentos para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros* (pp. 693-766). Granada: Facultad de Ciencias de la Educación. Universidad de Granada.
- Cadavid, L. A., & Quintero, C. P. (2011). *Función: Proceso de objetivación y subjetivación en clase de matemáticas*. Medellín: Universidad de Antioquia.
- Cadavid, S., & Cruz, A. (2011). *El proceso de objetivación del concepto de parábola desde el uso de artefactos*. Medellín: Facultad de Educación, Universidad de Antioquia.
- Creswell, J. W. (2009). *Research Desing. Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches*. Los Angeles: Sage.
- Davidov, V. (1988). *La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico*. Moscu: Editorial Progreso.
- Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (2012). *El campo de la investigación cualitativa*. Barcelona: Editorial Gedisa S.A.

- Jaramillo, D. (2009). Entre o saber cotidiano e o saber escolar: um olhar a partir da etnomatemática. Utopia ou realidade? En C. Lopes, & A. Nacarato, *Educacao matemática, leitura e escrita. Armadilhas utopias e realidade* (pp. 153-177). Campinas: Mercado de letras.
- Jaramillo, D. (2011) “La educación matemática en una perspectiva sociocultural: tensiones, utopías, futuros posibles”, *Revista Educación y Pedagogía*, 23(59), 13-36. Enero-abril. Universidad de Antioquia, Facultad de Educación, Medellín.
- MEN. (2006). *Estandares básicos de competencias en matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Moura, M. O. (2010). (Org.). *A actividade pedagógica na teoria histórico-cultural*. Brasília: Liber livro.
- Moura, M. O., Araújo, E. S., Dias, F., Panossian, M. L., & Dias, V. (2010). A actividade orientadora de ensino como unidade entre ensino e aprendizagem. Em M. O. Moura, *A actividade pedagógica na teoria histórico-cultural* (pp. 81-110). Brasília: Liber Livro.
- Moura, M. O., Sforzi, M. S., & Araújo, E. S. (ene/abril de 2011). Objetivacao e apropriacao de conhecimentos na actividade orientadora de ensino. *Teoria e Prática da Educacao*, 14(1), 39-50.
- Pérez, D. (2014). *Mobilización del sentido personal del maestro que enseña matemáticas sobre su actividad pedagógica desde las actividades orientadoras de enseñanza*. Medellín: Facultad de Educación. Universidad de Antioquia.
- Pérez-Jiménez, C. (2003). Formación de docentes para la construcción de saberes sociales. *Revista iberoamericana de Educación*, 33, 37-54.
- Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2009). *Investigacoes Matemáticas na Sala de Aula*. Belo Horizonte: Autentica Editora.
- Rorth, W., & Radford, L. (2011) *A Cultural-Historical Perspective on Mathematics Teaching and Learning*. Rotterdam: Sense Publishers.
- Sanchez, E., & Batanero, C. (2011). Manejo de la información. En *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas escolares: casos y perspectivas*. (pp. 79-108). Argentina: Instituto Politécnico Nacional.
- Sánchez, S. (1998). *Fundamentos para la investigación Educativa. Presupuestos epistemológicos que orientan al investigador*. Bogotá: Editorial Magisterio.
- Yin, R. K. (2003). *Case Study Research. Design and Methods*. Los Angeles: Sage.
- Zilberman, G., Castro, A., & Chara, S. (2008). *Matemática 2. Serie cuadernos para el aula*. Buenos Aires: Consejo Federal de Educación y Cultura.

Alguns exemplos da relação entre o Pensamento Matemático Avançado e as ideias de Fischbein

William Vieira

Instituto Federal de São Paulo (São Roque) e Universidade Anhanguera de São Paulo
Brasil

wvieira@yahoo.com

Vera Helena Giusti de Souza

Universidade Anhanguera de São Paulo
Brasil

verahgsouza@gmail.com

Roberto Seidi Imafuku

Instituto Federal de São Paulo (Bragança Paulista) e Universidade Anhanguera de São Paulo
Brasil

robertoseidi@yahoo.com.br

Resumo

Apresenta-se nesse artigo uma argumentação qualitativa e de caráter teórico que pretende mostrar a relação entre as ideias de Efraim Fischbein sobre a interação entre aspectos formais, algorítmicos e intuitivos e os processos relativos ao desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado, segundo as posições de David Tall e Tommy Dreyfus. A partir dos principais conceitos e ideias relacionados a essas teorias, traça-se um paralelo entre elas, no qual é possível observar uma integração que possibilita uma aplicação compartilhada desses conceitos e ideias na interpretação de processos de aprendizagem, principalmente no Ensino Superior. Exibe-se também alguns exemplos para ilustrar a argumentação feita.

Palavras chave: Pensamento Matemático Avançado. Aspecto Intuitivo. Aspecto Formal. Aspecto Algorítmico.

Procuramos mostrar neste artigo como os processos relativos ao Pensamento Matemático Avançado (Dreyfus, 1991) e a interação entre aspectos intuitivos, formais e algorítmicos colocados por Fischbein (1994) estão inter-relacionados quando do desenvolvimento da instrução matemática de um sujeito. Na primeira parte, apresentamos as ideias e conceitos gerais dessas abordagens teóricas; na segunda parte analisamos algumas das inter-relações possíveis em três situações específicas: a primeira no estudo de permutações dentro da Teoria de Grupos, a segunda em um problema da Geometria Plana que é resolvido a partir da Geometria Analítica e a última na análise de uma equação que é resolvida usando gráficos de funções.

Fundamentação Teórica

Em seu artigo *The psychology of advanced mathematical thinking* (1991), David Tall coloca em discussão aspectos psicológicos relativos ao desenvolvimento do pensamento matemático avançado e suas influências e determinações na produção e no ensino da ciência matemática.

Dreyfus (1991) destaca que podemos caracterizar o pensamento matemático avançado como uma inter-relação entre alguns processos cognitivos como visualização, representação, classificação, indução, generalização, justificação, síntese e abstração.

Segundo Tall (1991), muitos dos processos do pensamento matemático avançado já aparecem nos anos iniciais de ensino, onde se pode encontrar até mesmo os níveis de justificação; entretanto, nessa fase, o pensamento elementar é o que tem o grande papel e este não inclui os processos de abstração, caracterizados principalmente pelo estabelecimento de definições formais e pelo uso da lógica de deduções a partir dessas definições. Ele aponta também que a transição entre os níveis elementar e avançado é marcada pela mudança

(...) do descrever para definir, do convencer para provar de uma maneira lógica com base nessas definições. (...) É a transição da coerência da Matemática elementar para a consequência da Matemática avançada (Tall, 1991, tradução nossa).

Esse processo de transição requer uma reconstrução cognitiva, que é enfrentada pelos estudantes durante os primeiros anos do Ensino Superior. Nesse sentido, Skemp (1971, apud Tall, 1991), observa que os métodos de ensino de disciplinas matemáticas na universidade tendem a apresentar aos alunos o produto final do pensamento matemático, ao invés dos processos do pensamento matemático. Assim, neste nível de ensino há uma supervalorização de processos de abstração e métodos dedutivos, em detrimento do desenvolvimento de processos heurísticos. Tall (1991) reforça que esta forma de apresentação do conhecimento matemático não cumpre o papel de dar ao estudante todo o poder do pensamento avançado, na sua multiplicidade de processos e abordagens; além disso, reitera o autor, a lógica de apresentação normalmente não está adequada ao nível de desenvolvimento cognitivo dos aprendizes, o que acarreta no desenvolvimento de obstáculos cognitivos, fruto do conflito entre o conhecimento estruturado das disciplinas universitárias e aqueles trazidos pelos alunos. Estes conflitos têm, em grande medida, sua origem na não diferenciação entre a definição formal dos conceitos matemáticos e os processos cognitivos pelos quais estes conceitos são construídos.

De acordo com Tall (1991), o conhecimento matemático deve ser abordado a partir de estratégias que privilegiem a estrutura do conhecimento e o processo de pensamento dos estudantes, pois, segundo ele, para que os estudantes atinjam os mais altos níveis do pensamento matemático, devem adquirir *insights* dos métodos e processos da Matemática avançada, mas por caminhos que respeitem a transição de seus processos de pensamento. Por exemplo, em Matemática, ao contrário das ciências naturais, só temos acesso aos conceitos e objetos por meio de suas representações; por isso, o processo de representação desempenha papel central no desenvolvimento do pensamento matemático e deve ser considerado em todas as suas possibilidades, quando ensinamos um novo conceito. Ora, uma das representações possíveis para todo conceito matemático é o símbolo associado ou atribuído a ele: essas representações simbólicas são indispensáveis no desenvolvimento e no ensino da Matemática, entretanto elas trazem consigo um lado perigoso, que pode ter impactos bastante nocivos no processo de aprendizagem de novos conceitos, se não forem respeitados os processos de pensamento dos sujeitos.

Segundo Dreyfus (1991), os símbolos estão associados a signos (sinais) e a significados; eles tornam explícitos os significados do conhecimento implícito que um indivíduo tem sobre um dado conceito; contudo, para que um novo símbolo seja funcional, para que possa ser utilizado, é preciso que alguns significados associados ao conceito em questão sejam desenvolvidos, antes que o símbolo seja estabelecido, sob pena do estudante trabalhar com um símbolo que não possui

qualquer significado para ele. Este autor reitera ainda que esse processo de articulação dos vários significados de uma noção, antes do estabelecimento do simbolismo associado a ela, é frequentemente negligenciado no ensino de Matemática.

Outro significado das representações, que desempenha um papel ainda mais decisivo no pensamento e no processo de aprendizagem da Matemática, é o conceito de representação mental. Ao discutir um conceito, procedimento ou noção matemática, cada um de nós relaciona a ideia em questão com algo que vem à mente: essa é a representação mental que temos de tal conceito. Dreyfus (1991) destaca a diferença entre as representações simbólicas e mentais e o papel que cada uma delas desempenha no processo de comunicação e entendimento do mundo por parte de um indivíduo.

Representar um conceito, então, significa gerar um caso, um espécime, um exemplo, uma imagem dele. Mas esta breve descrição é insuficiente para nós, porque não especifica se a ocorrência gerada é simbólica ou mental, nem indica o que “gerar” significa em termos de processos pelos quais as representações mentais vêm à tona e como elas se desenvolvem. Uma representação simbólica é exteriorizada de forma escrita ou falada, geralmente com o objetivo de tornar a comunicação sobre o conceito mais fácil. Uma representação mental, por outro lado, refere-se a esquemas internos ou sistemas de referências que uma pessoa usa para interagir com o mundo exterior. É o que ocorre na mente quando se pensa em uma parte específica do mundo exterior e pode variar de pessoa para pessoa (Dreyfus, 1991, tradução nossa).

A visualização é um dos processos pelos quais as representações mentais podem passar a existir. Segundo Kaput (1987, apud Dreyfus, 1991), a geração de representações mentais depende dos sistemas de representação, de produções externas, concretas, que podem ser materialmente percebidas pelo sujeito. Dreyfus (1991) sustenta que as representações mentais são criadas com base nesses sistemas de representações concretas; ele aponta ainda que um sujeito pode criar, para certo conceito, uma única e simples representação, mas destaca que para ter sucesso na Matemática é necessário ter muitas representações mentais de um conceito e que essas representações precisam estar relacionadas a vários aspectos desse conceito.

Representações pobres, que articulem poucos elementos de um conceito, não conferem a flexibilidade necessária à resolução de problemas e podem ter impacto negativo no processo criativo do sujeito. Para Dreyfus (1991), essa é uma característica observável em muitos estudantes, que se manifesta na dificuldade em resolver problemas que trazem pequenas mudanças nas estruturas ou enunciados, possível reflexo da incapacidade de estabelecer articulações entre diversas representações de um conceito; como exemplo, cita que é comum que estudantes do Ensino Médio pensem somente em termos de fórmulas algébricas ao lidarem com funções, mesmo quando são capazes de dar uma definição em termos de relações entre conjuntos.

Nesse sentido, a situação desejada no processo de aprendizagem é aquela na qual várias representações de um mesmo conceito se complementam, podendo eventualmente se integrar em uma única representação do conceito. Essa situação pode ser melhor descrita como o desenvolvimento de várias representações inter-relacionadas, que são simultaneamente selecionadas e eficientemente mudadas, de acordo com o problema sobre o qual o sujeito se debruça (Dreyfus, 1991).

O processo de mudança entre representações é parte fundamental do processo de aprendizagem e deve ser aplicado e desenvolvido amplamente, pois é a familiaridade com este processo que trará a habilidade em resolver problemas; a existência de várias representações de um conceito não é suficiente para conferir um uso flexível e articulado deste conceito, é preciso saber transitar entre elas, de acordo com as situações que a resolução de um problema impõe. O processo de tradução, que está relacionado de forma estreita com o processo de mudança entre representações, diz respeito à reformulação de um problema ou proposição matemática em outro, de maneira a viabilizar ou facilitar a resolução do problema original (Dreyfus, 1991).

Fundamental para a aprendizagem matemática, o processo de representação está presente em todos os níveis do pensamento matemático, mesmo nos mais elementares; outros processos, contudo, são desenvolvidos a partir do refinamento das habilidades e experiências dos estudantes, que acontecem à medida que estes entram em contato com conteúdos matemáticos mais avançados. A generalização e a síntese são dois desses processos e, aliados ao processo de representação, constituem a base para o desenvolvimento da abstração, um dos principais objetivos no desenvolvimento do pensamento matemático avançado. Na atividade matemática, o processo de generalização consiste em deduzir ou induzir resultados gerais a partir de casos particulares e das características semelhantes identificadas, expandindo os domínios de validade das conclusões originais para contextos mais amplos; já o processo de síntese se refere à capacidade de combinar ou compor partes de maneira a formar um todo, uma entidade; contudo, este todo frequentemente agrega mais que a soma das partes que o compõem. Trata-se, de fato, de um processo que busca inter-relacionar resultados, ideias e algoritmos que foram aprendidos de maneira isolada, fragmentada e que ressurgem como fusão, mesclados em um novo resultado, um novo conhecimento, mais coeso e poderoso (Dreyfus, 1991).

Thurston (1990) destaca que as capacidades de generalização e síntese tornam a Matemática compressível e estão entre os grandes prazeres proporcionados por essa ciência.

Matemática é surpreendentemente compressível: você pode lutar muito tempo, passo a passo, trabalhar por algum processo ou ideia a partir de várias abordagens. Mas, assim que você realmente entendê-lo e adquirir uma perspectiva mental para vê-lo como um todo, muitas vezes acontece uma tremenda compressão mental. Você pode arquivá-lo, recuperá-lo de forma rápida e completa quando precisar dele, e usá-lo apenas como um passo em algum outro processo mental. A visão que se passa com essa compressão é uma das verdadeiras alegrias da Matemática (Thurston, 1990, tradução nossa).

Este processo de compressão é irreversível e traz consigo uma questão relevante para o ensino da Matemática, pois “Depois de dominar os conceitos matemáticos, mesmo após grande esforço, torna-se muito difícil se colocar de volta no estado de espírito de alguém a quem eles são misteriosos” (Thurston, 1990, tradução nossa).

Dreyfus (1991) sustenta que o processo de síntese não costuma ser muito trabalhado na sala de aula; enquanto certos detalhes de um conceito são explicados em profundidade pelo professor e exercitados pelos estudantes, poucas atividades são destinadas para que os alunos sejam levados a elaborar sínteses entre os diferentes aspectos de um conceito ou entre conceitos, dentro de um campo de conhecimento. Embora bons professores realizem sumários e algumas sínteses durante os cursos que ministram, estabelecendo conexões e relações entre conceitos, essa atitude acaba deixando transparecer aos estudantes que a atividade de síntese é papel do matemático e nada tem de relação com os problemas que eles devem resolver. Essa característica fica evidente nos exercícios tradicionais que são propostos nos cursos, que não requerem

qualquer necessidade de estabelecimento de relações entre conceitos e não fomentam processos de síntese.

O processo de abstração, talvez o principal objetivo a ser alcançado no desenvolvimento do pensamento matemático avançado, é um processo construtivo, que vai da compreensão das propriedades dos objetos matemáticos e das relações entre elas para a compreensão das estruturas dessas propriedades e relações; a construção dessa abstração pressupõe, assim, uma mudança no foco de atenção, que deve migrar dos objetos particulares para se concentrar em estruturas específicas e apropriadas das propriedades dos objetos e das relações entre estas (Dreyfus, 1991).

O psicólogo romeno Efraim Fischbein, em seu artigo *The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity* (1994), coloca em discussão a necessidade da interação entre aspectos formais, algorítmicos e intuitivos ligados a qualquer conceito em Matemática, quando observamos um sujeito em atividade matemática. Estes são, segundo o autor, os três aspectos básicos a serem considerados quando tratamos a Matemática como uma atividade humana, feita por seres humanos.

Segundo Fischbein (1994), ao considerarmos a interação desses três aspectos, estamos olhando a Matemática como um processo criativo e não como um corpo de conhecimentos estruturado e já estabelecido. Atentar para este processo criativo significa entender essa ciência como uma atividade humana, que envolve momentos de iluminação, hesitação, aceitação e refutação. Essa perspectiva deve guiar nossas escolhas quando ensinamos Matemática, se desejamos que os estudantes sejam capazes, eles mesmos, de produzir afirmações matemáticas, construir provas e avaliar, formal e intuitivamente, a validade dessas produções. Discutimos a seguir cada um dos aspectos apontados por Fischbein (1994).

O aspecto formal refere-se aos axiomas, definições, teoremas e demonstrações. Estes elementos compõem, de fato, o núcleo das ciências matemáticas e precisam ser levados em conta quando analisamos o processo de criação matemático. Fischbein reitera que:

Axiomas, definições, teoremas e provas têm de penetrar como um componente ativo do processo de raciocínio. Eles devem ser inventados ou aprendidos, organizados, checados e usados ativamente pelo estudante (Fischbein, 1994, tradução nossa).

Fischbein (1994) alerta também que o pensamento proposicional e o uso de construções hipotético-dedutivas não são adquiridos espontaneamente pelos jovens e que somente um adequado processo de ensino pode dar a esses elementos formais características verdadeiramente funcionais.

O aspecto algorítmico corresponde às técnicas e procedimentos de resolução. Esta componente também tem um caráter fundamental no processo de entendimento e criação, uma vez que apenas o conhecimento das estruturas formais (axiomas, definições, teoremas) não é suficiente para conferir habilidade em resolver problemas. Essas habilidades, sustenta Fischbein (1994), devem ser sistematicamente treinadas para que sejam adquiridas.

O aspecto intuitivo diz respeito a uma intuição cognitiva, um entendimento intuitivo, uma solução intuitiva. A intuição cognitiva é o que um sujeito considera autoevidente e não vê necessidade de prova ou justificação. Consideramos autoevidentes, para quase todos os sujeitos, afirmações do tipo “A parte é menor que o todo”, “Uma série infinita tende ao infinito, pois somamos valores indefinidamente” ou “Se o termo geral de uma série tende à zero, então a série

é convergente”. Pela sua natureza, o conhecimento intuitivo exerce um papel coercitivo no raciocínio, definindo caminhos e estratégias para a resolução de problemas. Por vezes, isso se torna um facilitador do processo de conhecimento, se estiver de acordo com verdades logicamente justificáveis; em outros casos, torna-se um caminho para contradições e equívocos – como no caso das afirmações apresentadas neste parágrafo – e, desta forma, podem se configurar em dificuldades e obstáculos para o processo de aprendizagem (Fischbein, 1994).

Sobre o papel que o conhecimento intuitivo desempenha no processo de aprendizagem, Fischbein et al. (1981) alertam que:

O problema de identificar os vieses intuitivos naturais do aluno é importante porque afetam – às vezes de uma maneira muito forte e permanente – seus conceitos, suas interpretações, sua capacidade de compreender, de resolver e de memorizar em uma determinada área. Estamos naturalmente inclinados a manter interpretações que se adequam a esses vieses naturais e intuitivos, e esquecer ou distorcer aqueles que não se encaixam a eles (Fischbein et al., 1981, tradução nossa).

Análise de Situações

Discutimos a seguir situações nas quais podemos observar a inter-relação entre os processos de desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado e a interação de aspectos intuitivos, algorítmicos e formais relativos aos conceitos e ideias matemáticas envolvidos em cada uma delas.

Vamos considerar o exemplo do grupo de permutações de n objetos. Esta estrutura é frequentemente chamada de grupo simétrico de grau n e identificada pela notação (símbolo) S_n . Quando discutimos tal conceito, esse símbolo pode ser a representação mental de um indivíduo; contudo, há outras possibilidades. Um sujeito pode pensar nas simetrias possíveis de um quadrado, como na Figura 1.

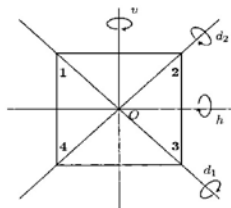


Figura 1. Simetrias do quadrado.

Outra alternativa seria pensar a representação de uma das simetrias do quadrado, como a rotação de 90° no sentido horário, indicada na Figura 2.

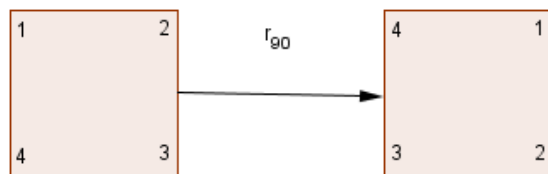


Figura 2. Representação gráfica da rotação de 90° do quadrado.

Ainda trabalhando sobre a rotação de 90° do quadrado, destacada na Figura 2, há representações algébricas (simbólicas), que traduzem outras representações mentais possíveis, como

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 3. Representação simbólica da rotação de 90° do quadrado.

Ou a representação (1, 2, 3, 4), que usa a notação e o conceito de ciclos. Podemos ainda escrever:

$$1 \rightarrow 2 \quad 2 \rightarrow 3 \quad 3 \rightarrow 4 \quad 4 \rightarrow 1$$

Figura 4. Representação esquemática da rotação de 90° do quadrado.

O esquema apresentado na Figura 4 também pode ser representado usando a notação de função: $r_{90}(1) = 2$; $r_{90}(2) = 3$; $r_{90}(3) = 4$; $r_{90}(4) = 1$, que destaca outro aspecto formal associado às permutações.

As representações das Figuras 1 e 2 envolvem aspectos intuitivos numéricos relativos às permutações, ao apresentar duas aplicações geométricas deste conceito; por outro lado, as representações (1, 2, 3, 4), a notação de função e a da Figura 3 destacam aspectos formais (simbólicos) relacionados a este objeto matemático. Observe que a articulação entre as Figuras 2 e 3 pode proporcionar uma interação entre aspectos intuitivos e formais relacionados aos conceitos de rotação e permutação, o que possibilita uma ressignificação destas ideias.

O esquema da Figura 4 faz uma tradução esclarecedora com a notação de ciclos (1, 2, 3, 4) e também tem papel importante no desenvolvimento de aspectos algorítmicos relacionados à composição de permutações (ou transformações do quadrado). Vejamos um exemplo dessa situação. Considere também a reflexão horizontal h do quadrado destacada na Figura 5, que na notação de ciclos se escreve (1, 4)(2, 3).

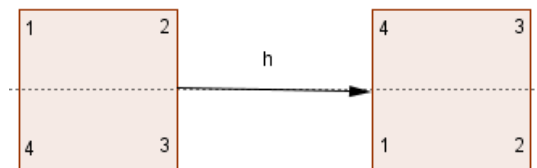


Figura 5. Representação gráfica da reflexão horizontal do quadrado.

Representada segundo o esquema da Figura 4, a reflexão horizontal se escreve

$$1 \rightarrow 4 \quad 2 \rightarrow 3 \quad 3 \rightarrow 2 \quad 4 \rightarrow 1$$

Figura 6. Representação esquemática da reflexão horizontal do quadrado.

Então, pergunta-se: *qual é a transformação resultante da composição da rotação de 90° e da reflexão horizontal?* Essa questão se traduz na relação $r_{90} * h = (1, 2, 3, 4) * (1, 4)(2, 3)$, que pode ser resolvida usando o esquema de setas destacado anteriormente e se traduz em um novo esquema, representado na Figura 7.

$$1 \xrightarrow{h} 4 \xrightarrow{r_{90}} 1 \quad 2 \xrightarrow{h} 3 \xrightarrow{r_{90}} 4 \quad 3 \xrightarrow{h} 2 \xrightarrow{r_{90}} 3 \quad 4 \xrightarrow{h} 1 \xrightarrow{r_{90}} 2$$

Figura 7. Representação da composição da rotação de 90° e da reflexão horizontal do quadrado.

Essa composição resulta na transformação diagonal d_1 , que pode ser representada de maneira resumida conforme a Figura 8.

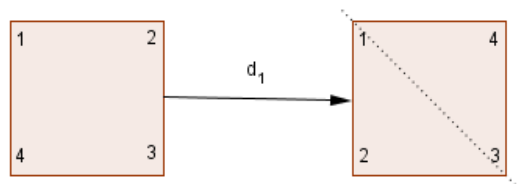


Figura 8. Representação gráfica da reflexão horizontal do quadrado.

O aspecto algorítmico da composição de permutações (transformações do quadrado) fica esclarecido a partir do esquema da Figura 7, que evidencia a ordem da operação composição, que parte da reflexão horizontal e segue para a rotação do quadrado. Entendemos que uma articulação adequada entre os aspectos algorítmicos destacados no esquema da Figura 7 e os aspectos formais da representação de composição de ciclos $r_{90} * h = (1, 2, 3, 4) * (1, 4)(2, 3)$ pode facilitar a compreensão da composição de permutações, além de favorecer o processo de generalização dessa operação, a partir apenas da notação de ciclos. A mudança entre representações no caso particular das transformações do quadrado combinada às interações entre aspectos algorítmicos, intuitivos e formais relativos a essas transformações podem possibilitar que um sujeito generalize essas ideias para o grupo de permutações S_n .

Como segundo exemplo, vamos considerar o problema: *Verifique se, num triângulo retângulo, a mediana relativa à hipotenusa tem por medida a metade da medida da hipotenusa.*

Uma das possibilidades para a resolução dessa questão seria considerar um triângulo retângulo qualquer no plano cartesiano, como na Figura 9, determinar as coordenadas do ponto médio da hipotenusa $M = \left(\frac{c}{2}, \frac{b}{2}\right)$, calcular a medida da hipotenusa e a distância entre os pontos A e M e concluir que é verdadeira a afirmação do problema.

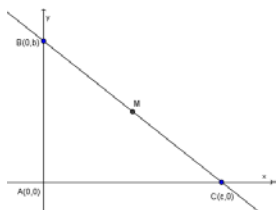


Figura 9. Triângulo retângulo BAC.

A mudança da Geometria Plana para a Geometria Analítica constitui uma tradução do problema para outra representação e possibilita uma abordagem que permite estabelecer a resolução do problema geométrico; no entanto, para que essa mudança entre representações (ou tradução) seja possível, é preciso que aspectos formais, algorítmicos e intuitivos relativos a conceitos centrais de Geometria Analítica estejam estabelecidos de forma clara para o sujeito. De fato, a resolução pressupõe a representação do triângulo retângulo com o ângulo reto em $A(0,0)$ e os demais vértices como $B(0,b)$ e $C(c,0)$, o que evidencia uma interação entre aspectos intuitivos – no uso dessa representação específica – e aspectos formais – no uso das notações de pontos do plano; observa-se também que essa representação dos pontos faz uso do processo de generalização, ao indicar as coordenadas de forma genérica $(0,b)$ e $(c,0)$, ao invés de valores particulares. Na determinação das coordenadas do ponto $M = \left(\frac{c}{2}, \frac{b}{2}\right)$, possivelmente aplicando o

Teorema de Tales, aspectos formais e algorítmicos interagem fortemente. Por fim, aspectos algorítmicos novamente aparecem no cálculo das distâncias AM e CM , que possibilitam a resolução do problema.

Cabe destacar que, embora o sujeito precise ter um conhecimento amplo de Geometria Analítica, para lançar mão desse tipo de abordagem, essa não é a única condição para que o problema seja resolvido dessa maneira. O processo de tradução que faz migrar o problema da Geometria Plana para a Analítica precisa ser ensinado, sistematicamente trabalhado pelo professor, para que o aluno adquira essa postura de buscar articulações entre conhecimentos de campos distintos da Matemática, como uma estratégia para a resolução de problemas. O problema seguinte, aplicado para um estudante do 2º ano do Ensino Médio, busca elucidar essa questão.

Considere uma última situação estabelecida pelo problema: *Quantas soluções reais possui a equação $3x = 2^x$?*

Esse problema, cujas abordagens algébricas mais imediatas mostram-se bastante ineficazes, pode ser resolvido considerando os gráficos das funções $f(x) = 3x$ e $g(x) = 2^x$.

Em uma primeira tentativa, o aluno do 2º ano do Ensino Médio escolheu a resolução algébrica, que resultou infrutífera, conforme Figura 10. Neste caso, entram em ação aspectos algorítmicos e intuitivos, bastante desenvolvidos pela escola e fortemente arraigados nos estudantes, de lançar mão de técnicas algébricas na busca de soluções de equações, sem observar a estrutura da equação, antes de partir para uma resolução algébrica.

$$x = \frac{2^x}{3}$$

$$3 = \frac{2^x}{x}$$

$$3 = 2^x \cdot x^{-1}$$

Figura 10. Tentativa de solução algébrica apresentada por estudante do 2º ano do Ensino Médio.

Ao não obter sucesso com essa estratégia, o aluno vira-se para o pesquisador e lamenta: “Não consigo resolver”. O pesquisador, então, apresenta uma motivação: “Por que você não tenta outra abordagem?”. O aluno volta-se para o problema e, tomando uma iniciativa, diz: “Só se for chutando...” e apresenta as tentativas destacadas na Figura 11.

$$x=1 \quad 3=2 \text{ (F)} \quad x=\frac{1}{2} \quad 1,5=\sqrt{2} \text{ (F)}$$

$$x=2 \quad 6=4 \text{ (F)} \quad x=-1$$

$$x=3 \quad 9=8 \text{ (F)} \quad -3=\frac{1}{2} \text{ (F)}$$

Figura 11. Tentativa de solução numérica apresentada por estudante do 2º ano do Ensino Médio.

Essa tentativa de solução numérica do problema reitera a força que aspectos algorítmicos e intuitivos, relacionados ao tratamento algébrico das equações, têm para o estudante, pois mesmo após ser motivado a tentar outra abordagem, permaneceu no campo algébrico.

Após as cinco tentativas exibidas na Figura 11, o estudante volta-se para os cálculos e comenta: “O x igual a 3 ficou mais próximo... mas não consigo resolver...”; vira-se para o pesquisador e diz: “Não é inteira a solução, né?” e, já respondendo à própria pergunta: “Ah! É número real, então pode ser número quebrado... mas acho que não consigo fazer essas contas com eles”.

Ao perceber uma nova desistência do estudante, o pesquisador apresenta uma segunda motivação, dessa vez mais específica: “Por que você não tenta olhar como função?”; o aluno volta-se novamente para o problema e esboça os gráficos da Figura 12. Nesta situação, há uma interação entre aspectos intuitivos, relativos aos esboços grosseiros da representação com gráficos, e aspectos formais, relativos às funções, ao categorizá-las como função afim e função exponencial.

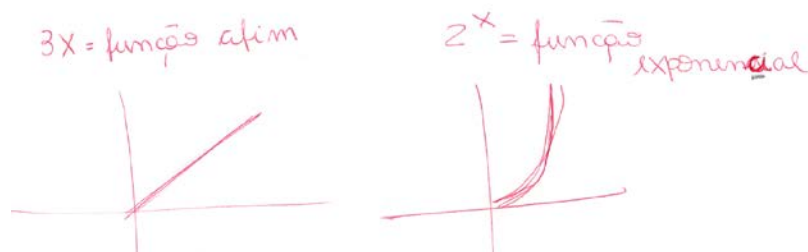


Figura 12. Esboços de gráficos apresentados por estudante do 2º ano do Ensino Médio.

Ao analisar os esboços feitos, o estudante refaz os gráficos com mais detalhes, como destacado na Figura 13 e após construir o esboço da função exponencial, percebe que deve desenhar os dois gráficos no mesmo sistema de coordenadas.

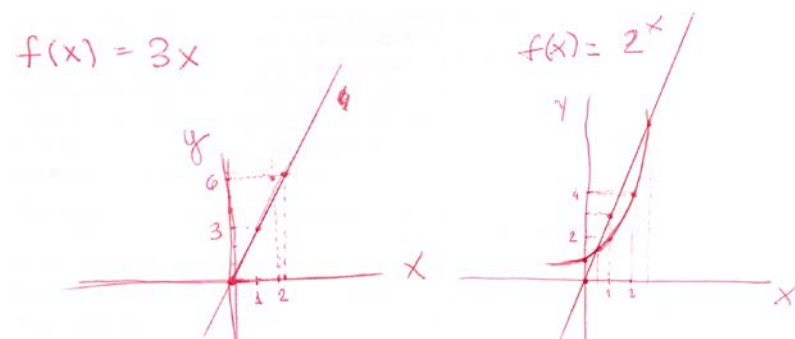


Figura 13. Solução apresentada por estudante do 2º ano do Ensino Médio.

Ao concluir o segundo gráfico, responde a questão para o pesquisador: “Tem duas soluções”; o pesquisador pergunta: “Por quê?” e o estudante responde: “Porque as retas se cruzam em dois lugares”. O pesquisador intervém mais uma vez: “Mas os gráficos não vão se encontrar novamente?” e o estudante responde: “Não, porque essa reta (referindo-se ao gráfico de $f(x) = 3x$) vai se afastando cada vez mais pra cá (indica com o dedo na direção à direita do eixo y)”. O pesquisador insiste: “E o outro gráfico?”; e o aluno responde: “Esse fica mais perto do y ”.

Nessas últimas construções, novamente aspectos intuitivos e formais interagem, como destacado nas construções da Figura 12 e há também uma forte presença de aspectos algorítmicos, na obtenção de pontos que permitem ao estudante construir um esboço “mais preciso” dos gráficos. A afirmação, por parte do aluno, de que há duas soluções pelo fato de “ver” a intersecção acontecer em dois pontos, mostra uma forte presença de aspectos intuitivos na obtenção da resposta, uma vez que não usa um argumento formal para sustentar sua posição; embora o estudante tenha mostrado uma boa articulação entre aspectos formais, algorítmicos e intuitivos, no trabalho com as funções, é possível observar confusões de natureza formal, como na referência ao gráfico da função exponencial como reta ou na própria afirmação de que existem duas soluções, porque “vê” duas intersecções no esboço feito e não argumenta sobre outras possíveis intersecções fora do trecho visto.

Observe que a solução da equação original, neste caso, pode ser obtida a partir da mudança de representação (tradução) do campo algébrico para o gráfico. Além disso, o processo de resolução deixa claro que, embora o estudante em questão tivesse os conhecimentos necessários para a resolução do problema (conhecimentos sobre funções), não foi capaz de articulá-los espontaneamente; ao contrário, precisou ser motivado pelo pesquisador, em dois momentos, a mobilizar outros conhecimentos e lançar um novo olhar sobre os elementos da equação. Essa situação reforça a posição destacada por Dreyfus (1991) – e que defendemos anteriormente – de que os processos relativos ao desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado precisam ser trabalhados pelos professores, para que os estudantes, que ainda estão construindo seus esquemas mentais, possam aprendê-los e adquiri-los como uma estratégia para a interpretação e resolução de problemas em Matemática.

Considerações Finais

Segundo Tall (1991), o Pensamento Matemático Avançado envolve todo o ciclo da atividade matemática, que vai desde o ato criativo da consideração de um problema, passa pela elaboração de conjecturas e estratégias de resolução, até chegar aos níveis de refinamento e prova; contudo, esse ciclo não é normalmente praticado nas disciplinas matemáticas no Ensino Superior. Nesse sentido, entendemos que fomentar a interação entre os aspectos algorítmicos, intuitivos e formais no desenvolvimento de conceitos e ideias matemáticas corresponde a colocar em prática o ciclo destacado por Tall. As situações que apresentamos nesse trabalho procuram mostrar a possibilidade e as potencialidades da relação entre os processos relativos ao desenvolvimento do Pensamento Matemático Avançado e os aspectos colocados por Fischbein.

Referências e bibliografia

- Dreyfus, T. (1991). Advanced Mathematical Thinking Processes. In *Advanced Mathematical Thinking* (Vol. 11, pp. 25-41). Kluwer Academic Publishers.
- Fischbein, E. (1994). The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity. In *Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline* (Vol. 13, pp. 231-245). Kluwer Academics Publishers.
- Fischbein, E., Tirosh, D., & Melamed, U. (1981). Is it possible to measure the intuitive acceptance of a mathematical statement? *Educational Studies in Mathematics*, 12, 491-512.
- Tall, D. O. (1991). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. In *Advanced Mathematical Thinking* (Vol. 11, pp. 3-21). Kluwer Academic Publishers.
- Thurston, W. P. (1990). Mathematical Education. *Notices of the American Mathematical Society*, 37(7), pp. 844-850.

Ambiente informal: saberes e fazeres matemáticos presentes na construção civil

Edelaine Cristina **Andrade**
Universidade Estadual Londrina
Brasil

edelaineandrade@bol.com.br

Sergio de Mello **Arruda**
Universidade Estadual Londrina
Brasil

sergioarruda@sercomtel.com.br

Marinez Meneghello **Passos**
Universidade Estadual Londrina
Brasil

marinezmp@sercomtel.com.br

Resumo

O artigo trata de uma investigação dos saberes e fazeres matemáticos adquiridos de maneira informal na construção civil, mediante entrevista semiestruturada aplicada a cinco pedreiros no Município de Londrina-PR. Tomamos como base do referencial teórico de análise, os Focos (*strands*) da aprendizagem científica em ambientes informais sugeridos pelo *National Research Council* (NRC, 2009) no relatório *Learning Science in Informal Environments: People, Places, and Pursuits*, que propõe avaliar e organizar a aprendizagem da ciência segundo seis Focos. Esse referencial teórico nos proporcionou sustentação para a elaboração dos Focos de aprendizagem de ofício. O percurso metodológico recaiu nas análises das entrevistas cedidas pelos pedreiros, investigando nas falas dos entrevistados, referências aos Focos de aprendizagem citada. Esse procedimento metodológico nos permitiu constatar que, os saberes e fazeres realizados pelos entrevistados em seus ambientes de trabalho envolve a matemática e é uma aprendizagem que ocorre de forma contínua, parecendo estar incorporada à vida cotidiana.

Palavras-chave: focos de aprendizagem científica, focos de aprendizagem de ofício, ambientes informais, saberes e fazeres.

Introdução

Na tentativa de compreender as práticas sociais e os saberes matemáticos encontramos em D'Ambrosio (2002, p.22) que:

O cotidiano está impregnado dos saberes e fazeres próprios da cultura. A todo instante, os indivíduos estão comprando, classificando, quantificando, medindo, (...) e, de algum modo, avaliando, usando os instrumentos materiais e intelectuais que são próprios à sua cultura.

Nesse sentido, os fazeres do cotidiano envolvem ideias matemáticas. Essas ideias podem não ser apreendidas nas escolas, mas no ambiente familiar, no trabalho e recebida de amigos, colegas e familiares.

Pesquisas apontam que espaços fora do ambiente escolar propiciam aprendizagem. O local de trabalho se caracteriza como sendo um desses ambientes onde pode ocorrer aprendizagem de diferentes áreas. De acordo com Dierking (2005), “o local de trabalho é onde aprendemos as habilidades necessárias para a realização de um trabalho produtivo” (Dierking, 2005, p.148).

É pensando nisso que buscamos definir as configurações de ambientes de aprendizado. Para tal definição apresentamos neste trabalho as seguintes considerações:

- a) Aprendizado Formal é o aprendizado fornecido tipicamente por uma instituição de educação ou treinamento, estruturado (em termos de objetivos de aprendizagem, tempo de aprendizado ou apoio à aprendizagem) e que leva à certificação. O aprendizado formal é intencional do ponto de vista do aprendiz.
- b) Aprendizado Não-Formal não é fornecido por uma instituição de ensino ou de formação e normalmente, não leva a uma certificação. No entanto, é estruturado (em termos de objetivos, tempo e recursos à aprendizagem). O aprendizado não formal é intencional do ponto de vista do aprendiz.
- c) Aprendizado Informal é o aprendizado resultante das atividades do dia a dia, relacionadas ao trabalho, família ou lazer. Não é estruturado (em termos de objetivos, tempo e suporte à aprendizagem) e normalmente não leva a uma certificação. O aprendizado informal pode ser intencional, mas na maioria das vezes é não intencional ou incidental (EU policy document, 2001, p.32-33, *apud* Colley, Hodkinson & Malcolm, 2002, p.8, tradução e grifo nosso).

Com base nas definições acima, temos que a escolha de uma profissão que se origina de experiências de aprendizado do tipo informal, são opções que ocorrem de forma espontânea ao longo da vida do indivíduo, e a partir dessa experiência, das vivências e das influências educativas do meio em que vive, ele adquire atitudes, valores e conhecimentos que, muito provavelmente o influenciaram na escolha de sua profissão.

Em especial, a profissão de pedreiro exige habilidades matemáticas que muitas vezes, não são ensinadas nas escolas ou que os profissionais dessa área não estudaram, pelo fato de terem frequentado pouco o ambiente escolar. Essas habilidades demonstram a importância da matemática no cotidiano dessa profissão.

Além de locais e configurações onde se dão o ensino e aprendizagem de conhecimentos e habilidades em ambientes informais, podem ser definidas três concepções de aprendizagem nestes contextos. Estas podem ser descritas como:

- 1) Aprendizado ao longo da vida: É a aquisição de conhecimentos e competências científicas fundamentais ao longo da vida, são geralmente associadas à algumas necessidades e interesses que podem variar com o tempo;
- 2) Aprendizado em diversos locais: É o aprendizado informal que ocorre a medida em que as pessoas circulam nas mais variadas situações e ambientes que encontram em suas vidas;
- 3) Aprendizado em profundidade: Está associada à aprendizagem de aspectos culturais, valores morais, éticos, religiosos e sociais que eventualmente conduzem a ação e o juízo que as pessoas fazem sobre si mesmas e sobre os outros (DIERKING, 2005, p.28, tradução e grifos nossos).

Portanto, além do aprendizado ocorrer no ambiente de trabalho, esse processo têm ligação direta com o local, o tempo e as reflexões por ele proporcionadas.

D'Ambrosio (1993) entende a matemática como um meio desenvolvido pela espécie humana, ao longo de sua história, com a finalidade de explicar, entender, manejar e conviver com a realidade. Evidentemente, dentro de um contexto natural e cultural em que os grupos sociais estão inseridos. Esse buscar fazer e o saber matemático tem origem na etnomatemática, a qual é parte integrante da vida e do contexto em que as pessoas vivem.

De posse do exposto, definimos como questão de pesquisa a investigação dos saberes e fazeres matemáticos adquiridos de maneira informal, durante o exercício da profissão de pedreiro, utilizando como base o referencial dos focos de aprendizagem em ambientes informais.

Desenvolvimento: Tomada de dados

Para o desenvolvimento da pesquisa, foram realizadas entrevistas semiestruturadas¹ com cinco pedreiros no exercício de sua função, os quais possuem de quinze a quarenta e seis anos de profissão. Essas entrevistas foram gravadas em áudio com duração que variou de dezesseis minutos à uma hora e vinte minutos. Os participantes mostraram-se interessados em contribuir com a pesquisa e, para sua realização, todos assinaram um termo de consentimento.

Visto que se trata de entrevistas semiestruturadas, as perguntas que direcionaram inicialmente a pesquisa foram:

1. Qual é o seu grau de escolaridade?
2. Há quanto tempo exerce a profissão?
3. Conte-me como foi seu caminho até chegar a ser pedreiro?
4. O que de matemática você se lembra de ter aprendido na escola?
5. Você utiliza matemática no seu trabalho? Se sim, como?
6. Tem como ser pedreiro e não usar matemática?
7. O que é mais gratificante na sua profissão?
8. Na sua profissão é necessário atualizar-se?

Fundamentação teórica

Procurando evidenciar nas falas dos entrevistados os saberes e fazeres matemáticos, utilizamos como referencial teórico base o relatório *Learning Science in Informal Environments: People, Places, and Pursuits* desenvolvido pelo *National Research Council* (NRC, 2009). Esse relatório apresenta seis focos (*strands*²) da aprendizagem da ciência como um sistema que pronuncie capacidades próprias das ciências apoiadas pelos ambientes informais.

¹Para Manzini (1990/1991, p.154), a entrevista semiestruturada foca-se em um assunto sobre o qual já existe um roteiro com perguntas principais, complementadas por outras questões essenciais às circunstâncias momentâneas da entrevista. Esse tipo de entrevista pode fazer insurgir informações de forma mais livre e as respostas não estão condicionadas a uma padronização de alternativas.

²Definimos a palavra *strands* apresentada no NRC (2009) na expressão *strands of a rope* (fios entrelaçados que compõem uma totalidade) como **Foco**. Essa definição foi adotada no artigo *O aprendizado científico no cotidiano* (Arruda, et al.).

Os seis **Focos** (NRC, 2009) serão apresentados e explicados, porém em nosso contexto de investigação os utilizaremos para a constituição de uma nova abordagem de análise das respostas obtidas, mediante aprendizagem de ofício. Esse movimento foi utilizado na tentativa de comprovar que existe o conhecimento matemático no ambiente de trabalho, mesmo não havendo participação dos pedreiros entrevistados em ambientes formais.

Foco 1 – desenvolvendo o interesse pela ciência: A emoção da experiência, o interesse e a motivação para aprender acerca dos fenômenos no mundo físico e natural.

Foco 2 – compreendendo o conhecimento científico: Chegar a gerar, compreender, lembrar e utilizar conceitos, explicações, argumentos, modelos e fatos relacionados com a ciência.

Foco 3 – engajando-se no raciocínio científico: Manipular, testar, explorar, predizer, questionar, observar, e encontrar sentido no mundo natural e físico.

Foco 4 – refletindo sobre a natureza da ciência: Refletir acerca da ciência como um modo de conhecimento; dos processos, conceitos e instituições de ciência e acerca de seu próprio processo de aprendizagem dos fenômenos.

Foco 5 – envolvimento na prática científica: Participar de atividades científicas e de práticas de aprendizagem com outros, utilizando linguagem e ferramentas científicas.

Foco 6 – identificando-se com o empreendimento científico: Pensar acerca deles mesmos como aprendizes de ciência e desenvolver uma identidade como alguém que sabe sobre, utiliza e algumas vezes contribuem para a ciência.

Fonte: NRC, 2009, p.4, *apud* STanzani, Passos e Arruda, p. 9697-9700, 2011.

Diante da necessidade de uma contextualização do referencial teórico citado acima, apresentamos a nova abordagem elaborada, que visa à aprendizagem construída durante o exercício da profissão, que denominamos como sendo “Focos de aprendizagem de ofício”.

Foco 1 – desenvolvendo o interesse pela ciência e/ou ofício: A emoção da experiência, o interesse e a motivação em aprender acerca dos fenômenos ocorridos no trabalho, podendo ser também acerca do mundo físico e natural. Nesse foco encontram-se expressões como gostar ou não da profissão, ter ou não interesse científico pela atividade desenvolvida.

Foco 2 – compreendendo o conhecimento científico e/ou profissional: São os conhecimentos utilizados na prática de seu trabalho. Chegar a gerar, compreender, lembrar e utilizar conceitos, explicações, argumentos, modelos e fatos relacionados com a profissão.

Foco 3 – engajando-se no raciocínio científico e/ou profissional: Manipular, testar, explorar, predizer, questionar, observar, e encontrar sentido no mundo natural e físico e/ou em seu ambiente de trabalho.

Foco 4 – refletindo sobre seu trabalho: Refletir acerca da profissão como um modo de conhecimento; dos processos, conceitos e acerca de seu próprio processo de aprendizagem dentro do ofício.

Foco 5 – envolvimento na prática do ofício: Participar de atividades e de práticas de aprendizagem com outros, utilizando linguagem e ferramentas científicas e/ou próprias do ofício.

Foco 6 – identificando-se com o próprio ofício: Desenvolver uma identidade como alguém que sabe sobre, utiliza e algumas vezes contribuem para a execução da profissão.

A partir do que fora desenvolvido, analisamos as falas dos entrevistados segundo esta nova abordagem e as transcrevemos na íntegra, não corrigindo os eventuais erros ortográficos.

Apresentação e análise dos dados

Classificamos os cinco entrevistados da pesquisa a fim de preservar suas identidades, como sugere a ética da pesquisa qualitativa (Miles & Huberman, 1994), por entrevistado 1, entrevistado 2, abreviando por E1, E2 e assim até E5.

Na intenção de conhecer um pouco sobre o grau de escolaridade e tempo de exercício da profissão dos participantes, é que realizamos a primeira e a segunda pergunta. Por serem perguntas de respostas objetivas, não serão analisadas.

1. Qual é o seu grau de escolaridade?

E1: *Estudei até a 8ª série só.*

E2: *Eu nunca tive aula, minha aula foi só serviço. Nasci e me criei no sítio, só na lavoura, em fazenda. Têm uns 08 anos que vim pra cidade.*

E3: *Eu estudei até o 2º ano do 2º grau.*

E4: *Estudei até a 8ª série.*

E5: *Não cheguei a tirar o diploma da quarta série sai da escola para trabalhar.*

2. Há quanto tempo exerce a profissão?

E1: *De pedreiro eu estou trabalhando faz 12 anos.*

E2: *Tem 11 anos.*

E3: *Faz 18 anos.*

E4: *De pedreiro eu trabalho faz 12 anos.*

E5: *Que eu sou pedreiro tem quarenta anos. É tempo né?*

As demais perguntas foram analisadas conforme os **Focos** de aprendizagem de ofício, e serão mostradas aqui, algumas das respostas que mais se identificam com os mesmos.

3. Conte-me como foi seu caminho até chegar a ser pedreiro?

E1: *Então, eu morava no sítio, trabalhava na roça, trabalhava na lavoura. Eu vim de lá pra cá com meu cunhado. Comecei trabalhar de servente com o meu cunhado, que é pedreiro, e com ele mesmo eu aprendi a trabalhar de pedreiro, ele me deu chance, foi indo, foi indo, aprendi (**Foco 5**), trabalhei um ano com ele de servente e já passei a ser pedreiro. (**Foco 6**).*

Entendemos que nesta fala, a presença do **Foco 5** se dê pelo fato de o sujeito se referir à aprendizagem dentro da profissão, observando a prática de outros, pois ele cita que observava o cunhado e que esse lhe deu *chance, foi indo, foi indo, aprendi* e com isso, ele tornou-se apto nesta profissão. A última fala foi acomodada no **Foco 6** por representar um desenvolvimento de sua identidade como aprendiz dessa profissão, pois mostra que depois de sua experiência de *um ano com ele de servente* (referindo-se ao cunhado), já tornou-se *pedreiro*, isso se deve ao fato de que de modo geral, o pedreiro inicia-se na profissão como servente e depois de adquirido um pouco de prática, pode tornar-se pedreiro.

E3: *Eu comecei a trabalhar há 18 anos com o meu pai. Meu pai era mestre de obras, e tive curiosidade em aprender com ele (**Foco1**), e depois de um ano que eu estava trabalhando*

com ele, já me tornei pedreiro (Foco 6). Depois de quatro anos, eu já montei minha firma de construção (Foco 6). Foi meu pai quem me ensinou a trabalhar, meu pai trabalha de pedreiro há 40 anos. (Foco 5).

Na fala do E3 identificamos o **Foco 1** por se tratar da curiosidade e do interesse do sujeito, a qual pode afetar sua escolha pela carreira da profissão. O **Foco 6** por tratar de uma reflexão sobre a própria prática, e por identificarmos o enaltecimento por iniciar como servente e ter se tornado pedreiro. Ainda o **Foco 6** pelo fato de o entrevistado ter desenvolvido uma identidade e ter se envolvido com a profissão de tal forma que montou sua própria empresa na área. O **Foco 5** pelo fato de mencionar a aprendizagem com outros, pois neste caso, foi o pai quem ajudou a desenvolver sua identidade como aprendiz da profissão.

4. O que de matemática você se lembra de ter aprendido na escola?

E1: A matemática no meu tempo, porque era lá no sítio, não é a matemática que eu vejo agora com minha enteada, porque o que eu vejo agora é bem diferente. Lá eu só via as contas e problemas. O que eu vejo agora, eu não via lá. No meu tempo era bem diferente de agora. (Foco 4)

E3: A parte de matemática, o básico, contas, ângulo, porcentagem. Faz muito tempo que eu parei de estudar. (Foco 2)

E4: Mais as contas, as operações normal. Mas, um cálculo mais evoluído que eu estudei lá, eu não uso não. Aqui eu faço as contas, porcentagem, uso grau e a escala do projeto (Foco 2). Eu vim aperfeiçoar a matemática no serviço. (Foco 5)

Na fala do E1, o **Foco 4** se justifica pelo fato de o entrevistado refletir no modo que a disciplina era apresentada em seu tempo e como é agora, havendo assim uma análise de como as comunidades científicas evoluem com o tempo. Notamos que o entrevistado não responde o que da disciplina da Matemática ele presencia agora que é diferente de seu tempo.

A fala do E3 se adequa no **Foco 2** por tratar dos conhecimentos que aplicam em seu ofício diariamente.

Adequamos a primeira classificação da fala do E4 no **Foco 2** por entendermos que ele também relata alguns conteúdos da Matemática que aplica em sua profissão. E, o **Foco 5** se justifica quando o entrevistado relata que veio *aperfeiçoar a matemática no serviço*, e isso demonstra que ele aperfeiçoou-se dentro da profissão.

5. Você utiliza matemática no seu trabalho? Se sim, como?

E2: Uso sim. A matemática eu não uso de caneta, eu uso tudo de cabeça. Se eu tivesse um ano de estudo eu tinha aprendido muito, porque eu faço bem a matemática na cabeça, que eu aprendi muito no meu serviço. (Foco 5)

E3: Na construção, você trabalha com medida, você tem que saber manusear esquadro, fazer cálculo, e tudo faz parte da matemática. Por exemplo, você vai nivelar alguma coisa, tem que ter uma altura, medida, então a matemática dentro da construção a gente usa bastante. Para calcular e pedir o material. O concreto mesmo, a gente calcula por metro cúbico, que é a matemática. A quantidade de ferro, tijolo, a quantidade que vai por metro quadrado. A matemática usa bastante no dia a dia. (Foco 2)

E4: Ô, desde a fundação a gente começa usar a matemática. Da perfuração que vai, pra quanto vai de concreto dentro, a gente calcula o material, porque dependendo da metragem que a gente tem e que tira do projeto, já sabe o que vai de material. Então, pra pedir o

material, tudo vai matemática. [...] Desde o projeto do engenheiro até o final tem a matemática. Eles analisam o terreno para saber o que dá pra construir, e em tudo a gente usa a medida, ou seja, usa a matemática. (Foco 2)

E5: Todo cálculo que eu vou fazer eu uso a matemática. Metragem de piso, metragem de reboco, eu preciso saber a metragem de fio eu uso a matemática certo, tubulação, tudo eu uso matemática, pra fazer um contra piso eu tenho que saber a quantidade de massa, do material que vai, em tudo eu uso a matemática. (Foco 2)

A fala do E2 foi por nós acomodada no **Foco 5** por fato de o sujeito da pesquisa não ter frequentado a escola e mesmo assim, consegue realizar as operações básicas, as quais foram aprendidas em seu serviço.

Na fala do E3 o **Foco 2** fica evidenciado por se referir ao conhecimento como *saber medida, manusear esquadro, fazer cálculo*, e todo esse conhecimento *faz parte da matemática*. Além disso, o entrevistado revela que a matemática é utilizada em seu cotidiano.

As respostas dos entrevistados 4 e 5 também são acomodadas no **Foco 2** por explicarem e exemplificarem o que de matemática utilizam em seu trabalho e por compreenderem esse conhecimento científico. O E4 revela que desde o projeto – que é realizado pelo engenheiro: *Eles analisam o terreno para saber o que dá pra construir* – até a etapa final da obra, utiliza-se a matemática.

6. Tem como ser pedreiro e não usar matemática?

E1: Eu acredito que não, porque é uma coisa que você está ali, na medida, na metragem, já é uma matemática. O esquadro você tem que por ali na medida certa, já é uma matemática que você tem que calcular. Por exemplo, você vai fazer um metro quadrado, você tem que usar a matemática, e usa direto (Foco 2). Eu gosto da matemática (Foco 1), eu não estudei muito a matemática, que é diferente do meu tempo. Quando eu estudava, a matemática era a matéria que eu sempre tinha facilidade (Foco 1), quando eu saía da aula eu sempre saía alegre, porque eu sabia que ia acertar. (se referindo a atividade realizada na aula). (Foco 6)

E3: Não tem como. Porque a medida é fundamental na obra, não tem como trabalhar sem medida, sem conta. Então, a matemática tem que ser usada sempre, porque senão não dá certo. (Foco 2)

E5: Impossível, porque se o pedreiro não usar o cálculo que é a matemática, ele não consegue trabalho (Foco 2). Só se ele for ajudante para bater massa (Foco 6). Ou se ele for pedreiro de obras grandes, tipo assim, pedreiro de empreita que a gente fala, ele vai lá, você fala assim: eu quero que você reboca essa parede. Mas ele tem que usar o cálculo, porque como ele vai cobrar a parede? Tipo assim, ele reboa uma parede de 5 por 5,25 metros quadrados, aí se ele não souber fazer o cálculo o cara pode falar: você rebocou 25 metros quadrados (Foco 2). Eu vou te pagar em cima disso. Então, não tem como a pessoa ser pedreiro sem usar a matemática. (Foco 6)

A fala do pedreiro 1 foi acomodada no **Foco 2** por demonstrar que utiliza em seu trabalho os principais conceitos de seu aprendizado e que a matemática está presente diariamente. O **Foco 1** é verificado por haver manifestação de sentimento e emoção quando revela: *Eu gosto da matemática [...]* e também quando expõe: *Quando eu estudava, a matemática era a matéria que eu sempre tinha facilidade*. Além disso, classificamos o **Foco 6** porque na fala do sujeito foi identificado a emoção, o interesse e a motivação em aprender a matemática.

Nas falas dos E3 e E5 encontramos o **Foco 2** por explicarem e compreenderem o conhecimento científico utilizado diariamente em seu trabalho e quando enaltecem a matemática dizendo que é fundamental em sua profissão, *porque se o pedreiro não usar o cálculo que é a matemática, ele não consegue trabalho.*

O **Foco 6** na fala do E5 se justifica por haver uma reflexão do sujeito com relação a importância do cálculo em sua profissão, pois é a partir disso que o pedreiro consegue saber o valor a ser cobrado pelo trabalho desenvolvido.

7. O que é mais gratificante na sua profissão?

E1: *Pra mim é gostar do serviço, do cliente gostar do trabalho e o salário. Na minha escolaridade, de pedreiro é o serviço melhor que tem (Foco 1). Você olha pra trás e fica pensando: nossa! Será que fui eu mesmo que fiz isso? (Foco 4)*

E4: *A gente fica contente e gratificante é quando a gente começa um serviço do chão como tava esse aqui, e vê essa obra (mostrando para a construção de dois andares que construiu). Quando chega as pessoas aqui pra ver o sobrado e fala: Foi você que construiu? Nossa! Parabéns hein! Nossa... é gratificante mesmo, a gente se sente o todo poderoso né, então isso é gratificante. O homem aqui perto falou: nossa! Parabéns ficou ótimo! O dinheiro é importante, mas a satisfação é o que compensa, porque é um serviço duro. Eu tiro foto pra acompanhar o que eu estou fazendo, pra depois ver o resultado de tudo. (Foco 4)*

E5: *O que é mais gratificante na minha profissão é você realizar um serviço e o seu cliente olhar e falar assim: ficou muito bom. Isso é gratificante (é isso que eu queria). Não tem dinheiro que pague isso, seu cliente chegar e falar nossa, ficou ótimo, ficou excelente, é isso que eu queria, não imaginava que ia ficar desse jeito. Não tem dinheiro que pague. O dinheiro é importante para o dia a dia (pra sobreviver), mas não tem realização melhor que isso. Seu cliente chegar e falar: ficou muito bom, gostei, excelente. É bem isso mesmo que a gente busca né. É porque a gente tem amor na profissão, faz o que quer. Graças a Deus eu faço o que eu quero, trabalho no que eu gosto. (Foco 4)*

Quando perguntado sobre o que a maior gratificação na profissão, E1, E4 e E5 refletem sobre sua profissão (**Foco 4**), enfatizando que é gratificante quando chega ao final da construção e seu trabalho é reconhecido: *Quando chega as pessoas aqui pra ver o sobrado e fala: Foi você que construiu? Nossa! Parabéns hein!*

A fala do E1 também foi alocada no **Foco 1** por demonstrar um envolvimento emocional e sua motivação pelo ofício desenvolvido: *Na minha escolaridade, de pedreiro é o serviço melhor que tem.*

8. Na sua profissão é necessário atualizar-se?

E1: *Eu nunca fiz curso. É mais no dia a dia mesmo que eu aprendo. Eu aprendo com o mestre de obra, eu fico sempre “atenado” com eles. O projeto eu não entendia muito, e agora eu já sei (Foco 3). Eu fico perto das pessoas que entendem e sou curioso (Foco 1). Eu tenho que estar perto das pessoas que entendem mais e fico atento, às vezes dá uma folguinha e fico perguntando. Tem muitas coisas pra aprender. (Foco 5)*

E3: *Eu nunca fiz curso, porque na construção civil aprende a ser pedreiro é dentro da obra, no dia a dia. É o tempo e o interesse pra fazer a diferença do serviço do pedreiro. O interesse, a vontade de progredir, de melhorar, de ganhar mais, faz com que a pessoa aprenda mais. (Foco 1)*

E4: É mais na prática mesmo. Quando coloca produto novo no mercado, o povo vem demonstrar, eles vão no depósito, e fala da gente, e daí gente faz o teste. Já vieram oferecer curso pra nós, que é a escola da construção, eles dão curso de pedreiro, de azulejista, de mestre de obra. Mas, eu nunca fiz, porque eu já tenho a prática. (Foco 6)

Acomodando as respostas de E1, E3 e E4, encontramos os **Focos 1, 3, 5 e 6**. O **Foco 1** surge por mostrar o interesse e a curiosidade por aprender o ofício.

O **Foco 3** foi alocado na fala do E1 por mencionar que observava o desenvolvimento da atividade do mestre de obras e do engenheiro (quando menciona sobre o projeto), e assim, foi criando seu modelo para dar sustentabilidade e conseguir realizar seu trabalho.

Quanto à atualização na profissão, o sujeito 1 fala sobre envolvimento com a prática do ofício e reflete sobre seu trabalho, o que pode ser verificado na fala: *Eu tenho que estar perto das pessoas que entendem mais e fico atento, às vezes dá uma folguinha e fico perguntando. Tem muitas coisas pra aprender. (Foco 5)*

A fala do E4 – **Foco 6** – demonstra ter desenvolvido sua identidade como aprendiz e dessa forma consegue realizar seu trabalho.

Considerações finais

Neste artigo apresentamos resultados de reflexões desenvolvidas sobre os saberes e fazeres adquiridos de maneira informal referente à profissão do trabalhador da construção civil, que exige alguns saberes matemáticos para ser exercida.

O procedimento metodológico utilizado nos permitiu constatar que esses saberes e fazeres realizados pelos entrevistados envolve realmente a matemática e é uma aprendizagem que ocorre de forma contínua parecendo estar incorporada à vida cotidiana.

Como os participantes da pesquisa deixaram nítido que seus familiares e amigos contribuíram decisivamente para o desenvolvimento de sua profissão, pois foram eles quem lhes passaram os saberes que possuíam quanto à atividade na construção civil, percebemos que as pessoas de fato estão aprendendo no dia a dia, com familiares ou pessoas mais experientes da comunidade da qual fazem parte. Seus interesses estão focados na necessidade, e diante de um problema de sua prática cotidiana, os saberes construídos são organizados como um conjunto de representações e aplicados para interpretar e solucionar-lo.

Destacamos que essa pesquisa teve a intenção de mostrar que a matemática é encontrada em ambientes informais, mesmo com o desconhecimento do nome cientificamente atribuído à operação matemática realizada. Alguns profissionais da área da construção civil, como é o caso do pedreiro, não possuem escolaridade suficiente para a realização de cálculos matemáticos necessários à sua atividade. No entanto, os mesmos concluem suas obras.

Evidenciamos durante as entrevistas, que os participantes sabem mais do que as quatro operações matemáticas fundamentais – adição, subtração, multiplicação e divisão – pelo fato de referirem-se a raiz cúbica, escala, metro cúbico, entre outros, revelando assim, que muito conhecimento informal é adquirido diariamente por esses profissionais.

Um pedreiro conta com o auxílio de várias ferramentas, tais como fio de prumo, desempenadeira, metro que é utilizado para medir pequenas distâncias, trena para grandes medidas, lápis de carpinteiro, giz, mangueira de nível, esquadro, colher de pedreiro, peneira, serrote, martelo, pé-de-cabra, marreta, etc. Mas, na maioria das vezes, não se utilizam de

instrumentos que lhes permitam fazer cálculos mais especializados como, por exemplo, calculadora, transferidor e compasso. E, mesmo assim, possuem um grande conhecimento no campo da matemática, tendo em vista o seu grau de escolaridade. Conhecem muito bem a prática, porém alguns possuem uma deficiência de conceitos matemáticos.

Das entrevistas, pudemos observar que os trabalhadores da construção civil afirmaram a importância da “prática” para a construção dos saberes e fazeres. Embora esse aprendizado pela prática seja construído no dia a dia, acreditamos que, pelo menos no início da aprendizagem, deva ser sempre assistido ou supervisionado por um trabalhador mais experiente, tratando assim de um aprendizado que ocorre em uma comunidade de prática.

Ainda há muito a ser pesquisado, pois este trabalho limita-se apenas a uma situação do cotidiano de cinco pedreiros. E, existem discussões quanto à importância das experiências cotidianas no desenvolvimento do pensamento científico, mas, sabe-se que mais pesquisas são necessárias para iluminar as sutilezas da interação entre o pensamento sobre a ciência do cotidiano e do contexto escolar.

Com esses novos focos de aprendizagem de ofício, diversas outras profissões poderiam ser analisadas com o intuito de investigar se existe aprendizagem nestes diferentes contextos. Essa nova abordagem necessita de um tempo maior de maturação e aprofundamento por parte dos pesquisadores.

Referências e bibliografia

- Arruda, S. M. et al. (2013). O aprendizado científico no cotidiano. *Cienc. Educ.*, 19(2), 481-498. Bauru.
- Colley, H., Hodkinson, P., & Malcolm, J. (2002). *Non-formal learning: mapping the conceptual terrain. A consultation report*. Leeds: University of Leeds Lifelong Learning Institute.
- D'Ambrosio, U. (2002). *Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade* (2ª ed.). Belo Horizonte: Autentica (Coleção Tendências em Educação Matemática).
- D'Ambrosio, U. (2002). *Etnomatemática*. São Paulo: Ática, 1993.
- Dierking, L. D. (2005). Lessons without limit: how free-choice learning is transforming science and technology education. *História, Ciências, Saúde Manguinhos*, 12 (supplement), 145-160.
- Manzini, E. J. (1990/1991). A entrevista na pesquisa social. *Didática*, 26/27, 149-158. São Paulo.
- Miles, M. B., & Huberman, A. N. (1994). *Qualitative data analysis: an expanded sourcebook* (2ª ed.). Thousand Oaks: Sage. 338 p.
- National Research Council (NRC). (2009). Learning Science in Informal Environments: People, Places, and Pursuits. Committee on Learning Science in Informal Environments. En P. Bell, B. Lewenstein, A. W. Shouse, & M. A. Feder (Eds.), *Board on Science Education, Center for Education, Division of Behavioral and Social Sciences and Education*. Washington, DC: The National Academic Press.
- Pozo, J. I., & Crespo, M. A. (2000). *Aprender y enseñar ciencia*. Madrid: Morata.
- Stanzani, E. L., Passos, M. M., & Arruda, S. M. (2011). Reflexões sobre a aprendizagem científica em ambientes informais de educação. Em *X Congresso Nacional de Educação – EDUCERE* (pp. 9697-9700). Curitiba.

Análise das justificativas de alunos em questões de fração envolvendo os invariantes ordem e equivalência.

Raquel Factori **Canova**

Universidade Anhanguera de São Paulo

Brasil

fraquelc@yahoo.com.br

Angélica da Fontoura Garcia **Silva**

Universidade Anhanguera de São Paulo

Brasil

angelicafontoura@gmail.com

Tânia Maria Mendonça **Campos**

Universidade Anhanguera de São Paulo

Brasil

taniammcampos@hotmail.com

Rosivaldo Severino dos **Santos**

Universidade Anhanguera de São Paulo

Brasil

rosivaldosantos217@ygmail.com

Resumo

Esta comunicação analisa as justificativas apresentadas por alunos do 4º, 5º e 6º anos do Ensino Fundamental nas questões que envolvem os invariantes equivalência e ordem de frações. Essas questões serão denominadas neste trabalho como questões de raciocínio. O referencial teórico utilizado em nossa análise foi a Teoria dos Campos Conceituais (Vergnaud). Os alunos responderam oito questões individualmente em sala de aula. Os resultados apontam equívocos dos alunos ao aplicarem propriedades dos números naturais em problemas de frações e também que o conhecimento implícito nas questões de frações não se amplia facilmente no decorrer dos anos. Nesse sentido, há a necessidade de se investigar mais sobre como favorecer o processo de reflexão dos invariantes ordem e equivalência de números fracionários.

Palavras-chave: Ensino e Aprendizagem de fração, Número Racional na representação fracionária, Invariantes operatórios, Ordem, Equivalência, Ensino Fundamental.

Introdução

O objetivo deste trabalho é analisar 490 respostas de alunos¹ do 4º, 5º e 6º anos do Ensino Fundamental ao justificarem a escolha por uma das alternativas como resposta às questões de raciocínio em problemas de fração. Após analisar essas justificativas criamos algumas categorias as quais exemplificamos com protocolos de alunos. O desenho desse estudo inicia-se com a

¹Os professores desses alunos faziam parte do Projeto Observatório da Educação financiado pela CAPES. Projeto 99/2010: Educação Continuada e Resultados de Pesquisa em Educação Matemática: uma investigação sobre as transformações das práticas de professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Coordenado pela Profª. Dra. Tânia Maria Mendonça Campos

descrição da relevância do tema por meio de estudos que vêm sendo desenvolvidos e a fundamentação teórica. Em seguida apresentamos os procedimentos metodológicos, análise e discussão dos resultados e considerações finais.

Relevância do tema

Na literatura encontramos trabalhos de diferentes autores que chamam a atenção para o tema fração como uma das noções mais complexas que os alunos do Ensino Fundamental encontram ao estudar matemática (Behr, Wachsmuth, Post, & Lesh, 1984; Hart, 1981; Kerslake, 1986; Kieren, 1988, entre outros). No Brasil, as frações são incluídas no currículo no 4º ano do Ensino Fundamental, e são exploradas no decorrer dos anos subsequentes. No entanto, pesquisas desenvolvidas no Brasil (ver, por exemplo, Canova 2013, Garcia Silva, Campos, Pinheiro, Souza 2013) e internacionalmente (Streefland, 1991, Behr, Harel, Post, Lesh, 1992, Nunes e Bryant, 2009, para citar apenas alguns), indicam as dificuldades em trabalhar com frações. Tais dificuldades devem ser levadas em consideração ao pensarmos que as crianças brasileiras não têm familiaridade com as frações no seu dia-a-dia, assim como tem com os números naturais. Com isso aparecem os obstáculos em que os estudantes querem utilizar as mesmas propriedades, conceitos válidos para os números naturais para com as frações.

Quando pensamos no ensino introdutório de fração, concordamos com estudos como os de Streefland (1991) e Nunes, Bryant, Pretzlik, Evans, Wade e Bell (2004) ao afirmar que duas situações são as mais indicadas: parte-todo e quociente. A situação parte-todo tem como ideia central a dupla contagem – um todo dividido em n partes iguais, no qual cada parte pode ser representada como $\frac{1}{n}$. A ideia central da situação quociente é a divisão e existência de duas variáveis, uma correspondendo ao numerador e a outra ao denominador.

Além dos tipos de situações apoiados em Vergnaud (1990, 2009) consideramos também os invariantes, ordem e equivalência. Para esses invariantes, independentemente do conjunto numérico, nas relações de equivalência é possível colocar em uma mesma classe elementos equivalentes, e, assim, formar classes de equivalência. Em relação à ordenação temos que é possível ordenar elementos de modo que não haja dois deles no mesmo lugar (VERGNAUD, 2009). No caso das frações é preciso explorar mais esses conceitos de modo a viabilizar uma melhor compreensão por parte dos alunos, uma vez que são conceitos fundamentais para a construção do conceito de fração.

Fundamentação teórica

Para subsidiar a análise dos resultados apoiamo-nos na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1993), a qual oferece uma estrutura que possibilita estudar as filiações e rupturas entre conhecimentos e as relações existentes entre os conceitos. De acordo com o autor a construção de um conceito não se dá de modo imediato e o tempo necessário para essa construção varia de pessoa para pessoa. Um campo conceitual é o conjunto de situações, cuja compreensão necessita do domínio de vários conceitos de naturezas diferentes, de seus invariantes e por um conjunto de representações simbólicas.

Para Vergnaud (1990), é por meio das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para o sujeito. Nesse contexto, podemos distinguir duas classes de situações. Na primeira, o sujeito dispõe em seu repertório, em um dado momento de seu desenvolvimento das competências necessárias ao tratamento relativamente imediato da situação. Na outra classe o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um

tempo de reflexão, a hesitações, a tentativas frustradas que o leva eventualmente ao sucesso ou ao fracasso.

Vergnaud (1990) considera ainda que no processo do domínio de um campo conceitual pelo estudante, é importante que o professor favoreça o desenvolvimento de esquemas de ação. Os esquemas são os procedimentos, os invariantes e as condutas organizadas por regras de ações sobre uma classe de situações dadas, isto é, a forma estrutural de atividade e está acompanhado de um teorema-em-ação ou de um conceito-em-ação.

O conceito-em-ação é um invariante operatório com suas propriedades e definições, quando são manifestados geralmente são explícitos (Vergnaud, 1990). Os teoremas-em-ação aparecem de modo intuitivo e, na maioria das vezes, são implícitos. Estão relacionados com as estratégias utilizadas pelo sujeito no momento de solucionar situações-problema, sem que consiga explicitá-los ou justificá-los (Vergnaud, 1990). Portanto, os teoremas-em-ação indicam um caminho para se analisarem as estratégias intuitivas dos alunos e ajudá-los a transformar conhecimento intuitivo em conhecimento explícito.

Procedimentos metodológicos

O estudo envolveu crianças com idade média de 10 anos. Todos eram alunos de escolas públicas da cidade de São Paulo, Brasil. Para essa análise excluímos as respostas em branco e as justificativas que não conseguimos categorizar, resultando em uma análise de 490 justificativas.

A coleta de dados ocorreu na própria sala de aula dos estudantes, sujeitos desse estudo. Os alunos responderam individualmente a um caderno contendo oito problemas, e não contaram com o auxílio de qualquer material. Dos oito problemas, quatro eram de situação parte-todo e quatro de situação quociente. Dos quatro problemas, tanto de uma situação como de outra, dois envolvem o invariante ordem e outros dois o invariante equivalência. Nas oito questões, foi solicitado aos alunos que representassem, com frações, a situação expressa no enunciado e posteriormente, selecionassem uma alternativa, que considerassem correta, esta comparando duas quantidades – se uma era maior, menor ou igual à outra quantidade. Esta comparação denominamos como questões de raciocínio. Após terem selecionado uma das alternativas era solicitado uma justificativa para a escolha apresentada. Vale ressaltar que a comparação sobre o resultado da divisão não remeteria o estudante, necessariamente, à notação de fração. Os alunos poderiam responder somente interpretando o enunciado e o resultado da partilha. Sendo assim, para essa comunicação iremos apenas analisar as justificativas dos alunos quanto às questões de raciocínio.

Quanto à aplicação do instrumento, a pesquisadora leu junto aos alunos a questão por questão; entre as questões era dado um tempo para os alunos responderem as perguntas. Tal método foi adotado, pois acreditamos que assim evitaríamos eventuais dificuldades de leitura que pudessem interferir no desempenho dos estudantes na resolução das questões.

A seguir apresentamos um exemplo que ilustra a estrutura de cada um dos oito problemas:

Ana divide seu chocolate em 2 partes iguais e come 1 parte.
Marta divide seu chocolate em 4 partes iguais e come 2 partes.
Os chocolates são idênticos. Represente a fração que cada uma comeu.



Ana



Marta

questão de nomear frações

Ana comeu mais do que a Marta ☐

Marta comeu mais do que a Ana ☐

Ana comeu tanto como a Marta ☐

questão de raciocínio

Porque _____


justificativa

Figura 1. Exemplo de um problema indicando os tipos de questões.

Esse é um problema na situação parte-todo e envolve o invariante equivalência, no qual destacamos as questões de nomear frações e raciocínio e também a parte que é o foco de nossa comunicação, que são as justificativas dos alunos quanto a escolha realizada.

Análise dos resultados

A análise dos protocolos dos alunos nos permitiu identificar as respostas consideradas por nós como válidas, ou seja, as justificativas nas quais os alunos apresentaram a ideia do conceito de equivalência ou ordem. Além disso, buscamos nas outras respostas, justificativas que nos permitissem analisar os argumentos utilizados pelo estudante para responder o problema proposto.

Apresentaremos a seguir algumas justificativas consideradas válidas. O problema a seguir envolve uma situação parte-todo com o invariante equivalência.

Ana divide seu chocolate em 2 partes iguais e come 1 parte. Marta divide seu chocolate em 4 partes iguais e come 2 partes. Os chocolates são idênticos. Represente a fração que cada menina comeu.



Ana



Marta

Ana comeu tanto como a Marta ☐

Ana comeu mais do que a Marta ☐

Marta comeu mais do que a Ana ☐

porque _____

Figura 2. Problema na situação parte-todo com o invariante equivalência.

Uma resposta considerada válida pode ser exemplificada pelo seguinte protocolo de um aluno do 4º ano que selecionou corretamente a alternativa de raciocínio:

Porque Marta comou dois
pedaços pequenos e Gina comou
um pedaço maior que vale
dois pedaços pequenos.

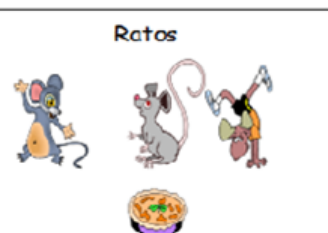
Figura 3. Protocolo do aluno 67 referente à categoria “justificativa válida”

Esse aluno apresenta uma justifica válida, sem utilizar a linguagem formal, e mostra ter identificado a relação proporcional entre os pedaços de chocolate, mostrando compreender a equivalência das quantidades que cada menina comeu. Quanto à linguagem, esse fato era de se esperar uma vez que, até o momento de nossa coleta de dados, eles não tiveram contato com este conteúdo, segundo os professores responsáveis pelas classes.

Outro exemplo das justificativas válidas pode ser observado no problema a seguir que envolve a situação quociente.

Cada grupo de ratos e coelhos tem uma torta de cenoura. Três ratos irão dividir igualmente 1 torta entre eles. Cinco coelhos também irão dividir igualmente 1 torta entre eles. As tortas são idênticas e não pode sobrar pedaço. Represente a fração que cada um irá comer.

Ratos



Coelhos



Cada rato come mais do que cada coelho ☐

Cada rato come menos do que cada coelho ☐

Cada coelho come tanto como cada rato ☐

Figura 4. Problema na situação quociente com o invariante ordem.

Para esse problema um aluno do 4º ano apresentou uma justificativa considerada por nós como válida.

Porque Os pedaços dos ratos serão maiores
porque tem apenas 3 ratos e como tem
5 coelhos, os pedaços serão menores

Figura 5. Protocolo do aluno 245 referente à categoria “justificativa válida”

Analisando a justificativa podemos inferir que esse aluno compreende a ideia que envolve o invariante ordem e parece entender a relação inversa entre o divisor e o quociente. Ao relatar que os pedaços dos ratos serão maiores do que os dos coelhos parece perceber que quanto mais se divide um inteiro, menor ficam as partes.

Foi baixo o número de justificativas válidas, uma vez que o percentual de acerto nas questões de raciocínio foi 24,7% e apenas 6,8% apresentaram justificativas válidas. Esse dado é preocupante, pois mesmo sendo bem baixo o percentual de acerto nas questões de raciocínio, o número de alunos que justificaram corretamente foi ainda menor. Isso nos leva a questionar até que ponto o aluno que selecionou a alternativa correta para as questões de raciocínio tem o conhecimento, mesmo que apresentado de forma intuitiva, dos invariantes ordem ou equivalência. Entre os tipos de situações o índice de justificativas válidas foi bem próximo, tanto para as questões na situação parte-todo (49,3%) quanto para as questões na situação quociente (50,7%).

Quanto às justificativas consideradas por nós como não válidas conseguimos classificá-las em três grupos: os alunos que em lugar de justificar copiaram trechos do enunciado; alunos que justificaram comparando apenas numeradores e os alunos que justificaram comparando apenas denominadores.

A tabela 1 apresenta a visão geral da frequência dos erros por categorias e situações:

Tabela 1:

Frequência de erros nas questões de raciocínio, por categorias e situações.

	Trecho do enunciado	Compara numeradores	Compara denominadores
Sit. Parte-todo	64	65	25
Sit. Quociente	77	30	14
Total	141	95	39

Analisando a tabela 1, o que nos chama mais a atenção é o número total de justificativas em que os alunos apenas copiaram parte do enunciado (141) e o número de justificativas por situação, na categoria de comparar os numeradores que foi mais do que o dobro de uma situação para outra.

Para compreendermos melhor iremos exemplificar essas categorias:

- Cópia de trechos do enunciado – nessa categoria consideramos as justificativas nas quais alunos copiaram parte do enunciado do problema ou parte da questão de raciocínio. O problema a seguir apresenta uma situação em que se comparam dois casos da situação parte-todo:

Duas meninas irão dividir igualmente 1 barra de chocolate e não deve sobrar nada. Quatro meninos também irão dividir igualmente 2 barras de chocolate sem sobrar chocolate. Os chocolates são idênticos. Represente a fração que cada um irá receber.



Cada menina irá comer mais do que cada menino ☐
 Cada menino irá comer mais do que cada menina ☐
 Cada menina irá comer tanto como cada menino ☐

Figura 6. Problema na situação quociente com o invariante equivalência.

Um aluno do 5º ano seleciona a última alternativa e no lugar de justificar o porque de sua escolha descreve exatamente o conteúdo da alternativa, conforme mostra a figura a seguir:

Porque cada menina irá
 comer tanto como cada
 menino.

Figura 7. Protocolo do aluno 113 referente ao grupo “cópia de trechos do enunciado”

Nesse caso, consideramos que não é possível afirmar se o aluno compreendeu ou não o conceito de equivalência, uma vez que essa seria a alternativa correta, mas não foi possível identificar o que o levou a chegar a essa conclusão. Justificativas como essa foram as mais comuns, correspondendo a mais da metade (51,3%) dos três grupos de respostas categorizadas por nós. Ao comparar por tipo de situação, os índices foram próximos: 45,4% na situação parte-todo e 54,6% na situação quociente.

- Compara apenas os numeradores: nesse grupo os alunos justificam dizendo quem comeu mais ou menos parte ou justificam em relação à quantidade de objetos a ser dividido. No problema a seguir é explorado o invariante equivalência em duas situações parte-todo:

O índio corta a sua pizza em 4 partes iguais e come uma parte. A índia corta a sua pizza em 8 partes iguais e come duas partes. As pizzas são idênticas. Represente a fração que cada um irá comer.



O índio irá comer mais do que a índia ☐

A índia irá comer mais do que o índio ☐

O índio irá comer tanto como a índia ☐

Figura 8. Problema na situação parte-todo com o invariante equivalência.

A justificativa de um aluno do 5º ano para o problema mencionado acima foi a seguinte:

Porque porque a índia comeu
2 partes e o índio comeu
1 parte

Figura 9. Protocolo do aluno 178 referente à categoria “compara apenas o numerador”

Apreciando essa justifica temos que o aluno analisou apenas a quantidade de “partes” que cada índio comeu e não considerou o “tamanho das partes”. Nesse sentido, observamos que esse estudante não reconheceu a relação das partes com o todo referência. Observamos nesse exemplo, que os teoremas em ação utilizados por esses estudantes são os mesmos empregados quando quantificam números naturais. Nos parece que estes estudantes “discretizaram” essa grandeza contínua a fim de estabelecer relações entre as quantidades de “pedaços”.

Como visto anteriormente, na situação parte-todo foi categorizado 68,4% desse grupo de resposta enquanto na situação quociente foram 31,6%. Temos a hipótese de que o número elevado de respostas desse grupo na situação parte-todo possa ser influenciado pela maneira que, frequentemente, enunciamos os problemas nessa situação. É muito comum enunciarmos, por exemplo, que uma pessoa “comeu tantas partes” de um todo e a pergunta realizada é “o quanto essa pessoa comeu?”. Esse tipo de pergunta não acontece na situação quociente, na qual temos, por exemplo, uma quantidade a ser dividida por um número de pessoas e a questão solicitada é o quanto cada pessoas irá ganhar.

- Compara apenas os denominadores: nesse grupo os alunos justificam dizendo quem cortou em mais ou menos partes ou justificam analisando a quantidade ou número de pessoas que irão dividir algo.

Podemos exemplificar esse tipo de justificativa considerando o mesmo problema enunciado anteriormente e temos como resposta o seguinte protocolo de um aluno:

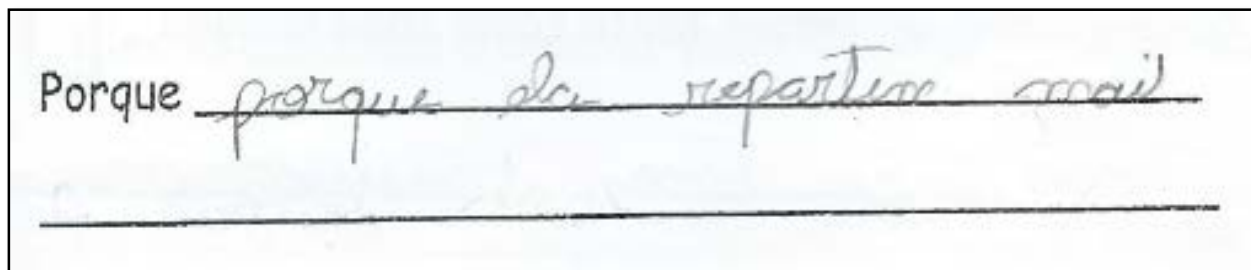


Figura 10. Protocolo do aluno 161 referente à categoria “compara apenas o denominador”

Esse aluno do 6º ano, seleciona a alternativa em que a índia irá comer mais e justifica dizendo que ela dividiu em mais partes a sua pizza. Nessa justificativa também há foco na quantidade e não na relação entre parte e o todo.

Para esse grupo de justificativas o índice foi maior na situação parte-todo (64,1%) do que na situação quociente (35,8%). Mais uma vez encontramos uma incidência maior desse argumento entre os alunos que responderam a situação parte-todo. Esse dado nos faz refletir sobre os resultados de pesquisas (Mack, 1990, Streefland, 1991 e Nunes et al 2004) que indicam ser mais natural compreender questões de raciocínio na situação quociente.

Nessa análise das justificativas dos alunos (válidas ou não) podemos pensar no que Vergnaud (2001) relata sobre as duas classes de situações: uma em que o sujeito dispõe de repertório necessário para o tratamento imediato de uma situação e outra em que o sujeito não dispõe de todas as competências necessárias, o que o obriga a um maior tempo de reflexão. Os alunos, na tentativa de responder corretamente as questões propostas, buscam em seus conhecimentos construídos uma solução para tal problema. Nesse sentido, observamos que possivelmente muitos alunos que se equivocaram se apoiaram na ideia de quantidade e não na relação entre as quantidades (em muitos casos da situação parte-todo). Sobre essa temática concordamos com os estudos que indicam que muitas dificuldades dos alunos que iniciam o trabalho com frações na sua aprendizagem são relacionadas ao fato de não considerarem a fração como um número e sim a sobreposição de dois números naturais.

Nesse trabalho identificamos teoremas em ação que, segundo Vergnaud (1998) é uma proposição na qual o sujeito toma como verdadeira sobre o real, podendo ser essa falsa ou não. Essa ideia é ilustrada neste estudo por meio das justificativas que se baseiam na análise da quantidade de pedaços

Em nosso experimento foi possível identificar que as justificativas apresentadas, sejam as válidas e não válidas- mostraram-se ser de natureza empírica. Tal fato nos ajuda a compreender a complexidade presente nos processos de ensino e aprendizagem das frações, sobretudo, quando tratamos dos invariantes equivalência e ordem. Há necessidade também de focalizar mais situações que levem o estudante a refletir sobre a relação inversa entre o divisor e o quociente, pois essa ideia parece não ter se consolidado para o grupo investigado. Observamos ainda que mesmo quando nossos alunos apresentam justificativas válidas sobre equivalência e ordem há necessidade de ampliar e consolidar esse conhecimento.

Considerações finais

Da mesma forma que estudos como os de Hart (1981), Behr, Wachsmuth, Post, Lesh (1984) e Mack (1995), dentre outros, apontam equívocos dos alunos ao aplicarem propriedades

dos números naturais em problemas de frações, as respostas apresentadas pelos estudantes investigados nesse estudo nos permitiu identificar que a maioria das justificativas eram equivocadas e referiam-se a comparação entre frações pela análise dos numeradores ou denominadores como se fossem dois números naturais os quais poderiam ser analisados separadamente: ora com foco no “tamanho do pedaço”, ora na “quantidade de pedaços”.

Nesta investigação há indicações sobre a utilização de conhecimentos informais pelos estudantes. Todavia os resultados nos permitem refletir sobre o papel fundamental que o professor deve assumir, uma vez que o conhecimento informal identificado neste estudo não se amplia facilmente no decorrer dos anos. Dessa forma, há necessidade de se investigar mais sobre como favorecer, durante as aulas de matemática, o processo de reflexão dos invariantes ordem e equivalência de números fracionários.

Referencias bibliográficas

- Behr, M. J., Wachsmuth, I., Post, T. R., & Lesh, R. (1984). Order and equivalence of rational numbers: A clinical teaching experiment. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15(5), p. 323-341.
- Behr, M., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, proportion. In: D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan, p. 296-333.
- Canova, R.F. (2013). *Um Estudo das Situações Parte-todo e Quociente no Ensino e Aprendizagem do Conceito de Fração*. Tese de Doutorado em Educação Matemática na Universidade Bandeirante Anhanguera de São Paulo, São Paulo.
- Garcia Silva, A. F.; Campos, T. M. M. ; Pinheiro, M. G. C.; Souza, M. P. (2013). Situação Quociente: Limites e Possibilidades. In: XI ENEM, 2013, Curitiba. *Anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática- Retrospectiva e perspectiva*. Curitiba.
- Hart, K.(Ed.) (1981). *Children's understanding of mathematics: 11-16*. London: Murray.
- Kerslake, D. (1986). *Fractions: Children's Strategies and Errors: A Report of the Strategies and Errors in Secondary Mathematics Project*. Windsor: NFER-Nelson.
- Kieren, T. (1988). “Personal knowledge of rational numbers: Its intuitive and formal development”. In: J. Hiebert & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle-grades*. Reston (VA): National Council of Teachers of Mathematics, p. 53-92.
- Mack, N. K. (1990). Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, 16-32.
- Mack, N. K. (1995). Confounding whole number and fraction concepts when building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26, 422-441.
- Nunes, T., Bryant, P., Pretzlik, U., Evans, D., Wade, J. & Bell, D. (2004). Vergnaud's definition of concepts as a framework for research and teaching. *Annual Meeting for the Association pour la Recherche sur le Développement des Compétences*, Paper presented in Paris: 28-31, January.
- Nunes, T.; Bryant, P. (2009). *Key understandings in mathematics learning*. Paper 3: Understanding rational numbers and intensive quantities. Nuffield Foundation Disponível em <<http://www.nuffieldfoundation.org/reports>>. Acesso em 24 de abril de 2012.
- Streefland, L. (1991). *Fractions in Realistic Mathematics Education: A Paradigm of Developmental Research*. Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers.
- Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10 (23), p. 133-170.

- Vergnaud, G. (1993). “Teoria dos campos conceituais”. In: Nasser, L. (Ed.) *Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro*. p. 1-26.
- Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), p. 167-181.
- Vergnaud, G. (2001). *Didáctica das Matemáticas*. In: Brun, J. Lisboa: Instituto Piaget.
- Vergnaud, G.. (2009). A contribuição da psicologia nas pesquisas sobre a educação científica, tecnológica e profissional do cidadão. In: Fávero, M. H.; Cunha, C. da (Orgs.). *Psicologia do conhecimento: o diálogo entre as ciências e a cidadania*. Brasília: UNESCO: Instituto de Psicologia da Universidade de Brasília: Líber Livros Editora.

Análise diagnóstica do uso da pergunta pelo professor de Matemática dos anos iniciais do ensino fundamental, à luz da Sequência Fedathi¹

Francisco Edisom Eugenio de **Sousa**

Universidade Federal do Ceará

Brasil

edisom@multimeios.ufc.br

Hermínio **Borges Neto**

Universidade Federal do Ceará

Brasil

herminio@multimeios.ufc.br

Marta Alves da **Silva**

Universidade Federal do Ceará

Brasil

marta@multimeios.ufc.br

Resumo

Este trabalho teve como objetivo diagnosticar o uso da pergunta pelo professor de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental, à luz da Sequência Fedathi. A investigação foi qualitativa, por meio da pesquisa exploratória, e teve como sujeitos professores do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública da cidade de Quixadá, Ceará, Brasil. Utilizamos como estratégia a observação e como instrumento o diário de campo. O uso da pergunta pelo professor foi nosso objeto de estudo, em que verificamos se ele usa ou não a pergunta e como age diante das perguntas e respostas dos alunos. Como resultados, constatamos que em algumas ocasiões o docente utilizou ou soube aproveitar as perguntas dos alunos, mas não o fez na maioria das situações observadas, o que nos leva a concluir sobre a necessidade da formação do professor, com e para o uso da Sequência Fedathi.

Palavras-chave: Sequência Fedathi; pergunta; professor de Matemática; prática docente.

Introdução

Este trabalho apresenta um recorte da fase inicial da nossa pesquisa de doutorado em educação, em desenvolvimento na Faculdade de Educação da Universidade Federal do Ceará (FACED/UFC), no estado do Ceará, Brasil, e teve como objetivo diagnosticar o uso da pergunta pelo professor de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental, tendo a Sequência Fedathi como aporte teórico na análise dos dados.

¹ Proposta teórico-metodológica para a organização do ensino, sob a coordenação do professor Dr. Hermínio Borges Neto, da FACED/UFC, inicialmente pensada para o ensino de Matemática, atualmente utilizada em outras áreas do conhecimento.

A pesquisa empírica foi realizada em uma escola da rede municipal da cidade de Quixadá, no estado do Ceará, com sete professores do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental.

Na pesquisa, utilizamos como suporte metodológico os princípios da abordagem qualitativa e da pesquisa exploratória, como forma de investigação do objeto de estudo, referente ao uso da pergunta pelos professores, os sujeitos da pesquisa. Utilizamos como estratégia investigativa a observação e o diário de campo como instrumento de pesquisa.

Como resultados, identificamos que os professores apresentam dificuldades em perguntar ou em saber o que fazer com as perguntas ou respostas dos alunos. Essa realidade nos leva à conclusão de que é necessária a formação *com e para* o uso da Sequência Fedathi, para que o professor possa utilizar a pergunta como estratégia de mediação didática, na perspectiva de transformar a sala de aula em um ambiente de investigação.

Fundamentos teóricos

Neste tópico, apresentamos a Sequência Fedathi, com suas concepções e etapas, destacando a pergunta como estratégia de mediação didática do professor na sala de aula. Também trazemos algumas abordagens sobre o uso da pergunta, quando estabelecemos um diálogo entre a Sequência Fedathi e essas abordagens, apresentando alguns relatos sobre como a pergunta vem sendo utilizada na aplicação dessa proposta de ensino.

Sequência Fedathi e o uso da pergunta

A Sequência Fedathi é uma proposta de ensino elaborada e utilizada pelo Laboratório de Pesquisa Multimeios, da FAGED/UFC, constituída por quatro etapas: tomada de posição ou apresentação de um problema pelo professor; maturação ou debruçamento dos alunos sobre o problema; solução, fase em que os alunos apresentam resposta(s) para o problema; e prova, quando o professor faz a formalização do conteúdo (Sousa *et al.*, 2013).

Borges Neto ressalta que uma das características importantes na aplicação da Sequência Fedathi é a realização, de forma sequencial, de todas as suas etapas, afirmando que só assim se pode produzir os resultados esperados na aprendizagem. O autor é crítico em relação ao modelo de ensino tradicional, por centralizar-se apenas em duas das etapas da Sequência, *a tomada de posição e a prova* (Souza, 2013, pp. 35-36). [Grifos no original].

A crítica de Borges Neto (Souza, 2013) é feita à aula de Matemática em que o professor começa com a apresentação de conceitos, fórmulas e segue com uma lista de exercícios a ser resolvida pelos alunos, não proporcionando aos discentes a oportunidade de pensar e experimentar suas próprias estratégias na resolução do problema.

A essência da Sequência Fedathi é a postura do professor na sala de aula, durante sua aplicação. A mediação didática do docente acontece especialmente na segunda e terceira etapas, em que os alunos buscam e apresentam soluções para o problema proposto. É fundamental que o professor utilize esse momento para instigá-los a resolver o problema, levando-os à reflexão sobre os resultados encontrados, tanto no caso de acertos como no caso de erros. A pergunta é fundamental nesse momento.

O professor deve contribuir para que o aluno, ao se deparar com um problema novo, reproduza os mesmos passos de um matemático, ou seja, experimente vários caminhos que possam levá-lo à solução, analise os possíveis erros, busque conhecimentos para constituir a solução, teste os resultados para saber se errou e onde errou, corrija-os e construa um modelo, durante as etapas de maturação e solução (Souza, 2013, p. 18).

O trabalho do professor é fundamental no acompanhamento dos alunos. Para tanto, ele deve movimentar-se na sala e observar o que estão fazendo, não apenas para saber quais seus obstáculos, mas para fazer a mediação necessária, no sentido de ajudá-los na superação das dificuldades, sem dar respostas. Nesse momento, é importante que ele faça uso de perguntas, diante das situações verificadas em torno da resolução do problema (Sousa & Borges, 2010, p. 57).

O investimento em torno da pergunta é fundamental no trabalho de mediação docente. Tanto a pergunta que o professor faz aos alunos, como a pergunta que os alunos fazem a ele. A função mediadora do docente é importante para saber o que e quando perguntar e o que responder diante das perguntas e respostas dos alunos.

Mas o que é a pergunta? Como a pergunta vem sendo proposta e utilizada na aplicação da Sequência Fedathi? O que caracteriza a pergunta? Que tipo de pergunta é importante na vivência da Sequência Fedathi? O que é contraexemplo? O que diferencia a pergunta do contraexemplo?

Ao discutirmos sobre essas questões, trazemos algumas abordagens acerca desse tema, dentro de uma perspectiva conceitual, histórica e teórica, como forma de situar o leitor sobre nosso interesse acerca do uso da pergunta e de nos situarmos em relação à discussão que vem sendo feita em torno desse tema.

No que concerne à palavra “pergunta”, no estudo de Menezes (1995, pp. 42-43) sobre esse termo, ele constatou ser um “derivado regressivo” de *perguntar*, que etimologicamente significa inquirir, interrogar, questionar; sondar, este no sentido moral, e surge associado a outros termos como *interrogação*, *questão* e mesmo *interpelação*.

Na perspectiva filosófica de Cortella e Casadei (2011, p. 8),

Perguntar é aceitar que não se sabe ainda alguma coisa e, com essa atitude, mostrar que se quer saber, em vez de fingir que já sabe. Perguntar é a ponte que nos põe em contato com o novo, no lugar de ficarmos apenas repetindo o antigo. Perguntar nos leva até um território inédito a ser explorado, ou seja, a pergunta nos leva a terras desconhecidas, e, quando temos as respostas, ficamos mais cientes do local em que estamos. ...

No contexto de vivência da Sequência Fedathi, a pergunta refere-se a uma situação em que o professor interpela, interroga ou sugere ao aluno pensar sobre o problema proposto como desafio para sua aprendizagem ou outras situações de estudo. Nesse sentido, a pergunta pode ser feita como uma proposição interrogativa, finalizada com o ponto de interrogação, como: “Será que as duas respostas encontradas pelo grupo valem como solução para o problema apresentado?”; mas também pode ser feita como orientação, da seguinte forma: “Verifiquem se as duas respostas encontradas pelo grupo valem como solução para o problema apresentado!”.

A pergunta também pode ser feita em forma de contraexemplo que se refere a uma situação criada pelo professor diante da resposta do aluno. O contraexemplo, como sugere o próprio nome, é um exemplo contrário ou situação que contradiz o que o indivíduo afirmou ou apresentou. O contraexemplo é colocado para desequilibrar o indivíduo, para fazer com que o aluno reflita sobre sua própria ação, podendo ser apresentado em forma de pergunta ou indicar uma ação a ser realizada, e deve caracterizar-se como uma negação à afirmação ou ao argumento do aluno.

Assim como a pergunta, o contraexemplo também pode ser colocado em forma interrogativa ou por meio de uma sugestão de atividade para o aluno. No entanto, o

contraexemplo difere da pergunta. A pergunta tem a função de fazer com que o aluno investigue sobre o problema apresentado, na busca de solução; o contraexemplo é apresentado ou proposto com base em um resultado que não respondeu ou respondeu de forma parcial ao problema apresentado.

Nesse sentido, a pergunta (que pode ser um contraexemplo) pode assumir funções diferentes, dependendo da situação em que for utilizada e por quem for utilizada. Para Sousa e Borges (2010, p. 58), “quando nos referimos à pergunta, não tratamos apenas daquela que é feita pelo professor aos alunos, mas das perguntas que os alunos podem e devem fazer ao professor, mesmo, às vezes, distantes do que é proposto como tema de estudo”.

Para tanto, é necessária a sensibilidade do professor para conhecer e respeitar os estudantes, para ouvi-los, pois uma boa pergunta requer que o educador esteja atento para saber acompanhar os avanços dos educandos e perceber suas certezas e angústias. Ele deve aproveitar as diversas situações que ocorrem na sala de aula e criar outras, para atender da melhor maneira aos seus anseios e curiosidades, que só existem se eles forem desafiados. Essa aproximação também ajuda a perceber a indiferença e a falta de motivação dos alunos, que também podem ser exploradas por meio de perguntas.

O que Sousa e Borges (2010) tratam como pergunta, Souza (2013) chama de questionamentos, estes classificados de acordo com o emissor em determinada situação, ora o aluno, ora o professor.

Os questionamentos podem surgir dos alunos ou ser propostos pelo professor, de formas variadas. Em sua maioria, surgem por parte dos alunos no momento em que se debruçam sobre os dados do problema, originando-se a partir daí as reflexões, hipóteses e formulações, na busca de caminhos que conduzam à solução do problema (Souza, 2013, p. 23).

Souza (2013) argumenta que os questionamentos são fundamentais para que o aluno organize o pensamento e levante hipóteses, análises e reflexões na resolução do problema ou acerca de uma solução encontrada. Os questionamentos dos alunos podem ser de *dúvidas*, *reflexões* e *hipóteses*. Já os questionamentos dos professores são classificados como: *perguntas esclarecedoras*, *perguntas estimuladoras* e *perguntas orientadoras*. No contexto de utilização da Sequência Fedathi, o trabalho de doutorado de Souza (2010) foi o primeiro a trazer essa tipologia de perguntas.

Porém, a pergunta é utilizada na Sequência Fedathi desde o início, como pode ser visto nos trabalhos de alguns professores/pesquisadores em suas atividades docentes e de pesquisa: Vasconcelos (1996), na formação continuada de professores; Santos (2007), na formação inicial de estudantes de Pedagogia; Lima (2007), também na formação de pedagogos; e Jucá (2011) no ensino de Geometria assistido por computador, com o uso do Geogebra. Apresentamos a seguir uma das perguntas utilizadas por esses docentes:

- Qual a função dos problemas no ensino de Matemática? (Vasconcelos, 1996, p. 7).
- Ana comprou $\frac{1}{4}$ de uma torta de chocolate e vai repartir igualmente entre seus 2 sobrinhos. Que parte da torta cada um vai ganhar? (Santos, 2007, p. 106).
- Quem é maior, sua idade ou o tamanho do seu pé? (Lima, 2007, p. 165).
- Observe que a nossa situação agora é a seguinte: vou pegar um segmento, e o que caracteriza um segmento de reta é que as suas extremidades são conhecidas. Então vou tomando o segmento de reta “AB”, vou tomar um ponto, antes de tomar o ponto, dado esse segmento “AB”, eu quero

encontrar o segmento médio desse segmento. O desafio está lançado e podem usar... (Jucá, 2011, p. 148).

Essas perguntas foram utilizadas no início das aulas ministradas pelos professores, na tomada de posição, como forma de desafiar os alunos na introdução ao tema de estudo, mas também foram identificadas outras em todas as etapas da Sequência Fedathi.

Na discussão de Menezes (1995, 2014) acerca da pergunta no ensino da Matemática, esse autor também diferencia tipos de perguntas e as denomina *frases interrogativas*. Estas são classificadas como *perguntas verdadeiras* e *perguntas falsas*, voltadas para o que ele chama de conteúdos matemáticos e conteúdos não matemáticos.

Em relação aos conteúdos matemáticos, as perguntas verdadeiras são classificadas como *pergunta teste*, *pergunta real* e *pergunta de desenvolvimento*; já em relação a conteúdos não matemáticos recebem o nome de *pergunta funcional* e *pergunta interdisciplinar*. As perguntas falsas relacionadas aos conteúdos matemáticos recebem o nome de *pergunta enfatizante*, *pergunta de asserção*, *pergunta de reação* e *pergunta de realização*; para os conteúdos não matemáticos são denominadas *pergunta disciplinar* e *pergunta de atuação*.

Ao justificar a necessidade do uso da pergunta no ensino da Matemática, Menezes argumenta que “a pergunta do professor tem desempenhado, desde a antiguidade, um papel importante no ensino das mais diversas matérias. Assim, não estranha o interesse pelo estudo da pergunta no contexto das práticas dos professores, neste caso, de Matemática”. Esse mesmo autor diz que, de uma forma mais desenvolvida, existem duas razões para focar a atenção no questionamento do professor: (i) a pergunta é um ato de fala largamente utilizado pelo professor; e (ii) a pergunta, pelas suas potencialidades, pode aumentar e melhorar a participação dos alunos nas aulas (Menezes, 2014, p. 1).

Machado (2012) investigou sobre a contribuição que as perguntas podem trazer para a alfabetização científica e classifica-as como *perguntas de problematização*, *perguntas sobre dados*, *perguntas exploratórias sobre o processo* e *perguntas de sistematização*. Esse mesmo autor afirma que “... em uma aula onde as perguntas são postas obedecendo ao desenvolvimento da turma, no curso da investigação, estas contribuirão para a alfabetização científica dos alunos” (Machado, 2012, p. 106).

Neste trabalho, classificaremos as perguntas em três tipos: *pergunta de rotina*, feita como forma de comunicação na sala de aula, como por exemplo: “Por favor, quem pode ir ao Laboratório de Matemática pegar o ábaco?”; *pergunta investigativa*, utilizada pelo professor durante a aula, como forma de suscitar no aluno a motivação para compreender e resolver o problema, do tipo: “Leia o problema novamente para ver o que ele está pedindo!”; e *contraexemplo*, referente à pergunta que incita o aluno a refletir sobre sua resposta ou atitude diante do tema em estudo, como: “Se a propriedade comutativa vale para qualquer operação, então aplique-a em 8-5 e 9:3!”.

A pergunta e suas funções

De acordo com Aranha e Martins (2009, pp. 152-153), a pergunta é utilizada como meio de interlocução, desde o período pré-socrático, o primeiro momento da filosofia grega, em que Sócrates (a.C. 470-399 a.C.) costumava conversar com todos, fossem velhos ou moços, nobres ou escravos. Partindo do pressuposto “só sei que nada sei”, conduzia as pessoas à sabedoria de reconhecer a própria ignorância, levando-as à busca do saber. Seus métodos de indagação

provocaram os poderosos de seu tempo, que o levaram ao tribunal, sob a acusação de não crer nos deuses da cidade e de corromper a mocidade, condenando-o à morte.

O método de Sócrates era desenvolvido em duas fases. A primeira, considerada “destrutiva”, é a ironia (do grego *eironeia*) e significa “perguntar, fingindo ignorar”. Diante do oponente, que dizia desconhecer determinado assunto, Sócrates afirmava inicialmente nada saber. Depois, com hábeis perguntas, desmontava as certezas até que o outro reconhecesse a própria ignorância ou desistisse da discussão. Nessa fase, eram aniquiladas as opiniões do senso comum e do conhecimento espontâneo, muitas vezes baseados em estereótipos e preconceitos.

A segunda fase, a maiêutica (do grego *maieutiké*), significa “arte de fazer um parto”, e recebe essa denominação em homenagem à sua mãe que era parteira. De acordo com Sócrates, enquanto ela fazia parto de corpos, ele “dava à luz” ideias novas. Após a destruição do saber meramente opinativo (a *doxa*), em diálogo com seu interlocutor, dava início à procura da definição do conceito, de modo que o conhecimento saísse de dentro de cada um, baseado em argumento racional, a partir de uma base mais sólida e de um raciocínio coerente e rigoroso.

Sócrates procurava a essência real e verdadeira das coisas da ideia, do valor. Como a essência não é dada pela percepção sensorial, e sim pelo trabalho do pensamento, procurá-la é procurar o que o pensamento conhece da realidade e verdade de uma coisa, de uma ideia, de um valor. Isso que o pensamento conhece da essência chama-se **conceito** (Chauí, 2010, p. 44). [Grifo no original].

Em seu diálogo com as pessoas, Sócrates fazia perguntas e mais perguntas para provocar profundos pensamentos. Com seu método, ele perguntava mais do que respondia, ensinando as pessoas a também pensar por si mesmas, a ter as próprias respostas (Cortella & Casadei, 2011, p. 16).

A pergunta também está presente na teoria de Piaget (1989), quando ele discute sobre a origem do pensamento da criança. Para esse autor, uma forma de saber como a criança pensa espontaneamente é pesquisar e analisar as perguntas que ela faz, como podemos ver em suas próprias palavras:

... Entre estas perguntas, as mais primitivas tendem simplesmente a saber “onde” se encontram os objetos desejados e como se chamam as coisas pouco conhecidas: “o que é?” Mas desde os três anos, e muitas vezes antes, aparece uma forma básica de pergunta que se multiplica até os sete anos: são os famosos “porquês” das crianças, aos quais o adulto tantas vezes tem dificuldade em responder. ... (Piaget, 1989, p. 29).

Piaget utiliza a pergunta de forma efetiva na aplicação do método clínico, uma maneira de interrogar a criança. “Não é um interrogatório qualquer, como o da escola tradicional, que visa a constatar o que o aluno ‘sabe’ ou ‘não sabe’. É um interrogatório para identificar ‘o que o aluno pensa’ e acompanhá-lo, tendo sempre algumas hipóteses cognitivas” (Matei, 1995, pp. 177-178). A pergunta tem, assim, um papel desafiador, que desequilibra ou perturba o aluno, e o pensamento surge para buscar um novo equilíbrio.

A pergunta é uma forma de desequilibrar o aluno e impulsioná-lo à investigação, porque pode desafiá-lo a sair da condição de ouvinte, de espectador, para assumir a função de pesquisador, na busca de solução para o problema apresentado em sala de aula, ou outro ambiente, fazendo com que ele se envolva e participe da construção do seu próprio conhecimento, como propõe a Sequência Fedathi.

A pergunta também é destacada na pedagogia de Paulo Freire (1985, 1996), ao defender a educação como uma relação dialógica. Na sua conversa com Faundez (Freire & Faundez, 1985, p. 44), Freire, argumenta que a curiosidade do estudante às vezes pode abalar a certeza do professor. Em outra obra ele diz: "... É ela que me faz perguntar, conhecer, atuar, mais perguntar, re-conhecer." (Freire, 1996, p. 86). Por isso é que, ao limitar sua curiosidade, sua expressividade, o professor autoritário limita a sua também.

Freire argumenta ainda que a pergunta que o aluno, livre para fazê-la, faz sobre um tema, pode colocar o professor num ângulo diferente, do qual lhe será possível aprofundar, mais tarde, uma reflexão mais crítica. As crianças, quando valorizadas em seus conhecimentos e concepções espontâneas, utilizam a capacidade que têm de instigar e, às vezes, intrigar os adultos com suas perguntas e também de surpreendê-los com suas respostas.

Ainda em seu diálogo com Faundez (Freire & Faundez, 1985, p. 49), Freire alerta que a preocupação com a pergunta, em torno da pergunta, não pode ficar apenas no âmbito da pergunta pela pergunta. É importante, sobretudo, ligar, sempre que possível, a pergunta e a resposta a ações que foram praticadas ou a ações que podem vir a ser praticadas ou refeitas. O professor pode, assim, aperfeiçoar o conhecimento do aluno e o seu próprio conhecimento, a partir de uma pergunta feita pelo estudante.

Essa abordagem nos leva a perceber as diferentes dimensões que vêm sendo dadas em relação à pergunta ou à sua utilização. Em Sócrates, a pergunta é utilizada como forma de levar as pessoas a pensar, a filosofar; em Piaget, é usada como meio de conhecer o estágio de desenvolvimento cognitivo da criança, o que é feito por meio do seu método clínico; em Freire, vemos que a pergunta é refletida como forma de promoção do diálogo entre as pessoas, numa dimensão humana e interativa.

A utilização da pergunta na vivência da Sequência Fedathi tem relação com a função instigativa de Sócrates (pergunta investigativa), com o caráter desequilibrador de Piaget (contraexemplo) e se aproxima da proposta de Freire, no sentido de proporcionar o diálogo entre professor e aluno, para superar a verticalidade ainda existente no ensino, principalmente de Matemática, estabelecendo uma relação de horizontalidade na sala de aula, em que a pergunta do professor é feita não apenas para testar se o aluno sabe ou não sabe o conteúdo. A pergunta tem, assim, a função levar o aluno à investigação, desestabilizando-o para que repense sua ação, dialogando com ele.

O uso da pergunta pelos professores, sob o olhar da Sequência Fedathi

Na parte empírica do nosso trabalho, procuramos conhecer o perfil dos professores em relação à prática docente. Para tanto, além da observação na sala de aula, acompanhamos e observamos esses docentes em atividades fora da sala, em outras atividades curriculares como planejamento semanal e bimestral e em outras ações do cotidiano escolar.

Na observação das aulas, atentamos para alguns aspectos como planejamento didático, formas de interação do professor com o aluno, estratégias de ensino utilizadas, se usavam ou não perguntas e como as usavam em suas aulas.

Neste trabalho, nosso foco foi a postura docente usando ou não a pergunta e suas atitudes diante das interrogações e respostas dos alunos. Para tanto, trazemos o relato de algumas situações observadas na prática dos professores, estes identificados aqui por meio de nomes fictícios.

A primeira situação trata da aula da professora Diva Rodrigues, em que ela trabalhava sobre medidas do tempo, em uma turma de 2º ano do Ensino Fundamental. Após a realização de várias atividades sobre o assunto, a professora pediu que os alunos abrissem o caderno de atividades para resolver questões sobre o conteúdo do dia.

Na lista de atividades, cada questão era indicada por uma figura geométrica. Toda vez que a professora ia iniciar a leitura de um dos itens, perguntava aos alunos sobre a figura a ele correspondente. Ao interrogar qual figura estava representada em uma das questões, um dos estudantes falou: “É um triângulo”. Ela confirmou e perguntou: “O que é um triângulo?” Ele respondeu: “É uma figura que tem três lados iguais”.

A professora ficou em silêncio por um instante e deu continuidade à aula, sem comentar a resposta. De acordo com nossa análise, ela perdera a oportunidade de usar esse momento para apresentar um argumento, um contraexemplo, para instigar o aluno a refletir sobre o que dissera acerca daquela figura geométrica.

Ela podia, por exemplo, ter desenhado no quadro três triângulos, sendo o primeiro triângulo semelhante ao do livro, com todos os lados iguais, o segundo triângulo com dois lados iguais e o terceiro com os três lados diferentes, de forma explícita. Depois, deveria ter perguntado ao aluno que figura representava cada um daqueles três desenhos. Essa situação poderia ser uma forma de desestabilizar a certeza da criança, levando-a a refletir que nem todos os triângulos têm lados iguais e que, portanto, sua compreensão estava equivocada.

Nessa mesma aula, no momento em que a professora Diva Rodrigues falava sobre características da natureza que indicavam medidas de tempo, um dos alunos, talvez motivado pelas notícias da televisão no dia anterior, de geada na região sul do país, perguntou: “Tia, por que aqui não neva?”. Outro aluno respondeu: “Porque o sol daqui é muito quente”. Diante da pergunta e da resposta dos estudantes, a professora pediu para que outro aluno fosse à Sala de Multimeios buscar o globo terrestre para que ela pudesse esclarecer aquela situação. Como a sala de recursos estava fechada, a professora desenhou um globo terrestre na lousa e deu uma breve explicação sobre o que perguntara e respondera os alunos.

Na semana seguinte, ao conversar conosco, a professora Diva Rodrigues perguntou se lembrávamos da pergunta que o aluno fizera sobre a neve, no dia em que observamos sua aula. Ao afirmarmos que sim, ela relatou, demonstrando satisfação, sobre a aula ministrada em outro dia, a partir da pergunta que o aluno fizera naquela aula. Ela disse que providenciou todo o material necessário (globo terrestre, lanterna e outros) e explicou o motivo de não nevar naquela localidade. Ela também falou que aproveitara para explicar os movimentos da Terra, de rotação e translação. Com essa atitude, a professora mostrou que soube utilizar a pergunta para definir o planejamento de sua aula, mesmo não sendo de Matemática.

Em outra situação, em uma das aulas da professora Fátima Oliveira, evidenciamos o momento da contação de história, atividade que fazia parte de sua rotina na sala de aula, sendo que nos dias de aulas de Matemática selecionava histórias que pudesse depois estabelecer uma relação entre elas e o tema da aula.

Nesse dia, à medida que a professora lia a história, fazia perguntas aos alunos sobre a narrativa. Porém, ao fazer as interrogações, em algumas situações não esperava que os alunos pensassem e dessem respostas, ou seja, lançava perguntas e logo as respondia, não deixando que

os discentes manifestassem suas ideias, em relação à Matemática e às suas experiências, como acontecia em outros momentos, em que eles tinham a oportunidade de falar.

Com a professora Helena Pinheiro, na turma de 4º ano, após a resolução de uma situação em que os alunos precisavam calcular “quantos minutos se contavam no tempo de 6h55min até 7h30min?”, ela chamou dois alunos à lousa para apresentarem suas respostas, o que fora feito por eles, registrando suas respostas no quadro de giz.

Apresentadas as duas soluções, a professora verificou que uma estava certa e a outra estava errada. Os dois alunos voltaram para seus lugares e ela pediu que os demais estudantes verificassem os resultados e indicassem, por meio de votação, o que achavam certo. O resultado que recebeu mais votos foi o que estava correto.

Após a eleição, a professora pediu ao aluno que tinha errado para que ele fosse ao quadro de giz corrigir seu erro. Ele não quis fazer a correção dizendo que concordava com seus colegas, que a resposta certa era a que tinha sido a mais votada. Então a professora pediu que os discentes copiassem em seus cadernos o resultado correto.

Com essa atitude, a professora deixou de valorizar a participação dos alunos e perdeu a oportunidade de explorar suas respostas como situações de ensino/aprendizagem, principalmente a partir da exploração do erro. No desenvolvimento da Sequência Fedathi, o erro deve ser utilizado pelo professor como forma de investigação sobre o nível de compreensão dos alunos acerca do tema em estudo e utilizar essas informações na condução do seu trabalho docente.

Esse relato representa um pouco do que observamos na sala de aula dos professores, que em algumas situações utilizam perguntas como meio de instigar seus alunos ou utilizam as perguntas dos discentes como motivo de aprofundamento do tema e até de ensino de outro assunto, como aconteceu com a professora Diva Rodrigues com a situação referente à neve.

Entretanto, em outros momentos os professores perderam oportunidades de explorar possibilidades de ensino/aprendizagem, em que o uso da pergunta poderia ter feito a diferença na condução da aula. A pergunta pode ser um importante recurso de investimento do professor na capacidade investigativa e criativa do aluno, fazendo com que ele seja o protagonista na construção do seu próprio conhecimento.

Considerações finais

Conforme anunciamos na parte introdutória, este trabalho teve como propósito fazer o diagnóstico acerca do uso da pergunta pelo professor de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental, tendo como fundamento teórico a Sequência Fedathi.

Para tanto, trouxemos uma sucinta discussão acerca de autores que tratam sobre a pergunta, de uma forma mais geral, nos campos histórico e teórico, e mais especificamente sobre a pergunta no contexto de aplicação da Sequência Fedathi. Por fim, apresentamos situações dos professores em sala de aula, com e sem o uso da pergunta.

Ao analisarmos a postura dos professores nas situações apresentadas, identificamos que na maioria delas eles apresentaram dificuldades: ora em perguntar, ora em saber o que fazer com as perguntas ou respostas dos alunos. Mas também, identificamos situações em que eles utilizaram a pergunta do aluno como motivação para a (re)organização de suas atividades docentes.

Com base nesses resultados, vemos a possibilidade e a necessidade de investimento na formação dos docentes para o uso dessa proposta metodológica, tendo em vista a continuidade da nossa investigação, com o intuito de analisar as contribuições da Sequência Fedathi no ensino de Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental, utilizando a pergunta como estratégia de mediação didática.

Para tanto, é preciso que na organização da formação dos professores seja vista a importância de não apenas prepará-los *para* utilizar a Sequência Fedathi em suas aulas, mas trabalhar essa formação *com* a Sequência Fedathi. Nesse sentido, é importante formar os professores não apenas *para* o uso da pergunta em suas aulas, mas trabalhar *com* o uso da pergunta na formação dos docentes. Essa convicção nos lembra a conversa de Freire com Faundez (1985), quando discutem sobre a pedagogia da pergunta.

Nessa discussão, Freire sugere que talvez “o que é perguntar” devesse ser este um dos pontos primeiros a ser discutido, num curso de formação de jovens que se preparam para ser professores. Porém, insiste que o centro da questão não está em fazer com a pergunta “o que é perguntar?” um jogo intelectual, mas viver a pergunta, viver a indagação, viver a curiosidade, testemunhá-la ao estudante. Para concluir, ele argumenta que o problema que, na verdade se coloca ao professor é o de, na prática, ir criando com os alunos o hábito, como virtude, de perguntar, de “espantar-se” (Freire & Faundez, 1985, p. 48).

No nosso caso, talvez a situação seja mais desafiadora, pois nos propomos trabalhar a Sequência Fedathi não com jovens em formação inicial, mas com professores no exercício do magistério, com vários anos de experiência. Quais serão suas respostas? O que eles nos perguntarão? As perguntas estão colocadas...

Referências e bibliografia

- Aranha, M. L. de, & Martins, M. H. P. (2009). *Filosofando: introdução à filosofia* (4ª ed.). São Paulo: Moderna.
- Chauí, M. (2010) *Iniciação à filosofia: ensino médio* (volume único). São Paulo: Ática.
- Cortella, M. S., & Casadei, S. R. (2011). *O que é a pergunta?* (Ilustrações Rodrigo Abraham, 4ª ed.). São Paulo: Cortez.
- Freire, P. (1996). *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa*. São Paulo: Paz e Terra.
- Freire, P., & Faundez, A. (1985). *Por uma pedagogia da pergunta*. Rio de Janeiro: Paz e Terra. (Coleção Educação e Compromisso, Vol. 15).
- Jucá, A. de M. (2011). *Ensino de geometria mediado em ambientes virtuais de ensino* (Tese (Doutorado: ensino de Matemática). 263 p. Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza.
- Lima, I. P. de (2007). *A matemática na formação do pedagogo: oficinas pedagógicas e a plataforma teleduc na elaboração dos conceitos* (Tese de Doutorado em Educação: Ensino de Matemática). 184 p. Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza.
- Machado, V. F. (2012). *A importância da pergunta na promoção da alfabetização científica dos alunos em aulas investigativas de Física* (Dissertação de Mestrado). 150 p. Instituto de Física e Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo (USP).
- Matui, J. (1995). *Construtivismo: teoria construtivista sócio-histórica aplicada ao ensino*. São Paulo: Moderna.

- Menezes, L. (1995). *Concepções e práticas de professores do matemática: contributos para o estudo da pergunta* (Tese de mestrado). Universidade de Lisboa.
- Menezes, L. (2014). *A importância da pergunta do professor na aula de matemática*. Disponível em: <https://www.google.com.br/#q=A+import%C3%A2ncia+da+pergunta+do+professor+na+aula+de+Matem%C3%A1tica>. Acesso em: 14 set. 2014.
- Piaget, J. (1989). *Seis estudos de psicologia* (17ª ed.). Rio de Janeiro: Forense Universitária.
- Santos, M. J. C. dos (2007). *Reaprender frações por meio de oficinas pedagógicas: desafio para a formação inicial* (Dissertação de Mestrado em Educação: Ensino de Matemática). Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará – FAGED/UFC, Fortaleza.
- Sousa, F. E. E. de, & Borges, H., Neto (2010). “Ensino da Matemática: a pergunta como estratégia de mediação pedagógica na resolução de problemas”. In D. Santos, M. C. F. de Alencar & R. B. Sindeaux (Orgs.), *Sociedade, ciência e sertão: reflexões sobre educação, cultura e política*. Fortaleza: EdUECE.
- Sousa, F. E. E. de, Vasconcelos, F. H. L., Borges, H., Neto, Lima, I. P., Santos, M. J. C., & Andrade, V. S. (Orgs.). (2013). *Sequência Fedathi: uma proposta pedagógica para o ensino de Ciências e Matemática*. Fortaleza, CE: Edições UFC.
- Souza, M. J. A. (2010). *Aplicações da Sequência Fedathi no ensino e aprendizagem da geometria mediado por tecnologias digitais* (Tese de Doutorado em Educação: Ensino de Matemática). 216 p. Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, Fortaleza.
- Souza, M. J. A. (2013). “Sequência Fedathi: apresentação e caracterização”. In: F. E. E. Sousa, F.H.L.de Vasconcelos, H. Borges, I. P. Neto Lima, M. J. C. Santos V. S., & Andrade (Orgs.). (2013). *Sequência Fedathi: uma proposta pedagógica para o ensino de Ciências e Matemática*. Fortaleza, CE: Edições UFC.
- Vasconcelos, C. B. (1996). *A resolução de problemas em perguntas*. Fortaleza. Apostila do Programa Cearense de Educação Básica – Grupo Fedathi de Educação Matemática. 24p.

Aproximación a las concepciones usadas en la resolución de problemas de variación y cambio

Edwin **López** Velandia

Grupo EDUMAT-UIS, Universidad Industrial de Santander
Colombia

edwin.lopez8927@gmail.com

Jorge Enrique **Fiallo** Leal

Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander
Colombia

jfiallo@uis.edu.co

Resumen

A través de esta comunicación presentamos resultados de una investigación que tiene por objetivo identificar algunas estrategias que emergen en la resolución de problemas de variación y cambio, en los estudiantes que realizan un curso de pre-cálculo. La Universidad Industrial de Santander (UIS) no es ajena a la problemática reportada por investigadores respecto a la reprobación y malos resultados de estudiantes en los cursos de cálculo diferencial e integral, por lo que desde 2013 se ofrece un curso de pre-cálculo fundamentado en la resolución de problemas y el uso de tecnología, con el propósito de potenciar el desarrollo del pensamiento variacional. Este curso se convierte en el escenario perfecto para esta investigación de tipo descriptivo-exploratorio enmarcado en una lógica cualitativa. Veremos la veracidad de las concepciones, identificadas con el modelo ckc (Balacheff, 2005) que utilizaron los estudiantes al plantear sus estrategias determinaron el éxito o no en la búsqueda de la solución a los problemas planteados.

Palabras clave: pre-cálculo, pensamiento variacional, estrategias, concepciones y resolución de problemas

Problemática y objetivo de investigación

Diferentes investigaciones evidencian dificultades en el aprendizaje y la enseñanza del cálculo a nivel universitario que generan una gran problemática por las altas tasas de reprobación y repitencia en esta asignatura (Aparicio, 2006). En el caso particular de la Universidad Industrial de Santander (UIS), a través de varios proyectos adelantados por la Vicerrectoría Académica, se reporta que el curso Cálculo I (Cálculo Diferencial) se ubica en el primer y segundo lugar en cuanto a reprobación, cancelación y repitencia en los estudiantes que recién ingresan a la universidad (Botello, 2013).

Artigue (2003) y Salinas y Alanís (2009) señalan que los métodos de enseñanza continúan siendo muy tradicionales ya que se enfocan en prácticas algorítmicas y algebraicas, esto afecta negativamente la comprensión de los conceptos fundamentales del cálculo: acumulación y variación. Esta problemática ha llevado a investigadores en educación matemática a reflexionar sobre los diferentes contenidos en los que se basa la enseñanza y el aprendizaje de esta rama de la matemática como lo son funciones, límites y derivadas, entre otros más específicos. Algunas instituciones universitarias no son indiferentes a la problemática esbozada, por lo que han

surgido iniciativas como las tutorías y la implementación de cursos de pre-cálculo para mitigar el impacto negativo de esta situación que muchas veces termina en deserción escolar. Incluso, investigadores como François Pluvinage, David Tall, Luz Manuel Santos, Luis Moreno, Jorge Fiallo y Sandra Parada estudian la incorporación de software en las aulas para favorecer la construcción de ideas intuitivas de las nociones del cálculo.

La UIS ha venido ofreciendo desde el 2013 un curso de pre-cálculo que tiene como objetivo favorecer el desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes a través de la resolución de problemas de variación y cambio con el uso de la tecnología (GeoGebra); por lo que un grupo de profesores de matemáticas e investigadores en educación matemática de la universidad, diseñaron 14 talleres que se llevaron al aula, los cuales transitan desde los números reales, hasta ver la derivada como razón de cambio. Cada sesión de trabajo se distingue por diferentes momentos en los que el estudiante: inicialmente explora el problema relacionado sin ningún tipo de ayuda más que el dibujo en el taller o la descripción de la actividad; después se realiza una exploración de la simulación del problema en GeoGebra que permite ver la versión dinámica de la situación, favoreciendo la observación y el análisis de lo variante e invariante, realizar cálculos, analizar el problema en diferentes sistemas de representación, plantear conjeturas, explicar, justificar y argumentar. Durante estas etapas siempre se realiza la socialización de las estrategias y conjeturas sobre las posibles respuestas a las preguntas planteadas. Por último, se deja propuesto un nuevo problema que el estudiante realiza en casa como trabajo adicional. Por todo esto, el curso se enmarca en un enfoque no tradicional que supera el refuerzo de un repaso de contenidos donde lo más importante es la participación de los estudiantes durante diferentes momentos de la clase (Fiallo y Parada, 2014). Es en este escenario y la metodología de trabajo que favorece la interacción entre pares en el proceso educativo, surgió el objetivo de la investigación: *identificar algunas estrategias que emergen en la resolución de problemas de variación y cambio, en los estudiantes que realizan el curso de pre-cálculo de la UIS.*

Marco conceptual

Para el diseño de las actividades y la metodología del trabajo del curso se tuvieron en cuenta aspectos teóricos del pensamiento variacional, la resolución de problemas y el uso de tecnologías como pilares fundamentales. Estos elementos constituyen el marco conceptual de esta investigación, tomando en cuenta principalmente las posturas de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas de Colombia (MEN, 1998), MEN (2004), los principios y estándares para la educación matemática (NCTM, 2003) y Vasco (2006).

Pensamiento variacional

Son varias las investigaciones alrededor del pensamiento variacional que resaltan su importancia como parte fundamental en la formación matemática de los estudiantes. En este trabajo tenemos en cuenta la caracterización de pensamiento variacional planteada por Vasco (2006):

El pensamiento variacional puede describirse aproximadamente como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad” (Vasco, 2010).

La variación implica la covariación y correlación de magnitudes cuantificadas numéricamente. El *razonamiento covariacional* se caracteriza por “las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra (Carlson, *et al*, 2003, citado por Villa-Ochoa, 2012, p. 12).

Resolución de Problemas

Respecto a la resolución de problemas tomamos lo que nos presenta el NCTM (2003) en uno de los cinco estándares de procesos

La resolución de problemas significa comprometerse en una tarea para la que el método de resolución no se conoce de antemano. Para encontrar una solución, los estudiantes tienen que recurrir a sus conocimientos y, a través de este proceso, muchas veces adquieren nociones matemáticas nuevas. Resolver problemas no es sólo un objetivo del aprendizaje de las matemáticas, sino también una de las principales maneras de hacerlo (p. 55).

Por otra parte, Polya, 1981 plantea que:

[...] se entenderá que resolver un problema es encontrar un camino allí donde no se conocía camino alguno, encontrar la forma de salir de una dificultad, de sortear un obstáculo, conseguir el fin deseado que no es conseguible de forma inmediata utilizando los medios adecuados (Polya, 1981, p.1).

La resolución de problemas se debe vivir como un proceso de enseñanza-aprendizaje y no como método de evaluación o un resultado ya que fortalece en el estudiante la posibilidad de explorar, la posibilidad de conjeturar, de descubrir o reinventar las matemáticas. Esta idea es apoyada por los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) que alientan a la comunidad de docentes del país a utilizar estas situaciones problema como una forma de promover el aprendizaje de las matemáticas en los estudiantes, favoreciendo así el dominio del conocimiento, la utilización de estrategias cognoscitivas y metacognitivas, dejando en evidencia el sistema de creencias de los estudiantes respecto a los temas trabajados.

En la resolución de problemas el papel del profesor está caracterizado por ser un mediador y guía del proceso de resolución de la situación y de la argumentación que hacen los estudiantes. Él es el responsable de preparar buenos problemas que no solo le den la oportunidad a los estudiantes de utilizar lo que saben si no la oportunidad de investigar y aprender nuevos conceptos que estén acordes a su nivel escolar.

De Guzmán (1994, s.n.) afirma que:

La enseñanza a través de la resolución de problemas es actualmente el método más invocado para poner en práctica el principio general de aprendizaje activo. Lo que en el fondo se persigue con ella es transmitir en lo posible de una manera sistemática los procesos de pensamiento eficaces en la resolución de verdaderos problemas. Tengo un verdadero problema cuando me encuentro en una situación desde la que quiero llegar a otra, unas veces bien conocida, otras un tanto confusamente perfilada, y no conozco el camino que me puede llevar de una a otra (s. n.).

Por lo anterior, es importante que el profesor cuestione a los estudiantes en todo momento con preguntas como: *¿Estamos seguros de que entendemos esto? ¿Cuáles son nuestras opciones? ¿Tenemos un plan? ¿Estamos progresando, o deberíamos reconsiderar lo que*

estamos haciendo? ¿Por qué creemos que esto es verdad?, etc. con el fin de dirigir los estudiantes por el “camino correcto”.

Estrategias

Charles y Lester (1982, en Sigarreta y Laborde (s.f.), p. 16) plantean comprender la resolución de problemas como “el proceso de coordinación de la experiencia previa, conocimientos e intuición, y un intento de determinar un método para resolver una situación cuyo resultado nos es desconocido”. Revisando este proceso, se hicieron evidentes las estrategias que utilizaron los estudiantes en la resolución de los problemas que mostraremos en esta investigación. La importancia de las estrategias fue determinada por aquellos recursos cognitivos utilizados por el estudiante al enfrentarse a la resolución de problemas. Los principios y estándares del NCTM (2003) destacan que:

De las muchas descripciones de estrategias para resolver problemas, una de las más conocidas puede encontrarse en el trabajo de Polya (1957). Estas estrategias, frecuentemente citadas, incluyen: utilizar diagramas, buscar patrones, considerar todas las posibilidades, probar con valores o casos determinados, trabajar marcha atrás, tantear y comprobar, crear un problema equivalente y crear un problema más sencillo.

Los profesores de matemáticas constatan que los estudiantes hacen uso de una variedad de procedimientos para resolver las diferentes tareas de aprendizaje; estos pueden ser de dos tipos: procedimientos algorítmicos y procedimientos heurísticos. Siendo estos últimos más abiertos y formados por operaciones más alternativas, que involucran la consciencia y el control con que se realicen; mientras que los primeros son más cerrados y están formados por operaciones prefijadas.

En este estudio las estrategias son concebidas como “un proceso de toma de decisiones, consciente e intencional, que consiste en seleccionar los conocimientos conceptuales, procedimentales y actitudinales, necesarios para alcanzar un determinado objetivo, siempre en función de las condiciones de la situación en que se produce la acción” (Monereo, 2001).

Uso de tecnología (GeoGebra)

Debemos tener claro que el uso de la tecnología en las clases depende del profesor ya que, como cualquier herramienta, puede ser usada bien o deficientemente. Los Principios y Estándares para la Educación Matemática señalan que las herramientas tecnológicas son esenciales para aprender, hacer y enseñar matemáticas. Siendo el profesor quien guíe al estudiante a reflexionar, razonar, tomar decisiones y resolver problemas en áreas temáticas como la Geometría, Estadística, Álgebra, Medida y Números.

El uso de la tecnología, y en nuestro caso particular de GeoGebra, permitió modelar una amplia gama de situaciones interesantes donde ellos pudieron conjeturar a partir de una visualización y razonamiento espacial, fruto de la interacción con animaciones. Podemos afirmar que el uso de las tecnologías y la resolución de problemas constituyen dos elementos que transforman el salón de clases en un espacio donde prima el razonamiento matemático alrededor de la variación y autonomía de los estudiantes orientada por los saberes que les permita avanzar en el proceso de aprendizaje para consolidar su proceso y facilitar el desarrollo del pensamiento variacional. Además, “el empleo de herramientas computacionales en la resolución de problemas no solamente puede facilitar la implementación de estrategias, sino también potenciar o extender el repertorio de las heurísticas” (Santos-Trigo, 2008).

Modelo ckc

Dado que se realizó un análisis de las concepciones que usan los estudiantes cuando resuelven problemas con el uso de la tecnología, se trabajó con el modelo ckc, que es una herramienta metodológica propuesta por Balacheff para el análisis de los conocimientos que movilizan los estudiantes en la resolución de un problema. De ahí la importancia de estudiar las concepciones durante el proceso de identificar las estrategias, pues las concepciones se yuxtaponen a estas. Este modelo analiza cuatro componentes que se imponen cuando se quiere evidenciar una concepción y que son suficientes para caracterizarla: Un conjunto de problemas, un conjunto de operadores, un sistema de representación y una estructura de control.

Un operador es lo que permite la transformación de los problemas, son visibles en las producciones y los comportamientos de los estudiantes y legitiman el paso entre datos y la conclusión y se explicitan a menudo en la forma “si...entonces”.

Un sistema de representación (lingüísticas o no) permite la expresión de los problemas y de los operadores. Las modalidades de representación presentan una gran diversidad: representaciones lingüísticas y no lingüísticas, eventualmente constituidas en registros semióticos. Las representaciones permiten la expresión de los controles, de las acciones y de los problemas, para la anticipación y la validación. En efecto, la caracterización de la concepción pasa necesariamente por la de un sistema de representación, o incluso de un registro semiótico.

Una *estructura de control* da y organiza las funciones de decisión, de elección, de juicio de validez y de adecuación de la acción. La estructura de control asegura la no contradicción de la concepción y contiene las herramientas de decisión sobre la legitimidad del empleo de un operador o sobre el estado (solucionado o no) de un problema. Los controles reúnen juicios, decisiones, medios de elección, métodos, estructuras y organización de los operadores. Permiten las anticipaciones y la posible construcción de planes. Dos dificultades teóricas y metodológicas acompañan a toda consideración de controles: i) Los controles son generalmente implícitos; ii) la distinción entre controles y operadores no es absoluta sino relativa a una concepción (Balacheff, 2005).

Para efectos de esta investigación, no se analizaron los problemas que se resuelven con la concepción. Por lo tanto, la caracterización de la concepción para este trabajo corresponde a la triplete (R, L, Σ) ya que el interés está en aportar al conocimiento de estrategias y concepciones que emplean los estudiantes al resolver problemas propios de curso de pre-cálculo de la UIS. Queremos enfatizar, para finalizar, en que la concepción es el componente que subyace a la estrategia.

Proceso metodológico

Como se mencionó, la investigación desarrollada fue de tipo descriptivo-exploratoria enmarcada en una lógica cualitativa cuyo interés fue conocer las estrategias que emplearon los estudiantes en la resolución de problemas, de ahí su diseño emergente. La muestra seleccionada para la recolección de datos fue un curso de 30 estudiantes quienes ingresaban a diferentes carreras de ingenierías y de la Facultad de Ciencias de la UIS en el segundo semestre de 2013.

Para recolectar los datos se realizó acompañamiento en cada una de las 15 sesiones de trabajo correspondientes al curso, de las cuales se tomaron dos sesiones para ser analizadas: “Análisis de Información” por ser una de las primeras sesiones que trabajaron los estudiantes y en la cual se estaban adaptando a la metodología de trabajo y “La Derivada como Razón de

Cambio”, que por ser una de las últimas sesiones trabajadas, posiblemente, nos mostraría avances en la resolución de los problemas planteados en los talleres. Estas sesiones fueron filmadas, se recogieron los apuntes de algunos estudiantes (la solución de los talleres) y adicionalmente a esto se tomaron algunas notas en una libreta de campo, todo esto para extraer evidencias que soportaran el análisis que apunta al objetivo de la investigación.

Posterior a esto, se analizaron los datos sistematizados realizando una triangulación entre los datos recolectados, el marco conceptual y la interpretación del investigador para dejar a la luz las concepciones utilizadas por los estudiantes en las estrategias empleadas en la resolución de los problemas del curso de pre-cálculo.

Resolución de problemas, concepciones y estrategias

Para favorecer la comprensión de lo que se presentará, se debe tener en cuenta que el análisis se articula desde la transcripción de las conversaciones del profesor-estudiante o investigador-estudiante en los momentos donde se evidencia la estrategia, se sintetizan los elementos de la concepción según el modelo ckc en una tabla y se explica la estrategia que es utilizada. Todo esto acompañado de la integración de los elementos del marco conceptual y la interpretación de investigador que permitieron dar conclusiones al final de cada grupo de estrategias descritas para una misma situación. Dentro de las transcripciones de los diálogos se estilaron en cursiva las aclaraciones pertinentes para entender mejor al estudiantes.

Presentaremos dos estrategias que sirven de ejemplo para la Situación 2 del Taller "Análisis de Información" en la cual los estudiantes debían identificar el modelo que mejor se ajusta a la situación.

La siguiente tabla muestra el consumo de gasolina en litros, de un vehículo Toyota Corolla que recorre la ciudad de Bogotá en las horas pico.

Tabla 1: Rendimiento Toyota Corolla

Recorrido (Km)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Consumo (Lt)	0.14	0.21	0.31	0.46	0.55	0.64	0.78	0.83	0.99	1.10	1.20	1.33	1.43	1.52	1.67

Contesta las siguientes preguntas en tu hoja de trabajo. Justifica tu respuesta.

1. ¿Cuánto combustible se esperaría que consuma el vehículo si se dispone a recorrer 17 km en hora pico?
2. ¿Cuánto combustible se esperaría que consuma el vehículo si se dispone a recorrer 20 km en hora pico?
3. Realice un gráfico con la información suministrada en la tabla 1.
4. ¿Cuánto combustible se esperaría que consuma el vehículo si se dispone a recorrer x km en hora pico?

Figura 1. Situación problema del taller.

Estrategia sin el uso de GeoGebra

Esta estrategia se caracteriza por el razonamiento cuantitativo sobre el consumo verificando el incremento entre un dato y el siguiente.

- [1] Inv: ¿Cuánto combustible se esperaría que consuma el vehículo si se dispone a recorrer 17 km en hora pico? ¿Y cuánto para 20 km?
- [2] Inv: Cuénteme qué está haciendo ahí, qué es esto [*señalándole al estudiante lo que está escribiendo en su hoja*]
- [3] Est: Es la diferencia que hay entre los litros, respectivo a los kilómetros, por ejemplo de 1 a 2 km, cuantos litros de gasolina ha consumido el vehículo (Ilustración 3)

- [4] Inv: ¿Por qué está hallando la diferencia entre los consumos de combustible?
- [5] Est: Es que quería saber si el consumo era igual y sumarle eso hasta llegar a 17 y 20 [señalando el último dato de la tabla de datos], pero noto que consume no en modo constante, si no discontinuo y así cómo puedo saber cuánto aumentaría [Está diciendo que Δy no es constante si no variable].

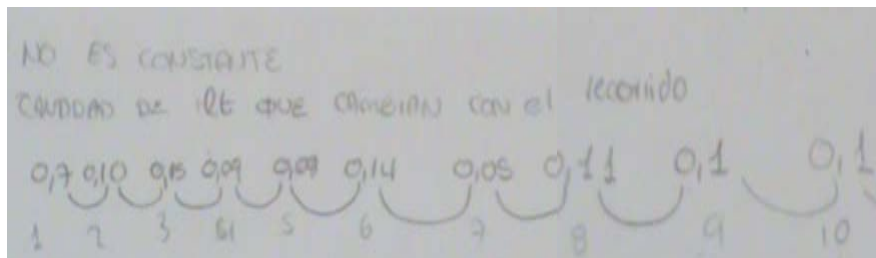


Figura 2. Operador.

- [6] Inv: Me dice que no es continuo el gasto, ¿a qué se refiere con eso?
- [7] Est: Pues, para el primer km gastó 0.14 litros de gasolina, después de haber hecho 2 km el gasto es de 0.21 pero ya al tercer km gasta 0.31 o sea ya gasta 10 litros más respecto al principio y por ejemplo cuando recorre 10 km gasta 0,1 litros respecto a los primeros km, pero si usted mira siempre recorre 1 km, pero como le decía no consume siempre en modo continua así que no sé qué hacer para 17 y 20 (Figura 2).

Tabla 1

Concepción

OPERADORES	SISTEMA DE REPRESENTACIÓN	ESTRUCTURA DE CONTROL
R_1 : Hallar la diferencia del consumo, Δy (Ilustración 3) [3], [5], [7] R_2 : Si $\Delta x = k \Rightarrow \Delta y = k_1$, con k, k_1 constantes [5]	L_1 : Esquema-Numérico [7] (Ilustración 3)	Σ_1 : Numérico: Δy no es constantes [7]
Concepción: Proporcionalidad directa		

La estrategia consiste en verificar si el aumento entre los consumos del combustible son constantes para tomar el último dato de la tabla, correspondiente al consumo para 15 km, y sumarle este valor hasta encontrar el consumo correspondiente para 17 km y 20 km.

El estudiante percibe que la diferencia entre los kilómetros recorridos es constante ($\Delta x = 1$), y espera que la diferencia entre el consumo de combustible (Δy) también lo sea (R_2), por esto halla varios Δy (R_1) para así poder verificar su conjetura (Σ_1). El estudiante hace uso de su razonamiento covariacional al analizar la variación a través de las diferencias. El sistema de representación es un esquema numérico en el que resalta el consumo de combustible de un kilómetro a otro (L_1). Este esquema le sirve para ejercer el control a su concepción y como no obtiene los resultados esperados abandona la estrategia.

Estrategia utilizando GeoGebra

En esta estrategia el estudiante usa GeoGebra para elaborar y darle una representación a la misma de la situación trabajada.

- [1] Inv: ¿Cuál curva es la que mejor se ajusta a los puntos y que me permitirá predecir el consumo de combustible cuando se han recorrido 17 y 20 km?

- [2] Est: Pues yo estoy haciendo una recta que pase por lo puntos 2 y 3 (Figura 3), que es la como hizo la compañera antes, porque si hago la que pasa por 1 y 2 tocaría empezar con 1 y mire lo que pasa, [la estudiante está observando el monitor y ve que la recta que ella escogió pasa más cerca a los demás puntos, lo que no sucede si escoge la otra recta (que pasa por el primer y el segundo punto) ya que esta se aleja de los demás puntos]

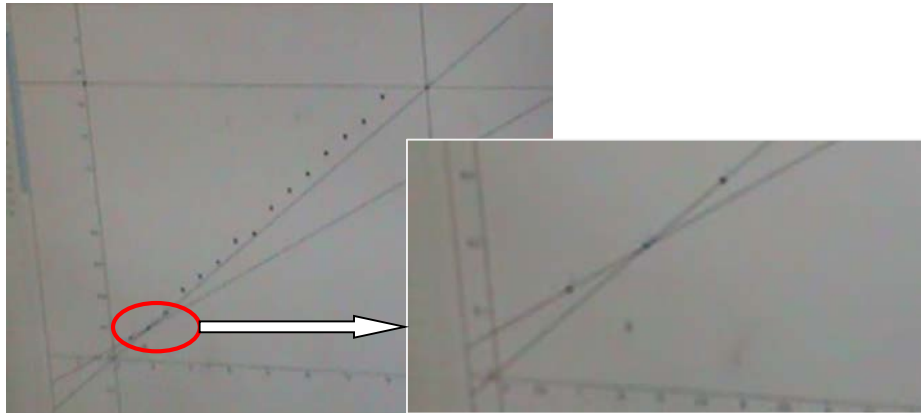


Figura 3. Operadores R_1 y R_2

Inv: ¿Qué espera de la recta que está construyendo?

- [3] Est: Que la recta pase por estos dos puntos [señalando con el dedo los puntos en la pantalla del computador], por eso la construí pasando por estos dos puntos, el dos y el tres.
- [4] Inv: ¿Por qué una recta que pase exactamente por esos puntos?
- [5] Est: Porque los ejercicios que habíamos hecho anteriormente los habíamos hecho a partir de esos dos puntos, así hallamos la pendiente y el punto de corte.
- [6] Inv: ¿Con esta recta cómo halla el valor del consumo del combustible para 17 y 20 km?
- [7] Est: Pues sería mirar acá para 17 cuánto me da el valor de la recta.
- [8] Inv: ¿Cómo lo haría?
- [9] Est: Trazo una recta vertical por acá y miro cuando se encuentre con esta. [El estudiante hace una recta que pasé por $x = 17$ pero la ubica a ojo yusca donde se corta con la recta que había hecho antes] O sea busco el punto de intersección y miro cuál es la coordenada en y (Figura 3).

Tabla 2

Concepción

OPERADORES	SISTEMA DE REPRESENTACIÓN	ESTRUCTURA DE CONTROL
R_1 : Recta que pasa por el segundo y el tercer punto [2]. R_2 : Punto de intersección entre la recta inicial R_1 y la recta $x = 17$ [10]	L_1 : Geométrico	Σ_1 : Analítico: intersección de dos rectas.
Concepción: Intersección entre las rectas R_1 y $x = 17$		

El estudiante construye en GeoGebra la recta que pasa por dos de los quince puntos suministrados en la tabla de datos [$P = (2, 0.21)$ y $Q = (3, 0.31)$] y que resultan graficados en el plano cartesiano (R_1). Después busca el valor del consumo cuando se han recorrido 17 km, hallando la intercepción entre la recta de ajuste y la recta que pasa por $x = 17$ (R_2), evidenciado nociones analíticas que son la base para articular su estrategia. .

El sistema de representación que moviliza la estrategia es geométrico ya que en el procedimiento se utiliza GeoGebra (L_1) y, como se puede percibir, esto es suficiente para que el estudiante se convenza de lo que hace, ya que logra darle solución al problema de predecir el consumo del combustible, hallando la intercepción entre la recta construida (la hace pasar por dos puntos) y la recta que pasa por $x = 17$ (Σ_1).

Resultados

Para el taller “Análisis de Información” se identificaron 13 estrategias y las respectivas concepciones que los estudiantes emplearon en la resolución de problemas planteados en la actividad. En el taller “La Derivada como Razón de Cambio” se identificaron 12 estrategias y las concepciones empleadas.

Al utilizar el modelo ckc para analizar las concepciones utilizadas en las estrategias, se percibe que estas junto con las habilidades de los estudiantes son fundamentales en la resolución de problemas. A través del análisis de las actuaciones de los estudiantes se corroboró que las estrategias que ellos emplean en la resolución de problemas están influenciadas por la veracidad de las concepciones que poseen. En las estrategias halladas, se observó que hubo algunas permitieron la solución acertada del problema y otras que no, todo gracias a la validez, coherencia y eficacia de la concepción utilizada, por lo tanto si los estudiantes tienen concepciones erradas o muy lejos de lo que son los conocimientos matemáticos, tienen menos posibilidades de resolver los problemas.

Del estudio de las estrategias evidenciadas en el análisis de los talleres del curso de pre-cálculo, se puede afirmar que algunos estudiantes siguieron las etapas del marco metodológico propuesto por Fiallo y Parada (2014) al incorporar el uso de GeoGebra, ya que inicialmente problematizaban la situación, esto los llevaba a realizar una exploración del problema, posteriormente buscaron métodos de solución para luego reflexionar sobre la estrategia, esto con la orientación del profesor y la participación del estudiante en el proceso de socialización realizado.

Gracias a la interacción entre pares, estudiante-profesor, estudiante-investigador fue posible identificar las estrategias de los estudiantes. Esto resalta, como lo fundamental de un aula participativa en la cual se construya el pensamiento matemático a partir de la resolución de problemas.

Bibliografía

- Artigue, M. (2003). “¿Qué Se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nivel Universitario?”. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, X(2). Recuperado de <http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/artigue.pdf>
- Aparicio, E. (2006). Un estudio sobre factores que obstaculizan la permanencia, logro educativo y eficiencia terminal en las áreas de matemáticas del nivel superior: el caso de la facultad de matemáticas de la universidad autónoma de Yucatán. *En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa (ALME19)*. Recuperado de <http://www.clame.org.mx/documentos/alme19.pdf>
- Balacheff, N. (2005). Marco, registro y concepción. *Revista Ema*, 9, 181-204. Recuperado por http://funes.uniandes.edu.co/1498/1/116_Balacheff2005Marco_RevEMA.pdf
- Botello, C. (2013). *Procesos de Seguimiento y Acompañamiento Académico a Estudiantes de Cálculo Diferencial: Un Aula Experimental para Profesores de Matemáticas en Formación* (Tesis de maestría no publicada). Universidad Industrial de Santander, Colombia.

- De Guzmán, M. (1994). *Tendencias Innovadoras en Educación Matemática*. España. Disponible en: <http://www.mat.ucm.es/catedramdeguzman/drupal/migueldeguzman/legado/educacion/tendenciasInnovadoras#3.5>.
- Fiallo, J., & Parada, S. (2014). *Curso de pre-cálculo apoyado en el uso de GeoGebra para el desarrollo del pensamiento variacional*. Universidad Industrial de Santander. Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Lineamientos curriculares en matemáticas*. Bogotá: Autor.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2004). *Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales*. Bogotá, Colombia: Enlace Editores Ltda.
- Monereo, C. (2001). Estrategias de Aprendizaje. *Revista Letras de Deusto*, 91(31). Abril-Junio. Bilbao (España): Universidad de Deusto.
- NCTM (2003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.
- Parada, S. (2012). *Una estructura curricular para atender la problemática relacionada con el curso de Cálculo I en la Universidad Industrial de Santander* (Documento interno no publicado de la Escuela de Matemáticas). Bucaramanga, Colombia: UIS.
- Santos-Trigo, L. (2008) *La Resolución de Problemas Matemáticos: Avances y Perspectivas en la Construcción de una Agenda de Investigación y Práctica*. Recuperado de <http://www.uv.es/puigl/MSantosTSEIEM08.pdf>
- Salinas, P., & Alanís, J. A. (2009). Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo dentro de una institución educativa. *Relime*, 12(3), Noviembre. Recuperado de <http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v12n3/v12n3a4.pdf>
- Sigarreta, J., & Laborde, J. (s.f.). Estrategia para la resolución de problemas como un recurso para la interacción sociocultural. *Sociedad Argentina de Educación Matemática*. Recuperado el 10 de marzo de 2014, disponible en: <http://www.soarem.org.ar/Documentos/20%20Sigarreta.pdf>
- Vasco, C. (2006). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. En C. Vasco, *Didáctica de las matemáticas: artículos selectos* (pp. 134-148). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Villa-Ochoa, J. (2012). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. *Tecné, Episteme y Didaxis*, 3, 9-25.

As aplicações da Matemática como um *ver-cómo* wittgensteiniano

Paulo Vilhena da **Silva**
Secretaria de Educação do Município de Ananindeua, Pará
Brasil

paulovilhenal@gmail.com

Valdomiro Pinheiro **Teixeira Júnior**
Secretaria de Estado de Educação do Pará
Brasil

jr3arq@yahoo.com.br

João Manoel da Silva **Malheiro**
Universidade Federal do Pará
Brasil

joaomalheiro@ufpa.br

Resumo

Nas pesquisas em educação em geral e particularmente na Educação Matemática, há um consenso de que as dificuldades de aprendizado dos conceitos científicos é consequência de um ensino tradicional abstrato, sem relação com a vida dos discentes, visando a mera memorização e não a compreensão e a reflexão a respeito dos conteúdos. A solução para essa problemática seria, então, contextualizar o ensino da Matemática por meio do uso de saberes matemáticos da vida cotidiana dos alunos nas aulas. Levada ao extremo, essa orientação sugere que apenas o que é imediatamente aplicável concretamente na vida do aprendiz deve ser ensinado e o restante não teria serventia. Através do conceito de *ver-cómo* de Wittgenstein (1999), procuramos mostrar uma compreensão diferente sobre essa questão: as aplicações da matemática são consideradas como mais uma das maneiras de *ver* conceitos dessa disciplina e não a maneira privilegiada pela qual seu ensino deveria ser orientado.

Palavras chave: Ensino de Matemática, contextualização, cotidiano, *ver-cómo*, filosofia de Wittgenstein.

Abstract

In educational researches in general and particularly in the context of mathematics education, there is a consensus that the difficulties in learning scientific concepts is the result of a traditional teaching: abstract, unrelated to the lives of students, aimed at rote memorization and not understanding and reflection about the contents. The solution to this problem would be then contextualize the teaching of mathematics through the use of mathematical knowledge from everyday life of students in classes. Taken to its extreme, this guidance suggests that only what is immediately applicable concretely in the life of the learner should be taught and the rest would have no importance. Through the concept of seeing-as of Wittgenstein (1999), we tried to show a different understanding on this issue: the applications of mathematics are

considered as one more of the ways to see concepts of this discipline, not the privileged way in which its teaching should be oriented.

Key words: Teaching of Mathematics, contextualization, everyday, seeing as Wittgenstein's philosophy.

Introdução

Ainda hoje a alfabetização científica é um desafio para os professores, como aponta Cachapuz (2000). Um dos motivos para tal insucesso seria o ensino tradicional adotado pela maioria dos professores: aulas descontextualizadas da realidade dos alunos, a preferência à memorização de regras e conceitos em detrimento de sua compreensão, bem como uma avaliação classificatória, que leva em consideração apenas uma nota, não dando atenção para todo o processo de aprendizado do estudante.

Diante dessa problemática, pesquisadores da educação sugerem que o ensino dos conceitos científicos deve ser feito através de situações do cotidiano do aluno, dando a oportunidade de os estudantes compreenderem e refletirem de maneira crítica sobre o que estudam, uma vez que se sentem motivados por trabalhar com problemas que são realmente seus e não com exercícios artificiais, sem significado e sem uso real para suas vidas.

Essa discussão é particularmente interessante no âmbito da Educação Matemática. Pesquisadores preocupados com o aprendizado da matemática pesquisam as atividades matemáticas cotidianas de seus estudantes com a intenção de usar problemas baseados nessas atividades, objetivando deixar as aulas mais interessantes e significativas, mostrando uma matemática que seria verdadeiramente útil ao aprendiz, diferente do ensino tradicional que se basearia na memorização de regras e fórmulas. Assim, o uso de atividades envolvendo saberes matemáticos cotidianos nas aulas de matemática garantiria o sucesso do aprendizado nessa disciplina.

A partir da pesquisa das atividades matemáticas cotidianas de grupos sociais, alguns teóricos apontam a existência de diversas matemáticas (Wanderer & Knijnik (2008), Knijnik & Giongo (2009), e Vilela (2007)), como por exemplo, a matemática dos trabalhadores do movimento sem-terra, a matemática dos ribeirinhos, a matemática dos feirantes, a matemática escolar, a matemática dos profissionais matemáticos, etc. Partindo daí, tais autores defendem que cada grupo deve estudar a “sua matemática”, como maneira de garantir seu aprendizado, uma vez que a “matemática formal”, própria da ciência, teria pouca serventia para a vida de tais aprendizes.

Em Silva & Silveira (2013), apontou-se, com base nas ideias de Wittgenstein, as dificuldades de se defender a existência de diversas matemáticas. Cabe notar que a escolha pelas ideias do filósofo tem um motivo: o referido filósofo é a base teórica de muitas das pesquisas que apontam a existência de várias matemáticas.

No presente trabalho pretendemos mostrar uma compreensão diferente a respeito da discussão sobre a contextualização: as possíveis aplicações práticas da matemática configuram-se como mais uma das maneiras de *ver* as sentenças dessa disciplina e, por conseguinte, não devem ser consideradas como a maneira privilegiada pela qual o ensino da Matemática deveria ser orientado.

Para tanto, nos basearemos na filosofia de Wittgenstein¹ – em especial em seu conceito de *ver-come*, que nos esclarece como podemos ver as diferentes aplicações de um conceito em seus diversos contextos de uso não como coisas diferentes, mas como diferentes aspectos de uma mesma coisa. –, bem como em pesquisadores da educação matemática que discutem a questão da contextualização no ensino da matemática, apontando suas limitações.

Ver e ver-come em Wittgenstein

O que acontece quando, ao observar uma figura ambígua², vemo-la ora *come* uma coisa, ora *come* outra? Ver³ diferentes aspectos em uma figura é como um interpretar. Daí Bouveresse, comentador da filosofia de Wittgenstein, afirmar: “É impossível estabelecer uma distinção precisa entre ver e interpretar” (1973, p. 201).

Segundo Wittgenstein, o conceito de ver está relacionado com o conceito de interpretar porque o interpretar é como um pensar:

“É um pensar? É um ver?”. Não seria isso equivalente a “É um *interpretar*? É um ver”. E interpretar é uma espécie de pensar, e frequentemente ocasiona uma repentina mudança de aspecto.

Posso dizer que ver aspectos está *relacionado* com interpretar? Minha inclinação era de fato dizer: “É como se eu *visse* uma *interpretação*”. Pois bem, a expressão desse ver está relacionada com a expressão do interpretar (Wittgenstein, 1998, p. 26, grifos em itálico do autor).

Para dissertar a respeito dos conceitos de *ver*, *ver-come*, *revelação do aspecto*, *cegueira para o aspecto*, etc., Wittgenstein usa como exemplo a figura lebre-pato de Jastrow (1901), na qual é possível, ora ver um pato, ora uma lebre.

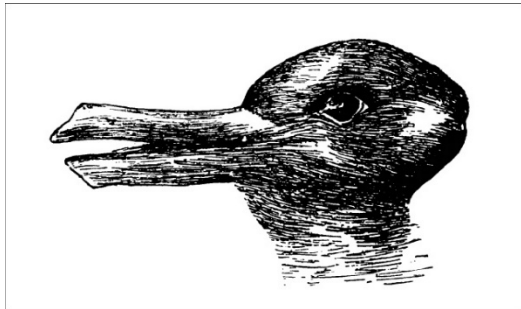


Figura 1. Figura lebre-pato de Joseph Jastrow (1901).

Como nos esclarece o filósofo, temos a impressão de que a figura mudou, mas ao mesmo tempo sabemos que a figura é a mesma:

¹ Ludwig Wittgenstein (1889-1951), filósofo austríaco. Escreveu principalmente a respeito de filosofia da linguagem, filosofia da matemática e psicologia filosófica.

² Figuras ambíguas são aquelas nas quais é possível ver duas ou mais formas diferentes. Podemos citar como exemplo, uma figura ambígua bastante conhecida, na qual é possível ver ora um pato, ora um coelho, presente em *Fact and fable in psychology* de J. Jastrow, publicado em 1901.

³ Os conceitos de ver, imaginar, pensar e interpretar, do ponto de vista de Wittgenstein, não são processos psicológicos internos, mas a maneira como tais palavras são usada em seus diversos contextos de aplicação na linguagem ordinária.

“Observo um rosto e noto de repente sua semelhança com um outro. Eu *vejo* que não mudou; e no entanto o vejo diferente. Chamo esta experiência de “notar um aspecto”. [...] A expressão da mudança de aspecto é a expressão de uma *nova* percepção, ao mesmo tempo com a expressão da percepção inalterada” (Wittgenstein, 1999, p. 177-180, grifos em itálico do autor).

Segundo o filósofo, o fato de vermos uma figura ora de uma maneira, ora de outra, não se deve a processos mentais, mas ao domínio de técnicas, a aplicação de regras, uma vez que “o conceito de observar um aspecto está muito próximo do conceito de vivência da significação de uma palavra” (Budd, 1989, p. 78), isto é, dos vários usos que pode ter uma palavra. Portanto, de acordo com Wittgenstein, assim como compreender os diferentes usos de uma palavra depende do domínio de suas regras de uso, notar os aspectos em uma figura depende do domínio de técnicas.

Este ponto pode ser esclarecido ao atentarmos para o fato de que as regras para o uso do conceito de ver distinguem-se de uma teoria da visão (Wittgenstein, 1989, p. 60). Hebeche, um dos comentadores da filosofia da psicologia de Wittgenstein, nos ajuda a compreender tal questão ao apontar que tais regras

Tomam a significação das palavras como se fosse uma fisionomia, isto é, os significados dos conceitos psicológicos presentes na linguagem ordinária se parecem às sutilezas de um rosto. Portanto o ver ou o manifestar aspectos não se limita ao campo da experiência visual. [...] A metáfora visual não nos deve enganar: os aspectos de uma palavra são o domínio de técnicas que a aproximam das funções das outras palavras na linguagem (Hebeche, 2002, p. 93).

Isto é, assim como uma mesma figura pode nos revelar diferentes aspectos, uma mesma palavra pode ter diferentes aspectos em seus diferentes usos. Por isso Wittgenstein sugere que uma palavra pode ter “um rosto familiar” (Wittgenstein, 1999, p. 197).

Cabe notar que é pelo aprendizado dos diversos usos de uma expressão linguística, em diversos contextos, que o nosso domínio de tal expressão vai se tornando cada vez mais “robusto”. Da mesma forma, compreendemos cada vez melhor um conceito quando somos capazes de vê-lo ora de uma forma, ora de outra, isto é, quando dominamos as regras que nos permitem notar seus diferentes aspectos em seus diversos contextos de aplicação.

Por exemplo, quando estamos ensinando a respeito dos triângulos, desenhamos a figura de tal maneira e instruímos os alunos a ver o desenho de pontos de vista diferentes: dizemos que isto é a base e aquilo é o vértice; de outro ponto de vista, tomamos agora isto *como* vértice e aquilo *como* base. Dessa forma o aprendiz vê a figura de maneiras diferentes e vai aprendendo a aplicar o conceito de triângulo em diferentes situações. Nas palavras de Wittgenstein: “o substrato desta vivência é o domínio de uma técnica” (Wittgenstein, 1999, p. 189-190), isto é, dominar diversos usos de uma palavra, bem como notar diferentes aspectos em uma figura, não depende de um processo introspectivo, mas do domínio das “sutilezas da linguagem”.

A contextualização da matemática como um dos aspectos dessa disciplina

Conforme discutido em Silva e Silveira (2013), aplicar a matemática no cotidiano não significa “fundar” uma nova matemática. Nossa Matemática é um produto cultural, isto é, histórico e social, acumulado ao longo do desenvolvimento da humanidade. Seu uso “civil” não implica outra matemática, ao contrário, esse uso no dia-a-dia é uma das “caras” da disciplina, e transforma o jogo de signos em matemática:

É essencial à matemática que signos sejam também empregados *à paisana*. É o uso fora da matemática, e portanto o *significado* dos signos, que transforma o jogo de signos em matemática. [...] Não há matemática *pura* sem *alguma* matemática aplicada. A matemática *seria* apenas um jogo se não desempenhasse algum papel em nosso raciocínio empírico (Wittgenstein In: Glock, 1998, p. 244-245).

Ora, uma mesma proposição pode ser usada tanto como regra linguística (uso normativo), quanto descrevendo algum fato empírico (uso descritivo) (cf. Wittgenstein, 2000, p. 41). Nesse sentido, não temos outra matemática quando aplicamos seus conceitos no dia-a-dia, mas diferentes usos de suas proposições.

Em outras palavras, conforme aponta Schmitz (1988), aplicar a matemática no cotidiano é dominar um de seus usos, é enxergar mais um de seus aspectos. Ver uma sentença matemática ora *como* uma expressão abstrata, ora *como* um fato contingente depende do domínio dos conceitos matemáticos. Daí que saber aplicar a matemática nas variadas disciplinas (como na biologia, na física, na química, na estatística, etc.), como também no cotidiano, é o que torna o domínio de tal disciplina mais robusto, pois são diferentes formas de *ver* suas proposições. Isto implica que aprender a usar a matemática no cotidiano é mais um dos contextos de aplicação desta ciência que os alunos *precisam* aprender, e não o único.

Importa esclarecer que, diferente do que talvez possa parecer, não estamos desqualificando os conhecimentos cotidianos, nem mesmo estamos excluindo a possibilidade de usá-los na escola, sejam eles dos ribeirinhos, dos trabalhadores do movimento sem-terra, dos feirantes, etc. Segundo Saviani (2003) todos nós precisamos dos conhecimentos cotidianos para situar-nos no mundo, embora esclareça que estes são limitados para a compreensão da realidade.

O homem não se faz homem naturalmente; ele não nasce sabendo ser homem, vale dizer, ele não nasce sabendo sentir, pensar, avaliar, agir. Para saber pensar e sentir; para saber querer, agir ou avaliar é preciso aprender, o que implica o trabalho educativo (Saviani, 2003, p. 7).

Com relação ao conhecimento matemático, Giardinetto (2002) sugere que os conhecimentos cotidianos devem ser usados, na escola, como ponto de partida para se chegar aos conhecimentos formais escolares, que, segundo o autor, são mais refinados e generalizam as situações cotidianas.

De nossa posição, acreditamos que pensar que apenas os conhecimentos cotidianos, aqueles que podem ser imediatamente aplicados à vida do aprendiz, devem ser ensinados na escola poder ser um equívoco com relação a compreensão do que significa contextualizar. Segundo Silva (2009), há uma precipitação em relação a consideração do que vem a ser “contextualização”, uma vez que o cotidiano é apenas um dos contextos possíveis de aplicação dos conhecimentos matemáticos. Diz o autor:

Desta concepção resulta que alguns professores acreditam que qualquer conteúdo que não seja fácil (ou possível) de contextualizar, não se faz necessário ser trabalhado com o aluno. Posto que, se não se consegue contextualizar, não serve para ser ensinado. Isto pode vir a ser um problema sério no futuro, principalmente no campo da matemática. Isto porque o pensamento matemático é o que mais se aproxima do pensamento natural do sujeito, tanto que a matemática é a disciplina por excelência, necessária a interpretação do real (Silva, 2009, p. 56).

Já a pesquisa de Barros (2012), intitulada “Cotidiano no ensino e aprendizagem de matemática: reflexões no ProJovem urbano”, ao analisar se o “ferramental matemático” que os

alunos do ProJovem utilizam cotidianamente (fora da escola) é o mesmo que eles utilizam em sala de aula, o autor chegou a conclusão que há muito mais “rupturas” do que convergências quando se compara as situações do cotidiano que envolvem conteúdos matemáticos e esses conteúdos matemáticos, em situações escolares contextualizadas em termos do dia-a-dia dos alunos, apontando, portanto, limitações da contextualização por meio do cotidiano.

Uma pesquisa realizada por pesquisadores da *Ohio State University* (2008), feita com estudantes universitários, discute que a ideia de que os alunos aprendem melhor por meio de situações do real pode ser apenas uma crença. No experimento, foi apresentado aos alunos um sistema matemático simples, porém não usual, essencialmente um conjunto de regras. Alguns estudantes aprenderam o sistema por meio de símbolos puramente abstratos, enquanto outros aprenderam através de exemplos concretos. Após, os estudantes participaram de uma atividade na qual deveriam utilizar os conhecimentos que haviam aprendido. Os aprendizes aos quais essa “nova matemática” foi apresentada de maneira abstrata obtiveram um resultado satisfatório, enquanto aqueles que aprenderam por meio de exemplos concretos obtiveram um desempenho “um pouco melhor do que o esperado se eles estivessem apenas tentando adivinhar” (Chang, 2008, p. 1).

Apesar de a pesquisa ter sido feita com estudantes universitários, seus realizadores acreditam que os resultados podem servir para a discussão da aprendizagem da matemática no ensino básico. Não se trata, vale dizer, de sugerir a exclusão de situações que tratem do cotidiano dos aprendizes no ensino da matemática, mas de apontar que ela nem sempre é a melhor opção.

Em outras palavras, como já dissemos antes, a contextualização no cotidiano é mais uma das maneiras de dar sentido ao aprendizado da matemática, não a maneira privilegiada. Quando se fala em contextualizar, imagina-se imediatamente tratar de situações do dia-a-dia dos estudantes, quando, entretanto, esta não é a única maneira de contextualizar os conhecimentos matemáticos.

Silva (2009) nos apresenta outras maneiras de contextualizar o conhecimento matemático, além da contextualização no cotidiano, a saber: a contextualização através da história da matemática, como possibilidade de situar o conhecimento no espaço e no tempo; a contextualização no âmbito de conteúdos de outras disciplinas, isto é, no contexto da interdisciplinaridade, como forma de mostrar a contribuição da matemática na compreensão de fenômenos naturais e sociais em que outras ciências se apresentam; e a contextualização da matemática pela própria matemática, na qual o professor pode desenvolver um conhecimento matemático mais elevado por intermédio da manipulação de conceitos mais simples e conhecidos do aluno, como também pode, a partir de um conteúdo mais complexo, melhorar a compreensão de outro já conhecido.

Portanto, o professor de matemática pode sim contextualizar e dar sentido às suas aulas sem deixar de ensinar os conteúdos matemáticos que não apresentam uma contextualização imediata na vida do aprendiz, mas que são sim de grande importância para a sua vida enquanto compreensão de sua realidade.

Considerações finais

Neste trabalho tentamos apontar as diferentes aplicações da matemática como diferentes maneiras de *ver* suas sentenças, através da discussão do *ver-come* em Wittgenstein. Ver a matemática *como* atividade cotidiana, *como* ciência, *como* ferramenta em outras disciplinas, etc. depende do domínio de técnicas, que precisam ser aprendidas, isto é, não é óbvio e, portanto, depende da instrução intencional do mestre.

Esperamos ter mostrado que o conhecimento matemático, mesmo aquele que não é (ou parece não ser) imediatamente útil na vida das pessoas, deve ser ensinado aos nossos estudantes, como socialização do saber desenvolvido pela humanidade, bem como no sentido de propiciar, por parte dos aprendizes, a compreensão da vida que os rodeia.

Embora o interesse pelas ideias do filósofo Ludwig Wittgenstein venha crescendo na Educação Matemática, ainda é um novo campo para pesquisas. Esperamos que, ao suscitar a discussão a respeito do *ver-come* wittgensteiniano e sua relevância para a Educação Matemática, possamos aguçar o interesse para novos trabalhos envolvendo o tema, aprofundando a discussão.

Bibliografia e referências

- Barros, O. A. E. S. (2012). *Cotidiano no ensino e aprendizagem de matemática: reflexões no ProJovem urbano* (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal do Pará, Belém.
- Bouveresse, J. (1973). *Wittgenstein: la rime et la raison* (Science, Éthique et Esthétique), Paris: Les Editions Minuit.
- Budd, M. (1989). *Wittgenstein's Philosophy of Psychology*. London: Routledge.
- Cachapuz, A. F., Praia, J. F., & Jorge, M. P. (2000). Perspectiva de ensino por pesquisa. In A. Cachapuz (Org.), *Perspectivas de ensino de ciências*. Porto: Centro de Estudos em Ciência (CEEC).
- Chang, K. (2008). Study Suggests Math Teachers Scrap Balls and Slices. *The New York Times* (online). Disponível em: <www.nytimes.com/2008/04/25/science/25math.html>. Acesso em 03 set 2014.
- Giardinetto, J. R. B. (2002). *A matemática em diferentes contextos sociais: diferentes matemáticas ou diferentes manifestações da matemática? Reflexões sobre a especificidade e a natureza do trabalho educativo escolar*. In: 25ª Reunião Anual da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação, 2002, Caxambu. Disponível em: <25reuniao.anped.org.br/excedentes25/joseroBERTogiardinettot19.rtf>. Acesso em 02 set 20014.
- Glock, H-J. (1998). *Dicionário de Wittgenstein*. Rio de Janeiro: Zahar.
- Hebehe, L. (2002). *O mundo da consciência: ensaio a partir da filosofia da psicologia de L. Wittgenstein*. Porto Alegre: EDIPUCRS.
- Jastrow, J. (1901). *Fact and fable in psychology*. London: Macmillan.
- Knijnik, G., & Giongo, I. (2009). Educação matemática e currículo escolar: um estudo das matemáticas da escola estadual técnica agrícola Guaporé. *ZETETIKÉ*, 17(32), 61-80. Campinas.
- Saviani, D. (2003). *Pedagogia histórico-crítica: primeiras aproximações*. Campinas: Autores Associados (Coleção Educação Contemporânea).
- Silva, F. H. S. (2009). *Formação de professores – Mitos do processo*. Belém: EDUFPA.
- Silva, P. V.; Silveira, M. R. A. (2013). Matemáticas ou diferentes usos da matemática? Reflexões a partir da filosofia de Wittgenstein. *Acta Scientiarum. Education*, 35(1), 125-132, jan-jun. Maringá.

- Schmitz, F. (1988). *Wittgenstein: la philosophie et les mathématiques*. França: PUF.
- Villela, D. S. (2007). *Matemáticas nos Usos e Jogos de Linguagem: ampliando concepções na educação matemática* (Tese de Doutorado em Educação). UNICAMP, Campinas.
- Wanderer, F., & Knijnik, G. (2008). Discursos produzidos por colonos do sul do país sobre a matemática e a escola de seu tempo. *Revista Brasileira de Educação*, 13(19), 555-564. Rio de Janeiro.
- Wittgenstein, L. (2000). *Da certeza*. Lisboa: Edições 70.
- Wittgenstein, L. (1989). *Fichas (Zettel)*. Tradução de Ana Berhan da Costa. Lisboa: Edições 70.
- Wittgenstein, L. (1999). *Investigações filosóficas* (Tradução de José Carlos Bruni). São Paulo: Nova cultural (coleção os pensadores).
- Wittgenstein, L. (1998). *Last Writings on the Philosophy of Psychology* (Vol. 1). Oxford: Blackwell.

Atividades investigativas para o ensino médio por meio do uso de um material didático manipulável

Renata Cristina **Geromel Meneghetti**

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo
Brasil

rgcm@icmc.usp.br

Ricardo **Kucinskas**

Brasil

ricardo.kucinskas@gmail.com

Tiago dos **Santos Junior**

Departamento de Engenharia de Materiais, Universidade Federal de São Carlos
Brasil

tsjr1@hotmail.com

Resumo

Neste trabalho objetivamos apresentar e discutir sobre um conjunto de atividades didáticas de Matemática para alunos do ensino médio, por meio da utilização de um material didático manipulável (MDM) e da abordagem metodológica de investigação matemática. As atividades foram elaboradas para serem utilizadas com um material didático manipulável denominado de Tábua Quadriculada Geoplanar. Seguindo uma abordagem qualitativa de investigação, um conjunto dessas atividades, sobre análise combinatória, foi aplicado a alunos do ensino médio em uma escola pública brasileira. Desta aplicação observamos que o material e a abordagem utilizados foram importantes para auxiliar na resolução das atividades, na percepção dos erros cometidos e principalmente na compreensão dos conceitos matemáticos focados. Por fim, com o trabalho apresentado pretendemos também contribuir com proposta de utilização de MDM neste nível de ensino, por meio de abordagens alternativas, tal como a investigação matemática.

Palavras chave: material didático manipulável, ensino médio, investigações matemáticas, análise combinatória.

Introdução

Materiais didáticos manipuláveis são amplamente utilizados no ensino de Matemática, especialmente nos anos iniciais de estudo desta área. Devido à possibilidade de vivenciar de forma concreta a aplicação de conhecimentos matemáticos abstratos, este tipo de material tem conquistado um espaço importante no contexto da educação matemática, pois sua utilização pode tornar as aulas de matemática mais dinâmicas e favorecer a compreensão dos conteúdos abordados. Aliado a isso investigações matemáticas é uma abordagem metodológica que pode também ser utilizada para auxiliar no processo de construção e compreensão do conhecimento.

Neste contexto, este trabalho tem por objetivo apresentar e discutir sobre uma proposta de atividades didático-pedagógica, de caráter investigativo, para o ensino médio¹ com o uso de um material didático manipulável, a TQG (Tábua Quadriculada Geoplanar).

¹ O ensino médio brasileiro constitui-se de três anos e é a última etapa da Educação Básica.

A “Tábua Quadriculada Geoplanar” (TQG) foi desenvolvida em projetos do grupo EduMatEcoSol (coordenado pela Profa. Renata C.G. Meneghetti, primeira autora desse trabalho). Mais especificamente seu processo de criação foi inerente ao desenvolvimento de dois projetos de iniciação científica, um com a participação de Ricardo Kucinskas (Licenciatura em Matemática/UFSCar) e outro com a participação do aluno Tiago dos Santos Junior (Engenharia de Materiais/UFSCar); respectivamente segundo e terceiro autores desse trabalho. Como foram identificados aspectos inovadores, especialmente associados ao ineditismo do material quanto à sua forma e versatilidade, foi realizado depósito de pedido de patente junto ao Instituto Nacional de Propriedade Industrial (INPI), sob número BR1020130068101. A partir da TQG, elaboramos uma proposta de atividades didático-pedagógicas para sua utilização no ensino médio da Educação Básica, as quais serão apresentadas e discutidas neste artigo.

Para a elaboração da proposta mencionada (tendo como recurso didático o material desenvolvido), levamos em consideração os pressupostos de atividade investigativa. Além disso, a proposta inicialmente focaliza o caráter mais intuitivo do conhecimento e progressivamente visa-se atingir uma sistematização maior (aspecto lógico do conhecimento) para aquisição dos conceitos matemáticos envolvidos. O material é organizado dessa maneira, pois se entende “(...) que o intuitivo apoia-se no lógico e vice-versa, em níveis cada vez mais elaborados, num processo gradual e dinâmico, em forma de espiral.” (Meneghetti, 2009). Com isso, temos também como propósito contribuir com oferecimento de materiais didáticos, acompanhados de propostas pedagógicas inovadoras que visem auxiliar no processo de ensino e aprendizagem de Matemática no ensino médio da Educação Básica.

Referencial teórico

Sobre a utilização de materiais didáticos Manipuláveis no processo de ensino e aprendizagem de Matemática

Neste trabalho, estamos entendendo materiais didáticos manipuláveis como aqueles que os alunos podem manipular por meio do tato (da experiência), compreendendo materiais concretos, atividades experimentais, jogos etc.

O uso dos materiais didáticos manipuláveis no ensino e aprendizagem de matemática tem longa história. Pestalozzi, no início dos anos 1800, reportou o uso destes materiais com a finalidade do ensino de Matemática. De acordo com Pestalozzi, a partir do uso dos sentidos e da experiência com o físico, as crianças aprendiam. Desta forma, ele dizia que “as coisas venham antes das palavras, e o concreto venha antes do abstrato” (Uribe-flórez, 2009). Na década de 1930, inicia-se um grande movimento de uso de materiais manipuláveis em sala de aula, levando-os a serem considerados nos currículos das escolas de ensino básico. Embora o uso deste tipo de material foi ampliado a partir dos anos 30, ainda não existia um mecanismo que permitisse avaliar sua efetividade. A sistematização dos mecanismos de avaliação da efetividade destes materiais só se tornou preocupação entre 1960 e 1970, quando se comparavam os resultados do uso de materiais concretos e pictóricos com o uso de materiais tradicionais. (Sowell, 1989). A partir da década de 70, diversos autores investigaram a eficácia dos materiais didáticos manipuláveis quando estes foram utilizados para se ensinar e aprender matemática. As observações sempre convergem para o mesmo ponto: os melhores resultados de ensino e aprendizagem são alcançados quando o material didático manipulável é utilizado sob os cuidados de um professor.

Nacarato (2005) aponta que, para que um material didático manipulável impulse a aprendizagem de matemática, é preciso também considerar a forma como esse objeto didático é utilizado, bem como as concepções pedagógicas do professor. Alunos não adquirem imediatamente os conceitos matemáticos com o uso de materiais manipuláveis. A instrução extensiva e a prática, com orientação do professor, são necessárias para que os resultados sejam efetivos. (Ball, 1992). Com base na indicação de professores e pesquisadores, Uttal, Scudder, & Deloache (1997) reconheceram que objetos concretos permitem ao aluno estabelecer conexões entre suas experiências diárias e seu aprendizado sobre conceitos e símbolos matemáticos, tornando este tipo de recurso um caminho concreto para a aprendizagem de conceitos e símbolos abstratos. Tooke et al. (1992) observaram que professores de Matemática ao redor do mundo apontam que a aprendizagem da Matemática é facilitada quando se experimentam os conceitos com auxílio de materiais manipuláveis. Este tipo de recurso didático tem sido recomendado para alunos de todos os níveis, como forma de potencializar o desempenho e desenvolver a capacidade de relacionar os conhecimentos matemáticos abstratos com a resolução de problemas do cotidiano (Peterson, Mercer, & O'Shea, 1988).

Nós entendemos que em atividades de ensino e aprendizagem de matemática, a utilização de materiais didáticos manipuláveis (MDM) pode ser vista como facilitadora da aprendizagem, pois pode estimular o aluno a participar da aula e a compreender o conteúdo focado. Como apontado por Araújo (2000, p.15) o uso de recursos lúdicos pode fazer com que as aulas de matemática se tornem “[...] dinâmicas e prazerosas facilitando assim o ensino-aprendizagem e levando o aluno a se apropriar do conhecimento, vivenciando, experimentando e se tornando uma pessoa autônoma para poder aplicar seus conhecimentos na vida.”. No entanto, corroboramos com a ideia de que a utilização dos MDM, incluindo aqueles que favorecem atividades lúdicas, pode auxiliar na aprendizagem, desde que bem elaborados e utilizados adequadamente, tendo em vista ações objetivas de ensino. Em relação às atividades didático-pedagógicas elaboradas para o uso da TQG, nos preocupamos também em criar de caráter investigativo a fim de suscitar ações do aluno visando à construção do conhecimento. Isto porque concordamos com Schliemann et al. (1992, p. 101) (*apud* Nacarato, 2004-2005) de que “Não é o uso específico do material concreto, mas sim o significado da situação, as ações da criança e sua reflexão sobre essas ações que são importantes na construção do conhecimento matemático”.

Sobre Investigação Matemática

De acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), “Investigar é procurar conhecer o que não se sabe”. Ponte (2003) entende a Investigação como uma procura direcionada e técnica que visa o aprofundamento em alguma coisa ou mesmo a descoberta de um assunto; que pode favorecer o ensino. Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), investigar também é descobrir relações entre os objetos matemáticos, tanto os conhecidos como os desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades. Para Ernest (1991), uma investigação matemática tem como ponto de partida uma questão ou uma situação matemática; o foco de uma atividade pode mudar assim que novas questões são levantadas, e novas situações são geradas e exploradas. Sobre o mesmo tema, o matemático inglês Andrew Wiles ressalta a importância da metodologia de investigação matemática como veículo de motivação para os alunos construírem conhecimento matemático. (Ponte et al., 2003)

Esses autores ainda explicitam quatro momentos principais de uma investigação matemática: exploração e formulação de questões; conjecturas; testes e reformulação; justificação e avaliação. De acordo com Ponte e Matos (1996), a investigação matemática

apresenta algumas semelhanças com a resolução de problemas, pois ambas envolvem raciocínio complexo, empenho e criatividade. Esses mesmos autores também apontam algumas diferenças na investigação, a saber, os objetivos são menos definidos e a finalidade não é apresentada de antemão, apresenta-se uma situação e o aluno então passa a formular conjecturas para investigar. Uma investigação matemática desenvolve-se geralmente em torno de um ou mais problemas. O primeiro grande passo de qualquer investigação é identificar claramente o problema a ser resolvido, por isso não é de se admirar que, em matemática, exista uma relação muito próxima entre problemas e investigações. De acordo com Ponte et al. (2003), é possível programar o início da investigação, porém o seu término é imprevisível. Isso porque alguns elementos como o percurso seguido pelos alunos, seus avanços, recuos, divergências que podem surgir durante a investigação e respostas diante das intervenções do professor podem influenciar bastante no resultado final da investigação.

Para Serrazina *et al.* (2002), neste tipo de atividade “é importante apresentar aos alunos um conjunto de propostas de trabalho interessantes, que envolvam conceitos matemáticos fundamentais e ofereçam aos alunos oportunidades para experimentar, discutir, formular, conjecturar, generalizar, provar, comunicar as suas ideias e tomar decisões.” Acrescenta-se ainda que, segundo Ponte (2003), uma tarefa investigativa pode ser contextualizada numa situação real ou formulada em termos puramente matemáticos. Portanto, percebe-se que as investigações matemáticas referem-se a situações-problema desafiadoras e abertas, permitindo aos alunos apresentarem várias formas de explorar e investigar o problema. Para Fiorentini et al. (2005), a utilização de tarefas investigativas nas aulas de matemática constitui uma perspectiva de trabalho pedagógico da qual o professor pode lançar mão para a realização de um ensino significativo da matemática.

Ainda de acordo com esses autores, o professor precisa estar atento ao processo de formulação e teste de conjecturas pelos alunos, a fim de garantir que eles evoluam na investigação. Para tal, o professor poderá fazer questões que estimulem os alunos a verificar outras formas de realizar as atividades e a refletir sobre o que estão fazendo. Ainda segundo esses autores, é fundamental que o professor leve os alunos a compreender o caráter provisório das conjecturas; eles precisam compreender que não basta somente que uma conjectura passe por vários testes, esse fato não implica que a conjectura seja válida ou que a investigação esteja concluída. Ou seja, deve ser feito também um trabalho cuidadoso para que a quarta etapa das atividades investigativas (a justificação) seja também contemplada.

Assim, as atividades elaboradas possuem caráter investigativo porque possibilitam a formulação de conjecturas e ideias diversas, dependendo dos conhecimentos prévios de cada aluno e da intervenção do educador. Além disso, as atividades foram elaboradas como proposta de uso de um material didático pedagógico por nós criados denominado de “Tábua Quadriculada Geoplanar” (TQG), sobre a qual abordaremos no que segue.

Sobre a TQG

A Tábua Quadriculada Geoplanar (TQG), material didático focado neste artigo, foi idealizada pelos autores desse trabalho. O processo de criação deste material ocorreu com os projetos de iniciação científica do segundo e do terceiro autores deste trabalho.

A TQG pode ser compreendida como uma tábua fina e devidamente graduada, projetada para ser confeccionada em madeira ou outro material resistente, com sequências de chanfros que formam uma malha, na qual atividades semelhantes às do Geoplano poderão ser desenvolvidas.

Dessa maneira, podemos dizer que este material tem potencial pedagógico para abordar fundamentos de **álgebra** e de **geometria**. Embora atividades semelhantes às aquelas realizadas no Geoplano possam ser executadas na TQG, devido às características de nosso material, ainda há outras possibilidades de exploração. As principais características da TQG são suas malhas: estas são obtidas por meio de chanfros (saliências de baixa profundidade) ou traços levemente pintados no mesmo plano da superfície original. No caso da madeira, por exemplo, por meio dos chanfros, será possível fixar lã ou uma linha mais grossa (como o barbante) nessas saliências a fim de desenvolver as mais variadas atividades didático-pedagógicas. As faces da TQG são lisas e por isso, independentemente do tipo de marcas que o material apresente, será possibilitada a escrita com canetas apropriadas, o que permitirá o trabalho com atividades diversas por meio de representações geométricas; tais como atividades envolvendo polígonos, eixos cartesianos, matrizes, sólidos geométricos, entre outras. Além das maiores possibilidades de exploração, a TQG possui vantagens também nos aspectos físicos, pois trata-se de um objeto mais seguro para a manipulação, sustentável e motivador da aprendizagem matemática.

A partir da idealização da TQG, começamos a elaborar atividades investigativas para o Ensino Médio da Educação Básica. Como já mencionado, este material apresenta grande potencial para desenvolvimento de conteúdos referentes a este nível de ensino, pois abrange as duas principais áreas da Matemática: a Álgebra e a Geometria. Dentre esses conteúdos gerais, destacamos outros mais específicos para serem trabalhados por meio da utilização da TQG para o Ensino Médio, a saber: estudo de funções por meio do esboço de gráficos de diversos tipos (funções lineares, quadráticas, exponenciais, logarítmicas dentre outras); construção de matrizes e determinantes; análise combinatória e probabilidade; sequências numéricas, números complexos; trigonometria, estudos de geometria plana, analítica e espacial.

Neste trabalho, apresentaremos e discutiremos um recorte do conjunto de atividades elaboradas que diz respeito à Álgebra, mais especificamente, trataremos de conceitos básicos de Análise Combinatória. Tais atividades foram elaboradas durante o trabalho de iniciação científica do segundo autor deste artigo, sob a orientação da primeira autora e foram aplicadas junto a alunos do Ensino Médio de uma escola pública da cidade de São Carlos (São Paulo, Brasil).

Aspectos Metodológicos

A gênese da TQG se deu a partir de uma extensa revisão de literatura sobre os materiais didáticos manipuláveis atualmente utilizados para se ensinar e aprender matemática. Nesta revisão, identificamos dois aspectos importantes. Primeiramente, os materiais disponíveis eram destinados ao ensino de conteúdos de apenas uma das grandes áreas de conhecimentos, como álgebra ou geometria. Em segundo lugar, boa parte dos materiais tinham formatos tabulares. A partir destas observações, levantamos as necessidades da elaboração de um novo material: apresentar versatilidade, portabilidade, ergonomia, facilidade de produção e baixos custos. Adicionalmente, deveria se pensar em materiais que pudessem ser utilizados em distintos níveis de ensino. Temos observado que os materiais didáticos manipuláveis são mais utilizados nas séries iniciais. No Ensino Médio, estes materiais são, muitas vezes, desconsiderados no processo de ensino e aprendizagem, embora apresentem fatores favoráveis ao seu uso em qualquer dos níveis. Como discutido, materiais didáticos manipuláveis oferecem aos alunos a possibilidade de aplicar a teoria em situações concretas, motivando-os ao estudo da matemática.

Com a definição das características que um novo material deveria apresentar, iniciamos um processo de exercício criativo, visando idealizar um material inovador. Depois de idealizado, o

projeto gráfico do material foi construído, e acima deste projeto, aspectos físicos e didáticos foram discutidos, fazendo com que aperfeiçoamentos fossem realizados no projeto inicial. Depois disso, foram construídos protótipos da TQG, que foram direcionados para testes de validação didática. Para tanto, uma série de atividades foram criadas para serem desenvolvidas especialmente com a TQG. Entre essas, estão as que foram focalizadas nesse trabalho.

A aplicação do conjunto de atividades didático-pedagógicas (apresentada a seguir) foi antecedida por um diagnóstico inicial, realizado individualmente pelos alunos, com o propósito de identificar algumas das dificuldades deles quanto aos conceitos matemáticos que trabalharíamos sobre esse tema. Num segundo momento, foram formados grupos de até 5 alunos para o desenvolvimento das questões apresentadas. Lembramos a eles que poderiam trocar informações entre si e, eventualmente, recorrer aos aplicadores das atividades para alguma orientação. Vale ainda salientar que, em relação à aplicação das atividades, primeiramente nos pautamos nos conhecimentos prévios dos alunos, identificados pelo diagnóstico inicial. Além disso, em relação à resolução das atividades, os alunos buscavam investigar e resolver as atividades propostas, por meio da livre exploração da TQG e podiam também utilizar outros materiais para consulta, como, por exemplo, livros didáticos ou algum outro fornecido pelo professor. Depois, os professores orientadores da atividade coordenaram uma discussão sobre as hipóteses levantadas e os resultados alcançados, motivando-os os alunos a formalizarem os conceitos por meio da linguagem matemática. Assim, foi possível acompanhar e observar os grupos, como o intuito de coletar registros para essa análise. Por fim, aplicamos um diagnóstico final, para nos ajudar quanto à análise da potencialidade da atividade desenvolvida, ou seja, a fim de comparar com o diagnóstico inicial e verificar se houve ou não diferenças significativas em relação aos conceitos abordados.

Sobre as atividades elaboradas e sua aplicação

A seguir, apresentamos um conjunto de atividades didático-pedagógicas elaboradas para alunos do ensino médio. Esse conjunto de atividades teve por objetivo trabalhar, por meio da manipulação da TQG, os principais conceitos da Análise Combinatória, utilizando para isso uma proposta de atividades com caráter investigativo que ajudassem os alunos a construir um conhecimento matemático significativo para eles, isto é, favorecendo uma aprendizagem significativa. A título de ilustração no que segue apresentamos a ficha de atividades que teve referente a arranjo e permutação.

ATIVIDADE SOBRE ARRANJO E PERMUTAÇÃO

Considere um dos lados dessa tábua como sendo um plano cartesiano finito, formado por: dois eixos ortogonais (eixos x e y) posicionados da maneira que você considerar conveniente; e pelas linhas horizontais e verticais da malha quadriculada desse material.

Procure definir da maneira que achar mais conveniente, os eixos das ordenadas e abscissas. Qual o número total de pontos (com coordenadas inteiras) que podemos formar no terceiro quadrante dessa tábua? E no segundo quadrante? E na tábua completa?

Agora, defina os eixos do plano cartesiano, de forma que ocorra simetria em relação a ambos os eixos. Neste caso, qual o número total de pontos (com coordenadas inteiras) que podemos formar no primeiro quadrante? E no quarto quadrante? E na tábua completa?

Imagine um plano cartesiano finito e simétrico que contenha apenas três pontos (com coordenadas inteiras) em cada um dos eixos. Por exemplo, no eixo y , teríamos: o ponto $O(0,0)$ no centro, um ponto A acima de O e um ponto B abaixo de O . Neste caso, qual o número total de pontos que podemos formar no primeiro quadrante, por exemplo?

Você utilizou a fórmula de Arranjo para solucionar o item anterior? Caso não tenha utilizado, você acredita que seria possível resolver o item anterior por meio desta fórmula? Tente fazer isso!

Figura 1. Ficha de atividades referentes a arranjos e permutações.

Na ficha de atividades, constavam também os seguintes as seguintes instruções:

- (1) As tarefas a seguir deverão ser desenvolvidas com o auxílio do material recebido.
- (2) Os raciocínios e procedimentos realizados deverão ser registrados com detalhes na folha entregue por seus professores.
- (3) Lembre-se de registrar todos os passos e raciocínios e não somente o resultado final.
- (4) Todos os registros devem ser feitos à caneta e sem rasuras. Caso haja algum raciocínio que você julgue incorreto, circule-o para desconsiderá-lo.

Discussão dos resultados referentes à aplicação

Em relação à resolução das atividades, de forma geral, pudemos perceber que os alunos se dedicaram à realização das atividades e estavam dispostos a compreender os conceitos relacionados a cada questão. Observou-se ainda que a maioria conseguiu uma melhor compreensão das ideias conceituais trabalhadas, em virtude da concretização proporcionada pela TQG, tornando mais explícitos alguns conceitos abstratos, tais como as ideias de Arranjo, Combinação e Permutação. No que segue, analisaremos alguns dos principais momentos vivenciados durante tal aplicação, cujos dados apresentados também foram obtidos por meio de fotos, anotações dos próprios aplicadores e vídeos. Para isso, também serão apresentados alguns comentários dos próprios alunos sobre a resolução de algumas questões, retirados do Diagnóstico Final.

Duas alunas de um mesmo grupo responderam que arranjo é o “agrupamento de elementos”, no qual importa a ordem em que são escolhidos tais elementos. Na Combinação, todos os alunos responderam que a ordem dos números não importa.

Por meio da afirmação da Carol, percebemos que a aprendizagem foi eficiente quanto a essa percepção conceitual sobre a Análise Combinatória.

Outro aluno, o Alex, respondeu que “arranjo é uma maneira mais precisa de você obter um resultado, o qual poderia ficar mais tempo buscando uma solução” e que combinação “é uma forma que você utiliza para obter resultados mais rápidos”. Este aluno não apresenta as definições conceituais de Arranjo e Combinação; no entanto, seu comentário destaca a importância da fórmula matemática para Arranjo e Combinação como forma de tornar os cálculos mais rápidos e precisos. Após nossas orientações quanto às dúvidas pontuais dos alunos, estes afirmaram terem compreendido a maior parte dos conceitos trabalhados, salientando a importância da TQG, como podemos observar por meio dos comentários apresentados abaixo. Os nomes utilizados são fictícios.

“A tábua foi importante para ter uma melhor visualização do plano cartesiano.”

MARI

“Ótimo, pois com ela pode-se ter a certeza sobre os gráficos [representações geométricas] que foram dados aos alunos. É uma boa ferramenta de auxílio.”

BRENO, colchetes nossos

“Na minha opinião, a tábua foi muito utilizada e bastante útil. Ela ajudou a identificarmos mais facilmente alguns erros cometidos, além de ter tornado a atividade mais simples e visível.”

LUIZ HENRIQUE

A tábua é um objeto bem interessante. Nunca tinha visto e ela ajuda e deixa bem mais fácil a interpretação dos gráficos [representações] cartesianos.

RENATO

colchetes nossos.

Por meio desses depoimentos, percebemos que todos os alunos consideraram a TQG útil e prática. No entanto, Joice (apesar de ter afirmado entender “com mais facilidade com a tábua”) comentou que em “Algumas questões não entendia utilizando a tábua.”. Esse comentário nos remete à barreira inicial que enfrentamos, a saber, uma resistência dos alunos em realizar atividades de caráter investigativo por meio da utilização de materiais didático-manipuláveis (MDM). Nesse sentido, outra aluna declara que nenhum professor dela utilizou algo parecido (como a tábua) para ensiná-los. Por isso, entendemos que, num primeiro momento, tais alunos preferiram fazer as atividades sem a TQG. Assim, durante as aplicações, alguns reclamaram do material, dizendo que dava muito trabalho ter que desenhar na tábua (com lápis ou barbante). Todavia, no decorrer das atividades, esses mesmos alunos perceberam a importância do MDM para resolver os exercícios propostos e passaram a utilizar a TQG, a fim de auxiliar o raciocínio necessário às questões apresentadas e começaram também a se envolver e se familiarizar mais com abordagem utilizada. Esse fato pôde ser constatado pelas afirmações de diversos alunos que salientaram a praticidade e utilidade da TQG:

“(…) muito mais prático de se usar tábua (…) é melhor para todos verem e entenderem.”

JEFERSON

“(…) foi muito útil porque com ela conseguimos ter uma noção mais ampla de como montar um plano cartesiano (…).”

ALEXANDRE

Assim, entendemos que os alunos gostaram de ter manipulado a TQG durante o desenvolvimento das atividades propostas. Eles salientaram algumas das características desse material, tais como: sua praticidade, a visualização do plano cartesiano, a utilidade para resolver as questões, a facilidade para identificar possíveis erros cometidos nos cálculos, bem como o auxílio para a interpretação de representações cartesianas. Angelina lembra ainda uma das mais importantes características desse material: esclarecer por meio de sua manipulação alguns dos conceitos abstratos da matemática, como é o caso da Análise Combinatória. Segundo as palavras desta aluna, a tábua serviu para: “*podermos enxergar os arranjos e combinações de uma forma mais explícita.*”. A abordagem metodológica utilizada também favoreceu o engajamento dos alunos na utilização do material, na resolução e discussão das atividades e por fim na compreensão dos conceitos envolvidos.

Por fim, tais análises mostraram que atingimos nosso propósito. Pois, nossa intenção principal para essas atividades era trabalhar, os principais conceitos da Análise Combinatória, favorecendo uma aprendizagem significativa aos alunos.

Considerações finais

Este trabalho teve como objetivo apresentar e discutir sobre uma proposta de atividades didático-pedagógicas para o ensino médio de matemática, com o uso do material didático manipulável TQG e da metodologia de investigação matemática.

As atividades foram aplicadas com alunos do ensino médio e os resultados desta aplicação permitiram perceber que apesar de ter ocorrido uma resistência inicial tanto ao uso do material didático manipulável quanto à abordagem metodológica utilizada, aos poucos os alunos foram se envolvendo com a resolução da atividade de forma que se observou uma maior compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos. Assim, a utilização da TQG por meio da metodologia de investigação matemática mostrou ser uma abordagem eficiente no processo de ensino e aprendizagem de matemática para o ensino médio nos conteúdos focalizados.

Como afirmaram os próprios alunos, a TQG auxiliou a visualização do plano cartesiano, a resolução/investigação do problema proposto, a facilidade para identificar possíveis erros cometidos nos cálculos, bem como o auxílio para a interpretação de representações cartesianas, além de esclarecer alguns dos conceitos abstratos da matemática, como é, em geral, o caso dos conceitos Análise Combinatória.

Isto parece indicar que a utilização de materiais didáticos manipulativos pode tornar-se ainda mais potente do ponto de vista didático-pedagógico quando incorporado a abordagens alternativas de ensino, como a de investigação matemática que foi focada neste trabalho.

Agradecimentos

À FAPESP (Fundação de amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo/Brasil)²; ao PIC/SMA (Programa de Iniciação Científica do Departamento de Matemática do ICMC/USP) e ao Programa de Educação Tutorial em Economia Solidária da UFSCar.

Referências e bibliografia

- Araújo, I. R. O. (2000). *A utilização de lúdicos para auxiliar a aprendizagem e desmistificar o ensino da matemática*. Universidade Federal de Santa Catarina.
- Ball, D. (1992). Magical hopes: Manipulatives and the reform of math education. *American Educator*, 16(1), 46–47.
- Ernest, P. (1991). Investigações, Resolução de Problemas e Pedagogia. In *The Philosophy of Mathematics Education (Investigations, Problems Resolution and Pedagogy)*. The Falmer Press.
- Fiorentini, D., Fernandes, F. L. P., & Cristovão, E. M. (2005). Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In *Anais do V Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática* (p. CD-ROM). Porto.
- Meneghetti, R. C. G. (2009). O Intuitivo e o Lógico no Conhecimento Matemático: análise de uma proposta pedagógica em relação a abordagens filosóficas atuais e ao contexto educacional da matemática. *Revista BOLEMA: Boletim de Educação Matemática*, 22(32), 161–188.
- Nacarato, A. M. (2005). Eu trabalho primeiro no concreto. *Revista de Educação Matemática*, 9-9(10), 1–6.
- Peterson, S. K., Mercer, C. D., & O'Shea, L. (1988). Teaching learning disabled students place value using the concrete to abstract sequence. *Learning Disabilities Research*, 4(52-56).
- Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2003). Investigar em Matemática. In *Investigações matemáticas na sala de aula* (pp. 13–23). Belo Horizonte: Autêntica Editora.
- Ponte, J. P. M. (2003). Investigar, ensinar, aprender. In *Actas do profMat 2003 - CD ROM* (pp. 25–39). Lisboa.

² FAPESP (processo 2010/05424-5).

- Ponte, J. P., & Matos, J. F. (1996). Processos cognitivos e interações sociais nas investigações matemáticas. In *Investigar para aprender matemática* (pp. 119–1385). Lisboa: Projecto MPT e APM.
- Serrazina, L. ., Vale, I. ., Fonseca, H., & Pimentel, T. (2002). O papel das investigações matemáticas e profissionais na formação inicial de professores. In J. P. et al. Ponte (Ed.), *Atividades de investigação na aprendizagem da matemática e na formação de professores*. (pp. 41–58). Lisboa: SEM-SPCE.
- Sowell, E. J. (1989). Effects of Manipulative Materials in Mathematics Instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(5), 498–505.
- Tooke, D. J., Hyatt, B., Leigh, M., Snyder, B., & Borda, T. (1992). Why aren't manipulatives used in every middle school mathematics classroom? *Middle School Journal*, 24, 61–62.
- Uribe-Flórez, L. J. (2009). *Teacher Variables and Student Mathematics Learning Related to Manipulative Use*. Virginia Polytechnic Institute and State University.
- Uttal, D. H., Scudder, K. V., & DeLoache, J. S. (1997). Manipulatives as Symbols : A New Perspective on the Use of Concrete Objects to Teach Mathematics. *Journal of Applied Developmental Psychology*, 18(1), 37–54.

Baixo rendimento dos alunos do 6º ano na disciplina de matemática em uma escola pública de Ji-Paraná – Rondônia - Brasil: falta de motivação?

Enoque da Silva **Reis**

Universidade Federal de Rondônia (Unir) Brasil

enoque.reis@unir.br

Simone dos Santos **França**

Faculdade Panamericana de Ji-Paraná

Brasil Anhin.1@hotmail.com Nei Araújo **Silva**

Universidade Federal de Rondônia

Brasil neiaraujosilva@hotmail.com

Resumo

O presente artigo analisa o histórico de notas do 4º ao 6º ano de dois alunos na disciplina de Matemática da Escola Estadual de Ensino Fundamental e Médio 31 de Março, situada no município de Ji-Paraná – RO - Brasil. As fontes utilizadas foram os documentos oficiais da mesma. O procedimento da pesquisa é de caráter bibliográfico e qualitativo. Propomos trazer à tona uma discussão a respeito da motivação no processo ensino-aprendizagem. Buscamos também propiciar ao campo educacional, reflexões que poderão contribuir com o desenvolvimento do ensino e aprendizagem dos alunos do 6º ano. Como resultado constatamos a existência de um declínio das notas, e tal baixa nos remeteu a concluir que a transição do ensino de matemática aplicado por um pedagogo para o ensino desenvolvido por um licenciado em matemática, é um dos fatores que se apresenta como uma causa da falta de motivação referente a disciplina em questão.

Palavras-Chave: Baixo rendimento. Reflexos. Desmotivação. Sexto ano.

Primeiras palavras

Este artigo descreve o rendimento de 8 (oito) alunos do 6º ano do ensino fundamental na disciplina de matemática na escola pública 31 de Março situada no Município de Ji-Paraná RO, no entanto analisamos somente dois, visto que trata-se de um recorte para este artigo. O rendimento supracitado está caracterizado a partir das notas referentes ao 4º ao 6º anos, com um enfoque nas notas apresentadas no último ano citado a fim de analisar o que ocorre na transição do 5º para o 6º ano, visto que, nessa passagem observa-se inicialmente o trabalho do pedagogo e posteriormente o trabalho do professor licenciado em Matemática.

Para concretizar esta pesquisa, buscaremos descrever a importância da motivação no ensino aprendizagem e as situações avessas na falta dela. Para tal, recorreremos a vários autores que concordam entre si que não existe aprendizado sem motivação.

No que diz respeito à análise, que sob o olhar das notas de 8 (oito) alunos do 4º, 5º e 6º anos, analisamos se realmente a transição das séries iniciais pode ser ou não, um dos fatores que promove a desmotivação na aula de Matemática.

A importância da motivação no contexto escolar

Nesse momento, dedicamos algumas palavras na intenção de levar o leitor a se deparar com a importância da motivação no contexto escolar, assim, iniciamos destacando que infelizmente, o ensino fundamental não está superando as metas indicadas pelo MEC (Ministério da Educação), o que nos levou a observar e descrever a importância do professor em sala de aula, pois é fácil verificar que este, é sem dúvida o percussor do processo de ensino aprendizagem na escola, assim, propomos algumas orientações que podem contribuir para que haja motivação em sala de aula.

A percepção da fragilidade na educação tem levado vários autores como, por exemplo, Piletti (1993) e Bzneck (2009) a se debruçarem sobre o assunto referente a educação. De forma que com frequência os projetos e programas consideram o todo, no entanto, o todo não pode ser considerado senão por partes, razão pela qual alguns fatores subjetivos como a motivação e a afetividade não são aprofundados nas escolas. Esses fatores estão intrinsecamente ligados ao contexto educacional, e de acordo com esses autores, podem alavancar a aprendizagem dos alunos. É perceptível que muitos autores concordam em um ponto, não existem aprendizados sem motivação.

Quando se fala de motivação o nosso cognitivo articula várias situações interiores, sem, contudo, definir claramente o que a palavra no seu sentido original quer dizer. Para darmos uma resposta a essas indagações, analisaremos a palavra motivação citada acima, na visão de Bzneck (2009, p. 9) que diz:

[...] uma ideia sugestiva sobre motivação, normalmente aplicável a qualquer tipo de atividade humana, é fornecida pela própria origem etimológica da palavra, que vem do verbo latino *movere*, cujo tempo supino *motum* e o substantivo *motivum*, do latim tardio, deram origem ao nosso termo semanticamente aproximado, que é motivo. Assim, genericamente, a motivação, ou o motivo, é aquilo que move uma pessoa ou que a põe em ação ou a faz mudar o curso. (Itálico nosso).

A qualidade e a intensidade do envolvimento nas aprendizagens dependem da motivação, Bzneck (2009) legitima que no aluno, a motivação é considerada como determinante talvez principal do êxito e da qualidade da aprendizagem escolar. Já Fita (2003), acredita que a motivação é um conjunto de variáveis sejam contextuais ou pessoais, que ativam a conduta e a orientam em determinado sentido visando alcançar um objetivo.

Para Huertas (2001) a motivação é definida como um processo psicológico, ou seja, ela é proporcionada por meio dos componentes afetivos e emocionais. Todavia, são vários os atributos que influenciam na motivação da pessoa, para o autor, ela vai surgindo no campo da subjetividade a partir das características de cada indivíduo, visto que estes possuem diferentes metas, expectativas e formas de visualizar a vida.

Para Barbosa (2005, p. 21) “a origem da motivação é o desejo de satisfação de necessidades e um conjunto de fatores que determinam a conduta de um indivíduo”. Assim, entendemos que a motivação é um comportamento que vai surgido interiormente e que remete a

satisfação das mesmas; ou seja, é a busca da satisfação de desejos que precisam de respostas imediatas.

A importância do professor na sala de aula

Temos visto muitos professores que ao longo de suas vidas se dedicaram a profissão e de certa forma deram sua contribuição para a sociedade. No entanto, como o avanço tecnológico das últimas décadas, houve consequentemente uma mudança no convívio social, e muitas práticas que se utilizavam nas escolas parecem que já não funcionam mais.

Há muito tempo tem aparecido o questionamento sobre a falta de motivação, porque o aluno de hoje não tem mais aquele interesse em aprender, especificamente na disciplina de matemática? O que mudou na sociedade para que haja essa postura dos alunos? Como os professores devem agir diante da falta de motivação? São algumas questões que precisam ser discutidas em âmbito social, mas principalmente nas escolas e universidades, pois na visão de muitos autores, a motivação é o caminho para o desenvolvimento e aprendizado dos alunos, como esclarece Pilleti (1993, pag. 63):

A motivação é fator fundamental da aprendizagem. Sem motivação não há aprendizagem. Pode ocorrer aprendizagem sem professor, sem livro, sem escola e sem outra porção de outros recursos. Mas mesmos que existam todos esses recursos favoráveis, se não houver motivação não haverá aprendizagem.

Mediante essas realidades, para que o professor desenvolva um bom trabalho, é imprescindível que ele dentre os outros elementos fundamentais, como o uso da tecnologia em sala de aula, tenha conhecimento prévio e domínio dos conteúdos, conheça no mínimo um pouco sobre motivação e a importância desta no desenvolvimento do processo de ensino/aprendizagem. Nesse sentido, Pozo (2002) traz que a motivação deve ser considerada como um requisito, uma condição prévia da aprendizagem, ou seja, para o autor não basta somente conhecer, mais aplicá-la.

Podemos também considerar que é de suma importância estar revendo as circunstâncias da falta de motivação, pois este fato quase que totalmente prejudica o dia a dia em uma sala de aula, pois desestrutura as aulas quando os alunos não participam. Se o objetivo do ensino é fazer com que o aluno realmente aprenda os conteúdos, de forma alguma se pode deixar que alguns fatores que podem ser melhorados prejudiquem o aprendizado.

Para isso, é importante que o professor conheça seus alunos e suas particularidades, pois o que pode ser interessante para um, pode não ser para o outro. Por isso, Marinho e Fiorelli (2005) afirmam que os mesmos estímulos e estratégias quando aplicados a diferentes pessoas ainda que em situações praticamente idênticas, conduzem a diferentes resultados. Carvalho, Pereira e Ferreira (2007, p. 10) na visão de (FITA 2003), enfatizam que:

Para o professor compreender o que motiva os alunos, é necessário que o mesmo estude o contexto da aprendizagem, das individualidades dos alunos, bem como suas ideias prévias e tire conclusões que estejam contempladas em seu planejamento de ensino. Assim o professor tem a possibilidade de selecionar os conteúdos que despertem o interesse dos alunos, aqueles para os quais eles se sintam mais motivados a aprender.

Segundo Guimarães (2001) é perceptível o interesse dos alunos em desenvolver atividades que lhe são atribuídas recompensas, como por exemplo, elogios. Acompanhada dessas atividades, é

importante que o professor traga em sua metodologia, assuntos que de uma forma ou de outra despertem o interesse do aluno, pois, de acordo com Leite (2007, p. 36):

É mais fácil aprender o que nos interessa. Sem motivação o aluno não presta atenção, não participa, não faz as tarefas. Ou até faz, mas preocupados simplesmente em corresponder à expectativa do professor, sem interesse em aprender”.

Segundo Coll (2004), a crença tradicional é que a motivação é própria de cada um, que o aluno é responsável por seu pouco interesse pela aprendizagem. Todavia, as teorias mais atuais apontam que condições externas podem influenciar direta ou indiretamente na motivação do aluno:

[...] os motivos de um aluno são um produto da interação dele com os diferentes contextos em que está presente o sentido da aprendizagem escolar. Essa responsabilidade da escola e dos professores não pode fazer com que se esqueça de que a motivação é moldada em contextos não escolares, como a família, a classe social e a cultura (Coll, 2004, p. 129).

De acordo com Lira (2013, p. 05) baseada na abordagem comportamentalista de Skinnir ele ressalta que:

É de responsabilidade de o professor assegurar a aquisição do comportamento. Os comportamentos desejados dos alunos serão instalados e mantidos por condicionantes e reforçadores arbitrários, tais como: elogios, graus, notas, prêmios, reconhecimentos do mestre e dos colegas, prestígio, etc., os quais, por sua vez, estão associados com uma outra classe de reforçadores mais remotos e generalizados, tais como: o diploma, as vantagens da futura profissão, a aprovação final no curso, possibilidade de ascensão social, monetária, status, prestígio da profissão, etc..

Para que os alunos se sintam motivados em sala de aula é imprescindível a participação do professor. Contudo, é importante ressaltar que uma das maiores dificuldades dos professores é envolver os alunos em atividades de aprendizagem. Às vezes é mais prático e cômodo permanecer com a mesma prática do que buscar novos desafios. É evidente, que muitas vezes a escola não possui infraestrutura nem materiais necessários para o bom desenvolvimento do trabalho docente, entretanto, Ripplinger e Brancher (2006) afirmam que:

[...] vale ressaltar que, para fugir do método tradicional de ensino, não precisamos grandes inovações e recursos financeiros, basta apenas preparar a aula de uma maneira diferente, sequenciando os conteúdos, procurando relacioná-los com o conhecimento cognitivo prévio dos alunos e com condições contextualizadas, etc.

Se por um lado a crença tradicional segundo Coll (2004) diz que a motivação é própria de cada um, e que o aluno é responsável por seu pouco interesse pela aprendizagem, por outro lado, autores como Skinnir, Guimarães e Braghirolli afirmam categoricamente que a motivação mesmo que parta do próprio sujeito está estritamente ligada às relações que este estabelece com o meio exterior. Mediante este pressuposto Luna (2008) afirma:

A falta de motivação é causada por características pessoais do aluno e o contexto da escola. O medo o fracasso e a forma de encará-lo; a falta de clareza sobre os objetivos da aprendizagem; e a não satisfação das expectativas são alguns dos motivos de ordem pessoal. Além deles existem a influência dos pais, colegas e grupos sociais, mais as experiências anteriores de cada um. Junte-se a isso o ambiente da escola e da sala de aula para o desenvolvimento das atividades, como a organização, a interação com o professor e a avaliação. É aí que o educador pode intervir”.

Observando essas realidades, é comum encontrar nas escolas alunos desmotivados, que segundo os autores citados acima, mediante as circunstâncias foram influenciados por alguma situação, entretanto, os professores também estão desmotivados em sua atividade por conta desses alunos. Por isso, Souza apud Tapia e Fita (2003, p. 88) afirmam que:

[...] se o professor não está motivado, se não exerce de forma satisfatória sua profissão, é muito difícil que seja capaz de comunicar a seus alunos entusiasmo, interesse pelas tarefas escolares; é definitivamente, muito difícil que seja capaz de motivá-los.

Em face dessas situações, o trabalho em equipe pelos professores de uma mesma escola, a troca de experiências, definição de perspectivas de intervenção devem ser consideradas fundamentais na prática da docência. Todavia, não há receitas prontas, o professor deve procurar aprender a partir da própria experiência, sendo coerente consigo próprio.

Procedimentos da pesquisa

O presente trabalho é de caráter bibliográfico e qualitativo, no qual, está baseada a análise documental, em que segundo Lüdke e André (2008), podem-se revelar diferentes aspectos do tema em questão, além de ser uma fonte rica e fornecer evidências que fundamentam as afirmações do pesquisador.

Para tal pesquisa destacamos nosso entendimento a respeito de documento que conforme o Dicionário Michaelis digital esclarece, refere-se ao escrito ou objeto que serve de testemunho ou até mesmo prova, e tais elementos constituem de informação, por outro lado, Moroz *et all* (2006 p.80) afirmam que “ Os registros podem ser utilizados como fonte confiável de dados, desde que alguns cuidados sejam tomados, como por exemplo, certificar-se de que os documentos sejam autênticos [...]”.

Conforme citado no parágrafo anterior, podemos a partir do entendimento da escrita de Moroz classificar nossa fonte de dados como documentos, haja vista, que tais dados são oriundos de registros administrativos, de forma que nossa coleta de dados foi fundamentada nos diários de classe da Escola 31 de Março.

Sendo assim, buscamos junto à secretaria da escola, as notas finais da disciplina de matemática dos alunos que cursaram nessa mesma instituição o 4º, 5º e 6º anos. De posse dessas notas inicia-se o processo de análise, identificando inicialmente se elas são constantes, crescentes ou decrescentes, com o intuito de verificar se as notas oriundas do sexto ano, que estamos considerando – o ano de transição das séries iniciais do Ensino Fundamental para as séries finais do Ensino Fundamental – pode ser ou não, um dos fatores que faz os alunos investigados se sentirem desmotivados na aula de matemática. A análise estudada adiante apresentará um caminho reflexivo, proporcionando a cada um a visão da importância ou não do fator motivação no processo de ensino e aprendizagem de matemática.

Análise dos dados

Nesse ponto iremos desenvolver nossa análise, para isso abordaremos a descrição do 6º ano do Ensino Fundamental na disciplina de matemática, observando as notas de 8 (oito) alunos que estudaram o 4º, 5º e 6º anos e analisando a de dois desses alunos na escola 31 de Março.

A turma observada do 6º ano possui 25 (vinte e cinco) alunos, sendo 11 (onze) do sexo masculino e 14 (catorze) do sexo feminino. Todavia, desses 25 (vinte e cinco) alunos só foi possível estudar 8 (oito), sendo 4 (quatro) do sexo masculino e 4 (quatro) do sexo feminino. A

razão pela qual foram escolhidos esses 8 (oito) alunos, foi devido ao fato de que precisávamos encontrar os mesmos alunos que cursaram o 4º, 5º e 6º anos do ensino fundamental. De forma que para explicar melhor, na turma do 4º ano, 5 (cinco) alunos foram transferidos e um desistente. Quando esses alunos do 4º ano passaram para o 5º ano, novamente 5 (cinco) alunos foram transferidos. Em seguida na passagem do 5º ano para o 6º ano, dois foram transferidos, um desistente e dois reprovados. Em resumo, dos 25 (vinte e cinco) alunos do 6º ano, apenas 8 (oito) alunos estiveram em todas as três turmas mencionadas acima, ou seja, não foi possível conseguir as notas em sequência de todos os alunos do 4º, 5º e 6º anos, ficando no final apenas com 8 (oito).

Com o intuito de facilitar a visibilidade das notas e observar o rendimento mensurado, a partir das mesmas foram constantes, crescentes ou decrescentes, nos dando assim, a possibilidade de destacar se esse rendimento pode ser um dos fatores que desmotivam os alunos dessa série, assim, inserimos a tabela que segue:

Tabela 1

Notas dos alunos do 6º ano da escola 31 de Março

Nº	Nome fictício	4º ano	5º ano	6º ano
01	Maria	6,1	6,0	6,5
02	Josefa	8,5	8,1	7,0
03	Tereza	8,0	8,4	7,6
04	João	6,3	6,8	6,5
05	Pedro	7,6	8,3	6,6
06	Manoel	6,1	7,6	5,1
		9,1	9,6	9,6
		6,2	7,4	7,3
Média		7,2	7,7	7,0

Nota: Dados cedidos pela Secretária da Escola

Considerando que este artigo traz somente um recorte de um trabalho de conclusão de curso, destacamos desse grupo apenas dois alunos, a aluna Josefa e a aluna Tereza, para que possamos realizar nossa análise pontual. E para finalizar destacamos o grupo todo.

A aluna Josefa da tabela, no 4º ano tem sua nota igual a 8,5 e no 5º ano 8,1, porém quando termina o 6º ano sua nota obtida é igual a 7,0. Nesse caso, cabem algumas indagações: o que deve ter acontecido no decorrer dos anos que afetou essa aluna a ponto de decrescer 1,5 pontos? Será que houve pouca motivação? Será que os conteúdos ministrados não tiveram uma sequência lógica para ela? De forma que na intenção de se aproximar ao entendimento de uma possível resposta para tais questionamentos recorremos a Bzuneck (2009), por afirmar que em sala de aula, os efeitos imediatos da motivação do aluno consistem em ele envolver-se ativamente nas tarefas pertinentes ao processo de aprendizagem. Baseado nessa afirmação pode-se imaginar que para essa aluna faltou esse envolvimento, e tal falta de envolvimento nos leva a observar que um dos fatores para o baixo rendimento, trata-se do déficit ou a diminuição da motivação, que por sua vez, pode ter sido causada justamente pela ausência de uma sequência lógica dos conteúdos para a aluna.

Quando olhamos para Tereza, terceira aluna da tabela, percebemos que o desempenho educacional era crescente e quando foi para o 6º ano houve um declínio. Sendo que na escala de 0 a 10, como são utilizadas as notas na escola, talvez essa regressão do 5º ano para o 6º ano para

essa aluna não cause muitos danos, todavia, se essa regressão continuar nos anos seguintes, pode ser prejudicial ao seu processo de aprendizagem.

Já no término das séries iniciais podemos observar que houve bom desempenho da aluna, conforme as suas notas de 8,0 no 4º ano e 8,4 no 5º ano. Atenuante a isso, para que o aluno não perca a motivação Bzuneck (2009) propõe que o próprio aluno se esforce no processo de aprender com persistência especificamente quando as tarefas parecerem ser mais exigentes. Considerando que a disciplina de matemática para a maioria dos alunos tem se tornado o “bicho papão”, o professor pode interferir trazendo em sua metodologia assuntos que despertem o interesse dos alunos, como relata Guimarães (2001). Desse modo, alunos como Tereza tende a manter-se motivados em aprender, pois Leite (2007) complementa que é muito mais prazeroso aprender aquilo que nos interessa.

De modo geral, a média das notas dos 8 (oito) alunos mencionados como mostra a tabela é 7,2 no 4º ano, 7,7 no 5º ano e 7,0 no 6º ano. Podemos ver que quando os alunos passam do 4º para o 5º ano, a média cresce, contudo, quando passa para o 6º ano, a média diminui. Considerando, esses fatores, e analisando o que diz os autores nos quais esta pesquisa foi baseada, podemos observar que de certa forma está havendo falta de motivação, quando os alunos passam do 5º para o 6º ano. Essa afirmação tem fundamento, se olhamos para os reflexos que a falta de motivação ocasiona, que nesse caso é a queda frequente das notas dos alunos na disciplina de matemática.

Considerações finais

Como objetivo geral dessa pesquisa é refletir acerca da falta de motivação dos alunos matriculados no 6º ano na disciplina de Matemática do Ensino Fundamental na Escola Estadual 31 Março, observando diretamente o baixo rendimento em suas notas. Para tal análise elencamos algumas considerações a seguir: Tendo em vista as notas dos alunos do 4º, 5º e 6º ano do ensino fundamental na disciplina de matemática, relatamos alguns reflexos concernentes à falta de motivação. Ao analisarmos a média dos três anos decorrentes dos alunos, verificamos que quando eles passam do 5º para o 6º ano, há uma defasagem de suas notas: de 7,7 para 7,0, ou seja, há um baixo rendimento no sexto ano se comparado com o quinto ano. Tal defasagem tem como um dos pontos negativos o acarretamento da falta de motivação.

Por fim, destacamos que a transição dos alunos matriculados nos anos iniciais, para os anos finais do ensino fundamental, em que o primeiro tem como responsável em sala, um único professor e o segundo um professor para cada disciplina, ocasiona um baixo rendimento se comparada nota por nota, assim, podemos relatar que um dos elementos responsáveis por tal ocorrência, é a falta ou a diminuição da motivação. Logo, como afirmamos a motivação ou nesse caso a falta dela é um dos fatores existentes, de maneira que deixamos nesse momento a proposta para que o leitor busque pesquisar qual ou quais os outros fatores possivelmente afetaram esse rendimento nessa transição. Dessa forma, voltamos a questionar, o baixo rendimento dos alunos do 6º ano na disciplina de Matemática: Falta de motivação?

Referências e bibliografia

- Becker, F. (1995). Modelos pedagógicos e modelos epistemológicos. *Paixão de Aprender*, 5, 18-23. Porto Alegre.
- Bock, A., Furtado, O., & Teixeira, M. L. (1999). *Psicologias: uma introdução ao estudo de psicologia* (13ª edição reformulada e ampliada). São Paulo-SP: Saraiva. 3ª tiragem — 2001.

- Buzneck, J. A. (Org.). (2009). *A motivação do aluno: contribuições da psicologia contemporânea* (4ª ed.). Petrópolis, RJ: Vozes.
- Carvalho, M. F., Pereira, V., & Ataíde, S. P. (2010). *A desmotivação da aprendizagem de alunos de escola pública do ensino fundamental I: quais fatores envolvidos?* Centro de educação, UFPE.
- Coll, C. (2004). *Desenvolvimento psicológico e educação: Transtornos do desenvolvimento e necessidades educativas especiais* (2ª ed.). Porto Alegre: Artmed.
- Fita, E. C. (2003). *O professor e a motivação dos alunos. O que é e como se faz* (5ª ed.). São Paulo: Loyola.
- Guimarães, S. E. R. (2001). Motivação intrínseca, extrínseca e o uso de recompensas em sala de aula. In J. A. Buzneck, & E. Boruchovitch (Orgs.), *A motivação do aluno: contribuições da psicologia contemporânea* (pp. 37-55). Rio de Janeiro: Vozes.
- Huertas, J. A. (2014). *Motivação e desmotivação: desafios para os professores...* Disponível em: <http://calvadosc3sl.ufpr.br/ojs2/index.php/educar/> n.27 p.277-290; 2006. Acesso em: 01 de abr.
- Luna, I. (2008). *Como lidar com alunos desmotivados*. Acessado em: Site: <http://aldoluna.webnode.com/news/como-lidar-com-alunos-desmotivados/>
- Leite, C. (2007). Ensinar... e aprender. Construir notícias. *Construir*, 37, 30-49. nov./dez. Pernambuco.
- Lira, P. H. (2013). *A influência da relação professor-aluno na motivação/desmotivação à aprendizagem*. (Trabalho de Conclusão de Curso). 14f. Faculdade UnB Planaltina Licenciatura em Ciências Naturais, Brasília.
- Lüdke, M., & André, M. E. D. A. (2008). *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.
- Marinho, A.P., & Fiorelli, J.O. (2005). *Psicologia na fisioterapia*. São Paulo: Ateneu. Piletti, C. (1993). *Didática geral* (15ª ed.). São Paulo: Atual.
- Pozo, J. I. (2006). Motivação e desmotivação: desafios para os professores. *Educar*, 27, 277-290. Disponível em: <http://calvadosc3sl.ufpr.br/ojs2/index.php/>. Acesso em: 01 de abr. 2014.
- Riplinger, T., & Brancher, V. R. (2006). *A aprendizagem significativa e o ensino da matemática: algumas reflexões*. Rio Grande do sul. Acessado em: 06/06/14 site: www.unifra.br/.../matemática/A%20APRENDIZAGEM%20SIGNIFICATIVA%20E%20O%20E
- Souza, C (2009). Pressupostos epistemológicos da avaliação educacional. In J. Tapia, & E. C. A. Fita, *A Motivação em Sala de Aula: O que é, como se faz* (8ª ed., pp. 13-59). São Paulo: Edições Loyola.

Cambio de concepciones sobre la gestión del proceso enseñanza-aprendizaje

Luis Ángel **Bohórquez** Arenas
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
labohorqueza@udistrital.edu.co

Resumen

Pehkonen (2006) y Akinsola (2009) coinciden en señalar que *el problema sobre el cambio de las concepciones de profesores* es vigente y abierto en la investigación internacional sobre educación matemática. Teniendo en cuenta, entre otras cosas, este hecho en el marco del Doctorado Interinstitucional de Educación se formuló la tesis doctoral *Cambio de concepciones de un grupo de futuros profesores de matemática sobre su gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje en un ambiente de aprendizaje fundamentado en la resolución de problemas*, cuya investigación se realizó con estudiantes para profesor del curso de didáctica de la variación de sexto semestre de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (programa de formación de profesores de matemáticas Bogotá-Colombia). En esta comunicación se presentarán algunos resultados de esta investigación, los cuales muestran que los cambios están asociados primordialmente al carácter multifuncional de la gestión.

Palabras clave: Creencias, concepciones, cambios de concepciones, gestión.

Sobre los cambios de concepciones de profesores

Martínez (2003) encontró como resultado de sus investigaciones que existen numerosos informes de investigación que reportan éxitos en el cambio de concepciones y creencias de los profesores sobre el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. Uno de los primeros ejemplos son los estudios adelantados por Peterson, Fennema y Carpenter (1989), pues observaron importantes cambios en las decisiones sobre la instrucción de los profesores. Según estos autores, lograron que los profesores pasaran más tiempo durante la clase escuchando las explicaciones de sus estudiantes sobre las estrategias de resolución a los problemas y menos tiempo abordando actividades de memoria.

Por otro lado, Abreu, Bishop y Pompeu (1997) investigaron cómo los profesores cambiaron sus actitudes, creencias y conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas como resultado de su creciente involucramiento con la aproximación etnomatemática del currículum. Un resultado importante de este estudio es que los profesores consideraron que ellos debían enseñar matemáticas teniendo en cuenta que el conocimiento matemático podía ser discutido entre los profesores y los alumnos y que sus estudiantes deberían de ser capaces de analizar problemas y entender la estructura de los mismos.

D'Amore y Fandiño Pinilla (2004) centraron el estudio de los cambios sobre las concepciones asociadas a las matemáticas principalmente. Sin embargo, estos investigadores aportan en su estudio una caracterización de los cambios logrados por profesores en condiciones de formación (estudiantes para profesor), en tres ámbitos principalmente: concepciones sobre la matemática, concepciones sobre la didáctica de la matemática y concepciones sobre el papel del docente de matemáticas.

Para hacer evidentes los cambios, D'Amore y Fandiño Pinilla (2004) proponen un esquema de presentación que consiste en relacionar la concepción precedente (P) con la concepción sucesiva (S) declaradas por los estudiantes en un cuestionario, las frases tomadas directamente de las respuestas de los estudiantes, que eran alusivas a concepciones precedentes y sucesivas iban acompañada de un comentario (C) de los investigadores, que enfatizaba e interpretaba dicho cambio (p. 29).

Pehkonen (2006) aseguró que para estudiar el cambio de concepciones del profesor o del estudiante para profesor hay que tener en cuenta apreciaciones teóricas que consideran que algunas experiencias de formación parecen tener más conexiones que otras con el cambio a un nivel profundo (p. 83). Según este autor, la auto-reflexión parece ser un método poderoso para el cambio en el nivel de profundidad y presenta como ejemplo el trabajo de Hart (2002). Según Pehkonen (2006) cuando un profesor o estudiante para profesor es consciente de sus acciones y reflexiona sobre ellas, puede generar conciencia de sus propias creencias y concepciones, lo cual permite que se desarrollen cambios en éstas (p. 83).

Investigación sobre cambios de concepciones de un grupo de estudiantes para profesor sobre su gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje

Pehkonen (2006) y Akinsola (2009) señalan que el problema sobre el cambio de las concepciones de profesores es vigente y abierto en la investigación internacional sobre educación matemática. Este hecho, entre otras cosas, es tenido en cuenta para formular la tesis doctoral: *Cambio de concepciones de un grupo de futuros profesores de matemática sobre su gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje en un ambiente de aprendizaje fundamentado en la resolución de problemas*, cuya investigación se realizó con estudiantes para profesor del curso de didáctica de la variación de sexto semestre de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (programa de formación de profesores de matemáticas Bogotá-Colombia).

En este curso o espacio de formación de estudiantes para profesor, se propone a los estudiantes problemas matemáticos que les permitan aprender el concepto de variación y reflexionar sobre el aprendizaje de este concepto. Además, se busca que los estudiantes reflexionen sobre la posibilidad de la resolución de problemas como ambiente de aprendizaje y la manera como debe ser su gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje en este tipo de ambiente.

La gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje, según Llinares (2000) es la segunda fase en que se puede dividir la práctica de un profesor, en la cual se da la relación entre el problema propuesto y los estudiantes en el contexto aula. En esta fase, algunas de las tareas del profesor son específicas del contenido matemático y otras son de carácter general relacionadas con la organización de los estudiantes, el manejo del orden y la disciplina, las tareas propuestas, entre otros (Doyle, 1986).

En la investigación doctoral, se establecieron dos preguntas de investigación, sin embargo en esta comunicación los resultados presentados están asociados a la pregunta: ¿Qué cambios se

han producido en las concepciones de los estudiantes para profesor sobre su gestión del proceso de enseñanza aprendizaje en un ambiente fundamentado en la resolución de problemas?

Aspectos metodológicos

Esta investigación, como se mencionó anteriormente, se realizó con estudiantes para profesor del curso de didáctica de la variación de sexto semestre de la Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas. Este curso tuvo una duración de diez y seis semanas con una intensidad de siete horas de clase semanal. El número de estudiantes en el curso fue de treinta y seis, los cuales dado el tipo de trabajo que se realizó en este espacio de formación se organizaron en grupos de cuatro personas.

Recolección de la información. Teniendo en cuenta la importancia de disponer de diversos instrumentos de recolección de información para posibilitar una triangulación de los resultados que den respuesta a la pregunta de investigación y a los propósitos de la investigación, se utilizaron tres medios de recolección de información.

El primer medio para recolectar información consistió en aplicar un instrumento denominado “invitación a declarar sobre las concepciones de la gestión en el aula”, el cual se basa en el instrumento diseñado por D’Amore y Fandiño Pinilla (2004). Esta es la solicitud que tenía de este instrumento:

Apreciado estudiante:

Cordialmente me dirijo a ti para solicitarte que en respuesta a esta comunicación describas cuál consideras debe ser tu gestión como futuro profesor en un ambiente de aprendizaje que se fundamente en la resolución de problemas. Es para mi importante que me respondas con la mayor honestidad, de la manera más sincera y explícita posible. En tu respuesta puedes hacer alusión a las acciones que efectuarías en la clase, a cómo organizar el grupo de estudiantes, a las orientaciones que harías a los mismos o cualquier otro aspecto que asumas hace parte de la descripción de la gestión, siempre teniendo en cuenta que estamos en un ambiente de aprendizaje específico que se fundamenta en la resolución de problemas.

Muchas gracias por tu atención,

Ángel Bohórquez Arenas

Este instrumento lo presentaron veintiséis estudiantes del curso en dos oportunidades: al iniciar y al finalizar el curso. Es de aclarar que en la segunda aplicación del instrumento, se solicitó que declarasen no sólo sobre las concepciones de su gestión del proceso enseñanza-aprendizaje sino también sobre los cambios que ellos consideraron se dieron en la mismas. De manera similar a lo solicitado por D’Amore y Fandiño Pinilla (2004) en su investigación. El segundo medio para recolectar información fueron las entrevistas semi-estructuradas y el tercer medio de recolección de información fueron las grabaciones de audio y video de las interacciones de los pequeños grupos.

Análisis de la información. Para dar respuesta a la pregunta ¿Qué cambios se han producido en las concepciones de los estudiantes para profesor sobre su gestión del proceso de enseñanza aprendizaje en un ambiente fundamentado en la resolución de problemas?, se seleccionó, en primera instancia, las respuestas a la primera aplicación del instrumento “invitación a declarar sobre las concepciones de la gestión en el aula” y las entrevistas semi-estructuradas, para construir una primera viñeta que permitiera establecer las concepciones

iniciales de los estudiantes, las cuales se denominaron precedentes (P). Esta primera viñeta se presentará en esta comunicación.

En segunda instancia, teniendo en cuenta las respuestas obtenidas en la segunda aplicación del instrumento “invitación a declarar sobre las concepciones de la gestión en el aula” y las entrevistas semi-estructuradas se construyó una segunda viñeta para presentar las concepciones finales de los estudiantes con relación a la gestión. Finalmente, se pusieron en relación los datos obtenidos en la viñeta uno y dos para determinar qué cambios se han dado en las concepciones.

Resultados

Primera viñeta

Concepciones iniciales sobre la gestión del proceso enseñanza-aprendizaje en un ambiente fundamentado en la resolución de problemas de los estudiantes para profesor.

Los datos para la elaboración de este análisis proceden de la primera sesión presencial en donde veintiséis estudiantes respondieron al instrumento “invitación a declarar sobre las concepciones de la gestión en el aula” y de entrevistas semi-estructuradas realizadas posteriormente a los estudiantes para profesor, teniendo en cuenta las respuestas que presentaron al instrumento inicial.

En las respuestas de los veintiséis estudiantes para profesor se observó que ocho de ellos centran su gestión como profesores, casi exclusivamente, en la organización de grupos de trabajo. Doce de los estudiantes, además de la importancia de la conformación de grupos de trabajo, consideraron vital en su gestión como profesores asumir el rol de guía, acompañante u orientador. Sin embargo, se encuentran diferencias muy marcadas en el significado que atribuyen a este rol y al significado de estos sustantivos. Finalmente, las respuestas de los seis estudiantes restantes se pueden dividir en cuatro pequeños grupos. Dos estudiantes responden que su gestión no se fundamentaría en un ambiente de resolución de problemas; dos estudiantes hablan de su experiencia personal con la resolución de problemas y no hablan de gestión; un estudiante centra su atención sobre las características del problema; y por último un estudiante que habla de las normas de comportamiento que debe exigirse en clase.

En las respuestas de los ocho estudiantes que consideran que la gestión del profesor se centra en la organización de grupos de trabajo, se aprecia que dan gran importancia al número de integrantes de dichos grupos. Todos proponen un máximo de cuatro integrantes y algunos consideran necesario establecer las características de los miembros del grupo. Este hecho se puede apreciar en las declaraciones del estudiante E2.

E2: Como futuro profesor en un ambiente de aprendizaje que se fundamente en la resolución de problemas, yo organizaría al grupo de estudiantes, de tal manera que todos tuvieran un grupo de trabajo de mínimo 2 personas máximo 4 para que los integrantes del [grupo] puedan debatir sobre el tema que se este trabajando.

Se establece de la respuesta de E2 que este estudiante limita la gestión del profesor del proceso enseñanza-aprendizaje a la organización de grupos de trabajo. Se observa en el escrito que el estudiante no considera como parte de la gestión la interacción del profesor con los estudiantes, la formulación de preguntas y la gestión del conocimiento matemático, entre otras cosas. Una respuesta que también centra la gestión del profesor en la organización de grupos es la del estudiante E4, que se presenta a continuación:

E4: Entonces, las acciones que efectuaría en la clase es la organización de los grupos, máximo 4, con un líder (en este caso el niño indisciplinado) para que adquiriera una responsabilidad. Haría una prueba diagnóstica (individual y grupal) para saber el conocimiento que tendrían los estudiantes y por último, y necesario llevaría a cabo el manejo de cuaderno resolutor por parte de los estudiantes, necesario para la organización de ideas individuales como grupales.

En el escrito anterior, E4 considera en su gestión del proceso enseñanza-aprendizaje de gran importancia que el profesor organice grupos de trabajo, teniendo en cuenta una característica del miembro líder. Además, este estudiante para profesor también presenta como acciones propias de su gestión, la realización de pruebas diagnóstica y la solicitud a sus estudiantes de llevar un cuaderno en donde éstos registren lo trabajado en clase.

En la descripción que hace E4, él considera que la gestión del profesor está asociada sólo con la organización de los estudiantes y la solicitud de llevar un cuaderno por parte de los mismos. Es decir, este estudiante asocia la gestión del proceso enseñanza – aprendizaje con la organización del aula y con otras actividades que permitan tener el control de la misma. Esta forma de considerar la gestión coincide con dos de las categorías expuestas por Davis y Thomas (1992) que pueden enmarcarse dentro de las tareas del profesor en la fase de gestión de carácter general establecidas por Llinares (2000).

Ahora bien, a pesar de que E4 menciona en su descripción la evaluación diagnóstica para determinar los conocimientos de sus futuros estudiantes, no hace alusión a la gestión del contenido matemático (Llinares, 2000) por parte del profesor teniendo en cuenta los resultados de esta evaluación. Esto se confirma en respuesta que E4 da en la entrevista sobre este aspecto.

I: Tu escribiste que una de las acciones que efectuarías como profesor sería aplicar una prueba diagnóstica. ¿Qué utilidad tendría en el desarrollo de tus clases, los resultados de dicha prueba?

E4: Como lo mencioné en mi escrito me permitiría saber el conocimiento de mis estudiantes sobre lo que pienso trabajar, eso por ejemplo me permitiría organizar los grupos de forma que no queden tan cargados. O sea que no queden los que más saben en un solo grupo, sino que queden repartidos los buenos con los que no lo son tanto.

En la respuesta anterior se observa como E4, en lugar de hacer alusión a las posibilidades de gestión del conocimiento matemático del profesor conociendo los resultados de la evaluación diagnóstica, centra nuevamente su atención en la organización de los grupos de trabajo. Esto es, asume la gestión en el sentido de (Doyle, 1986), organización de los estudiantes, el manejo del orden y las tareas propuestas.

Teniendo en cuenta que las respuestas de los otros seis estudiantes del primer grupo son de características similares a las realizadas por E2 y E4, es posible inferir que este grupo de estudiantes está considerando la gestión del proceso de enseñanza – aprendizaje como aquella asociada a las tareas de carácter general. Esto se debe, en esencia, a que consideran la gestión del profesor básicamente como aquella en donde el profesor organiza grupos de trabajo dando instrucciones sobre cómo conformar los grupos y sobre la necesidad de registrar la información.

Como se mencionó anteriormente en esta viñeta, en las descripciones sobre su gestión del proceso de enseñanza- aprendizaje que hacen los doce estudiantes para profesor, se destaca el hecho de que éstos no solo hicieron referencia a la conformación de grupos de trabajo sino que también consideraron importante asumir el rol de guía, acompañante u orientador. Tres de estos

estudiantes, consideraron que el rol de guía por parte del profesor consistiría en esencia en dirigir a sus estudiantes de tal forma que tomen el camino de solución que desea el profesor y no otros caminos que puedan surgir de la interacción de estos estudiantes con el problema. Esto se puede apreciar en la respuesta del estudiante E10.

E10: ...siempre sería guía y responsable de que el trabajo dirigido vaya por el camino que es y que si se desvía sea para retroalimentar la clase.

E10 amplía sus consideraciones frente a la afirmación anterior en la entrevista que se presenta a continuación:

I: En tu descripción de la gestión escribiste que siempre serías guía y responsable de que el trabajo vaya por el camino que es, ¿cuáles serían tus acciones para lograrlo?

E10: Mmm... pues si yo veo que un estudiante o un grupo están cometiendo errores o van por un lado que no debe ser cuando tratan de solucionar el problema, les diría que esa no es la manera. Por ejemplo, les guiaría con exposiciones con material concreto o software para vean su error mostrando la respuesta correcta. Eso los retroalimentaría.

I: ¿Entonces tu forma de guiarlos sería presentando la respuesta correcta al problema, en caso de ser necesario?

E10: Si, es que para mi la guía del profesor consiste en explicar el camino de solución o resolver el problema y no dejar que los estudiantes cometan errores y se pierdan en la solución.

Es posible observar en las respuestas de E10 que el estudiante está entendiendo la guía del profesor como aquella en donde éste dice a los estudiantes cómo resolver el problema que están enfrentando. Incluso asegura que dicha guía podría estar dirigida a presentar la respuesta correcta al problema. En otras palabras, en esta gestión la guía del profesor consiste en presentar maneras de dar solución al problema o las soluciones para que sus estudiantes imiten este proceso y no a una gestión en donde la guía del profesor consista, entre otras cosas, en hacer preguntas que permitan visualizar un camino de solución por parte del estudiante (Lesh & Doerr, 2003).

Por otro lado, otros siete estudiantes de los doce que mencionan la conformación de grupos y la guía del profesor como parte de la gestión, consideran que esta orientación a los estudiantes consiste básicamente plantear preguntas a los estudiantes y no en dar respuestas al problema propuesto. En esencia, describen la guía del profesor como aquella en donde el docente, por medio de preguntas oportunas, permite a los estudiantes comprender tanto el enunciado como las posibles soluciones al mismo. Esto se puede apreciar en las declaraciones de la estudiante E12.

E12: Mi gestión como futura docente en un ambiente de aprendizaje que se fundamenta en la resolución de problemas, sería hacer énfasis en los equipos de trabajo... teniendo en cuenta que las orientaciones no deben ser dar respuestas al problema, sino procurar realizar al grupo de trabajo más preguntas, para que a partir de ellas, poco a poco avancen y vean regularidades o salidas al problema propuesto.

En la respuesta de E12 se aprecia que la gestión del profesor en el proceso enseñanza-aprendizaje se centra en dos aspectos, la conformación de los grupos y la guía por parte del docente. En relación con la conformación de los grupos, E12 no hace ningún tipo de aclaración, ni tampoco explica el por qué considera que esa debe ser la manera para organizar a los estudiantes. Ahora bien, con relación a la guía del profesor sugerida por E12, es posible inferir que este estudiante, en alguna medida, coincide con lo expuesto por Lesh y Doerr (2003) en cuanto a la necesidad de que el profesor genere preguntas que permitan determinar a los

estudiantes los caminos de solución del problema. Mira mi nota precedente Sin embargo, es la única función que establece a la guía del profesor a diferencia de los autores mencionados. Esto se confirma en la respuesta que el estudiante da en la entrevista semi-estructurada.

I: Tú escribes que la orientación del profesor consiste en realizar al grupo de trabajo más preguntas que permitan avanzar a los estudiantes en la solución al problema, ¿Hay otra cosa que pueda hacer el profesor en esta orientación?

E12: Realmente creo que no, esa función sería suficiente para mi, hacerle buenas preguntas a los muchachos para que se puedan orientar a partir de ellas.

Sobre la afirmación de E12, Lesh y Doerr (2003) manifiestan que un riesgo que se corre con esta idea de guía, es que los maestros normalmente consideran que su trabajo se basa en diseñar "técnicas de interrogatorio" cuidadosamente secuenciadas para llevar a los estudiantes a pensar de la forma en que el profesor quiere que ellos piensen (p. 57).

Finalmente los dos estudiantes restantes de estos doce, aunque mencionan como parte de la gestión del profesor la guía y orientación que éste puede hacer a sus estudiantes, no aclaran en qué consiste. Este hecho, se puede ver en las afirmaciones del estudiante E33.

E33: Gracias al acompañamiento y guía brindada a los estudiantes o grupos de trabajo, el profesor conoce los avances de grupo, por consiguiente [puede] proponer o generar formas de mostrar los avances de los grupos más avanzados para que sus progresos sirvan a los demás grupos.

En la entrevista sobre la guía del profesor este estudiante responde:

I: En tu respuesta mencionas como parte de la gestión el acompañamiento y guía ofrecida por el profesor a los estudiantes o grupos de trabajo, ¿podrías explicar en qué consiste esta guía o acompañamiento?

E33: Como lo dije por escrito en esencia la guía o el acompañamiento del profesor permite conocer de cerca los avances de los estudiantes o de los grupos y con esa información el profesor puede organizar sesiones para que los grupos avanzados muestren a los demás cómo van. En otras palabras, creo que más que guía sería un acompañante y así tendría información de primera mano.

En la respuesta de E33 se aprecia que el estudiante no precisa con claridad en qué consiste la guía del profesor, incluso en su respuesta a la entrevista diera la impresión de que la función del profesor se limita a la observación de los integrantes de los grupos y sus discusiones, pero sin hacer algún tipo de orientación.

Como se mencionó al iniciar esta viñeta, seis estudiantes de los veintiséis que respondieron a la carta no hicieron alusión ni a la conformación de grupos ni a la guía del profesor al referirse a la gestión del profesor del proceso enseñanza-aprendizaje. Uno de estos estudiantes centró su atención sobre el tipo de problema que debe proponer el profesor y la utilidad de la resolución de problemas. La respuesta de este estudiante se presenta a continuación:

E1: La gestión del profesor debe ser complejizar los problemas para que estos permitan cuestionar la manera en la que el estudiante desarrolle su proceso de aprendizaje de un concepto o algún conocimiento matemático... Pensaría que la resolución de problemas pudiera ser un instrumento en la cual el estudiante estructure y moldea el conocimiento por medio de su propio actuar, de tal manera que el profesor pueda estar pendiente de su proceso de aprendizaje.

En la respuesta de E1 se aprecia que el estudiante, cuando habla de gestión, hace alusión al diseño de los problemas por parte del profesor, mencionando que una característica fundamental de estos problemas es que permiten el aprendizaje de los conceptos matemáticos. Esta forma de ver la gestión del profesor está asociada en realidad con la fase preactiva que menciona Jackson (1975) o a la fase de planificación que menciona Llinares, (1991). Es decir en la fase en la que el profesor planea qué va enseñar y cómo enseñarlo.

Por otro lado, otro estudiante del grupo de seis considera que la gestión del profesor está asociada directamente con la formulación de normas por parte del docente y las repercusiones con relación al incumplimiento de las mismas. La siguiente es la respuesta de este estudiante:

E11: Yo considero que el trabajo de resolución de problemas debe enmarcarse en una correcta disposición del grupo, hacer una breve inducción al tema de trabajo, puede ser con una dinámica de grupo...

Luego, una formulación de normas de clase y su respectiva corrección a su incumplimiento, evitan dispersión del grupo y por lo tanto ayuda a un trabajo bien elaborado.

En la respuesta de E11, se infiere que las tareas del profesor asociadas a la gestión por este estudiante son de carácter general (Llinares, 2000). Es decir, aquellas en donde la gestión del profesor se concentra en la organización de los estudiantes, el manejo del orden y la disciplina, la formulación de normas de buen comportamiento (Doyle, 1986). En la entrevista, el estudiante reitera su posición inicial e involucra la necesidad de que los estudiantes estén organizados al interior del aula de clase en orden y sin hacer indisciplina.

Ahora bien, de este grupo de seis estudiantes que no involucran en sus caracterizaciones de gestión del proceso enseñanza-aprendizaje ni la conformación de grupos ni la guía del profesor, hay dos estudiantes que en sus respuestas establecen que su metodología de clase no se fundamentaría exclusivamente en la resolución de problemas. De esta manera, la gestión que establecen se centra básicamente en la exposición por parte del profesor. En ambos casos llaman a este tipo de acción del profesor “clase tablereada”. La respuesta de uno de estos estudiantes es la siguiente:

E34: Teniendo en cuenta mi experiencia en las prácticas... y sobre todo la metodología llevada desde el eje de problemas, considero que al momento de plantear una clase bajo la metodología de resolución de problemas, no haré uso excesivo de ésta... No omitiría “clases tablereadas” (en las que la resolución de problemas no cabe) y no dejaría atrás aspectos del uso de la memoria y la ejercitación en matemáticas.

En la respuesta de E34 se aprecia que, dada su experiencia previa, él prefiere no acudir plenamente a la resolución de problemas y por esa razón, cuando hace referencia a su gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje, básicamente la está entendiendo como aquella en donde el profesor presenta los contenidos de manera magistral en el tablero (“clases tablereadas”). Con esta forma de actuar del profesor, se puede suponer una organización de los estudiantes e incluso el tipo de interacción que tendrían con el profesor.

Finalmente los dos últimos estudiantes, de los seis que no asociaron la gestión del profesor a la organización de grupos ni a la guía del profesor, aprovecharon la aplicación de este instrumento para exponer las razones por las cuales no están de acuerdo con la resolución de problemas y no hicieron referencia a la gestión. Esto mismo ocurrió en la entrevista. En esencia hicieron referencia a las dificultades personales para aprender y nunca en sus descripciones se pensaron como futuros profesores.

Como resultado de la primera aplicación del instrumento “invitación a declarar sobre las concepciones de la gestión en el aula” se puede observar en lo expuesto en esta viñeta que los estudiantes para profesor conciben la gestión del proceso enseñanza –aprendizaje en un ambiente fundamentado en la resolución de problemas, de una manera muy restringida, pues o sólo hacen alusión a una de las tareas de carácter general de las que habla Doyle (1996) (organización de los estudiantes por grupos) o sólo a esta única tarea de carácter general le agregan la guía del profesor a los estudiantes desde dos perspectivas, aquella donde el profesor dice explícitamente cómo resolver el problema o aquella en donde la guía corre el riesgo de centrarse en el diseño de "técnicas de interrogatorio" cuidadosamente secuenciadas para llevar a los estudiantes a pensar de la forma en que el profesor quiere que ellos piensen (Lesh & Doerr, 2003).

En esencia, se aprecia en las respuestas de los estudiantes una visión de la gestión del profesor en el proceso de enseñanza-aprendizaje que no puede ser multifuncional, pues a lo más se presentan dos acciones del profesor en este proceso.

Segunda Viñeta

Concepciones sobre la gestión del proceso enseñanza-aprendizaje en un ambiente fundamentado en la resolución de problemas de los estudiantes para profesor al finalizar el trabajo en el espacio de formación.

Los datos para la elaboración esta viñeta proceden de la última sesión de clase presencial en donde veintiocho estudiantes respondieron al instrumento “invitación a declarar sobre su cambio de concepciones sobre la gestión en el aula” y de entrevistas semi-estructuradas realizadas posteriormente a los estudiantes para profesor, teniendo en cuenta las respuestas que presentaron al instrumento inicial.

En las respuestas de los veintiocho estudiantes para profesor se observó que veinte estudiantes presentan su gestión como profesores, como aquella en la que el docente tiene a cargo múltiples funciones, entre las cuales se destacan la interacción con los estudiantes, el manejo del tiempo, la organización de las discusiones, diseño de problemas, entre otras. Los ocho estudiantes restantes, presentan respuestas que se pueden dividir en tres grupos. Un primer grupo (dos estudiantes), que hacen referencia a la gestión del profesor como aquella en la que el profesor tiene varias obligaciones, pero centran su atención en una sola actividad.

Por otro lado se identifica un segundo grupo (tres estudiantes) que centran su descripción sobre las dificultades que tienen al resolver problemas y al gestionar una clase fundamentada en esta metodología. Finalmente el tercer grupo (tres estudiantes) lo conforman aquellos estudiantes para profesor que no dan respuesta a lo preguntado en el instrumento.

En las respuestas de los veinte estudiantes, que consideran que la gestión del profesor es aquella en donde el docente desempeña múltiples funciones, se aprecia que la interacción del profesor con cada uno de sus estudiantes y con el grupo adquiere mayor importancia. Asimismo, establecen de vital importancia el tiempo que dedica el profesor a asesorar a los estudiantes y el ambiente de trabajo que puede generar. Este hecho, se puede apreciar en las declaraciones del estudiante E2.

E2: Este espacio me ha servido para darme cuenta cómo se desarrolla la clase teniendo en cuenta la resolución de problemas, me di cuenta que es un proceso arduo en el cual hay que tener muy claro hasta dónde se quiere que los estudiantes lleguen... Hay que trabajar más

asesorías con los estudiantes... Propondría establecer asesorías con los grupos con cierto tiempo, tiempo límite para que todos los grupos tuvieran asesoría.

En la respuesta de E2, como se mencionó inicialmente, se aprecia que hace alusión explícita al control sobre el tiempo que debe tener el profesor de forma que pueda asesorar a cada uno de los grupos. En esencia, E2 considera como parte fundamental de la gestión del profesor la interacción de éste con sus estudiantes. Además, este estudiante considera que la gestión es un proceso arduo en donde el profesor ha establecido con anterioridad propósitos de formación. Asimismo, aunque no lo hace explícito se puede apreciar que la gestión para este estudiante también está relacionada con la organización de los estudiantes, pues hace referencia directa al trabajo individual y grupal. De esta manera, se observa que la idea de gestión del profesor por parte de E2 involucra múltiples acciones del mismo. Estas acciones del profesor presentadas por E2 coinciden con algunas de las expuestas por Linares (2000) sobre la gestión del profesor.

Dentro de la múltiples acciones que realiza un profesor en la gestión del proceso enseñanza-aprendizaje otros futuros profesores consideran relevante la organización de los estudiantes en grupos, la guía del profesor por medio de preguntas, ya sean generales o individuales y el ambiente de clase que se puede al tener en cuenta estas acciones del profesor. Esto se puede apreciar en la respuesta de E4.

E4: Es muy notable que se ha dado un cambio a raíz del curso...se han puesto en acción diversas cosas, haciendo un ambiente de clase y de resolución de problemas más efectivo y llamativo. Tanto así que copiaría: el trabajo en grupo, la guía que le da el maestro a los estudiantes, las preguntas generales, individuales precisas que hacen que los estudiantes generen habilidades de pensamiento y puedan establecer soluciones.

Se observa que E4 las acciones asociadas a la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje que debe imitar son aquellas en donde el profesor organiza a sus estudiantes por grupos, guía a los estudiantes estableciendo preguntas generales e individuales. Un aspecto de vital importancia es que el estudiante hace alusión una al tipo de preguntas que el profesor debe hacer y lo que debe lograr con las mismas. Es decir, este estudiante da muestras de comprender que las preguntas que generan aprendizaje son importantes en la gestión del profesor, lo cual se ratifica en la entrevista:

I. En tu respuesta a la carta dices que has evidenciado cambio en la concepción sobre tu gestión como profesor en un ambiente de aprendizaje fundamentado en la resolución de problemas y que ese cambio se debe a diversas cosas que se han puesto en acción en el curso, ¿a qué cosas te refieres?

E4. Bueno, es que yo había trabajado en otras asignaturas, antes a esta, por resolución de problemas y la verdad me parecía un trabajo muy aburridor. Era un trabajo solitario (no por compañeros sino por poca ayuda del profesor). En cambio en este curso el rol del profesor es muy importante, pues él plantea el problema pero uno termina creyendo que es de uno. Además, el profesor en clase habla con los grupos y allí él pregunta y uno también le pregunta, sólo que las preguntas que el profesor hace son duras y cuando se discuten las respuestas con los demás, se da uno cuenta que está resolviendo sus propias dudas.

I. ¿Qué características tienen las preguntas que hace el profesor?

E4: Bueno, yo creo que lo bueno de sus preguntas, es que tienen en cuenta lo que uno acaba de hablar del problema, mmm... Mejor de la parte matemática de la solución del problema, si uno dice o decimos: profe la ecuación es tal, él escucha y dice si esa es la ecuación, ¿cuál

sería el valor de la resistencia (por ejemplo) cuando el diámetro es tanto... y fijo para ese valor la ecuación no tiene sentido o no funciona. Por ese estilo son sus preguntas, tienen en cuenta lo que hacemos y nos hace ver las cosas que no funcionan o que podrían funcionar mejor. Eso es precisamente lo que deseo hacer en mis clases.

En las respuestas de E4 se observa que en su concepción con relación a la gestión, además de considerarla multifuncional, da mucha relevancia a la generación de preguntas. En particular, hacen alusión a la gestión del conocimiento matemático a partir de la formulación de preguntas por parte del profesor.

Con relación a los ocho estudiantes restantes, se observó que las respuestas de dos (E11 y E16) estudiantes hacen referencia a la gestión del profesor como aquella en la que el profesor tiene varias obligaciones, pero centran su atención en una sola actividad. Los estudiantes E34, E18 y E25 se centran en hablar sobre las dificultades que tienen al resolver problemas y al gestionar una clase fundamentada en esta metodología y finalmente los estudiantes E1, E23 y E31 lo conforman aquellos estudiantes para profesor que no dan respuesta a lo preguntado en el instrumento.

Teniendo en cuenta la situación anterior se concluyó que hubo cambios en las concepciones de los estudiantes para profesor sobre su gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje en un ambiente fundamentado en la resolución de problemas. En particular, en su mayoría consideraron que era multifuncional y que la gestión del conocimiento matemático es fundamental en este tipo de ambientes.

Referencia bibliográficas

- Abreu, G. J., Bishop, A., & Pompeu, G. (1997). What children and teachers count as mathematics. In P. Bryant, & T. Nunes (Eds.), *Learning and teaching mathematics. An international perspective* (pp. 223–264). Boston: Psychology Press.
- Akinsola, M. K. (2009). Comparison of prospective and practicing teachers' mathematics efficacy beliefs regarding mathematics teaching and classroom management. In J. Maaß, & W. Schlöglmann (Eds.), *Beliefs and Attitudes in Mathematics Education. New Research Results* (pp. 119–130). Rotterdam: Sense Publishers.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2004). Cambios de convicciones en futuros profesores de matemática de la escuela secundaria superior. *Welles.dm.unibo.it*, 58, 25–43. Retrieved from [http://welles.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/534 Cambios de convicciones.pdf](http://welles.dm.unibo.it/rsddm/it/articoli/damore/534%20Cambios%20de%20convicciones.pdf)
- Davis, G. A., & Thomas, M. A. (1992). *Escuelas eficaces y profesores eficientes*. Madrid: La Muralla.
- Doyle, W. (1986). Classroom organization and management. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp. 392–431). New York: Macmillan Publishers.
- Hart, L. C. (2002). Preservice teachers' beliefs and practice after participating in an integrated content/methods course. *School Science and Mathematics*. Retrieved from <http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.1949-8594.2002.tb18191.x/full>
- Jackson, P. (1975). *La vida en las aulas* (Tercera). Madrid: Ediciones Morata.
- Lesh, R. A., & Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In R. A. Lesh, & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics teaching, learning, and problem solving* (pp. 3–34). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

- Lesh, R., & Doerr, H. (2003). *Beyond constructivism*. (R. Lesh & H. M. Doerr, Eds.)... *thinking and learning* (p. 277). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates. Retrieved from <http://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/10986065.2003.9680000>
- Llinares, S. (1991). *La formación de profesores de matemáticas*. Sevilla: GIEM, Universidad de Sevilla.
- Llinares, S. (2000). Secondary school mathematics teacher's professional Knowledge: A case from the teaching of the concept of function. *Teachers and Teaching: Theory and Practice*, 6(1), 41–62.
- Martínez Silva, M. (2003). Concepciones sobre la enseñanza de la resta: un estudio en el ámbito de la formación permanente del profesorado. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*. Universidad Autónoma de Barcelona.
- Pehkonen, E. (2006). What Do we know about teacher change in Mathematics? In L. Häggblom, A.-S. Røj-Lindberg, & L. Burman (Eds.), *Kunskapens och lärandets villkor. Festskrift tillägnad professor Ole Björkqvist Vol 1* (pp. 77–87). Vasa: Åbo Akademi, Pedagogiska fakulteten, Specialutgåva.
- Peterson, P. L., Fennema, E., & Carpenter, T. P. (1989). Teachers' Pedagogical Content Beliefs in Mathematics. *Cognition and Instruction*, 6(1), 1.

Características dos Três Mundos da Matemática que emergem na resolução de um problema de proporcionalidade direta

Maria Elisa Esteves Lopes **Galvão**
Universidade Anhanguera de São Paulo
Brasil

elisa.gal.meg@gmail.com

Vera Helena Giusti **de Souza**
Universidade Anhanguera de São Paulo
Brasil

verahgsouza@gmail.com

Ana Maria Pereira Pinto **Poggio**
Universidade Anhanguera de São Paulo
Brasil

anapoggio@gmail.com

Resumen

Apresentam-se os resultados de uma investigação sobre as características dos Três Mundos da Matemática que emergem na resolução de um problema de proporcionalidade direta, com alunos do Ensino Médio. A pesquisa fundamentou-se nas ideias de Definição de Conceito e Imagem de Conceito de Tall e Vinner e dos Três Mundos da Matemática de Tall e buscou-se resposta para a questão: “*Com que características, entres formais, simbólicas e corporificadas, emergem as primeiras ideias de um grupo de alunos do último ano do Ensino Médio diante de uma questão que envolve proporcionalidade direta?*”. Aplicou-se um questionário a alunos do final do Ensino Médio (17-18 anos de idade) de uma escola pública de São Paulo, Brasil e verificou-se que as primeiras ideias que emergiram apresentam características corporificadas ou corporificadas formais, ligadas à “regra de três” como um procedimento que não faz parte do pensamento proporcional.

Palavras-chave: proporcionalidade direta, Três Mundos da Matemática, características.

Introdução

Consideramos que o conceito¹ de proporcionalidade é relevante por sua aplicabilidade no contexto matemático e em problemas práticos, por todas as ideias que lhe são subjacentes e por dar sustentação para muitos tópicos da Matemática, da Física e de outras áreas. Podemos considerá-lo como um possível fio condutor que passa pelos vários níveis de escolaridade, nos estudos de fração, semelhança, regra de três, porcentagem, grandezas direta e inversamente proporcionais, no Ensino Fundamental (6 a 14 anos de idade), atravessa o Ensino Médio (15 a 17 anos de idade), em problemas que envolvem razão e proporção, semelhança, representação gráfica de funções que relacionam grandezas diretamente proporcionais ou inversamente

¹ Neste trabalho, usamos a palavra *conceito* para designar uma *definição formal*, aceita pela comunidade matemática como tal.

proporcionais e tem aplicações no Ensino Superior, no estudo de objetos matemáticos como função e derivada, tanto em Matemática como em outros componentes curriculares. Com a constatação da importância do conceito de proporcionalidade, entendemos que o ensino de Matemática da Educação Básica deve contemplar situações que possibilitem sua efetiva aprendizagem e perguntamo-nos se o conceito de proporcionalidade, direta ou inversa, permanece com os alunos, depois de terem passado pelo seu ensino, e como as aplicam.

Lesh, Post e Behr (1988) consideram que a aprendizagem de proporcionalidade deve ser vista como um dos principais objetivos do ensino de Matemática, argumentando que o raciocínio proporcional abarca toda a Aritmética e representa o alicerce da Matemática dos anos seguintes

Vemos o raciocínio proporcional como um conceito fundamental. De um lado, é o ponto culminante da Aritmética das crianças no 1º ciclo do Ensino Fundamental; de outro, é a pedra fundamental de tudo o que se segue (Lesh; Post e Behr, 1988, p. 94, tradução nossa).

Em outra pesquisa, Post, Behr e Lesh (1995)² ressaltam a importância do raciocínio proporcional no aprendizado de Álgebra e apontam que, até 1988, eram considerados capazes de raciocinar proporcionalmente aqueles que respondiam corretamente a problemas de valor ausente - em que são conhecidos três valores e deseja-se encontrar o quarto - em situações consideradas numericamente difíceis, envolvendo números não inteiros. Para estes pesquisadores, esta é uma visão limitada, pois estes problemas prestam-se apenas a soluções algorítmicas. Post, Behr e Lesh (1995) apresentam três razões da importância do raciocínio proporcional no aprendizado de Álgebra: a representação algébrica das proporções; a igualdade entre duas razões; e os diferentes modos de representação, como tabelas, gráficos, símbolos, desenhos e diagramas, que são essenciais não apenas na Álgebra, mas também em outras áreas da Matemática. Acrescentam ainda que, para raciocinar proporcionalmente, um indivíduo precisa ter o domínio de vários conceitos sobre os números racionais, tais como ordem e equivalência, relação entre a unidade e suas partes, interpretação de uma razão e questões envolvendo a divisão. Concluem que é preciso

ter noções suficientemente sólidas para não se deixar afetar por números grandes ou 'complicados' ou pelo contexto em que se insere o problema. (...) a pessoa precisa ser capaz de distinguir entre situações proporcionais e não proporcionais. Isso tem implicações diretas para o ensino (Post, Behr & Lesh, 1995, p. 91).

Sierpiska (1992) traz à tona outra dificuldade associada ao entendimento da ideia de proporcionalidade e que, segundo ela, constitui-se em um obstáculo epistemológico, pois são

formas de compreensão baseadas em alguns esquemas inconscientes de pensamento, adquiridos culturalmente ou em crenças não questionadas sobre a natureza da matemática e sobre as categorias fundamentais, tais como número, espaço, causa, probabilidade, infinito, ... inadequados em relação à teoria atual ³ "(Sierpiska, 1994, p. xi, tradução nossa).

Nessa pesquisa, Sierpiska categoriza dezesseis obstáculos epistemológicos associados ao conceito de função e o de número 9 é especialmente ligado à ideia de proporcionalidade: "(Um

² Proportionality and the Development of Prealgebra Understandings foi publicado em 1988 no *The Idea of Algebra K-12: Yearbook* National Council of Teachers of Mathematics (pp. 78-90) pela editora A. Coxford & A. Shulte.

³ ways of understanding based on some unconscious, culturally acquired schemes of thought and unquestioned beliefs about the nature of mathematics and fundamental categories such as number, space, cause, chance, infinity, ... inadequate with respect to the present day theory (Sierpiska, 1994).

esquema inconsciente de pensamento) *Proporção é uma forma privilegiada de relação*”⁴ (Sierpinska, 1992, p. 43, tradução nossa). Observou que “há, na proporcionalidade, uma espécie de simplicidade, de obviedade, que se impõe sobre nós, às vezes até mesmo contra os fatos... pelo menos em pequenos intervalos” (Grize, 1968, p. 171, apud Sierpinska, 1992, p. 42). Como a “lei algébrica” não aparece explicitamente na definição formal, isso pode ser considerado como um obstáculo e podemos afirmar que todos os sujeitos o enfrentam, o que explicaria o equívoco em definir uma relação como de proporcionalidade direta “quando duas grandezas aumentam” ou de proporcionalidade inversa “quando uma variável aumenta e a outra diminui” ou mesmo em considerar sempre proporcional uma relação entre duas grandezas.

No Brasil, segundo as orientações curriculares, o desenvolvimento do raciocínio proporcional é um dos objetivos do ensino de Matemática, sendo muito valorizado, por ser uma ideia Matemática fundamental e ainda se recomenda

resolver situações-problema que envolvam a variação de grandezas direta ou inversamente proporcionais, utilizando estratégias não-convencionais e convencionais, como as regras de três (Brasil, 1998, p. 82).

Miranda (2009) propôs-se a fazer uma revisão sistemática de pesquisas brasileiras sobre o pensamento proporcional, para responder a pergunta “*Quais questões têm sido colocadas nas dissertações e teses do Estado de São Paulo sobre o tema?*” (Miranda, 2009, p.15). Encontrou duas: a de Ruiz (1985), que trabalhou com atividades para introduzir o conceito de proporcionalidade, com alunos do Ensino Fundamental e a de Perotti (1999), que trabalhou com atividades para o estudo da reta, a partir de grandezas diretamente proporcionais, com alunos do Ensino Médio. Com o trabalho de Miranda (2009), percebemos a escassez de pesquisas sobre o assunto. Com as pesquisas de Post, Behr e Lesh (1995, 1988) e de Sierpinska (1992, 1994) atentamos para possíveis equívocos na compreensão do conceito de proporcionalidade e algumas questões emergiram: “Será que alunos do Ensino Médio têm presentes, na estrutura cognitiva, os conceitos de proporcionalidade direta e proporcionalidade inversa?”; “Como trabalham com esses conceitos?”; “Utilizam gráficos, tabelas, textos ou símbolos?”; “Sabem reconhecer se uma relação é de proporcionalidade direta, inversa ou não proporcional?”; “Reconhecem as expressões correspondentes?”. De maneira particular, perguntamos quais são as primeiras ideias que emergem diante de um problema que envolve a proporcionalidade direta e com que características dos Três Mundos da Matemática, pois consideramos importante que um sujeito saiba reconhecer a ideia e trabalhar com ela. Para obter respostas a esses questionamentos, optamos por estruturar um questionário diagnóstico sobre a ideia de proporcionalidade e aplicá-lo a alunos do 3º ano do Ensino Médio, com pelo menos uma questão de aplicação.

Como fundamentação teórica, escolhemos os Três Mundos da Matemática (Tall, 2004), uma teoria que está preocupada em entender o desenvolvimento cognitivo do ser humano, em Matemática, desde a infância até a idade adulta e que defende que, para esse desenvolvimento, são necessárias atividades que englobem diferentes tipos de pensamento matemático, que categorizam em três diferentes mundos: *mundo conceitual corporificado*, *mundo proceitual simbólico* e *mundo axiomático formal*. Essa teoria ainda traz as ideias subjacentes de *imagem de conceito* e de *definição de conceito* (Tall & Vinner, 1981). Escolhido esse quadro teórico, reformulamos nossos questionamentos e, dentre as questões que elaboramos, vamos apresentar, neste artigo, a que se refere ao uso da proporcionalidade direta em um problema “Que

⁴ (An unconscious scheme of thought) Proportion is a privileged kind of relationship.

características, entre formais, simbólicas e corporificadas, emergem como primeira ideia, diante de um problema que envolve proporcionalidade direta?”

Referencial Teórico

Buscamos aporte na teoria dos *Três Mundos da Matemática* (Tall, 2004) e nas ideias subjacentes de *imagem de conceito* e *definição de conceito* (Tall & Vinner, 1981) para formular as questões referentes ao pensamento proporcional, elaborar o instrumento de coleta de dados e analisar os protocolos gerados por um grupo de alunos do 3º ano do Ensino Médio.

Imagem de conceito e definição de conceito

Tall e Vinner (1981) consideram que o desenvolvimento cognitivo de um indivíduo, em Matemática, é atingido pela diversidade de ideias e experiências que o indivíduo acumula, relacionadas a cada conceito e que, para este ser compreendido é pedagogicamente aconselhável que sua definição seja acompanhada por uma ampla gama de ideias associadas ao conceito e que irão favorecer a formação do que Tall e Vinner (1981) chamam de *imagem de conceito*.

Usaremos o termo *imagem de conceito* para descrever a estrutura cognitiva total associada a um conceito, que inclui todas as imagens mentais, propriedades e processos associados. Ela é construída ao longo dos anos por meio de experiências de todos os tipos, mudando à medida que o indivíduo encontra novos estímulos e amadurece⁵ (Tall & Vinner, 1981, p. 152, tradução nossa).

A *imagem de conceito* não é uma estrutura estática e pode modificar-se ao longo do tempo, de acordo com o desenvolvimento cognitivo individual, com novas concepções incluídas e antigas excluídas ou modificadas. Faz parte da *imagem de conceito* o que Tall e Vinner (1981) chamam *definição de conceito*, que é o conjunto de palavras utilizadas por um indivíduo para definir um conceito matemático. A *definição de conceito* é, portanto, individual e pode ter sido decorada ou construída, a partir das ideias presentes na *imagem de conceito* e pode estar relacionada, em maior ou menor grau, a uma *definição de conceito* formal, como a que é aceita pela comunidade matemática (Tall & Vinner, 1981). Por exemplo, à pergunta “O que é proporcionalidade direta?”, um sujeito pode dar uma definição formal, como a instituída pela comunidade científica ou ainda descrever uma das concepções presentes na sua *imagem de conceito*, como “Duas quantidades são diretamente proporcionais se o gráfico cartesiano for uma reta com inclinação positiva e que passa pela origem”. Vinner (1991) ainda acrescenta que tanto a *definição de conceito* como a *imagem de conceito* podem ser inexistentes, se “*nenhum significado é associado ao nome do conceito*”⁶. (Vinner, 1991, p. 70, tradução nossa) e isto pode ocorrer por várias razões: a definição foi memorizada, sem que lhe seja atribuído um significado; um conceito é introduzido utilizando apenas sua definição; ou ainda, a definição permanece desativada.

Os Três Mundos da Matemática

Nos Três Mundos da Matemática, Tall (2004) afirma que para a aprendizagem são necessárias atividades que englobem diferentes tipos de pensamento matemático e os categoriza

⁵ We shall use the term *concept image* to describe the total cognitive structure that is associated with the concept, which includes all the mental pictures and associated properties and processes. It is built up over the years through experiences of all kinds, changing as the individual meets new stimuli and matures. (Tall & Vinner, 1981).

⁶ ... some meaning is not associated with the concept name. (Vinner, 1991).

em três mundos distintos: *Mundo Corporificado*, *Mundo Simbólico* e *Mundo Formal*, que não são hierárquicos nem obrigatórios e cada indivíduo traça o próprio caminho entre eles. À medida que o indivíduo “viaja” pelos mundos, surgem dificuldades, que necessitam de ideias anteriores para serem superadas, de modo que a viagem é individual e não é a mesma para cada viajante.

indivíduos diferentes lidam com os vários obstáculos de modos diferentes, que levam a uma variedade de desenvolvimentos pessoais, alguns dos quais permitem que o indivíduo progrida com sofisticação crescente, de forma significativa, enquanto outros acarretam em concepções alternativas, ou mesmo fracassos⁷ (Tall, 2004, p.286, tradução nossa).

A presença simultânea de características dos Três Mundos é que garantirá uma *imagem de conceito* rica o suficiente para que se possa afirmar que houve aprendizagem (Tall, 2004). A Figura 1 apresenta a integração entre os *três mundos* (Tall, 2004) e destaca que num determinado ponto do desenvolvimento cognitivo um indivíduo pode estar entre dois deles: “*simbólico corporificado*” (as características são símbolos e corporificações e o próprio símbolo pode ser corporificado); “*corporificado formal*” (o pensamento formal é sustentado pelas corporificações e as ideias corporificadas são traduzidas em estruturas formais); e “*simbólico-formal*” (as ideias simbólicas são traduzidas em formalismo).



Figura 1. Três Mundos da Matemática.

Fonte: Lima e Tall (2010, tradução e adaptação nossa).

Mundo Conceitual Corporificado

No *mundo conceitual corporificado*, observamos e descrevemos as propriedades que percebemos e sentimos de um objeto e as experiências envolvem objetos físicos: observação, manipulação, descrição de propriedades, embora o indivíduo não precise manipular fisicamente o objeto, pois pode fazê-lo em pensamento. Assim, ao pensar numa relação entre duas grandezas diretamente proporcionais, podemos corporificar este conceito, “vendo” ou esboçando o gráfico de uma reta pela origem, com coeficiente angular positivo. No *mundo corporificado*, o conceito de proporcionalidade direta pode ser representado por gráficos, tabelas, exemplos numéricos ou por um texto na língua materna, sem se preocupar com uma linguagem formal.

Mundo Proceitual Simbólico

O *mundo proceitual simbólico* é aquele no qual os símbolos matemáticos são usados não só para representar e efetuar ações, mas também para representar o produto dessas ações. Segundo Tall (2004), o *mundo simbólico* é composto por símbolos matemáticos que representam as ações e as percepções do *mundo corporificado*. No *mundo corporificado*, duas grandezas diretamente proporcionais podem ser representadas por uma tabela ou por um exemplo numérico. No *mundo*

⁷ different individuals handle the various obstacles in different ways that lead to a variety of personal developments, some of which allow the individual to progress through increasing sophistication in a meaningful way while others lead to alternative conceptions, or even failure. (Tall, 2004).

simbólico, podem aparecer expressões do tipo $y = kx$ ou $y = \frac{k}{x}$ ou $a:b:c:d$ (que se traduz por $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$).

Mundo Axiomático Formal

O *mundo axiomático formal* é o mundo das definições, axiomas e teoremas, que constituem o sistema axiomático da Matemática. Segundo Lima, R. (2007), o trabalho no *mundo formal* é caracterizado pela utilização de linguagem formal, com definições formais e axiomas para explicar um conceito matemático, a partir dos quais são feitas deduções e demonstrações. Em Lima *et al.* (2006), a definição de grandezas proporcionais tem características do *mundo formal*

Uma proporcionalidade é uma função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para quaisquer números reais c, x tem-se $f(cx) = c f(x)$ (proporcionalidade direta) ou $f(cx) = \frac{f(x)}{c}$, se $c \neq 0$ (proporcionalidade inversa). (Lima *et al.*, 2006).

O indivíduo, ao definir o conceito de proporcionalidade direta, com *características corporificadas formais*, pode apresentar algo do tipo: “Seja a grandeza y uma função da grandeza x , isto é, $y = f(x)$. Dizemos que y é diretamente proporcional a x quando: y é uma função crescente de x e, se x for multiplicado por um número real r , o valor correspondente de y fica multiplicado por r . Logo: $f(rx) = r f(x)$ $f(r \cdot x) = \frac{1}{r} \cdot f(x)$ para todo valor de x e $r \in \mathbb{R}$ ”.

A partir da teoria dos *Três Mundos da Matemática*, desenvolvemos o questionário diagnóstico de modo a obter quais e quão variadas são as imagens mentais, propriedades e processos, presentes na estrutura cognitiva do sujeito, referentes ao conceito de proporcionalidade direta.

Procedimentos Metodológicos

Elaboramos um questionário com 17 questões abertas e semiabertas, envolvendo as definições de proporcionalidade direta e inversa e problemas que nos permitissem verificar com que características dos *Três Mundos* os alunos trabalham essas questões. O instrumento foi aplicado a 51 alunos do 3º ano do Ensino Médio, que passaram por todo o estudo de grandezas direta e inversamente proporcionais no Ensino Fundamental e trabalharam com problemas que envolvem razão, proporção e representação gráfica de funções, no Ensino Médio. Dentre essas questões, escolhemos apresentar, para esta comunicação, a questão 6, na qual é proposto um problema verbal, envolvendo uma ideia básica de proporcionalidade direta, ligada à Física, sobre a relação entre a distância percorrida e a velocidade de um automóvel. Esperávamos, com as respostas dadas a essa questão, verificar com que características dos *Três Mundos da Matemática* emergem as primeiras ideias, diante do problema proposto.

Análise

Vejamos o enunciado da Questão 6, a análise que fizemos das respostas e alguns exemplos.

6. Escreva com suas palavras qual sua **primeira ideia** para resolver o seguinte problema: “Um automóvel percorre uma distância de 48 quilômetros em 02 horas. Quantos quilômetros percorrerá em 06 horas?”. **Explique o porquê desta ideia.**

O objetivo desta questão é identificar algumas características que estão presentes na *imagem de conceito* (Tall & Vinner, 1981) do sujeito da pesquisa e que sejam as primeiras a emergir diante do questionamento. Com a explicação dada, pretendemos identificar se ele

percebe a ideia de proporcionalidade direta que está presente no movimento retilíneo uniforme, pois nele o espaço percorrido é diretamente proporcional ao tempo gasto em percorrê-lo, e como explica essa ideia. Para resolver o problema, o sujeito pode utilizar o método de redução à unidade/taxa unitária, que é achar a constante de proporcionalidade (a distância percorrida em 1 hora) e multiplicá-la por 6. Neste caso, vamos considerar esta resposta com *características formais* (F), pois a distância percorrida em 1 hora permite calcular a distância em qualquer tempo. Este problema também pode ser resolvido pelo método do fator de mudança/decomposição em parcelas: “se em 02 horas o automóvel percorre 48 km, mais 02 horas percorrerá 96 km e mais 02 horas percorrerá 144 km”. Neste caso, o sujeito apresenta *características corporificadas* (C). Para a resolução ser categorizada com *características formais* (F), por meio deste método, seria preciso verificar se o participante consegue resolver o problema com um tempo diferente, por exemplo 7 horas. Ou então, para resolver o problema, o sujeito pode aplicar a noção de proporcionalidade direta por meio da regra de três, onde a grandeza ***d*** (distância) é diretamente proporcional à grandeza ***h*** (horas): $\frac{48}{2} = \frac{d}{6}$. Consideramos esta resolução com *características simbólicas* (S), pois este método pode ser olhado como um proceito, que encerra o conceito de proporcionalidade direta e o processo de que temos que fazer $48.6 = 2. d$, para calcular o ***d***. Utilizando qualquer um desses métodos, o sujeito sabe justificá-lo?

Quadro 1

Categorias de Análise da Questão 6

Classificamos por	Quando a resposta apresentou
Características corporificadas (C)	A resolução pelo método do fator de mudança/decomposição em parcelas, sem dar a entender haver uma relação de proporcionalidade direta
Características simbólicas (S)	Reconhecimento por meio do símbolo, do processo e do conceito, que representa (proceito), ou seja, manipulou os símbolos (processo) corretamente e mostrou o entendimento do conceito.
Características corporificadas formais (CF)	A constante de proporcionalidade pelo método de redução à unidade/taxa unitária, encontrando a distância percorrida em 1 hora e multiplicou por 6 horas. Dá a entender que encontrando a distância percorrida em 1 hora é possível calcular a distância em qualquer tempo
Características corporificadas simbólicas (CS)	O algoritmo da regra de três de maneira correta (S) e uma imagem corporificada.
Ausência de características (-)	Apresentou uma conta não relacionada a um problema de proporcionalidade direta, que só pode ser resolvido porque existe uma regularidade: em intervalos de tempos iguais são percorridos espaços iguais.
Entrevista (E)	Casos que não compreendemos a resposta do participante e pensamos seria interessante realizar uma entrevista.

Quadro 2

Classificação da Questão 6 de cada aluno, na perspectiva dos Três Mundos da Matemática

1	CF	11	CF	21	C	31	C	41	CS	51	C
2	CF	12	C	22	C	32	n/r	42	C		
3	CS	13	C	23	CS	33	n/r	43	-		
4	CS	14	-	24	CS F	34	CF	44	C		
5	-	15	C	25	E	35	C	45	-		
6	C	16	-	26	C	36	S	46	C		
7	C	17	C	27	C	37	C	47	CF		
8	n/r	18	n/r	28	C	38	CF	48	CF		
9	-	19	n/r	29	CF	39	-	49	C		
10	CF	20	CF	30	CF	40	CF	50	CF		

Dentre os 46 sujeitos que responderam esta questão, observamos que apenas 11 sujeitos explicitaram a primeira ideia para resolver o problema, que é o que a questão pede, como o Aluno 34: “A minha primeira ideia foi dividir o 48 por 2 e o

resultado foi 24 então multipliquei o 24 por 6. Porque foi a ideia que achei mais lógica.”; os outros 10 explicitaram a primeira ideia, se referindo à “regra de três”, sem aparentemente fazer conexão com a proporcionalidade direta, e também resolveram o problema, dando um valor como resposta, como o Aluno 12: “144. É só multiplicar por 3. $48 \times 3 = 144$. $2 \times 3 = 6$ ”. Os outros 35 sujeitos apenas resolveram o problema. No Quadro 3, damos um resumo dos métodos utilizados pelos alunos para resolver a

Questão 6

Quadro 3

Método de Resolução utilizado na Questão 6

1	TU	11	FM	21	FM	31	FM	41	RT	51	-
2	TU	12	FM	22	FM	32	-	42	FM		
3	RT	13	FM	23	RT	33	-	43	-		
4	RT	14	-	24	RT	34	TU	44	FM		
5	-	15	FM	25	-	35	FM	45	-		
6	FM	16	-	26	FM	36	RT	46	FM		
7	FM	17	FM	27	FM	37	FM	47	TU		
8	-	18	-	28	FM	38	FM	48	TU		
9	-	19	-	29	FM	39	-	49	-		
10	TU	20	TU	30	TU	40	FM	50	FM		

Quando o participante utilizou o método do fator de mudança, nem sempre pudemos ter certeza se o problema foi resolvido com *características formais* (F), pois ficou a dúvida: se os dados do problema não fossem números múltiplos, como será que ele o resolveria? (Figura 2). Se invés de 6h, tivéssemos usado 7h? Um fator que influenciou nossa análise a considerar a resposta

2 horas = 48k
4 horas = 96k
6 horas = 144k

com *características formais* (F) foi julgar se o sujeito resolveria o problema mesmo se o valor pedido da distância fosse o correspondente a 7 horas.

Figura 2. Resposta do Aluno 31 para a Questão 6, utilizando método do fator de mudança, classificada como *características corporificadas* (C).

Se o sujeito argumentou que em 1 h o carro anda 24 km e deu a entender ser esta a constante de proporcionalidade, consideramos a resposta com *características formais* (F), como o Aluno 01

A primeira ideia seria dividir o nº de quilômetros percorridos em 2 horas por 2 para se obter o nº de kms percorridos em 1 hora. Logo após, multiplicar esse valor por 6, que é o solicitado no exercício. Eu pensei nesta ideia para resolver o exercício porque essa é a maneira mais fácil para se achar o nº de kms percorridos seja qual for o tempo.

Na análise desta questão, tivemos dúvida em algumas respostas, em que a palavra “aumenta” parece estar ligada à operação adição e não à multiplicação e fica subentendido que a proporcionalidade é direta porque aos valores de uma grandeza se soma um determinado valor e aos valores da outra também, como é o caso do Aluno 04, que utilizou o algoritmo da regra de três com processo e conceito corretos, mas ao apresentar os valores em uma tabela menciona que “soma 2 nas horas e soma 48 nos quilômetros”.

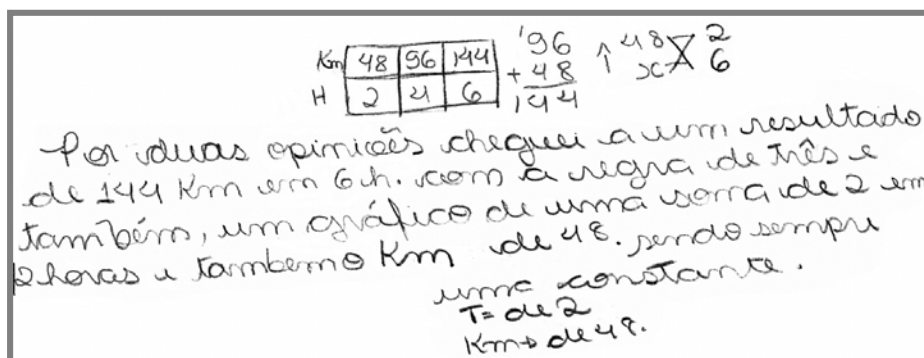


Figura 3. Resposta do Aluno 04 para a Questão 6, classificada com *características corporificadas simbólicas*.

Será que se este aluno visse a tabela que segue, consideraria existir uma proporcionalidade direta entre as grandezas x e y ? Na linha de cima são somados 2 e na de baixo 4 e ambas “aumentam”.

x	2	4	6
y	5	9	13

Uma resposta, a do Aluno 24 (Figura 4), foi classificada com as características dos Três Mundos da Matemática, ou seja, interpretamos que nesta questão o participante transitou pelos Três Mundos (CSF), pois utilizou o método da regra de três ao escrever a equação das grandezas diretamente proporcionais; manipulou os números de maneira correta; e mencionou ser este um problema de proporcionalidade direta.

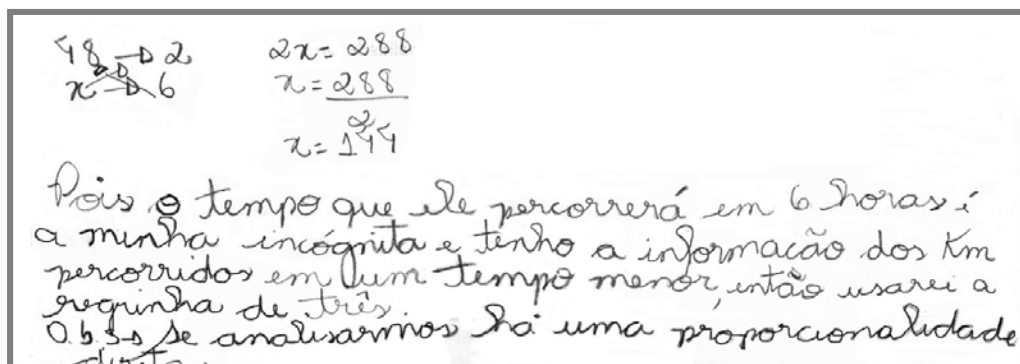


Figura 4. Resposta do Aluno 24 para a Questão 6 classificada como com *características corporificadas, simbólicas e formais (CSF)*.

Dos alunos que responderam a questão, deixando suas contas e justificando seus resultados, 8 mostraram explicitamente que não têm, na *imagem de conceito*, que este tipo de problema só pode ser resolvido porque existe uma regularidade: em intervalos de tempos iguais são percorridos espaços iguais, isto é, a velocidade é a constante de proporcionalidade. 3 alunos acharam a resposta multiplicando 48 quilômetros por 6 horas, como o Aluno 39: “*Ele percorrerá 288 quilômetros em 6 horas. Este problema foi criado para saber quanto o carro percorrerá e para saber-se nós estamos bom na multiplicação.*”

Quadro 4

Classificação geral da Questão 6 na perspectiva dos Três Mundos da Matemática

Questão 6	
Características corporificadas (C)	19
Características corporificadas formais (CF)	13
Características simbólicas (S)	01
Características corporificadas simbólicas (CS)	04
Características corporificadas simbólicas formais (CSF)	01
Ausência de características (-)	07
Respostas dadas	46
Não responderam (n/r)	05
Entrevista (E)	01

Conclusões

Com a análise dos protocolos, podemos responder nossa questão de pesquisa: “*Com que características, entres formais, simbólicas e corporificadas, emergem as primeiras ideias de um grupo de alunos do último ano do Ensino Médio diante de uma questão que envolve proporcionalidade direta?*”. No caso da questão 6, percebemos que obtivemos apenas 07 com ausência de características e 05 em branco. As demais apresentam características corporificadas (19), simbólicas (01), corporificadas formais (13) e apenas um sujeito com características dos Três Mundos, o que responde nossa questão de pesquisa.

A análise da quantidade e da qualidade dessas respostas nos fez repensar que os alunos podem ter respondido não porque têm familiaridade com a ideia de grandezas proporcionais, mas porque sabem aplicar um dos métodos: taxa unitária; regra de três; ou decomposição em parcelas e não associam estes métodos à proporcionalidade direta. Além disso, não pedimos para resolver a questão e sim explicitar a primeira ideia para resolvê-la, com a intenção de provocar uma resposta que deixasse claro se o sujeito associou a questão à proporcionalidade direta, mas apenas 11 explicitaram a “primeira ideia”: apenas um deixou claro que estava lidando com proporcionalidade direta e os outros 10, com um problema de regra de três. Perguntamos: estes alunos perceberam que a proporcionalidade direta e a regra de três estão ligadas?

Considerando as respostas obtidas, julgamos que se este diagnóstico for reaplicado deveremos: não utilizar valores múltiplos; colocar exemplos em que o valor a ser obtido seja menor do que o dado, por exemplo, conhecendo a distância percorrida em 7 horas, determinar a

percorrida em 3. Ficamos com uma pergunta: será que o equívoco da grande maioria desses sujeitos em definir a proporcionalidade direta como “quando um aumenta o outro aumenta” os induziu a tratar o problema como de proporcionalidade direta e consequentemente utilizar um “procedimento”?

Considerações gerais

Começamos nosso estudo buscando entender se alunos do Ensino Médio têm presentes, na estrutura cognitiva, os conceitos de proporcionalidade direta e proporcionalidade inversa e como trabalham com esses conceitos: se usam gráficos, tabelas, textos ou símbolos. Nossa preocupação também foi verificar se reconhecem se uma relação é diretamente proporcional, inversamente proporcional ou não proporcional e se reconhecem (ou conhecem) as expressões correspondentes. Aplicamos um questionário com 17 questões e apresentamos, nesta exposição, os resultados obtidos com uma delas, em que se pede para o sujeito identificar a primeira ideia que emerge diante de um problema de proporcionalidade direta, envolvendo o cálculo da distância percorrida por um automóvel que se move com velocidade constante.

Finalizando este trabalho, diante dos dados obtidos na análise dos protocolos, esperamos que as perguntas que surgiram pelo caminho tragam ideias para novas pesquisas: “Estes alunos perceberam que a proporcionalidade direta e a regra de três estão ligadas?”, “Utilizando qualquer um dos métodos, da redução à unidade/taxa unitária, do fator de mudança/decomposição em parcelas ou a regra de três, o sujeito sabe justificá-lo?”, “Se os dados da questão 6 não fossem os dados, como será que a resolveriam, se invés de 6h, tivéssemos usado 7h?”, “Será que diante da tabela que segue, um sujeito consideraria existir uma proporcionalidade direta entre as grandezas x e y , uma vez que ambas aumentam, pela adição da constante 2 no x e da constante 4 no y ?”, “Será que o fato da grande maioria desses participantes definir a proporcionalidade direta como “quando um aumenta o outro aumenta” os induziu a tratar a questão 6 como de proporcionalidade direta e daí utilizar um ‘procedimento’?”

x	2	4	6
y	5	9	13

Todas essas questões ficaram sem resposta, mas esperamos que nosso trabalho desperte o interesse em respondê-las, por meio de pesquisas na área de Educação Matemática que poderão contribuir para a melhoria dos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática e, em particular, do pensamento proporcional.

Referências

- Brasil. Parâmetros curriculares nacionais. (1998). *Matemática: Ensino de quinta a oitava séries*. Brasília: MEC/SEF. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf>. Acesso em: 20 out. 2010.
- Lesh, R., Post, T. R., & Behr, M. (1988). Proportional Reasoning. In J. H. & M. B. (eds.), *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 93-118). Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics. Disponível em: <http://www.cehd.umn.edu/rationalnumberproject/888.html>. Acesso em: 02 abr. 2011.
- Lima, E. L. (2011). Grandezas Proporcionais. In *Meu Professor de Matemática e outras histórias* (5ª. ed.,

- pp. 125-141,). Rio de Janeiro: SBM. ISBN 978-85-85818-09-8.
- Lima, E. L. et al. (2006). *A Matemática do ensino Médio, I* (9ª. ed.). Rio de Janeiro: SBM. ISBN 85-85818-10-7.
- Lima, R. N. (2007). *Equações Algébricas no Ensino Médio: uma jornada por diferentes mundos da Matemática* (Tese de Doutorado em Educação Matemática). 358 p. PUC, São Paulo.
- Miranda, M. R. (2009). *Pensamento proporcional: uma metanálise qualitativa de dissertações* (Dissertação de Mestrado). 137 p.
- Post, T. R., Behr, M. J., & Lesh, R. (1995). A proporcionalidade e o desenvolvimento de noções pré-álgebra. In A. F. Coxford & A. P. Shulte (Eds.). *As ideias da álgebra* (pp. 89-103). Tradução de Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual.
- Sierpinska A. (1992). On understanding the notion of function. In G. Harel, & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function: Aspects of epistemology and pedagogy*. (Vol. 25, 25-58). [S.l.]: Mathematical Association of America.
- Tall, D. O. (2004). Thinking Through Three Worlds of Mathematics. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 281-288). Bergen, Norway. Disponível em: <http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/proof.html>. Acesso em: 24 abr. 2011.
- Tall, D. O., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 158-161. ISBN ISSN: 0013-1954.
- Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. In D. O. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.

Caracterización de la actividad argumentativa de estudiantes de educación media cuando trabajan en procesos de Matematización de situaciones

Oscar Javier **González** Pinilla
 Universidad Distrital Francisco José de Caldas
 Colombia
oscarmateud@gmail.com
 Camilo **Arévalo** Vanegas
 Universidad Distrital Francisco José de Caldas
 Colombia
kmilo741a@gmail.com

Resumen

El presente artículo, pretende establecer los principales aspectos que constituyen el proyecto de investigación para optar al título de magister en educación, enmarcado en el paradigma teórico de la Educación Matemática Realista (EMR), que pretende abordar la problemática que afronta actualmente la práctica de la justificación en las aulas de matemáticas, que no toman en cuenta la actividad argumentativa del estudiante en un contexto de socialización. Se busca entonces, la necesidad de caracterizar y analizar los esquemas argumentativos (Toulmin, 1958) que emergen en los procesos de matematización de situaciones problemas en el aula (Freudenthal, 1977). El objetivo es reivindicar a la argumentación dentro de procesos de socialización de saberes, donde el estudiante en lugar de memorizar y reproducir, se conciente sobre la responsabilidad de crear, justificar y validar, lo que ayudará a superar los problemas de la justificación matemática y su trivialización en las prácticas docentes actuales.

Palabras clave: argumentación, matematización, Educación matemática realista, actividad argumentativa, Fenomenología didáctica.

Planteamiento del problema

En los lineamientos curriculares de matemáticas, particularmente los que aluden a la argumentación matemática, se explicita que se debe promover la exploración por parte del estudiante de las matemáticas, donde la comunicación oral y escrita de ideas matemáticas y la verificación, negociación y validación de sus afirmaciones sea puesta en juego dentro de procesos de socialización (MEN, 1998). Sin embargo, su aprendizaje se ve cada vez más afectada porque se centra en la memorización de fórmulas matemáticas que se usan ocasionalmente para resolver algunos problemas, además de que no se toman en cuenta los procesos de argumentación que se ponen en juego dentro de procesos de socialización en el aula de clases.

Estudios realizados por Balacheff (1987), Hanna (1990) y Simon (1996), pertenecientes a enfoques constructivistas, concuerdan en que la experimentación, la argumentación y la

demostración aunque procesos diferentes, también van de la mano y se hacen necesarios en algún momento al interior del aula para formalizar lo que se considera por demostrar. En este sentido, la actividad argumentativa como requisito primordial para llevar a cabo procesos de prueba son escasos a la hora de validar ideas matemáticas, donde como lo señala Balacheff (1987) son cada vez más frecuentes los procesos de enseñanza-aprendizaje de la demostración fundamentada en la “imitación”, donde existe la tendencia por parte del estudiante por permanecer atentos a los distintos momentos de los que el docente dispone al realizar una demostración, encontrando la mayor necesidad o preocupación, en realizar la reconstrucción de una buena imitación, donde el estudiante crea la falsa idea de que lo importante no es comprender, validar o justificar, sino copiar bien.

Teniendo en cuenta que el objeto de estudio en la investigación es la actividad argumentativa que se constituye a partir de procesos de matematización de situaciones realísticas, como requisito principal para construir una responsabilidad al acto de demostrar en el aula, se pretende responder a la pregunta *¿Cuáles son los esquemas de argumentación (Toulmin) que surgen en estudiantes de grado décimo cuando se involucran en procesos de matematización de situaciones realísticas (Freudenthal)?*

Fundamentación teórica

Consideración del paradigma de la Educación Matemática Realista

La presente propuesta, se enmarca en el enfoque llamado *Educación Matemática Realista* (EMR), que básicamente busca promover el avance de los estudiantes en la comprensión de las matemáticas, idea implantada por Freudenthal (1977) quien concebía que las matemáticas tienen valor humano en tanto son aplicables a la vida misma, por lo que promueve el uso de contextos realistas, entendidas como la intención de ofrecer a los estudiantes situaciones problema que ellos puedan *imaginar* (ver Van den Brink, 1973; Wijdeveld, 1980). Para Freudenthal matemáticas más que un cuerpo de conocimientos, es la actividad de organizar la disciplina a partir de la realidad o de la matemática misma, a lo que llamó *matematización* (Freudenthal, 1968); es decir, creía firmemente que la forma de aprender matemáticas era haciéndola, siendo la matematización el fin de la educación matemática.

Lo que los seres humanos tienen que aprender no es matemáticas como sistema cerrado, sino como una actividad: el proceso de matematizar la realidad y, de ser posible incluso, el de matematizar las matemáticas (Freudenthal, 1968, p.7).

Freudenthal se refería a la matematización de la realidad como la manera de organizar la matemática a partir de los fenómenos, a lo que llamo el *análisis fenomenológico*, que tiene como objetivo servir de base para la organización de la enseñanza de las matemáticas en la escuela. Para Freudenthal la

fenomenología de un concepto, estructura o idea matemática significa describirlos en su relación con los fenómenos para los que fueron creados y a los que han sido extendidos en el proceso de aprendizaje de la humanidad, y, cuando esta descripción se refiere al proceso de aprendizaje de las generaciones jóvenes, es fenomenología didáctica,... (1985, p. 9).

Desde esta perspectiva, la propuesta de Freudenthal, sugiere la constitución de objetos mentales a partir de la organización de los fenómenos para los cuales ha sido creado. En este sentido, la constitución de objetos mentales precede a la construcción de conceptos, que se logra solo si se alcanza una organización de los fenómenos que son medios descritos por el objeto mental en cuestión.

Acerca de la teoría de la argumentación de Toulmin

En este apartado expondré las ideas generales de Stephen Toulmin (1958) sobre la teoría de la argumentación, en la cual se enmarcará la manera en que se llevará a cabo el análisis de los procesos de matematización de las situaciones presentadas a los estudiantes. Para Toulmin una de las practicas generales que nos caracteriza es la de razonar, frente a lo que hacemos, pensamos o decimos a los otros; esto es, el uso de la argumentación. En este caso, las situaciones o problemas con respecto a las cuales se argumenta pueden ser distintas y por tanto las formas de razonar también lo serán. Es en este sentido que Toulmin propone estudiar la estructura misma de la argumentación; es decir, los elementos de los que se componen los argumentos, las funciones que cumplen estos elementos y la relación que se establece entre ellos.

Desde la propuesta de Toulmin (1958), el argumento como secuencia de proposiciones lógicas que requieren el uso de razonamiento, se puede organizar en un modelo o esquema que contempla por lo menos cinco elementos; las pretensiones, las razones, las garantías, las refutaciones y el respaldo.

Las *pretensiones (Claim)*, son el punto de partida así como el destino de la secuencia argumentativa, que busca el proceder en la argumentación. Aquí alguien (Proponente) plantea un problema frente a otro u otros (oponente) quien(es) cuestionaran de alguna forma la pretensión, con lo que el proponente deberá dar *razones (grounds)* en favor a su pretensión inicial, que deben ser relevantes y suficientes para apoyarla. En este caso las razones no serán leyes generales o se apoyaran de teorías acabadas, sino de hechos específicos de la situación misma. Aquí surge entonces una discusión en la que el oponente pedirá justificar el paso de las razones a la pretensión aun si ya la ha aceptado de antemano; en este caso, surgen los enunciados generales que autorizan este paso a las cuales llamamos *garantías (warrant)* del argumento. Esta garantía, representan a enunciados generales que permiten el paso de los datos a las conclusiones, puede ser una regla deducida por experiencia, en una norma, ley o principio. En todo caso, la garantía no se basa en hechos sino en reglas que autorizan el paso de un enunciado a otro (Toulmin, 1958, p.100). Cuando se han presentado las garantías que apoyan el argumento, estos podrían no ser suficientes; en este caso, será necesario mostrar que la garantía es válida, relevante y superior a cualquier otra. Para ello deberá indicar el campo general de información o *respaldo (backing)* que se diferencian de las garantías en que estos pueden expresarse en forma de enunciados categóricos sobre hechos (Toulmin, 1958, p.106), mientras que los enunciados de la garantía son hipotéticos. Aquí el respaldo se refiere a teorías generales, creencias, y estrategias que proporciona más apoyo a la garantía e indica por qué la pretensión debería ser aceptada.

De esta manera, es posible analizar una estructura argumentativa y calificar de valido o no un argumento. Sin embargo, en ocasiones la fuerza de los argumentos puede verse socavada por el oponente cuando ante las garantías propuestas por el proponente este deduce una *refutación (Rebuttals)* que tumba de alguna manera la fuerza del argumento y hace que el proponente tenga que cambiar sus garantías apoyadas de razones que indudablemente hará variar también su esquema argumentativo o definitivamente desistir de su pretensión inicial. Lo anterior se resume en lo que Toulmin llama su modelo para el análisis argumentativo, así:

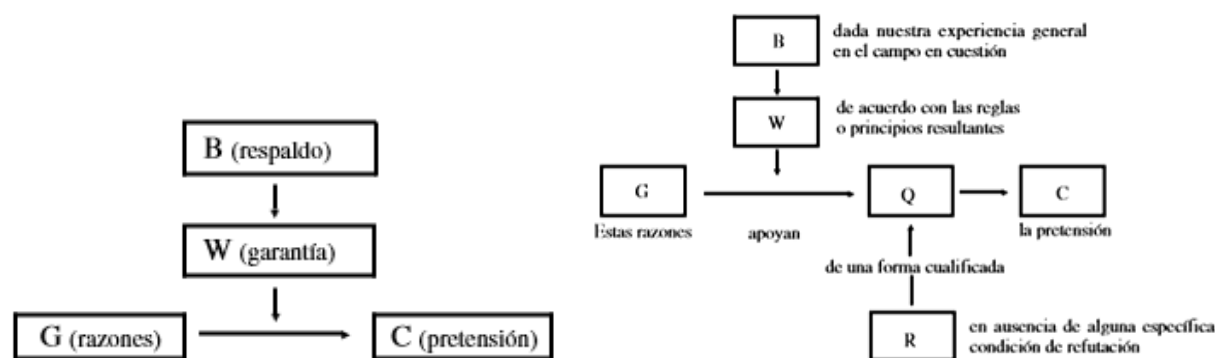


Figura 1. Elementos del argumento en un esquema argumentativo (Toulmin, 1958).

En este nuevo esquema de la estructura de un argumento, los elementos funcionan de manera dependiente, donde se concibe que el mundo de la argumentación y del razonamiento, son características propias de una comunidad racional donde no cabe hablar de la incomunicación, pues siempre habrá cabida para el argumento y la justificación cuando de actos de interacción se trata.

Diseño y metodología de investigación

Desde este enfoque, se manifiesta la necesidad de diseñar *tareas* por parte del docente en un contexto realista, entendiendo esto como situaciones problemáticas imaginables y comprensibles para los estudiantes, para lo cual pueda generarse una *actividad de matematización*; es decir, organizar o estructurar la realidad, a partir de los fenómenos en torno a un objeto mental que permitan acceder a conocimientos matemáticos formales. En este sentido, se busca una metodología de tipo cualitativo/interpretativo llamada *fenomenología didáctica* donde las situaciones deben ser seleccionadas de modo que puedan ser organizadas por los objetos matemáticos que los estudiantes deben constituir y se relacionan directamente con la finalidad del *diseño didáctico*, donde se asumen algunos elementos metodológicos y técnicos que configuran la acción de diseñar las situaciones problemas realísticas por parte del docente, a lo que desde el enfoque se le llama didáctizar. En este sentido, el diseño metodológico de la propuesta se centra en la aplicación de una situación problema realístico a matematizar llamada “*el terreno más óptimo*” que se enuncia de la siguiente manera:

Un agricultor ha comprado un terreno en forma cuadrada de 50 m x 50 m y quiere usar una parte de éste para su pequeño cultivo de tomate de árbol, para cercarlo dispone de 100 metros de alambre y suficientes postes; sin embargo, desea que su producción sea la máxima posible con los recursos disponibles. Ustedes han sido contratados para diseñar el modelo más óptimo para los fines del agricultor.

A esta situación se diseñan unas tareas que buscan que los estudiantes promuevan actividades de matematización, en este caso se estudiarán las primeras dos tareas que se llevaron al aula, direccionadas a constituir el objeto mental de área máxima; de la siguiente manera:

Tarea 1: En grupos de tres estudiantes, diseñen la representación de un terreno de 50 cm x 50 cm (1cm::1m) con una lámina de icopor, tome 100 cm de lana que representarán el alambre para cercar el terreno cultivable y chinchas para los postes. Use el material para hacer una representación de sus sugerencias al agricultor y diseñe el terreno cercado que a su consideración es el más óptimo para mayor producción de tomates.

Tarea 2: Realizar una exposición a manera de debate en el que se dé a conocer el diseño construido por cada grupo, justificando el porqué de su creación y atendiendo a la pregunta: ¿Por qué su diseño es el más óptimo para garantizar que el agricultor obtendrá la mayor producción de tomates?

Resultados

Tarea 1

Los estudiantes en sus respectivos grupos realizaron el diseño de un terreno cercado usando la lana (alambre) y los chinchos (postes) dentro del terreno total (icopor). Cada grupo elaboró un diseño concertado y que en su opinión era el terreno más óptimo para cultivar, entendiendo lo “óptimo” como dependiente del área, por lo que el problema fundamental para los estudiantes era buscar un diseño de terreno que contemplara el área máxima que se podía construir con un perímetro de 100 cm, atendiendo a la pregunta, ¿Qué forma y características debe tener el terreno para que la producción de tomates sea máxima? La construcción del terreno atendía a las siguientes especificaciones:

- El terreno debe ser totalmente cerrado
- El terreno cercado debe estar dentro del terreno mayor.
- Debe usarse el total de alambre (lana) proporcionado.
- La cantidad de postes (chinchos) será elección de cada grupo.
- La forma del terreno puede ser rectilínea o curvilínea.



Figura 2. Algunos diseños de terreno contruidos por los estudiantes.

Como se ve en los diseños de cultivo elaborados por cada grupo (Figura 2), se evidencia que los estudiantes se preocupan por obtener una superficie amplia con los recurso disponibles; es decir, su preocupación principal está en diseñar un terreno con la mayor superficie posible, con la restricción de tener un perímetro de 100 cm. Aquí surgen figuras rectilíneas y un intento por figuras curvilíneas; diseños que se entraron a discutir a manera de debate en la tarea número 2.

Tarea 2

La situación problema propuesta ofrece una variedad de estrategias de solución. Permite que los estudiantes muestren sus estrategias e invenciones a otros. En este caso, abre la posibilidad de discutir el grado de eficacia de las destrezas usadas. A continuación se presenta una de las muchas discusiones entre los estudiantes a la hora de defender sus diseños. Se eligen tres casos específicos, el diseño del círculo, el del octágono regular y la figura mixta (rectilínea y curvilínea), donde se tenía por objetivo que argumentaran a favor de sus propios diseños y en contra de los demás, usando razones lógicas y convincentes para poder validar que su propuesta era la más asequible para los cometidos del agricultor:

Grupo 1: Octágono regular

Grupo 2: Círculo

Grupo 3: Figura mixta

Conversación

Grupo 1: Nuestro diseño es un octágono regular (mostrando su diseño) y consideramos que es el que tiene mayor área porque las esquinas forman ángulos amplios lo que asegura que se aprovecha el terreno; al contrario de lo que pasa con un triángulo o un cuadrado, donde las esquinas son demasiado cerradas. En el caso del cuadrado de 90° ; tendríamos ángulos pequeños lo que implicaría una reducción del terreno y una pérdida de superficie.



Figura 3. Grupo 1 mostrando que el octágono regular tiene ángulos obtusos y que el diseño del triángulo desaprovecha superficie por tener ángulos agudos.

Grupo 2: pues no creo que el octágono sea el de mayor área; porque nosotros hicimos el círculo precisamente porque creemos que entre menos lados rectos tenga la figura más superficie vamos a tener; porque lo que hacen los ángulos, sea cual sea la amplitud, es reducir el espacio del terreno.



Figura 4. Grupo 2 mostrando su diseño circular usando la mayor cantidad de postes.

Grupo 1: Pues para mí entre más ángulos amplios tenga el terreno; es decir, entre más lados tenga, vamos asegurar que los ángulos sean obtusos y por lo tanto su abertura encerrará mayor cantidad de terreno.

Grupo 3: En nuestro caso, nuestro terreno tiene ambas cosas, una parte curva y otra línea recta, porque creemos que ambas cosas son necesarias; es decir, lo que no se aprovecha en la parte rectilínea se aprovechará en la parte curva.



Figura 5. Grupo 3 mostrando su diseño mixto de líneas curvas y rectas.

Grupo 1: Pero una figura que tenga solo líneas rectas y además con ángulos obtusos será un terreno que encierre mayor área.

Grupo 2: Pero en el caso del círculo no tengo lados, y por tanto no tengo ángulos, lo que asegura que estoy encerrando la totalidad de terreno que se puede cercar con 100 m de alambre.

Grupo 1: Pero ustedes en realidad no tiene un círculo, porque para obtener un círculo usted necesitaría de muchos postes y por lo que veo su cultivo tiene una cantidad de postes fija, espere y cuento 1, 2, 3, 4, ..., 49, 50 (realizando el conteo de chinchas del diseño circular) son como 50 chinchas lo que generaría una figura de cincuenta lados.



Figura 6. Estudiante del grupo 1 haciendo el conteo de postes del diseño del grupo 2.

Grupo 3: Yo creo que independientemente de la forma del terreno, todos estamos usando la misma cantidad de alambre por lo tanto tendríamos figuras de la misma área.

Profesor: Lo que usted asegura entonces, es que dado que todas las figuras tienen el mismo perímetro de 100 m, esto implica que ¿todos tendrán la misma área?

Grupo 1: No, eso es mentira, porque por ejemplo yo hice esta operación (sacando una hoja con cálculos matemáticos) en un cuadrado de 100 cm de perímetro tenemos un área de 625 cm^2 y si tenemos otra figura como por ejemplo un rectángulo de 40 cm x 10 cm también tenemos una forma de perímetro 100 cm pero de área 400 cm^2

Grupo 2: Si es verdad, el perímetro es independiente del área; por eso el problema está en buscar la forma que encierre la mayor área con un perímetro fijo de 100 metros.

Profesor: Como en eso estamos de acuerdo, volvamos al problema del círculo, mi pregunta es ¿Efectivamente es un círculo?

Grupo 2: pues no, pero se acerca mucho a serlo; de hecho si tuviera más chinchas (postes) le pondría todos los necesarios con el fin de ampliar la amplitud de los ángulos y asegurar que se encierra mayor cantidad de espacio.

Grupo 1: Entonces para hacer un terreno circular necesitaríamos de infinitos postes lo cual es imposible, la forma debe ser obligatoriamente rectilínea.

Grupo 2: Pues sí, pero sin embargo el octágono no es el de área mayor, porque en ese caso podríamos hablar del eneágono o el decágono de lados iguales...

Profesor: Regular

Grupo 2: eso, el dodecágono regular tendría mayor área que su octágono.

Grupo 1: Si. En conclusión para asegurar que el terreno encierre la mayor área posible se deben usar la mayor cantidad de postes, acercándonos a la construcción de un terreno circular.

Grupo 2 y 3: Pues sí.

Análisis de los resultados

Debemos aclarar que, se ha escogido solo una parte de la conversación de los estudiantes, en la que de manera explícita se evidencia que la ruta argumentativa que siguen los grupos para defender sus diseños de terreno, se dirigen hacia la constitución del objeto mental “área máxima”, atendiendo que en otras sesiones de clase el debate se direccionó a la constitución de otros objetos mentales, como el de límite al infinito o sucesiones y series. En este caso, se analizará solo este apartado de la conversación tendiente a la constitución del objeto *mental área máxima*.

A partir del modelo argumentativo de Toulmin podemos diseñar un esquema que evidencia desde los elementos constitutivos del argumento, la ruta argumentativa que sigue este fragmento de la conversación para validar la pretensión inicial de cada uno de los grupos.

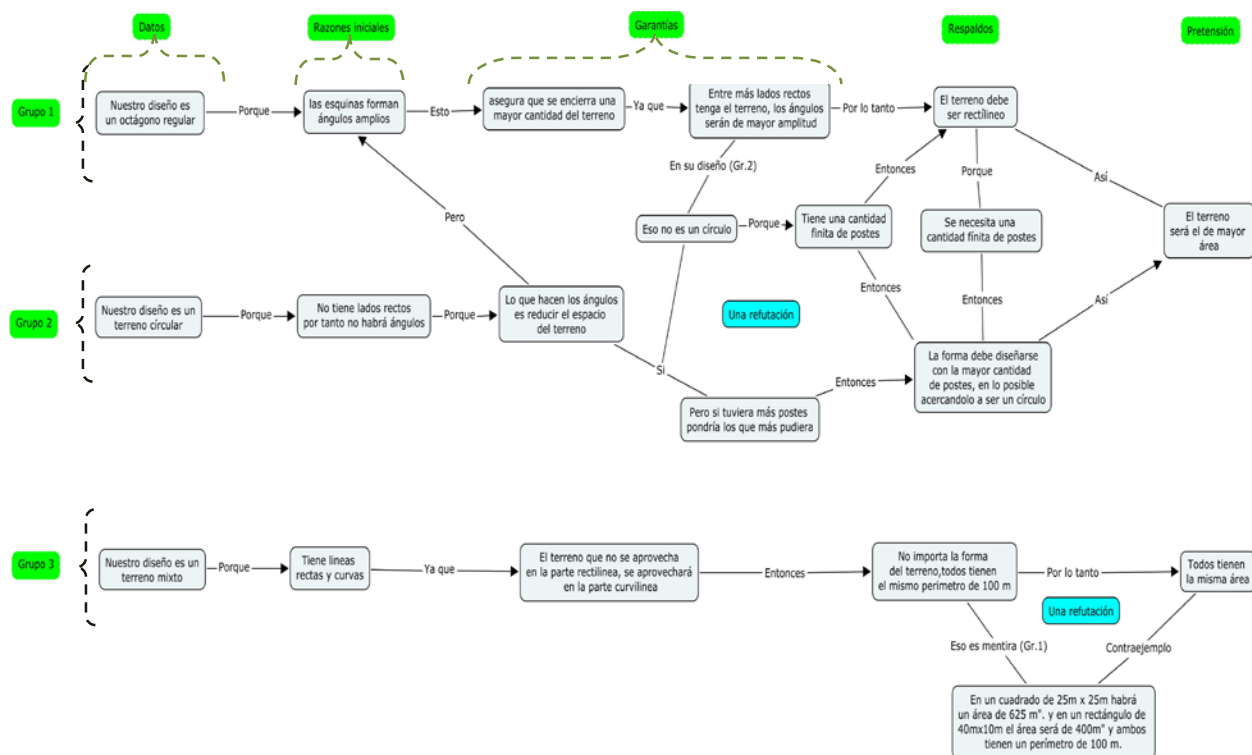


Figura 7. Esquema argumentativo de Toulmin aplicado a la conversación entomo a la matematización de la situación problema "El terreno más óptimo"

Como podemos ver en el esquema argumentativo de la figura 7, se contemplan los elementos de todo modelo de argumentación de Toulmin (1958); en el que los tres grupos exponen sus diseños en forma de datos, el grupo 1 expresa su interés por terrenos en forma de octágono regular, el grupo 2 en forma circular y el grupo 3 en forma mixta; es decir, con líneas rectas y curvas. Sin embargo, las pretensiones son diferentes; para el grupo 1 y 2 es mostrar que su modelo es el más óptimo en cuanto al área máxima; en cambio, el grupo 3 expresa que su pretensión es mostrar que la forma del terreno cercado es independiente del área, la cual será la misma en todos los diseños, dado que el perímetro usado en todos es el mismo; esto es, 100 metros. En este sentido, las razones expuestas por cada grupo intentan validar y darle fuerza a su dato inicial; así, el grupo 1 expresa que las formas rectilíneas que generen ángulos de máxima amplitud asegurarán un aprovechamiento del terreno; es decir, ángulos obtusos encerrarán mayor cantidad de superficie. Por su parte el grupo 2, asegura que la razón de su diseño circular es precisamente no poseer lados rectos que formen ángulos, pues aseguran que los ángulos sea cual sea su amplitud lo que hacen es reducir el espacio del terreno. En tanto, el grupo 3, asegura que las formas mixtas ayudan a equilibrar el área del terreno; es decir, el espacio que se deja de aprovechar en la superficie formada por lados rectilíneos se compensará con la parte del terreno encerrada por los lados curvos.

Aquí es donde empiezan a entrar en juego las garantías que de alguna forma apoyan y le dan validez a las razones; para el grupo 1, la garantía expone que entre mayor cantidad de postes, se generarán formas de mayor cantidad de lados; es decir, los ángulos considerados serán de la mayor amplitud posible y por tanto encerrará mayor superficie. Para el grupo 2, la garantía está expuesta, en que los ángulos por su amplitud lo que hacen es despreñar área, así, entre más lados, el ángulo será de mayor amplitud y se reducirá la pérdida de superficie en el terreno. Por

otro lado, el grupo 3 garantiza que la cantidad de alambre usada en todos los terrenos es de 100 metros por lo cual, sea cual sea la forma del terreno el área encerrada será la misma. En este punto, se hacen presentes las refutaciones de un modelo contra el otro en forma de contrargumentos o contraejemplos, los cuales requieren de un respaldo para aseverarlas, donde el proceso de justificar corresponde a explicar el razonamiento que se llevó a cabo para identificar o interpretar los datos. Según el modelo de Toulmin este indicador cumple la función de justificar, y bajo nuestro modelo la validez de las justificaciones contemplan tanto las valoraciones positivas como negativas (refutar).

Cuando el grupo 2 hace caer en la cuenta al grupo 1, de que su modelo no es un círculo por poseer una cantidad finita de postes, lo que no garantiza que sea el área máxima, se convierte en una de los principios más importantes de la EMR, ya que enfatiza en que el modelo matemático formal que aparentemente es el más óptimo para la solución de la situación, no lo es en la realidad o el contexto del problema; aludiendo que es imposible construir un terreno circular y que en la realidad siempre se van a tener terrenos rectilíneos.

Otro uso de la refutación está en la enunciación de contraejemplos; que este caso surgió del grupo 2 al grupo 3, quienes aseguraban que al ser todas las figuras del mismo perímetro esto implicaba obtener siempre la misma área, lo que el grupo 1 refuta usando un contraejemplo enmarcado en la matemática formal, recurriendo a modelos matemáticos de área y perímetros de rectángulos y cuadrados. En estos dos tipos de refutaciones que se presentan en el aula vemos de manera explícita que efectivamente se hace presente la matematización de la situación; donde en el primer caso de refutación, el modelo más apropiado para asegurar el área máxima es el círculo pero en la matemática misma, en la realidad el modelo es totalmente incoherente. En el segundo caso, la refutación funciona como garante para cambiar el esquema argumentativo y refinar la pretensión, que en este caso el grupo 2 aludía a un círculo, pero con la refutación del grupo 1 sobre la finitud de postes que imposibilitaba la construcción de un círculo, el grupo 3 cambia de pretensión al afirmar ahora que la necesidad está en construir una figura rectilínea, regular con la mayor cantidad de lados, aproximándose a la construcción de un círculo que es la forma de terreno que finalmente tendrá el área más grande para el cultivo; pretensión del grupo 2 que todos terminan por aceptar y validar.

Conclusiones y reflexiones finales

Como se puede evidenciar, los procesos de matematización que se dan en la situación problema, garantizan el surgimiento de una actividad argumentativa en los estudiantes, que intenta en este caso, constituir el objeto mental de área máxima; donde se ponen en juego los elementos del modelo argumentativo de Toulmin, apoyado fundamentalmente en justificaciones que emergen en una secuencia argumentativa lógica dentro de las matemáticas. En este sentido, se pone de manifiesto que el modelo argumentativo de Toulmin es aplicable en cualquier disciplina o espacio abierto a la disertación, al debate y al diálogo, no solo con el fin de esquematizar la ruta argumentativa de los estudiantes; sino también de caracterizar las acciones de reflexión sobre la argumentación. Este proceso contempla tanto reflexionar sobre la información que es tratada, como reflexionar sobre la secuencia de argumentación. La presencia de este proceso muestra que el desarrollo de una tarea matemática puede alcanzar un nivel de complejidad elevado donde el modelo termina con el proceso de concluir o lograr la pretensión inicialmente planteada.

Finamente, el trabajo investigativo pretende también reivindicar a la argumentación dentro de procesos de socialización, en torno a la matematización de situaciones, para lograr una toma de conciencia de la necesidad y responsabilidad que debe darse a los procesos de justificación en el aula, donde el estudiante en lugar de memorizar y reproducir, se concientice sobre la responsabilidad de crear, justificar y validar, lo que sin duda alguna ayudará a superar los problemas de enseñanza de la demostración y su trivialización en las prácticas docentes actuales; o como lo menciona Camargo (2000) al manifestar:

Las dificultades con las que se enfrentan los estudiantes al interpretar, realizar o usar demostraciones deductivas llevan a muchos profesores, desde hace algunos años, a evadir la enseñanza de la demostración llegando al grado de eliminar la práctica de la justificación en las aulas de matemáticas, con las funestas consecuencias que esto trae para la formación matemática de los estudiantes (p. 42).

Por lo tanto, ésta propuesta investigativa podría suscitar elementos de reflexión a las actuales maneras de llevar a cabo la actividad argumentativa en matemáticas, donde se privilegie a los estudiantes, a sus propias ideas y maneras de construir conocimiento, creándole la necesidad de justificar sus ideas como un medio para validar, tomando en cuenta las primeras afirmaciones e intuiciones que éste posee y las primeras explicaciones que logra al abordar un problema y al matematizar situaciones, pues partir de estas concepciones primitivas muchas veces de carácter empírico podrían ser la base para darle un significado al acto mismo de demostrar (Bravo, 2002), que debe ser concebido como un proceso evolutivo, una construcción de cadenas deductivas inicialmente fundamentadas en las creencias del estudiante para llevarlas a discusión y aceptación grupal en forma de argumentos.

Referencias y bibliografía

- Balacheff, N. (1999). *Is argumentation an obstacle?* Invitation to a debate Newsletter on proof, Mai/Juin. Ht www.lettredelapreuve.it
- Bravo, María L. (2002). *Una estrategia didáctica para la enseñanza de las demostraciones geométricas* (Tesis doctoral). Universidad de Oviedo, España.
- Bressan, A., Zolkower, B., & Gallego, M. F. (2004). *La educación matemática realista. Principios en que se sustenta*. Escuela de invierno en Didáctica de la Matemática. Recuperable en Internet: http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/articulo_escuela_invierno2.pdf
- Camargo, L. (2007). *Bases para la constitución de una comunidad de práctica encaminada a la tarea de demostrar. Experiencia en un curso de formación de profesores de matemáticas en Bogotá, Colombia* (Trabajo de investigación para optar al título del DEA). Universidad de Valencia.
- Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿continuidad o ruptura cognitiva?* México, D.F: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel (Traducción de Luis Puig, publicada en Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas. Textos seleccionados. México: CINVESTAV, 2001).
- Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures*. Dordrecht: Reidel.
- MEN. (1998). *Lineamientos curriculares para el área matemáticas. Áreas obligatorias y fundamentales*. Colombia: Ministerio de Educación Nacional.
- Toulmin, S. (1958). *The uses of argument*. England: Cambridge University Press.

Whitenack, J., & Knipping N. (2002). Argumentation, instructional design theory and student's mathematical learning: a case for coordinating interpretive lenses. *Journal of Mathematical Behavior*, 21, 441-457.

Classificando provas de alunos do ensino médio segundo a tipologia de Balacheff

Leonardo Andrade **da Silva**

Instituto Federal Fluminense – Campus Cabo Frio

Brasil

leonardolas@yahoo.com.br

Alexis **Silveira**

Universidade Federal Fluminense

Brasil

prof.alexissilveira@gmail.com

Gesse Pereira **Ferreira**

Instituto Federal Fluminense – Campus Cabo Frio

Brasil

gesseferreira@gmail.com

Resumo

Este trabalho é fruto de pesquisa da equipe de matemática, do IFF – Campus Cabo Frio. A pesquisa teve como objetivos analisar e classificar algumas provas feitas por 35 alunos do 3ºano do Ensino Médio-Técnico do IFF – Cabo Frio. Para esta classificação, foi utilizada a tipologia de Balacheff, que diferencia as provas matemáticas em duas grandes categorias: as provas pragmáticas (ligadas à manipulação e a exemplos) e as provas intelectuais (que se distanciam dos exemplos e utiliza-se mais de abstração). Entre as provas pragmáticas, Balacheff distingue três níveis: o empirismo ingênuo, a experiência crucial e o exemplo genérico e, dentre as provas intelectuais, ele destaca a experiência mental. Estes foram os níveis utilizados para classificar as provas dos alunos e assim compreender um pouco mais acerca de seus raciocínios e justificativas. Dos dados analisados, concluiu-se que a maioria das provas realizadas pelos alunos fica entre empirismo ingênuo e experiência crucial.

Palavras chave: Prova Matemática, Classificação de Provas, Balacheff.

Introdução

Inúmeras discussões e reflexões acerca da prova matemática têm sido travadas por matemáticos, lógicos, filósofos e educadores matemáticos, sejam discussões e reflexões de maneira mais geral como encontramos em Hanna e Sidoli (2007) e Da Silva (2011), sejam discussões e reflexões acerca de aspectos mais particulares ligados à prova matemática, como veremos a seguir.

Em Davis (1993), Brown (1997), Giaquinto (2005) e Mancosu (2005), por exemplo, encontramos investigações sobre o uso das representações visuais e sua potencial contribuição para provas matemática. Acerca deste aspecto Hanna e Sidoli (2007) citam que:

Em um extremo estão aqueles que dizem que as representações visuais nunca podem ser mais que auxiliares preciosos para a prova, como é seu papel tradicional, como facilitadores da compreensão matemática em geral. No outro extremo estão aqueles que afirmam que algumas representações visuais podem constituir prova em si, tornando qualquer outra prova tradicional desnecessária. Entre esses dois extremos, podemos encontrar uma variedade de posições que são mais sutis, ou que parecem simplesmente menos claras (Hanna & Sidoli, 2007, p.74).

Além do aspecto citado acima, podemos citar outros aspectos importantes acerca da prova e que são abordados por diversos pesquisadores, como em Balacheff (2006, 2008, 2010) que faz um estudo epistemológico no que diz respeito à prova matemática; em Hanna (1990, 1996) no qual sua pesquisa tem como foco o papel da prova e o ensino da prova matemática; em Rota (1997) que aborda um aspecto mais filosófico em relação à prova, em Dawson (2006) traz à tona a discussão sobre prova formal e prova informal e em De Villier (2010) que traz reflexões sobre os papéis e funções da prova, dentre outros tantos que não foram citados neste momento.

Diante de tantas preocupações de importantes pesquisadores sobre a prova matemática percebemos a necessidade da reflexão sobre o tema também do ponto de vista da educação matemática, no caso particular do processo de ensino e aprendizagem, foco deste trabalho, visto que a observação da produção dos alunos em relação à prova matemática pode trazer um grande ganho para o professor compreender melhor seus alunos, possibilitando que o professor possa refletir sobre sua própria prática.

Sobre a prova matemática: pensamentos divergentes

Acerca do conceito de prova matemática, podemos citar Rota (1997) que defende a prova matemática do ponto de vista formal, não só por dizer que: “Todo mundo sabe o que é prova matemática. A prova de um teorema matemático é uma sequência de passos que conduz para uma conclusão desejada. (Rota, 1997, p.183)”, mas também por dizer que “A expressão “prova correta” é redundante. Prova matemática não admite graus” (Rota, 1997, p.183). Assim sendo, o autor nos transmite a ideia que uma prova matemática pode ter lacunas e ser completada, pode ter algum erro e ser corrigida, no entanto não poderíamos dizer que uma prova matemática está “meio certa” e prova é uma prova formal.

Contrapondo ao pensamento de Rota (1997), Dawson (2006) defende uma proposta diferente para o conceito de prova matemática, dizendo que:

Para teorias formalizadas, a noção de uma prova é absolutamente precisa: É uma sequência de fórmulas bem definidas, onde ao fim o teorema é provado e cada um dos passos é ou um axioma ou o resultado da aplicação de uma regra de inferência às fórmulas anteriores, em sequência. Não devemos, entretanto, adotar essa definição. Preferencialmente, pegaremos uma prova para ser um argumento informal cujo objetivo é convencer aqueles que se esforçam para verificar que certa afirmação matemática verdadeira (e, idealmente, para explicar porque é verdadeira) (Dawson, 2006, p.270).

Dawson nos explica ainda que se as atenções fossem voltadas apenas para as provas formais, seria excluída a maior parte das reais provas usadas, visto que são poucas as teorias matemáticas formalmente axiomatizadas. Enfim, Dawson defende a prova informal como a prova mais produtiva e sendo um argumento capaz de convencer uma comunidade matemática:

Quem pode dizer, por exemplo, que uma prova agora aceita como válida não será um dia considerada deficiente? E se argumentos defeituosos não têm qualquer validade, porque é

que muitos deles acabam por serem reparados para conter, por assim dizer, um “germe” de verdade? A definição de uma prova informal como um argumento convincente, a ser realizada por consenso da comunidade matemática em um dado momento, implica que uma prova pode não ser válida para todos os tempos, um ponto de vista que, embora em desacordo com a concepção formal, é o único que parece historicamente defensável (Dawson, 2006, p.272).

Davis (1993) também argumenta a favor das provas ditas informais, já que segundo o mesmo:

A formalização dita cima, nas linhas de Hilbert, é longa, chata, ante-intuitiva, pouco convincente e um absoluto horror estético. Pessoas que tentaram ensinar geometria elementar com um alto nível de rigor cavaram um poço de instrução (Davis, 1993, p.335).

Balacheff (1988) é outro autor que defende a prova matemática como argumento informal que tem o objetivo de convencer outras pessoas de que certa afirmação matemática é verdadeira, nesse caso encaixam-se as produções feitas por alunos, visto que em geral, não se produz provas formais nas salas de aula da educação básica, por este motivo escolhemos a tipologia de Balacheff para classificar estas provas.

A tipologia de Balacheff

Balacheff, em sua tese, defendida em 1988, diferencia as provas matemáticas em duas categorias que intervêm na aprendizagem da demonstração, as provas pragmáticas e as provas intelectuais:

- As provas pragmáticas, que são provas baseadas em manipulações ou exemplos. Estas são distinguidas em 3 níveis por Balacheff:

O empirismo ingênuo: Não aparecem indícios de processo de validação. Geralmente a afirmação é obtida a partir de alguns casos. Esse nível se caracteriza por verificar a validade de um enunciado por meio de exemplos.

A experiência crucial: Esse nível se caracteriza pela verificação de uma proposição por meio de um caso no qual não se hesita em dizer que se a proposição é verdadeira neste caso, ela funcionará sempre. Distingue-se do empirismo ingênuo, pois na experiência crucial o exemplo utilizado é pouco particular e conhecido.

O exemplo genérico: Aqui há a explicação das razões da validade da afirmação por meio de um objeto seguida de uma generalização, ou seja, ainda é uma demonstração particular, mas que vale para toda classe representada.

- As provas intelectuais, que se caracterizam pelo distanciamento em relação a ação. Dentre as provas intelectuais ele ressalta:

O experimento mental: Invoca a ação, interiorizando-a e afastando-se de sua realização sobre um representante particular.

Metodologia

A metodologia adotada para a elaboração deste trabalho foi de uma pesquisa bibliográfica associada a uma qualitativa por meio de análise de produção dos alunos. Com o objetivo de classificar algumas provas elaboradas pelos alunos segundo a tipologia de Balacheff, foi elaborado e aplicado um questionário com 14 itens sobre diversos conteúdos já estudados anteriormente ou no Ensino Fundamental ou no próprio Ensino Médio.

O questionário foi aplicado a uma turma do 3º ano do Ensino Médio, no qual 35 alunos participaram da aplicação. Essa turma foi escolhida por estar no 3º ano do Ensino Médio (último ano que estudam matemática, já que no 4º ano não há matemática dentre as disciplinas) e também porque um dos pesquisadores era professor da turma em questão. Os alunos tiveram dois tempos de aula (uma hora e quarenta minutos no total) para responder as questões do questionário no que o fizeram individualmente.

Elaborou-se um questionário com as seguintes questões:

Explique o máximo possível por meio de figuras, palavras ou símbolos:

- 1) Prove que a soma dos ângulos internos de um polígono de n lados é dada pela fórmula $(n-2) \cdot 180^\circ$.
- 2) Prove que a soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180°
- 3) Prove que a soma das medidas dos ângulos externos de um triângulo é igual a 360°
- 4) Prove que o número de diagonais de um polígono convexo de n lados é dado pela fórmula $n(n-3)/2$.
- 5) Prove que a medida de um ângulo inscrito numa circunferência é igual à metade da medida do arco compreendido entre seus lados.
- 6) Prove que a soma de dois números pares pode ser dividida em duas partes iguais.
- 7) Prove que o quadrado de um número par é par.
- 8) Prove que se p^2 é par então p é par.
- 9) Prove que o conjunto vazio está contido em qualquer conjunto.
- 10) Prove que o produto de um número par por um número ímpar será par.
- 11) Demonstre a “fórmula de Bhaskara”.
- 12) Demonstre o teorema de Pitágoras.
- 13) Verifique se é verdadeira ou falsa a afirmação: “ $n^2 - n + 41$ é um número primo para n natural”.
- 14) Prove que se um triângulo possui dois lados congruentes terá como consequência dois ângulos congruentes.

A análise dos resultados

O objetivo da pesquisa foi classificar as produções dos alunos segundo a tipologia de Balacheff.

Para alcançar tal objetivo construímos um quadro resumo das classificações das provas feitas pelos alunos (Quadro 1) e apresentamos algumas dessas provas para apreciação de como foram feitas as classificações.

Quadro 1

Análise Quantitativa das Categorias e Níveis de Prova.

Questões	Provas Pragmáticas			Provas Intelectuais	Dados insuficientes para categorizar ou não fez a questão
	Empirismo ingênuo	Experiência crucial	Exemplo genérico	Experimento mental	
1	11	3	3	1	17
2	9	3	5	0	18
3	8	3	1	2	21
4	2	2	0	0	31
5	0	0	0	0	35
6	0	0	0	0	35
7	6	7	0	0	22
8	0	0	0	0	35
9	0	0	0	0	35
10	0	0	0	0	35
11	1	0	0	1	33
12	3	2	0	0	30
13	4	6	0	0	25
14	0	0	0	0	35

Infelizmente não houve dados suficientes para analisar resultados das questões 5, 6, 8, 9, 10 e 14. Talvez tenha ocorrido isso pela dificuldade dessas questões ou até mesmo pelo não conhecimento prévio de tais assuntos (pelo menos não da forma que está sendo solicitado para demonstrar).

Importante ressaltar que apareceram muitos resultados interessantes para análise e que apenas algumas respostas de certas questões foram escolhidas para este artigo. Escolhemos algumas provas das questões: 1, 2 e 3, por apresentar os três níveis da tipologia de Balacheff.

Nas análises das respostas, os alunos tiveram seus nomes descritos por letras do alfabeto

Na análise da questão 1, apresenta-se a prova desenvolvida pelo <aluno-A> (Figura 1) e pelo <aluno-B> (Figura 2).

1ª resposta escolhida:

①



COMO NEST E OCTAGONO TEMOS 8 LADOS POISSA
FORMAR 8 TRIANGULO

SABENDO QUE OS ANGULO INTERNO DO
TRIANGULO SOMAMOS TOTALIZAM 180° TEMOS:

$$8 \cdot 180 = 1440$$

PARA TERMOS SOMENTE OS ANGULO INTERNO
DO OCTAGONO DEVEMOS SUBTRAIR 360° QUE E
A MEDIDA DO INTERIOR DO OCTAGONO (REPRESE
TADA NA FIGURA).

Logo: $1440 - 360 = 1080$

que e igual a: $n - 2 \cdot 180$

$$8 - 2 \cdot 180$$

$$6 \cdot 180 = 1080$$

Figura 1. Prova da Questão 1 desenvolvida pelo <aluno-A>.

Apesar do <aluno-A> ter utilizado um caso particular, um octógono, observou-se que o raciocínio dele é geral, por este motivo a classificação desta prova é exemplo genérico

2ª resposta escolhida:

1- $(n-2) \cdot 180$



$4 \cdot 90^\circ = 360^\circ$

nº de lados da quadrado = 4, aplicando na formula temos:

$$(4-2) \cdot 180^\circ$$

$$2 \cdot 180^\circ$$

$$360^\circ$$

Figura 2. Prova da Questão 1 desenvolvida pelo <aluno-B>.

Observou-se que esse aluno utilizou um polígono provavelmente bem conhecido por ele desde o Ensino Fundamental para justificar uma afirmação geral. Por isso a classificação é empirismo ingênuo.

Na análise da questão 2, apresenta-se a prova desenvolvida pelo <aluno-C> (Figura 3), <aluno-D> (Figura 4) e pelo <aluno-E> (Figura 5).

1ª resposta escolhida:

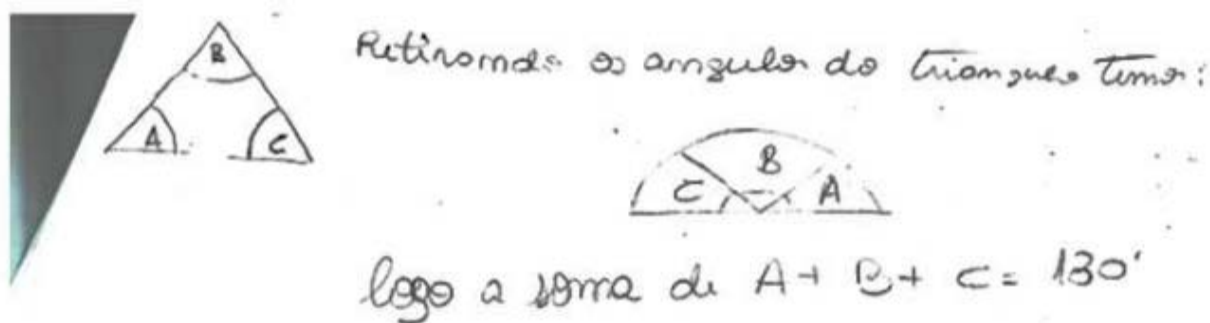


Figura 3. Prova da Questão 2 desenvolvida pelo <aluno-C>.

A classificação desta prova é exemplo genérico, visto que não foi colocado um valor específico para os ângulos, mas variáveis.

2ª resposta escolhida:

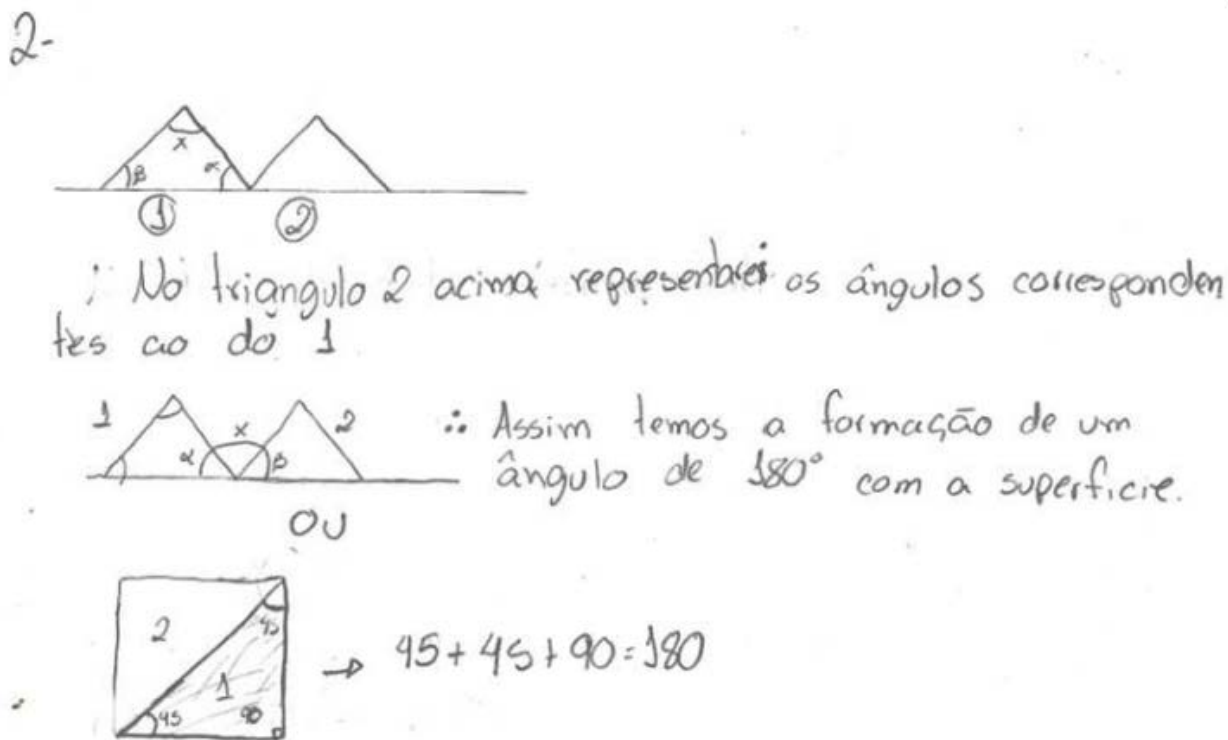


Figura 4. Prova da Questão 2 desenvolvida pelo <aluno-D>.

Na primeira parte da prova, pode-se classificar como exemplo genérico, visto que faltou justificar o porquê o x aparece, mas na parte que o aluno utiliza o quadrado para justificar poder-se-ia classificar como empirismo ingênuo, visto que se utilizou de um caso particular muito conhecido.

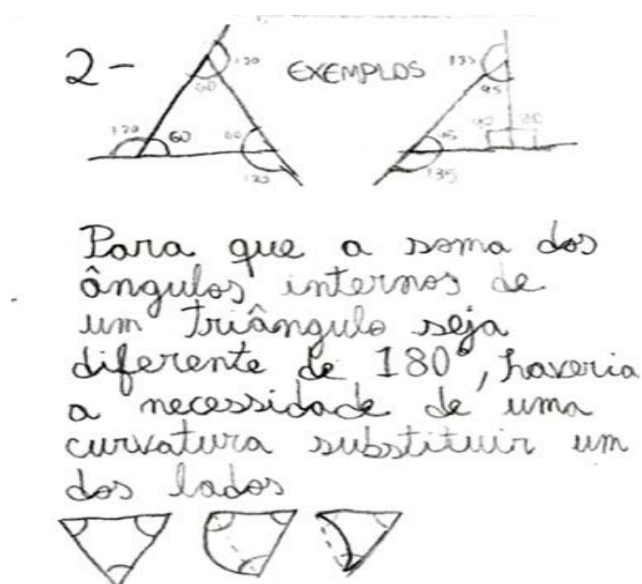
3ª resposta escolhida:

Figura 5. Prova da Questão 2 desenvolvida pelo <aluno-E>.

Observou-se que o aluno fez mais de um exemplo e que não são tão particulares e conhecidos assim, por isso a classificação como experiência crucial.

Na análise da questão 3, apresenta-se a prova desenvolvida pelo <aluno-F> (Figura 6).

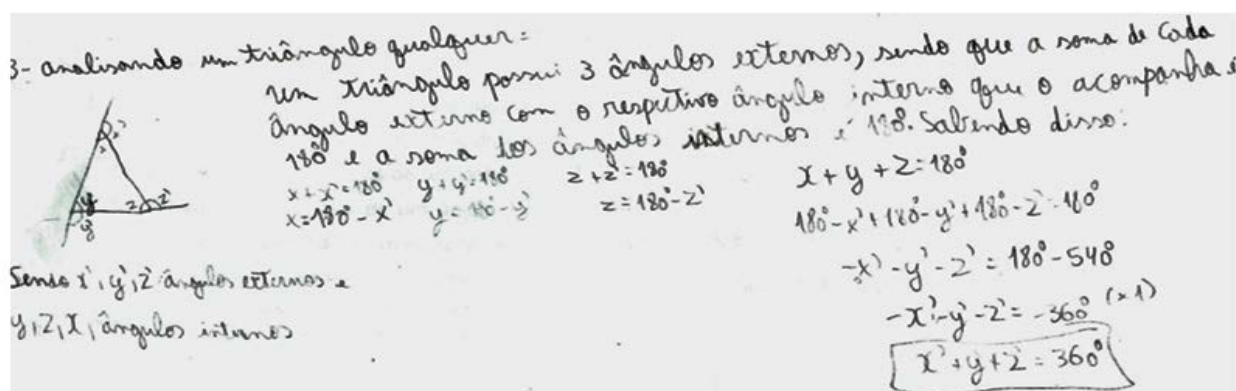


Figura 6. Prova da Questão 3 desenvolvida pelo <aluno-F>.

O aluno conseguiu fazer uma demonstração geral, sem utilizar quaisquer representantes particulares, argumentando de forma eficaz e convincente, por isso a classificação como experimento mental.

Conclusões

Classificando as provas feitas por alunos, observou-se uma grande quantidade de dados insuficientes ou de alunos que não fizeram as demonstrações, o que provavelmente demonstra a grande dificuldade é fazer uma demonstração. Ao classificar as demonstrações, acredita-se compreender seus raciocínios e com isso o professor pode buscar uma melhor forma de ensinar e de fazer com que o aluno aprenda matemática e a provar em matemática, visto que argumentações e justificativas são importantes até mesmo para o dia a dia.

Desses resultados poderíamos nos perguntar por que tão poucos alunos conseguiram dar uma resposta, por exemplo, genérico e como experimento mental? Será que existe alguma relação no processo ensino-aprendizagem de matemática, principalmente no que diz respeito a argumentação e provas no Ensino Básico com esses resultados? Essas são algumas das perguntas que surgem para futuramente pesquisarmos mais a fundo.

Com as análises dos resultados, pode-se observar que poucas foram as provas classificadas como experiência mental (apenas quatro dentre todas as provas apresentadas), nove foram classificadas como exemplo genérico, mas a maioria (dentre as que puderam ser classificadas) foram classificadas como empirismo ingênuo e experiência crucial, o que pode significar que professores devem trabalhar para conseguir que os alunos também justifiquem com o exemplo genérico e com o experimento mental.

Diante dessas análises, os pesquisadores da turma concluíram que se deve trabalhar demonstrações matemáticas em sala de aula, criando um ambiente propício para argumentações e provas serem produzidas pelos próprios alunos.

Eles ressaltaram, também, que alguns desses conteúdos, como por exemplo, geometria básica, a última vez que os alunos tinham estudado havia sido no Ensino Fundamental, e outros tópicos, como “fórmula de Bhaskara”, os alunos haviam estudado com ele, inclusive a demonstração, no 1º ano do Ensino Médio. Mas, de toda forma, acredita-se que os alunos possuíam os pré-requisitos necessários para demonstrar qualquer das demonstrações apresentadas no questionário, o que levou a uma reflexão sobre aprofundar certos conteúdos em sala de aula.

Provas matemáticas devem também ser discutidas em sala de aula, visto que compreender o porquê uma afirmação é verdadeira e não apenas a aceitar por meio de um ou mais exemplos. Assim, pode-se favorecer o aprendizado e a compreensão dos alunos para uma matemática que seja útil e interessante.

Referências e bibliografia

- Balacheff, N. (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématique chez des élèves de collège* (Thèse). Université J. Fourier, Grenoble, França.
- Balacheff, N. (2006). Bridging knowing and proving: the complexity of the epistemological genesis of mathematical proof. *Explanation and proof in mathematics: philosophical and educational perspectives*. Duisburg, Novembre (proceedings under preparation)
- Balacheff, N. (2008). The role of the researcher's epistemology in mathematics education: an essay on the case of proof. *Mathematics Education*, 40, 501-512
- Balacheff, N. (2010). Bridging Knowing and Proving in Mathematics: A Didactical Perspective. In *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives* (pp. 115-136). Springer.
- Brown, J. R. (1997). Proofs and pictures. *British Journal for the Philosophy of Science*, 48, 161-180.
- Da Silva, L. A. (2011). *Representação Visual e Prova Matemática* (Dissertação). UFRJ, Rio de Janeiro, Brasil.
- Davis, P. J. (1993). Visual theorems. *Educational Studies in mathematics*, 24, 333-344.
- Dawson, J.W., Jr. (2006). Why do mathematicians re-prove theorems? *Philosophia Mathematica*, 3(14), 269-286.

- De Villiers, M. (2010). Experimentation and Proof in Mathematics, Explanation and Proof in Mathematics. In *Philosophical and Educational Perspectives* (pp. 205-222). Springer.
- Giaquinto, M. (2005). From symmetry to basic geometry. In *Vizualization, Explanation and Reasoning in Mathematics* (pp. 31-55). Springer.
- Hanna, G. (1990). Some Pedagogical Aspects of Proof. *Interchange*, 21(1), 6-13.
- Hanna, G. (1996). The Role of Proof in Mathematics Education. *Joetsu Journal of Mathematics Education*, 11, 155-168. (In Japanese)
- Hanna, G., & Sidoli, N. (2007). Visualisation and proof: a brief survey of philosophical perspectives. *Mathematics Education*, 39, 73-78.
- Mancosu, P. et al. (eds.) (2005). Visualization in Logic and Mathematics. In *Vizualization, Explanation and Reasoning in Mathematics* (pp. 13-30). Springer.
- Rota, G. C. (1997). The phenomenology of mathematical proof, *Synthese*, 111, 183–196.

Comportamiento de estudiantes universitarios al usar definiciones matemáticas

Valeria **Aguirre** Holguín
New Mexico State University
Estados Unidos
vah@nmsu.edu

Resumen

Frecuentemente estudiantes universitarios encuentran dificultades para utilizar apropiadamente las definiciones matemáticas, particularmente en la construcción de demostraciones. Algunos programas académicos requieren que los estudiantes desarrollen habilidades para construir demostraciones matemáticas que intrínsecamente requieren del uso correcto de definiciones. Poca investigación (e.g., Dahlberg & Housman, 1997; Edwards & Ward, 2004) ha indagado cómo los estudiantes universitarios se conducen al enfrentarse con definiciones matemáticas que desconocen. La pregunta de interés a la presente investigación es: ¿Cómo usan las definiciones los estudiantes universitarios, particularmente en la elaboración y evaluación de ejemplos, en la construcción de demostraciones y determinando la falsedad o veracidad de proposiciones? Los datos fueron recolectados a través de entrevistas semiestructuradas a 23 estudiantes inscritos en un curso de transición a la demostración. Se eligieron cinco definiciones: función, continuidad, ideal, grupo e isomorfismo. Cada estudiante fue entrevistado sobre una definición. Observaciones y resultados preliminares son presentados a continuación.

Palabras clave: definición matemática, demostración, educación matemática universitaria.

Introducción

El papel de las definiciones en matemáticas es fundamental. Tal afirmación puede parecer obvia y casi natural para matemáticos, profesores y a quien esté familiarizado con la estructura y el lenguaje de la matemática. Algunos profesores aparentemente esperamos que los estudiantes sean capaces de entender las definiciones y procedan entonces a hacer uso de ellas (Alcock, 2010). Sin embargo,

Muchos estudiantes no utilizan las definiciones de la forma en que lo hacen los matemáticos, incluso cuando pueden expresar y explicar correctamente las definiciones; muchos estudiantes no utilizan definiciones de la manera que hacen los matemáticos, incluso en la aparente ausencia de cualquier otro curso de acción" (Edwards & Ward, 2004).

Este estudio tiene el objetivo de encontrar información sobre cómo los estudiantes de universidad proceden cuando se enfrentan a nuevas (para ellos) definiciones matemáticas. He reducido las preguntas de investigación a las siguientes:

- ¿Cómo es que los estudiantes usan las definiciones matemáticas nuevas para ellos? ¿Cuáles son sus reacciones naturales?
- ¿Qué contribuye a sus dificultades con el desempaque¹ del contenido y el uso de definiciones matemáticas abstractas?
- ¿Cómo utilizan una definición en tres escenarios diferentes: generación y evaluación de ejemplos, construcción de demostraciones y en el razonamiento de preguntas del tipo verdadero/falso?

Esta investigación se desarrolla dentro del entorno (marco teórico y de investigación) de un experimento desarrollado por Selden y Selden (1995, 2008, 2009) para la enseñanza de un curso de transición a la demostración para estudiantes alrededor del segundo año de universidad con diferentes perfiles, tales como matemáticos, ingenieros y futuros maestros de secundaria y preparatoria. El experimento es una versión modificada del conocido método Moore, implementado inicialmente, por su creador, para la formación de matemáticos. El método Moore es un método constructivista utilizado especialmente para mejorar las habilidades del estudiante para construir demostraciones. El curso consiste se lleva a cabo en base a un conjunto de notas diseñadas para que el estudiante desarrolle habilidades requeridas en cursos de matemáticas avanzadas. No hay libro ni clase tradicional. El estudiante escribe sus demostraciones, se le ofrece crítica y retroalimentación en grupo e individualmente. Dentro de tal marco teórico, esta investigación se concentra particularmente en la parte referente a las interpretaciones operables de proposiciones, concepto muy similar al de ‘definiciones operables’ introducido por Bills y Talls (1998), y las representaciones formales e informales de un enunciado matemático. Más específicamente en el rol que juegan las definiciones en las construcción de las demostraciones matemáticas.

Antecedentes

Varias investigaciones han revelado que los estudiantes presentan una variedad de dificultades para comprender y utilizar las definiciones (Furina, 1994; Zazkis y Leikin, 2008; Fernández, 2004; Roh, 2008), muchas de los cuales podrían ser atribuidas a la "estructura de la matemática como es concebida por los matemáticos en comparación con los procesos cognitivos implicados en la adquisición de conceptos" (Vinner, 1991). Pierie y Kieren (1994) desarrollaron un modelo anidado de entendimiento. Su teoría sugiere que la comprensión no siempre es un proceso lineal o continuo, sino que quienes tratan de aprender se mueven hacia adelante y hacia atrás dentro de diversos niveles de comprensión. Los intentos iniciales de los estudiantes para entender un nuevo concepto requieren de representaciones y acciones que involucran el concepto, luego el próximo nivel de desarrollo son las imágenes de las representaciones y/o acciones anteriores para refinarlas y más tarde manipularlas. Más adelante, un proceso más analítico comienza, los estudiantes examinan y analizan las propiedades del concepto a formalizar y generan nuevas estructuras que les permiten hacer un uso correcto del concepto (Pierie y Kieren, 1994).

De acuerdo con Tall (1980),

¹ Traducción del inglés “unpacking”. Término utilizado por Selden y Selden (1995) para referirse a la comprensión de los detalles implícitos, a veces no necesariamente visibles, en un enunciado matemático.

la imagen del concepto es considerada como la estructura cognitiva que consiste de la imagen mental y las propiedades y procesos asociados con el concepto ... muy distinta de la definición del concepto, que es la forma de palabras utilizadas para describir el concepto.

El desajuste entre la imagen del concepto desarrollado por un individuo y las implicaciones reales de la definición del concepto a menudo conduce a obstáculos en el aprendizaje. El trabajo de varios investigadores lo ha confirmado (Alcock & Simpson, 2002a, 2002b; Wihelmi, Godino y Lacasta, 2007; Zaslavsky y Shir, 2005).

Parameswaran (2010) se ha ocupado de cómo los matemáticos se acercan nuevas definiciones; su investigación muestra que los ejemplos y los no ejemplos juegan un papel muy importante en el proceso de aprendizaje de una nueva definición. Sin embargo, a los estudiantes no se les pide con frecuencia generar ejemplos, la mayor parte del tiempo se les proporciona un ejemplo práctico o una ilustración (Reimann y Schult, 1996; Watson & Mason, 2002). Tampoco es frecuente que los estudiantes discutan y analicen la razón por la que un ejemplo propuesto es en realidad un ejemplo o un no ejemplo.

La relación entre los ejemplos, la pedagogía y el aprendizaje ha sido poco investigado, pero se sabe que los alumnos pueden hacer generalizaciones inadecuadas de conjuntos de ejemplos dados (Bills, Dreyfus, Mason, Tsamir, Watson y Zaslavsky, 2006).

Watson y Mason introdujeron el concepto de ‘espacio de ejemplos’ como el conjunto de ejemplos desarrollados de acuerdo a la experiencia previa y en torno a lograr determinado objetivo (Watson & Mason, 2005). Zazkis y Leikin (2007) observaron la distinción entre ejemplos de conceptos matemáticos y ejemplos de procedimientos matemáticos; mi investigación se enfoca únicamente en el primer tipo.

Aunque hay algunos estudios que abordan el uso de las definiciones en la construcción de las demostraciones tanto de estudiantes como de matemáticos, parece haber mucho más que investigar en relación a la percepción de las definiciones matemáticas por los estudiantes, en especial tratando de describir las competencias necesarias para que puedan hacer un uso correcto de tales definiciones.

Metodología

Para abordar y posiblemente ofrecer respuesta a las preguntas de investigación, se diseñaron y se llevaron a cabo una serie de entrevistas semiestructuradas con estudiantes voluntarios que tomaban el curso de transición a la demostración durante el otoño de 2013 en una universidad del suroeste de los Estados Unidos de América. El protocolo de la entrevista fue diseñado para cada una de las cinco definiciones seleccionadas, para todas las entrevistas seguí el mismo formato. Tales definiciones fueron: función, continuidad, ideal, isomorfismo y grupo. Esta colección de definiciones abarca los contenidos de la mayor parte del curso. Entrevisté a 23 estudiantes, quienes conformaban casi el total de los estudiantes inscritos en la clase. Las entrevistas se llevaron a cabo de forma individual en una pequeña sala de reuniones. Cada grupo de cuatro o cinco estudiantes fue entrevistado aproximadamente dos semanas antes de que la definición particular fuera vista en el curso. Las conversaciones durante la entrevista fueron grabadas en audio y los estudiantes utilizaron una pluma electrónica LiveScribe, esto con el fin de luego ser poder de seguir sus respuestas en tiempo real. La pluma electrónica funciona a través de una pequeña cámara que documenta lo que el estudiante escribe al tiempo que lo hace. Se requiere de un papel especial que posee las características necesarias para ser leído por la

pluma y esta sea capaz de transformar lo que se escribe en un archivo electrónico que luego puede ser transcrito al texto y analizarse con mayor detalle.

En base a mis intereses de investigación y con el apoyo de la literatura existente, quise que las entrevistas abordaran los siguientes cuatro puntos principales. En primer lugar, quise que los alumnos se les presentará con una definición por primera vez, es decir, que fueran entrevistados sobre una definición que todavía no se hubiese visto en clase. En segundo lugar, decidí poner a prueba su capacidad para interpretar la definición, así que pedí a los participantes explicar la definición en sus propias palabras, generar algunos ejemplos que podrían ilustrar la definición, o hablar de lo que fuese que la definición trajera a su mente. En tercer lugar, deseaba encontrar información sobre su capacidad para hacer uso de la definición en la construcción de una demostración que no requiriese más que la definición en sí. Y en cuarto lugar, estaba interesada en analizar la forma en que pueden razonar sobre los enunciados del tipo falso/verdadero que, de la misma manera, requieran únicamente la definición para ser determinado su valor de verdad. Estos cuatro puntos fueron abordados a través del diseño de cinco páginas. Presenté una página tras otra a los estudiantes en una entrevista que en promedio tomó entre 60 y 90 minutos. Este diseño fue inspirado en parte por el trabajo de Dahlberg y Housman (1997) y la labor de Housman y Porter (2003).

A los estudiantes también se les permitió utilizar sus notas del curso durante la entrevista, así como todas las páginas dadas durante la entrevista misma. Mi papel durante la enseñanza del curso, en el cual se lleva a cabo mi investigación, no era el de profesor titular sino el de un asistente, por lo que mi interacción con los participantes durante las entrevistas fue, hasta cierto punto, natural y de confianza. Más que como una entrevista la sesión podría ser vista como una conversación sobre una definición matemática en particular. Traté de seguir con atención los posibles caminos divergentes tomados por los participantes.

El primer análisis de los datos se llevó a cabo teniendo en cuenta cada una de las cinco definiciones por separado. Me concentré en sólo una definición a la vez, el análisis de todos los datos obtenidos de las cinco páginas para los cuatro o cinco respectivos estudiantes que fueron entrevistados sobre una dada definición. El segundo análisis se hizo de acuerdo al número de página. Analicé el comportamiento general en todas las páginas, considerando en cada número de página a todos los participantes, independientemente de la definición.

Resultados preliminares y conclusiones

Algunos resultados que han surgido de los análisis confirman cuan intransigente puede ser nuestro conocimiento previo cuando se trata de comprender nuevas definiciones. Tal conocimiento puede aparentemente influir de una manera, no necesariamente beneficiosa, a la adquisición de nuevos conceptos. He encontrado evidencia que sugiere que entre más nueva es la definición para el estudiante, y menos relacionada con el lenguaje cotidiano, menor será la interferencia de los conocimientos previos inapropiados. Función y continuidad, por ejemplo, están relacionados con el Cálculo y el Álgebra (clases tomadas anteriormente), mientras que las definiciones de ideal e isomorfismo no trajeron ningún conocimiento matemático previo a la mente, por lo que los estudiantes se mostraron más tenaces en interesados en seguir la definición al pie de la letra. Curiosamente, el concepto de grupo trajo a la memoria el uso cotidiano de esta palabra, un estudiante comentó que bastaba solamente tener dos o más elementos para tener un grupo.

También he podido observar que los estudiantes tienden a descuidar los detalles de una definición, si no es que la definición completa, en la construcción de una demostración. Saltan palabras o símbolos que no parecen decirles nada importante. No se muestran plenamente conscientes de que estos detalles se proporcionan por una importante razón. Muy pocos de ellos se esforzaron por seguir lo dicho en la definición. Otra observación es que los estudiantes se mostraron reacios a proporcionar ejemplos de una definición nueva, pero al indagar, el investigador, con paciencia y proporcionando un poco más de tiempo, los estudiantes a menudo fueron capaces de proporcionar un ejemplo o al menos de darse cuenta de que su ejemplo o sus ideas eran inapropiadas. Tales observaciones sugieren que entre más nuevo es el concepto (para ellos), más difícil es proporcionar ejemplos que satisfacen la definición o ejemplos que no la satisfacen; pero a la misma vez entre más nuevo es el concepto menor es la interferencia de los conocimientos previos inapropiados.

Otro de los comportamientos que he tratado de documentar es que tan natural es para los estudiantes pensar y generar ejemplos inmediatamente después de una definición dada sin que tal instrucción les sea dada. De los 23 participantes en esta investigación solo nueve trataron de generar un ejemplo sin que les haya sido requerido. Esto sugiere que generar ejemplos parece ser un proceso al que los estudiantes no están acostumbrados, a pesar de que muchos suelen comentar que es a través de ejemplos que logran comprender mejor un concepto. Es decir, usualmente se requiere de ejemplos para comprender mejor una definición, pero intentar generar ejemplos uno mismo parece no ser tan usual.

En base a éstas y algunas otras observaciones he desarrollado una conjetura preliminar sobre las diferentes etapas por las que un estudiante pasa, o debería pasar, con el fin de aprender a utilizar correctamente las definiciones matemáticas en un contexto determinado. He encontrado evidencia para cada una de las siguientes cuatro etapas:

- 1) Entender que existe una diferencia entre las definiciones cotidianas y las definiciones matemáticas (como Edwards y Ward (2004) sugieren). Algunos estudiantes se muestran capaces de reconocer la importancia de la definición en matemáticas y su diferencia respecto a las definiciones en la vida diaria, pero aún así encuentran complicado hacer uso de ellas. Algunos tratan de mezclar los conceptos matemáticos con objetos o elementos que les son familiares. Cabe mencionar que algunos estudiantes no hacen tal distinción, tales estudiantes son considerados en la etapa 0.
- 2) Entender cuándo y dónde utilizar definiciones matemáticas. Algunos estudiantes comprenden que la definición tiene sentido dentro de un particular contexto y es en éste donde debe utilizarse de la manera en que la definición lo establece.
- 3) Recordar, buscar, y tratar de usar/seguir las definiciones, no necesariamente con éxito. Una vez que el estudiante ha comprendido el contexto dentro del cual una definición es relevante, intenta hacer uso de la definición como tal, apegándose lo más posible a ella. Esto no necesariamente implica que el estudiante haya adquirido la habilidad de hacerlo correctamente, pero al menos ha logrado comprender la importancia de considerar los detalles que la definición plantea.
- 4) Utilizar la definición apropiadamente (en el contexto dado). En esta etapa en la que el estudiante hace uso de la definición correctamente, es decir, se considera que el estudiante ha pasado por las etapas anteriores y es capaz de reconocer si un objeto satisface o no la definición.

Perspectivas

En base al desarrollo y los resultados preliminares de esta investigación considero el diseño de una intervención didáctica en la cual sea posible verificar la conjetura planteada en la sección anterior. De igual forma las observaciones registradas han tenido considerable impacto en el diseño del curso de transición a la demostración de donde fue tomada la información de la presente investigación. En conjunto con los profesores que imparten este curso consideramos implementar algunos nuevos métodos basados en los comportamientos observados en los estudiantes. Deseamos también que nuestras observaciones y resultados informen a docentes e investigadores que comparten nuestro afán de entender mejor la problemática que presentan los estudiantes principiantes en procesos de la demostración matemática.

Referencias

- Alcock, L. (2010). Mathematicians' perspectives on the teaching and learning of proof. *Research in collegiate mathematics education VII*, 63-91.
- Alcock, L., & Simpson, A. (2002a). Definitions: Dealing with categories mathematically. *For the Learning of Mathematics*, 22(2), 28-34.
- Alcock, L. J., & Simpson, A. P. (2002b). Two components in learning to reason using definitions. In *Proceedings of the 2nd International Conference on the Teaching of Mathematics (at the Undergraduate Level)*.
- Bills, L., Dreyfus, T., Mason, J., Tsamir, P., Watson, A., & Zaslavsky, O. (2006). Exemplification in mathematics education. In *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, I*, 126-154.
- Bills, L., & Tall, D. (1998). Operable definitions in advanced mathematics: The case of the least upper bound. In A. Olivier and K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 104-111). Stellenbosch, South Africa: University of Stellenbosch.
- Dahlberg, R. P., & Housman, D. L. (1997). Facilitating learning events through example generation. *Educational Studies in Mathematics*, 33(3), 283-299.
- Edwards, B. S., & Ward, M. B. (2004). Surprises from mathematics education research: Student (mis) use of mathematical definitions. *The American Mathematical Monthly*, 111(5), 411-424.
- Fernández, E. (2004). The students' take on the epsilon-delta definition of a limit. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 14(1), 43-54.
- Furina, G. (1994). Personal reconstruction of concept definitions: Limits. Challenges in mathematics education: constraints on construction: *Proceedings of the 17th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia held at Southern Cross University*.
- Housman, D., & Porter, M. (2003). Proof schemes and learning strategies of above-average mathematics students. *Educational Studies in Mathematics*, 53(2), 139-158.
- Parameswaran, R. (2010). Expert mathematicians' approach to understanding definitions. *The Mathematics Educator*, 20(1), 43-51.
- Reimann, P., & Schult, T. (1996). Turning examples into cases: Acquiring knowledge structures for analogical problem-solving. *Educational Psychologist*, 31(2), 123-140.
- Roh, K. H. (2008). Students' images and their understanding of definitions of the limit of a sequence. *Educational Studies in Mathematics*, 69(3), 217-233.

- Selden, J., & Selden, A. (1995). Unpacking the logic of mathematical statements. *Educational Studies in Mathematics*, 29, 123-151.
- Selden, J., & Selden, A., (2008) Consciousness in enacting procedural knowledge. In *Proceedings of the Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education* (2008). Available at <http://cresmet.asu.edu/crume2008/Proceedings/Proceedings.html>.
- Selden, J., & Selden, A. (2009a). Teaching proving by coordinating aspects of proofs with students' abilities. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton, & E. J. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective* (pp. 339-354). New York and London: Routledge /Taylor & Francis.
- Selden, J., & Selden, A. (2009b). Understanding the proof construction process. In F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (Eds.), *Proceedings of the ICMI 19 Study Conference: Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 196- 201). Taipei, Taiwan: Department of Mathematics, National Taiwan Normal University.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
- Tall, D. O. (1980). *Mathematical intuition with special reference to limiting processes*. Paper presented at the meeting of the Fourth International Conference for the Psychology of Mathematical Education, Berkeley, CA.
- Watson, A., & Mason, J. (2002). Student-generated examples in the learning of mathematics. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 2(2), 237-249.
- Watson, A., & Mason, J. (2005). *Mathematics as a constructive activity: Learners generating examples*. Mahwah, NJ, USA: Erlbaum.
- Wilhelmi, M., Godino, J., & Lacasta, E. (2007). Didactic effectiveness of mathematical definitions: The case of the absolute value. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 2(2), 72-90.
- Zaslavsky, O., & Shir, K. (2005). Students' conceptions of a mathematical definition. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(4), 317-346.
- Zazkis, R., & Leikin, R. (2007). Generating examples: From pedagogical tool to a research tool. *For the Learning of Mathematics*, 27(2), 15.
- Zazkis, R., & Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: A case of a square. *Educational Studies in Mathematics*, 69(2), 131-148.

Concepciones de profesores de bachillerato sobre la demostración Matemática en contexto escolar

María Victoria **Ramos** Abundio

Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero

México

vick.ramath@gmail.com

Gema Rubí **Moreno** Alejandri

Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero México

alejandrigemath@gmail.com

Efrén **Marmolejo** Vega

Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero México

efrenmarmolejo@yahoo.com

Resumen

Este trabajo se enmarca dentro de las investigaciones sobre las concepciones del profesor de matemáticas y de aquellas relacionadas con las prácticas de la demostración en el aula. Se busca con este proyecto reportar concepciones que evidencian profesores de Bachillerato sobre la demostración matemática en la Geometría escolar, teniendo como referencia significativa para el análisis las funciones de la demostración que establece De Villiers (1993).

Palabras clave: concepciones de profesores, demostración, contexto escolar, Geometría y Bachillerato.

Introducción

La Dirección General de Bachillerato, en México, a partir del ciclo escolar 2009-2010 incorporó en su plan de estudios los principios básicos de la Reforma Integral de la Educación Media Superior cuyo propósito es fortalecer y consolidar la identidad de este nivel educativo, en todas sus modalidades y subsistemas; proporcionar una educación pertinente y relevante al estudiante que le permita establecer una relación entre la escuela y su entorno; y facilitar el tránsito académico de los estudiantes entre los subsistemas y las e

El programa de estudio de la Dirección General del Bachillerato 2013 de la asignatura de MATEMÁTICAS II, que pertenece al campo disciplinar de MATEMÁTICAS y se integra en cuatro cursos, conforme al marco curricular común, tiene la finalidad de

propiciar el desarrollo de la creatividad, el pensamiento lógico y crítico entre los estudiantes, mediante procesos de razonamiento, argumentación y construcción de ideas que conlleven el despliegue de distintos conocimientos, habilidades, actitudes y valores, en la resolución de problemas matemáticos que en sus aplicaciones trasciendan el ámbito escolar; para seguir lo anterior se establecieron las competencias disciplinares básicas del campo de las matemáticas, mismas que han servido de guía para la actualización del programa (7, 2013).

Además, algunos de los bloques en los que se subdivide el plan de estudios, específicamente dentro de las actividades de enseñanza se establece que el profesor demostrará a los alumnos “el teorema de Pitágoras”, “el teorema de Thales”, etc. Sin embargo, no se pide que el alumno demuestre y no se hace énfasis en enseñar, no se enseña al alumno a demostrar los teoremas. Esta situación hace necesaria la reflexión, puesto que la demostración (concepto central de la matemática como ciencia), ocupa un rol poco esclarecido en los documentos curriculares del bachillerato en la práctica dentro de su enseñanza.

En consecuencia, centrándonos en la labor docente de matemáticas en la planeación didáctica y la gestión de los procesos de aprendizaje relativos a la demostración, y su instrumentación surgen preguntas como las siguientes: ¿cómo concibe el profesor la demostración en las clases de matemáticas?, ¿qué características, en su opinión, poseen las situaciones en las que se cuestiona la validez de argumentos?, ¿cómo gestiona los procesos de argumentación y los procesos de validación?, etc.

Ahora bien, relacionado con estas cuestiones, investigaciones evidencian, al menos, tres líneas directrices: la importancia de las situaciones y procesos de validación, el desempeño de los alumnos ante el proceso de argumentación en el aula (Duval, 1999; Boero, 1999; Balacheff, 2000; Marmolejo y Moreno, 2012; Crespo, 2005), y, concepciones que tiene el profesor ante este mismo proceso (Crespo, 2005, Araujo, Giménez Rodríguez y Rosich Sala, 2006). Esta investigación se perfila en la tercera de estas líneas: busca identificar las concepciones del profesor de matemáticas de bachillerato acerca de la demostración matemática en contexto escolar.

Son de suma importancia, las investigaciones relativas al estudio de las concepciones del profesor, pues, en palabras de Llinares (1999), las concepciones inciden en la forma de enseñar del profesor, reflejando así la forma en que éste aprendió. En la misma dirección, De Gamboa, Planas y Edo (2010) afirman que existen diversas causas que contribuyen a dar explicación, al por qué los alumnos llegan a manifestar dificultades para desarrollar argumentaciones matemáticas, señalando que algunas de ellas se ven reforzadas por las dificultades de argumentación que experimentan algunos maestros de matemáticas. Remarcándose así, lo esencial del papel de las prácticas argumentativas desde la perspectiva del profesor.

Ahora bien, tradicionalmente el papel de la demostración en la enseñanza, en opinión de varios autores, se ha reducido su único tratamiento sustancial: el ámbito de la geometría euclidiana (Knuth, 2002; Wu, 1996). En particular, Wu (1996) argumenta que la escasez de la demostración fuera de la geometría es una tergiversación de su naturaleza y, en general, afirma esto contribuye a la formación de una imagen totalmente falseada de las matemáticas en sí.

Sin embargo, Araujo *et al.* (2006) arguye una razón por la que posiblemente existe una gran cantidad de estudios que usan situaciones en el contexto de la geometría euclidiana para observar las situaciones y procesos de validación:

la Geometría es una disciplina que por cierto tiempo y en algunas culturas ha sido el paradigma para mostrar estos procesos de forma solvente, puesto que casi no se ha fomentado una cultura argumentativa fuera de la demostración clásica que estableciese conclusiones a partir de premisas y definiciones anteriormente reconocidas.

Lo anterior, aunado a la presencia explícita y de manera única de la demostración en el programa de estudios de Matemáticas II (con contenidos de Geometría y Trigonometría), este

trabajo se centra en la pregunta investigación: *¿Qué concepciones sobre la demostración en la geometría escolar evidencian profesores de Bachillerato?* Así, el objetivo de la investigación es identificar y caracterizar concepciones de un grupo de profesores de Geometría en Bachillerato acerca de la demostración en contexto escolar.

Marco Conceptual

En esta investigación asumiremos la definición de concepciones en consonancia con la propuesta por Ponte (1994): “las concepciones son marcos organizadores implícitos de conceptos, con una naturaleza esencialmente cognitiva y que condicionan la forma en que afrontamos las tareas”.

A modo de filtros, las concepciones son, a la par, condición y límite de nuestro conocimiento de la realidad. Además, permiten interpretar esta realidad a la vez que son elementos bloqueadores de esta interpretación (Ponte, 1992).

Tal como señala Gil y Rico (2003), las concepciones son mantenidas con plena convicción, son consensuadas y tienen procedimientos para valorar su validez. En tanto que, *las creencias son las "verdades" incontrovertibles personales en poder de todo el mundo, que se deriva de la experiencia o de la fantasía, con un fuerte componente afectivo y evaluativo.*

El interés en el estudio de las concepciones se basa en el supuesto de que este substrato conceptual juega un papel esencial en el pensamiento y la acción. En lugar de referirse a conceptos específicos, constituyen una forma de organización de ellos, de ver el mundo, de pensar. Sin embargo no pueden reducirse a los aspectos observables más inmediatos de la conducta y no se evidencian con facilidad.

Ahora bien, aunque es importante el análisis de las concepciones del profesor sobre la demostración matemática como objeto científico, el interés de esta investigación se centrará en analizar cuál es la concepción del profesor sobre este objeto desde la enseñanza. Así que se asume a la demostración matemática no sólo en el sentido formal, sino que también en sus posibles matices escolares. De manera que, el análisis que se hace sobre las concepciones de la demostración en este trabajo de investigación tiene varias dimensiones que se asumen como categorías de análisis: Tipo de demostraciones, Naturaleza de la Demostración en la Matemática Escolar y Funciones de la Demostración Matemática.

Niveles de Formalidad de la demostración

Knuth (2002b) categoriza en tres diferentes grados de formalidad a la demostración, de acuerdo a las respuestas del profesor: pruebas formales, pruebas menos formales, y pruebas informales.

- **Pruebas formales.** Las descripciones son de naturaleza muy ritualista, vinculada en gran medida a los formatos prescritos y/o al uso de un lenguaje en particular (cf. Martín & Harel, 1989, citado en Knuth, 2002b).
- **Pruebas menos formales.** Son pruebas que no necesariamente tienen una estructura rígidamente definida o no se perciben como "matemáticamente rigurosa".
- **Pruebas informales.** Las pruebas de esta naturaleza podrían describirse mejor como argumentos en los que uno ofrece razones para justificar las acciones matemáticas propias o presentar ejemplos para respaldar las afirmaciones de uno (en ambos casos, los argumentos no se considerarían pruebas válidas).

De manera análoga, en este trabajo de investigación, pretendemos en esta categoría identificar los niveles de formalidad de la demostración en el contexto escolar, conciben los profesores.

Naturaleza de la Demostración en la Matemática Escolar (ME)

Con respecto a la naturaleza de la demostración matemática en bachillerato se asumieron tres subcategorías para el análisis de la información, a continuación se describen:

- **Importancia de la demostración en la ME.** Se refiere a todo aquello que tiene que ver con lo que para él consiste una demostración (como objeto de enseñanza) y la importancia que el profesor le asocia a la demostración para ser enseñada en el aula.
- **Demostración en el currículo.** Tiene que ver con la interpretación que el profesor hace sobre las recomendaciones y particularidades establecidas en los programas de estudios en relación a la demostración.
- **Demostración para los estudiantes.** Se refiere a aquellos aspectos que el profesor considera posee un estudiante para introducirlo a la demostración y en ese sentido que evalúa de ellos al desarrollar una demostración en contexto escolar.

Las funciones de la demostración matemática

Se entiende por *función de la demostración* al propósito o a la utilidad que tiene la demostración para quién la propone o para quien la interpreta. En este sentido, es de gran utilidad la caracterización que reporta De Villiers (1993) sobre las funciones de la demostración en matemáticas.

Una caracterización sobre las funciones de la demostración en matemáticas, según De Villiers (1993), sin orden específico de importancia se describe a continuación:

- **Verificación.** La demostración se ocupa de la veracidad de un enunciado.
- **Explicación.** La demostración proporciona información sobre por qué es cierto determinado enunciado.
- **Sistematización.** Otra función es la de organizar varios resultados en un sistema deductivo de axiomas, los principales conceptos y teoremas.
- **Comunicación.** La demostración comunica conocimiento matemático.
- **Descubrimiento.** La demostración juega un papel importante en el descubrimiento o la invención de nuevos resultados.

Aunque las cinco funciones pueden ser diferenciadas unas de otras, a menudo están intrínsecamente relacionadas en casos específicos. En algunos, ciertas funciones pueden dominar sobre otras, en otros casos, algunas de estas funciones son inexistentes.

Metodología

Adaptamos la metodología que Knuth (2002a y 2002b) ha utilizado en su trabajo, considerando dos fases para estudiar las concepciones de los profesores: primero, desde la postura del profesor como alguien que tiene conocimiento matemático y segundo, desde la postura como profesor de matemáticas. Nuestra atención se centra en la segunda fase, sin embargo los resultados de la primera fase son de interés en el análisis de la segunda.

Sujetos de estudio

Los participantes son profesores de matemáticas de bachillerato en servicio. La selección de dichos participantes se hizo considerando las siguientes características:

- Adscritos al subsistema Colegio de Bachilleres (COBACH) de distintos planteles educativos del estado de Guerrero.
- Con formación académica que les haya proporcionado cierta experiencia con la demostración matemática.
- Que tuvieran más de cuatro años de experiencia docente de Matemáticas en ese nivel educativo.
- Que hubiesen impartido al menos un par de veces la asignatura cuyo contenido temático es referente a la Geometría y Trigonometría.

Proceso metodológico para la recolección de datos

La fuente de datos consistió en dos entrevistas semi-estructuradas. Cada entrevista duró aproximadamente una hora y media, fue grabada en audio y video, a partir de dos fases distintas constituidas por etapas como se muestra en la figura 1. El objetivo de las entrevistas, es identificar las categorías establecidas en el marco conceptual, en las respuestas del profesor.

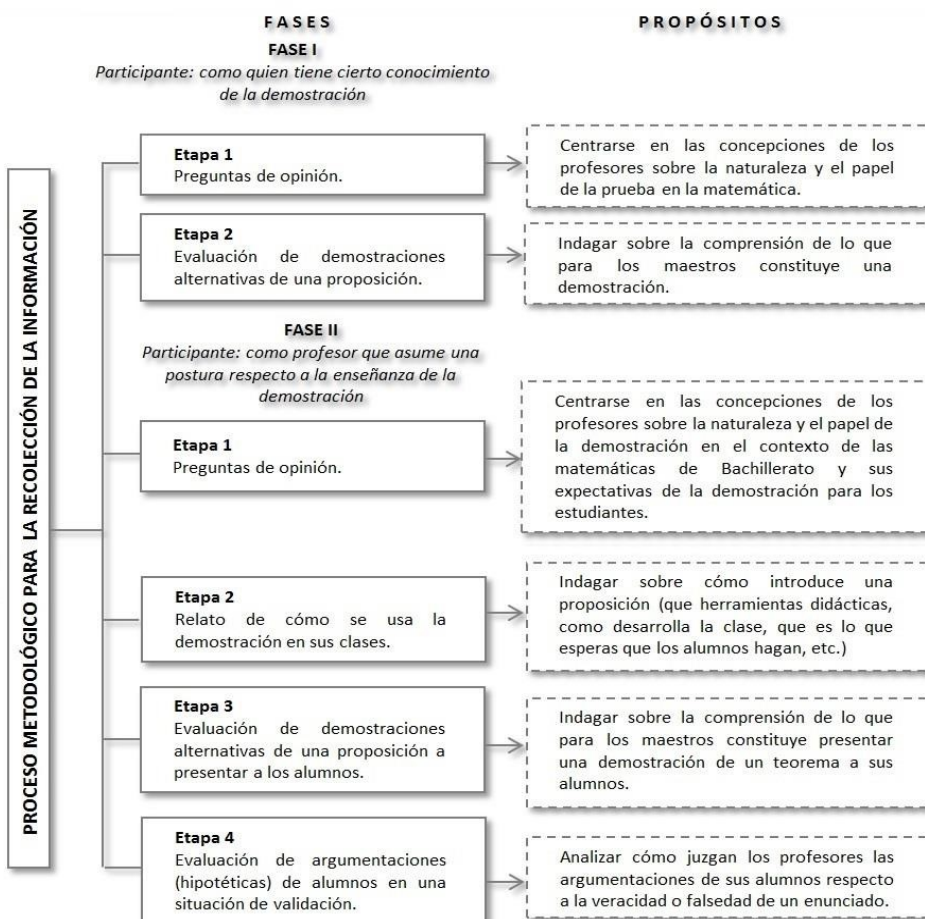


Figura 1. Proceso metodológico para la recolección de datos.

Proceso metodológico para el análisis de datos

Para la transcripción de las entrevistas grabadas se optó por considerar las convenciones ortográficas según Farías y Montero (2005), sin embargo se añadieron y/o modificaron algunas de ellas, de acuerdo al contexto en el que se desarrolló la investigación y con el fin de comprender mejor el discurso del profesor (Pinto, 2008).

Una vez realizada la transcripción, se procedió al análisis de estas, considerando las categorías establecidas. Como se muestra en la siguiente figura:

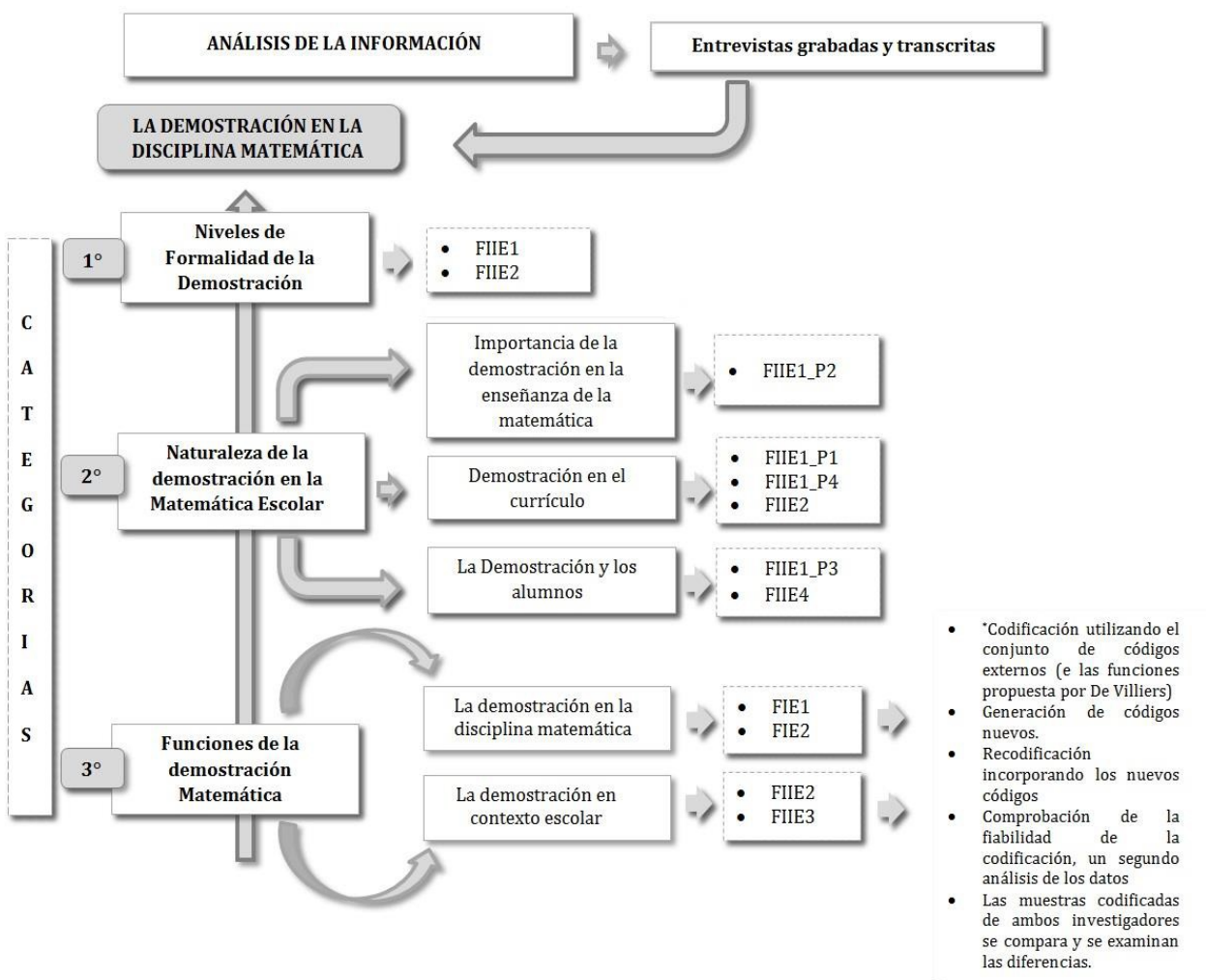


Figura 2. Proceso metodológico para el análisis de la información.

Resultados

En este apartado, por cuestiones de espacio sólo se presenta el caso del profesor A, de los tres analizados y, de manera general, se presenta en contraste las concepciones de los tres profesores participantes.

Los tres profesores participantes, poseen antecedentes biográficos, formación profesional y experiencia docente heterogénea. Sus años de experiencia variaban de tres a veintinueve años y sus materias que impartían variaban, pero todos han impartido Geometría en más de 4 ocasiones.

Caso profesor A

Respecto a la demostración matemática, ésta es concebida como ‘una serie de pasos dan cuenta de dónde proviene’ o ‘del porqué de la validez’ de un enunciado. Incluso, el profesor asume que una propiedad matemática se demuestre significa buscar ‘como explicarla o como aplicarla’.

En relación a la argumentación y la demostración:

- Considera que, en el contexto matemático, ‘argumentar es dar un punto de vista y demostrar es decir el por qué algo es válido’, señalando una significativa diferencia entre estas palabras.
- En el contexto escolar, usa ‘argumentación’ asociándole la exigencia del ‘por qué’. Por otro lado, en cierto momento asocia un argumento con la acción de ‘probar’ y lo coloca al mismo nivel de otro que a su vez asocia con ‘demostrar’. De esta manera, deja clara una relación cercana (incluso equivalente) entre ‘demostrar’, ‘argumentar’ y ‘probar’.

Esta apertura a la semántica de la palabra ‘demostrar’, tuvo como consecuencia que en el proceso de evaluación de argumentos hiciera uso (como redundantes) de las palabras ‘explicar’, ‘demostrar’, ‘argumentar’ y ‘probar’.

Considera esta ‘serie de pasos’ con tres niveles de formalidad: ‘demostración rigorista’, ‘demostración no tan rigorista’, y, ‘demostraciones visuales’.

Marca una diferencia entre ambos contextos (matemático y escolar) sólo indicando que preferentemente no se debe llevar a la práctica escolar una demostración ‘rigorista’. Incluso asume que las ‘demostraciones medio formales’ y las ‘informales’ son suficientes para que el alumno se convenza de la validez de un enunciado, y ya no sienta la necesidad de saber el porqué.

Respecto a las funciones que le asocia a la demostración en ambos contextos:

- En el contexto matemático, hace alusión a la función de verificación de la demostración matemática, pero evidenció su inclinación por la función explicativa de la misma. Incluso, recalca la importancia de la visualización en el proceso de demostración. En este contexto identifica a las ‘demostraciones visuales’, aunque no las cataloga como ‘demostraciones formales’.
- En el contexto escolar, las funciones de la demostración matemática asociadas fueron: la explicación y la verificación (principalmente cuasi-empírica). Destacando de esta última el potencial de la visualización en ella.

En la evaluación de los argumentos que pretendían demostrar un enunciado o fundamentar su validez el Teorema de Pitágoras, en el contexto matemático aunque distinguió diferentes niveles de demostraciones, no pudo establecer los requisitos necesarios para que un argumento alcanzara el estatus de demostración matemática en sentido formal. Es posible observar una comprensión y asimilación elemental y concreta de la demostración según Zillmer (1981), pues en sus evaluaciones de argumentos mostró que comprende la demostración matemática pero no evidenció la estructura lógica de los enunciados o una toma de conciencia de las inferencias ni de las reglas de inferencias usadas. Más bien, sus criterios de evaluación, tanto en contexto escolar como el contexto matemático, se vieron determinados

por aspectos no de tipo: predilección, uso previo del argumento en su práctica docente, la familiaridad con los contenidos inmersos en el argumento, y, la poca o nula explicación. En general, mostró una tendencia a priorizar el pensamiento inductivo, de ahí que se concentrara en la exigencia de ejemplos y no, por ejemplo, en cuestionar cómo se infería la conclusión deseada.

Aún más, la confianza y la convicción, en su caso, no estaba atada a la función de la demostración sobre la verificación (en un sentido formal), ni siquiera a la de explicación, más bien se fundamentaba en la visualización y la predilección.

Se declara a favor de lo que el Programa de estudios propone respecto a ‘demostrar’. De hecho, propone que el tratamiento didáctico-metodológico que le da al Teorema de Pitágoras en el aula considera: Construcción de un rompecabezas pitagórico - Armado del rompecabezas como ‘demostración visual’ - ‘Demostración más rigorista’ con predominio algebraico. Sin embargo, reconoce que generalmente pasa por alto actividades de demostración y ‘únicamente introduce a través de ejemplos’ los teoremas y se lamenta de que los alumnos se queden ‘sin un sustento del porqué’.

También, es interesante que el profesor A, alertara sobre un fenómeno que percibe a la hora de introducir la demostración matemática en el aula: si primero se trabaja con rompecabezas, el alumno acepta como considerar válido al Teorema de Pitágoras con tan solo esos argumentos de tipo empírico. Si después se aborda una demostración cuyo contenido conceptual es esencialmente distinto al involucrado en los rompecabezas, advierte que los alumnos no lograrían entender con qué intención se abordaría la otra demostración. Así, asume que la verificación, no la formal, sino la cuasi-empírica, resulta suficiente para que el alumno se convenza de la validez de un enunciado, y ya no sienta la necesidad de saber el porqué.

La comprensión elemental de la demostración matemática forma parte fundamental en las decisiones que toma en el ámbito escolar acerca de la demostración en este contexto, esto es evidente en las evaluaciones de argumentos que realizó. Su formación profesional también es relevante de manera significativa, pues lo que considera ‘rigorista’ y ‘no tan rigorista’ así como su aceptación de las ‘demostraciones visuales’ deviene de su experiencia en cierto curso en la Licenciatura y lo toma como parámetro para evaluar su quehacer en el aula. Y otro aspecto trascendente en su toma de decisiones es el gusto adquirido al obtener mejores resultados en su práctica docente.

El contraste entre las concepciones de los profesores

Los profesores entrevistados manifestaron diferentes puntos de vista acerca de la demostración matemática en relación a su función y al propósito que esta tiene en el aula de clase. En general, los tres casos analizados son una muestra de que, en concordancia con la investigación de Crespo (2004) “la demostración, concepto central en la matemática como ciencia, no lo es dentro de su enseñanza”.

Las funciones de la demostración, propuestas por De Villiers, en la matemática escolar que se evidenciaron en las entrevistas son sólo dos, la de verificación y la explicativa. Sobresaliendo la explicación del porqué de manera significativa.

La función de la verificación de la demostración fue evidenciada, con diferente enfoque:

- Por dos profesores como un medio para establecer que una proposición sea verdadera o falsa, a partir de argumentos cuasi-empíricos, resultándoles suficiente para que al alumno se convenza de la validez de un enunciado y ya no sienta la necesidad de saber el porqué.
- Mientras que para el otro, su postura deja ver que los argumentos cuasi-empíricos no son suficientes para que una argumentación logre el estatus de una demostración matemática, sino procura fundamentar sus afirmaciones usando algunas reglas de inferencia.

La función explicativa de la demostración fue asumida por los profesores en dos sentidos:

- Dos profesores al referir esta función de la demostración, su enfoque tiene una apertura tal que no se centraba en el razonamiento a nivel concepto, sino de manera global (sin dar mucho detalle y evidenciando basarse en fenómenos visuales o hechos sin fundamentos pero para ellos evidentes) mostrar como una declaración llega a ser cierta.
- Otro profesor deja ver que esta función de la demostración matemática se centra en el razonamiento en los conceptos matemáticos subyacentes que determinan por qué un enunciado es verdadero, pero se declara en contra de que se realicen demostraciones matemáticas en el nivel bachillerato.

Es interesante que en la identificación de las funciones de la demostración matemática en contexto escolar se dejara de lado: el desarrollo del pensamiento lógico; el papel de la interacción social y, por ende, el reconocimiento de la matemática como una construcción social; y, su papel en la producción de conocimiento por parte del alumno.

También es de interés que los tres profesores afirman que trabajan en el aula usando como eje principal la resolución de problemas, pero excluyen los problemas de deducción de la categoría de problemas.

Ahora bien, en el caso de los profesores A y C, la convicción de la validez de varias afirmaciones incluidas en los argumentos a evaluar, provenían de sustentos empíricos y su análisis está fundamentado en unas creencias que no se hacen explícitas y ni son analizadas por el sujeto mismo. A modo de ejemplo, está el caso en el que el profesor A, elige como buen argumento para validar el enunciado “la suma de los ángulos interiores de un triángulo” el argumento de David: “Si ponemos tres puntos en línea, vemos que no se forma ningún ángulo..., pero en el momento de mover uno vemos que se puede unir, creando ángulos”.

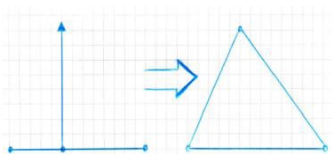


Figura 3. Representación hecha por David.

Este profesor afirma que este argumento es el más convincente reinterpretando la intencionalidad y el supuesto fundamento de este alumno al argumentar, al descifrarlo así:

Sabemos que cuando le ponemos el transportador, mide 180 [...] Aquí no tenemos ningún triángulo formado, sino que lo que está haciendo es poner tres puntos, pero lo que está haciendo... por ejemplo, con un programa GeoGebra u otro, lo que podemos hacer es jalar el punto de en medio hacia arriba y formamos lo que es el triángulo y sabemos que va a medir exactamente lo mismo que mide acá [refiriéndose al ángulo llano] que mide 180°. Si jalamos el punto de en medio y lo ponemos aquí y ponemos el transportador

tenemos que estos 180° se repartieron en los tres puntos... Siento que está muy claro, muy lógico y el que más me gusta es este [...].

En su elección de este argumento no profundizó lo suficiente en los conceptos matemáticos subyacentes, no se aseguró de que la conclusión de la argumentación fuera equivalente a la tesis del enunciado, tampoco cuestionó si tiene sentido que el mover el vértice de un ángulo llano, implique que “*el ángulo de 180° se tiene que repartir entre los tres*”. Simplemente lo afirmó con una fuerte convicción como evidente. Los fenómenos que visualmente percibe como reales y explicables, desde su punto de vista, se vuelven el fundamento principal para identificar como verdadero o falso un enunciado.

En general, en los procesos de evaluación de argumentos, estos profesores no cuestionan las reglas de validación movilizadas por sí mismos en este proceso para fundamentar su posición.

Sólo los profesores A y B reconocieron cierto valor prototípico de un ejemplo. Para el profesor C, el campo semántico de la palabra ‘demostrar’ incluía a la ejemplificación. A este respecto, Balacheff (2000) advierte de un fenómeno didáctico acerca de la utilización de los ejemplos para propósitos de enseñanza y el significado para los alumnos: Los ejemplos permiten mostrar algunas propiedades, pero también reciben la condición de hecho, lo cual oscurece la necesidad de los procesos de demostración.

Respecto al momento en el que los estudiantes deberían ser introducidos a la demostración, los profesores A y C sugirieron que se podrían con contenidos geométricos. A uno de ellos, le pareció que es conveniente desde nivel Bachillerato, mientras que el otro opina que es posible desde la educación secundaria e inclusive en otras áreas, como el álgebra. Y el profesor B la ubica solamente para el nivel Universitario y en carreras con especialización matemática.

Todo lo anterior incide directamente en su opinión y bajo sus percepciones afirman sobre la conveniencia de la demostración en el nivel bachillerato.

La influencia del programa curricular, respecto a la demostración en contexto escolar, en la práctica docente de los profesores entrevistados no es significativa, pues el énfasis promovido gira en torno a que el alumno resuelva ejercicios o problemas de su entorno aplicando los teoremas de Tales y Pitágoras (únicos contenidos en los que se hace explícita a la demostración). Aunado a ello, la poca claridad de lo establecido en el programa curricular a este respecto influye en que sea interpretado únicamente a partir de lo que el profesor concibe como demostración en contexto escolar.

Estas características de su formación en la licenciatura de cada profesor tienen clara correspondencia con el nivel mostrado en la comprensión de la demostración.

De manera subyacente, es posible vislumbrar lo que para los profesores es la matemática como medio para la estructuración del entorno mediante el planteamiento, análisis y solución de problemas y/o como consideración de las problemáticas surgidas de la construcción de la matemática, de sus formas de trabajo y de pensamiento. Esta visión juega un papel importante en la emisión de juicios respecto a lo que constituye una demostración matemática.

En conclusión, observamos, que profesores del mismo subsistema con un perfil similar, tienen concepciones distintas sobre la demostración en contexto escolar y, cómo es que

éstas influyen en la interpretación del programa de estudios y las decisiones que toman en el proceso de planificación. De modo que, esta investigación reafirma que las concepciones inciden en la forma de enseñar del profesor.

Referencias y bibliografía

- Araujo, J., Giménez, J., & Rosich, N. (2006). Afectos y demostraciones Geométricas en la formación inicial docente. *Enseñanza de las ciencias*, 2(3), 371-386.
- Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Recuperado de: <http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/52/01/33/PDF/Balacheff2000Proceso.pdf>
- Boero, P. (1999). Argumentación y demostración. Una relación compleja, productiva e inevitable en la Matemáticas y la Educación Matemática. *Preuve*. Recuperado de: <http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Newsletter/990708Theme/990708ThemeES.ht>
- Crespo, C. R. (2005). La importancia de la argumentación matemática en el Aula. *Revista Premisas*, 24, 23-29. Recuperado de: <http://www.soarem.org.ar/revistapremisa.htm#>
- De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Épsilon*, 26, 16-30.
- Duval, R. (1999). *Argumentar, demostrar, explicar: ¿Continuidad o ruptura cognitiva?* México, D. F.: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Godino, J., & Recio A. (1997). Significado de la demostración en educación matemática. *Preuve*. Recuperado de <http://www.lettredelapreuve.it/OldPreuve/Resumes/Godino/Godino97ES.html>
- Knuth, E. (2002a). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 379-405.
- Knuth, E. J. (2002b). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 5(1), 61-88.
- Marmolejo, E., & Moreno, G. (2012). La demostración en contexto escolar: Argumentación en la "Demostración". *Trabajo presentado en XIV Evento Internacional "MATECOMPU 2012"*. Noviembre, Cuba.
- SEP (2013). *Programa de Estudio de Matemáticas II de la Dirección General del Bachillerato*. México, D. F.
- Zillmer, W. (1981). *Complementos de Metodología de la Enseñanza de la Matemática*. Ministerio de cultura. Cuba: Editorial de Libros para la Educación.

Construcción de la matriz cambio de base: un análisis cognitivo en términos de la Teoría APOE

Esteban **Mendoza** Sandoval

Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero
México

emendoza@uagro.mx

Solange **Roa Fuentes**

Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander
Colombia

roafuentes@gmail.com

Flor M. **Rodríguez** Vásquez

Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero
México

flor.rodriguez@uagro.mx

Resumen

El presente trabajo constituye parte de un proyecto de investigación que se inserta en el campo de la Matemática Educativa. El proyecto en general tiene como objetivo realizar una descomposición genética del concepto matriz cambio de base, que hace parte de los cursos básicos de Álgebra Lineal. Buscamos proponer una vía alternativa para la enseñanza de dicho concepto sobre la base de la teoría APOE; ésta es una teoría cognitiva que describe a partir de estructuras (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) y mecanismos (interiorización, coordinación, encapsulación, entre otros) cómo un individuo construye conocimiento matemático. En particular, presentamos algunos antecedentes, aspectos teóricos y metodológicos, asimismo mostramos un diagnóstico que será aplicado a estudiantes de nivel superior que refiere a los conceptos previos que son necesarios para la comprensión del concepto matriz cambio de base que harán parte fundamental de la descomposición genética.

Palabras clave: descomposición genética, álgebra lineal, matriz cambio de base, estructuras, mecanismos.

Introducción

El presente trabajo constituye parte de un proyecto de investigación que se inserta en el campo de la Matemática Educativa (ME). Estos avances datan a las estructuras previas que deben tener estudiantes de Licenciatura en Matemáticas para la construcción del concepto matriz de cambio de base, dicho concepto trasciende dado que es un tema que aparece en los cursos de álgebra lineal de prácticamente todas las profesiones debido a las posibilidades de aplicación y solución a diversos problemas. La principal función de dicha matriz es transitar de unas coordenadas a otras, puesto que resultados más importantes se obtienen a partir de la capacidad que se tenga para cambiar de un sistema de coordenadas, es decir, de cambiar de base ordenada. El concepto matriz cambio de base se incluye en la formación de un estudiante de matemáticas, licenciados en matemáticas, e ingenierías en un primer curso de álgebra lineal y está articulado a otros conceptos como: combinación lineal, espacio vectorial, dimensión, conjunto generador, independencia lineal, coordenadas de un vector y base ordenada de un espacio vectorial.

Centraremos nuestra atención en los conceptos de base ordenada de un espacio vectorial y coordenadas de un vector, puesto que creemos que estos dos conceptos son fundamentales para la construcción del concepto de interés. Así hemos elaborado un análisis hipotético con base en nuestra experiencia y consulta de libros de texto de álgebra lineal, la cual será refinada por medio de una entrevista que aplicaremos a estudiantes de la Universidad Industrial de Santander (UIS, Colombia) después de haber participado en dos cursos de álgebra lineal.

La enseñanza y el aprendizaje en álgebra lineal

El álgebra lineal es una unidad de aprendizaje que se propone en diferentes planes de estudio de educación superior, debido a su importancia por las aplicaciones en las que trasciende. Los resultados teóricos en diferentes disciplinas profesionales hacen de esta asignatura y de sus conceptos un interesante objeto de estudio. Sin embargo dada su naturaleza abstracta, su tratamiento en el aula resulta complejo y, en consecuencia el aprendizaje de los estudiantes respecto de estos temas resulta endeble. Para Dorier citado en Roa-Fuentes (2008) cuando se presenta por primera vez los conceptos básicos de álgebra lineal a los estudiantes, sienten como si “aterrizaran en un nuevo planeta en el cual no logran ubicarse”.

Asimismo en álgebra lineal hay diferentes investigaciones en diversos tópicos de ella, tales como sistemas de ecuaciones (Trigueros, Oktaç y Manzanero, 2007), espacio vectorial (Oktaç, Trigueros y Vargas, 2006; Parraguez y Oktaç, 2010; Trigueros y Oktaç, 2005), transformación lineal (Roa-Fuentes, 2008; Roa-Fuentes y Oktaç, 2010, 2012), Base de un espacio vectorial (Kú, 2007) por mencionar algunos, estos trabajos son abordados desde la teoría APOE. Por otro lado existen trabajos referente al álgebra lineal (Sierpinski, Nnadozie y Oktaç, 2002; Dorier, Robert, Robinet y Rogalski, 1997), Oktaç y Trigueros (2010) que atienden cuestiones referentes a la naturaleza epistemológica del álgebra lineal, diseños didácticos y uso de diversos tipos de lenguaje, fuentes de obstáculos en el aprendizaje, entre otras.

Particularmente partimos del supuesto que existen dificultades para el aprendizaje del concepto matriz cambio de base esto es, dadas dos bases ordenadas de un mismo espacio vectorial, construir dicha matriz para espacios vectoriales como $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$, ambos sobre el campo de los números reales, los cuales deben de ser para los estudiantes espacios vectoriales bien estudiados en un curso inicial de álgebra lineal. Tenemos por tanto la hipótesis de que los alumnos no cuentan con argumentos necesarios para la construcción de dicha matriz en un caso general; es decir, para la construcción de la matriz cambio de base dado cualquier espacio vectorial de dimensión finita y cualesquiera dos bases ordenadas. Así pues, como una primera fase en nuestro afán de proponer un camino cognitivo para la construcción de nuestro objeto de interés, nos hemos planteado como objetivo: diseñar una descomposición genética hipotética del concepto matriz cambio de base y con esta herramienta proponer una alternativa de enseñanza que ayude a estudiantes universitarios a superarlas. Particularmente en este escrito se presenta únicamente una parte concerniente al marco teórico y el método que guía el desarrollo de nuestro trabajo.

La teoría APOE y su paradigma de investigación

Como hemos mencionado nuestra investigación se basa en la teoría APOE. Esta teoría es iniciada y desarrollada por Ed Dubinsky y miembros de *Research in Undergraduate Mathematics Education Community* (RUMEC por sus siglas en inglés) (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews y Thomas 1996; Dubinsky, 1996), la cual se basa en una reinterpretación del constructivismo a partir del concepto de *abstracción reflexiva* de Piaget.

Para efectos de esta investigación entenderemos por abstracción reflexiva, en el sentido de Dubinsky (2000), como los mecanismos necesarios para la construcción de objetos mentales a partir de las acciones físicas y/o mentales sobre estos objetos.

A continuación describimos las construcciones mentales que propone la Teoría APOE; entendidas éstas como todas las transformaciones que realizan los individuos para resolver determinadas tareas y que puedan tener significado de ellas, las cuales pueden darse como reconstrucciones exactas (correspondiente a la memoria y a la repetición de métodos, algoritmos previamente conocidos) o adaptaciones de algo previamente aprendido. Asimismo explicaremos brevemente los mecanismos mentales los cuales hacen transitar a un individuo de una estructura a otra.

Acción. Una acción consiste en una transformación de un objeto que es percibida por el individuo como externa y se realiza como una reacción a sugerencias que proporcionan detalles de los pasos a seguir. Un individuo que tiene una profunda comprensión sobre un cambio dado puede ejecutar una acción cuando sea necesario, pero no se limita a operar en el nivel de acciones. (Asiala et al., 1996, p.9)

Por ejemplo, en el caso del concepto de función, "una persona que requiere una expresión explícita para poder pensar en el concepto de función y puede hacer un poco más que sustituir la variable en la expresión y manipularla se considera que tiene una concepción acción del concepto de función" (Dubinsky et al., 2005 a, p. 338). Por lo tanto, la expresión actúa como una señal externa que indica cómo se debe realizar la acción, paso a paso, por la sustitución de valores específicos.

Por otra parte los procesos se construyen utilizando uno de los mecanismos mentales: *interiorización o coordinación*. El primero significa que alguna construcción interna se hace en relación a la acción, este mecanismo permite interiorizar las acciones y obtener una concepción proceso, el segundo se utiliza para coordinar más de un proceso en un solo proceso, puesto que para encapsular esta estructura mental, se requiere de un único proceso y no de varios.

Proceso. Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede interiorizarse en un proceso. Es decir se realiza una construcción interna que ejecuta la misma acción en la mente del individuo, pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo. Un individuo que tiene una concepción de proceso de una transformación puede reflexionar sobre ella, describir, o incluso invertir los pasos de la transformación sin realizar dichos pasos. (Asiala et al., 1996, p. 10)

Por ejemplo en álgebra lineal: cuando las acciones involucradas en la construcción de una n-tupla están interiorizadas en un proceso, el individuo puede construir mentalmente una n-tupla incluso cuando no este especificado n; el individuo también puede considerar la construcción de n-tuplas en cualquier espacio vectorial (Arnon et al., 2014). Cuando un individuo tiene una concepción proceso puede mediante el mecanismo *encapsulación* pasar a la estructura mental objeto, para ello menciona Arnon y otros (2014) que se tiene que aplicar una acción sobre un proceso, es decir el individuo debe ver una estructura dinámica (proceso) como una estructura estática sobre el cual pueden aplicar acciones. Así pues, es como tenemos la siguiente estructura mental.

Objeto. Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones (ya sean

acciones o procesos) que pueden actuar sobre él, y puede construir de hecho esas transformaciones, entonces está pensando en este proceso como un objeto. En este caso, decimos que el proceso ha sido encapsulado en un objeto. (Asiala et al., 1996, p. 11)

Consideremos en álgebra lineal la comparación de n-tuplas o realizar operaciones binarias de n-tuplas, son estas acciones específicas sobre las n-tuplas. Pero para poder realizar dichas acciones necesitamos que la concepción proceso de la n-tupla sea encapsulada en un objeto. La última estructura mental es el esquema.

Esquema. Se caracteriza por su dinamismo y su reconstrucción continua el cual está determinado por la actividad matemática que involucra el individuo en situaciones matemáticas específicas. La coherencia de un esquema es determinado por la capacidad del individuo para determinar si se puede utilizar en una situación matemática particular. Una vez que el esquema se construye como una colección coherente de estructuras (acciones, procesos, objetos, y otros esquemas) y las conexiones que se establecen entre esas estructuras, que pueden transformarse en una estructura estática (Objeto) y / o utilizado como una estructura dinámica que asimila otra Objetos relacionados o esquemas (Arnon et al., 2014, p.25).

Por ejemplo, un esquema para un espacio vectorial puede incluir n-tuplas y matrices como objetos, y polinomios, funciones como procesos. Todas estas estructuras pueden estar relacionadas por tener propiedades en común, satisfacer los axiomas de espacio vectorial. La concepción esquema como un objeto mental se logra a través del mecanismo mental *tematización*. Cada una de las caracterizaciones anteriores nos ayudará a identificar qué tipo de concepción tienen los estudiantes respecto del concepto matriz cambio de base (Dubinsky, 1991).

Un proyecto de investigación y/o plan de estudios basado en la APOE involucra tres componentes: análisis teórico, diseño e implementación de enseñanza, y recolección y análisis de datos (Arnon et al, 2014) la Figura 1 muestra cómo se relacionan estas componentes.

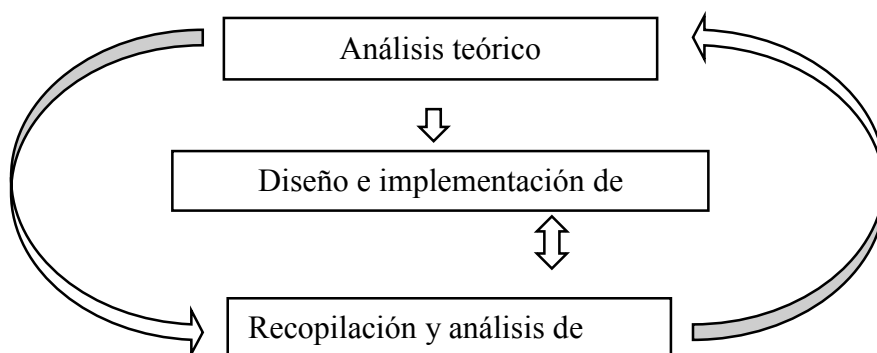


Figura 1. Ciclo de investigación (adaptado de Asiala et al., 1996)

Con este panorama teórico tomaremos las descripciones generales mostradas en Arnos y otros (2014) para explicar cada componente del ciclo. Una investigación se inicia con un análisis teórico del concepto a estudiar, esto da lugar a una descomposición genética preliminar la cual es una descripción de las construcciones y mecanismos mentales que puede hacer un sujeto para la comprensión del concepto, el análisis impulsa al diseño y aplicación de enseñanza el cual a través de distintas actividades promuevan las construcciones mentales requeridas por el análisis, la recopilación y análisis de datos por su parte es una componente que retroalimenta al análisis hipotético inicial la veces que sea necesario.

Análisis teórico: Este ciclo de investigación parte de un análisis teórico sobre el concepto donde se considera el análisis de los libros de texto y la experiencia del investigador para determinar un posible camino viable para la construcción de un concepto, a dicho camino se le considera una descomposición genética preliminar del concepto, la cual es una descripción de las construcciones y mecanismos mentales que una persona puede hacer en la construcción de un concepto matemático.

Diseño e implementación de enseñanza: Estas actividades son impulsadas por el análisis teórico destinadas a fomentar las construcciones mentales requeridas por el análisis. Actividades y ejercicios diseñados para ayudar a los estudiantes a construir acciones, interiorizar a acciones en procesos, coordinar dos o más procesos para generar nuevos procesos y encapsular a los procesos en objetos.

Recopilación y análisis de los datos: La fase de recopilación y análisis de datos es crucial para la investigación basada en la teoría APOE, ya que sin evidencia empírica, una descomposición genética sigue siendo una mera hipótesis. El propósito del análisis de datos es responder a dos preguntas: ¿Los estudiantes parecen hacer las construcciones mentales descritas por la descomposición genética? ¿Qué tan bien los estudiantes aprenden el concepto de que se trata? Diferentes tipos de instrumentos se pueden utilizar para indagar sobre estas preguntas, depende mucho del objetivo de la investigación, éstos pueden incluir cuestionarios por escrito entrevistas semi-estructuradas (audio y/o grabadas en vídeo), etc.

Método en esta investigación

Tomando en cuenta el paradigma de investigación de la teoría APOE y cómo los componentes de dicho ciclo están mutuamente relacionados, en el presente trabajo nos basaremos en la primera y la tercera componente, es decir, solo transitaremos entre el Análisis Teórico el cual iniciamos con un análisis de las diferentes definiciones y el tratamiento que se le da a nuestro concepto de estudio, aunado a nuestra experiencia y tomando conceptos relacionados al de nuestro objetivo, deducimos la importancia de requisitos previos que necesita un estudiante para la comprensión de nuestro concepto, y para la componente Recopilación y análisis de datos, hemos diseñado un diagnóstico y una entrevista con el fin de refinar nuestra descomposición hipotética, y validar la necesidad de nuestros requisitos previos mediante un diagnóstico el cual además de validar los requisitos previos nos dará información sobre aquellos conceptos relacionados a la matriz cambio de base y no consideramos. Posteriormente usaremos el diagnóstico como un cedazo para aplicar una entrevista a estudiantes, dicha entrevista nos brindará información sobre las estructuras mentales que hemos considerado y recaudaremos aspectos que no consideramos a través de las respuestas obtenidas por parte de los estudiantes, esto con el fin de refinar la descomposición genética hipotética que se tiene.

Análisis teórico de la matriz cambio de base

Sobre este concepto es posible encontrar diferentes definiciones en los libros de texto. En algunos libros de álgebra lineal recibe el nombre de “Matriz de transición”; a continuación aparecen algunas de las definiciones que hemos tenido en cuenta para la construcción de nuestra descomposición genética hipotética:

Definición. Si $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ y $B' = \{u'_1, u'_2, \dots, u'_n\}$ son bases de un espacio vectorial V , entonces la **matriz de transición de B a B'** es la matriz de $n \times n$

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

donde

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} = [\mathbf{u}_1]_{B'}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} = [\mathbf{u}_2]_{B'}, \dots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} = [\mathbf{u}_n]_{B'}$$

(Anton, 1973, p. 237).

Definición. Sean $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ y $C = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ bases para un espacio vectorial V . La matriz de $n \times n$ cuyas columnas son los vectores coordenados $[u_1]_C, \dots, [u_n]_C$ de los vectores en B con respecto a C se denota $P_{C \leftarrow B}$ y se llama matriz de cambio de base B a C . Esto es,

$$P_{C \leftarrow B} = [[u_1]_C \ [u_2]_C \ \dots \ [u_n]_C] \text{ (Poole, 2011, p. 483).}$$

Para expresar esta idea de otra manera, los autores consideraran a la transición como el paso de una base “antigua” a una base “nueva”; entonces, la columna j -ésima de la matriz de transición es la matriz de coordenadas del vector j -ésimo de la base anterior con respecto a la nueva base. Estas definiciones y otras hacen notar implícitamente que existe un orden en las bases pero creemos que es de mayor riqueza para el estudiante hacer explícita esta observación, puesto que de no hacerlo puede tener repercusiones a la hora de abordar temas como el de coordenadas de un vector respecto a una base ordenada. Así pues para efectos de esta investigación entenderemos por *Matriz de Cambio de Base* en el sentido del siguiente teorema en el cual describe sus propiedades.

Teorema. Sea V un espacio vectorial de dimensión n sobre el cuerpo F , y sean β y β' bases ordenadas de V . Entonces Existe una única matriz $n \times n$, necesariamente invertible, con elementos de F , de modo que

$$[\alpha]_{\beta} = P [\alpha]_{\beta'}$$

$$[\alpha]_{\beta'} = P^{-1} [\alpha]_{\beta}$$

Para todo vector α de V . Las columnas de P están dadas por

$$P_j = [\alpha_j']_{\beta} \quad j = 1, \dots, n.$$

(Hoffman y Kunze, 1973, p. 52).

Ahora bien, para tener una primera aproximación sobre un posible camino cognitivo que dé lugar a las estructuras mentales para construir el concepto de estudio, empezamos nuestro análisis teórico con base en nuestra experiencia y consulta de libros de texto de álgebra lineal. Con esto decidimos dos conceptos principales que debe tener un estudiante de los diferentes conceptos que están en torno a nuestro concepto de estudio, estos son: base ordenada y coordenadas de un vector, los cuales estarán entendidos por las siguientes definiciones:

Definición. Si V es un espacio vectorial de dimensión finita, una base ordenada de V es una sucesión finita de vectores linealmente independiente y que genera a V (Hoffman y Kunze, 1973, p. 50).

Notemos que la diferencia entre base y base ordenada es simplemente el orden que se establece en la base, este orden ayuda a la unicidad de lo que se entiende por coordenadas de un vector.

Definición. Sea $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ una base ordenada de un espacio vectorial V sobre un campo K de dimensión finita, para todo $\alpha \in V$, existen escalares $a_1, a_2, \dots, a_n \in K$ tal que $\alpha = a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n$ entonces la matriz de las coordenadas de α respecto a la base ordenada B :

$$X = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

en vez del n-tupla $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ de coordenadas. Para indicar la independencia de esta matriz de coordenadas respecto a la base se usará el símbolo $[\alpha]_B$. Para la matriz de coordenadas del vector α respecto a la base ordenada B .

Dentro de una descomposición genética es fundamental determinar las estructuras previas que un individuo debe tener para dar lugar a la construcción de un nuevo concepto y/o noción matemática. Como elementos previos dentro de este análisis teórico consideramos que un individuo debe tener una concepción Objeto del vector de coordenadas de un vector respecto a una base ordenada y una concepción Proceso del concepto de base ordenada. Cabe resaltar que la relación entre estas estructuras previas está determinada por la combinación lineal.

Recopilación y análisis de los datos

Para esta investigación diseñamos un diagnóstico inicial y una entrevista. Dichos instrumentos serán aplicados a un grupo de estudiantes de entre 17 a 18 años de edad en la Universidad Industrial de Santander (UIS, Colombia) después de haber asistido a un curso de álgebra lineal en el cual abordaron el tema cambio de base. Dicho curso lo encontramos ubicado en el primer semestre de diferentes carreras afines a las matemáticas en el nivel de estudios de Pregrado. El diagnóstico consta de preguntas en torno a los requisitos previos que hemos considerado en nuestro análisis inicial, como por ejemplo cuestiones que tienen que ver con el orden de las bases, y la escritura de las coordenadas de un vector respecto a una base ordenada (véase *Apéndice A*). La entrevista será aplicada a los estudiantes que muestren evidencia de los requisitos previos, consta de siete preguntas que tienen como objetivo identificar y fortalecer cuestiones que tienen que ver con los tipos de concepción Acción, Proceso, Esquema, Objetos que estamos proponiendo para nuestro concepto, esto con el fin de refinar nuestra descomposición hipotética de la matriz de cambio de base (véase *Apéndice B*).

Conclusiones previas

En estos momentos estamos trabajando sobre las ideas primarias de nuestra descomposición genética hipotética de nuestro concepto de estudio, por medio del diagnóstico buscamos validar que son indispensables los requisitos previos que hemos expuesto en el apartado del análisis teórico (concepción Objeto del vector de coordenadas de un vector respecto a una base ordenada y una concepción Proceso del concepto de base ordenada), con la entrevista se busca fortalecer la descripción de las estructuras mentales que se tiene para nuestro concepto de estudio.

Referencias y bibliografía

- Anton, H. (1976). *Introducción al álgebra lineal* (3ª ed.). México: Limusa
- Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). *A Framework for Research and Curriculum Development in Undergraduate Mathematics Education* (pp. 1-32). Research in Collegiate Mathematics Education II.
- Dorier, J. L., Robert, A., Robinet, R., & Rogalski, M. (1997). L'Algèbre Linéaire: L'obstacle du Formalisme a travers diverses recherches de 1987 a 1995. En J. L. Dorier (Ed.), *L'Enseignement de l'Algèbre Lineare en Question* (pp. 10-147). Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage éditions.
- Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Revista Educación Matemática*, 8(3), 24-41.
- Dubinsky, E., Weller, K., McDonald, M. A., & Brown, A. (2005a). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An APOS analysis: Part 1. *Educational Studies in Mathematics*, 58, 335-359.
- Hoffman, K. (1973). *Álgebra lineal*. México: Prentice-Hall Hispanoamericana.
- Kú, D. (2012). *Análisis sobre la comprensión de los conceptos conjunto generador y espacio generado desde la mirada de la teoría APOE* (Tesis de doctorado no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.
- Llana, Arnon., Cottill, Jim., Dubinsky, E., Oktaç., Roa Fuentes. S., Trigueros, María., & Weller, Kirk. (2014). *Apos theory: A Framenwork for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*.
- Oktaç A., & Trigueros M. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos de álgebra lineal? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(4-II), 373-385.
- Oktaç, A., Trigueros, M. y Vargas, X. N. (2006). Understanding of vector spaces- a viewpoint from APOS theory. *Proceedings of the 3rd International Conference on the Teaching of Mathematics* (En CD-ROM) Istanbul. Turkey.
- Poole, D. (2011). *Álgebra lineal, Una introducción moderna tercera edición*. México: Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.
- Roa-Fuentes, S. (2008). *Construcciones y mecanismos mentales asociados al concepto transformación lineal* (Tesis de maestría no publicada) Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, México.
- Siepinska, A., Nnadozie, A., & Oktaç, A. (2002). *A study of relationships between theoretical thinking and high achievement in Linear Algebra*. Concordia University: Momtreal Disponible en <http://www.annasierpinska.wkrib.com/pdf/Sierpinska-TT-Report.pdf>.
- Trigueros, M., Oktaç, A. y Manzanero, L. (2007). Understanding of Systems of Equations in Linear Algebra, *Proceedings of the 5th CERME* (Congress of the European Society for Research in Mathemattics Education), (pp. 2359-2368). Larbaca, Chipre.

Apéndice A

Diagnóstico de requisitos previos al concepto Matriz Cambio de base en Álgebra Lineal



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE
GUERRERO
Unidad Académica de Matemáticas

Diagnóstico de requisitos previos al concepto Matriz Cambio de base en Álgebra Lineal



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE
SANTANDER
Escuela de Matemáticas

Nombre: _____
Carrera que cursa: _____

1. Sea $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base ordenada de $\mathbb{R}^3$ formada por los vectores:

$$v_1 = (1, 0, -1), v_2 = (1, 1, 1), v_3 = (1, 0, 0).$$

- (i) ¿Cuáles son las coordenadas del vector $(5, -5, 1)$ en términos de la base ordenada β ?
(ii) ¿Cuáles son las coordenadas del vector (a, b, c) en términos de la base ordenada β ?

2. Sean las bases ordenadas $\beta = \{v_1, v_2\}$ y $\beta' = \{e_1, e_2\}$ del espacio $\mathbb{R}^2$, formadas por los vectores:

$$v_1 = (1, 2), v_2 = (2, 1) \text{ y } e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$$

- (i) Encuentre la matriz de cambio de base de β a β' .
(ii) Encuentre la matriz de cambio de base de β' a β .

3. Dada la matriz de cambio de base $M_{\beta' \rightarrow \beta} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ donde las bases ordenadas están definidas como:

$$\beta = \{(2, 0, 1), (1, 2, 0), (1, 1, 1)\}$$

$$\beta' = \{(6, 3, 3), (4, -1, 3), (5, 5, 2)\}$$

Y sea el vector $\begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}_{\beta'} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}_{\beta}$. Calcule el vector $\begin{bmatrix} 4 \\ -9 \\ 5 \end{bmatrix}_{\beta}$.

4. Sea la matriz $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -3 & -5 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{pmatrix}$ y, sean los vectores $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} -8 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$ y $v_3 = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ vectores de una base ordenada $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$.
a) Encuentre una base $\beta' = \{u_1, u_2, u_3\}$ para $\mathbb{R}^3$ tal que $P_{\beta' \rightarrow \beta}$ sea la matriz de cambio de base de $\beta' = \{u_1, u_2, u_3\}$ a $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$.
5. ¿Qué entiendes por Matriz de cambio de base?

Apéndice B

Problemas para la entrevista respecto al concepto matriz cambio de base. Sea $V = \mathbb{R}^2$



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE
GUERRERO

PROBLEMAS DE LA ENTREVISTA Álgebra Lineal



UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE
SANTANDER

Unidad Académica de Matemáticas

Escuela de Matemáticas

Ejercicio 1

Sea $V = \mathbb{R}^2$ el espacio vectorial definido sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ y sean:

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, B_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \text{ bases ordenadas de } \mathbb{R}^2.$$

- Encuentre la matriz $P_{B_1 \rightarrow B_2}$
- Encuentre la matriz $P_{B_3 \rightarrow B_2}$
- Encuentre la matriz $P_{B_2 \rightarrow B_3}$
- ¿La base B_1 es igual a la base B_3 ? Justifica tu respuesta.
- ¿La matriz $P_{B_1 \rightarrow B_2}$ es igual a la matriz $P_{B_3 \rightarrow B_2}$? Justifica tu respuesta.

Ejercicio 2

Sean las bases $B_1 = \{t_3, t_2, t_1\}$ y $B_2 = \{q_0, q_1, q_2\}$ bases ordenadas del espacio vectorial $\mathbb{P}_2[x]$, definido sobre $\mathbb{R}$. Donde

$$\begin{aligned} t_1 &= 1 \\ t_2 &= x \\ t_3 &= x^2 \\ q_0 &= 1 + 2x + x^2 \\ q_1 &= 2 + 9x \\ q_2 &= 3 + 3x + 4x^2 \end{aligned}$$

- Encuentre la matriz cambio de base B_1 a B_2 .
- Encuentre el vector de coordenadas de $[p]_{B_1}$ con $p = -1 + x$ y con ello calcule $[p]_{B_2}$.

Ejercicio 3

Sean $A = \{a_1, a_2, a_3\}$ y $B = \{b_1, b_2, b_3\}$ bases ordenadas para un espacio vectorial V . Suponga que $a_1 = 4b_1 - b_2$, $a_2 = -b_1 + b_2 + b_3$ y $a_3 = b_2 - 2b_3$.

- Encuentre la matriz de cambio de base de A a B .
- Encuentre $[x]_B$ para $x = 3a_1 + 4a_2 + a_3$.

Ejercicio 4

Consideremos la base $B_1 = \{p_0, p_1, p_2\}$ ordenada de $\mathbb{R}_2[x]$ formada por los polinomios:

$$p_0(x) = 1, p_1(x) = 1 + x \text{ y } p_2 = (1 + x)^2 \text{ y sea la matriz } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Encuentre los polinomios de la base ordenada $B_2 = \{q_0, q_1, q_2\}$, tal que P sea la matriz cambio de base de B_1 a B_2 .

Ejercicio 5

Sea $V = \mathbb{R}^2$ el espacio vectorial definido sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ y $B_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ y $B_3 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$, bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$. Si T es una transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ definida por

$$T(x_1, x_2) = (x_1, 0).$$

La matriz asociada a T en la base canónica B_3 es $[T]_{B_3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

- Encuentre la matriz $[T]_{B_2}$.
- Utilice la matriz de cambio de base $P_{B_2 \rightarrow B_3}$ (encontrada en Problema 1 inciso iii) para calcular $[T]_{B_2}$.

Ejercicio 6

Considera el espacio vectorial de todos los polinomios de grado menor o igual a n ($P_n[x]$) y dos bases ordenadas β_1 y β_2 de dicho espacio vectorial. Si se quiere construir la matriz de cambio de base $M_{\beta_1 \rightarrow \beta_2}$ ¿qué tamaño tendrá la matriz? ¿Por qué?

Ejercicio 7.

¿Qué entiendes por matriz cambio de base? Escribe tu definición de este concepto.

¿Dadas dos bases de un espacio vectorial de dimensión finita, siempre es posible definir la matriz cambio de base?

¿Dada una matriz cuadrada cualquiera A , siempre A representa una matriz cambio de base?

Creencias y una aproximación de la concepción de un profesor de Pre-Cálculo sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la función exponencial

Iván **Velásquez** Millones

Sección Matemática, Universidad Peruana de Ciencias

Perú

Ivan.velasquez@pucp.pe

Norma **Rubio** Goycochea

Pontificia Universidad Católica del Perú

Perú

nrubio@pucp.edu.pe

Resumen

Esta investigación identifica la naturaleza de las creencias y una aproximación a la concepción de un profesor en la enseñanza de función exponencial en un curso de pre-cálculo. Se analizan las prácticas matemáticas desarrolladas y se aplica una entrevista semiestructurada y un cuestionario que surgen del análisis de las prácticas. Para el análisis de las prácticas se utiliza el análisis didáctico que lo proporciona el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática (EOS). La metodología es de tipo cualitativa descriptiva. Este análisis de las prácticas y el análisis de la entrevista y cuestionario, permiten identificar las creencias y una aproximación a la concepción del profesor. Desde nuestro punto de vista, estas creencias hacen que los alumnos aprendan a tabular y graficar funciones exponenciales.

Palabras clave: creencias, concepciones, profesor, proceso de enseñanza, aprendizaje, educación, matemática.

Introducción

En los últimos años los estudios dirigidos hacia el pensamiento del profesor en el aula ha ido teniendo un creciente interés en los investigadores y didactas, Pino (2013). Entre estos estudios resalta el análisis de las prácticas del profesor y las investigaciones de las creencias y concepciones que tienen los profesores de un determinado objeto matemático. Por otro lado, la función exponencial es un tema que está presente en el currículo de muchas carreras de ingeniería, medicina, biología, etc., dada su variedad de aplicaciones no solo en crecimiento poblacional, sino también en el análisis y modelación de fenómenos en diversidad de campos Vargas (2012).

Así también autores como Clark y Peterson (1986, citado en Handal, 2003, p.47) precisan que en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, las creencias actúan como filtro al momento de la toma de decisión por parte del profesor. Así mismo algunos autores afirman que estas creencias influyen en el aprendizaje de los estudiantes (Llinares, 1989; Thompson, 1992; Flores, 1998, Perry, 1968 cit. En Rodríguez 2005). De esta forma estas creencias parecen ser muy fuertes como para facilitar o dificultar la implantación de las reformas educativas.

Este trabajo se enmarca dentro de la línea de la formación del profesorado que nos permite describir y comprender la enseñanza de la matemática del profesor dentro del aula.

Estas inquietudes y la falta de investigaciones en el Perú sobre el análisis de las prácticas de los profesores sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la función exponencial, nos formulamos las siguientes preguntas de investigación: ¿Cuáles son las creencias de los profesores de pre-cálculo acerca del proceso de enseñanza y aprendizaje de la función exponencial? y ¿cuál es la naturaleza de estas creencias? Para ello nuestro objetivo del proyecto es: Analizar las creencias de los profesores sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la función exponencial en cursos de pre-cálculo.

Marco Teórico

Creencias y concepciones. Existe una diversidad de investigaciones que se refieren a estos términos, desde diferentes posturas, pero no hay un consenso sobre su significado. Sin embargo en esta investigación, para concepción, nos basaremos de Thompson (1992, citado en Ponte, 1999) quien dice que una concepción es un sistema organizado de creencias. Por otro lado el término creencia lo tomaremos en el sentido de Pierce, como la disposición para la acción.

Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática (EOS). En el EOS se considera a los significados personales como las prácticas que hace la persona y las que haría en otras instituciones. Además, se señala que los significados personales son el sistema de prácticas que realiza una persona, mientras que los significados institucionales son los significados compartidos en el seno de una institución para resolver un tipo de situaciones-problemas. Godino, Batanero y Font (2008), proponen 6 categorías que son útiles para el análisis de proyectos y experiencias de enseñanza, estas categorías se resumen en la Fig. 1. De acuerdo con estos autores, la idoneidad de una dimensión, no garantiza la idoneidad global del proceso de enseñanza-aprendizaje.

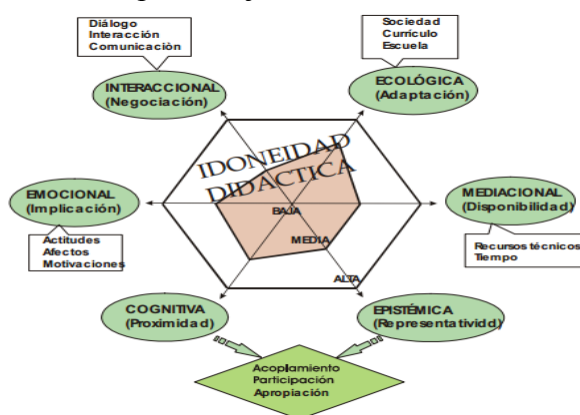


Figura 1. Idoneidad Didáctica, tomado de Godino (2011, p.6).

El análisis didáctico. El análisis didáctico es una herramienta que nos brinda el EOS para describir las prácticas realizadas, para analizarlas e incluso para mejorarlas. Este último no es parte de nuestra investigación ya que lo que buscamos es identificar las creencias y una aproximación de la concepción que tienen los profesores en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la función exponencial. En el EOS, el análisis didáctico ha sido utilizado para encaminar el análisis de los contenidos de las matemáticas que se realiza al servicio de la organización de su enseñanza en los sistemas educativos.

Primer Nivel.- Configuración de objetos emergentes del sistema de prácticas.- Siguiendo a Godino, Batanero y Font (2008), para llevar a cabo una determinada práctica e interpretar los resultados, es necesario activar ciertos conocimientos. Entre los componentes del conocimiento para realizar y evaluar la práctica, que permite realizar una determinada situación-problema, se identifican el uso de lenguajes (verbales y simbólicos), que son la parte ostensiva de los conceptos, proposiciones y procedimientos que participan en la elaboración de argumentos para decidir si las acciones son satisfactorias.

Metodología

A continuación presentamos el resumen de las seis fases de esta metodología que es de tipo cualitativa, tomadas en cuenta por Latorre (1997).

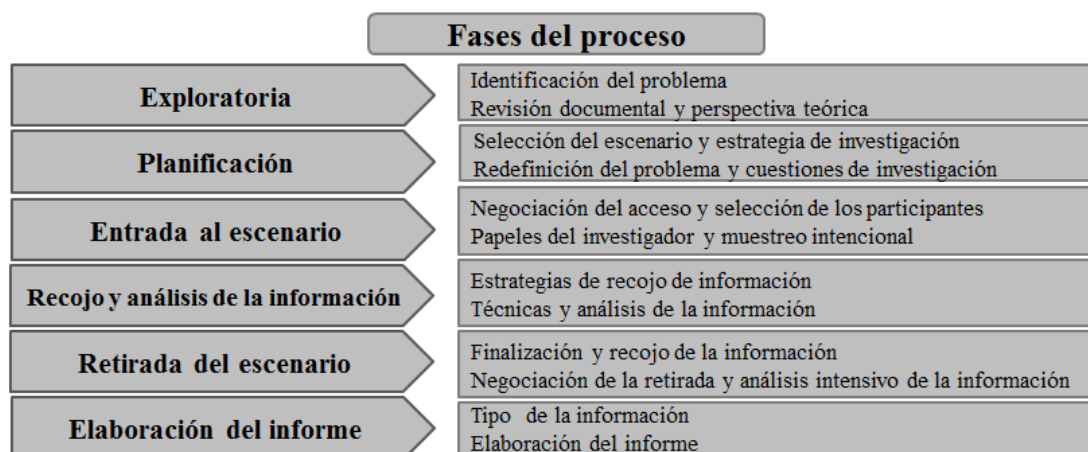


Figura 2. Fuente propia, basado en Latorre (1997, p.206).

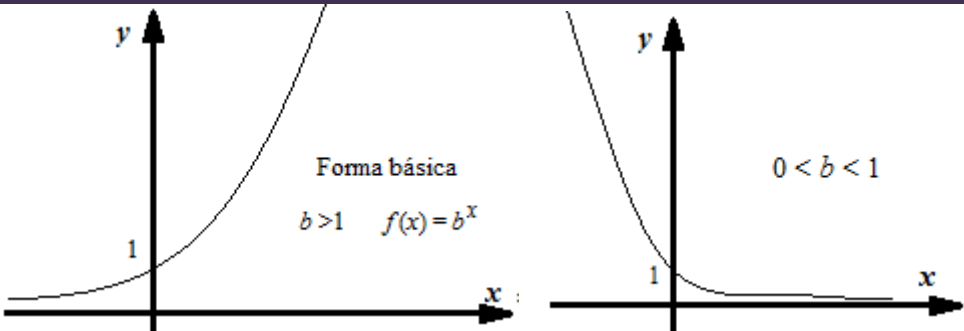
A continuación presentamos la configuración cognitiva de una de las prácticas de un profesor sujeto de este estudio. Las demás configuraciones las presentamos en el Apéndice.

PRÁCTICA 1: Construye la gráfica de la función $f(x) = a.b^{x-h} + k$

Tabla 1

Esquema de configuración.

Configuración cognitiva de la tarea	
Situación-problema	
Análisis de la función $f(x) = a.b^{x-h} + k$ como una función exponencial.	
Lenguaje	
✓	Verbal: funciones especiales, asíntotas, ecuación de una asíntota, corte, (h,k) , eje x , eje y , plano cartesiano, función racional, curva racional, tabulación, sistema de coordenadas, infinito, creciente, decreciente, forma básica, forma general.
✓	Gráfico

 Forma básica $b > 1$ $f(x) = b^x$ $0 < b < 1$	
✓ Simbólico: $f(x) = b^x$, $f(x) = ab^{x-h} + k$, $y = k$, A.H., $b > 1$, $0 < b < 1$	
Conceptos	
✓ Conceptos previos: Vértice, centro, curva, intersección, dominio, rango, función racional, curva racional función estrictamente creciente, función creciente, función decreciente, punto de corte, dominio natural.	
✓ Conceptos emergentes: Forma básica de la función exponencial.	
Proposiciones	
✓ Esta función (función exponencial) presenta solamente una asíntota horizontal.	
✓ $y = k$ es una asíntota horizontal.	
Procedimientos	
✓ Compara la función $f(x) = ab^{x-h} + k$ con la forma $f(x) = b^x$.	
✓ Análisis de las letras h y k.	
Argumentos	
✓ La asíntota horizontal las vas a obtener de k	
✓ Una vez que grafiquemos la asíntota horizontal, vamos a estar en condiciones de poder graficar la función exponencial.	

A continuación presentamos las creencias que se obtuvieron a partir del análisis de las prácticas, además presentamos una aproximación de la concepción del profesor de pre-cálculo sobre el proceso de enseñanza y aprendizaje de la función exponencial.

Tabla de Creencias

Tabla 2

Lista de creencias sobre el proceso de enseñanza de la función exponencial del profesor.

➤ La Forma básica de la función exponencial, tiene la forma $f(x) = b^x$, donde b esta entre cero y uno o b es mayor que uno.
➤ Hablar de b no es hablar de dominio.
➤ La representación gráfica para el caso en donde b es menor que uno y mayor que cero ya no sería una función en donde se va a observar que es estrictamente creciente, vez que siempre es creciente la función, más bien seria así una función decreciente que también corta en uno.
➤ Cuando b es mayor que uno no la función exponencial es creciente y cuando b es menor que uno obviamente mayor que cero la función exponencial es decreciente.
➤ La función exponencial presenta solamente una asíntota horizontal.
➤ Sugiero para esta clase usar para la función exponencial la forma $f(x) = ab^{x-h} + k$ porque va más de acuerdo al enfoque que van a utilizar para realizar gráficos, explicaciones de las propiedades de este tipo de función.
➤ Entre las letras h y k , una de las dos para la parte gráfica, no va a ser tan útil como la otra.

➤ La asíntota horizontal las vas a obtener de k .
➤ Una vez que grafiquemos la asíntota horizontal, vamos a estar en condiciones de poder graficar la función exponencial.
➤ Los puntos de referencia, me van a orientar para ver cómo va a ser el gráfico.
➤ Si yo tengo el gráfico de la función exponencial puedo responder todas las preguntas que me hagan.
➤ La forma básica pasa por uno, hay otros casos en donde no es una forma básica pero también pasa por uno.
➤ El uno en realidad es cero como uno.
➤ e es el número neperiano.
➤ e es dos punto siete uno ocho, puntos suspensivos.
➤ Identificada la asíntota horizontal y con una pequeña tabulación simple con dos puntitos, me van a orientar para ver cómo va a ser el gráfico de la función exponencial.
➤ Para calcular el punto de corte con el eje x lo que tengo que hacer es igualar $f(x)$ a cero.
➤ Cuando yo tenga una expresión de este tipo, $a^x = b$, se sugiere despejarlo de esta manera, x es igual a logaritmo, logaritmo vamos a ponerlo así, neperiano de b , entre logaritmo neperiano de a :
$a^x = b \rightarrow x = \frac{\ln b}{\ln a}.$

Una aproximación a la concepción del profesor de Pre-Cálculo en la función exponencial

De acuerdo a las bagaje de creencias identificadas en el profesor; podemos decir que para este profesor de pre-cálculo, una función exponencial será toda expresión matemática que tiene por lo menos un término de la forma a^x con $a > 0$, $a \neq 1$, para todo x un número real.

Resultados y conclusiones

El profesor define la función exponencial como una regla de correspondencia de la forma $f(x) = a^x$, con $a > 0$, $a \neq 1$ y que esta función permite modelar situaciones reales. Sin embargo, manifiesta que por cuestiones de tiempo solo da la aplicación de incrementos poblacionales. De acuerdo evolución histórica de la función exponencial en donde se empieza a trabajar con este tipo de problemas y por las respuestas dadas en el cuestionario, podemos decir que para el profesor de pre-cálculo, una función exponencial es toda expresión matemática que posee un término de la forma a^x con $a > 0$ y con x un número real. Es decir, cualquier función que tenga este término es una función exponencial.

El profesor, define la función exponencial como $f(x) = a^{x-h} + k$, pues considera que el estudio de las asíntotas en sus estudiantes es muy importante para cursos posteriores. Esto nos hace ver que uno de los factores de enseñar de un modo u otro es dependiendo de la especialidad del estudiante.

El profesor toma en cuenta el contexto en el que se está realizando la enseñanza, es decir es importante para él el tipo de estudiantes para poder definir la función exponencial. Con esto concluimos que en esta enseñanza existe un alto grado de idoneidad ecológica.

El profesor considera la necesidad de uniformizar la definición de función exponencial en el ámbito local del curso, teniendo en cuenta las evaluaciones. Considera que este es un factor importante que debería tomarse en cuenta para definir de una u otra manera dicha función.

El profesor considera para estudiantes de pre-cálculo, dentro del tema función exponencial no debe faltar aplicaciones de crecimiento exponencial, tasa de cambio. Sin embargo, debido al

tipo de estudiantes no considera necesario el uso de problemas en donde involucre la función logística.

De la revisión histórica y de la creencia de la función exponencial notamos que hay una cierta diferencia entre lo que el profesor y los textos presentan como definición de función exponencial. Un claro ejemplo de esto, se puede notar en algunos libros, se enuncia que una función exponencial es una función con ciertas condiciones para el dominio. Así como también, que toda función exponencial satisface la propiedad: $f(x + y) = f(x) \cdot f(y)$, lo cual en esta revisión histórica (Cauchy, 1821 citado en Morales, 2011) es totalmente diferente pues hemos visto que esto no es una consecuencia, sino es una condición necesaria para que se pueda llamar como función exponencial.

De este recorrido histórico podemos destacar que la función exponencial es aquella función de la forma $f(x) = A^x$, con $A > 0$, para cualquier x real. Así también la podemos denotar como $f(x) = \exp(x) = e^x$, incluso también se puede definir como $f(x) = \exp(x) = e^{ax}$, para algún número real a . De esto consideramos que matemáticamente hablando, las funciones de la forma $f(x) = b \cdot a^x$, $f(x) = b \cdot e^x + k$, $f(x) = b \cdot a^{x-h} + k$, podrían llamarse tipos de funciones exponenciales, pero no serían función exponencial debido a que no satisfacen la propiedad $f(x + y) = f(x)f(y)$. Sin embargo, el profesor en sus prácticas, no muestran la función exponencial como la caracterizo Cauchy, debido a la transposición didáctica, llegando a usar los tipos de funciones exponenciales que resultan más familiares con los ejercicios y aplicaciones a trabajar. Además, de acuerdo a las respuestas obtenidas de la entrevista podemos notar que el profesor no identifica la diferencia de los términos *función exponencial* y *tipo de función exponencial*. Por otro lado notamos que de las definiciones presentadas en algunos textos como el de Elon Lima, Leithold y la del texto guía del profesor, que caracterizan la función exponencial, no coinciden con la caracterización matemática dada por Cauchy.

Además, el profesor presenta la función exponencial en su clase sin considerar la caracterización dada por Cauchy, porque hacen una transposición didáctica con ayuda de los textos de acuerdo con el tipo de alumnos de su clase. Conocen dicha caracterización matemática de la función exponencial (aunque la relacionan con la definición dada Lima, et al (2000)), pero de acuerdo a las necesidades inmediatas para su enseñanza definen a la función exponencial sin considerarla. En esta investigación el saber sabio corresponde a la caracterización de Cauchy de la función exponencial definida solamente como $f(x) = e^{ax}$, para algún número real a ; sin embargo, debido a la necesidad que tiene los profesores de hacer llegar este concepto matemático a los diferentes tipos de alumnos, de las distintas carreras, consideramos que este es el principal motivo por el cambio que ha tenido al ser definido incluso en los libros de texto de diferentes formas. De acuerdo con los resultados obtenidos podemos concluir que en la enseñanza de la función exponencial no es un factor indispensable que los profesores presenten a los alumnos de pre-cálculo la caracterización de función exponencial dada por Cauchy ya que esto no origina ningún conflicto semiótico en el aprendizaje de esta función y no afecta los objetivos a los que se pretende llegar en sus respectivos cursos.

Creemos que las diferentes presentaciones de libros y de profesores de la definición de función exponencial son con un determinado fin específico, ya que quizá para cierto curso o ciertas aplicaciones sea conveniente este tipo de presentaciones (de la función exponencial) o ya sea que por la simplicidad del lenguaje llaman función exponencial a la que más se acomode a su enseñanza.

Las preguntas de investigación fueron resueltas, pues logramos conocer las creencias de los profesores de pre-cálculo en la enseñanza de función exponencial. Así también logramos conocer que una de las naturalezas de estas creencias son los libros de texto, específicamente los libros guía.

Como el significado de un objeto matemático, en este caso la función exponencial, se considera como un conjunto de prácticas en las que dicho objeto es un dato esencial y las concepciones son los significados personales sobre este objeto y no hemos podido obtener todos los significados personales de los profesores por tratarse de un curso de pre-cálculo (no enseñan ni hacen uso de derivadas ni de integrales, por ejemplo), no se ha podido señalar las concepciones de los profesores sobre el objeto matemático función exponencial, por tratarse de un curso de pre-cálculo (no estudian ni derivadas ni integrales) pero creemos que una aproximación es la de regla de correspondencia de la forma $f(x)=ba^x$, con $a>0$, $a \neq 1$. Creemos importante el que usen el significado de variación porcentual para esta definición.

Entre las preguntas que hubiésemos querido hacer posteriormente a este trabajo se encuentran las siguientes: ¿De qué manera influyen las concepciones de los profesores en sus creencias en el tema función exponencial?, ¿De qué manera influyen las concepciones de los profesores en la enseñanza de la función exponencial? ¿De qué manera influyen las creencias de los profesores de nivel superior en la enseñanza de la función exponencial?

Referencias y bibliografía

- Godino, J. D. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII CIAEM-IACME*. Brasil. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2008). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. Recuperado de http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/sintesis_eos_10marzo08.pdf
- Handal, B. (2003). Teachers' mathematical beliefs: A review. *The Mathematics Educator*, 13(2), 47
- Latorre, A., Rincón, D., & Arnal, J. (1996). *Bases metodológicas de la investigación educativa*. Barcelona. Recuperado de <https://docs.google.com/a/pucp.pe/document/d/1rJVvR3V2a1GhWWBvujpdvIys4UmfyZaqqVmi-00SAJU/edit>
- Morales. (2011). Un breve estudio histórico y epistemológico de la función exponencial y análisis de algunos libros de texto. *Encuentro Nacional de Educación Matemática y Estadística*, 10, 123-129
- Lima, E., Carvalho, P., Wagner, E., & Morgado, A. (2000). *La Matemática de la Enseñanza Media* (Vol.II). Lima: IMCA.
- Pino, L. (2013). *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.
- Ponte, J. (1999). *Las creencias y concepciones de maestros como un tema fundamental en la formación de maestros* (Traducción de Casimira López). Universidad de Lisboa, Portugal.
- Vargas, J (2012). *Análisis de la práctica docente: El caso de la función exponencial* (Tesis doctoral). Universidad de Salamanca, España.
- Rodríguez, L. (2005). *Análisis de las creencias epistemológicas, concepciones y enfoques de aprendizaje de los futuros profesores* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.

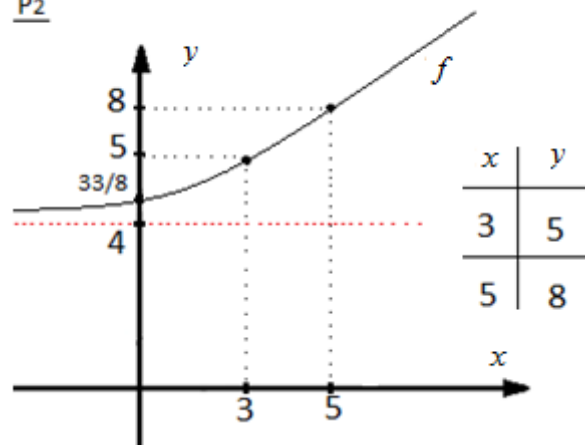
Apéndice A

Configuración cognitiva de las prácticas del profesor

PRÁCTICA 2: Tabula valores para $f(x) = 2^{x-3} + 4$; para $x=3$; $x=5$; $x=0$, explicando que el 1 es el (0,1) y es la intersección con el eje y .

Tabla 3

Esquema de configuración.

Configuración cognitiva de la tarea						
Situación-problema						
Grafica la función $f(x) = 2^{x-3} + 4$ analizando sus características						
Lenguaje						
✓ Verbal: eje x, eje y, espacios, forma básica, sistema de coordenadas infinito, punto de corte, curva, menos infinito. ✓ Gráfico P1 $y = 4$ (A.H) P2 <table data-bbox="774 963 899 1131"><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>3</td><td>5</td></tr><tr><td>5</td><td>8</td></tr></table> ✓ Simbólico $f(x) = 2^{x-3} + 4$, P1: $y = 4$, A.H, 3, 5, 8, 33/8	x	y	3	5	5	8
x	y					
3	5					
5	8					
Conceptos						
✓ Conceptos previos: dominio, función estrictamente creciente ✓ Conceptos emergentes: asíntota horizontal						
Proposiciones						
✓ Esta función (función exponencial) presenta solamente una asíntota horizontal. ✓ La asíntota horizontal es $y=k$, de donde $k=4$.						
Procedimientos						
✓ Tabulación de valores para $x=3$ y $x=5$. ✓ Ubicación de los pares ordenados en el gráfico. ✓ Ubicación y gráfico de la asíntota horizontal. ✓ Grafica $f(x) = 2^{x-3} + 4$						
Argumentos						

Tesis 1: La asíntota horizontal es $y=4$.

Argumento: hace una comparación entre $f(x) = 2^{x-3} + 4$ y $f(x) = ab^{x-h} + k$.

Tesis 2: El punto de corte es $33/8$.

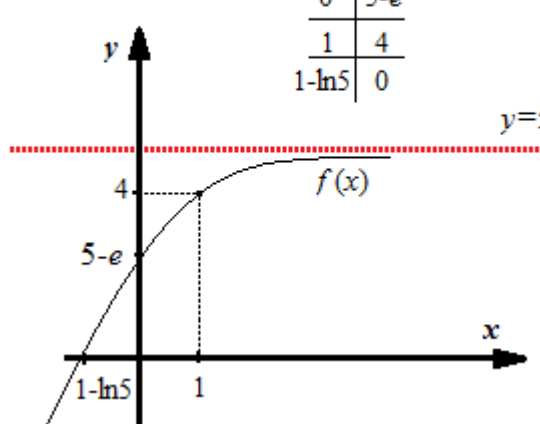
Argumento: Señalización en el plano cartesiano.

Procesos: Generalización, mecanización, particularización

PRÁCTICA 3: Tabula valores para $f(x) = -e^{-x+1} + 5$; para $x=1$; $x=0$, y luego encuentra los interceptos con los ejes coordenados.

Tabla 4

Esquema de configuración.

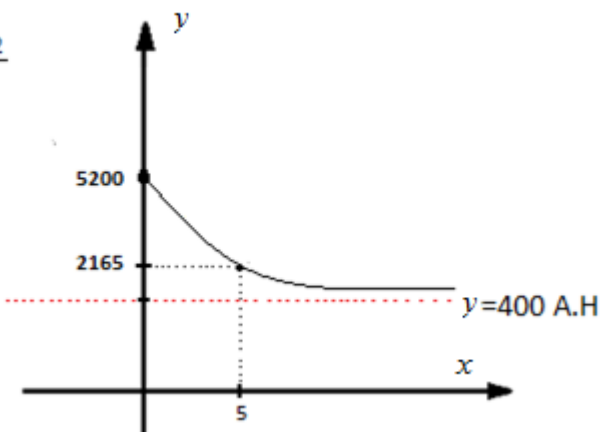
Configuración cognitiva de la tarea								
Situación-problema								
Tabulación de valores								
Lenguaje								
✓ Verbal: eje x, eje y, incógnita, sistema de coordenadas, puntos de referencia, punto de corte, curva, menos infinito, números trascendentes, número neperiano, exponente, logaritmo neperiano, punto que está en el lado izquierdo de cero, cinco cerrado ✓ Gráfico Paso 1: $y=5$ (A.H) Paso 2: tabulación <table><tr><th>x</th><th>y</th></tr><tr><td>0</td><td>$5-e$</td></tr><tr><td>1</td><td>4</td></tr><tr><td>$1-\ln 5$</td><td>0</td></tr></table> ✓ Simbólico $f(x) = -e^{-x+1} + 5$, $y = 5$, A.H, 0,1, $5-e=2.28$,4, (0,2.28),(1,4), $a^x = b \rightarrow x = \frac{\ln b}{\ln a}$, $1-\ln 5$	x	y	0	$5-e$	1	4	$1-\ln 5$	0
x	y							
0	$5-e$							
1	4							
$1-\ln 5$	0							
Conceptos								
✓ Conceptos previos: Teoría de exponentes, dominio, rango, función decreciente, teoría de logaritmos. ✓ Conceptos emergentes: Asíntota horizontal.								
Proposiciones								
$a^x = b \rightarrow x = \frac{\ln b}{\ln a}$								
Procedimientos								

✓ Identificar la asíntota horizontal ✓ Ubicar los puntos tabulados en el sistema de coordenadas ✓ Graficar $f(x) = -e^{x+1} + 5$ ✓ Hallar el intercepto con el eje "x".
Argumentos
Tesis 1.- Los puntos de referencia, me van a orientar para ver cómo va a ser el grafico Argumento: Tabula puntos para la función y traza la gráfica. Tesis 2.- Si yo tengo el gráfico puedo responder todas las preguntas que me hagan. Argumento: Muestra en el gráfico la asíntota horizontal, el crecimiento por derecha e izquierda, puntos de corte, etc.

PRÁCTICA 4: Tabula los puntos y luego gráfica.

Tabla 5

Esquema de configuración.

Configuración cognitiva de la tarea
Situación-problema
Cuando cierta, maquinaria industrial tenga t años, su valor de reventa será $V(t) = 4800e^{-t/5} + 400$ dólares a) Graficar la función b) ¿Cuál era el valor de la maquinaria cuando era nueva? c) ¿Cuál será el valor de la maquinaria después de 10 años?
Lenguaje
✓ Verbal: Fenómeno de depreciación, tabulación, $y=400$ debe estar bastante alto, valores bastante altos, escala, eje x, eje y ✓ Gráfico <u>P1</u> $y=400$ <u>P2</u>  ✓ Simbólico : $V(t)$, x, y, $y=400$, 5, 5200, $4800+400$, 2165.82, A.H, e
Conceptos
✓ Conceptos previos: decrecimiento ✓ Conceptos emergentes: tiempo mayor que cero entonces va en eje x positivo
Proposiciones.- No presenta
Procedimientos
✓ Adaptación de la forma "general" a la nueva forma de la función exponencial.

✓ Identificación de la asíntota horizontal. ✓ Tabulación de un par de puntos y trazo de la curva.
Argumentos
Tesis 1.-El tiempo no puede ser negativo Argumento: No puedo decir: menos 3 horas, menos 2 horas, etc., el tiempo siempre tomara un valor positivo o cero, pero nunca un valor negativo. Tesis2.- Cuando tú estás en un ejercicio donde corresponda la letra x, debes colocar la letra que la estas representando. Argumento: Hace hincapié en el problema resuelto en donde coloco x al tiempo y y al volumen: Yo debería colocar la variable V, no “y”.

Apéndice B

Preguntas y respuestas de entrevista Profesor

Tabla 6

Respuestas del profesor

Pregunta 1. Con sus propias palabras, ¿qué puede decir acerca de la función exponencial (F.E)? Es un objeto matemático que me permite estudiar el comportamiento de una situación real que no puede modelarse necesariamente con una expresión polinómica.	P10. ¿De qué depende este cambio? Del nivel del estudiante y el tipo de grupo humano. Algunos son de beca 18 ahí es más analítico, hago deducciones antes de llegar a definir, en otras aulas basta con una simple deducción.
Pregunta 2. ¿Cómo define Ud. a una F.E? Es una función de la forma a^x, cuya base es un número real, no negativo, diferente de cero y diferente de uno, cuyo dominio son los reales.	P11. ¿Conoce Ud. la caracterización de Cauchy para la F.E? No la recuerdo
Pregunta 3. ¿Cómo define la F.E en su clase? $f: R \rightarrow R$ tal que $f(x) = ba^{x-h} + k$, $x \in R$, con a y b positivos y $b > 1$.	P12. De acuerdo con esta caracterización: ¿La función $f(x)=ab^x$ será una función exponencial? No, no sería una función exponencial.
Pregunta 4. En su clase Ud. definió la F.E como $f(x) = ba^{x-h} + k$, ¿Por qué? Primero, respecto al aspecto literal, utilizaba las mismas letras para que sea familiar para ellos, indicándoles que en este caso cada una de estas letras representaba una cosa diferente para la función exponencial.	P13. ¿En su práctica docente por qué incide mucho en la asíntota horizontal? Las asíntotas son presentadas formalmente cuando se trabaja el tema de límites, que son capítulos más adelante y ellos suelen tener problemas.
P5. ¿De dónde obtuvo o dónde aprendió este significado de la F.E? Algo similar vi en el libro de Dennis Zill de precálculo. Las letras vienen como una decisión personal buscando un aspecto didáctico en similitud con las letras ya utilizadas en funciones anteriores	P14. ¿Nota Ud. la necesidad de uniformizar la definición de función exponencial? Sí, sería bueno uniformizar de acuerdo a las especialidades que se estén enseñando. Es posible que algunas definiciones tengan elementos que no sean de tanto provecho para un estudiante en su praxis en unos cursos más avanzados.

P6. ¿Si sus alumnos fueran de cursos de letras (administración, psicología, derecho, periodismo), definiría de la misma forma la F.E? Sugeriría que a partir de la forma $y=a^x$ nada más con las características de su dominio y rango, su crecimiento, decrecimiento.	P15. ¿Qué aplicaciones consideras más relevantes para aplicar el tema función exponencial? Los materiales disponibles son los ejercicios de la guía de estudios que ya está establecido.
P7. ¿Entonces tiene que ver mucho el tipo de alumnos? Sí, en la mayoría de los casos depende del tipo carrera, y de la orientación dada en la coordinación de cada carrera.	P16. Adicionalmente a los materiales ¿Se guía de los libros que presenta el silabo para sus clases? Yo me guío del Ron Larson de cálculo 1 para este curso de análisis matemático 1 y el Stewart de cálculo de una variable.
P8. ¿Ha presentado siempre la misma definición de F.E a tus alumnos en los diferentes ciclos? No, las definiciones, las estrategias las voy probando, algunas se mantienen, otras surgen algunas variantes; mientras no sea tampoco muy radical el cambio en diferentes aulas.	P17. Con respecto al material de trabajo para este tema, ¿en qué se basa? Me baso de los materiales de aprendizaje disponibles, como las diapositivas.
P9. ¿De qué depende este cambio? Del nivel del estudiante y el tipo de grupo humano. Algunos son de beca 18 (estudiantes becados de todas partes del país) ahí es más analítico, hago deducciones antes de llegar a definir, en otras aulas basta con una simple deducción.	

Cuando la Matemática se deja fotografiar Un viaje del lenguaje visual al lenguaje matemático

Miguel Ángel **Martínez**

Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Lomas de Zamora
Argentina

lavalle1003@gmail.com

Silvia Verónica **Fachal**

Facultad de Ciencias Económicas, Universidad Nacional de Lomas de Zamora
Argentina

silvia.fachal@yahoo.com.ar

Resumen

El conocimiento matemático nos brinda la posibilidad de interpretar muchos objetos del mundo que nos rodea y las relaciones que los sostienen. Los objetos están, sólo falta descubrirlos. Tal vez, nuestros alumnos no estén suficientemente incentivados a hacerlo o carezcan del lenguaje adecuado para hacerse entender.

Es por ello, que nuestro proyecto de investigación pretende analizar el lenguaje matemático que utilizan los alumnos de la escuela secundaria frente a la interpretación de ciertas producciones fotográficas. En ese contexto nos parece importante realizar una exploración del plano discursivo y la posibilidad de descubrir en él los conocimientos matemáticos de nuestros estudiantes.

Palabras clave: educación, matemática, lenguaje, análisis, interpretación, trabajo colaborativo.

Objeto de investigación

El lenguaje matemático y las representaciones que los estudiantes de la escuela secundaria construyen sobre él.

Objetivos de la investigación

- 1) Analizar el uso del lenguaje matemático que realizan los estudiantes de la escuela secundaria.
- 2) Analizar la construcción de los conceptos matemáticos por parte de los estudiantes que se ponen de manifiesto a través de la formulación de argumentos.
- 3) Caracterizar, a través de la comunicación escrita, oral y mediante el uso de recursos tecnológicos, las representaciones de los conceptos matemáticos.
- 4) Identificar las ventajas que trae aparejado el trabajo colaborativo en la construcción del lenguaje matemático.

Introducción

A nadie escapa que hoy en día el uso del lenguaje matemático, tanto por parte de los estudiantes como de otros actores involucrados en el tema, transita un momento de crisis. Con

justificadas razones podría ser que muchas veces los docentes, en el afán de querer enseñar más contenidos, dejemos descuidados algunos aspectos del conocimiento matemático, que tienen una gran importancia, en beneficio de otras necesidades más imperiosas. A menudo, y con la intención de satisfacer ciertas demandas sociales y culturales, se le asigna mayor importancia a la masividad de contenidos a desarrollar que a la “calidad” con que esos contenidos son abordados.

Consideramos que dos de los aspectos que están siendo descuidados en la enseñanza de la Matemática son la apropiación y el uso del lenguaje matemático. Para este trabajo nos pareció interesante realizar un estudio profundo y detallado sobre ellos. Según Pozo (2000): “Frente a la idea común y extendida de que basta con saber algo como ser cómo está compuesta la materia, cuáles son los rasgos de las sociedades neolíticas o las propiedades de una función lineal, para poder decirlo, para expresarlo cuando se requiere, y por tanto que basta con enseñarle al alumnado los contenidos para que sea capaz de decirlos, podemos pensar que la forma como se expresan esos conocimientos, el lenguaje que se usa para comunicarlos y representarlos, es también una parte fundamental de ese conocimiento. Para saber decir lo que sabemos, no basta con saberlo, hay también que saber usar estratégicamente el lenguaje para comunicar y representar mejor lo que sabemos.” (pp.10-14)

Nosotros comenzamos a introducirnos en el análisis de esta problemática y hemos arribado a algunas conclusiones que, al día de hoy, tienen el carácter de provisionarias. Pero, desde ya, nuestra intención es seguir profundizando la investigación sobre ellas.

El lenguaje en el trabajo colaborativo

Muchas veces la dinámica del trabajo colaborativo se confunde con la del trabajo de grupo. Pero, no necesariamente el trabajo en grupo cumple con las características del trabajo colaborativo. Cuando éste se da realmente, todos los integrantes del equipo deben cumplir con las funciones que tienen asignadas, compartir los objetivos previstos y comprometerse de manera tal que el intercambio de roles no afectaría la producción del trabajo. Claro que para ello, también se da la necesidad de establecer un código de lenguaje acorde con la tarea, y allí es donde el lenguaje matemático cumple un papel fundamental pues permite expresar las ideas desde un marco conceptual ideal para poder ser comprendido, discutido y escuchado. Como asegura Martínez Sánchez (1999) en el trabajo colaborativo “El grupo (...) es homogéneo, ya que los estudiantes que lo forman tienen conocimientos similares sobre el tema a trabajar; el liderazgo es compartido por todos los integrantes así como también la responsabilidad del trabajo. Se comparten las informaciones y conocimientos promoviendo de esta manera el pensamiento crítico, la interacción y la comunicación. Se estimula el uso del lenguaje, ya sea el científico (el matemático), el simbólico o bien “el corriente”, al requerir que sean más explícitos en sus puntos de vista o en sus diferentes enfoques del tema a tratar”. En definitiva “El trabajo colaborativo exige, de todos los estudiantes que conforman el grupo, habilidades comunicativas y también relaciones simétricas y recíprocas” (p. 107).

Esta forma de trabajo tiende a construir redes solidarias y constituir formas de trabajo colaborativo. Los estudiantes sienten que están embarcados en la misma tarea, comparten objetivos comunes y deben contribuir a que todos se sientan involucrados en el proyecto. Como aseguran Johnson y Johnson (1999): “(...) Por ello, festejan los éxitos de los demás y sienten que los benefician personalmente. Las ideas, la información, las conclusiones y los recursos importantes tienden a ponerse a disposición de todos, para su intercambio y utilización en formas que favorezcan la comprensión colectiva e individual y aumenten la energía para realizar la

actividad. La discusión oral de la información tiene al menos dos dimensiones: explicación oral y audición. Ambas son beneficiosas tanto para el dador como para el receptor. El dador se beneficia por la organización y el procesamiento cognitivos, por un razonamiento de nivel superior, por una mayor comprensión y un compromiso superior con el logro de los objetivos grupales como consecuencia de su explicación oral, por elaborar y resumir la información y por enseñar lo que sabe a los demás. El receptor se beneficia, fundamentalmente, por la posibilidad de utilizar los recursos de otros en sus propios esfuerzos para alcanzar logros.

El intercambio de información y el estímulo de los procesos cognitivos no pueden tener lugar, por su parte, en las situaciones competitivas o en las individualistas. En las situaciones competitivas, la comunicación y el intercambio de información tienden a no existir o a ser confusos, y la competencia desvía las percepciones y la comprensión de los puntos de vista de los demás. Las situaciones individualistas suelen estructurarse deliberadamente para asegurar que las personas no se comuniquen ni intercambien información” (p.269). A ello apuntó nuestra propuesta de trabajo.

Descripción del proyecto

Escenario. Nuestra propuesta, para poder abordar esta problemática, consistió en plantearles a los estudiantes una situación que excediera la cotidianeidad de la clase y en la que debieran asumir el compromiso de realizar interpretaciones, en el marco de los conceptos matemáticos y poner en palabras y símbolos las conclusiones a las que arribaran. En las palabras de D’Amore y Díaz Godino (2007): “Los objetos matemáticos son símbolos de unidades culturales que emergen de los sistemas de usos que caracterizan a la pragmática humana (o, al menos, a grupos homogéneos de individuos), y se modifican continuamente en el tiempo, según las necesidades. De hecho, los objetos matemáticos y su significado dependen no sólo de los problemas que se afrontan en la matemática, sino también de los procesos de su resolución; en suma dependen de la práctica humana.” (p.196).

Población. Dos grupos de cuatro estudiantes cada uno de escuelas secundarias del Conurbano Bonaerense, con edades comprendidas entre 15 y 18 años

Trabajo de campo. En este trabajo asumimos que el conocimiento y el lenguaje matemático nos brindan la posibilidad de poder interpretar muchos objetos del mundo que nos rodea y de las relaciones que los sostienen y los hacen posibles. Para ello presentamos ciertas producciones fotográficas, que fueron elegidas previamente por un equipo de especialistas, para que los estudiantes seleccionaran sólo una de ellas para su posterior análisis. Luego, debían “descubrir y describir los objetos matemáticos” que se percibieran, y a partir de los descubrimientos, se les solicitó que contextualizaran la aparición de ese concepto, elemento u objeto matemático en el marco histórico de la evolución del pensamiento científico y finalmente, que elaboren una narración en donde pudieran argumentar, fundadamente, las conclusiones a las que arribaran.

Ante el temor de que quedaran demasiado desorientados respecto a la forma de abordar este desafío se les sugirió que, en dicha construcción teórica, se podrían incluir:

- una descripción de la manera en que la matemática ha constituido a esos descubrimientos en objeto de estudio,
- la perspectiva en que se les dio entidad científica, social y cultural,
- los beneficios que ha deparado su uso a la humanidad y a las otras ciencias,

- las discusiones que ha generado en el campo de la ciencia,
- los aportes que ha brindado a la interpretación de la belleza y/o armonía y que aún puede seguir brindando,
- la interpretación de la esencia de su existencia,
- el tipo de discusiones que ha generado entre distintos matemáticos a lo largo de la historia y que es casi seguro va a seguir generando,
- los aportes que ha realizado a la historia de la matemática, a la historia de la ciencia y a la historia de la humanidad, en general,
- la valoración social y cultural que de ellos se realiza.

Equipo de evaluación. La Secretaría Académica de la Facultad de Ciencias Económicas de la Universidad de Lomas de Zamora designó a tres profesores de la casa especialistas en evaluación. El título de grado de estos profesores es Licenciado en Enseñanza de la Matemática, tienen más de treinta años de antigüedad en la docencia universitaria y secundaria. Son especialistas en Enseñanza de la Matemática y en Formación Docente. Tienen una importante trayectoria en capacitación, evaluación y Sistemas de Tutorías. Son asiduos participantes a cursos de capacitación y actualización, e integran equipos de proyectos en el ámbito de la Secretaría Académica.

De la evaluación de las producciones

En el proceso de evaluación de los participantes de esta actividad, es “(…) importante evaluar la calidad y el nivel de sus procesos de razonamiento y sus habilidades y competencias (tales como, por ejemplo, sus habilidades de comunicación oral y escrita y sus habilidades en el uso de la tecnología). En el cambiante y complejo mundo de hoy, se necesita una visión amplia de la educación, en lugar de un estrecho foco en la memorización de hechos. Más que nunca, las escuelas necesitan preocuparse por enseñar a sus alumnos hábitos de trabajo adecuados (como completar las actividades a tiempo y esforzarse por hacer trabajos de calidad y mejorar continuamente) y actitudes positivas (como el amor por el aprendizaje, el deseo de leer buena literatura o el compromiso con la democracia)” (Johnson y Johnson, 1999, p.153).

Es por ello que la evaluación de las presentaciones que realizaron los estudiantes, que trabajaron de manera colaborativa, tuvieron dos instancias:

- una en la que el jurado de especialistas analizó la producción escrita realizada por los equipos que participaron de la experiencia.
- y la otra que consistió en la exposición del proceso de análisis que los equipos de estudiantes realizaron y la comunicación, ante compañeros, docentes y directivos, de las conclusiones a las que habían arribado.

En la evaluación de las producciones se tuvieron en cuenta, fundamentalmente, la originalidad en el abordaje del objeto a analizar, la presentación del análisis y las conclusiones a las que arribaron, la creatividad en la elaboración de la investigación y formulación de la narración, la adecuación y pertinencia del lenguaje matemático puesto de manifiesto en la totalidad de la producción, la fundamentación matemática de la propuesta de análisis, la claridad en la fundamentación de la propuesta y en la elaboración de la síntesis del trabajo.

El poder reunir en una síntesis la evaluación de los informes presentados por los estudiantes (de manera escrita, oral y usando recursos tecnológicos), permitió obtener insumos para intentar la formulación de juicios de valor sobre lo visto, leído y escuchado. Según Campos y Gaspar (2005) el modelo de análisis proposicional “contribuye a la comprensión y análisis de las construcciones conceptuales del estudiante en su discurso, que son un conjunto de representaciones cognitivas temporales renovadas por aprendizajes posteriores en la confrontación de representaciones con la realidad, reflejados en el discurso oral y escrito, porque los estudiantes producen discurso que representa componentes de la organización conceptual que posee” (p. 57).

Análisis de las producciones:

Trabajo sobre la Figura 1: “Matemáticas escondidas” (nombre asignado por el equipo de estudiantes)

1. Narración

Se trató de una propuesta que mostró gran originalidad en el abordaje del objeto a analizar. “Descubrieron” elementos matemáticos que, tal vez, pasaran desapercibidos a los ojos de los no entendidos en el tema. Los integrantes del grupo aseguraron que, en la fotografía, encontraron relaciones con la Energía potencial y la Energía cinética. Además, utilizaron relaciones trigonométricas y de semejanza para describir, comparar y calcular medidas de figuras y cuerpos que se percibían a través de la imagen. Hasta en algún momento dejaron “volar la imaginación” y encontraron similitudes entre lo que “veían” y ciertos objetos que los rodean en su vida cotidiana, tales como las sombrillas y los techos de las casas.

El trabajo se desarrolló de manera organizada, aunque en cierto momento se desvió parcialmente de la lógica que venían utilizando y se desdibujaron las conclusiones a las que deberían haber llegado.

Su propuesta tuvo una dosis importante de creatividad, que hubiera sido muy interesante que profundizaran un poco más.

En algunos momentos el lenguaje científico se vio opacado por el uso de un lenguaje de “entre casa” (por supuesto con la intención de que fuera entendido por todo el público), mientras que en otras ocasiones no existió rigurosidad en la enunciación de definiciones y propiedades. En algunas oportunidades usaron comparaciones con objetos más conocidos, tales como maderas cruzadas, parecido a una escalera, etc. A pesar de ello, lograron hacerse entender y justificar sus apreciaciones.

Hicieron una interesante fundamentación de la propuesta. Con respecto a ello, únicamente se podría cuestionar el que no hayan citado las fuentes bibliográficas y de información que les sirvieron como marco de referencia. Fueron bastante claros en la exposición de sus ideas, aunque en alguna parte del texto hubo ciertos “saltos” en los párrafos que no nos permitieron seguir de manera adecuada sus argumentos. También se observaron ciertos problemas de redacción que, en algunos casos, malograron la razonabilidad de sus afirmaciones. Ciertos contenidos (sistemas de ecuaciones e inecuaciones, vectores en el plano y funciones racionales) fueron enunciados al comienzo del trabajo como contenidos a abordar pero luego no se explicitaron ni mencionaron.



Figura 1. Parque acuático, Fortaleza, Estado de Ceará, Brasil.

A partir de todo ello, consideramos que fue un muy trabajo de investigación, en el que se notó que han puesto en juego muchos de los conocimientos adquiridos y que, además, han podido realizar interpretaciones del espacio que nos rodea con coherencia y solidez. También pusieron de manifiesto importantes conceptos de Física y apelaron a la imaginación para introducir elementos del campo numérico, cuestiones que no siempre se trabajan de manera adecuada en la escuela, o al menos su utilización pasa desapercibida.

Está de más decir que los resultados obtenidos superaron las expectativas por la profundización en la investigación, la búsqueda de información y la utilización del lenguaje adecuado.

2. Exposición oral

En la instancia de la exposición, el grupo se mostró armónico y cooperativo; no manifestaron un accionar competitivo, sino más bien una actitud sumamente solidaria, ya que en más de una oportunidad, bastó una simple mirada entre ellos como elemento de contención.

También, ante el auditorio, pusieron en juego un lenguaje matemático adecuado que produjo una comunicación fluida y eficiente.

Se podría asegurar que hubieron indicios claros y concretos que permitirían afirmar que se produjo una correcta construcción de los conceptos matemáticos que se exteriorizaron a través de la verbalización. La solidez de dichas construcciones quedaron plasmadas en el momento en el

que el equipo respondió sólidamente las preguntas formuladas por el auditorio. A la vez, se dio una profundización de las respuestas frente al requerimiento de ampliación de esas respuestas.

Trabajo sobre la figura 2: “Bosque matemático de Gaudí ¿Espejismo a la vista?” (nombre asignado por el equipo de estudiantes)

1. Narración

Se partió de un título muy original y pleno de imaginación. Hicieron un abordaje muy curioso y creativo del objeto sometido al análisis. Descubrieron, en la fotografía, elementos matemáticos que tal vez pasaran desapercibidos para aquellos que no son entendidos en el tema o que no hagan el esfuerzo de ver “más allá” de lo bello o estético del objeto. En todo momento usaron un lenguaje técnico muy adecuado, hablaron de parábolas, ejes de simetría, redefinición de los ejes coordenados, representación de lúnulas y cálculo de valores con estimación de errores probables.

Realizaron una exposición impecable de sus argumentos y fundamentaciones. Se notó que realizaron un profundo trabajo de investigación, rescatando, para esta presentación, lo que les resultó útil para justificar sus apreciaciones de aquello que resultaba superfluo.

Se trató de un trabajo muy creativo en el que recurrieron a analogías y ampliaron el campo meramente anecdótico. Percibieron el espíritu del autor de la obra afirmando que Gaudí se imaginó un bosque lleno de árboles que alegraban el paisaje. Sorprendió gratamente el nivel de solidez de los conceptos matemáticos que pusieron en juego y las derivaciones que realizaron de los mismos. Evidentemente asumieron el compromiso de no dejar ningún detalle librado al azar, sino que trataron de dar sustento a cada una de las afirmaciones que realizaron. Trabajaron con semejanza de figuras al realizar un croquis de los cortes longitudinales de la nave central para, en ella, encontrar las razones de la simpleza y al mismo tiempo belleza de toda la obra en su conjunto.

Utilizaron un lenguaje técnico y matemático muy correcto y pertinente. Introdujeron algunos términos de poco uso corriente. Esta afirmación refuerza la idea de que, para realizar esta tarea, el grupo se tomó “muy en serio” la obligación de investigar profundamente sobre todas las cuestiones que hacen a los conceptos matemáticos puestos en juego.

Hubo algunos problemas de redacción que, en algún momento, perturbaron la lectura del material producido; pero ello no le quitó ni la solidez ni la jerarquía al trabajo que realizaron. Sí, se les debió marcar la falta de citas bibliográficas o fuentes en las que se inspiraron para realizar parte de sus argumentos, aunque, sin embargo, realizaron interesantes construcciones en lápiz y papel para poder justificar ciertas conclusiones a las que habían arribado, lo que ennoblece la tarea llevada a cabo. A nadie escapa lo difícil que resulta el poder trasladar al lápiz y papel una obra de semejante envergadura.



Figura 2. Interior de la Iglesia Sagrada Familia, Barcelona, España.

En este trabajo, también los resultados obtenidos superaron las expectativas por la excelente labor de búsqueda de información y la comparación entre los modelos teórico y concreto. Además se percibió que para tomar decisiones se promovieron acuerdos grupales equitativos. Es de destacar la capacidad interpretativa que tuvo el equipo para interpretar el pensamiento de Gaudí al proyectar el diseño de la Sagrada Familia; pareciera que el grupo logró ponerse en la piel del autor para poder captar así la esencia de la idea que lo desvelaba.

2. Exposición oral

En esta instancia, el grupo mostró una profunda cohesión, destacándose por su sincronización y organización. Además, cabe destacar que el material utilizado para mostrar su producción tuvo características similares al del trabajo científico: lenguaje preciso, simbología correcta, objetivos claros y resultados comprobables.

Contaron que para poder estar seguros de la pertinencia, originalidad y significatividad de la producción que iban a exhibir, ensayaron la presentación ante los distintos cursos de la escuela para poder decidir las modificaciones y/o recortes que parecieran pertinentes. Se hicieron escuchar, pero también escucharon y evaluaron los comentarios de sus compañeros.

Utilizaron un lenguaje matemático fluido, demostrando una gran capacidad de síntesis e interpretación. Respondieron de manera sólida las preguntas formuladas por el auditorio evidenciando una relación armónica entre los integrantes del grupo, poniendo en evidencia, una

vez más, que el trabajo colaborativo es una herramienta eficaz que contribuye al mejoramiento del lenguaje académico del grupo.

A modo de conclusión

De alguna manera los resultados obtenidos apuntarían a pensar que las actividades basadas en habilidades sociales (vistas desde una óptica de trabajo colaborativo) contribuyen al mejoramiento del uso del lenguaje, tanto verbal como simbólico, cuyos indicadores se manifiestan a través de las relaciones que los propios integrantes del grupo establecen y por los códigos de lenguaje que utilizan.

Se pudo percibir que en un primer momento los grupos de estudiantes desarrollaron un “discurso reflexivo” en el que hicieron intervenir a los objetos matemáticos, formularon hipótesis y situaciones de conflicto entre dichos objetos, revisaron críticamente los conceptos puestos en juego, se corrigieron, y es más, se autocorrigieron e interactuaron como grupo. Estas acciones ponen de manifiesto una sólida construcción de los conceptos matemáticos ya que los pueden revisar, analizar y reconstruir a través de las características propias de los mismos.

Hubo una muy clara exposición de las ideas principales con fundamentación y argumentos basados en un lenguaje técnico, sólido y concreto. Se notó que no dejaron detalles librados al azar, sino que realizaron un trabajo en profundidad sobre la problemática abordada. Además, utilizaron algunos términos de uso no corriente, pero que tienen su interpretación en el campo de la Matemática, enriqueciendo su vocabulario académico. Para fundamentar sus argumentaciones usaron recursos tecnológicos lo que implicó establecer una relación entre el lenguaje matemático simbólico y el lenguaje visual, tarea que requiere de una sólida construcción de los conceptos puestos en juego.

Es de hacer notar que nuestros jóvenes estudiantes nos siguen sorprendiendo con su capacidad de realizar distintas interpretaciones en diferentes lenguajes poniendo en juego conceptos matemáticos trabajados previamente en la escuela.

Referencias y bibliografía

- Campos, M. A., & Gaspar, S. (2005). *Construcción del conocimiento en el proceso educativo*. México. Plaza y Valdés,
- D'Amore, B., & Díaz Godino, J. (2007). El Enfoque Ontosemiótico como un desarrollo de la Teoría Antropológica en Didáctica de la Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10. México.
- Johnson, D., & Johnson, R. (1999). *Aprender juntos y solos*. Buenos Aires: Grupo Aique Editores S. A.
- Martínez Sánchez, F. (1999). Seminario Internacional. *La formación del Profesorado ante las nuevas Tecnologías de la Comunicación*. Universidad de Murcia.
- Pozo, J. I. (2000). Cuando del dicho al hecho hay un corto trecho. *Aula de Innovación*, IX (96). Barcelona: Editorial Graó.

De la estimación aproximada de la magnitud a la conformación de la precisión, base del valor discreto numérico. Perspectiva desde dos campos del conocimiento. Neurociencias y Matemática Educativa

Ma. Herlinda C. **Martínez** de la Mora
CINVESTAV-Instituto Politécnico Nacional
México
hmartinez@cinvestav.mx

Resumen

El propósito del artículo es proponer otra explicación a las existentes actualmente en Neurociencias con respecto a la precisión numérica, para ello se utilizó el método analítico mediante el cual se examinaron datos de dicha disciplina y Matemática Educativa. Ya que, ello contribuirá a dilucidar la participación del número en el pensamiento matemático. La explicación propuesta es: cuando se comienza el aprendizaje numérico, durante el conteo, se realiza una impronta de precisiones concatenadas en el surco intraparietal, IPS, mediante la señalización a la vista. El aspecto a destacar es que los circuitos neuronales con los cuales venimos dotados como especie son los que se activan constantemente al ejercitarse durante la tarea de puntear, y paulatinamente se genera una conectividad neuronal que permite la precisión. Son estas precisiones concatenadas las que dan soporte a la regularidad aditiva unitaria que al articularse con la cifra darán contenido al valor discreto del número.

Palabras clave: neurociencias, matemáticas, numerosidad, numeral, número discreto.

Marco de Referencia

Desde las Neurociencias presentamos evidencias y algunas de las explicaciones existentes con respecto al procesamiento neuronal de la numerosidad heredado filogenéticamente en donde se registran dos particularidades relevantes: una de ellas es la valoración numérica aproximada y la otra es la percepción súbita de pequeñas colecciones. Aunado a ello, esta disciplina nos aporta información en cuanto a los sustratos neuronales que se activan cuando se manipula un número sin importar el formato de presentación, es decir; como secuencia de sonidos, como colección de puntos, o el símbolo numérico, o cualquier otro. Desde ese referente es que se plantea el problema del valor discreto del número, para analizarlo definimos la concurrencia de dos ámbitos del conocimiento. Así utilizamos el punto de intersección de las Neurociencias, y Matemática Educativa. La teoría desde la cual orientamos la investigación es Matemática, particularmente como se define desde allí el valor discreto del número. A continuación presentamos información que proviene de los dos campos de conocimiento en el orden mencionado.

El tratamiento de la precisión en el número desde las Neurociencias

En el ámbito de las neurociencias se han presentado diferentes aproximaciones con respecto al tipo de procesamiento observado en el cerebro al discernir una numerosidad. Aquí

cabe hacer alusión a la definición, que goza de cierto consenso en esta comunidad, referente a la numerosidad; este término específicamente distingue una cantidad numérica medible, es un aspecto de cualquier colección de objetos (Gelman & Gallistel, 1978, p.181), ello implica que es una propiedad de una colección.

Algunos investigadores, están de acuerdo en la existencia de un fenómeno que han denominado “subitizing” consistente en el reconocimiento súbito de pequeñas agrupaciones, este procesamiento abarca numerosidades pequeñas no mayores a tres —en algunos casos incluyen alguno más—. Otro tipo de procesamiento es referido como no verbal, mediante el cual se efectúan estimaciones numéricas, su rasgo característico es que es aproximado, y filogenéticamente compartido incluso con otras especies animales. Finalmente el que se observa durante el conteo con el uso de las palabras-número. Muchas de las investigaciones efectuadas con niños pequeños, tienden a dilucidar como participa el lenguaje en el aprendizaje numérico, esas investigaciones nos aportan información concerniente al proceso parsimonioso de la adquisición de las primeras palabras-número.

Stanislas Dehaene y Laurent Cohen detallan las regiones cerebrales que se activan cuando los sujetos codifican números. El modelo del triple código del procesamiento numérico emerge por la identificación de las regiones que participan y el tipo de codificación que cada una realiza, dependiendo de las demandas de la tarea. Además reconocen que la contribución de algunas de estas regiones es altamente específica y su función no puede ser transferida a otras regiones, como sucede para otros casos, al activarse la plasticidad neuronal. Los tres sistemas que componen el modelo se resumen a continuación.

Sistema de cantidad

El primero de ellos lo llaman sistema de cantidad, los autores lo describen como representación semántica no verbal, en donde la representación analógica de las magnitudes numéricas se despliega como distribución de activación sobre una línea mental, lo cual implica relaciones entre números de tamaño y distancia. Este, proponen los autores, se ubica en el lóbulo parietal particularmente en el segmento horizontal de surco intraparietal IPS de los dos hemisferios cerebrales, se distingue también por mostrar comportamientos aproximados, antes de la escolaridad. (Dehaene, 1992; Dehaene & Cohen; 1996, citados por Dehaene, Piazza, Pinel, & Cohen, 2003, p. 488).

Sistema de procesamiento verbal de los números

El segundo sistema lo distinguen de los otros porque está dedicado al procesamiento verbal de los números: en un formato léxico, fonológico y sintáctico, muchas veces aludido como secuencia de palabras- número, (desde otras explicaciones). Las áreas neuronales que se activan para procesar esta modalidad probablemente depende del lóbulo frontal y lóbulo temporal (Dehaene, 1992, citado por Hubbard, Piazza, Pinel & Dehaene, 2005, p.440) y añaden pormenorizando el circunvolución angular GA en conexión con la región perisilvana del hemisferio izquierdo, (Dehaene, 1992; Dehaene & Cohen; 1996, citados por Dehaene, *et al*, 2003, p. 487-488).

Procesamiento visual del sistema numérico

El tercer y último código implicado es el correspondiente al formato visual, aquí los números son representados como cuerdas de numerales arábigos. Los autores sugieren que este

último es procesado por la sección ventral-occípito-temporal de ambos hemisferios (Dehaene, 1992; Dehaene & Cohen; 1996, citados por Dehaene, *et al*, 2003, p. 488)

La zona neuronal que codifica la semántica del número

Con respecto a la representación semántica del número que propone S. Dehaene, es relevante enfatizar la región neuronal que el autor reconoce como sede de la semántica del número. “El IPS codifica el significado de la cantidad abstracta del número, más que los símbolos en sí mismos” (Dehaene, *et al*, 2003, p. 492). Dehaene y otros hacen la siguiente observación:

El efecto de interferencia numérico-espacial puede tener su origen en el hecho de que la región intraparietal, activa durante el procesamiento del número y el cálculo, está muy cercana y a menudo se traslapa con zonas dedicadas a la codificación de las dimensiones espaciales como tamaño, ubicación, y dirección de la mirada (Hubbard *et al*, 2005; Pinel *et al*, 2004; Simon *et al*, 2002, citados por Dehaene, 2009a, p.251).

La propuesta de que la semántica del número es un dominio determinado biológicamente se funda en tres criterios; el primero es la facultad encontrada en animales para manipular numerosidades y efectuar cálculos elementales, el segundo es que los bebés humanos presentan también capacidades parecidas a ese procesamiento numérico elemental de los animales, incluso antes de desarrollar el lenguaje, y cuyo comportamiento es aproximado, para las colecciones no capturadas por el llamado subitizing. Y tercero, que el procesamiento numérico se despliega en algunos circuitos neuronales particulares, que se han identificado a través de replicar su activación neuronal con diferentes métodos de estudio como; estimulación cerebral, neuroimágenes y neuropsicológicos (Dehaene, *et al*, 2003).

En el modelo de triple código se propone que la representación numérica puede dar contenido semántico en una modalidad independiente del lenguaje, por otro lado, asume que el número es una entidad propiedad de la colección del mundo externo y en ese sentido es susceptible de aprehenderse, de codificarse mediante un discernimiento de las colecciones expuestas a la vista. Cualquier tipo de tarea que implique un procesamiento numérico activa el IPS, enfatizamos, cualquier tratamiento de cualquier tipo de cantidad, o magnitud provoca la activación del llamado sistema numérico aproximado.

Sin embargo, desde este tipo de planteamiento, la cuestión del valor discreto del número queda sin posibilidades de ser explicado. Y dado que este valor es una creación cultural es susceptible de aprenderse, y por lo tanto de generar conexiones neuronales, precisamente en esta región del IPS. Con respecto a ello, es necesario aludir al siguiente dato, Hubbard, Piazza, Pinel, y Dehaene develan un ámbito intrincado al proponer que “las interacciones numérico-espaciales se fundan desde circuitos parietales comunes para la atención del espacio externo y la representación interna del número” (Hubbard, Piazza, Pinel, Dehaene, 2005, p.435). Precisamente dichos circuitos que atienden el espacio externo y el interno son un punto relevante al cual atender para generar la precisión necesaria para el valor discreto del número. A ello regresaremos en el apartado dedicado a la discusión.

Con base en la información presentada en relación a las experimentaciones que provocan activaciones en el IPS y por la perspectiva asumida de observar, el procesamiento numérico, desde su determinación biológica, se llevó a sugerir que el sistema numérico aproximado, ANS, por su propia naturaleza no puede dar cuenta de la exactitud en el número. Por ello Brannon presenta afirmaciones como la siguiente; el tipo de comportamiento allí encontrado ha conducido

a plantear que el ANS no proporciona ningún soporte a la precisión que se identifica claramente en el empleo de los símbolos numéricos. (Brannon, & Merritt, 2010, p.210)

Por su parte Spelke nota que el ANS es fundamento para el sistema simbólico, pero señala dos inconvenientes —mencionamos el que aquí interesa—.

El sistema, sobre todo, es fundamento para el aprendizaje de los símbolos matemáticos, Sin embargo, el sistema tiene limitantes. Primero, este es impreciso y por lo tanto falla para dar soporte a representaciones tales como *exactamente siete*. [...], el ANS falla para representar explícitamente entidades individuales que comprenden la colección cuyo valor cardinal es aproximado, y no logra captar la operación fundamental de adicionar uno a la colección (Spelke, 2010, p. 294).

Bajo las dos anteriores perspectivas mencionadas, la de Brannon y la de Spelke, parecería que el sistema de aproximación numérica cuya sede neuronal es el IPS, no podría dar soporte a la precisión numérica, no obstante algunos autores han reconocido que el conteo y el aprendizaje de los símbolos numéricos, provoca un efecto de exactitud. Una explicación es la expuesta por Piazza.

Piazza, sostiene que un subconjunto de neuronas parietales que previamente codifican números aproximados experimentan un proceso de afinación perceptual gobernada por la ley de Weber, una especie de refinamiento durante la adquisición numérica-simbólica de tal manera que la cantidad numérica a la que se accede por números simbólicos es codificada con mayor precisión mediante un modo cuasi-categorico (Vergus & Fias, 2004, citados por Piazza, 2010, p.274). Así, un paso crucial hacia la construcción de la representación de números exactos se alcanza cuando los niños comprenden los principios del conteo, gracias a lo cual ellos pueden representar la cuantificación exacta de la numerosidad de los conjuntos, remontando la baja resolución del ANS. Piazza también afirma:

la adquisición de los símbolos numéricos no consiste simplemente en un directo mapeo entre el núcleo del sistema parietal para la numerosidad y el símbolo para el número, implica profundos cambios en la red cerebral del procesamiento de la numerosidad (Piazza, 2007, citado por Piazza & Izard, 2009, p.271).

Como consecuencia del desarrollo de las representaciones lingüísticas se pueden observar cambios.

Estos cambios principalmente consisten en un progresivo refinamiento de la representación de los símbolos numéricos, en particular, en el hemisferio izquierdo. Primero durante el desarrollo, hay un cambio progresivo de predominancia del HIPS derecho hacia una implicación bilateral del procesamiento numérico tanto simbólico como no-simbólico (Ansari, *et al*, 2006; Cantlon, *et al*, 2006; Piazza, *et al*, 2007; Izard, *et al*, 2008a, citados por Piazza & Izard, 2009, p.271).

Entonces, Piazza propone que ANS es susceptible de admitir exactitud. Este sentido de apreciar la posibilidad de precisión en el IPS es relevante, ya que, en la perspectiva asumida por Piazza, se sostiene la posibilidad de formar agudeza para conseguir un efecto de precisión, a través de la discriminación de las cantidades. (Piazza, 2010, p.271). Piazza explica que mediante los principios del conteo y el aprendizaje de los dígitos se provoca un efecto de afinación en el Sistema Numérico Aproximado cuya región neuronal se localiza en el IPS, y que está gobernado por la Ley de Weber. Aunque, reconoce la autora, aún es una interrogante ¿Cómo es que ello sucede? (Piazza, 2010).

También Brannon reconoce la necesidad del sistema simbólico para la precisión

Sin tal sistema numérico simbólico, los animales están limitados a una representación difusa sostenida por el ANS. Consecuentemente, el ANS permite una mucho más rápida y exacta discriminación entre dos de cuatro [numerosidades], que entre 32 de 34 (Brannon, 2010, p.210).

Esa discriminación está valorada por la ley de Weber, esto es, bajo el enfoque de medir el umbral de percepción de las numerosidades.

En cuanto al símbolo indo-arábigo, en Neurociencias el modelo del triple código, así como otras investigaciones, señalan la circunvolución angular, GA como una región neuronal activada al leer una cifra numérica, el dato es relevante pues se ha asociado al procesamiento simbólico la posibilidad de exactitud, pero la relación con el IPS se explica, desde esta aproximación, únicamente a nivel de mapeo (si bien se reconoce la existencia de cambios a profundidad de la red neuronal). Así lo expresa Piazza

Durante la infancia temprana a través del conteo y el “subitizing” los símbolos del número son progresivamente mapeados sobre el núcleo de la representación de la cantidad numérica (Piazza & Izard, 2009, p.271).

Al respecto la explicación que presenta S. Dehaene es que la introducción de la representación simbólica puede llevar a afinar la precisión, como mapeo en una linearización numérico-espacial (Dehaene, 2009b).

Esto último es una de las controversias con respecto a ¿Cómo se procesa el número por el cerebro? ¿Cómo se logra esa precisión?, ¿De qué depende conformar el entramado que da soporte al valor discreto del número? Ello se observa también en el punto de vista siguiente, lo explicitamos porque alude al aspecto discreto del número, aunque este implícito.

El conteo y las mediciones desarrolladas mediante la educación, más que el lenguaje hablado, pueden jugar un rol crucial para conseguir el número exacto, un cambio conceptual cuyos fundamentos probablemente implican el surco intraparietal izquierdo (Nieder & Dehaene, 2009, p.199).

Cabe destacar que en las referencias citadas se presupone el discernimiento del número de una colección presentada a la vista y desde allí se valora el grado de exactitud. Sin embargo, aquí observaremos otra forma de aludir a la precisión en el IPS, en ella residirá el valor discreto del número, para lo cual presentamos una selección de investigaciones que registran el trayecto del aprendizaje del número durante los primeros pasos. Ahí se podrá apreciar, en ciertas ejecuciones de tareas que presumiblemente activan el IPS y cuyo resultado refiere una singular impresión de precisión, generando en el IPS el entramado que da soporte al valor discreto del número.

La precisión durante el curso del aprendizaje del número

Las investigaciones efectuadas en los 80' del siglo pasado hacen una detallada descripción, desde diferentes enfoques, del trayecto del aprendizaje del número. Es destacable que entre esas investigaciones con marcos de referencia distintos se encontraron algunos comportamientos reiterados en los alumnos cuando se aprenden los números.

De entre ellos, seleccionamos los que indican los primeros pasos del aprendizaje del aspecto discreto del número. Este aspecto en particular —en las investigaciones de entonces— se encuentra implícito en la tarea de conteo. Aquí, presentamos algunas perspectivas que se han actualizado a través de las explicaciones presentes en el ámbito de las Neurociencias.

Para Fuson hay una creciente integración entre la secuencia, el conteo y el significado del cardinal. Ella distingue dos fases en la adquisición y elaboración del numeral—número. De esta forma ya no centra su interés en la referencia al conteo de los objetos concretos, aunque lo implique; más bien se ocupa de distinguir y subrayar las relaciones de orden y cardinalidad, y los categoriza.

En la fase de adquisición de la secuencia de los primeros numerales; durante los primeros intentos, el niño puede repetir un numeral, o dejar algún objeto sin contar, o contarlos dos veces, o proseguir el conteo ya agotados los objetos. La fase de adquisición atiende a la “recitación” de los numerales como secuencia convencional en coordinación con los objetos contados. En la fase de elaboración la autora pormenoriza cinco niveles: El nivel de cuerda, de cadena irrompible, de cadena desintegrable, de cadena numerable, Nivel de cadena bidireccional. (Fuson, 1988).

La autora enfatiza el papel que desempeña las palabras-número en la integración de la secuencia, el conteo y el significado del cardinal. El modelo de integración que propone Fuson y el modelo de triple código de S. Dehaene presentan un cierto paralelismo, ciertamente es una de las referencias que emplea S. Dehaene, en la secuencia de números arábigos como cuerda y en el aspecto verbal del número, esto es, el conteo mediante el empleo de palabras-número.

Por su parte, con un enfoque diferente, Gelman y Gallistel destacan cinco principios del conteo. El principio; de correspondencia uno a uno, de orden estable, de cardinalidad, de irrelevancia del orden y el de abstracción. Los dos primeros principios, según estos autores, emergen en niños desde la edad de dos años, con respecto a conjuntos restringidos a dos o tres elementos. La asociación numeral-objeto genera el principio de correspondencia uno a uno, en cuanto al principio de orden estable refiere el orden en la secuencia de numerales. El principio de cardinalidad, lo observan más tarde, alrededor de los tres años, e indica el último de los objetos contados en una colección. El principio de irrelevancia del orden es ya muy descriptivo, dada una colección el orden en el que son contados los objetos es irrelevante. El principio de abstracción es un atributo a aplicar en cualquier tipo de conjuntos. (Gelman & Gallistel, 1978; citados por Siegler, 2003, p.220).

En el modelo de conteo de Gelman y Gallistel el principio de correspondencia uno a uno se divide en dos procesos partición y etiquetación, el primero refiere procedimientos de tipo atencional pues atiende a los objetos que ya han sido contados y los que faltan por contar. Pero también atiende al acto de señalar; el cual es mental (cuando el niño lo ha interiorizado) o física cuando todavía el individuo desplaza los objetos que ya fueron contados para separarlos de los que faltan de contar (Gelman y Gallistel, 1978, citados por Bermejo, p.61) Es relevante que tanto Gelman y Gallistel, como Maza aluden al acto de señalar como parte de la condición para la correspondencia uno a uno.

Al acto de señalar durante el conteo se le atribuyen diversas finalidades o efectos uno de ellos es liberar capacidad de la memoria de trabajo. Schaeffer, Eggleston y Scott sostienen que el acto de señalar es una regla mnemónica que todos los niños emplean espontáneamente durante el aprendizaje del conteo. (Schaeffer, Eggleston y Scott, 1974; citados por Bermejo, 1990, p.73) Por su parte, Briars y Siegler distinguen que, los niños alrededor de los tres años creen que el acto de señalar refiere un conteo correcto. Años después, a los 5 años aproximadamente descubren que lo importante es la correspondencia misma. (Briars y Siegler, 1984; citados en Bermejo. 1990, p.72).

Fuson también reconoce en los actos de indicación, señalamientos efectuados durante la correspondencia uno a uno, entre las palabras dispuestas en el tiempo y los objetos situados en el espacio. El acto de señalar para la autora supone una interiorización progresiva al igual que la emisión de numerales. En esta progresión se transita de tocar los objetos, a señalarlos de cerca para después tocarlos únicamente con la mirada (Fuson, 1988).

En un estudio realizado por Bermejo, Lago y Rodríguez, con niños de preescolar de dos grados distintos: 1° con niños de edades fluctuantes entre 4 y 5 años y el otro grupo con pequeños de edades entre 5 y 6 años, en donde la tarea consistió en contar filas de 5, 9, 16, y 23 objetos. Se reporta que los niños pequeños requerían señalar los objetos en el 91, 67 % y de este grupo de edad solamente el 5.21% utilizó únicamente la mirada. En cambio, con respecto al grupo de niños de entre 5 y 6 años, el empleo de la mirada sin señalar creció, observado en el 32, 29 % de los eventos. Sin embargo, el señalamiento es aún necesario, así lo registran con el 66, 67% de los casos (Bermejo, Lago y Rodríguez, 1986; citados por Bermejo, 1990, pp.71 - 72).

El acto de señalar y su posterior ejecución con la mirada únicamente es un aspecto del conteo, que en esta investigación después del análisis efectuado, condujo a determinar el aspecto discreto del número, como el objeto a analizar. Otro aspecto igualmente fundamental es la operatividad que se genera mediante el conteo. A este respecto aludimos a algunos autores que con anterioridad han notado y descrito el atributo aditivo involucrado en el conteo.

En este orden de ideas, Miyamoto y Gimbayashi, fusionan directamente el conteo con la operación, de tal forma que hacen referencia a un principio de conteo, donde este es directamente operación aditiva. (Miyamoto y Gimbayashi, 1983; citados por Bermejo, 1990, p.108). Por su parte Gil refiere el conteo directamente articulado a las operaciones de adición y sustracción (Gil, 2005).

Bermejo expone que los niños utilizan diferentes estrategias cuando efectúan adiciones, explica que ellos necesitan usar algún procedimiento de registro para dar consecución al conteo.

A este respecto, algunos autores (Baroody, 1987; Baroody y Ginsburg, 1986; Bermejo y Lago en prensa; Bermejo & Rodríguez, 1987b, en prensa; Carpenter & Moser, 1982, 1983, 1984; Fuson, 1982, 1988^a; citados en Bermejo, 1990, p.129) señalan que la mayoría de los niños usan sus dedos para registrar el número de pasos que se incrementan en la secuencia de conteo. Así mismo cuando el conteo se produce mentalmente, parecen usar ciertos ritmos físicos, como por ejemplo movimientos de cabeza.

Bermejo también alude a algunas investigaciones que registraron el tránsito de la estrategia de contar todo a la estrategia de contar a partir de uno de los sumandos. Aunque el dato proviene de aspectos que refieren la operación de sumar, ellos de hecho no son ajenos a la propia elaboración del entramado neuronal que subyace al valor numérico discreto.

En esta línea, Groen Y Resnick, 1977 [citados por Bermejo, 1990] afirman que los preescolares utilizan espontáneamente el procedimiento de contar a partir de uno de los sumandos, después de 12-20 semanas de entrenamiento. (Carpenter y otros, 1981; Houlihan y Ginsburg, 1981; Ilg y Ames, 1951; Saxe, 1982; y Secada, 1982; citados por Bermejo, 1990, p.131) entre otros, obtienen resultados similares.

Por otra parte, Gérard Vergnaud distingue que hay principalmente dos ideas asociadas al fundamento del concepto primitivo de número ellas son: el cardinal como medida de cantidades discretas y la adición que da al número sus propiedades distintivas. (Vergnaud, G., 1991, p.272)

Resultados

El trabajo cualitativo inicial consistió en precisar la perspectiva desde dónde se realizaría el análisis. La definición del punto de vista como intersección de dos campos de conocimiento, permite develar algunos aspectos no evidentes desde otras aproximaciones. El determinar cuáles ámbitos del conocimiento era necesario referir fue producto de análisis, mismo que condujo a discernir aquello que era necesario traer a cuenta, así, por un lado se necesitaban los datos aportados por las Neurociencias ya que estos contribuyen con una fuente de evidencias concerniente a las activaciones neuronales existentes cuando se realizan tareas numéricas — actualmente hay polémica en ese ámbito en relación a dónde y cómo se procesa la semántica del número—. Además, con respecto al número y su aprendizaje, en Matemática Educativa se tiene un acervo en donde hay registros del comportamiento de los estudiantes durante el trayecto del aprendizaje de las Matemáticas, este espectro amplio y especializado en la Educación Matemática, aporta un marco pertinente para valorar las explicaciones propuestas desde las Neurociencias en relación al tratamiento cerebral del número, y por último la teoría que orienta el análisis del objeto de estudio, está sujeta de forma natural a las Matemáticas —en tanto esta disciplina aporta las entidades a representar por el cerebro—, particularmente Teoría del Número, Esta teoría si bien orientó el análisis, quedó implícito su tratamiento.

Para iniciar distinguimos el valor discreto del número, como producto de ejercitaciones en tareas específicas. A diferencia de la numerosidad que puede ser percibida de forma súbita, o aproximada, e incluso de la serie numérica en la cual, si bien, se sigue la secuencia de palabras-número como recitación, ella aún no tiene contenido que le dote de significado. (durante los primeros años de la infancia).

Proponemos que hay precisiones concatenadas que se van conformando en el IPS mediante hechos de marcación, estos son puntualizaciones que los niños realizan, cuando efectúan tareas elementales con colecciones, estos hechos de marcación pueden ser: señalar el objeto contado, o llevar el registro con los dedos, o con ritmos indicados por el golpeteo con el pie o movimientos de la cabeza. Dichos hechos de marcación, son mencionados por Fuson como actos de indicación, por su parte Gelman y Gallistel los distinguen como elemento del principio de correspondencia uno a uno y finalmente los otros autores citados reconocen esta reiteración durante los primeros pasos del aprendizaje numérico. La descripción que cabe enfatizar, para el análisis aquí efectuado, es la presentada por Bermejo. Allí destaca, el seguimiento únicamente con la mirada, en un periodo posterior al efectuado durante los hechos de marcación. Aunado a ello, Fuson reconoce este siguiente paso como, “tocar con la mirada”.

Uno de los aspectos básicos del número es el valor discreto, en este artículo este es el objeto de análisis. Diferimos del planteamiento de Vergnaud en relación a aludir a un concepto primitivo del número. La discrepancia reside en que el concepto implica necesariamente las áreas del lenguaje, en donde se hace explícita la idea que se tiene de un determinado objeto. Así por ejemplo, se puede decir que alguien tiene el concepto de número como cantidad. Este es un concepto —estamos de acuerdo— pero no sostiene completamente aquello que es un número.

La propuesta de explicación de cómo se conforma el entramado neuronal que da soporte al valor discreto del número dilucida y permite evidenciar que estamos ante tratamientos distintos; uno muy particular para el concepto y otro para contener la operatividad asociada al número; en un principio como aditividad, misma que está completamente imbricada en la particular elaboración de precisiones concatenadas que darán soporte al valor discreto del número.

Así, el valor discreto del número depende de las ejercitaciones en tareas específicas que involucren el conteo, pero a diferencia de otras aproximaciones en las cuales le dan un peso mayor a la palabra-número, o la serie numérica, aquí destacamos el efecto de hacer marcaciones precisas, en muchas ocasiones mediante el señalamiento con la mano, o el registro con los dedos. Este efecto se observa después, cuando se puede prescindir de estas marcaciones para seguir cada precisión con la mirada solamente. La propuesta es; que el seguimiento hecho únicamente con la mirada, es un dato que nos informa sobre esa impronta de precisión en el IPS, es decir, en esa región neuronal asociada al sistema numérico aproximado.

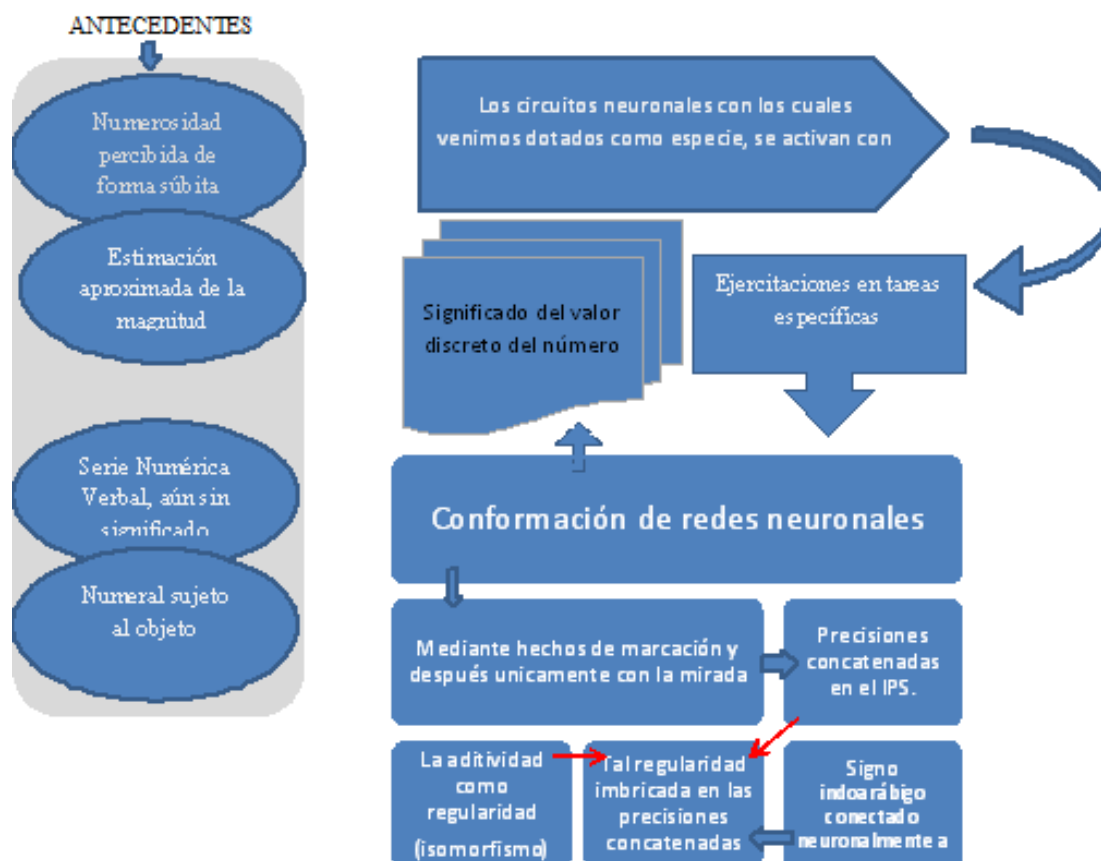


Figura 1. Esquema del significado del número discreto.

En muchas ocasiones se explica el hecho de contar a partir del sumando mayor como una estrategia más económica que involucra un mejor desempeño. La explicación que nosotros sugerimos — desde el orden de ideas que hemos presentado — es que ese mejor desempeño es consecuencia del entramado neuronal elaborado en el IPS, mediante los hechos de marcación, entonces el niño cuenta con el recurso neuronal que le permite desplazar el comienzo del conteo a cualquier valor discreto, es decir, a la precisión que contiene el valor absoluto sustentado por un entramado neuronal.

Cabe indicar; antes de que el niño inicie a mostrar comportamientos evidentes de hechos de marcación, hay un recorrido anterior, en el cual un adulto ante la vista del pequeño hace señalamientos a los objetos acompañados de una palabra-número cada que puntúa sobre ellos. Posteriormente, los hechos de marcación efectuados por el niño, no necesariamente requieren estar expuestos a la vista, sin embargo, lo está uno de los más descolantes, el de señalar.

El conteo que emplea nada más que la mirada para dar consecución a la siguiente precisión concatenada, es indicador de la activación del IPS que ya está en capacidad de dar consecución exacta, sin tener que acudir a señalar. El soporte de esta propuesta lo encontramos en el dato proporcionado por Hubbard y otros, en relación a que las interacciones numérico-espaciales comparten circuitos parietales comunes para atender el espacio externo y la representación interna. Ahora las precisiones concatenadas expuestas a la vista, necesariamente siempre exhiben regularidad aditiva desplegada en una estructura sea esta acumulación en un punto o como aumento lineal.

Para generar el entramado neuronal que dará soporte al signo como cifra numérica, se necesita presentar a la vista una cantidad y el signo indo-arábigo simultáneamente, es decir, indicar directamente la cifra y la colección. Esta tarea, activará una de las precisiones concatenadas, es decir, una de las entidades discretas (dependiendo de la cantidad en la colección), para ello empleará el recurso neuronal ya elaborado por las tareas antes expuestas. Y activará una región más el GA, región que se activa cuando se lee un dígito.

Una vez establecido el vínculo entre signo y la precisión distintiva de un cierto valor aditivo, es decir, una red neuronal entramada entre el GA y el IPS el niño está en condición de dar significado a la cantidad signada. Así la cifra tiene esta característica, que ya entramada tal red neuronal se activará el IPS de manera automática y expedita, al sencillamente, ver un signo, este ya no es numeral (cuyo valor se encuentra sujeto a un objeto en particular), ya que porta significado específico de una determinada precisión aditiva, de una determinada entidad discreta. Todo ello da pauta para distinguir: entre numerosidad, numeral, número discreto. Este último con pleno significado de expresar un número entero, no obstante, un número aún elemental.

Proponemos que las precisiones concatenadas conllevan iteración aditiva unitaria, cada una de las adiciones unitarias son isomorfas entre ellas, con lo cual conforman operatividad estructurada, ya que la concatenación refiere linealidad o acumulación en un punto. La operatividad estructurada se erige conforme se despliega regularidad. La regularidad de la adición unitaria, isomorfas entre cada una de las adiciones, es el rasgo fundamental y singular que se manifiesta en las precisiones concatenadas. Con ello vinculado al signo, obtenemos un número discreto.

Conclusión

El análisis desde la perspectiva presentada, permitió focalizar el problema de investigación en la regularidad aditiva del número durante los primeros pasos en la escolaridad, esta se devela como una preparación indispensable para dar significado al número discreto. Las tareas que forman precisiones concatenadas en el IPS, darán soporte neuronal al valor discreto del número. Esta última es la hipótesis propuesta.

Tal hipótesis tiene dos componentes imprescindibles: por un lado, se requiere de los hechos de marcación, coordinados con la vista, ya que, estos propician un impacto de precisiones concatenadas en el IPS. Uno de los datos comportamentales relevantes para hacer tal afirmación, es que los hechos de marcación preceden necesariamente al seguimiento únicamente con la mirada durante tareas de conteo, como lo registra Bermejo. Entonces, la conducta de los alumnos durante el conteo de dar consecución solamente con la mirada es indicador de la impronta neuronal en el IPS. El otro componente es; esas precisiones concatenadas no son arbitrarias, esas concatenaciones se encuentran reguladas por el aumento, $N+1$, en donde cada uno de los

aumentos son isomorfos entre ellos, y generan estructura, sea como linearidad o como acumulación en un punto.

La consecuencia es que esas precisiones distintivas conforman el fundamento de la entidad discreta del número sustentadas en activaciones neuronales específicas, en tanto tales precisiones son el aspecto manifiesto de la regularidad de adiciones iteradas, isomorfas entre cada una de ellas, esto es, una preparación que precede al aprendizaje signado de la cifra. Una vez conformada esta red neuronal; mediante tareas posteriores, durante el aprendizaje del signo, se articulará el significado exacto, así entramado, a un cifra específica.

Cabe destacar que el significado exacto que hemos mencionado involucra la regularidad de la adición unitaria, isomorfas entre cada una de las adiciones, este es el rasgo fundamental y singular que manifiestan las precisiones concatenadas, ya que la regularidad estructura. Con la articulación al signo, se consigue lo que hemos llamado número discreto.

Referencias y Bibliografía

- Ansari, D. (2008). Effects of development and enculturation on number representation in the brain. *Nature* 9, 288-291. Recuperado de [http:// www.nature.com/reviews/neuro](http://www.nature.com/reviews/neuro)
- Bermejo, V. (1990). *El niño y la aritmética. Instrucción y construcción de las primeras nociones aritméticas*. España: Paidós
- Brannon, E. M., & Merritt, D. (2010). Evolutionary foundations of the approximate number system. En: S. Dehaene, & E. M. Brannon (Eds.) *Space, Time and Number in the Brain. Searching for the Foundations of Mathematical Thought* (pp.207- 224). Canada: Elsevier. doi: 10.1016/B978-0-12-385948-8.00014-1.
- Dehaene, S., Piazza, M., Pinel, Ph., & Cohen, L. (2003). Three parietal circuits for number processing. *Cognitive Neuropsychology*, 20(3/4/5/6), 487-506. doi:10.1080/02643290244000239.
- Dehaene S. (2009a). Origins of mathematical intuitions: the case of arithmetic. *Academy of Sciences*, 1156, 232-259. New York doi: 10.1111/j.1749-6632.2009.04469.x.
- Dehaene, S. (2009b). The case for a notation-independent representation of number. *Behavioral and Brain Sciences*, 32, 333-335. doi: 10.1017/S0140525X09990033.
- Fuson, K.C. (1988). *Children's Counting and Concepts of Number*. USA: Springer-Verlag.
- Gelman, R. & Gallistel, C. R. (1986). *The child's understanding of number*. Cambridge, Massachusetts USA and London England, Harvard University Press,
- Gil Ruiz, N. (2005). *El papel del conteo en la enseñanza y el aprendizaje del número natural, en el niño de seis años* (Tesis de Maestría inédita). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México, D.F.
- Hubbard, E.M., Piazza, M., Pinel, Ph., & Dehaene, S. (2005). Interactions between number and space in parietal cortex. *Nature Reviews Neuroscience*, 6, 435-448. doi: 10.1038/nrn1684.
- Nieder, A., & Dehaene, S. (2009). Representation of number in the brain *The Annual Review of Neuroscience*, 32, 185–208. doi:10.1146/annurev.neuro.051508.135550
- Piazza, M., & Izard, V. (2009). How Humans Count: Numerosity and the Parietal Cortex. *The Neuroscientist*, 15(3), 261–273. doi: 10.1177/1073858409333073.
- Piazza, M. (2010). Neurocognitive start-up tools for symbolic number representations. En S. Dehaene, & E. M. Brannon (Eds.), *Space, Time and Number in the Brain. Searching for the Foundations of*

Mathematical Thought (pp. 267- 285). Canada: Elsevier doi: 10.1016/B978-0-12-385948-8.00017-7.

Siegler, R.S. (2003). *Implications of Cognitive Science Research for Mathematics Education*. En J. Kilpatrick, W. B. Martin, & D. E. Schifter (Eds), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 219 – 233). Reston, V. A: National Council of Teachers of Mathematics.

Spelke, E. S. (2010). Natural Number and Natural Geometry. En: S. Dehaene & E. M. Brannon (Eds.), *Space, Time and Number in the Brain. Searching for the Foundations of Mathematical Thought*, (pp. 287- 317). Canada: Elsevier. doi: 10.1016/B978-0-12-385948-8.00018-9.

Vergnaud, G. (1991). L'appropriation du concept de nombre: un processus de longue haleine. En J. Bideaud, Cl. Meljac & J. P. Fischer (Eds.), *Les Chemins du Nombre* (pp. 271-282). Francia: Presses Universitaires de Lille.

Diseño de categorías de aprendizaje en Matemáticas

Patricia **Camarena** Gallardo

Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Instituto Politécnico Nacional
México

pcamarena@ipn.mx

Irma Patricia **Flores** Allier

Escuela Superior de Ingeniería Química e Industrias Extractivas, Instituto Politécnico Nacional
México

ipfallier@hotmail.com

Resumen

El problema de investigación que se identifica es la falta de claridad de los conceptos semilla en el currículo de matemáticas en estudios de ingeniería, donde éstos no se explicitan, sin embargo, son la base para constituir a los conceptos científicos incluidos en las profesiones; se aborda específicamente el concepto semilla de la variación. El objetivo de investigación es construir de forma metodológica las categorías para el aprendizaje del concepto semilla de la variación. El proyecto se ubica en la línea de investigación de la Matemática Social y se fundamenta en la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias. Los resultados llevan a construir cuatro categorías de la variación, tomando como eje rector a la modelación matemática: concepto de variable, concepto de función como modelo matemático, la predicción y el lenguaje variacional. De hecho, la variación aislada de una matemática contextualizada no tiene sentido.

Palabras clave: categorías, concepto semilla, matemática social, matemática en el contexto de las ciencias, modelación matemática, variación, matemáticas en contexto.

Introducción

En la formación de docentes de matemáticas se ha identificado la necesidad de que conozcan las investigaciones que se realizan en educación matemática y que tendrán una mejor formación si los profesores también realizan investigación educativa en matemáticas (Camarena, 2006). De esta forma, el presente reporte ofrece una metodología de investigación para el diseño de categorías de aprendizaje de conceptos matemáticos.

Para ello, se parte de la problemática detectada sobre el hecho de que los docentes de matemáticas en el nivel universitario, cuando imparten un curso por primera vez, enfrentan conflictos con el currículo de la profesión donde laboran, ya que los programas de estudio son una lista temática que cada quien interpreta según su personal punto de vista (Camarena, 2002). En particular, en matemáticas existen conceptos que subyacen implícitos en las temáticas curriculares y el docente requiere de experiencia en la disciplina y en la docencia para identificarlos. Uno de éstos son los llamados conceptos semilla, los cuales son la base para constituir a los conceptos científicos incluidos en las profesiones, es decir, los conceptos semilla son aquellos sobre los que giran los conceptos científicos y en muchas ocasiones subyacen de

manera implícita (Camarena, 2010). Por ejemplo, un concepto semilla es la variación, la cual está inmersa en todas las asignaturas de la llamada matemática superior; si el estudiante no ha construido este concepto semilla, difícilmente podrá construir el conocimiento de los conceptos matemáticos que lo requieren.

Así, por la importancia de los conceptos semilla, que son conceptos que se localizan en el currículo oculto ya que en ningún programa de estudios están incorporados de forma explícita y se espera que el estudiante los domine, se hace necesario desarrollar trabajo de investigación encaminado a la construcción y evaluación de este tipo de conceptos. Por la extensión del trabajo, en este documento solamente se presenta la primera parte de una investigación en la línea de la Matemática Social, la cual corresponde a la metodología de construcción de categorías de aprendizaje para el concepto semilla de la variación; el resto de la investigación se aboca a la construcción de los identificadores e indicadores del concepto matemático y al diseño y evaluación de actividades de aprendizaje para el concepto semilla de variación, incluyendo los eventos contextualizados de la Matemática en Contexto.

Objetivo. El objetivo de la investigación, correspondiente a este reporte, es construir de forma metodológica las categorías para el aprendizaje del concepto semilla de la variación.

La línea de investigación de la Matemática Social, incluye una teoría educativa denominada Matemática en el Contexto de las Ciencias, sobre la cual se fundamenta la presente investigación.

Marco Teórico

La teoría educativa de la Matemática en el Contexto de las Ciencias nace en 1982 en el Instituto Politécnico Nacional (IPN) de México, ésta se enfoca a carreras universitarias en donde la matemática no es una meta por sí misma, es decir, donde no se van a formar matemáticos (Camarena, 1984; 1999; 2008; De Pavia, 2006; García, 2000; Muro, 2004; Muro *et al.*, 2002; Olazábal, 2003; Trejo, 2005). La Matemática en el Contexto de las Ciencias reflexiona acerca de la vinculación de la matemática con otras ciencias, con situaciones profesionales y laborales, así como con actividades de la vida cotidiana. Se quiere construir en el estudiante una matemática para la vida, es decir, una matemática que lleve al individuo a actuar de forma razonada, lógica, analítica, tomando en cuenta todas las variables que afectan los problemas y situaciones que se le presentan en su actividad laboral y profesional, así como en su vida diaria (Camarena, 1984).

La teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias concibe al ambiente de aprendizaje como un sistema en donde hacen presencia las cinco fases de la teoría: fase cognitiva, desarrollada desde 1992, la fase didáctica que se establece desde 1987, la fase curricular, cuyo origen es de 1982, la fase epistemológica que se aborda desde 1988 y la fase docente definida desde 1990, ver la figura 1. Además, toma en cuenta que las cinco fases se encuentran inmersas en un sistema complejo donde interactúan entre sí cada una de ellas, además de no estar aisladas las unas de las otras. El supuesto filosófico educativo de la teoría es que el estudiante esté capacitado para hacer la transferencia del conocimiento de la matemática a las áreas que la requieren y con ello las competencias profesionales y laborales se vean favorecidas, porque se pretende contribuir a la formación integral del estudiante (Camarena, 1987, 1990).

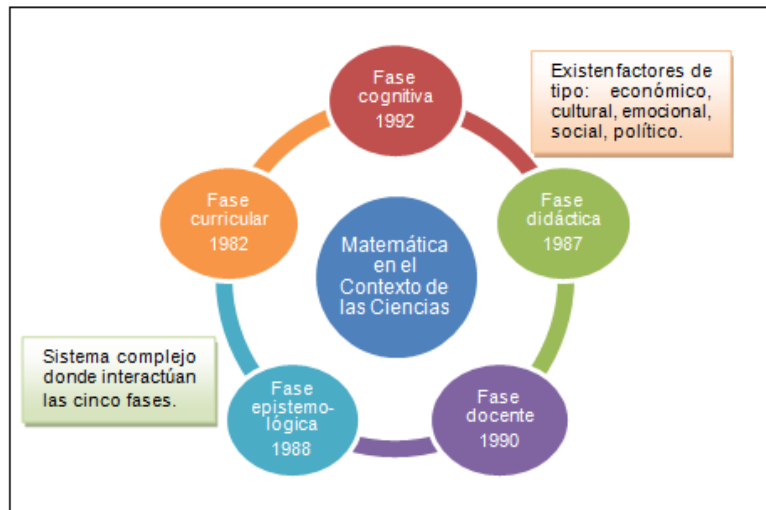


Figura 1. Fases de la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias.

Como teoría, en cada una de sus fases se incluye una metodología con fundamento teórico, acorde a los paradigmas en los que se sustenta, donde se guían los pasos para el diseño curricular, se explica el funcionamiento cognitivo de los alumnos cuando trabajan una matemática contextualizada y se proporcionan elementos epistemológicos acerca de los saberes matemáticos vinculados a las actividades de los profesionistas, se describe la didáctica a seguir la cual emplea eventos contextualizados, entre otros (Camarena, 1984, 1987, 1990, 1999). La presente investigación incide en la fase epistemológica de la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias, la cual se describe brevemente a continuación.

Fase Epistemológica

Entre muchas otras investigaciones, en la fase epistemológica se muestra que así como los contextos de otras ciencias le dan sentido y significado a la matemática, ésta, le da sentido y significado a los temas y conceptos de las ciencias del contexto, reconceptualizándolos (Muro, 2002; Camarena, 1987).

En la fase epistemológica se han llevado a cabo investigaciones que han verificado cómo gran parte de la matemática que se incluye en los cursos de áreas de ingeniería nace en el contexto de problemas específicos de otras áreas del conocimiento y a través del tiempo pierden su contexto para ofrecer una matemática "pura" que es llevada a las aulas de clases sin que tenga sentido para los estudiantes que no van a ser matemáticos (Camarena, 2008).

Por otro lado, hay situaciones donde el ingeniero emplea procesos o métodos sin conocer su origen, la fase epistemológica de la Matemática en el Contexto de las Ciencias pone a la luz estas génesis (Camarena, 1987), como el caso de las impedancias complejas en circuitos eléctricos.

En esta fase, también se ha determinado un constructo teórico denominado transposición contextualizada; en donde la matemática que han aprendido los estudiantes en la escuela sufre transformaciones para adaptarse a la forma de trabajar de otras ciencias (Camarena, 2001), como el caso de la delta de Dirac para modelar una señal eléctrica impulsiva. Es más, así como existe la transposición didáctica (cuya intención es la enseñanza), la cual modifica el saber científico al saber a enseñar (Chevallard, 1991), también existe la transposición contextualizada (cuya

intención es la modelación matemática), la cual es un constructo teórico que modifica este saber a enseñar a un saber de aplicación (Camarena, 2001), como se muestra en la figura 2.

Conocimiento erudito	Transposición →	Conocimiento a ser enseñado	Transposición →	Conocimiento a ser aplicado
Transposición Didáctica		Transposición contextualizada De la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias		

Figura 2. Transposiciones.

Como parte de esta etapa se cuenta con una serie de situaciones de matemática contextualizada para ser usadas en clase, como el curso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias en el contexto de los Circuitos Eléctricos (Camarena, 1987), Cálculo Vectorial en el contexto de la Teoría Electromagnética (Ongay, 1994), Análisis de Fourier en el contexto del Análisis de Señales Electromagnéticas (Camarena, 1993), Ecuaciones Diferenciales Parciales en el contexto de la cuerda vibrante (Camarena, 2004), Transformada de Laplace en el contexto de los Circuitos Eléctricos (Suárez, 2000), Serie de Fourier en el contexto de la transferencia de masa (Muro, 2002), etc.

Los obstáculos epistemológicos, como han sido definidos por Brousseau (1983), se identifican en esta fase para ser usados en la planeación didáctica de los cursos, a través del diseño de actividades de aprendizaje que ayuden a enfrentar estos obstáculos.

Otra vertiente de la fase epistemológica de la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias es el análisis de los conceptos científicos desde diversas perspectivas, como el caso que ocupa esta presentación, donde se describen las categorías, identificadores e indicadores de un concepto para el aprendizaje y la posterior evaluación de éste.

Metodología

La metodología de investigación es de tipo documental donde la muestra de estudio son investigaciones en el área de educación matemática que inciden en el concepto de variación.

El método de trabajo es uno de los proporcionados en la fase epistemológica de la teoría de la Matemática en el contexto de las Ciencias, donde depende de qué se busca para saber con qué ojos mirar los documentos, en este caso se trata de ir agrupando los elementos que se han identificado en investigaciones, como son los que ayudan a la construcción del concepto, considerando semejanzas y diferencias para formar agrupaciones y luego con éstas, formar categorías.

Una categoría se forma con palabras tipo y símbolos que describen propiedades del concepto, donde estas palabras o símbolos son los representantes de la categoría. Luego se emplea el método de reducciones comparativas, comparar las categorías formadas y reagrupar algunas de éstas y así sucesivamente. A medida que el proceso continúa, las categorías se hacen más explícitas, produciendo reducciones en el número de categorías. El proceso de agrupación de datos termina cuando todas las categorías representan diferentes propiedades del concepto, entonces se dice que se llega a una fase de saturación, ésta se alcanza cuando los datos no sugieren nuevas categorías y entonces se considera que la investigación es teóricamente estable (Glaser y Strauss, 2006).

La muestra está formada por investigaciones que son reportadas en revistas, tesis y reportes institucionales de investigación.

De las revistas se tomó la más antigua dedicada a publicar artículos de investigación en educación matemática, del nivel superior: "Educación Matemática" de la Editorial Santillana.

Las tesis se buscaron en las dos instituciones que se dedican a posgrados de maestría y doctorado en educación matemática, del nivel superior: el Cinvestav y el Cicata, ambos del Instituto Politécnico Nacional de México.

De los reportes de investigaciones se tomaron tres referencias, una nacional y dos internacionales: Los estados del conocimiento en educación matemática de la última década del Consejo Mexicano de Investigación Educativa COMIE (2013), los reportes del International Group for the Psychology of Mathematics Education y los trabajos de la Red Internacional de Investigación en Matemática en el Contexto de las Ciencias (MaCoCiencias).

En las tres fuentes citadas se identificaron aquellos documentos que abordan el aprendizaje del concepto de variación ya sea de forma explícita o implícita, este último caso se identifica cuando el autor aborda los conceptos que están íntimamente relacionados con este concepto semilla, como son las funciones, tanto de una como de varias variables y toda operación matemática que se realiza con éstas.

Resultados

Se inicia con la búsqueda de elementos que ayudan a la construcción del concepto de la variación, en los documentos citados en la muestra. A continuación se presentan algunos ejemplos de los resultados.

- La noción de variable se construye en forma relacional, es decir, se requiere de establecer relaciones primarias entre objetos o procesos cambiantes. La idea de variable deriva de acciones y experiencias en donde hay que establecer relaciones y comparaciones, en donde el tiempo juega un papel importante (Gómez, 2007).
- Usos de la variable en el contexto escolar: como incógnita, como número generalizado y como relación funcional (Ursini, 1994).
- La necesidad de utilizar símbolos, por parte de los estudiantes, para generalizar una relación entre cantidades y expresar esa generalización en lenguaje formal, favorece el tránsito de la aritmética al álgebra de manera menos difícil, además de contribuir de esta manera a desarrollar la comprensión de la noción de variable (Kieran *et al.*, 1990).
- Introducción de la noción de variable a través de patrones de exploración. La idea es, dado un modelo (gráfico, tabla de datos, etc.), los alumnos mediante la exploración, pueden determinar la regularidad que presenta el modelo haciendo una descripción verbal de su comportamiento construyen su generalización empleando símbolos algebraicos (English *et al.*, 1998).

Elementos asociados a la variación	Categorías incipientes
1. Variable	Variable
2. Proporcionalidad entre variables	Variable
3. Variables y constantes implícitas y explícitas	Contexto
4. Variar parámetros	Registros de representación
5. Identificar patrones en datos	Función
6. Identificar la variable dependiente e independiente	Función
7. Decir cómo varían las variables	Función
8. Dar sentido a las variables en el evento	Contexto
9. Transitar entre registros	Registros de representación
10. Predicción	Contexto
11. Exploraciones gráficas y numéricas	Registros de representación
12. Dado un modelo matemático identificar el tipo de fenómeno	Contexto y Actividades
13. Identificar y analizar el comportamiento de manera local y global de funciones para estudiar fenómenos que involucran cambio	Función
14. Comparar estados (seguidos e inicial y final)	Función
15. Lenguaje del cambio (cambió poco, cambió mucho)	Lenguaje
16. Tendencias en el comportamiento	Función

Figura 3. Categorías incipientes de elementos asociados a la variación.

A partir de los resultados se obtienen elementos relacionados con el concepto de variación: Variable, Proporcionalidad entre variables, Variables y constantes implícitas y explícitas, Variar parámetros, Identificar patrones en datos, Identificar la variable dependiente e independiente, Decir cómo varían las variables, Dar sentido a las variables en el evento, Transitar entre registros, Predicción, Dado un modelo matemático identificar el tipo de fenómeno, Identificar y analizar el comportamiento de manera local y global de funciones para estudiar fenómenos que involucran cambio, Comparar estados (seguidos e inicial y final), Lenguaje del cambio (cambio poco, cambio mucho), Tendencias en el comportamiento, ver primera columna de la figura 3.

Como se puede observar, de los resultados se identifica que dichos elementos son de diferente naturaleza, por lo tanto se procede a describir categorías incipientes, quedando las siguientes: Variable, Contexto, Registros de representación, Función, Contextos y actividades, Lenguaje, ver segunda columna de la figura 3.

Identificadores de la variación en la modelación matemática de eventos contextualizados
I. Identificación de lo que varía
II. Dependencia de un elemento asociado a otro
III. Concepción de variable
IV. Cómo varía una variable respecto a otra
V. Función
VI. Predicción
VII. Identificadores de la modelación matemática
i. Identificar variables y constantes del problema, se incluye la identificación de lo que varía y lo que permanece constante, ya sea de forma implícita o explícita.
ii. Establecer relaciones entre éstas a través de los conceptos involucrados en el problema, implícita o explícitamente, ya sean del área de la matemática o del contexto.
iii. Validar la "relación matemática" que modela al problema, para lo cual hay que regresarse y verificar que involucre a todos los datos, variables y conceptos del problema. Dependiendo del problema, algunas veces se puede validar el modelo matemático a través de ver si la expresión matemática predice la información otorgada o la información experimental. En otros casos, para validar el modelo, es necesario dar la solución matemática para ver que se predican los elementos involucrados.

Figura 4. Identificadores de la variación en la modelación matemática.

La literatura revisada proporciona elementos específicos del concepto de variación, pues cada una de las investigaciones incide en un aspecto de éste, a excepción del trabajo "Epistemología de lo variacional" (Camarena *et al.*, 2012) de la Red MaCoCiencias, donde trabajan la matemática en contexto, el cual posee un enfoque hacia la modelación matemática, razón por la cual se decidió analizarlo por separado. Los autores de "Epistemología de lo variacional" mencionan que para conocer la naturaleza de la variación en la modelación matemática de procesos dinámicos, es necesario tomar en cuenta desde las nociones embrionarias del concepto de variación con un enfoque matemático, que permita la identificación de los elementos que hacen presencia en procesos variantes inmersos en eventos contextualizados, con ello definen identificadores de la variación en la modelación matemática, como se muestran en la figura 4.

Luego, se procede a efectuar un contraste entre las categorías incipientes y el estudio sobre "Epistemología de lo variacional". Este análisis comparativo, consistió en identificar diferencias y similitudes (intersecciones) entre los resultados encontrados en ambos casos. Lo anterior con el propósito de identificar y unificar categorías. Para presentar la idea general del análisis comparativo, y hacer más explícito y detallado este análisis, ver figura 5, se describe brevemente los pasos de la secuencia realizada, ya que los posteriores son análogos.

TABLA COMPARATIVA			
1	3	concepto variable	1
2	4	conocimientos previos	
7	1	lo que varía	2
3,6,8	7	modelación matemática	3
4,9,11		registros representación	
5,13	8	identificación	
10	6	predicción	4
12		Modelo fenómeno	5
14	4	funciones	
16	5	concepto función	6
15		lenguaje	7
	2		
	patron	patrones	8

Figura 5. Tabla comparativa.

Respecto a la figura 5, en el primer renglón, se observan los números 1 y 3, los cuales corresponden al concepto de variable, de acuerdo a la numeración que aparece en las figuras 3 y 4, respectivamente. Éstos conforman la primera categoría asociada a la variación, identificada como "concepto de variable".

En el tercer renglón se aprecian los números 7 y 1, los cuales corresponden a cómo varían las variables y a la identificación de lo que varía, de acuerdo a la numeración que aparece en las figuras 3 y 4, respectivamente. Éstos constituyen la segunda categoría asociada a la variación, señalada como "identificación de lo que varía". Como se mencionó anteriormente, los demás renglones son analizados e interpretados de manera análoga.

A partir del contraste de resultados realizado anteriormente, se lograron identificar ocho categorías asociadas a la variación, ver figura 6.

Primera identificación de categorías asociadas a la variación
1. Concepto de variable
2. Identificación de lo que varía
3. Modelación matemática y sus identificadores
4. Predicción
5. Dado un modelo, identificar el tipo de fenómeno asociado
6. Manejo conceptual de función
7. Lenguaje de la variación y el cambio
8. Patrones

Figura 6. Primeras categorías de variación.

Una vez ya señaladas las categorías asociadas a la variación, se procedió a establecer una caracterización de identificadores e indicadores del concepto variación. Durante la realización de este proceso, se empezaron a tener diversos problemas, pues la información que se iba obteniendo, de acuerdo a cada categoría, resultó ser bastante amplia y en varias ocasiones repetitiva, es decir, se apreciaba que en más de una categoría aparecían repetidos (implícitamente y explícitamente) identificadores e indicadores. Además, éstos se percibían de manera integrada, pues era prácticamente imposible enfocarse exclusivamente a un indicador sin incidir en otros indicadores.

Estas condiciones dan cuenta de que es necesario reconocer que la información con la que se está trabajando es bastante delicada, en el sentido de que las categorías establecidas resultaron, de una u otra manera, estar íntimamente relacionadas una con otras y que difícilmente se podrían estudiar por separado. Precisamente, a partir de este momento, todo el estudio realizado anteriormente, empezó a evidenciar las deficiencias que tenía la primera identificación de categorías. Situación por la cual se analizó de manera puntual dicha identificación y posteriormente se volvió a estructurar. A continuación se presentan las acciones realizadas y los resultados obtenidos.

Con base en los resultados del análisis de la identificación de las categorías, de manera específica a las intersecciones que se observaron entre las categorías al querer establecer los identificadores, se procedió a articular aquellas que más se relacionaban entre sí, obteniendo como resultado una primera reducción de categorías, ver figura 7, que consta de 5 categorías asociadas a la variación.

Reducción de categorías asociadas a la variación
1. Concepto de variable
2. Manejo conceptual de función
3. Predicción
4. Lenguaje variacional
5. Modelación matemática

Figura 7. Primera reducción de categorías.

De acuerdo a la reducción se establecieron de nuevo identificadores e indicadores asociados a la variación en cada una de las categorías. Sin embargo, en esta ocasión, se percibió que los identificadores de las categorías: concepto de variable, manejo conceptual de función y predicción, están muy relacionados (intersecciones) entre sí. Lo anterior, en el sentido de que al estudiar por separado cada una de las categorías y mantener constantes las demás, la estudiada se ve también influenciada y afectada por ellas, motivo por el cual al querer estudiarlas como ajenas entre sí se presentan problemas de incongruencia.

Identificadores de la modelación matemática	Categoría de influencia
Identificar variables y constantes del problema, se incluye la identificación de lo que varía y lo que permanece constante, ya sea de forma implícita o explícita.	Concepto de variable
Establecer relaciones entre éstas a través de los conceptos involucrados en el problema, implícita o explícitamente, ya sean del área de la matemática o del contexto.	Manejo conceptual de función
Validar la “relación matemática” que modela al problema, para lo cual hay que regresarse y verificar que involucre a todos los datos, variables y conceptos del problema.	Predicción

Figura 8. Categorías de mayor influencia en los identificadores de modelación matemática.

Además, los identificadores de las categorías: concepto de variable, manejo conceptual de función y predicción, están fuertemente asociados a los indicadores de la categoría modelación matemática. Esto último se menciona, ya que al realizar un análisis, de tipo comparativo entre los identificadores de la modelación matemática y las categorías anteriores, se observaron ciertas conexiones. Es decir, que dichos identificadores están fuertemente influenciados por el concepto de variable, el manejo conceptual de función y la predicción, tal y como se indica en la figura 8.

Es importante mencionar que en el análisis realizado se observa que las demás categorías también ejercen influencia en los identificadores, aunque en menor grado. Por ejemplo, en el primer identificador de la modelación matemática, de manera implícita, la noción de predicción entra en juego al momento de discriminar entre lo que varía y lo que permanece constante, ya que permite reconocer que de la gran cantidad de variables vinculadas con el fenómeno, sólo un subconjunto de ellas serán consideradas variables y al resto, se les asumirá constantes, pues la ausencia de su variación no se considera que contribuya significativamente en la predicción buscada.

Por otra parte, con respecto al segundo identificador, el análisis permite vislumbrar, que para los fines perseguidos por el presente estudio, no interesa considerar todo el contenido asociado al concepto función, ya que por ejemplo, abordar aspectos referentes a su definición conjuntista, carecería de poco interés y significado en el desarrollo del concepto y lenguaje variacional. Esta idea, es fuertemente apoyada por Posada *et al* (2006), quienes señalan que como la definición conjuntista de función no depende de los elementos pertenecientes a los conjuntos que la determinan, siempre y cuando la regla de correspondencia cumpla la condición dada, desaparece la importante idea de ver en este concepto un objeto matemático que atrapa la variación y el cambio, es decir, como un modelo matemático.

En este mismo sentido, lo relacionado al estudio del concepto de función se desarrollará apelando a la noción de variación y en consecuencia a mirarlo como un modelo matemático con sentido dinámico, que permita su uso para matematizar el evento que invariablemente posee variación. De esta manera, la categoría, manejo conceptual de función, adopta un nuevo enfoque y es vista desde una perspectiva variacional, entendiéndola en un primer momento como un modelo matemático (sentido dinámico), y desde allí construir puentes que permitan entenderla como un objeto matemático analítico (sentido estático).

Así, eliminando aspectos que no interesaban del concepto función y entendiendo dicho concepto desde una perspectiva variacional, la segunda categoría es examinada y reformulada,

quedando finalmente como: "El concepto de función como modelo matemático desde una perspectiva variacional".

Con base en los resultados del análisis realizado, de manera específica tomando en cuenta las conexiones y relaciones presentes entre los identificadores de la modelación matemática y las categorías: concepto de variable, el concepto de función como modelo matemático desde una perspectiva variacional y la predicción, se tomó la decisión de ya no considerar a la modelación matemática como una categoría, sino como el eje central de estudio, más aún es considerado como aquella práctica (actividad) que norma las acciones (actividades) asociadas al desarrollo del concepto y lenguaje variacional.

Además, el proceso de modelación matemática consta de tres momentos (Camarena, 2009), conformados por sus respectivos identificadores, los cuáles son puestos en sintonía con las categorías: concepto de variable, el concepto de función como modelo matemático desde una perspectiva variacional y la predicción. También se identifica que el lenguaje variacional está presente y vinculado en cada uno de los momentos de dicho proceso.

En función de la modelación matemática de la figura 4, se procedió a identificar y reducir categorías, obteniendo los conceptos, procesos variantes o nociones embrionarias asociadas al concepto de variación, tomando como eje rector a la modelación matemática. En la siguiente figura 9, se puede apreciar la reducción final de las categorías establecidas.

La modelación matemática
I. Concepto de variable
II. El concepto de función como modelo matemático
III. Predicción
IV. Lenguaje variacional

Figura 9. Categorías de variación, con eje rector la modelación matemática¹.

Conclusiones

A través del desarrollo de la investigación se puede ver que la variación está totalmente relacionada con la modelación matemática de eventos contextualizados, su estudio aislado de una matemática contextualizada no tiene sentido.

Finalmente, este reporte da a conocer el proceso metodológico seguido para establecer las categorías de un concepto semilla con la línea de pensamiento de la teoría de la *Matemática en el Contexto de las Ciencias* dentro de la Matemática Social, una matemática con sentido y utilidad para la sociedad.

Es más, el desarrollo de habilidades para la matematización de lo variacional se correlaciona con las habilidades para la modelación matemática de eventos contextualizados y viceversa. Con lo cual se implica que el desarrollo de las habilidades de modelación matemática de eventos contextualizados permite la construcción del concepto semilla de la variación.

Concluyendo con la descripción del proceso metodológico, se puede decir que para el diseño de categorías de aprendizaje, se requieren tomar en cuenta las investigaciones en educación matemática que se han realizado en torno al concepto a trabajar, y para dejar bien

¹ Se agradece la participación activa del estudiante Edwin Ríos Briceño de la Universidad Autónoma de Yucatán, quien realizó una estancia de investigación en el Verano de la Investigación de la Academia Mexicana de Ciencias.

establecidas las categorías (o reducciones de categorías) de aprendizaje de conceptos matemáticos, es necesario, tomar en cuenta tanto los identificadores como indicadores del aprendizaje del concepto.

Referencias y bibliografía

- Brousseau G. (1983). Obstacles épistémologiques de la didactique des mathématiques, *Recherches en didactique des mathématiques*, 7 (2).
- Camarena Gallardo P. (1984). El currículo de las matemáticas en ingeniería. *Memorias de las Mesas redondas sobre definición de líneas de investigación en el IPN*, México.
- Camarena Gallardo P. (1987). Diseño de un curso de ecuaciones diferenciales en el contexto de los circuitos eléctricos. Editorial ESIME-IPN, México.
- Camarena Gallardo P. (1990). Especialidad en docencia de la ingeniería matemática en electrónica. Editorial ESIME-IPN, México.
- Camarena Gallardo P. (1993). Curso de análisis de Fourier en el contexto del análisis de señales eléctricas, Editorial ESIME-IPN, México.
- Camarena Gallardo P. (1999). Reporte de proyecto de investigación titulado: *Etapas de la matemática en el contexto de la ingeniería*. Registro: CGPI-IPN 990413, Editorial ESIME-IPN, México.
- Camarena Gallardo P. (2001). *Las Funciones Generalizadas en Ingeniería, construcción de una alternativa didáctica*. Colección Biblioteca de la Educación Superior, Series Investigación, Editorial ANUIES, México.
- Camarena Gallardo P. (2002). Metodología curricular para las ciencias básicas en ingeniería. *Revista Innovación Educativa*, 2(10), 22-28 primera parte y 2(11), 4-12 segunda parte.
- Camarena Gallardo P. (2004). Reporte de proyecto de investigación titulado: *La matemática en el contexto de las ciencias: las competencias profesionales*, Registro: CGPI-IPN 20040434. Editorial ESIME-IPN, México.
- Camarena Gallardo P. (2006). La Matemática en el Contexto de las Ciencias en los retos educativos del Siglo XXI. *Revista Científica: The Mexican Journal of Electromechanical Engineer*, 10(4), 167-173.
- Camarena Gallardo P. (2008). *Teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias*. Actas del III Coloquio Internacional sobre Enseñanza de las Matemáticas, 83-107, *Conferencia Magistral, Perú*.
- Camarena Gallardo P. (2010). Reporte técnico de investigación titulado: *Procesos metodológicos que identifican competencias matemáticas*. Registro: SIP-IPN 20090244, Editorial ESIME-IPN, México.
- Camarena Gallardo P. y Flores Allier I. (2012). Epistemología de lo variacional. *Memorias del XIII Simposium Internacional: Aportaciones de las Universidades a la Docencia, la Investigación, la Tecnología y el Desarrollo*, México.
- Chevallard Y. (1991). La transposición didáctica. El saber sabio al saber enseñado, Aique Grupo Editor S. A.
- COMIE (2013). *Una década de investigación educativa en conocimientos disciplinares en México*. Coordinadores: Carrasco A, Gómez A, Guerra T, López G, Ramírez J. COMIE-ANUIES
- De Pavia I. P. (2006). *Desarrollo de habilidades del pensamiento para la matemática en el contexto de las ciencias*. Tesis de Maestría en Ciencias en Matemática Educativa del Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional, México.

- English, L. & Warren, E. (1998). Introducing the variable through pattern exploration. *The Mathematics Teacher*. 91 (2), 166-170.
- García G. L. (2000). *Nociones contextualizadas de las series en ingeniería*. Tesis de Maestría en Ciencias con Orientación en Enseñanza de la Matemática de la Coordinación de Investigación y Postgrado de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México.
- Glaser B. y Strauss A. (2006). *The Discovery of Grounded Theory: Strategies for qualitative research*, New York, USA, Aldine de Gruyter.
- Gómez J. (2007). *La construcción de la noción de variable*. Tesis de doctorado no publicada. Cinvestav-IPN.
- Kieran, C., Booker, G., Filloy, E., Vergnaud, G. & Wheeler, D. (1990). Cognitive processes involved in learning school algebra. En P. Nesher & J. Kilpatrick (Eds.). *Mathematics and Cognition* (pp. 96-112). Cambridge, USA: International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Muro Urista. C. (2004). Análisis del conocimiento del estudiante relativo al campo conceptual de la serie de Fourier en el contexto de un fenómeno de transferencia de masa. Tesis de Doctorado en Ciencias en Matemática Educativa, Instituto Politécnico Nacional, México.
- Muro Urista C. y Camarena Gallardo P. (2002). La serie de Fourier en el contexto del proceso de transferencia de masa. *Revista "Científica" The Mexican Journal of Electromechanical Engineering*, 6(4), 159-163.
- Olazábal Carpio A. M. y Camarena Gallardo P. (2003). *Categorías en la traducción del lenguaje natural al lenguaje algebraico de la matemática en contexto*. Memorias del Congreso Nacional de Profesores de Matemáticas, México.
- Ongay Fausto (1994). Apuntes de un curso de Cálculo Vectorial en el contexto de la Teoría Electromagnética, Inéditos.
- Posada F. y Villa, J. (2006). *El razonamiento algebraico y la modelación matemática*. Recuperado el 24 de julio de 2012 de http://funes.uniandes.edu.co/1770/1/capitulo_proyantioqu.pdf
- Suárez Bueno V. y Camarena Gallardo P. (2000). La transformada de Laplace en el contexto de la ingeniería. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, (13), 124-130, República Dominicana.
- Trejo Trejo E. (2005). *La Ecuación Diferencial en el Contexto de las Reacciones Químicas de primer Orden*. Tesis en Maestría en Orientación Educativa de la Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo, México.
- Ursini, S. (1994). Los niños y las variables. *Revista Educación Matemática*. 6(3), 90-108.

El impacto del Lenguaje Matemático en el aprendizaje. Una experiencia con alumnos del nivel superior.

Mónica Caserio

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario
Argentina

mbcaserio@yahoo.com.ar

Ana María Vozzi

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario
Argentina

amvozzi@fceia.unr.edu.ar

Resumen

Indagamos respecto del conocimiento del lenguaje matemático en los estudiantes de los primeros años de las carreras de ingeniería y del profesorado de Matemática. Para lo cual implementamos una actividad en la cual se les solicita la lectura de símbolos y de términos del lenguaje matemático debiendo indicar al respecto su conocimiento e interpretación, y también se les presentan expresiones en lenguaje simbólico y expresiones en lenguaje coloquial para ser traducidas.

Pudimos notar que el conocimiento del lenguaje matemático así como su manipulación están muy por debajo de lo requerido para estudios del nivel superior. Esta falta de conocimiento del lenguaje influye notablemente en la posibilidad de abordar con éxito una carrera que tiene a la matemática como eje.

Diseñamos entonces una estrategia didáctica con el fin de mejorar el conocimiento y el uso del lenguaje matemático.

Palabras clave: educación, matemática, lenguaje matemático, aprendizaje.

Introducción

Una diferencia importante entre la Matemática y otras ciencias aparece en que los objetos matemáticos son abstractos motivo por el cual no pueden ser manipulados como objetos físicos y sólo se puede acceder a ellos a través de un sistema de representaciones.

Según Duval (2006) y D'Amore (2005) los sistemas de representación cumplen un rol de suma importancia en el trabajo con objetos matemáticos que supera a la designación y comunicación, los consideran indispensables en la función cognitiva del pensamiento, dado que ninguna acción matemática puede ocurrir fuera de un sistema de representación. La actividad matemática requiere además de permanentes cambios de representaciones. De acuerdo con estos autores, para que haya aprehensión conceptual de un objeto matemático debe haber algún tipo de representación del mismo.

En relación a las diversas posturas sobre los objetos de la Matemática, aparecen distintas concepciones: considerar el lenguaje como un aspecto secundario en relación con los objetos o sostener que la objetividad de la Matemática está estrechamente unida a su formulación lingüística, ellas son las posiciones sostenidas por las corrientes Intuicionista (Brouwer) y Formalista (Hilbert), respectivamente.

Asumimos pertinente, sostener que la construcción de los objetos matemáticos no es posible sin un lenguaje, como señala Popper (1974):

No puede haber construcción de los objetos matemáticos sin un control crítico constante y no puede haber crítica sin una formulación lingüística de nuestras construcciones.

Para explicar el mundo natural se usan las matemáticas, tal como lo expresó Eugene Wigner (premio Nobel en 1963):

La enorme utilidad de las matemáticas en las ciencias naturales es algo que roza lo misterioso, y no hay explicación para ello. No es en absoluto natural que existan “leyes de la naturaleza”, y mucho menos que el hombre sea capaz de descubrirlas. El milagro de lo apropiado que resulta el lenguaje de las matemáticas para la formulación de las leyes de la física es un regalo maravilloso que no comprendemos ni nos merecemos.

Planteamiento del problema

Nos proponemos indagar respecto de la adquisición y la utilización del lenguaje de la matemática en el aprendizaje como un factor que posibilite al estudiante “aprender a aprender”.

En las experiencias realizadas, como docentes de los primeros cursos de matemática en carreras de Ingeniería y del Profesorado de matemática, detectamos un desconocimiento casi general, de los elementos que hacen a la construcción de ese lenguaje, que exige rigor en el simbolismo, seguridad en el análisis de gráficos, establecimiento de relaciones, que les permita a los alumnos desenvolverse con mayor seguridad frente a las exigencias del conocimiento matemático.

Matemática es la única asignatura que se estudia en todos los países y en todos los niveles educativos. Supone un pilar básico de la enseñanza en todos ellos.

La causa fundamental de esa universal presencia radica en que las matemáticas posee un lenguaje «poderoso, conciso y sin ambigüedades» (según la formulación del Informe Cockroft, 1985). Ese lenguaje se pretende que sea aprendido por nuestros alumnos, hasta conseguir que lo “hablen”. En general por medio de la contemplación de cómo los hacen otros (sus profesores), y por su aplicación a situaciones muy sencillas y ajenas a sus vivencias.

La utilización de un lenguaje requiere de unos conocimientos mínimos para poder desarrollarse, por supuesto, pero; sobre todo se necesitan situaciones que inviten a comunicarse por medio de ese lenguaje, a esforzarse en lograrlo, y desde luego, de técnicas para hacerlo.

Nos proponemos generar un debate en nuestra comunidad académica, que permita, entre otras cosas, aportar inquietudes y reflexiones que enriquezcan la actividad docente, el trabajo áulico, de modo que la utilización del lenguaje matemático, entendido como medio verbalizado de comunicación que permite a una persona compartir un pensamiento con otra y establecer una relación efectiva entre docente y alumnos en una clase, posibilite una mejor apropiación de los conocimientos matemáticos por parte de nuestros alumnos así como brindarles a través del dominio de dicho lenguaje, la posibilidad de continuar aprendiendo en forma autónoma.

Antecedentes y fundamentación teórica

Somos docentes investigadoras en el área de educación matemática, nuestra tarea docente la realizamos en las facultades de Ingeniería de las Universidades Nacional de Rosario (FCEIA-UNR) y Tecnológica (UTN-FRRO) y en las carreras de profesorado de Matemática y de Física del IES Olga Cosettini de la ciudad de Rosario, dependiente del ministerio de Educación de la

Provincia de Santa Fe. En lo relativo a nuestra labor investigativa, la hemos vinculado especialmente a las dificultades del aprendizaje de matemática en carreras no matemáticas, en nuestro primer proyecto abordamos la detección de las dificultades antes referidas, de las conclusiones del mismo se derivó nuestro segundo proyecto donde investigamos sobre la importancia del libro de texto en la producción de los conocimientos, aquí analizamos el impacto que produce en los estudiantes el abordaje de la lectura de textos específicos matemáticos, uno de los emergentes de éste segundo proyecto es el conocimiento del lenguaje matemático, su utilización y la repercusión en el aprendizaje. Es entonces ésta la temática que emprendemos en la actualidad.

Sabemos que el saber científico, el saber sabio, según Chevalard, debe sufrir adaptaciones y restricciones para ser transformado en un “saber a enseñar”, que no se pueden considerar sólo como una simplificación del saber científico sino, ajustes efectuados sobre él en el marco del contrato didáctico establecido, como señala el autor: “Transposición didáctica es el pasaje de un contenido de saber preciso a una versión didáctica de este objeto de saber”.

Entendemos que el lenguaje es un factor de gran relevancia en el contrato didáctico, para Brousseau (1986), la comunicación y el lenguaje forman parte de un proceso complejo en el sistema profesor - estudiante - medio, donde el juego es la clave de dicho proceso.

En la actividad matemática en el aula se utiliza gran cantidad de elementos del lenguaje, pero la resolución de problemas tiene específicamente el lenguaje como medio de interacción entre conceptos y procedimientos. Pensamos que, una de las funciones del lenguaje es establecer puentes en lo que respecta al desarrollo de la actividad matemática.

En este contexto tiene importancia relevante mejorar sustantivamente el reconocimiento y la utilización del lenguaje matemático, simbólico, formal y gráfico con la finalidad de facilitar el desarrollo de competencias de forma explícita durante el proceso de formación de modo tal que el desarrollo de dicha competencia le permita al estudiante realizar, en forma autónoma, toda actividad que implique avanzar en su progreso.

Si las ciencias en general y la matemática en particular se expresan y se difunden a través de su lenguaje y no podrían ser comprendidas sin él. Es importante, entonces desarrollar la comprensión de dicho lenguaje, que involucra operaciones cognitivas y un complejo de conocimientos. Supone un conjunto de saberes (discursivos, enciclopédicos, lingüísticos, semióticos) y saber-haceres, procedimientos de diferente nivel de complejidad.

Como otras ciencias, la matemática posee un lenguaje específico que simplifica y clarifica la comunicación, designando de una manera exacta sus contenidos. En el Lenguaje Matemático, los enunciados se presentan en forma genuina, sin ambigüedades, aportando demostraciones de su veracidad. El desconocimiento de este lenguaje produce errores de construcción y de interpretación, dificultando la comunicación entre el profesor y los alumnos.

En este contexto, es pertinente entonces, contribuir al conocimiento de este lenguaje específico intentando mejorar la comunicación entre docentes y estudiantes cómo entre estudiantes y contenidos disciplinares de manera explícita durante el proceso de formación, lo cual supone revisar las estrategias de enseñanzas y aprendizajes de manera de propender a que los estudiantes puedan realizar en forma autónoma, actividades que le permitan avanzar en su desarrollo.

Entre nuestros objetivos, se encuentran:

Detectar las dificultades en el aprendizaje de los contenidos matemáticos y su relación con una insuficiente comprensión del lenguaje formal en los alumnos.

Diseñar estrategias innovadoras para la comprensión y utilización del lenguaje matemático en situaciones específicas.

Metodología

La población, en estudio, está constituida por los alumnos de primer año de Carreras de Ingeniería en la FCEIA, UNR y FRRO, UTN, así como por estudiantes del Profesorado de Matemática del Instituto de Educación Superior Olga Cosettini.

El marco elegido es el de una investigación activa, por entender que ella se dirige a su aplicación inmediata y no al desarrollo de teorías. Su propósito es el de mejorar la práctica educativa y al mismo tiempo perfeccionar a quienes han de mejorar sus métodos.

Por ese sentido, nos ubicamos tanto a nivel didáctico cómo a nivel de investigación, en el cuadro de la Ingeniería Didáctica, puesto que consideramos que en el contexto de un paradigma cualitativo el “saber a enseñar” y el “caso a investigar” son susceptibles de ser tratados a través de ella.

La experiencia

En el marco de este proyecto realizamos un cuestionario solicitando la interpretación de símbolos, términos y expresiones del lenguaje matemático. Analizamos la interpretación que los estudiantes expresaron, donde se observa la escasa comprensión de los mismos, lo que nos motivó a diseñar una intervención didáctica con la intención de promover una correcta utilización del lenguaje matemático en el aula.

Esta tarea nos llevó a discutir sobre cómo se utilizan los diferentes lenguajes (coloquial y el formal) y su influencia en la comprensión, por parte de los estudiantes, de los contenidos abordados.

Entendemos que la matemática utiliza en su lenguaje su propia sintaxis representando números, conjuntos de números, cantidades, relaciones con letras y signos, y terminología específica, que no siempre coincide con la del lenguaje común, por lo cual no deberíamos inferir que los alumnos la reconocerán por ellos mismos.

El lenguaje formal de la matemática, que tan frecuentemente utilizan los docentes, resulta difícil para los alumnos, generalmente no pueden decodificar correctamente los mensajes. Suelen recurrir a esfuerzos de memorización, transformando así un concepto en un conjunto de palabras sin significado.

La correcta comprensión del lenguaje de la matemática requiere del estudiante un ejercicio de análisis, síntesis, traducción, comprensión, etc., actividades para las cuales, en general, no se encuentra lo suficientemente ejercitado. Es función del docente diseñar actividades que le permitan al alumno incorporar dichas prácticas, de modo que el lenguaje no resulte un obstáculo para la comprensión de los contenidos matemáticos.

Pimm (1999), sugiere que antes de la iniciación de los contenidos matemáticos, se fortalezca el lenguaje matemático, para que esto vaya en beneficio de la salud del proceso de esta disciplina científica formal y de esta manera las características de la ciencia en cuestión cobre vigencias en cada conocimiento del área previamente subrayada.

A partir de estas premisas es que incluimos en el desarrollo de los contenidos específicos de las asignaturas un espacio destinado específicamente a la interpretación de la simbología involucrada.

El trabajo consistió en formar grupos de alumnos, a cada grupo se le asignaba una tarea que involucre la decodificación de textos a símbolos y viceversa.

Discusión de resultados

Trabajamos con grupos de alumnos. La actividad incluyó en todos los casos interpretación del lenguaje matemático, formal, simbólico y gráfico así como la traducción entre esos lenguajes y el coloquial, aplicado a conceptos previamente desarrollados.

A continuación exponemos a modo de ejemplo, la tarea llevada a cabo con algunas unidades temáticas de las asignaturas Álgebra Lineal y Análisis Matemático correspondientes al primer año de las carreras de Ingeniería y del Profesorado de Matemática.

Se les solicitó a los alumnos que respondieran algunas cuestiones:

1.- Demostración guiada obtenida del texto Fundamentos de Álgebra lineal, 6ta. ed de R. Larson y D. Falvo. Pag. 232 ej 84

Sea S un conjunto generador de un espacio vectorial V de dimensión finita.
Demuestre que existe un subconjunto S' de S que forma una base para V .

Inicio: S es un conjunto generador, pero quizá no sea una base debido a que puede ser linealmente dependiente. Usted necesita eliminar los vectores extra para que el subconjunto S' sea un conjunto generador y sea también linealmente independiente.

- (i) Si S es un conjunto linealmente independiente, no hay que demostrar. En caso contrario, elimine algún vector v que sea combinación lineal de los otros vectores de S .
- (ii) Designe este conjunto como S_1 . Si S_1 es linealmente independiente, no hay nada que demostrar. En caso contrario continúe eliminando vectores dependientes hasta que se produzca un conjunto S' linealmente independiente.
- (iii) Concluya que este subconjunto es el conjunto mínimo generador S' .

Las respuestas obtenidas mostraron que los estudiantes, en un número importante, necesitaron la colaboración del docente para reproducir simbólicamente las indicaciones dadas en las guías, por ejemplo:

El espacio vectorial V tiene dimensión finita $\rightarrow \dim(V) = n$

S es un conjunto generador del espacio $V \rightarrow$
 $S = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$, con $k \geq n$ tal que si $v \in V$, existen escalares $c_1, c_2, \dots, c_k$
 de modo que $v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k v_k$

2.- Sea $H = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a = 2c - d \quad \forall a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$ un subespacio vectorial del espacio $M_{2 \times 2}$.

a) Indicar cual o cuales de las siguientes matrices pertenecen al conjunto H .

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} ; B = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} ; C = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} ; D = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} ; E = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

b) Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

- i) $\{B, C\} \in H$.
- ii) $M = B + 2C$ entonces $M \subset H$.
- iii) $\{C, D\} \subset H$.
- iv) $N = D + 3C$ entonces $N \in H$.

En esta oportunidad importa destacar que les resultó dificultoso traducir desde el lenguaje simbólico al coloquial, ya que si bien leían correctamente los símbolos les resultaba dificultoso aplicar la restricción indicada en los casos particulares presentados. Así también pudimos observar en el apartado (b) que no distinguían claramente el significado de pertenencia e inclusión matemáticamente hablando.

3.- Dado el campo escalar $f(x, y)$ indique:

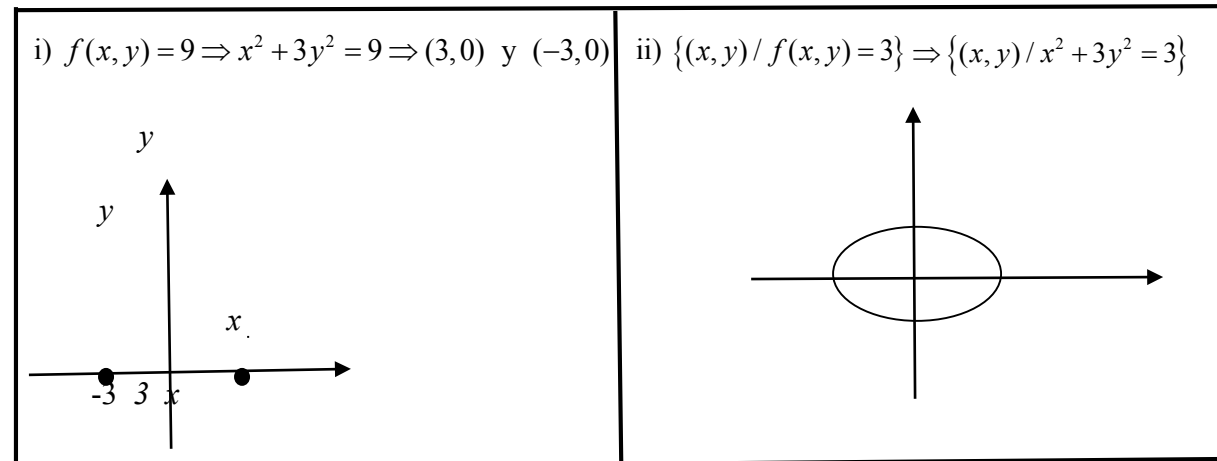
- i) cuales de las siguientes afirmaciones es correcta.
- ii) cuales de ellas son equivalentes.
- a) Es condición necesaria para que el campo escalar dado sea diferenciable que él mismo sea derivable.
- b) Es condición suficiente para que el campo escalar dado sea diferenciable que existan las derivadas parciales del mismo.
- c) Si es campo escalar dado es derivable, entonces es diferenciable.
- d) Si existen las derivadas parciales del campo escalar dado, entonces éste es diferenciable.

En esta ocasión pudimos observar que aparecía un obstáculo en cuanto a la interpretación de condiciones necesarias y suficientes, así como las expresiones que aparecen con frecuencia en el área de Matemática “Si tal cosa, entonces tal otra”.

4.- Si $f(x, y) = x^2 + 3y^2$ se solicita:

- i) Para que pares (x, y) se cumple $f(x, y) = 9$. Representar gráficamente.
- ii) Mostrar $\{(x, y) / f(x, y) = 3\}$.
- iii) Hallar $\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2)$ Interpretar geométricamente.
- iv) Hallar el valor de la pendiente de la recta tangente en el punto A(1,2) a la curva de intersección entre la gráfica de $f(x, y)$ y el plano de ecuación $x = 1$.

Analizando el trabajo de los alumnos observamos que la formulación de la pregunta del ítem (i) que no contiene la notación de conjunto, los indujo a cometer error en la respuesta que mostraba pares aislados como (3,0) ó (-3,0), mientras que en el ítem (ii) dichos errores no se cometían.



En el ítem (iii) fue hallada la derivada solicitada sin inconvenientes, respecto de la interpretación geométrica no se mostraba ninguna representación gráfica y aparecían expresiones erróneas, vagas e incompletas como:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 12 \rightarrow \text{recta tangente}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1, 2) = 12 \rightarrow \text{pendiente de la recta tangente}$$

En el ítem (iv) no advertían que la respuesta ya la habían obtenido en el ítem anterior, fue necesario instarlos a representar gráficamente colaborando en la lectura del lenguaje gráfico para interpretar tanto lo solicitado cómo su respuesta.

En general notamos que la comprensión de los conceptos no fue la esperada, no realizaron las asociaciones necesarias entre los lenguajes coloquial, formal y simbólico, si bien en su gran mayoría, podían reproducir las definiciones estudiadas, no lograban aplicarla en situaciones diferentes a los ejemplos trabajados.

Continuamos llevando a cabo este tipo de actividades periódicamente, como forma de ejercitación en la utilización de los distintos tipos de lenguaje que se usan en las clases y en los textos de matemática.

Si bien no hemos realizado un estudio cuantitativo, dado que nuestra metodología se inspira en la investigación-acción pudimos notar en los alumnos con los que trabajamos un notable avance en la interpretación de nuevos conceptos, así como en la comunicación de sus resultados, los que en muchos casos pasaron a ser “legibles y coherentes”.

Conclusiones

En el aprendizaje de la matemática confluyen una gran cantidad de factores, no obstante uno de los obstáculos más estables que se observa es la falta de coordinación entre los distintos registros de representación, coordinación que es necesario construir ya que no sucede espontáneamente.

Las traducciones entre los lenguajes (coloquial y simbólico) cuando no son congruentes producen dificultades en el proceso de enseñanza y aprendizaje y no siempre son consideradas en la práctica docente.

La experiencia realizada nos muestra que si tomamos conciencia de ésta dificultad y explicitamos, en la actividad con nuestros alumnos, el manejo del lenguaje matemático, les estaremos brindando la posibilidad de avanzar en un aprendizaje autónomo y significativo.

Prospectiva

Creemos oportuno generalizar y compartir las experiencias con los docentes del área realizando actividades de cooperación e integración en lo que se refiere a la utilización de los diferentes registros del lenguaje matemático en el aula y con los alumnos, entendiendo que dichas actividades operarán favorablemente en la promoción del autoaprendizaje.

En este contexto planteamos algunos interrogantes que pueden operar como hipótesis de trabajo:

¿De qué forma se utiliza el lenguaje matemático en la clase?

¿Qué condiciones y situaciones didácticas deberían cumplirse para favorecer la apropiación dicho lenguaje?

¿Qué influencia ejerce en la apropiación de los conocimientos la utilización del lenguaje matemático durante la formación previa?

¿Cómo impacta el discurso docente del nivel universitario en la comprensión de los conceptos matemáticos?

Respecto al Profesor:

¿Comprende que el lenguaje es difícil para los principiantes, que requiere mayor precisión que el lenguaje cotidiano?

¿Es consciente del uso de estrategias cognitivas en su propio proceso como traductor de conceptos, proposiciones e ideas al lenguaje específico matemático?

¿Reconoce en los estudiantes la construcción de sentido en el abordaje de un texto escrito en forma simbólica?

¿Es lo suficiente claro en la comunicación de los conceptos y consignas que involucran esta forma de expresarse tan específica?

¿Promueve la lectura compartida de los conceptos de los textos matemáticos para facilitar la “traducción” de los mismos?

Algunas propuestas

Es nuestra intención que esta investigación contribuya a:

- reconocer la necesidad de ampliar nuestros conocimientos de los factores cognitivos afectivos, actitudinales y motivacionales que inciden en el desempeño de los alumnos.
- asumir, como docentes, la responsabilidad de apoyar el tránsito de los estudiantes del nivel Medio-Superior al Básico-Profesional.

- innovar y evaluar los distintos proyectos con la intención de mejorar nuestro desempeño profesional.
- promover instancias de encuentro y difusión, en las que podamos poner en común experiencias, proyectos y expectativas.

En éste marco, proponemos:

Orientar la interpretación de los diferentes registros del lenguaje matemático a través de guías de preguntas, remarcando los ítems importantes para la comprensión de los conceptos.

Realizar tareas de escritura “El problema con el manejo del lenguaje recién suele hacerse evidente cuando los alumnos escriben: allí es donde muestran sus incomprensiones, a partir de las cuales los docentes podemos retroalimentar sus interpretaciones iniciales” (P. Carlino 2004).

El egresado universitario, deberá manejarse en un mundo profesional competitivo que le demandara una permanente interrelación con diferentes lenguajes, por lo tanto, se hace necesario adquirir y desarrollar las competencias necesarias para participar de dicho "diálogo" entre colegas.

Referencias y Bibliografía

- Brousseau. (1986). Fondement et méthodes de la didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 72, 33-115. Grenoble-France: La pensée sauvage.
- Browner. (2003). Thematica. *Revista de filosofía*, 30, 106-109.
- Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascon, J. (1997). *Estudiar Matemática. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Horsori: Barcelona, España.
- D'Amore, B., Font, V., & Godino, J. (2007). *La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Paradigma*. Disponible en: http://www.scielo.org.ve/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1011-22512007000200003&lng=es&nrm=iso. ISSN 1011-2251.
- Duval, R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques?, *Relime*, 9, extra No. 1.
- Hilbert, D. (1862-1943). Disponible en: <http://www.matematicasyfilosofiaenelaula.info/Epistemologia%202009/David%20Hilbert%20y%20el%20Formalismo.pdf>
- Informe Cockroft. (1985). *Las matemáticas sí cuentan*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.
- Pimm, D (1999). *El lenguaje matemático en el aula*. España: Ediciones Morata S.R.L.
- Popper, K: (1974). *The logic of Scientific discovery*. Londres: Hutchinson.
- Wigner, E. (premio Nobel en 1963): <http://es.wikipedia.org/wiki/Matem%C3%A1ticas>.

El tipo de cantidad en proporcionalidad con problemas de valor faltante

Juan Carlos **Ramírez** Maciel
CINVESTAV, Instituto Politécnico Nacional
México

jermaciel@yahoo.com.mx

Claudia Margarita **Acuña** Soto
CINVESTAV, Instituto Politécnico Nacional
México

claudiamargarita_as@hotmail.com

Resumen

La siguiente investigación indaga sobre la influencia que tiene el tipo de cantidad involucrada en problemas de proporcionalidad, en particular en aquellos de valor faltante. Una de las variables en este tipo de problemas es el uso de cantidades heterogéneas debido a que la interpretación del problema ofrece obstáculos de interpretación de la proporcionalidad. Para analizar e interpretar los resultados usamos los instrumentos metodológicos del Enfoque Ontosemítico de la Cognición Matemática (EOS), desde este enfoque encontramos que cuando los estudiantes se apoyan en la iteración, ésta les permite identificar la razón unitaria para resolver problemas de proporcionalidad, mientras que interpretar el tipo de las cantidades resulta un obstáculo, lo que provoca que este método para la solución sea descartado. Una reformulación semántica de las unidades puede ser una solución para aprovechar este procedimiento.

Palabras clave: proporcionalidad, cantidad homogénea y heterogénea, Enfoque Ontosemiótico.

Planteamiento

Las dificultades que se encuentran cuando un estudiante se enfrenta a la tarea de resolver problemas de proporcionalidad han sido de mucho interés en la matemática educativa, en esta investigación nos proponemos investigar sobre la influencia las cantidades en ciertas estrategias utilizadas por estudiantes de bachillerato. Pretendemos establecer cómo esta diferencia influye la construcción de la idea de proporcionalidad y si la interpretación bajo estas circunstancias tiene los mismos requisitos cognitivos en cada caso. Además de dar pistas de la forma cómo esta diferencia impacta en la construcción del razonamiento proporcional.

El presente estudio lo hemos restringido a problemas de proporcionalidad donde hay que encontrar el valor faltante. En el trabajo de Tjoe & De la Torre (2014) se investigan las relaciones entre la habilidad de los estudiantes de secundaria para resolver problemas de valor faltante y que tanto hacen diferencia entre las relaciones de proporcionalidad y las de no proporcionalidad, los autores encuentran que: la habilidad de resolver problemas de este tipo no tiene relación directa con la solución de problemas que requieren del razonamiento proporcional, esto es, el mecanismo para resolver problemas de valor faltante no presupone necesariamente el

razonamiento proporcional, también encuentran que los estudiantes resuelven problemas de este tipo a través de una práctica automática, dejando de lado una actitud crítica. Una de las hipótesis de este trabajo consiste en considerar que, bajo ciertas circunstancias, los problemas de encontrar el valor faltante usando el procedimiento de encontrar la *razón unitaria* que, desde nuestro punto de vista, si promueve una interpretación de la relación que existe en el tipo de unidad involucrada, la construcción de razones, proporciones y la interpretación del problema.

Una de las estrategias que son utilizadas por los estudiantes para dar sentido a la relación que guarda la proporcionalidad, particularmente cuando no se les insta a usar la regla de tres, es la llamada iteración que consiste en vincular los cambios entre las cantidades de manera que quede claro cómo cambian unos respecto a otros hasta llegar a una “unidad”, esto es, la última razón en la que pueden ser descompuestos en submúltiplos dos cantidades que están en proporción, para fines del trabajo a ésta razón le hemos llamado *razón unitaria*.

Antecedentes

Las proporcionalidad es un tema que ha sido objeto de diversas investigaciones, las cuales dan evidencia de la problemática que surge cuando los estudiantes trabajan con este tema, entre estas encontramos: el sobre uso inadecuado de este concepto, De Book et al (2003), las deficiencias en la interpretación del problema que existen cuando la situación cambia, Mellar (1991). Este autor además sugiere modelos de la producción del pensamiento de un grupo de adultos jóvenes y encontró que muchos de ellos recurrieron a la suma reiterada, de manera incorrecta, como una estrategia para dar una solución en lugar de detectar la relación proporcional.

Uno de los resultados más interesantes de estas investigaciones, es el que se refiere a que: la forma de enfrentar problemas escolares de razonamiento proporcional es susceptible al cambio, es decir, si a un problema se le hacen ligeros cambios en los datos, puede ser que la estrategia para su resolución y el razonamiento que lo sustenta sean diferentes, Lesh & Doerr (2003) esto sugiere que los estudiantes no entienden la relación abstracta que guardan las cantidades comparadas, sino que se orientan por el tipo de problema que incluye la aparición de tres datos.

Se ha encontrado que el razonamiento multiplicativo y proporcional podría verse afectado también por: 1. Los procesos físicos subyacentes a la situación del problema, 2. Formación de relaciones cuantitativas y 3. La invariancia multiplicativa, Harel et al. (1991). Por otro lado, los procesos multiplicativos así como los constructos tales como la llamada *unidad e iteración* juegan un papel relevante en el pensamiento proporcional como se muestra en Singh (2000). De manera general, también se han intentado establecer modelos para el razonamiento proporcional Alatorre & Figueras (2005).

Con el fin de establecer criterios para establecer, cuando asumimos que está presente el razonamiento proporcional se han realizado trabajos como el de Tjoe et al (2013) donde se estudian atributos del razonamiento proporcional que están presentes en problemas de proporcionalidad y que lo estudiantes deberían dominar, estos son: 1. Comparar fracciones, Ordenar fracciones, 2. Construir razones, 3. Construir proporciones, 4. Identificar una relación multiplicativa entre conjuntos de valores, 5. Diferenciar la relación proporcional de una no proporcional, 6. Aplicar algoritmos en la solución de problemas de razonamiento proporcional. Con base en estas características podemos afirmar que este tipo de razonamiento requiere de una gran gamma de conocimientos conceptuales y procedimentales que los estudiantes necesitan

dominar para ser competentes en este tema, nosotros consideraremos en este estudio sólo algunas de ellas, en particular lo relacionado con construir razones y proporciones (2 y 3).

Por otro lado, desde una visión o perspectiva histórica, encontramos que la idea de la razón y la proporción muestra una fuerte relación el tipo de cantidades y la noción de proporcionalidad, en el libro V de Euclides se dice que: “*una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas*”, mientras que el producto de tales cantidades no tenía sentido, Gairín & Oller (2013), esta acotación muestra que hay un conflicto detectado hace mucho respecto a la comparación de cantidades cuya comparación dependía de la naturaleza de las cantidades utilizadas. Posteriormente se observa una evolución en procedimientos que constituyen la base de la llamada regla de tres; esto ocurrió cuando el concepto de proporcionalidad se desarrolló en China con motivos mercantiles, es ahí donde se amplía la idea de proporcionalidad a partir del surgimiento del concepto de Lü que acepta la relación entre cantidades heterogéneas lo que permite considerar una regla general que comúnmente se conoce como *regla de tres*, Gairín & Oller (2013), a partir de este cambio epistemológico en la forma de abordar los problemas de proporcionalidad fue que el estudio de los distintos tipos de cantidades fue posible.

En el terreno de la investigación y en particular de la construcción de la idea de proporcionalidad consideramos que: el tipo de cantidad involucrada puede ser la base de algunas de las problemáticas que enfrentan los estudiantes con los problemas proporcionalidad, consideramos además que los antecedentes históricos muestran que llegar a la idea de razón de cantidades no homogéneas no es una inclinación natural. Y finalmente creemos necesario estudiar la forma cómo este hecho influye en la construcción de la idea de razón y de proporción.

Marco teórico

La presente investigación se lleva acabo a la luz del Enfoque Ontológico y Semiótico de la Cognición Matemática (EOS), Godino, Batanero, y Font, 2007; Font, Godino, y D’Amore, 2007; Godino (1998, 2002, 2005), Godino y Batanero (1994). En ésta, la actividad matemática juega un rol central y se encuentra modelada en términos de sistemas de prácticas operativas y discursivas. En dichas prácticas, intervienen objetos ostensivos (símbolos, gráficos, etc.) y no ostensivos (a los que evocamos al hacer matemáticas), los cuales son representados en forma textual, oral o incluso gestual. Los sistemas de prácticas y funciones semióticas permiten por un lado, entender las posibles interpretaciones del significado de un objeto matemático y por el otro caracterizar las relaciones que se establecen entre dichos objetos.

Los sistemas de prácticas realizados en el seno de las instituciones determinan la emergencia progresiva de los “objetos matemáticos” donde el significado de estos objetos está íntimamente ligado con los problemas y a la actividad realizada para su resolución, no pudiéndose reducir este significado del objeto a su mera definición matemática. D’Amore & Godino (2006, p14).

Dentro del EOS se distingue entre configuraciones epistémicas cuando se trata de la configuración que realizaría un experto (perspectiva institucional) y configuraciones cognitivas cuando se trata de las que realiza cada alumno (perspectiva personal). Esta última perspectiva se ve asociada a la elección de estrategias que le permiten abordar el problema poniendo en funcionamiento las configuraciones cognitivas que dan solución a las tareas planteadas desde la perspectiva del estudiante.

Las situaciones-problema promueven y contextualizan la actividad; el lenguaje (símbolos, notaciones, gráficas) representa otras entidades y sirven como herramientas para la acción; los argumentos justifican los procedimientos y las proposiciones relacionan a los conceptos. Finalmente, los objetos que aparecen en las prácticas matemáticas y aquellos que emergen de esas prácticas dependen del juego de lenguaje en el que participan y encuentran su significado en las actividades donde se desarrollen.

La situación está determinada por los problemas propuestos en distintos contextos: en el lenguaje consideramos símbolos, expresiones, representaciones diagramáticas; en conceptos ubicamos a la razón, proporción, tasa, en propiedades entendemos al tipo de cantidad que tiene el problema ya sea homogénea o no, en los procedimientos consideramos el tipo de estrategias que los estudiantes utilizan para dar solución y en los argumentos las respuestas de los estudiantes al problema.

En este trabajo se enfoca al estudio del procedimiento donde éste debe pasar de la iteración y la búsqueda de la razón unitaria que subyace en el trabajo con tablas elaboradas por los estudiantes hasta la relación abstracta de razón unitaria donde el tipo de unidades dejaría de ser determinante para solución del problema.

Metodología

El objetivo de la investigación es llevar a cabo un análisis de la estrategia usada por los estudiantes, conocida como iteración para determinar la razón unitaria y su relación con el tipo de cantidad se propone. Deseamos establecer si es posible construir una base para entender la construcción de la idea de proporcionalidad usando en principio la iteración.

Por otra parte, pretendemos determinar si esta actividad apoya la construcción del razonamiento proporcional en el sentido de los indicadores de Tjoe et al (2013) en el sentido de construir razones o proporciones y cómo esto podría impactar idea de razonamiento proporcional. Para profundizar sobre el efecto que tiene el tipo de cantidad involucrada en un problema de proporcionalidad en el caso de problemas donde se debe encontrar el llamado *valor faltante*, propusimos a estudiantes de bachillerato problemas de este tipo en donde se hace esa diferencia en un cuestionario de preguntas cerradas (Apéndice A).

Este es un estudio de tipo exploratorio que se apoya en una mirada pragmatista y holística que usa la metodología propuesta por el EOS por lo que consideraremos una metodología de tipo mixto, (Castro & Godino, 2011). En la parte cualitativa se propone como instrumentos de análisis las configuraciones epistémicas y cognitivas para la producción de los estudiantes.

Para la investigación se realizó una configuración epistémica de referencia que incluía los atributos que en teoría deben estar presentes, para ser comparada con las configuraciones cognitivas de los estudiantes, de donde obtuvimos los atributos que ellos ponen en juego cuando resuelven problemas de proporcionalidad del tipo comentado.

Los datos que conformaron las configuraciones cognitivas se obtuvieron de cuestionarios y la discusión de los mismos con cada uno de los estudiantes, donde luego de resolver problemas en los que había que encontrar el valor faltante. En las entrevistas llevadas a cabo exploramos y contrastamos con el estudiante el contenido de sus respuestas así como de los procedimientos utilizados con el fin de encontrar el sustento de éstos y dar evidencia de cómo el tipo de las cantidades en el problema interviene en estos procesos de interpretación.

Para la puesta en escena se realizó un cuestionario (ver ejemplo en fig. 1) que se aplicó a 45 estudiantes entre 15 y 16 años del primer semestre de bachillerato que conocían la regla de tres y que estaban familiarizados con el tipo de problemas. También se llevaron a cabo entrevistas con algunos de los estudiantes con el objeto de esclarecer la racionalidad de su estrategia así como la interpretación de los resultados obtenidos. El cuestionario constó de ocho reactivos, y para dar solución a estos reactivos se les permitió usar sus propios recursos, no se especifica una forma de dar solución a los problemas.

5. Para hacer un pastel de 2kg se necesitan 4 tazas de harina, ¿Cuánto pastel se puede hacer con 25 tazas?				
a) 23kg	b) 12kg	c) 12.5kg	d) 13.5kg	e) 14kg
6. La deformación que sufre un resorte cuando se aplica una fuerza varía de forma directamente proporcional con la deformación que éste sufre. Si para una fuerza aplicada de 35N la deformación que sufre el resorte es de 5cm ¿Cuál será de deformación que sufre el resorte si aumentamos en 45N la fuerza?				
a) 7.5cm	b) 6.4cm	c) 3.8cm	d) 6 cm	e) 7cm

Figura 1. Ejemplo de los ejercicios propuestos.

Resultados y Análisis

Respecto al Análisis Cuantitativo de los datos establecimos tres categorías donde se ubica el tipo de estrategia utilizada. En la tabla 1 y 3 mostramos los resultados del tipo de estrategia más utilizada. Para el Análisis Cualitativo mostramos en la tabla 2 y 4 donde aparece la configuración cognitiva de una de las estudiantes que realizó la actividad que es comentada con base en la configuración epistémica de referencia.

Sobre la Iteración y construcción de tablas: Esta categoría ubica a los estudiantes que construyeron tablas iterando para dar solución al problema.

Sobre la Razón unitaria: En esta categoría ubicamos a los estudiantes que establecieron comparaciones al dividir las cantidades para encontrar la solución.

Sobre la Regla de tres: En esta categoría se encuentran los estudiantes que usaron el algoritmo que consiste en multiplicar en forma cruzada las cantidades y después dividir por la tercera.

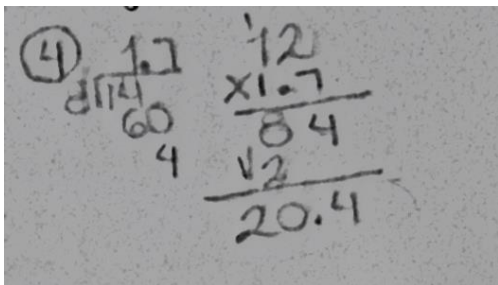
Tabla 1

Estrategia más utilizada reactivos 1-5

Estrategia	Estudiantes
Iteración y Tablas	18
Razón Unitaria	16
Regla de Tres	11

Tabla 2

Configuración de una estudiante en la solución del reactivo 4 (Apéndice A)

Configuración epistémica	Configuración Cognitiva Dulce
Lenguaje: Dentro del contexto del problema específico, donde aparece el uso de objetos ostensivos matemáticos para establecer relaciones entre las cantidades involucradas. Razones que pueden ser de la forma $k = \frac{y}{x}$ o bien presentarse en su forma decimal. Proporciones $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ Recursos como tablas y gráficas	 Se establecen razones de la forma $k = \frac{y}{x}$
Conceptos: Multiplicación, Razón, Proporción, Función	Razón, multiplicación.
Procedimientos: Establecer la proporcionalidad al comparar las cantidades del problema ya sea iterando o través de una razón entre ellas, establecer las proporciones adecuadas para dar solución.	Entrevista: Entrevistador: Me podrías decir cómo hiciste el problema 4 el de las donas, “maría necesita 8 tazas de harina para hacer 14 donas, usando el mismo recipiente, cuantas donas puede hacer con 12 tazas de harina.
Argumentos: Los encontramos en la solución del problema mostrando que se ha razonado sobre los problemas y no sobre las operaciones.	Dulce: Ah pues dividí las 14 donas entre las 8 tazas y me dio 1.7 para saber cuántas donas se hacen por taza y este 1.7 lo multipliqué por 12, que son las 12 tazas de harina para las donas.

En el análisis de los primeros cinco reactivos y de los resultados de los tipos de estrategias usados se observa que nuestros estudiantes prefieren usar estrategias de iteración y construcción de tablas; observemos que en estos reactivos se involucran cantidades que se relacionan con objetos de la misma especie o que tienen cierta familiaridad para los estudiantes, por ejemplo cuando se comparan cantidades metro-metro, o bien donde hay una relación una relación entre cantidades que podríamos llamar *natural* para el estudiante.

De manera general, los estudiantes no tuvieron conflicto para establecer relaciones entre cierto tipo cantidades heterogéneas presentadas en los primeros reactivos, como en el caso de dulce donde ella es capaz de dividir donas entre tazas sin ningún conflicto. Lo anterior se debe a la familiaridad que tiene con ellas, ya que con la harina se pueden hacer las donas.

Del análisis de las respuestas se desprende que: cuando en el problema hay cantidades homogéneas o familiares, por un lado los estudiantes tienden a utilizar herramientas como la iteración o establecer comparaciones a través de razones porque pueden interpretar el todo en término de sus partes para después asociar las partes correspondientes y por otro lado son capaces de justificar y argumentar su respuesta con base en el problema y no en términos de las operaciones realizadas para llegar a la solución.

En los resultados y análisis de los reactivos 5-8, encontramos que:

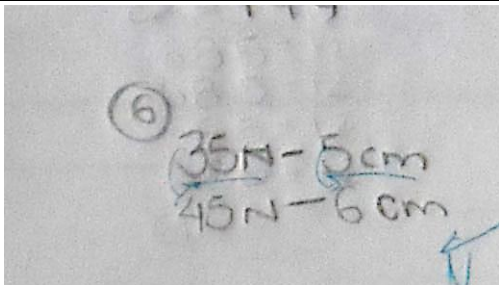
Tabla 3

Estrategia más utilizada reactivos 5-8

Estrategia	Estudiantes
Regla de tres	22
Razón Unitaria	13
No contestaron	7
Iteración	3

Tabla 4

Configuración de la misma estudiante en la solución del reactivo 6 (ver Apéndice A)

Configuración epistémica	Configuración Cognitiva Dulce
Lenguaje: Dentro del contexto del problema específico, donde aparece el uso de objetos ostensivos matemáticos para establecer relaciones entre las cantidades involucradas. Razones que pueden ser de la forma $k = \frac{y}{x}$ o bien presentarse en su forma decimal. Proporciones $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Recursos como tablas y gráficas.	 Desarrolla un lenguaje parecido al tabular.
Conceptos: Multiplicación, Razón, Proporción, Función	No desarrolla conceptos
Procedimientos: Establecer la proporcionalidad al comparar las cantidades del problema ya sea iterando o través de una razón entre ellas, establecer las proporciones adecuadas para dar solución.	Entrevista: Entrevistador: ¿Por qué aumentaste en 1 cm? Dulce: No entendí y por eso aumente en 1 cm Entrevistador: y no podías haber pensado como en el ejercicio de las donas, dividiendo 35N entre 5cm Dulce: Si ,me daría siete Entrevistador: Si siete ¿qué? Dulce: eh, no se pude Entrevistador: ¿Por qué no se puede? Dulce: Porque estos son newton y los otros son centímetros
Argumentos: Los encontramos en la solución del problema mostrando que se ha razonado sobre los problemas y no sobre las operaciones.	

En el análisis de los reactivos restantes y de los resultados de los tipos de estrategias usados se observa que nuestros estudiantes cambian radicalmente la forma de abordar la situación-problema cuando los tipos de cantidades son heterogéneas no familiares.

De manera general los estudiantes tienen cierto conflicto para establecer relaciones entre el tipo cantidades, presentadas en el caso de dulce, donde encontramos que en un primer momento es capaz de dividir cantidades heterogéneas (donas entre tazas) sin conflicto, sin embargo cuando se presentan cantidades que no le resultan familiares, deja de ser clara la relación y la forma de cómo debe ser abordado el problema. En este momento propone el aumento entre unidades, pero únicamente con el fin de dar una respuesta, mencionando que no entiende y por ello propone esa solución. Las ideas asociadas a la razón o a la proporción no pueden arribar porque, desde su punto de vista, no es posible compararlas y tampoco acepta iterar para ver si las cantidades se pueden relacionar.

También observamos que en el caso de unidades de distinta especie y que no son familiares para el estudiante, como en el caso de newton-metro, presión-temperatura, etc., no establecen una relación significativa inmediata entre las cantidades. Una de las causas para este conflicto es que para algunos estudiantes es muy difícil hacer referencia al tipo de unidad obtenida, lo que con frecuencia provoca la renuncia a la estrategia de iteración para encontrar la razón unitaria, por lo que la dificultad en este proceso se localiza en el tratamiento semántico de la interpretación de las unidades que resultan de la comparación.

Una vez detectado este conflicto de interpretación, nos dimos a la tarea de ofrecer una alternativa en las discusiones con los estudiantes que presentaban este impedimento, entonces se propusieron consignas que promovían la adopción de *nuevas* unidades como *tazas / donas* o *newton /centímetro* como formas particulares de una misma unidad. Tomamos el ejemplo de la velocidad, y que podía hablarse de ella como v o como d/t , cabe señalar que esta explicación fue suficiente junto con procesos iterativos para que los estudiantes reconsideraran el procedimiento de iteración y recuperaran la relación unitaria.

Conclusiones e implicaciones

Encontramos que se establecen distintas categorías de relación, que dependen del tipo de relación e interpretación de las cantidades involucradas:

En un primer caso tenemos la relación entre cantidades homogéneas y heterogéneas familiares, donde los estudiantes son capaces de interpretar el fenómeno y argumentar en términos de algunos de los aspectos relacionados con el pensamiento proporcional, a través de la detección de la unidad de proporción que les permite: 1. Asociar numéricamente la relación entre las cantidades involucradas y 2. Identificar los tipos de unidades obtenidas con base en relaciones de familiaridad.

En el segundo caso se tiene la relación entre cantidades heterogéneas, donde para algunos estudiantes no es fácil establecer este tipo de relaciones de familiaridad, ni unitarias ni generales que se requieren para las proporciones entre las cantidades involucradas, dada esta situación ellos recurren a herramientas algorítmicas que no permiten dar una explicación convincente de la solución de la situación problema.

Por otro lado, la estrategia de iteración, aunque no fue el único procedimiento exitoso, puso en juego la interpretación de las unidades correspondientes lo que permitió establecer la relación numérica que se establece entre las cantidades, sin generar un conflicto del tipo de cantidad cuando a partir de que se rebasó el conflicto semántico al que hemos hecho referencia sobre la nueva designación de las unidades. A partir de este hecho se está en condiciones de comparar las

cantidades a través de razones, aceptando que el tipo de unidades se refiere más bien a una convención semántica.

Los problemas de valor faltante resueltos con el procedimiento de la iteración contribuyen a la construcción del razonamiento proporcional. Es decir, con este procedimiento los estudiantes logran además de la construcción de las razones y proporciones involucradas, identificar las relaciones numéricas entre las cantidades y argumentan mostrando elementos que dan evidencia de que el razonamiento proporcional está presente en particular no sólo encuentran la solución sino también una razón que les permite anticipar resultados para otras parejas de cantidades.

Consideramos que estas estrategias deberían predominar en el discurso matemático escolar para usar a la razón unitaria a través de la iteración como un recurso para dar sentido e interpretar problemas de proporcionalidad de valor faltante, disminuyendo el papel del recurso de la regla de tres, que en este tipo de situaciones-problema desvía la atención ya que centra en las operaciones que se deben hacer para dar solución y no en la interpretación del problema.

Referencias y bibliografía

- Alatorre, & Figueras (2005). A developmental model for proportional reasoning in ratio comparison tasks. En: A. Olivier & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd PME Conference* (Vol. 3, pp. 1-8). Stellenbosch: University of Stellenbosch, Faculty of Education
- Castro, W. F., & Godino, J. D. (2011). Métodos mixtos de investigación en las contribuciones a los simposios de la SEIEM (1997-2010). En M. Marín et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 99). Ciudad Real: SEIEM
- D'Amore B., & Godino J. D. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matematica. *La matematica e la sua didattica*, 1, 9-38.
- Font, V., Godino, J. D., & D'Amore, B. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *DM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Gairín, J. M., Oller M., & Antonio, M. (2013). La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 16(3), 317-338.
- Godino J. D., & Batanero C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Godino, J. D., & Recio, A. M. (1998). A semiotic model for analysing the relationship between thought, language and context in mathematics education. En A. Olivier, & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd PME Conference* (Vol. 3, pp. 1-8). Stellenbosch: University of Stellenbosch, Faculty of Education.
- Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 22(2/3), 237-284.
- Godino, J. D. (2007). *Algunos desarrollos y aplicaciones de la teoría de las funciones semióticas*. Recuperado el 28 de diciembre de 2011, de <http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=2138223>
- Harel, G., Behr, M., Post, T., & Lesh, R. (1991), Variables Affecting Proportionality: Understanding of Physical Principles, Formation of Quantitative Relations, and Multiplicative Invariance. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of PME XV Conference* (pp. 125-133). Assisi, Italy.
- Lesh, R., & Doerr, H. (2003). Foundations of a models and modelling perspective on mathematics teaching, learning, and problem solving. In R. Lesh & H. M. Doerr (Eds.), *Beyond constructivism:*

Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching (pp. 3-34). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Mellar, H. (1991). Modeling students' thinking on a proportional reasoning task. *International Journal of Mathematics Education, Science and Technology*, 22(1), 111-119.

Singh, P. (2000). Understanding the Concepts of Proportion and Ratio Constructed by two grade six students. *Educational Studies in Mathematics*, 43(3), 271-292.

Tjoe et al. (2013). Identification and validation process of proportional reasoning attributes: an application of a cognitive diagnosis modeling frame work. *Mathematics Education Research Journal*, 1-19.

Tjoe et al. (2014). On recognizing proportionality: Does the ability to solve missing value proportional problems presuppose the conception of proportional reasoning? *Journal of Mathematical Behavior* 1-7.

Apéndice A**Actividad de Exploración en Problemas de Valor Faltante**

1. Un basquetbolista encesta canastas a razón de 7 anotados por 2 fallados, si en una competencia ha fallado 10 tiros ¿Cuántos tiros anotó?

a) 30 b) 35 c) 40 d) 25 e) 45

2. En una muestra de 685 plumas hay 12 defectuosas. Si se mantiene esta tasa, en un pedido de 8220 habrá:

a) 12 b) 144 c) 685 d) 24 e) 60

3. Determina el valor de “x” en la figura si los triángulos son proporcionales:



- a) $x = 15\text{cm}$ b) $x = 16\text{cm}$ c) $x = 18\text{cm}$ d) $x = 22\text{cm}$ e) $x = 20\text{cm}$

4. Para hacer donas, María necesita 8 tazas de harina para hacer 14 donas, usando el mismo recipiente, cuantas donas puede hacer con 12 tazas de harina

a) 22 b) 18 c) 24 d) 21 e) 20

5. Para hacer un pastel de 2kg se necesitan 4 tazas de harina, ¿Cuánto pastel se puede hacer con 25 tazas?

a) 23kg b) 12kg c) 12.5kg d) 13.5kg e) 14kg

6. La deformación que sufre un resorte cuando se aplica una fuerza varía de forma directamente proporcional con la deformación que éste sufre. Si para una fuerza aplicada de 35N la deformación que sufre el resorte es de 5cm ¿Cuál será de deformación que sufre el resorte si aumentamos en 45N la fuerza?

a) 7.5cm b) 6.4cm c) 3.8cm d) 6cm e) 7cm

7. La temperatura del aire baja según se asciende en la atmosfera, a razón de 9°C cada 300m. Si al despegar de Paris, que está a nivel del mar la temperatura es de 0°C , ¿A qué altura vuela el avión cuando la temperatura es de -81°C ?

a) 300m b) 9000m c) 2700m d) 2900m e) 300m

8. El voltaje de un circuito es directamente proporcional a la corriente que pasa por él, si para una corriente de 3 amperes, el voltaje es de 12 volts. Determina qué corriente generará un voltaje de 15 volts.

Errores y concepciones de los alumnos en Álgebra

Nora **Olmedo**

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Catamarca
Argentina

noraolmedo5@hotmail.com

Marcela **Galíndez**

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Catamarca
Argentina

marcelagalindez@gmail.com

Javier **Peralta**

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Catamarca
Argentina

javyperalta@yahoo.com.ar

Miryam **Di Bárbaro**

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad Nacional de Catamarca
Argentina

dibarbaro1099@hotmail.com

Resumen

El álgebra es una materia fundamental en el primer año del Profesorado en Matemática, es uno de los conocimientos imprescindibles para la permanencia del alumno en la carrera; por ello, visualizar las debilidades o aspectos a superar de los estudiantes, estudiar los errores que cometen, dificultades que poseen, las causas y motivos que los provocan y las posibles concepciones que subyacen bajo esas dificultades es el objetivos de esta investigación. La metodología utilizada es cualitativa y la recolección de datos se obtuvo de los cuadernos de seguimiento del proceso de enseñanza y aprendizaje de los docentes y de entrevistas a alumnos y un profesor. Se puede inferir que los errores cometidos por los alumnos en álgebra tienen su origen en la aplicación de procedimientos imperfectos provocados por concepciones inadecuadas. Los estudiantes conviven con procesos intuitivos y formales, entre concepciones procesuales y estructurales con una supremacía de las primeras.

Palabras clave: errores, concepciones, enseñanza, aprendizaje, álgebra.

Planteamiento del problema

En general, los alumnos que terminan la escuela media han adquirido cierta destreza en los procedimientos de cálculo algebraico desligados de las situaciones que los originan o en las cuales pueden llegar a ser usados, esto es, no saben de dónde salieron ni para qué sirven. Sin embargo, son conscientes de que aprendiendo cómo se utilizan en ciertas situaciones rutinarias les permiten satisfacer, en alguna medida, las expectativas de aprobación. Al ingresar al profesorado en Matemática de la FACEN, los docentes universitarios exigen justificaciones, argumentaciones, validaciones, y los alumnos presentan dificultades, comienzan a creer que todo lo aprendido en la secundaria fue inútil, manifiestan desconcierto ante el comportamiento de los

objetos algebraicos, sienten un desequilibrio entre lo que saben y cómo se usa eso que saben, pues hay objetos familiares, pero no "funcionan" de la misma manera que en el nivel medio. Por ejemplo, todos los conocimientos adquiridos sobre operaciones con polinomios no les son suficientes para desarrollar estrategias que permitan demostrar afirmaciones generales sobre números. Se enfrentan con "otra matemática", caracterizada por la presencia de un nuevo elemento transversal y fundamental que es la demostración.

Estas dificultades se manifiestan a través de los errores. El álgebra de primer año es una de las áreas de la Matemática más susceptible de cometer errores, algunos son sistemáticos, que pueden ser por falta de estudio, por carencia de conocimientos previos o por mostrar síntomas de concepciones inadecuadas acerca de los objetos matemáticos o de los procedimientos.

En este sentido, consideramos que es válido el intento por conocer esas concepciones, aquellas que subyacen bajo los errores cometidos, con el fin de revertir actitudes, superar dificultades y modificar imágenes inadecuadas que tienen los alumnos acerca de los conceptos algebraicos. El desafío y la responsabilidad de lograrlo nos corresponden a los profesores, quienes a través de propuestas didácticas acordes podemos proporcionar el acompañamiento necesario para que los alumnos optimicen su comprensión hacia el álgebra.

Clarificar la problemática del aprendizaje del álgebra en primer año de la FACEN, desde el estudio de las concepciones que tienen los alumnos acerca de ella, será relevante para ayudar a los docentes a organizar mejor su enseñanza y para lograr alumnos competentes en el área. Para ello nos planteamos los siguientes **Objetivos:**

- Categorizar los errores que cometen los alumnos de primer año del Profesorado en Matemática de la FACEN en sus producciones escritas según las posibles causas y motivos que pudieran hacer prevalecer los mismos;
- Inferir las concepciones inadecuadas o erróneas que subyacen bajo los errores atendiendo a la complejidad de los objetos matemáticos, a los procesos de pensamiento y de enseñanza y aprendizaje

Antecedentes y Fundamentación Teórica

Entendemos por error cuando un alumno realiza una práctica, acción, argumentación, etc., que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar. (Godino, Batanero y Font, 2003, p69). Existen diversas investigaciones referidas al estudio del origen de los errores que comenten los alumnos durante el aprendizaje de la Matemática, con respecto a los cometidos en álgebra, Keiran, Filloy (1989) consideran que se deben a que continúan empleando nociones y enfoques que usaban en aritmética con respecto a los símbolos y letras, Charnay (1990), que los alumnos no saben escuchar y observar las explicaciones del maestro y sólo le interesa saber el algoritmo que permite resolver un ejercicio sin interesarse en entender los conceptos o implicancias en el tema, el equipo de esta investigación ha estudiado previamente que uno de los orígenes está en el uso de estrategias de aprendizaje superficiales, de práctica y memorización con escaso nivel metacognitivo (Olmedo, 2009).

Guy Brousseau (1986) expresa:

El error no es sólo el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar, como se cree en las teorías empíricas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tenía su interés, sus logros, pero que ahora se revela falso, o simplemente inadecuado. Los errores de este tipo no son erráticos o imprevisibles, sino que constituyen

obstáculos. Tanto en el funcionamiento del maestro como en el del alumno, el error es constitutivo del sentido del conocimiento adquirido.

Esto es, los errores provienen de concepciones que fueron útiles en su momento pero al aplicarlo en otros contextos resultan inapropiadas. Más tarde, Brousseau, Davis y Werner (1986) confirman que los errores muestran, en algunos casos, un patrón consistente: los alumnos tienen concepciones inadecuadas (“misconceptions”) sobre los objetos matemáticos que, a veces, los conducen a usar procedimientos equivocados, incluso llegan a utilizar, en algunos casos, métodos propios. De igual modo, otros investigadores consideran a las concepciones de los alumnos como origen de los errores, entre ellos, Panizza, Sadovsky y Sessa (1996) quienes expresan que, en parte, las dificultades provienen del discurso escolar cuando el docente no fomenta una concepción que permita al estudiante comprender qué es y cómo se relaciona este concepto con otras áreas, sino en una basada en la memorización de reglas.

Son varios los significados que se le han dado al término concepción en la didáctica de las matemáticas. Cornu (1991) denomina *concepción espontánea* al conjunto de ideas, imágenes, intuiciones que el estudiante tiene sobre el uso de un término, influenciados por las creencias acerca del mismo en la vida diaria. Esas concepciones espontáneas que el estudiante evoca cuando construye un objeto matemático constituyen lo que Tall y Vinner (1981) denominan *imagen o esquema conceptual*. Los “concept image” son las estructuras cognitivas que un individuo asocia a un concepto. En este sentido, cuando se explica un concepto, los alumnos desarrollan un proceso cognitivo con el que conciben un esquema conceptual. Para ello se basan en un conjunto de imágenes mentales (formas simbólicas, diagramas o gráficas) que asocian al concepto. Pero el conjunto de objetos matemáticos, que un alumno considera ejemplos adecuados para formar esa imagen, puede que no se haya elegido correctamente y descuide matices importantes. Esto da lugar a esquemas conceptuales incompletos e inadecuados, que propician la aparición de errores de concepto. De aquí la importancia de conocer las concepciones de los estudiantes y de los docentes acerca del álgebra y de los objetos algebraicos.

A lo largo de la historia se han podido distinguir diferentes concepciones acerca del álgebra, las cuales, no son disjuntas, existen numerosas relaciones entre ellas, tan es así que en la práctica educativa no pueden ser separadas radicalmente debido a que una situación o contexto a menudo provoca actividades algebraicas correspondientes a diferentes visiones del álgebra (Drijvers y Hendrikus, 2003).

Bell (1988) y Vergnaud (1989), Bednarz, Kieran y Lee (1996) insisten en que sólo un equilibrio entre las diferentes concepciones del álgebra y la consideración de las variadas situaciones que las hacen significativas, pueden permitir a los alumnos comprender en profundidad la pertinencia del álgebra, su estructura, el significado de los conceptos algebraicos fundamentales y el uso de razonamiento algebraico. Kaput, Carraher y Blanton (2008) valoran la multidimensionalidad del álgebra y argumentan que las concepciones cerradas resulta un obstáculo para la comprensión de la misma.

Molina, M (2012) en su investigación distingue cinco concepciones del álgebra, que describimos brevemente a continuación:

- El Álgebra como Aritmética generalizada y estudio de patrones: Se la concibe como fundamento para la generalización, donde el simbolismo algebraico es fundamental para capturar, revelar y describir los patrones y estructuras, utilizando las letras con el significado de números generalizados.

- El álgebra como estudio de relaciones entre variables: Concibe el álgebra como el estudio de funciones y gráficos (Vergnaud, 1997), centrado en el desarrollo de experiencias con funciones y familias de funciones en situaciones de la vida real. En este caso, las letras representan variables con el significado de cantidades cambiantes.
- El álgebra como herramienta para la Resolución de problemas: Se refiere en especial a aquellos problemas que pueden ser formulados en términos de ecuaciones e inecuaciones, que pueden provenir o no de las matemáticas. En caso, las letras tienen el significado de incógnitas y parámetros. Esta concepción del álgebra es la más próxima a sus orígenes como herramienta para resolver problemas (Kieran, 2007).
- El álgebra como estudio de Estructuras: En esta concepción las letras se utilizan en expresiones algebraicas como un objeto arbitrario en una estructura, no siendo necesaria su vinculación a números o cantidades como referentes (Usiskin, 1988). El álgebra se entiende aquí como el estudio de estructuras por medio de las propiedades que se le atribuyen a las operaciones con números reales y polinomios. Tiene una estrecha conexión con la concepción del álgebra como aritmética generalizada.
- El álgebra como Lenguaje algebraico: Se concibe el álgebra como un medio de expresión de ideas matemáticas, como un sistema de representación. El álgebra dispone de un lenguaje propio estandarizado con un conjunto de símbolos, signos y reglas para su uso. Es un lenguaje compacto e inequívoco aplicable a otras áreas. Se utiliza para representar ideas algebraicas separadas del contexto inicial y concreto del que surgen (Arcavi, 1994).

Concepciones acerca de la enseñanza y el aprendizaje del álgebra

Históricamente el álgebra surgió de la aritmética ante la necesidad de sistematizar y describir propiedades generales y procedimientos generales para resolver clases de problemas (Banerjee, 2011; Lins y Kaput, 2004). Este hecho histórico justifica el aprendizaje del álgebra bajo la concepción de aritmética generalizada, y además porque alude al carácter inductivo del mismo. Las expresiones algebraicas se introducen como generalizaciones de las operaciones con cantidades y rápidamente se pasa a considerarlas como objetos matemáticos en los cuales se llevan a cabo operaciones estructurales como la reducción de términos semejantes, la factorización, u operar de igual modo en ambos miembros de una ecuación (Kieran, 1992). La introducción del álgebra va enfocada al aspecto sintáctico, asumiéndose que las dificultades de los estudiantes son debidas a la complejidad de su sintaxis (Booth, 1989). Variados estudios muestran que bajo este modelo de enseñanza la transición de la aritmética al álgebra no es directa. En la primera, las expresiones simbólicas (numéricas) son interpretadas como procesos, en cambio, en la segunda han de interpretarse como procesos y como objetos. Sfard (1987), afirma que las nociones matemáticas, pueden ser interpretadas por los estudiantes con dos tipos de concepciones: la **operacional**: como procesos y la **estructural**: como objetos abstractos. A su vez, este autor menciona que:

en el proceso de formación de un concepto, la concepción operacional, con frecuencia, es la primera que se desarrolla. Fuera de ella, la concepción estructural la iría envolviendo gradualmente. ... ciertas partes de la matemática las podemos observar con cierto grado de jerarquización, lo que es concebido de una forma puramente operacional en un nivel, se podría concebir estructuralmente en un nivel más alto.

La concepción operacional, a pesar de ser difícil de describir, se refiere a concebir los conceptos como procesos, como algoritmos, secuencia de operaciones, acciones a nivel físico o

mental. En el caso de las ecuaciones no se enfatiza en la estructura algebraica, sino que recurre a otros métodos, propios de la aritmética o de la geometría básica. La concepción operacional, implica una interpretación de un proceso como una entidad potencial, es decir, una entidad dinámica, secuencial y detallada.

La concepción estructural, hace referencia a la capacidad de “ver” mentalmente a los objetos matemáticos, que son organizaciones mentales abstractas, como objetos reales, con características y funciones definidas. Las concepciones estructurales reciben el apoyo de las imágenes mentales para que el estudiante pueda construir ideas abstractas tangibles y las considera casi como entidades físicas a través de la visualización. Esta concepción es propia del álgebra pues se define por medio de reglas, propiedades y procedimientos propios de ella y trabaja con los entes abstractos como si fueran físicos.

Se evidencia una brecha entre las concepciones estructurales y operacionales, sin embargo, ellas son complementarias pues son dos visiones de un mismo concepto matemático y son inseparables debido a que cada concepto alberga elementos operacionales y estructurales. Es preciso señalar que el rol del enfoque estructural es más avanzado que el operacional, ya que el primero genera comprensión y el segundo genera resultados que se evidencia en la resolución de problemas; por lo tanto, es evidente la importancia de estudiar y desarrollar en los alumnos los dos enfoques.

Desde esta perspectiva el estudio del álgebra se entiende como una serie de ajustes proceso–objeto que los alumnos deben realizar para poder comprender los aspectos estructurales del álgebra. Progresivamente se va desarrollando la habilidad de ver una cadena de símbolos como un nombre para un número, más adelante se llega a considerar las letras en una fórmula como variables en vez de como incógnitas, y finalmente se perciben las funciones que se esconden tras las fórmulas. Drouhard y Teppo (2004) expresan que ver un proceso como un objeto implica una significativa reestructuración cognitiva y que esta dualidad de los símbolos matemáticos, como proceso y como objeto dificulta la comprensión al estudiante, ya que es posible utilizar cualquiera de estas interpretaciones según lo que sea necesario o conveniente.

Entendemos que aquel que comprende álgebra no es consciente del significado de los símbolos todo el tiempo ni lo olvida todo el tiempo, su capacidad está en considerar el significado correspondiente a cada situación, en “el sentido del símbolo” como dice Arcavi, (1994, 2006). Coincidimos con él cuando expresa que para ser competente en álgebra es necesario alternar de forma flexible y oportuna el uso de acciones desprovistas de significado, como la aplicación automática de reglas y procedimientos, con la aplicación del sentido común y la capacidad para elegir estrategias, reflexionar, conectar ideas, sacar conclusiones o elaborar nuevos significados. Además se requiere capacidad de ver una expresión como un objeto y como un proceso y decidir cuál de ambas formas de ver una expresión es más adecuada en cada momento.

Metodología

El núcleo clave para abordar esta investigación consistió en identificar y caracterizar los errores más frecuentes que cometen alumnos de primer año del profesorado en matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Catamarca e inferir las posibles concepciones encubiertas en esos errores.

Durante las clases del Curso de Ingreso, Introducción a la Matemática y Álgebra se seleccionaron los errores más frecuentes cometidos por los alumnos en la resolución de ejercicios y problemas. Los mismos fueron registrados en los cuadernos de seguimiento del proceso de enseñanza y aprendizaje de los docentes a cargo de esas cátedras. Posteriormente se entrevistó a dos de los alumnos que habiendo obtenido buenas calificaciones cometieron algunos de esos errores frecuentes. Los datos se completaron durante la entrevista a uno de los docentes.

Con la selección de los errores no se pretendía realizar una interpretación estadística sino analizar las características comunes y no comunes entre ellos y lograr así una categorización de las causas que los provocan. La naturaleza del estudio, que hace hincapié en las respuestas dadas por los estudiantes y el docente acerca de su propia práctica, demandó un análisis cualitativo. Con esta metodología, cada caso de la muestra se trata como empíricamente distinto y no se presupone qué número de casos diferentes puedan formarse con el fin de constituir una totalidad homogénea.

El análisis de las posibles causas que provocan esos errores exigió una categorización de las mismas. La cual devino de las convergencias entre las categorías que surgieron del análisis y de las sugeridas por investigaciones previas (Abrate, Pochulu, y Vargas, 2006). A continuación las describimos brevemente:

- Asociaciones o inferencias incorrectas: Surgen de las dificultades de los alumnos para interpretar durante la comprensión los conceptos. También por la aplicación memorística de propiedades
- Aprendizaje incorrecto o insuficiente de Conceptos previos: Pueden ser debidos a la deficiencia en la construcción de concepto previo o por la ausencia del mismo
- Dificultades del Lenguaje: Debido a la falta de comprensión e interpretación del lenguaje matemático
- Aplicación Inapropiada de un esquema previo: Son causados por la persistencia de algunos aspectos del contenido o del proceso de solución de una situación aun cuando las condiciones fundamentales de la tarea matemática en cuestión se han modificado. Como ocurre en la aplicación de las propiedades a situaciones nuevas

En esta clasificación se dejan de lado aquellos errores cometidos por el cálculo incorrecto accidental. Los contenidos algebraicos abordados para la selección fueron: Propiedades de las Operaciones en el Conjunto de los Números Reales, Operaciones y Factorización de Expresiones Algebraicas y Ecuaciones de Primer Grado.

Posteriormente, se interpretó el sentido que los alumnos le infieren a los símbolos y a los objetos algebraicos y se dedujeron los posibles esquemas conceptuales formados con respecto a los significados del signo igual, de las letras, de las relaciones de equivalencia y simetría de la igualdad. Finalmente se pudo inferir las concepciones que tienen los alumnos acerca de los mismos, si son de tipo operacional o estructural.

Análisis y discusión de los resultados

Se citan algunos ejemplos de los errores categorizados según la causa que los provoca y explicamos para cada caso las concepciones que subyacen bajo errores:

- Errores por Asociaciones o inferencias incorrectas

1) $(-a)^0 = -1$ Se infiere de $a^0 = 1$ para $a > 0$

2) $y = \log x \rightarrow \frac{y}{\log} = x$ Se infiere de aplicar el pasaje de factores en una ecuación a una expresión funcional

3) En $\frac{2}{x} + 3 = 11$ Un alumno expresa: “como la incógnita figura en el denominador de la fracción pasa al otro miembro con la operación contraria, o sea multiplicando al número que teníamos en el segundo miembro...” y resuelve: $2 + 3 = 11x \rightarrow \frac{5}{11} = x$.

Se asocian las reglas de transposición de términos con la de factores o divisores.

4) $\frac{3}{0} = 3$ obien $\frac{0}{3} = 3$; Se infiere de $3 \cdot 0 = 0$

5) $\log(a + b) = \log a + \log b$

$$\sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{x^2} + \sqrt{4} = x + 2$$

Asocian por analogía con la propiedad distributiva de la multiplicación

El procedimiento empleado en este tipo de errores consiste en la aplicación incorrecta de reglas y propiedades justificadas en esquemas similares y las utilizan por asociación o analogía, o bien, porque infieren que son válidas en contextos parecidos o relacionados. El alumno “inventa”. No interpretan el significado de *equivalencia del signo igual, la relación de simetría entre los miembros de la igualdad*.

- Errores causados por el aprendizaje incorrecto o insuficiente de conceptos previos

1) $-x^2 = (-x)^2$;

2) $0x = x$

3) $x(x - 2) + 3x^2 = 4x^2 - 2x = 2x^3$; $2 + a = 2a$

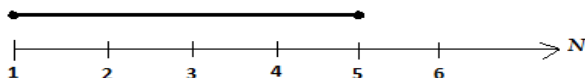
4) En la resolución de ecuaciones como la descrita en el párrafo anterior

5) $\frac{2x-10}{2x-125} = \frac{10}{125}$

El procedimiento empleado es la aplicación de reglas o propiedades sin verificar su validez, muestra deficiencias en el manejo de conceptos y procedimientos. Los alumnos resuelven con métodos propios de la aritmética, no tienen claro los significados del signo menos (como signo de un número, como símbolo de la resta), del uso de los paréntesis y de las propiedades de simplificación y cancelación; no admite que el resultado de operaciones con expresiones algebraicas no arroje un único término. Poseen una concepción del signo igual como *operador*, como símbolo de obtener “algo, un resultado”. La concatenación en aritmética significa suma, por ejemplo $2\frac{1}{4} = 2 + \frac{1}{4}$; mientras que en el álgebra significa multiplicación $2a = 2 \cdot a$ *No interpretan el sentido de los símbolos*.

- Errores debido a las dificultades del Lenguaje

1) $A = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 5\}$ se expresa gráficamente como:



2) $[-2,2] = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

- 3) Los alumnos expresan que el conjunto solución de
- $y = 2x - 1$
- es el conjunto de los números reales

Se deben a que realizan traducciones incorrectas de un lenguaje simbólico a otro distinto. En estos ejemplos se evidencia la dificultad de los alumnos para comprender los diferentes significados que tienen los paréntesis, corchetes y llaves en álgebra ya que en aritmética sólo se utilizaban para destacar la jerarquía de las operaciones. Los errores pueden ser ocasionados por la continuidad de nociones y enfoques del trabajo aritmético en algebraicos.

• Aplicación Inapropiada de un esquema previo

1) La expresión $\frac{1}{3}(h+1)(4h+3) = \frac{1}{3}h + \frac{1}{3}(4h+3)$

2) $a_h = 7(h+1) + 3$ entonces $a_{h+1} = 7(h+1+1) + 3$

$$a_{h+1} = 7h + 2 + 3$$

$$a_{h+1} = 7h + 5$$

3) $\frac{2x-10}{2x-125} = \frac{10}{125}$

4) $x^2 + 3 = 5y$

$$x^2 + 3:5 = y$$

5) $\log_3(x \cdot y)^2 = 2 \cdot \log_3 x + \log_3 y$

Se observa la persistencia de un esquema previo erróneo que se transfiere a situaciones de aprendizaje nuevas, lo cual dificulta el reconocimiento de una estructura dentro de otra.

De las entrevistas a los alumnos destacamos:

Antes de ingresar a la facultad desconocían la existencia de ecuaciones sin solución o las que tienen infinitas soluciones: *“recién ahora sé que hay ecuaciones que no tienen solución o que tienen infinitas soluciones, por ejemplo, los ejercicios que a mí me daban en el secundario cuando aparecía una ecuación así que se me anulaba la variable me decían que estaba mal planteada o nos decían está mal y directamente la cambiaban y nos daban otras. Decían: ah! Está mal, ya la corrijo y cambiaban un número o nos daban otras...”*. Esto provoca una concepción de ecuación limitada a la búsqueda de un número que es el resultado del ejercicio. Conciben a la raíz de una ecuación como el número que se desconoce, dicen: *“es el o los valores de la incógnita que verifican la ecuación”*. Con esta afirmación se detecta que pueden ser uno o varios valores de la raíz, también conciben que *“si la ecuación es de primer grado tiene una sola raíz”*. Esta concepción puede ser una de las causas que provocan la dificultad para aceptar que para una ecuación lineal con dos incógnitas (por ejemplo: $y = 2x + 1$) existen infinitos valores que la verifican, luego también consideran que como son infinitos son todos los reales.

Reconocen como iguales y no como equivalentes a ecuaciones del tipo: $x + 4 = 7$ y $x = 7 - 4$, esto es, la concepción de ecuaciones equivalentes es que son las mismas escritas de otra manera. Decir que la igualdad se mantiene significa que la nueva ecuación es la misma y no una

equivalente. Diversas investigaciones afirman que estas expresiones son aprendidas por los alumnos, del discurso del docente (Pouchulu, 2003), en realidad debería decir que se mantiene el mismo conjunto solución.

Entrevista al Docente:

En afán de explicar cuáles son los errores que cometen sus alumnos y el motivo que los provocan, el docente entrevistado expresa:

“Los estudiantes no están acostumbrados a reflexionar sobre el error cometido, deja a cargo del docente su corrección, no se realiza preguntas acerca de la solución encontrada, no revisa lo realizado”. Valoración que guarda relación con la apreciación realizada por Rico (1995) cuando argumenta que los alumnos no toman conciencia del error, pues no cuestionan lo que les parece obvio y no consideran el significado de los conceptos, reglas o símbolos con que trabajan.

“La mayor cantidad de errores que cometen los alumnos de primer año se deben a la aplicación incorrecta de propiedades, las cuales se deben a la carencia de conceptos previos o deficiencia en el aprendizaje de los mismos. Por ejemplo, la aplicación de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma y resta es excesivamente aplicada en la escuela secundaria, ello impulsa a los estudiantes a aplicarla de igual modo en la potenciación y radicación, pues distribuyen el exponente a cada término, a pesar de la cantidad de veces que se les advierte”. Se podría deducir que la cantidad considerable de ejercicios repetitivos conduce a asociaciones incorrectas que luego se transforman en errores sistemáticos.

Otro aspecto es la imposibilidad de los alumnos para interpretar o traducir una expresión simbólica en otra, o gráfica o en el lenguaje coloquial. Coinciden con lo expresado por Arcavi (1995): *“no interpretan las expresiones, no pueden explicar lo que leen a través de los símbolos mientras los manipulan; en consecuencia no pueden traducirlo”.*

“Los alumnos creen que xx es igual a contar las x que aparecen, esto es $2x$, sin tener en cuenta la multiplicación que relaciona a las x ; o también si algo es igual a 0 muchas veces dicen que no tiene valor o que no existe valor”

También les cuesta interpretar las diferencias entre una ecuación que termina en $0x = x$ y $0x = 0$ Tienen muy acentuada la concepción de que x o cualquier letra representa la existencia de un número fijo desconocido.

Ante la pregunta acerca de las estrategias metodológicas que utilizan para que el alumno comprenda el significado de equivalencia del signo igual o de la propiedad simétrica de la igualdad. Expresa que lo hace mediante ejemplos concretos, *“verifican con números si se cumple por ejemplo la propiedad distributiva o la uniforme”.* Es decir se recurre a ejemplos o contraejemplos con números, recurre a la aritmética.

Expresa que cuando los alumnos ingresan desconocen el significado de expresiones equivalentes. Pero luego, *“en el tema ecuaciones, damos los conceptos y ejemplos de igualdad, ecuaciones e identidades y a través de la resolución de ecuaciones se explica qué son ecuaciones equivalentes, pero cuando resuelven no tienen en cuenta si el valor obtenido verifica o no a la ecuación dada”.* Se deduce que el concepto de expresiones equivalentes queda sobreentendido, que los ejemplos y la resolución muchas ecuaciones son suficientes para comprender este concepto. Nos preguntamos: ¿si es así, por qué se siguen cometiendo errores? ¿la utilización de

ejemplos y contraejemplos son suficientes para que el alumno asimile el concepto de equivalencia?

Con respecto a las ecuaciones manifiesta que tienen dificultad para comprender el método de resolución de ecuaciones por cambio de variable, no concibe que expresiones con varios términos puedan ser expresados como uno solo, no conciben que la estructura superficial es la misma; por ejemplo:

$$4(2x + 1) + 2(2x + 1) - 5 = 4 \text{ es la misma estructura de } 4z + 2z - 5 = 4$$

Manifiesta que, en general, no nota dificultad para comprender lo que Keiran llama la *falta de cierre*, cuando el resultado de una ecuación es, por ejemplo, una suma de términos no semejantes, tampoco para operar con polinomios; pero tienen dificultades en la aplicación de los casos de factorización a pesar que la mayoría de estos se explican a partir de la simetría de las igualdades: Factor común es la operación recíproca a la aplicación de la propiedad distributiva de la multiplicación con respecto a la suma; el trinomio cuadrado perfecto lo es del cuadrado de un binomio, etc. No conciben la simetría de la igualdad. Esta es otra manifestación de no reconocer la equivalencia.

Finalmente expresa que los alumnos del profesorado en matemática, al finalizar el primer cuatrimestre, adquieren cierta habilidad operatoria y dominio en el uso de las notaciones algebraicas, pero su confianza en sus formas de resolver mecánicas e intuitivas, sin prestar atención a la justificación del método empleado lo induce a cometer errores. El docente es el encargado de advertir a través de preguntas, el estudiante piensa en ese momento y corrige. Manifiesta mucha dependencia del docente. Esto produce avances y retrocesos en el aprendizaje del álgebra

Conclusiones

Lo investigado nos permite expresar que:

Los errores que cometen los alumnos se deben en su mayoría a que los conceptos previos son insuficientes entonces realizan asociaciones o inferencias incorrectas. Como desconocen o “desatienden” las propiedades de las operaciones, tanto con números reales como con polinomios, los alumnos “inventan” sus propias reglas y las transfieren a nuevas situaciones. Por ejemplo: confunden los significados del signo menos (como signo o símbolo de la resta), el uso de los paréntesis (para jerarquizar operaciones o para denominar un par ordenado), la simplificación con la cancelación. Otros errores provienen de la utilización del signo igual como Operador cuando resuelven ecuaciones, sin tener en cuenta el significado de equivalencia, y en consecuencia descuida la relación de simetría entre los miembros de la igualdad. Se podría expresar que consideran a los objetos matemáticos, como lo son las operaciones, ecuaciones y las letras, de manera aritmetizada.

Estas formas de resolver no propician la comprensión del álgebra como estructura. Coincidimos con los conceptos brindados por Pouchulu (2005) acerca de que la aplicación correcta y crédula de un procedimiento imperfecto sistematizado y totalmente identificable y el empleo de métodos y estrategias inventadas, no formales pero originales, para la realización de algunas de las situaciones propuestas, son síntomas de concepciones inadecuadas.

La complejidad del lenguaje algebraico, que hace que un mismo objeto tenga una variedad de significados, también provoca confusiones que demoran el aprendizaje, la comprensión y la concepción del álgebra como estructura.

Se puede inferir que los alumnos de primer año se encuentran en una etapa de transformación en la cual conviven con procesos intuitivos y formales, entre concepciones procesuales y estructurales con una supremacía de las primeras. Se enfrentan con la realidad que aprender y comprender álgebra no significa operar de la misma manera que lo hacían en la aritmética cambiando los números por letras, sino que en esta etapa deben interpretar los símbolos, no sólo desde lo procedimental sino desde la interpretación de su significado y del sentido que ese significado tiene en cada expresión algebraica. Se exige de ellos mayor responsabilidad pues muestran una actitud dependiente del profesor, sin la capacidad suficiente para corregir y superar sus propios errores.

Los profesores evidencian que los alumnos tienen serias dificultades con el lenguaje, tanto el natural como el matemático. No interpretan las expresiones algebraicas, esto es una complicación para responder, estimar, conjeturar, que son las acciones que ayudan a desarrollar el razonamiento y la generalización. Los docentes en su intento por lograr que los alumnos alcancen una concepción del álgebra como estructura y como lenguaje, donde cada objeto algebraico es parte de una estructura, también se encuentran en una etapa de reestructuración de las estrategias de enseñanza. Evidencian que la repetición de ejercicios, la aplicación de reglas algorítmicas y definiciones, la utilización de ejemplos y contraejemplos, no son suficiente para que los alumnos comprendan los conceptos y sean hábiles en los procedimientos algebraicos.

Lograr que los docentes originen en sus alumnos una concepción estructural de las expresiones algebraicas no es sencillo, es necesario preparar propuestas didácticas acordes para que el alumno logre ser capaz de percibir, comparar y relacionar la estructura de diferentes expresiones, o subexpresiones algebraicas y utilizar esta información para la toma de decisiones sobre la manipulación de las mismas. El uso eficiente de técnicas algebraicas requiere desarrollar un sentido de qué tipo de métodos son útiles en cada caso y qué efecto tienen. Es responsabilidad de los docentes e investigadores promover el desarrollo de habilidades de pensamiento propias del álgebra para mejorar rendimiento de los alumnos en esta área y evitar, en consecuencia, la deserción en la carrera.

A los investigadores, este estudio ha permitido lograr habilidad para detectar, analizar e interpretar errores que son producto de concepciones equivocadas o inadecuadas para el aprendizaje del álgebra y aprender que los errores no sólo se producen porque los alumnos no estudian o no les motiva el estudio del álgebra, sino que muchos se deben a la complejidad de los objetos matemáticos, al lenguaje y a las actividades propuestas por los docentes para superarlos. Quizás no existe una metodología para el tratamiento de los errores en Matemática que sea universalmente aplicable, pero eso no significa que no existan estrategias acordes a cada situación, lo importante es proponer aquellas más o menos adecuadas que propicien una participación activa de los alumnos en su proceso de superación.

Bibliografía y referencias

- Abrate, R., Pouchulu, M., & Vargas, J. (2006). *Errores y dificultades en Matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo* (1a ed.). Buenos Aires. Argentina: Universidad Nacional de Villa María.
- Arcavi, A. (1995). Teaching and learning Algebra: past, present and future. *Journal of Mathematical Behavior*, 14, 145-162.
- Banerjee, R. (2011). Is arithmetic useful for the teaching and learning of algebra? *Contemporary education dialogue*, 8(2), 137-159.

- Bell, A. (1988). Algebra choices in curriculum design. En A. Borbas (Ed.), *Proceedings of the 12th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 147-153). Veszprém, Hungary: Ferenc Genzwein OOK.
- Bednarz, N., Kieran, C., & Lee, L. (1996). *Approaches to algebra. Perspectives for Seeing*. Harmondsworth, Middlesex: BBC y Penguin Books Ltd.
- Brousseau, G. (1986). Fundamentos y Métodos de la Didáctica de la Matemática. Serie B. *Trabajos de matemática, FaMAF UNC*. (traducido de Fondaments et méthodes de la didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 33-115).
- Brousseau, G., Davis, R., & Werner, T. (1986) *Observing students at work*. En M. Socas, *Números*, 77, 5-34
- Booth, L. R. (1989). "A question of structure or a reaction to: "the early learning algebra: a structural perspective". En S. Wagner, & C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (Vol. 4, pp. 57-59). Reston, VA: Lawrence Erlbaum Associates y NCTM.
- Charnay, R. (1990,91): "Del análisis de los errores en matemática a los dispositivos de remediación; algunas pistas..." INRP. *En Grand N, número 48, Francia* (Traducido para el PTFD. MCyE, 1994).
- Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Dordrecht: Kluwer Academic Press.
- Drijvers, P., Goddijn, A., & Kindt, M. (2011). Algebra education: exploring topics and themes. En P. Drijvers (Ed.), *Secondary algebra education* (pp. 5-26). Rotterdam: Sense Publishers.
- Drijvers, P., & Hendrikus, M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: Design research on the understanding of the concept of parameter* (Tesis doctoral no publicada). Utrecht University, Utrecht, Países Bajos.
- Drouhard, J.-P., & Teppo, A. R. (2004). Symbols and language. En K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra. The 12th ICMI study* (227-264). New York, NY: Kluwer.
- Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2003). *Fundamentos de la Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática para Maestros. Matemática y su Didáctica. Manual para Maestros*. Facultad de Ciencias de la Educación. <http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros>
- Keiran, C., & Filloy, Y. (1989). El Aprendizaje del Álgebra Escolar desde una Perspectiva Psicológica (Traducido por Luis Puig). *Enseñanza de las Ciencias*, 7, 229-240.
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. En F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-62). Charlotte, NC: Information Age Publishing.
- Lins, R., & Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: the current state of the field. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds.), *The teaching and learning of algebra. The 12th ICMI Study* (pp. 47-70). Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers.
- Molina, M. (2006). *Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada.
- Molina, M. (2012). *Proyecto investigador. Plaza de Profesor Titular de Universidad*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada

- Olmedo, N. (2009). Caracterización de las ecuaciones a partir del estudio de las estrategias de aprendizaje aplicadas por alumnos de primer año de la FACEyN. *Debates, reflexiones e interrogantes en la educación en ciencias*. Universidad Nacional de Catamarca, Argentina.
- Panizza M., Sadovsky P., & Sessa C. (1996). Los primeros aprendizajes de las herramientas algebraicas. Cuando las letras entran en la clase de Matemática. *Comunicación realizada a la sección REM* de la reunión anual de la Unión Matemática Argentina, Córdoba.
- Pouchulu, M. (2005). Análisis y categorización de los errores en el Aprendizaje de la Matemática en alumnos que ingresan a la Universidad. *Revista Iberoamericana de Educación*. Difusión por internet www.rieoei.org/deloslectores/849Pochulu.pdf
- Sfard, A. (1987). Two conceptions of mathematical notions: Operational and structural. En M. Socas (2011), *La Enseñanza del Álgebra en la Educación Obligatoria. Aplicaciones de la Investigación*.
- Sfard, A. (1991). Sobre la naturaleza dual de las concepciones matemáticas. *Educational Studies in Mathematics*. Kluwer Academia Publisher.
- Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. En A. Coxford (Ed.), *The ideas of algebra K-12* (pp. 8-19). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Vergnaud, G. (1989). Teoría de los campos conceptuales. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10, 133-170.

Explorando una consecuencia de la comprensión matemática

Asela **Carlón** Monroy

Facultad de Estudios Superiores-Acatlán, Universidad Nacional Autónoma de México
México

asela.carlon@gmail.com

Sergio **Cruz** Contreras

Facultad de Estudios Superiores-Acatlán, Universidad Nacional Autónoma de México
México

correoaselasergio@gmail.com

Resumen

La carencia de aprendizajes matemáticos con comprensión no es exclusiva de un determinado nivel educativo ni de un tópico específico. Es, desafortunadamente, una situación generalizada en los salones de clases de matemáticas. Sin embargo, es necesario promover aprendizajes con comprensión. En este trabajo se reporta el desempeño que muestran 70 estudiantes de bachillerato al construir e interpretar gráficas en contexto no matemático. Dicho desempeño se considera como elemento que permite valorar la comprensión que logran los referidos estudiantes en funciones polinomiales de la forma $y = ax^n + b$, donde $a, b \in \mathcal{R}$, $a \neq 0$ y $n = 1, 2$ y 3 . La manera en la que los alumnos enfrentan los cuestionamientos que se les formulan, revela que logran aprendizajes con comprensión de las funciones polinomiales elementales, al menos en los aspectos aquí explorados.

Palabras clave: comprensión matemática, aprendizajes con comprensión, funciones, funciones en contexto no matemático, funciones polinomiales, construcción de gráficas, interpretación de gráficas.

Introducción

De acuerdo a investigaciones en educación matemática (Leinhardt, Zaslavsky y Stein, 1990; Knuth, 2000; NCTM, 2000, entre otras) muchas de las dificultades que muestran los estudiantes cuando enfrentan tareas que involucran la conversión entre distintas representaciones de una función, pueden ser atribuidas a una “deficiente” comprensión en el aprendizaje de las funciones. Por su parte, el NCTM (2000) afirma que “[a]prender sin comprensión ha sido un problema persistente desde al menos los 1930” (p. 20). Con esto, hace explícito que la situación no es exclusiva del tópico de funciones (alrededor del cual gira este estudio); por el contrario, es generalizada. Pero, por la importancia que tiene el concepto de función tanto en matemáticas como en otras áreas del saber, un aprendizaje “sin comprensión” de él, es un problema crítico. Más aún, si se considera la posición de Hiebert y Carpenter (1992) en el sentido de que una consecuencia de la comprensión es que *aumenta la transferencia* y que, transferir es esencial: nuevos problemas necesitan ser resueltos utilizando estrategias previamente aprendidas. El estudio que en estas páginas se reporta se inscribe en esta problemática.

El Estudio

Propósito

La intención del presente estudio, es explorar la forma en la cual 70 estudiantes de segundo año de bachillerato, al trabajar en grupos pequeños, construyen e interpretan la representación gráfica de funciones elementales en contexto, después de haber sido sometidos a un proceso de instrucción y, haber mostrado, a la luz de una prueba de rendimiento, que 64 de los 70 dominan la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales de la forma $y = ax^n + b$, donde $a, b \in \mathcal{R}$, $a \neq 0$ y $n = 1, 2$ y 3 ; con un enfoque global cualitativo y en un contexto puramente matemático.

Se considera que el desempeño que los estudiantes muestren al construir e interpretar las citadas representaciones gráficas, es *un* elemento que permite valorar la comprensión que logran en las referidas funciones polinomiales elementales.

Antecedentes

La importancia del estudio de las funciones en las matemáticas escolares. El NCTM (2000), en sus *Principles and Standards for School Mathematics*, considera a las funciones como uno de los hilos conductores en el proceso enseñanza—aprendizaje desde el Kindergarten hasta el grado 12 y propone que los estudiantes deberían comprender relaciones y funciones, usar varias representaciones, convertir a través de ellas, analizar las funciones investigando el cambio de coeficientes y el comportamiento global de la gráfica.

Dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de las funciones. En el ámbito escolar, numerosas observaciones en clase, el análisis de los resultados de encuestas y evaluaciones, así como experiencias de aprendizaje, muestran que los estudiantes tienen dificultades en el aprendizaje de las funciones (Duval, 1999; Ellis, 2003; Eraslan y Aspinwall, 2007; Hartter, 2009; Janvier, 1987; Leinhardt, Zaslavsky y Stein, 1990; Moschkovich, 1999; Moschkovich, Schoenfeld y Arcavi, 1993; Pilipeczuk, 2008; Rivera, 2007; Romberg, Fennema y Carpenter, 1993; Sinclair y Alayne, 2011; You, 2009).

Aprendizaje y comprensión. El NCTM (2000) reconoce que desafortunadamente aprender matemáticas sin comprensión ha sido por mucho tiempo un resultado común de la instrucción de las matemáticas escolares. Por su parte, Hiebert y Carpenter (1992) señalan que el problema de la comprensión matemática logra su importancia a través de las numerosas demandas hechas en su nombre.

Marco de Referencia

De los elementos que entran en juego (diseño de ambientes de aprendizaje, aprendizaje con comprensión, trabajo en grupos pequeños, funciones, registros de representación y su conversión, entre otros) en el estudio que se reporta, y ante los cuales se asume una postura teórica, en esta sección, se enuncia, brevemente, **una** de ellas: la relacionada con la *comprensión*. Algunas otras, únicamente se refieren en los resultados.

Marco de Referencia para la Comprensión

En este estudio, se asume la posición de Hiebert y Carpenter (1992) para la comprensión matemática. Ellos manifiestan que una idea, procedimiento o hecho matemático es comprendido si su representación mental es parte de una red de representaciones. Para estos autores, las redes

se construyen gradualmente cuando nueva información es conectada a una red existente o cuando nuevas relaciones son construidas entre previa información desconectada. Aunado a lo anterior, manifiestan que la forma en la cual un estudiante trata o genera una representación externa revela algo de cómo el estudiante tiene representada esa información internamente. Por otra parte, consideran *que una consecuencia de la comprensión es que incrementa la transferencia*.

Metodología

Previo al estudio

Antes de llevar a cabo el estudio, i) se diseña un ambiente de aprendizaje, bajo los lineamientos de Bransford, Brown y Cocking (1999), con el propósito de que los estudiantes logren el dominio en la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales de la forma $y = ax^n + b$, donde $a, b \in \mathcal{R}$, $a \neq 0$ y $n = 1, 2$ y 3 , con un enfoque global cualitativo y en un contexto puramente matemático; ii) se lleva a cabo el proceso de instrucción con la población bajo estudio y, iii) se aplica el instrumento para valorar el dominio en la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en las funciones polinomiales elementales arriba citadas.

Población sujeta a estudio

70 estudiantes de 4° semestre de bachillerato cuya edad oscila entre los 16 y 17 años.

Instrumento utilizado

Con base a la posición de Hiebert y Carpenter (1992), es posible apreciar el grado de comprensión que alcanzan los estudiantes en funciones de la forma $y = ax^n + b$, donde $a, b \in \mathcal{R}$, $a \neq 0$ y $n = 1, 2$ y 3 , a través de la forma en la cual tratan o generan representaciones externas en virtud de que éstas *revelan algo* del número de conexiones que los alumnos han logrado establecer en sus redes internas de conocimiento y dado que, a mayor número de conexiones, mayor comprensión entonces, es factible valorar la comprensión que logran los estudiantes, en términos del desempeño que muestren cuando enfrentan situaciones problemáticas cuyo contenido matemático está relacionado con las referidas funciones polinomiales. En otras palabras, dicho desempeño es un indicador de la medida en que establecen conexiones pertinentes con otros aspectos de las citadas funciones que *no fueron abordados en la instrucción*; de tal manera que, a mayor éxito de los estudiantes en las situaciones planteadas, existen mayores posibilidades de que su aprendizaje hayan sido con comprensión.

A la luz de lo anterior, el instrumento para evaluar la comprensión es una prueba de rendimiento que consta de *cinco situaciones* (denotadas como 1, 2, 3, 4 y 5), con un total de 14 preguntas. A continuación se reproducen las situaciones del mencionado Instrumento.

Las cinco situaciones del Instrumento para evaluar la comprensión son:

1. En el sistema de coordenadas cartesianas que se muestra a continuación, se encuentran los bosquejos de las gráficas que representan la cantidad de agua de dos familias (F_1 y F_2) durante el tiempo que la consumen. Con base a los bosquejos contesta las siguientes preguntas. Explica tu respuesta.

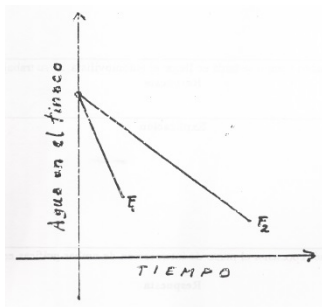


Figura 1. Bosquejos de la Situación 1.

Preguntas de la Situación 1

- ¿Cómo era la cantidad original de agua del tinaco de la familia F_1 con respecto a la cantidad de agua de la familia F_2 ?
- ¿Qué familia gasta más agua?
- ¿Qué familia gasta más rápidamente el agua?
- ¿Qué familia usa más tiempo el agua?

- Dos automovilistas (A y B) para dirigirse de su casa al trabajo utilizan únicamente vías rápidas. Las gráficas siguientes representan la distancia recorrida durante el tiempo que tardan en llegar a su trabajo. Con base en las gráficas contesta las preguntas que se formulan. Explica tu respuesta.

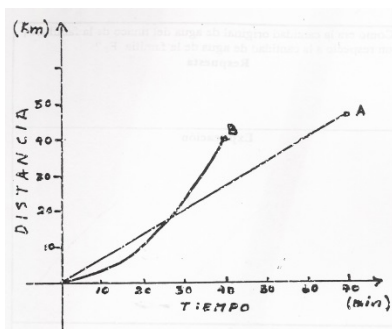


Figura 2. Gráficas de la Situación 2.

Preguntas de la Situación 2

- ¿Cuántos Km recorre el automovilista B para llegar a su trabajo?
 - ¿Cuánto tiempo se tarda en llegar el automovilista A a su trabajo?
 - ¿Qué automovilista recorre más distancia durante los primeros 30 minutos?
 - ¿A qué automovilista le queda más lejos su trabajo?
 - ¿Qué representa el punto de intersección de ambas gráficas entre sí?
 - ¿Qué automovilista crees que maneja más rápido?
- Las tarifas del transporte público (Metro, trolebús, metrobus, “microbus”, camión, etc.) en la Ciudad de México son variables. En un sistema de coordenadas cartesiano haz una gráfica que represente el costo de un viaje en Metro, en una ruta que tiene, a lo más, 12 kilómetros de longitud, y en otro sistema de coordenadas, haz lo mismo, bajo las mismas condiciones, pero considerando como medio de transporte un “Microbus”.
 - A continuación (Figura 3) se muestra el bosquejo de la gráfica que representa la variación del área de un rectángulo (de perímetro fijo) con respecto a la longitud de uno de sus lados. ¿Qué información proporciona el bosquejo?
 - Los tres bosquejos que se muestran en la Figura 4 representan cómo se reproduce la bacteria B en tres medios distintos (m_1 , m_2 y m_3). ¿Qué información proporcionan los bosquejos?

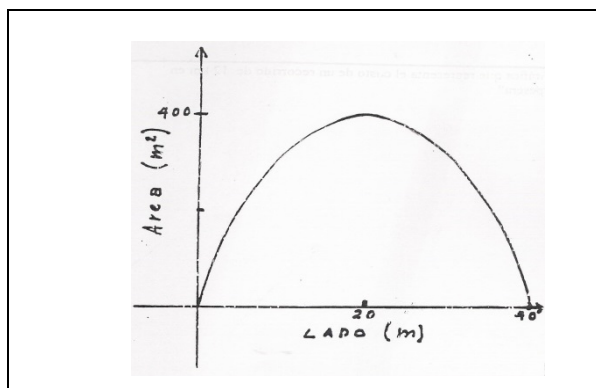


Figura 3. Bosquejo para la Situación 4.

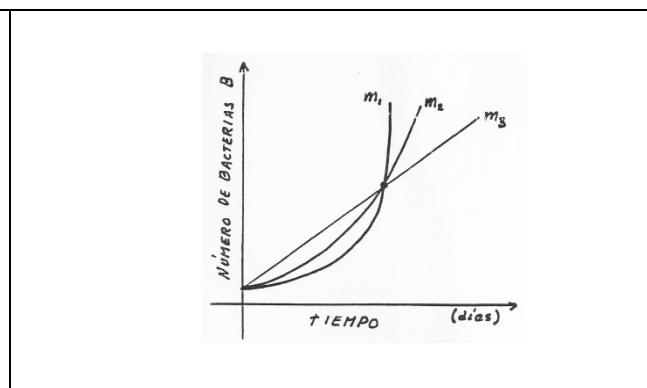


Figura 4. Bosquejos para la Situación 5.

Condiciones de aplicación del instrumento

Los alumnos lo enfrentan trabajando en grupos pequeños en una sesión posterior al término de la instrucción y, cuentan con aproximadamente 110 minutos para resolverlo. Los 70 estudiantes se distribuyen en 18 grupos pequeños; a cada uno de éstos se les asigna, al azar, un número del 1 al 18 con el cual se les identifica al presentar los resultados.

Resultados y Discusión

Esta sección se encuentra dividida en cuatro partes: en la primera, se presentan los resultados de las tres primeras situaciones; en la segunda, los de la cuarta y quinta; en la tercera, el desempeño global de los grupos pequeños en todo el instrumento y, finalmente, en la cuarta, una breve discusión de los resultados.

Primera parte

En las tres primeras situaciones los 18 grupos pequeños enfrentan un total de 12 preguntas. El *promedio* de aciertos *por grupo pequeño* es nueve y el *promedio* de aciertos *por pregunta*, 14. Las dos tablas siguientes concentran la información del desempeño de los estudiantes desde dos puntos de vista: en términos del porcentaje promedio de respuestas correctas de cada situación (Tabla 1); de acuerdo al número total de aciertos que logran los grupos pequeños en las tres situaciones (Tabla 2).

Tabla 1

Porcentaje promedio de respuestas correctas que logran los grupos pequeños en la Situación 1, 2, y 3.

Situación	1	2	3
Porcentaje promedio de respuestas correctas	82.5%	83.3%	44%

Tabla 2

Número total de aciertos que logran los grupos pequeños en las tres primeras situaciones.

N° de aciertos (de 12)	12	11	10	9	8	7
N° del (de los) grupo(s) pequeño(s)	2 y 14	12	5, 7, 9, 10 y 17	3, 4 y 6	1, 8, 11, 16 y 18	13 y 15

Segunda parte

En las Situaciones 4 y 5 la interpretación de la gráfica que las representa es “libre”: sólo se pregunta qué información proporciona el (los) bosquejo(s), según la Situación. Con base en esto, desde un punto de vista técnico, lo que afirmen los estudiantes no es posible catalogarlo como

correcto o incorrecto en virtud de que no se les formula una pregunta que exija una respuesta específica. “La información que le proporciona el bosquejo” a un grupo pequeño, no necesariamente es la misma que la que le proporciona a otro. No obstante lo anterior, las afirmaciones que ellos formulen, desde un punto de vista matemático, es decir, por el contenido matemático que ellas contienen, es factible valorarlas como correctas o no. Hecha esta aclaración, continuamos con la exposición de resultados.

Al considerar todas las afirmaciones correctas que hacen los distintos grupos pequeños se obtienen ocho afirmaciones diferentes para la Situación 4 y seis, para la 5. El desempeño de los grupos pequeños se juzga a la luz de estas afirmaciones. El promedio de afirmaciones correctas por grupo pequeño es, prácticamente, tres; tanto en la 4ª situación como en la 5ª. El desempeño de los grupos pequeños en estas dos situaciones se registra en la Tabla 3 y 4.

Tabla 3

Número de afirmaciones correctas (de ocho) enunciadas por los grupos pequeños en la Situación 4.

Nº de afirmaciones correctas enunciadas	8	7	6	4	3	2	1	0
Nº del grupo pequeño	4	12	3 y 14	13 y 17	2 y 10	9	1, 5, 7, 8 y 11	6, 15, 16 y 18

Tabla 4

Número de afirmaciones correctas (de seis) enunciadas por los grupos pequeños en la Situación 5.

Nº de afirmaciones correctas enunciadas	6	4	3	2	1	0
Nº del grupo pequeño	14	2	3, 5, 7, 9, 10, 11 y 12	1, 4, 8, 13, 17 y 18	6 y 15	16

Tercera parte

La puntuación promedio (sobre 10) que obtienen los grupos pequeños en el Instrumento es, aproximadamente, 7 (6.9). La puntuación de cada grupo pequeño se registra en la Tabla 5.

Tabla 5

Puntuaciones obtenidas por los grupos pequeños en el Instrumento de Comprensión.

Nº del grupo pequeño	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Puntuación	6.2	9.5	8	7.2	7.4	5.5	6.8	5.6	7.7	8.1	6	9.4	5.9	9.8	4.1	4.9	7.7	5.4

Cuarta parte

Los aspectos explorados en este Instrumento, en lo fundamental, se refieren a la interpretación cualitativa y cuantitativa de gráficas en contexto; al enfoque puntal, por intervalos y global de gráficas de situaciones y a la construcción de la gráfica que representa una determinada situación de la vida cotidiana. El desempeño mostrado por los estudiantes en estos aspectos aporta elementos que apoyan las declaraciones siguientes.

En términos generales, los grupos pequeños enfrentan con “relativo” éxito las situaciones en contexto que contiene este instrumento. Este hecho parece indicar que: los grupos pequeños aplican su conocimiento con “cierta” flexibilidad lo cual, desde el marco de Hiebert y Carpenter (1992), es una consecuencia de la comprensión y, desde el punto de vista de Schoenfeld (1992), es uno de los objetivos de la instrucción matemática.

No existe una marcada diferencia en el desempeño de los grupos pequeños en las gráficas

en contexto que exigen una interpretación cualitativa de las que requieren una cuantitativa; de tal manera que, por ejemplo, en la primera situación (que demanda una interpretación cualitativa en las cuatro preguntas que contiene) el porcentaje promedio de respuestas correctas por grupo pequeño es de 82.5% y en la segunda situación (que reclama una interpretación cuantitativa en sus seis preguntas), dicho porcentaje es de 83.3%. Estos resultados sugieren que la automatización en la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en funciones polinomiales elementales por la vía global cualitativa, desde un punto de vista estrictamente matemático, favorece el rendimiento de los equipos cuando deben, por un lado, interpretar una gráfica cuantitativamente y por otro, enfrentar gráficas en contexto. Esto último parece apoyar la posición de Duval (1992) en el sentido de que la interpretación de gráficas que representan un fenómeno físico, económico o biológico (gráficas en contexto) presupone la aprehensión del funcionamiento del registro gráfico.

En torno a la otra dimensión mediante la cual es posible analizar una gráfica: de lo puntal a lo global (Leinhardt et al., 1990); el desempeño de la población revela que en las interpretaciones “guiadas” (Situación 1 y 2), en términos generales, los grupos pequeños no presentan mayores dificultades al enfocar una gráfica puntualmente es decir, el enfoque global, que ellos dominan, no les obstaculiza el puntal que el problema exige (al margen de que dicho problema implique una interpretación cualitativa o cuantitativa de la gráfica que lo representa). Así por ejemplo, 17 grupos pequeños contestan correctamente la cuarta pregunta de la segunda situación (2.d); la cual demanda una interpretación cuantitativa de las gráficas y la lectura de dos puntos. La respuesta del 10° grupo pequeño (Transcripción 1) ilustra el tenor de las respuestas correctas.

A. Por que cuando B llega a su trabajo tan sólo ha recorrido 40 Km mientras que A recorre 50 Km

Transcripción 1. Respuesta del 10° grupo pequeño a la pregunta 2.d.

En las interpretaciones “libres” (Situación 4 y 5), los grupos pequeños no muestran una marcada preferencia a interpretar una gráfica en contexto por la vía global en detrimento de la puntal o por intervalos (ver Transcripción 2). Por ejemplo, de las 48 afirmaciones (catalogadas como correctas) que emitieron 14 grupos pequeños en la Cuarta Situación, 12 son globales, 7 de intervalo y 18 puntuales (las 11 restantes se han etiquetado como “inferencias” y se comentan en el párrafo siguiente). Este comportamiento de los grupos pequeños parece indicar, entre otras cosas, que el dominio del enfoque global no obstaculiza el puntal o por intervalos (aún en gráficas en contexto); por el contrario, al parecer lo favorece.

- Cuando el lado mide 20m. el área es de 400 m^2 (el área máxima)
- Cuando el lado es mayor que “0” pero menor que 20 el área $0 < A < 400 \text{ m}^2$
- Cuando el $20 < L < 40 \text{ m}$ el $0 < A < 400 \text{ m}^2$

Transcripción 2. Interpretación del 2° equipo al bosquejo de la gráfica que representa la Situación 4.

Algunos grupos pequeños, en las interpretaciones “libres”, analizan más a fondo la gráfica en contexto (combinan la información que les proporcionan los enfoques global y/o por intervalo y/o puntal) de tal manera que logran extraer información de la gráfica sin que aquélla se muestre directamente en ésta (ver Transcripción 3). Dicha información se ha denominado, en estas páginas, “inferencia”.

Cuando el lado mide 10 m. el área es de 300 m^2 , es un rectángulo y otro lado debe medir 30 m.

Cuando el lado dado mide 20 m, el área es de 400 m^2 , el otro lado mide 20 m, por lo que es un cuadrado
 Cuando el lado mide 40 m es una línea y el área es 0. Y en todos el perímetro es de 80 m.

Transcripción 3. Interpretación del 4° equipo al bosquejo de la gráfica que representa la Situación 4.

Los grupos pequeños dan muestras de que al analizar globalmente dos o tres gráficas y compararlas entre sí, son capaces de ordenarlas, correctamente, según la rapidez de variación que representan; bien sea que dichas gráficas sean dos rectas (Pregunta 1.c.), una recta y una curva (Pregunta 2.f) o una recta y dos curvas (5ª Situación). En estos tres casos, el número de equipos que interpretan correctamente la rapidez de variación de la gráfica es 18 y 14, respectivamente, para las dos primeras preguntas; en la Situación 5 –cuya interpretación de la gráfica es “libre”–, los 13 equipos que centran su atención en el referido aspecto, llevan a cabo una adecuada interpretación (un ejemplo se muestra en la Transcripción 4). Los grupos pequeños asocian “lo pronunciado” de la gráfica con la magnitud del cambio; de tal manera que las gráficas “más pronunciadas” representan mayor rapidez de variación.

Se reproduce más rápido m_1 , luego m_2 y tarda más días m_3

Transcripción 4. Interpretación del 7° grupo pequeño al bosquejo de las gráficas de la Situación 5.

Para el caso de las rectas, como es sabido, la pendiente corresponde a la rapidez de variación, conceptos que, no está por demás señalar, no se abordaron durante el proceso de instrucción. El desempeño de la población bajo estudio, con relación al punto a discusión, da la pauta para suponer que el conocimiento adquirido por los alumnos durante la instrucción, en torno al comportamiento de las gráficas, lo aplican al interpretarlas en contexto; esto es posible considerarlo, al tomar como parámetro el marco de Hiebert y Carpenter (1992), como una consecuencia de la comprensión, al tiempo que parece revelar que las redes de conocimiento de los estudiantes se hacen más largas y organizadas.

Bajo la óptica de lo que señalan Leinhardt et al. (1990) en el sentido de que “Kerslake [al igual que otros] también encontró que las traducciones que involucran funciones constantes son excepcionalmente difíciles” (pp. 35, 36), es posible considerar como “bastante bueno” el rendimiento de los grupos pequeños en la primera parte de la Situación 3 (Pregunta 3.a): la mayoría de ellos (12) construyen adecuadamente la gráfica que representa la situación ahí planteada: la gráfica de una función constante. La complejidad que entraña este tipo de conversiones, se incrementa cuando dichas conversiones están referidas a gráficas escalonadas. A pesar de esto, cuatro grupos pequeños logran superar esa complejidad al construir una gráfica escalonada para representar, correctamente, lo planteado en la 3.b. Este desempeño se considera “bastante satisfactorio” a pesar de que estos grupos pequeños representan un poco más del 22% de la población bajo estudio.

No obstante que lo señalado en los puntos anteriores refleja, en términos generales, un buen desempeño de los grupos pequeños en los aspectos explorados en este instrumento, en ciertas ocasiones algunos de ellos encaran algunas dificultades que no pueden superar. A continuación se enuncian las que se consideran más relevantes.

En determinados momentos, algunos grupos pequeños emiten su respuesta basados en un análisis global de la gráfica en lugar del enfoque puntual o por intervalos que el problema exige. En este sentido, el caso más crítico (dado el número de grupos pequeños que contestan incorrectamente) se presenta en la Pregunta 1.b. Ante la pregunta ¿qué familia gasta más agua?,

la respuesta de diez equipos sugiere un enfoque global de la gráfica y no el puntual requerido (ver Transcripción 5). Posiblemente el proceder de estos diez equipos es factible interpretarlo desde dos perspectivas que pueden estar operando simultáneamente: primera, influencia del análisis global de las gráficas, es decir, no logran “desprenderse” del enfoque global y éste los lleva a establecer *quién gasta más rápidamente el agua* en lugar de *quién gasta más agua*; segunda, interferencia de distractores personales (según la acepción que Janvier—citado en Leinhardt et al., 1990— le asigna al término); esto es, en este caso, su experiencia personal en el sentido de que, *quien gasta más rápidamente el agua, gasta más agua*.

Familia 1. Porque en menos tiempo gasta casi la misma cant.[idad] que la otra en mayor tiempo

Transcripción 5. Respuesta del 3er. grupo pequeño a la Pregunta 1.b.

De acuerdo a Leinhardt y sus colaboradoras (1990), “[e]l error estudiantil citado con más frecuencia con respecto a la interpretación y construcción de gráficas que representan situaciones es la interpretación icónica” (p. 39). En la mayoría de los equipos (17), no se observa una tendencia a interpretar las gráficas en contexto icónicamente. Sin embargo, en determinadas ocasiones algunos de ellos no logran mantenerse al margen de interpretar “una gráfica de una situación como una imagen literal de esa situación” (Leinhardt et al., 1990). El caso más relevante en este tenor de ideas se presenta en la Pregunta e de la Segunda Situación (2.e.). La respuesta de diez equipos a esta pregunta, revela que, como lo señala Kerslake (citado por Leinhardt et al., 1990), estos grupos pequeños interpretan las gráficas de movimiento como las trayectorias de los viajes reales. Un ejemplo de este tipo de respuestas se muestra a continuación.

El punto en el que se cruzan los 2 automovilistas

Transcripción 6. Respuesta del 1er. grupo pequeño a la Pregunta 2.e.

En contraste con lo anterior, los otros ocho grupos pequeños nunca incurren en una interpretación icónica pero, innegablemente, el punto de intersección de las gráficas que representan la Segunda Situación es “el talón de Aquiles” de la población bajo estudio. Es posible que en esta circunstancia se esté ante un caso de un aspecto que señalan Leinhardt et al. (1990): “las dificultades no necesariamente proponen un concepto erróneo como la razón de la dificultad. Más bien, es más probable que impliquen que algo acerca de la tarea es lo que la hace especialmente difícil” (p. 30). Desde esta óptica, es probable que el punto de intersección de las gráficas que representan la Segunda Situación es “ese algo” de la tarea (al que se refieren Leinhardt y sus colaboradoras) que la hace especialmente difícil para los grupos pequeños que interpretaron icónicamente las mencionadas gráficas. Tal vez la dificultad estriba en que el citado punto “limita” a los grupos pequeños a considerar las gráficas simbólicamente, esto es, omitir semejanzas pictóricas con elementos de las trayectorias y los “seduce” a interpretarlas como una imagen literal de la situación. En otras palabras, algunas situaciones resultan ser “más susceptibles” que otras de que sus gráficas sean interpretadas icónicamente. Considerar que el factor principal que ayuda a dar cuenta del rendimiento de los grupos pequeños, en la pregunta a discusión, es la propia dificultad de la tarea más que la dificultad que ellos tienen para interpretar adecuadamente gráficas que representen situaciones es, en dado caso, viable para siete de los diez grupos pequeños que no la contestaron correctamente, dado que en ningún otro caso incurren en una interpretación icónica. Sin embargo, de los tres restantes, uno de ellos incurre en este tipo de interpretación en otras tres ocasiones y los otros dos, en una. En estos tres casos, al parecer, la dificultad está más en los grupos pequeños que en la tarea propiamente dicha.

Como se señala renglones arriba, la construcción de las gráficas que representan la primera y la segunda parte de la Tercera Situación (3.a y 3.b, respectivamente), son “particularmente difíciles”: la primera demanda la gráfica de una función constante y la segunda, una gráfica escalonada. Seis equipos fallan al intentar construir la gráfica que represente lo planteado en la situación 3.a y 14, en lo de la 3.b.

En los intentos de construir las mencionadas gráficas, se observa, en lo fundamental, una tendencia a la linealidad en la situación 3.a (ver Figura 5) y a la linealidad y continuidad, en la 3.b (ver Figura 6). Leinhardt y sus colaboradoras (1990) refieren numerosos estudios en los que se han observado dichas tendencias.

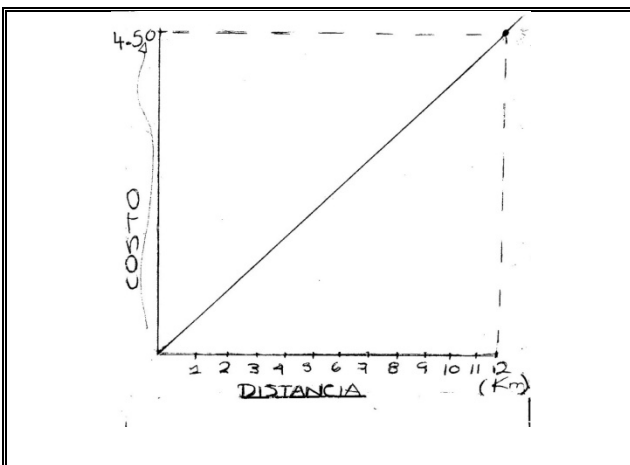


Figura 5. Respuesta del 8° grupo pequeño a la Pregunta 3.a en la que se observa una tendencia a la linealidad.

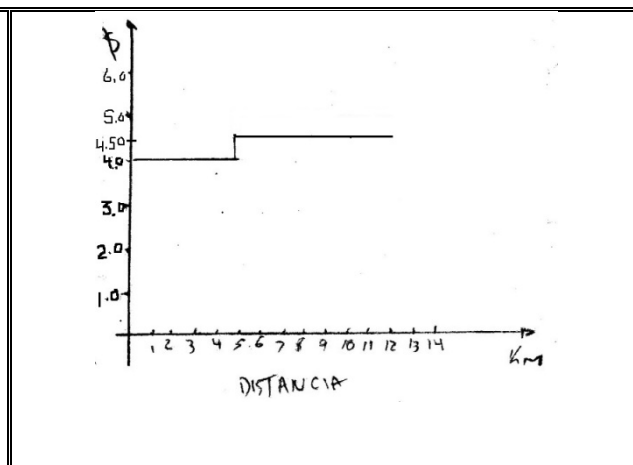


Figura 6. Respuesta del 14° grupo pequeño a la Pregunta 3.b en la que se observa una tendencia a la continuidad.

Los “intentos fallidos” para construir la gráfica correcta en las referidas situaciones son: en la situación 3.a, trazan un segmento de recta con pendiente positiva y colocan la leyenda “tarifa constante” o, asignan el mismo valor, o no asignan valor alguno en cada extremo de los intervalos del eje que representa el costo o proceden en forma similar a la que se muestra en la Figura 5. En la situación 3.b, trazan dos segmentos de recta “unidos” (bien sea uno con pendiente positiva y el otro paralelo al eje correspondiente o, los dos con pendiente positiva) o, tres segmentos de recta con pendiente positiva de diferente longitud y que parten del origen. Cabe señalar que es factible que en los ocho equipos que contestan correctamente la situación 3.a (gráfica de una función constante) y fallan en la situación 3.b (gráfica escalonada) impere “la visión” de que las gráficas deben ser continuas. Al parecer, esta es la situación en la que se encuentra el 14° grupo pequeño. Véase su respuesta en la Figura 6.

En las dos últimas situaciones del Instrumento (Cuarta y Quinta) –en las cuales la interpretación de las gráficas que las representan es “libre”–, es posible afirmar que la dificultad que enfrentaron los cuatro grupos pequeños que interpretan incorrectamente la gráfica de la Cuarta Situación estriba, fundamentalmente, en el hecho de que no conciben que el área de un rectángulo varíe mientras su perímetro permanece fijo. La Transcripción 7, muestra la forma en la que el 18° grupo pequeño expresa la citada dificultad. De aquí que, los referidos grupos pequeños, consideran que sólo hay *un* rectángulo. En torno a él, dos grupos pequeños formulan sus afirmaciones y los otros dos, se limitan a señalar lo antes expuesto. Esto conlleva a suponer que el problema que ellos enfrentan, de hecho, no radica en la interpretación de la gráfica en sí, sino en el contenido matemático que involucra la propia situación planteada.

Creemos que no es posible tener un perímetro fijo en una figura, mientras su área está aumentando

Transcripción 7. Interpretación del 18° grupo pequeño al bosquejo de la gráfica de la Situación 4.

Por otra parte, “el problema”, por así decirlo, que se observa en el desempeño de los 17 grupos pequeños que hacen afirmaciones correctas, al interpretar las tres gráficas que representan la Situación 5, es que *ninguno* de ellos establece alguna afirmación que indique que hayan centrado su atención en uno de los dos puntos de intersección de dichas gráficas; a saber, el que se localiza en el eje de las ordenadas, el cual, en la situación que se discute, representa el mismo número de bacterias en cada uno de los tres medios al momento de iniciarse la reproducción (tiempo inicial). Al parecer, el punto pasa inadvertido. Esta omisión de los grupos pequeños tal vez, es factible de interpretarla desde tres vertientes que pueden ser convergentes:

- 1a. Un análisis puntual un tanto restringido: se fija la atención en unos puntos de la gráfica y no en otros.
- 2a. Interferencia, en el análisis de las gráficas, de los distractores personales (según la acepción que Janvier –citado en Leinhardt et al., 1990– le asigna al término). En el caso que nos ocupa, el distractor puede ser la experiencia de los equipos en el sentido de que, dado que es “común” que los diseños experimentales inicien con el mismo número de elementos (semillas, bacterias, plantas, etc.), ni siquiera vale la pena mencionarlo.
- 3a. Ambigüedad en una de las frases que incluye el planteamiento de la situación: “la bacteria B”. Ésta pudo haberse entendido como *una* (y sólo una) bacteria. De ser este el caso, tal vez consideran innecesario emitir una afirmación en la que se explicita el número de bacterias que había en cada medio, al momento de iniciar su reproducción, si “ya se sabe que es *una*” (el planteamiento de la situación, así lo indica).

Conclusiones

Con base en el desempeño que muestran los estudiantes al interpretar y construir gráficas en contexto, es posible afirmar que el dominio en la conversión de los registros de representación gráfico y algebraico en funciones de la forma $y = ax^n + b$, donde $a, b \in \mathcal{R}$, $a \neq 0$ y $n = 1, 2$ y 3 por la vía global cualitativa y desde un punto de vista estrictamente matemático, favorece la comprensión de dichas funciones al menos, en los aspectos explorados con el instrumento que en estas páginas se presenta.

Referencias y bibliografía

- Bransford, J. D., Brown, A. L., & Cocking, R. R. (1999). The Design of Learning Environments. En J. D. Bransford, A. L. Brown, & R. R. Cocking (Eds.), *How People Learn: Brain, Mind, Experience, and School* (119-142). Washington, D.C.: National Academy Press.
- Duval, R. (1992). Gráficas y Ecuaciones: la articulación de dos registros. En *Antología en Educación Matemática* (pp. 125-139). México: CINVESTAV.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle y Peter Lang S. A. (Trad. Myriam Vega Restrepo). Santiago de Cali, Colombia.
- Ellis, M. (2003). Constructing a Personal Understanding of Mathematics: Making the Pieces Fit. *Mathematics Teacher*, 6(8).

- Eraslan, A., & Aspinwall, L. (2007). Quadratic Functions: Students' Graphic and Analytic Representations. *Mathematics Teacher*, 101(3).
- Hartter, B.J. (2009). A Function or Not a Function. That Is the Question. *Mathematics Teacher*, 103(3), 201-205.
- Hiebert, J., & Carpenter, T. P. (1992). Learning and Teaching With Understanding. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65-97). New York: Macmillan Publishing Company.
- Janvier, C. (Ed.). (1987). Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Knuth, E. J. (2000). Student Understanding of the Cartesian Connection: An Exploratory Study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31 (4), 500-508.
- Leinhardt, G., Zaslavsky, O., & Stein, M. K. (1990). Functions, Graphs, and Graphing: Tasks, Learning, and Teaching. *Review of Educational Research*, 60 (1), 1-64.
- Moschkovich, J. (1999). Students' use of the X-Intercept as an Instance of a Transitional Conception. *Educational Studies in Mathematics* 37, 169-197.
- Moschkovich, J., Schoenfeld, A.H., & Arcavi, A. (1993). Aspects of Understanding: On Multiple Perspectives and Representations of Linear Relations and Connections Among Them. En A. Romberg, E. Fenema & T. A. Carpenter, (Eds.), *Integrating Research on the Graphical Representation of functions* (pp. 69-100). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- National Council of Teachers of Mathematics. (2000). Principles and Standards for School Mathematics. Reston, Va.: NCTM.
- Pilipczuk, C. (2008). Graphing Functions. Resolving Students' Misconceptions by Using "Messy" Data and Calculator-Based Laboratory Activities. *Mathematics Teacher*, 101(9).
- Rivera, F. (2007). Visualizing as a Mathematical Way of Knowing: Understanding Figural Generalization. *Mathematics Teacher*, 101(1).
- Romberg, T. A., Fennema, E., & Carpenter, T. P. (Eds.). (1993). *Integrating Research on the Graphical Representation of Functions*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. En D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp.334-370). New York: MacMillan Pu. Co.
- Sinclair, N., & Alayne, A. (2011). Tell a Piecewise Story. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 16(6), 347-353.
- You, Z. (2009). How Students Interpret Graphs. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 15(4), 188-190.

Frações, decimais e porcentagem: é possível trabalhar de forma integrada?

Janilson Loterio

Unifebe, Centro Universitario de Brusque

Secretaria Estadual de Educação de Santa Catarina

Brasil

janloterio@hotmail.com

Resumo

O presente trabalho tem como objetivo relatar uma investigação realizada sobre o ensino de frações, com turmas de sexto ano de uma escola pública no Brasil. São apresentadas inicialmente alguns conceitos de frações de diversos autores, no qual encontra-se aqueles que defendam o ensino de frações pelo conceito de parte todo, ou de maneira mais contextualizadas, com a de autores que acreditam na exclusão do tema nas escolas. Posteriormente são apresentadas algumas atividades realizadas, baseadas na investigação matemática e nos momentos pedagógicos, que são problematização inicial, organização e aplicação do conhecimento, caracterizadas nos projetos de investigação. Onde são trabalhados os conceitos de frações, percentuais e números decimais, de forma integrada e interdisciplinar, relacionando a investigação com animais da mata atlântica e savana africana. Como resultados alcançados, percebe-se que ao trabalhar dessa forma, integrada, é possível aumentar e aprofundar substancialmente a investigação realizada

Palavras chaves: frações, decimais, porcentagens, investigação, interdisciplinaridade,

Introdução

O ensino de frações no Brasil sempre tem levado à muitas discussões. Esse trabalho, fruto de parte de uma pesquisa de mestrado, tem como objetivo se aprofundar a investigação sobre essa temática. Antes de discuti-lo, porém, faz-se necessário responder uma pergunta: como está, no mundo contemporâneo, a discussão sobre os números racionais? E sobre as frações?

A matemática possui muitos campos de atuação, cada qual com suas características, mas, geralmente, o professor trabalha todos da mesma forma. De acordo com os conteúdos de matemática estabelecidos pelo senso comum a serem trabalhados, no sexto ano, deve-se ensinar frações para construir a base dos números racionais. O estudo de frações vem recentemente sendo a pauta de discussões entre vários matemáticos pelo Brasil e mundo. A revista BOLEMA (Boletim de Educação Matemática) da UNESP de Rio Claro publicou o número 31 exclusivamente sobre o “ensino de frações”. Há vários pontos de vista, sobre o tema, que vão desde novos olhares sobre o uso de fração, articulando com situações do cotidiano, como quem defenda a sua exclusão do currículo escolar. Destacamos os trabalhos de: Lopes (2008), Guerra e Silva (2008), Rosa e Viali (2008), Almouloud e Silva (2008), Bertoni (2008; 2004), Viana (2008) e Ben-Chaim, Ilany e Keret (2008), Campo, Magina e Nunes (2006) e Amorim e Damazio (2008).

Segundo Lopes (2008), a aprendizagem de frações não se dá com definições prontas, nomenclatura obsoleta e pseudo-problemas sobre pizzas e barras de chocolates. Os professores deveriam ter atenção para as complexidades que envolvem conceito tão delicado. Em um levantamento de onde a sociedade usa frações, Lopes (2008) destaca sua aplicação em leis, medidas de polegadas e receitas de bolo, que estão mais no mundo dos adultos do que das crianças. Percebe-se a necessidade de se questionar para aprimorar o estudos das frações, para Lopes (2008) que este deveria envolver outros anos da vida escolar do estudante onde os currículos deveriam contemplar experiências diversas com frações em todas as séries do ensino fundamental e médio, algo que vá além da inclusão de exercícios com frações mais complexos. Também se destaca o fato de:

O ensino de frações tem sido praticado como se nossos alunos vivessem no final do século XIX, ensino marcado pelo mecanicismo, pelo exagero na prescrição de regras e macetes, aplicações inúteis, conceitos obsoletos, “carroções”, cálculo pelo cálculo. Esta fixação pelo adestramento empobrece as aulas de matemática, toma o lugar de atividades instigantes e com potencial para introduzir e aprofundar ideias fortes da matemática. Professores, autores, investigadores, não importa a natureza de nossa atividade profissional, não temos o direito de sonegar aos alunos as possibilidades de exercício de pensamento matemático autêntico (Lopes, 2008, p.22).

O trabalho de fração, tal como afirmam Guerra e Silva (2008), passa pela busca de construir uma compreensão das operações com frações pela manipulação de áreas de forma a relacioná-las a uma “concretude geométrica” que julgamos desejáveis, considerando os aspectos históricos e conceituais que subsidiam a construção dos conhecimentos escolares sobre esse tema. Outros matemáticos apresentam como possibilidade de trabalho o uso de números racionais através de planilhas eletrônicas, como Rosa e Viali (2008), dando ênfase na associação entre as representações fracionária e decimal quando da passagem de uma forma de representação para outra. Segundo as autoras, o uso das planilhas aumenta as possibilidades de aprendizagem, uma vez que com este recurso o aluno fica livre para explorar um número bem maior de exemplos e valores, podendo mais facilmente chegar a conclusões e procurar por relações entre os diferentes tipos de representações, aumentando a eficácia da aula. Nesta relação, “professor e aluno devem se sentir desafiados para a fazer uma aula diferente. O professor, quando faz o planejamento de sua aula, deve procurar proporcionar aos alunos tarefas em que se sintam desafiados a trabalhar para atingir os objetivos propostos” (Rosa & Viali, 2008 p. 187).

Os pesquisadores concluíram que o uso das planilhas eletrônicas aumenta a produtividade das aulas, mesmo com alguns problemas, como a falta de computadores para os alunos. Algumas atividades sobre o tema escolhido são apresentadas usando como linha mestre a concepção parte-todo (Almouloud & Silva, 2008), a abordagem formal, lógica e dedutiva apresentada nas licenciaturas em Matemática. A concepção parte do todo, segundo os autores, se caracteriza por um inteiro (grandeza discreta ou contínua), do qual uma parte pode ser associada a um número fracionário e, com este intuito, as figuras se prestam como representação desse inteiro. Convenciona-se então que ele deva estar dividido em partes ‘iguais’ (mesma área) para que a parte em questão possa ser quantificada. Segundo esses autores existe necessidade de se rever o ensino pois:

Acreditamos que as atividades apresentadas podem auxiliar o aluno na compreensão das regras operatórias sobre números fracionários com significado, no entanto, elas não são suficientes para que o mesmo possa conceituar adequadamente os números racionais. É

necessário descontextualizar as situações para que as habilidades com o cálculo se desenvolvam independente de representações figurais, pois o aluno deve aprender significativamente tais regras e não memorizá-las. Atualmente, o que se observa é a impotência do aluno frente a cálculos simples com números fracionários, mostrando que não entende o assunto e não domina as regras. Se quisermos que o aluno construa conhecimentos matemáticos com significado, durante o ensino básico, o quadro da educação atual precisa ser mudado. O aluno precisa dos conhecimentos iniciais bem fundamentados para ter sucesso na aprendizagem de novos conteúdos matemáticos (Almouloud & Silva, 2008).

Observa-se a crítica em relação à capacidade dos alunos em resolver os cálculos solicitados e a também a necessidade de construir o conhecimento matemático de frações com significado. Segundo Bertoni (2004) as frações tem sido, provadas por avaliações e pesquisa, o tema mais difícil no ensino de matemática na educação fundamental. O rendimento dos alunos é baixo e

Ao contrário do que parece pensar os autores de livros didáticos, a construção do sentido de número fracionário não é tarefa que possa ser resolvida em uma ou duas páginas. É preciso encontrar caminhos para levar o aluno a identificar essas quantidades em seu contexto cotidiano e a apropriar-se da ideia do número fracionário correspondente, usando-os de modo significativo (Bertoni, 2004).

Para resolver essas questões, alguns professores de matemática recaem no uso dos materiais concretos, mas segundo Bertoni (2008), deve-se observar que materiais manipuláveis nem sempre fazem com que o aluno tenha compreensão de que a fração é um número. “Porque nem os materiais manipulativos, as fichas, canudos ou tiras divididas, nem as figuras geométricas divididas, nem a designação de pedaços de pizza apresentavam situações que demandassem realmente uma construção desses novos números” (Bertoni, 2008, p. 212).

Campos, Magina e Nunes (2006), ao realizar um estudo sobre as competências dos professores sobre o tema fração, principalmente aqueles das séries iniciais do ensino fundamental, caracterizado como professor polivalente, concluíram que muitos apresentam dificuldades conceituais entre representar numericamente situações de fração e de razão.

Ben-Chaim, Ilany, Keret (2008) defendem o uso de atividades denominadas autênticas na formação dos professores, pois acreditam que os professores podem aprender os tópicos razão e proporção a partir de atividades autênticas, o que não apenas melhora significativamente seus conhecimentos relativos ao conteúdo e às questões didático-pedagógicas, mas também mudam suas atitudes relativas à matemática em geral e, especificamente, em relação aos componentes e aspectos vinculados aos conceitos de razão e proporção. Para Amorim e Damazio (2008), a abordagem psicológica ‘histórico e cultural’ e a tendência pedagógica ‘histórico-crítica’ enunciam que a apropriação do conhecimento científico reivindica por um método que permita ao aluno compreender-se como sujeito ‘histórico e cultural’, pois pode colaborar com o ensino de fração. Segundo eles a problemática diz respeito ao estudo dos aspectos essenciais ao entendimento do campo numérico dos Números Racionais que, atualmente, são negligenciados no processo educativo escolar, privando os alunos da plena compreensão conceitual. A qual o aluno necessita pensar, estabelecer relações, justificar, analisar, discutir e criar, novas ideias matemáticas, partindo do tema estudado.

No caso específico do conceito de número racional, o lógico-histórico tem como referência a ideia de medida, se estende para a propriedade de equivalência e atinge um nível de complexidade cada vez maior em cada operação – adição, subtração, multiplicação e divisão – fazendo com que a literatura (Caraça) abandone a representação geométrica na

multiplicação e divisão, recorrendo exclusivamente à síntese algébrica e aritmética (Amorim & Damazio, 2008, p.17).

De todas as referências utilizadas, a que provoca mais inquietação é Viana (2008), que defende o “extermínio” das frações, sua retirada dos currículos, dos livros didáticos, das listas de conteúdo escolar. Numa ampla discussão sobre a problemática do tema, acrescenta que “as frações não são números, principalmente aquelas como ensinadas na escola elementar”, definidas como relação parte-todo, daquelas múltiplas maneiras que recorrem a “barras” ou “tortas” divididas em partes iguais e das quais se toma algumas. Ainda segundo Viana (2008), quando os professores das séries iniciais adotam a definição de fração como relação parte-todo pensa que estão lidando com “números” e esperam que as crianças procedam como se aquelas coisas fossem, de fato, “números”, mas, ainda conforme o autor, as frações não são números, uma vez que não servem para contar. Sua proposta, então, consiste em refletir a partir dos efeitos da sua retirada dos programas, analisando os ganhos e perdas, provocando, então, alguma transformação, rumo a uma direção cujas rotas ainda não foram exploradas.

Tendo como base a discussão sobre fração, percebe-se que há uma necessidade de ao menos rever seu ensino. Não há consenso nessa ou naquela maneira de trabalhar com os números racionais e isso provavelmente ocorra com outros conteúdos da área das ciências, matemáticos ou não. Um projeto de investigação surge como possibilidade para o ensino de matemática na atualidade. Sua realização é um processo, longo ou curto, dependendo da investigação que se deseja fazer. Algumas etapas servem para a constituição de um ou vários projetos. São etapas que, independentemente do caminho proposto pelo professor aos seus alunos, são fundamentais para sua prática pedagógica e definir, assim, quais serão os rumos do meu exercício docente.

Relato das Atividades desenvolvidas

Durante todo o processo de desenvolvimento do projeto, buscamos sempre denominá-lo como um projeto de investigação, no qual buscamos não apenas desenvolver um conteúdo matemático, mais encontrar novos conceitos e novos conhecimentos. Realizamos várias atividades, incluindo pesquisas bibliográficas, realização de exercícios, confecções de animais em tamanho natural, entre outras, que julgamos serem necessários conforme o projeto se desenvolvia. Nesse trabalho vamos, relatar apenas, algumas que ajudem a identificar nossa proposta de trabalhar fração de uma outra forma, do que as dos livros didáticos. Vamos a elas.

Atividade 01: Qual a relação entre fração, decimais e porcentagens?

As atividades foram realizadas inicialmente com duas turmas de sexto ano, com idades entre 10 e 12 anos, em média com 25 alunos por sala, em uma escola da rede pública municipal de Blumenau, Santa Catarina, Brasil. Elas partem dos momentos pedagógicos propostos por Delizoicov, Angotti e Pernambuco (2009): problematização inicial, organização do conhecimento e a aplicação do conhecimento, que são o suporte para um projeto de investigação.

Na primeira etapa a *problematização inicial*, tínhamos como objetivo encontrar formas de trabalhar o ensino de frações, que possibilitassem uma melhor compreensão por parte dos alunos do tema, como despertassem sua motivação. Surge então através de debates com os alunos, investigar a relação entre a escola e o meio ambiente. Como o local onde se realizou a pesquisa passou por um grande desastre ambiental em 2008¹, era perceptivo a necessidade de explorar o

¹ Devido a um grande volume de chuva, a região de Blumenau, sofreu um grande desastre ambiental, provocado por deslizamentos e enchentes, provocando a morte de dezenas de pessoas.

tema. Mas o que meio ambiente tem a ver com a matemática? Será que se conhecermos melhor o Bioma onde vivemos, no caso, a mata atlântica, poderíamos evitar desastre como o ocorrido? A resposta dos alunos foi sim.

Mas para chegar a frações era necessário ter dados, onde através de diversas fontes de pesquisas, web, revista, livros e outros, conseguimos levantar um número significativo de dados sobre as dimensões, do bioma em geral como sobre sua fauna e flora. Percebemos durante essa etapa, que os alunos conheciam mais animais de outros continentes, como a Savana Africana, do que da Mata Atlântica, onde estavam inseridos, surgem então a linha dessas atividades, conhecer, e comparar as relações, com o uso de frações, entre a fauna dos desses Biomas. Foi levantado várias informações sobre os animais dos dois biomas, como altura da girafa, peso do mico-leão, gestação da arara-azul, entre outros, dados que depois serão explorados nas demais atividades.

Queremos ressaltar que a etapa da problematização, pode mudar o rumo da investigação, pois cada escola, cada aluno e cada professor, tem interesses e anseios diferentes.

A etapa da *organização do conhecimento*, onde coletamos os dados e sistematizamos nossas atividades, percebemos na investigação, que as informações coletadas sempre apresentam os números racionais em diversas maneiras, na forma de percentual, fração ou decimal, e não apenas da forma fracionária, deste momento, um dos mais importantes para a pesquisa, fez com que encontrássemos o que estávamos desejando: uma maneira diferente de trabalhar frações. Se os números racionais, são apresentados a comunidade científica, de maneira diversas, então escola pode desenvolver o conteúdo desses números, usando as três formas, fracionária, decimal e percentual, ao mesmo tempo, não separadamente, como é apresentada nos livros didáticos.

A partir desse momento, toda a investigação, foi baseada na ideia de em cada momento, em cada exercício, sempre apresentar e discutir as três formas de números racionais, saindo da temática única fração.

Sendo assim, fez-se necessário apresentar as relações entre as três formas de escrita numérica. Foram apresentado os conceitos e algumas aplicações, iniciando com frações, conforme o exemplo.

a) Frações

As frações são um modo de expressar uma quantidade a partir de um valor que é dividido por um determinado número de partes iguais entre si.

Elas podem representar uma parte de um grupo. Se em nossa turma 25 alunos de 35 desenharam uma girafa, pode-se afirmar que 25/35 representa essa situação. Mas, como o 25 e 35 são múltiplos do 5 (cinco), podemos *simplificá-la*, tal como o fizemos anteriormente.

$$\boxed{\frac{25}{35} = \frac{25 \div 5}{35 \div 5} = \frac{5}{7}}$$

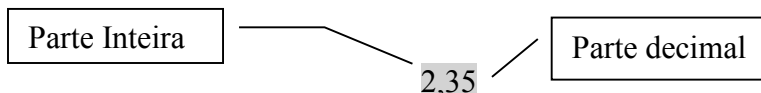
Ou seja, a cada 7 desenhos feitos na sala, 5 tinham a girafa.

b) Decimais

A forma pela qual representamos um número, um valor, pode variar conforme a necessidade. Com as frações isso também ocorre. Elas podem ser escritas na forma de números decimais.

A palavra decimal tem origem na palavra latina *decem*, que significa 10. Números decimais são **numerais não inteiros**, ou seja, que apresentam uma parte inteira e outra fracionada (decimal). Utiliza-se uma vírgula para separá-las. A parte decimal é encontrada através de multiplicações e divisões por 10.

Observe:



Significa 2 partes inteiras e 35 centésimos

Dessa forma, com a utilização dos números decimais surgem mais “casas numéricas” para com as quais se trabalhar através de múltiplos de 10:

Tabela 1

Múltiplos inteiros: Quantidade e nomes

Quantidades	1000 x	100 x	10x	1x	Vírgula	:10	:100	:1000
Definições	Milhar	Centena	Dezena	Unidade	,	Décimos	Centésimo	Milésimos

Fonte: *Elaboração do Autor .2010*

Como a fração pode ser considerada uma divisão, podemos então transformar um numeral na forma de fração para decimal.

$$\frac{25}{35} \cong 0,71$$

Observação: as divisões com números decimais podem gerar cálculos infinitos e, por essa razão, determinamos quantas “casas decimais” iremos utilizar, o que dependerá de cada situação. Se você chegar, por exemplo, 1 décimo de segundo atrasado na escola (13:30:01), não terá muito problema mas, para um piloto de formula 1, ele pode decidir um campeonato.

c) Porcentagem

Para finalizar, os decimais e frações podem ser escritos na forma de porcentagem. **Porcentagem significa dividir por 100.** Como vimos anteriormente, dividindo-se uma unidade por cem teremos os centésimos.

Logo temos $\frac{25}{35} \cong 0,71 \cong 71\%$

Seguindo esses passos, apresentamos ao aluno, as três representações dos racionais. Para consolidar, o aprendizado podemos propor que os alunos encontre as relações entre frações, decimais e percentual, partindo inicialmente das frações com esse outro exemplo.

Atividade de transformação:

- a) $1/2 = 0,50 = 50\%$
- b) $2/3 = 0,66 = 66\%$
- c) $5/4 = 1,25 = 125\%$
- d) $8/10 = 0,8 = 80\%$

A última etapa dos momentos pedagógicos, a *aplicação do conhecimento*, é onde podemos aplicar o que apreendemos. Após os alunos compreenderem a relação entre as representações dos números citados, partimos para nossa investigação com os biomas e sua faunas.

Atividade 2: Identificar 20 animais preferidos pela turma.

Fazendo um rápido levantamento pedimos aos alunos escreverem, o nome de pelo menos cinco animais que eles conhecem, da mata atlântica ou da savana africana. E apresentamos os resultados em tabela, Vamos representar os três primeiros.

Tabela 2

Animais citados pelos alunos. Turma A com 24 alunos

ANIMAIS	CITAÇÕES
Girafa	20
Cobra	17
Leão	16

Fonte: O Autor, 2010.

Com a lista e a quantidade de vezes que os animais foram citados, vamos organizar outra tabela, e acrescentar os cálculos com frações, decimais e percentuais conforme o exemplo.

A girafa foi citada por 20 alunos de 24

Fração 20/24 simplificando 5/6

Decimal 5: 6 = 0,83

Porcentagem: 0,83 = 83 %

Tabela 3

Animais citados por Biomas. Leão. girafa e cobra.. Representações frações, decimais e percentuais.

Animal	Bioma			Resultado				
	Mata Atlântica	Savana Africana	Outro	Desenhos	Fração Geral	Fração Simples	Decimal	Percentual
Girafa		X		20	20/24	5/6	0,83	83%
Cobra	X	X		17	17/24	17/24	0,71	71%
Leão		X		16	16/24	2/3	0,67	67%

Fonte: O Autor, 2010

Observações: Percebemos que os alunos ainda não têm uma definição sobre quais animais pertencem a cada bioma e surge a questão dos animais domesticados (cão, gato) ou aqueles usados como alimentos e montaria (cavalo, galinha, vaca). A questão é; em qual bioma esses animais podem ser classificados? Podemos abrir um novo “bioma”, o urbano, para colocar esses animais. Mas também podemos elencar os animais selvagens, como cavalos, gatos do mato, cachorro do mato, búfalos entre outros, para comparar com os domesticados. Alguns alunos levantam um grande número de aves, sendo a maioria animais de estimação, uma oportunidade para discutir o tráfico de animais selvagens. O tempo sugerido para essa atividade é 30 a 60 minutos, uma a duas horas/aulas

Atividade 3: Investigando os resultados

Com auxílio da tabela completa, vamos conhecer um pouco o que a turma fez respondendo às perguntas abaixo: Utilize os números na forma de fração, decimais e percentuais para responder:

- 1) Qual valor representa o animal preferido da classe?
- 2) Qual o valor dos animais pertencentes à Mata Atlântica? e da Savana Africana?
- 3) Identifique a maior fração e a menor e descubra a diferença entre elas.
- 4) Encontre duas ou mais frações que somadas representem 100%.
- 5) Faça a soma em decimal dos três últimos animais e descubra o percentual alcançado.
- 6) Some as três maiores frações e escreva em decimal a resposta.
- 7) Quais os três maiores e três menores valores em percentuais encontrados? Calcule a soma entre eles em decimal.
- 8) Qual a fração que mais se repetiu? Qual o percentual delas juntas?
- 9) Qual o percentual de animais que atingiram mais de 50% das citações?
- 10) Faça uma nova pergunta para seus colegas. Exemplo, quais os animais citados por biomas?

Essas foram as respostas da turma citada

- 1) Girafa $\frac{5}{6} = 0,83 = 83\%$
- 2) Mata Atlântica (12) $= \frac{12}{20} = \frac{3}{5} = 0,6 = 60\%$ / Savana (15) $= \frac{15}{20} = \frac{3}{4} = 0,75 = 75\%$
Outros biomas (2) $= \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = 0,1 = 10\%$

- 3) Girafa $\frac{20}{24}$ maior e hiena $\frac{3}{24}$ menor.

$$\text{Diferença} = \frac{20}{24} - \frac{3}{24} = \frac{17}{24}$$

- 4) Girafa $\frac{20}{24} = 83\%$, Borboleta $= \frac{1}{6} = 17\%$

$$\frac{20}{24} + \frac{1}{6} = \frac{20}{24} + \frac{4}{24} = \frac{24}{24} = 1 = 100\%$$

- 5) Morcego, escorpião e Hiena $= 0,13 + 0,13 + 0,13 = 0,39 = 39\%$

- 6) Girafa $\frac{20}{24} = \frac{5}{6}$, Cobra $\frac{17}{24}$ e Leão $\frac{16}{24} = \frac{2}{3}$

$$\frac{5}{6} + \frac{17}{24} + \frac{2}{3} = \frac{20}{24} + \frac{17}{24} + \frac{16}{24} = \frac{53}{24} = 2,2$$

- 7) Maiores: Girafa $= 83\%$, Cobra $= 71\%$ e Leão $= 67\%$

Menores: Morcego, escorpião e Hiena $= 13\%$

Decimal: $0,83 + 0,71 + 0,67 + (3 \times 0,13) = 2,60$

- 8) $(\frac{3}{24} \times 4) = \frac{12}{24} = 0,5 = 50\%$

- 9) 15 não chegaram a $50\% = \frac{15}{24} = 0,625 = 62,5\%$

- 10) Livre, exemplo por biomas

Tabela 4

Biomás citados. Representação em decimal, fração e percentual.

Biomás	Citações	Decimal	Fração	Percentual
Floresta temperada	1	0,02	1/48	2,08%
Indefinido	5	0,10	5/48	10,42%
Marinho	2	0,04	1/24	4,17%
Mata Atlântica	23	0,48	23/48	47,92%
Mata/Savana	6	0,13	1/8	12,50%
Polar	1	0,02	1/48	2,08%
Savana	7	0,15	7/48	14,58%
Taiga	1	0,02	1/48	2,08%

Fonte: O Autor, 2010.

Essa atividade requereu um tempo de 60 minutos/2 horas/aulas, explicação das frações e atividades em sala ou 30 minutos/1 hora/aula, explicação em sala com exercícios para fazer em casa.

Análise dos resultados

A constituição do projeto de investigação ocorre por meio de um processo desenvolvido pelos alunos e pelo professor. Por isso, devemos ter um olhar atento para situações imprevistas que surgem que poderão influenciar nos rumos da investigação. Afinal, antes de definir como seria a pesquisa, qual assunto, quais autores, onde aplicar, enfim, determinar o problema de pesquisa, o professor busca refletir sobre a sua prática docente e o aluno saciar seus desejos perante a escola. Na aplicação do projeto de investigação, cada nova etapa, cada atividade realizada e analisada, fez com que refletíssemos sobre a prática docente e também as atitudes dos alunos, que provocaram novas situações, imprevistas e inesperadas. As situações novas trouxeram novas possibilidades de ensino. Segundo Delizocov, Angotti e Pernambuco (2009 p.122) “a aprendizagem é resultado de ações de um sujeito, e não de qualquer ação: ela só se constrói em uma interação entre o sujeito e o meio circulante, natural e social”. Pode-se, então, afirmar que as ações dos sujeitos são fundamentais para que o professor possa perceber se está no caminho certo e se seus alunos estão aprendendo e constituindo sua autonomia.

Em toda a investigação, buscou-se pautar a dialogicidade, como ponte para a investigação. Várias atividades, partindo do aprofundamento dos estudos, recaem a todo o momento em debates, onde o professor e aluno, discutem os rumos da investigação. Durante as aulas de matemática possuem pouco tempo para atividades de discussão, mas quando se deseja contextualizar a atividade, esse momento, são fundamentais, principalmente nos primeiros momentos, determinantes para concretizar a problematização

As atividades, entre fração, decimais e porcentagens, durante a investigação fez com que modificássemos nossa forma de organizar o conhecimento. Ao invés de um único conteúdo, trabalhado de forma isolada, iniciamos o estudo com outros conteúdos (fração, decimal e percentual) de forma integrada. Essa forma de pensar auxiliou-nos a contrapor o pensamento cartesiano. Mas para tanto foi necessário um momento de organização do conteúdo, onde desenvolvemos as ideias de frações, decimais e percentuais. As atividades, digamos puramente matemáticas, são necessárias durante o processo de investigação, para evitar o risco de

fragmentar os conteúdos. Percebemos que alguns alunos apresentaram um pouco de dificuldade em relação as comparações apresentadas nas três formas, mas sabemos que as dificuldades também são encontradas quando desenvolvidas isoladamente. Durante as atividades podemos concluir que o ensino de forma integradas desses conceitos (fração, decimal e percentual), aumenta substancialmente o leque de comparações e aplicações. Quando se trabalha com frações há vários momentos que os alunos demoram a compreender que $\frac{5}{6}$ é maior que $\frac{17}{24}$, mas quando usamos os números decimais e percentuais (0,83;071 e 83%;71%), fica compreensível a comparação entre eles, e com isso facilita a tarefa do professor.

No sentido abrangente da investigação podemos definir que sobre o ensino de matemática com a área de biologia, constatamos que os alunos modificaram a ideia de que a matemática é só número, sem um sentido, pois conseguimos trabalhá-la associada às outras disciplinas. Tendo essa situação como plano de fundo conseguimos resultados significativos tanto por parte dos alunos, que com novas possibilidades de avaliações, as chances de cada um obter um resultado positivo foram maiores. Alunos com facilidades em cálculos, na sintetização de seus trabalhos alcançaram melhores aproveitamento na avaliação, mas outros alunos que tem mais facilidade de usar o desenho, o lúdico, também obtiveram bons desempenhos, o que produziu uma média satisfatória para todos.

Para o professor o projeto produziu formas diferentes de avaliar e desenvolver o conteúdo matemático, mas principalmente percebe-se que a união de materiais lúdicos e científicos, é uma alternativa viável para a escola. Há também a necessidade de se ressaltar algumas limitações na aplicação de projetos de investigação, principalmente quando estamos diante das dificuldades da escola, onde há problemas de materiais, tempo e espaços para a realização da atividades. Em turmas numerosas com mais de trinta e cinco alunos, pode ocorrer problemas com indisciplina ou falta de tempo para o professor orientar cada grupo durante as atividades em grupos, mas percebeu-se que mesmo nessas turmas, quando os alunos estão motivados, esses problemas são reduzidos, mas com o projeto de investigação, nota-se que é possível vencer essas barreiras e conseguir resultados bem animadores, para o estudo de frações ou de outros conteúdos matemáticos.

Bibliografia e referências

- Almouloud, S. A., & Silva, M. J. F. (2008). As Operações com números racionais e seus significados a partir da concepção parte-todo. *Bolema*, 21(31), 55-78. Rio Claro (SP)
- Amorim, M. P., & Damazio, A. (2008). Apropriação das significações do conceito de divisão de números racionais. In *Anped: 30 anos de pesquisa e compromisso social*. 30 Reunião Anual da Anped, Caxambu, Disponível em: <http://www.anped.org.br/reunioes/30ra/index.htm> Acesso em 21 fev. 2010
- Ben-Chaim, D., Ilany, B., & Keret, Y. (2008). Atividades investigativas autênticas para o ensino de razão e proporção na formação de professores de matemática para os níveis elementar e médio. *Bolema*, 21(31), 125-159. Rio Claro (SP).
- Bertoni, N. E. (2004). *É possível ensinar frações para a vida? Salto para o futuro*. Disponível em: <http://www.tvbrasil.org.br/saltoparaofuturo/boletins.asp?>>. Acesso em: 10 jun. 2010.
- Bertoni, N. E. (2004). A Construção do Conhecimento sobre Número Fracionário. *Bolema*, 21(31), 209 – 237. Rio Claro (SP).
- Campos, T. M. M., Magina, S., & Nunes, T. (2006). O professor polivalente e a fração: conceitos e estratégias de ensino. *Educação Matemática em Pesquisa*, 8(1), 125-136. São Paulo.

- Delizoicov, D., Angoti, J. A., & Pernambuco, M. M. (2009). *Ensino de ciências: fundamentos e métodos*. São Paulo: Cortês.
- Loterio, J. (2010). *Projeto de investigação no ensino de frações junto aos estudantes do ensino fundamental: a possível construção da autonomia* (Dissertação de Mestrado). 210 f, il. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Naturais e Matemática, Centro de Ciências Exatas e Naturais, Universidade Regional de Blumenau, Blumenau, 2010. Disponível em: <http://www.bc.furb.br/docs/DS/2010/348208_1_1.pdf>. Acesso em: 10 fev. 2012.
- Lopes, A. J. (2008). O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre frações, quando tentamos lhes ensinar frações. *Bolema*, 21(31), 1-22. Rio Claro (SP).
- Rosa, R. R., & Viali, L. (2008). Utilizando recursos computacionais (planilha) na compreensão dos números racionais. *Bolema*, 21(31), 183-207. Rio Claro (SP).
- Viana, C. R. A. (2008). Hora da fração: pequena sociologia dos vampiros na educação matemática. *Bolema*, 21(31), 161-181. Rio Claro (SP).

Geometría escolar: Una batalla entre percepción versus lógica y razonamiento.

Melissa **Andrade-Molina**
 Universidad de Aalborg
 Dinamarca
melissa@learning.aau.dk

Resumen

La geometría inmersa en el discurso matemático escolar es una geometría que conlleva a una visión limitada del espacio, a pesar de que pretende desarrollar las habilidades espaciales de los estudiantes y además, dotarlos con herramientas que le permitan desenvolverse en situaciones de la vida cotidiana y con objetos reales. Esta visión limitada del espacio conlleva a que la geometría, y la matemática en sí, sean vistas como un conocimiento abstracto muy lejano a los sentidos, sin embargo, al realizarlo se genera contradicciones que demuestran que es imposible separarlos.

Palabras clave: Geometría escolar, razonamiento matemático, percepción, Geometría Euclidiana, espacio.

Abstract

Geometry within school mathematics is a form of geometry that leads to a restricted understanding of space. Despite the fact that seeks to develop spatial abilities of students, and also provide them with a set of tools which can help them to solve any situation about real life, about real objects. This restricted view of space is promoting geometry, and mathematics itself, to be perceived as an abstract knowledge, constituted far from human senses. However, by doing so, a variety of contradictions emerge, showing that is impossible to separate them.

Key words: School geometry, mathematics reason, perception, Euclidean geometry, space.

Introducción

La forma en la que percibimos y entendemos el mundo está profundamente relacionada con la construcción de conocimiento. Este conocimiento está determinado por las condiciones espacio-temporales en la que es desarrollado (Gil, 2011). Muchas nociones que hoy parecen lógicas para nosotros, en un determinado período fueron inimaginables. Por ejemplo, bajo el paradigma teocéntrico todas las expresiones de desarrollo humano, desde la producción de conocimiento científico al artístico, estaban basadas en el discurso que Dios era el centro del Universo. Era incuestionable para los pintores de esa época plasmar la realidad como la veía alguien omnipotente que observa desde los cielos, donde los objetos no se hacen más pequeños a medida que se alejan (Kvasz, 1998).

La geometría proyectiva emergió cuando en el Renacimiento se comenzó a abandonar la idea teocéntrica de ilustrar la realidad tal como la “percibía” Dios, o en la manera en la que era “vista” por Dios. En el antropocentrismo, los pintores buscaban representar lo que ellos podían

ver, lo que ellos podían observar a través de sus ojos (Kvasz, 1998). Un mundo donde las líneas paralelas se cruzan en el horizonte, donde los objetos se hacen más pequeños a medida que se alejan del espectador. Así, este salto de paradigma, sobre cómo es percibido el mundo que nos rodea, permitió el desarrollo de diferentes tipos de geometrías como proyectiva, elíptica, hiperbólica, entre otras. Las que no sólo responden a las necesidades científicas de la época, como el desarrollo de la física, sino que también están condicionadas por el contexto espacio-temporal. No nacen de la genialidad de quién las estableció, sino que van acompañadas de ciertas condiciones que las hicieron posibles.

El avance de la ciencia nos ha permitido abandonar la idea de que si la tierra fuese plana las personas que están al otro se caerían, de la misma manera que nos ha permitido entender que la tierra no es plana y, a su vez, que la “realidad material” que nos rodea es una pequeña parte inmersa en un espacio que está curvado, donde no existen líneas que sean verdaderamente rectas, un espacio donde dos líneas que localmente son paralelas pueden incluso cruzarse, contrario a lo que describía Euclides en sus postulados. Más aún, en el siglo XX, Einstein demostró que los postulados propuestos por Euclides sólo pueden ser aplicados en el vacío, probando que el espacio no puede ser separado de la materia, concluyendo que el espacio no es vacío en lo absoluto (Woods, 2007).

A pesar de ello, la geometría Euclidiana se ha posicionado en la matemática escolar como una teoría matemática consistente, que aceptamos simplemente porque pareciera proveernos de un sistema que describe todo lo que podemos decir sobre nuestro mundo físico (Ray, 1991). Los axiomas de la geometría Euclidiana han ganado una importancia tal dentro de los contenidos que forman parte del currículo escolar de matemáticas en Chile, que los estudiantes de último año de enseñanza escolar no demuestran habilidades espaciales en situaciones que involucren pensar que la superficie de la tierra es curva, no logran desprenderse de propiedades como que la suma de los ángulos interiores de un triángulo suman 180° , dificultando proponer soluciones que escapen a la racionalidad de la geometría Euclidiana (Andrade, 2011).

Sin embargo, nuestro ojo es capaz de percibir un espacio que dista de ser Euclidiano. En 1913 se realizó una serie de experimentos que demostraron cómo los juicios visuales no satisfacen la lógica de las propiedades de la geometría Euclidiana (Hardy, 1951), enunciando que el espacio visual dista de seguir estas reglas. Uno de los experimentos consistía en ordenar dos filas de luces, situadas una al lado de la otra, de forma tal que estuviesen dispuestas lo más rectas y paralelas posibles. Sin embargo, las líneas resultantes no eran paralelas en lo absoluto, las líneas comenzaban a divergir a medida que se alejaban de la persona que las había ordenado. Los resultados de este experimento llevaron a concluir que en el espacio visual las configuraciones físicas no coinciden con la geometría Euclidiana (Suppes, 1977).

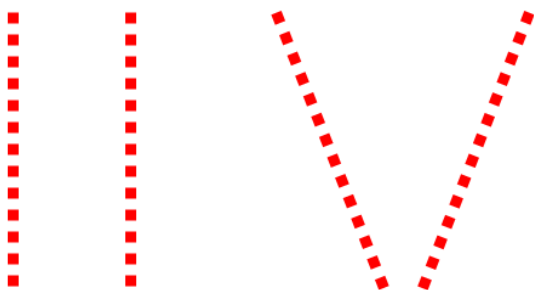


Figura 1. Líneas paralelas versus líneas resultantes del experimento.

Aun así, el currículo matemático escolar a pesar de asegurar el mejoramiento e incluso el desarrollo de las habilidades espaciales de los estudiantes, está centrado en desarrollar un pensamiento lógico, en detrimento de otro tipo de habilidades que escapen de la axiomática. Formando, finalmente, a sujetos lógico-calculistas (Kollosche, 2014), capaces de resolver problemas mediante la aplicación de técnicas. De esta manera, la geometría escolar describe una realidad que se constituye como una visión limitada del espacio, ésta responde a una forma particular de ver el mundo, un espacio plano, sin curvatura.

En este trabajo se analizará el discurso geométrico escolar del Ministerio de Educación de Chile inmerso en las guías curriculares, las instrucciones propuestas para los profesores, y los textos escolares para el estudiante. Se espera identificar si estos discursos están limitando la óptica del estudiante en una lucha constante entre lo que somos capaces de percibir y el razonamiento lógico. ¿Acaso la escuela nos hace pensar que la tierra aún es plana?

La promesa de una geometría para la realidad

Si bien no hay un discurso explícito que hable sobre qué sucede con la percepción del estudiante al momento de enfrentarse a una actividad escolarizada de matemáticas, ni sobre cómo el estudiante desarrolla su visualización espacial en la escuela, se puede distinguir un discurso que establece la relevancia de estudiar geometría para la vida cotidiana. Este propósito sugiere que el desarrollar habilidades geométricas en el plano y en el espacio permite realizar conexiones entre la realidad percibida por los estudiantes y las matemáticas escolares. Estableciendo a la geometría escolar como un conocimiento útil que empodera a quien lo posee (Valero, 2008).

¿Cuáles son estas promesas de la geometría escolar? Escolarmente se asume que si vivimos en un mundo tridimensional es indispensable hacer un nexo entre el “mundo real” y las matemáticas, ya que se estima que los estudiantes serán capaces de utilizar esas nuevas herramientas matemáticas para resolver problemas contextualizados en su diario vivir.

Su aprendizaje enriquece la comprensión de la realidad [...] aumentando su capacidad para intervenir en esa realidad (MINEDUC, 2010, p. 3).

Se busca que los estudiantes pongan en juego estos conocimientos, habilidades y actitudes para enfrentar diversos desafíos, tanto en el contexto del sector de aprendizaje como al desenvolverse en su entorno (MINEDUC, 2011, p.8).

El aprendizaje de la matemática ayuda a comprender la realidad y proporciona herramientas para desenvolverse en la vida cotidiana (MINEDUC, 2011, p. 25).

Al parecer se da a entender que un estudiante que es capaz de apropiarse de estas herramientas geométricas podrá desenvolverse de mejor forma en el mundo real, ya que será capaz de aproximarse de una forma particular, con ciertos conocimientos, habilidades y actitudes, para resolver desafíos de la vida diaria. De la misma manera, que un estudiante que no alcance este nivel de comprensión, puede que fracase al enfrentarse a los mismos desafíos.

El estudiar matemáticas, para la escuela, no es sólo traspasar un saber desde el profesor al estudiante, sino que implica otro tipo de formulaciones más complejas que moldean a los estudiantes a razonar de una forma particular. Es así como “al estudiar matemáticas, el estudiante adquiere el razonamiento lógico, la visualización espacial, el pensamiento analítico, el cálculo, el modelamiento y las destrezas para resolver problemas” (MINEDUC, 2011, p. 26). En otras palabras, el estudiante no sólo recibe conocimiento, sino que además, al aprender este

conocimiento comienzan a desplegarse diversas habilidades que son necesarias para escalar los niveles del sistema educativo.

Una vez desplegadas estas habilidades y conocimientos son utilizados no sólo en matemáticas, sino que conforman una red que se abre a diferentes materias o ramas del sistema educativo, como por ejemplo química y física. Así, las matemáticas escolares están dispuestas para desplazarse simultáneamente con otras materias, fungiendo de herramienta al momento de modelar movimientos o comportamientos de estas áreas de conocimiento.

El mundo en el que nos desenvolvemos es tridimensional. Sin embargo, a lo largo de la Educación Media los estudiantes se han visto enfrentados fundamentalmente a situaciones en las que sólo han necesitado desarrollar habilidades geométricas en el plano. Por ello, la intención fundamental de esta unidad es situar al alumno o alumna en el contexto geométrico real tridimensional, entregándole una nueva herramienta de representación del plano y del espacio, como es el modelo vectorial. Este modelo constituye hoy uno de los pilares básicos de la física y de la matemática. (MINEDUC, 2004a, p.68).

Es un discurso bastante claro y lógico, las matemáticas comenzaron a desarrollarse para modelar fenómenos de la realidad y, a su vez, requieren de ciertas habilidades necesarias para su comprensión. Entonces, ¿qué hay de malo de este discurso? ¿Por qué se habla de una promesa?

¿Qué es lo que estamos viendo?

El discurso que comienza a ser producido implica hacer más cercanas las matemáticas al estudiante, se realiza un esfuerzo por proporcionar ejercicios contextualizados, con situaciones concretas y personas específicas. Sin embargo, (Deleuze, 1994) evidenció que en realidad el hecho de resolver un problema matemático no está en cómo las matemáticas son aplicadas a la realidad, ya que el desarrollar la actividad implica la aplicaciones de reglas, implica generalizar abstracciones. Y una vez que el contexto del problema es olvidado por el estudiante, no hay algo que siga anclando la generalidad (la regla) con la realidad.

De esta manera la promesa de la geometría para ser aplicada en la realidad parece desvanecerse a medida que el estudiante avanza en los niveles escolares y el énfasis que se le va otorgando a las abstracciones comienza a aumentar. Por ejemplo, el Ministerio de Educación de Chile espera que los estudiantes puedan alcanzar un nivel último que les permita resolver problemas como los siguientes:

Cuando un alumno o alumna ha logrado este nivel, realiza actividades como las siguientes:

- ◉ Calcula el área de la superficie que está contenida entre cuatro circunferencias de radio " a " y cuyos centros son los vértices de un cuadrado de lado $2a$, usando métodos geométricos y métodos analíticos.
- ◉ Determina el número de diagonales que admite un polígono de n lados, usando técnicas combinatorias.
- ◉ Demuestra que una recta tangente a una circunferencia es perpendicular a su radio en el punto de contacto, suponiendo la no perpendicularidad y demostrando que esta negación lleva a una contradicción.
- ◉ Utiliza el axioma de congruencia para demostrar que cada ángulo exterior de un triángulo es mayor que cualquier ángulo interior no adyacente.
- ◉ Construye el pentágono regular conocido el lado mediante regla y compás o un procesador geométrico y justifica la construcción realizada.
- ◉ Deduce la ecuación vectorial de una recta y a partir de ella sus ecuaciones en forma paramétrica y cartesiana.
- ◉ Formula y verifica conjeturas acerca de qué figuras construidas sobre los lados de un triángulo rectángulo satisfacen que: la suma de las áreas de estas figuras construidas sobre los catetos es igual al área de la figura construida sobre la hipotenusa.

Figura 2. Actividades que debe resolver un estudiante en el último año de escuela (MINEDUC, 2010, p.18)

El espacio que está descrito en ese tipo de actividades no es el espacio cotidiano del estudiante, sino que es nuevo tipo de espacio, un espacio escolar, un espacio que fue restringido para que ciertas propiedades pudiesen ser aplicadas. Un espacio en el cual la educación matemática busca un realismo que es diferente de la realidad (Lundin, 2012). En este apartado precisamente se comenzará a presentar el tipo de actividades que amplían la brecha entre la percepción y la razón.

Los estudiantes deben comenzar a distanciarse de la manera en la que aprendieron a interactuar con el mundo que les rodea y empezar a matematizar el espacio. Pero, ¿es tan perversa la escuela que nos aleja de nuestros sentidos? En realidad no, tan sólo aceptamos ciertos discursos en los que un estudiante exitoso es aquel que “resuelve problemas geométricos estableciendo relaciones entre conceptos, técnicas y procedimientos de distintas áreas de la matemática. [...] Conjetura sobre la base de exploraciones realizadas con herramientas tecnológicas y verifica proposiciones geométricas mediante axiomas y demostraciones directas e indirectas” (MINEDUC, 2010, p.18).

Lo cual conlleva a plantear problemas matemáticos, contextualizados, de una forma que parece forzada y poco natural, pero que no es cuestionada, es aceptada. Para Foucault (1982) existen ciertas verdades en los discursos que reproducimos porque las creemos ciertas. No es cuestionable que la matemática es abstracta, por lo que no es difícil aceptar que la realidad escolar se presente de esta forma:

Santiago observó una araña, que estaba en un vértice de una sala cuyas dimensiones son 7 m de largo, 5 m de ancho y 3 m de alto. Más tarde, observó que se había trasladado al vértice diametralmente opuesto (Muñoz, Gutiérrez & Muñoz, 2013, p. 153).

Conllevando a que aceptemos que hay una realidad matemática –un espacio escolar–, y una realidad fuera de la matemática.

Ahora bien, este discurso tiene una intención, no es ingenuo, está produciendo ciertos efectos en los estudiantes, pero no en términos de dominación, sino que establece los parámetros bajo los cuales se debe evaluar a los estudiantes para que sean considerados como “exitosos” en matemáticas. De esta forma se conforman “tesis culturales” sobre los estudiantes deseados (Popkewitz, 2008). En otras palabras, se enuncia el tipo de persona que se quiere formar

Interesa que los estudiantes desarrollen capacidades de representación de vectores tanto en el plano como en el espacio y que puedan manejar con soltura la operatoria básica que se presenta. A través de la comprensión y utilización de esta operatoria, tendrán las herramientas que les permitirán representar rectas en el plano y el espacio, y también una diversidad de planos contenidos en el espacio. Metodológicamente, se propone trabajar inicialmente con vectores en el plano, que son fáciles de dibujar e imaginar, para luego extender la representación y la operatoria al espacio. Esto podría invitar a los estudiantes a reflexionar sobre las posibilidades de extensión a dimensiones mayores que tres. (MINEDUC, 2004a, p. 68).

Hasta el momento parece estar todo bien, ¿cuál es el problema de decir que la matemática es abstracta? Realmente ninguno, la matemática es una formalización, científicamente objetivada que modela el mundo real, por lo tanto son abstracciones. Entonces, ¿qué es lo que está mal? El espacio escolar, un espacio delimitado por las matemáticas escolares, dista de sobremanera de la realidad que podemos percibir, sin embargo, esta brecha que se abre entre ambas no se problematiza, no es cuestionada, se le resta importancia.

La escuela invita a “resolver problemas en contextos diversos: geométricos, de mediciones de alturas y distancias, incluyendo lo espacial, sin llegar a especificidades de la trigonometría esférica” (MINEDUC, 2004b, p.78). Fácilmente se podría pensar en la obviedad de esta medida, la trigonometría esférica tiene exigencias cognitivas superiores que la trigonometría plana. Una respuesta que es completamente válida, pero ahora bien, al llevar a la trigonometría a una actividad contextualizada se involucran objetos reales, medir distancias, alturas, entre otras. Pero ¿qué es lo extraño de esta situación?

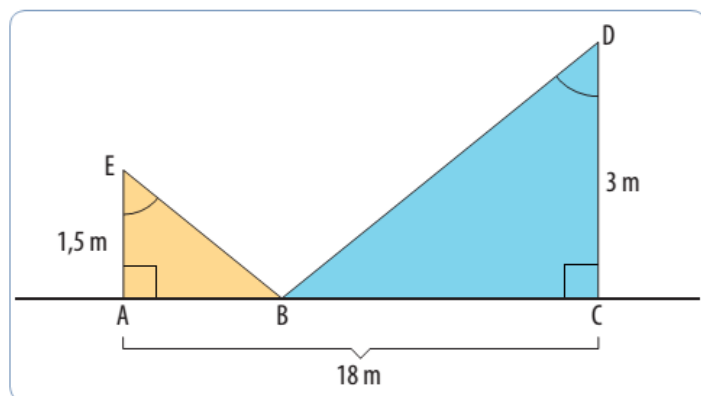


Figura 3. Imagen de libro escolar (Muñoz, Jiménez & Rupin, 2013, p. 104)

Es usual que se asuma que hay un objeto (edificio, faro, torre, etc.) que es perpendicular a la superficie de la tierra, de otra forma el teorema de Pitágoras, el teorema de Euclides y la trigonometría no tendrían sentido. No pueden existir sin un ángulo de 90° . ¿Es tan despreciable obviar la curvatura de la tierra? Qué pasaría si en lugar que presentar ese tipo de imágenes, más locales, se muestra la siguiente:

Ejemplo D

Desde una altura h sobre el nivel del mar y a orilla de la costa, se ve desaparecer un barco en el horizonte. Estimar la distancia a la que se encuentra el barco.

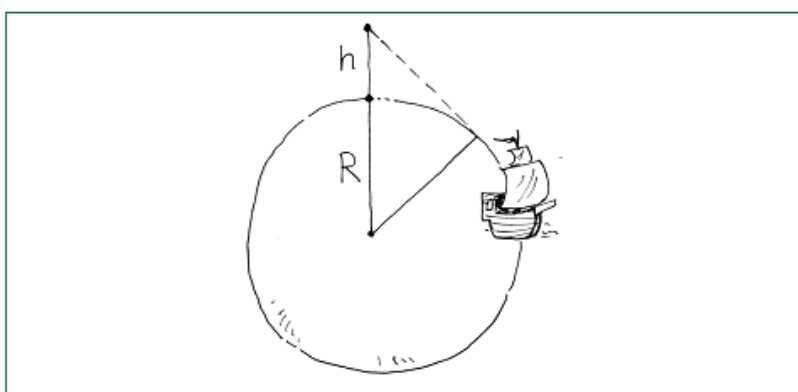


Figura 4. Ejercicio propuesto por los documentos oficiales del Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC, 2004b, p. 95).

Ya no parece tan irrelevante despreciar la curvatura de la tierra, nuestro ojo nos están señalando que no puede formarse un ángulo de 90 grados. Visualmente no tiene lógica, pero aun así debemos aceptarlo porque de otra forma no se pueden aplicar los conocimientos matemáticos

escolares, simplemente aceptamos que localmente se forma un ángulo recto, aceptamos el espacio escolar. Insisto nuevamente, ¿qué hay de malo en aceptar que la matemática escolar vive en un espacio escolar?

Puede que algunos estudiantes tengan problemas al suponer que, para efectos de la actividad, la tierra es plana, vale decir, sin curvatura. Quizá algunos otros simplemente lo acepten, pero hay algo más que se invisibiliza en este tipo de situaciones, algo imperceptible que permanece oculto, esperando pacientemente que ningún estudiante se dé cuenta de ello. Observemos los triángulos que se forman en la figura de arriba.

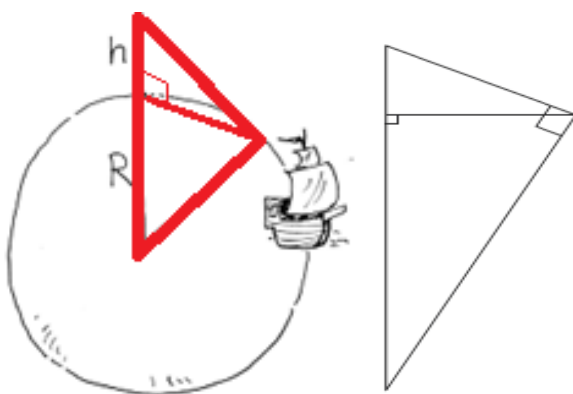


Figura 5. Razonamiento basado en un espacio escolar

¿Qué pasa si a ese triángulo resultante le agregamos un valor en particular que se obtiene a partir de la información explícita en la imagen.

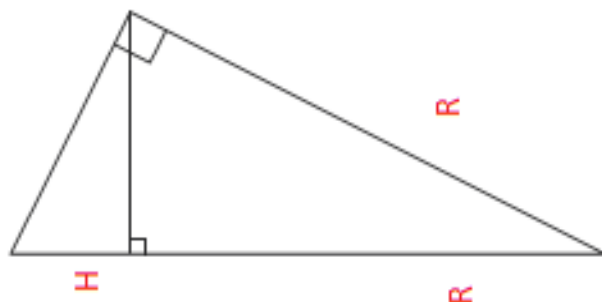


Figura 6. Triángulo resultante

De pronto ambos, cateto e hipotenusa de uno de los triángulos, tienen el mismo valor, el radio de la tierra. Por lo tanto, la percepción y los juicios visuales no pueden ser separados del razonamiento lógico que promueven las abstracciones matemáticas.

Conclusión

Aparentemente la escuela enseña a los estudiantes un conocimiento útil y altamente valorado, que les brindará herramientas que les permitan desenvolverse exitosamente ante cualquier situación del mundo real. Las matemáticas escolares permiten que el sujeto se apropie de una forma particular de ver el mundo, *“inserts subjects into the forms of thinking and acting needed for people to become the ideal cosmopolitan citizen”* (Valero, García, Camelo, Mancera & Romero, 2012, p.4). Como consecuencia, el estudiante ideal es aquel que puede resolver

problemas razonando de manera lógica, alguien que pueda modelar matemáticamente una situación cualquiera de la vida real.

Es así como este estudiante deseado debe olvidarse de algunos de sus sentidos, olvidarse que puede ver, por ejemplo. Deben entrenarse para ser capaces de utilizar modelos y deducciones geométricas, y pensar la realidad en términos de XYZ o de un espacio escolar que es plano. Donde se pierde toda conexión entre la matemática y el mundo. ¿Acaso la escuela sigue pensando que la tierra es plana? Claro que no, pero necesita que la tierra sea plana.

The concept of space to be reconstructed in the students' understanding is that of a rational, referential space with fixed points in two or three dimensions. It is assumed that the conceptual development of the child will lead to an internal and abstract representation which will contribute to making a decontextualized child, freed from the practical capacities of acting with objects in space, particularly of those spaces where everyday life occurs (Valero et al., 2012, p.7).

El problema de la geometría escolar no es sobre el tipo de geometría que está inmersa, ya sea Euclidiana, Cartesiana, vectorial, sino que en el tipo de efectos que ésta tiene en los estudiantes. A modo de ejemplo, estudiar estos problemas desde una visión política, construida a partir de Foucault, permitiría afirmar que hay relaciones de poder que inciden en la geometría escolar y que, precisamente, “*el problema del poder de la educación matemática es el problema de cómo y con qué tecnologías de gobierno de la población y del yo, las matemáticas escolares, como parte del currículo escolar, generan los tipos de sujetos históricos y culturales de un tiempo determinado*” (Valero & García, 2014, p.5). Claramente esto abre un amplio campo que merece ser investigado.

Referencias

- Andrade, M., & Montecino, A. (2011). La problemática de la tridimensionalidad y su representación en el plano. In A. Ruiz & E. Mancera (Eds.), *Proceedings of 13a Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM-IACME)*. Recife, Brasil.
- Deleuze, G. (1994). *Difference and repetition* (P. Patton, Trans.): Columbia University Press.
- Foucault, M. (1982). The subject and power. *Critical inquiry*, 777-795.
- Gil, M. (2011). Poder, verdad y normalidad: genealogía del hombre moderno a través de la lectura de M. Foucault. *Cuaderno de Materiales* (23).
- Hardy, L. H., Rand, G., & Rittler, M. (1951). Investigation of visual space: The blumenfeld alleys. *A.M.A. Archives of Ophthalmology*, 45(1), 53-63.
- Kollosche, D. (2014). *Gesellschaft, Mathematik und Unterricht. Ein Beitrag zum soziologisch-kritischen Verständnis der gesellschaftlichen Funktionen des Mathematikunterrichts*. (Ph.D.), Universität Potsdam Germany.
- Kvasz, L. (1998). History of Geometry and the Development of the Form of its Language. *Synthese*, 116(2), 141-186.
- Lundin, S. (2012). Hating school, loving mathematics: On the ideological function of critique and reform in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 80(1-2), 73-85. doi: 10.1007/s10649-011-9366-6
- MINEDUC [Ministry of Education of Chile]. (2004a). *Matemática. Programa de Estudio. Cuarto Año Medio*. Santiago: MINEDUC.

- MINEDUC [Ministry of Education of Chile]. (2004b). *Matemática. Programa de Estudio. Tercer Año Medio*. Santiago: MINEDUC.
- MINEDUC [Ministry of Education of Chile]. (2010). *Mapas de Progreso del Aprendizaje. Geometría*. Santiago: MINEDUC.
- MINEDUC [Ministry of Education of Chile]. (2011). *Matemática. Programa de Estudio. Segundo Año Medio*. Santiago: MINEDUC.
- Muñoz, G., Gutiérrez, V., & Muñoz, S. (2013). *Texto Educación Matemática 4, Educación Media. Texto del estudiante. Edición especial para el Ministerio de Educación* (R. Hidalgo Ed.). Santiago: Santillana.
- Muñoz, G., Jiménez, L., & Rupin, P. (2013). *Texto Educación Matemática 2, Educación Media. Texto del estudiante. Edición especial para el Ministerio de Educación* (F. Muñoz Ed.). Santiago: Ediciones SM Chile.
- Popkewitz, T. S. (2008). *Cosmopolitanism and the age of school reform: science, education, and making society by making the child*. New York: Routledge.
- Ray, C. (1991). *Time, Space and Philosophy*. London, GBR: Routledge.
- Suppes, P. (1977). Is visual space Euclidean? *Synthese*, 35(4), 397-421.
- Valero, P. (2008). "Discourses of power in mathematics education research: Concepts and possibilities for action". *PNA*, 2(2).
- Valero, P., & García, G. (2014). Matemáticas escolares y el gobierno del sujeto moderno [School mathematics and the governing of the Modern subject]. *BOLEMA*, 28(49), 491-515. doi: DOI: <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n49a02>
- Valero, P., García, G., Camelo, F., Mancera, G., & Romero, J. (2012). Mathematics education and the dignity of being: original research. *pythagoras*, 33(2), 1-9.
- Woods, A., & Grant, T. (2007). *Reason in Revolt; Marxist Philosophy and Modern Science*: Aakar Books.

Habilidades inherentes al pensamiento variacional de estudiantes de nuevo ingreso a la universidad

Nelson Javier **Rueda** Rueda
 Universidad Industrial de Santander
 Colombia
javi_rc20@hotmail.com
 Sandra Evely **Parada** Rico
 Universidad Industrial de Santander
 Colombia
saevpa@hotmail.com
 Jorge Enrique **Fiallo** Leal
 Universidad Industrial de Santander
 Colombia
jfiallo@uis.edu.co

Resumen

El presente documento habla de los principios y metodología de una investigación en curso que pretende caracterizar habilidades inherentes al pensamiento variacional, de estudiantes participantes de un curso de precálculo en el que se problematizan y se exploran fenómenos variacionales por medio de tecnologías digitales. La investigación se desarrolla en seis fases, dentro del marco de un curso de precálculo dirigido a estudiantes de primer ingreso a la universidad. Para efectos de los elementos teóricos de la investigación, hallamos la necesidad de definir habilidades, habilidades cognitivas y habilidades cognitivas en matemáticas. A la fecha de escritura de este documento se ha realizado un análisis descriptivo del desempeño en la asignatura Cálculo Diferencial de los estudiantes que han tomado el curso de precálculo, encontrando que este puede ser un factor determinante para mejorar el desempeño académico del estudiante así como puede llegar a potenciar habilidades inherentes al pensamiento variacional.

Palabras clave: Cálculo diferencial, habilidades, fenómenos de variación, pensamiento variacional, enseñanza mediada por tecnología.

Abstract

This paper discusses the principles and methodology of an ongoing research that aims to characterize the inherent variational thinking skills of participant students in a precalculus course where variational phenomena are problematized and explored through digital technologies. The research is conducted in six phases, within the framework of a precalculus course aimed at freshmen to college. For purposes of the theoretical elements of research, we found the need to define skills, cognitive skills and cognitive skills in mathematics. At the time of writing this document, a descriptive analysis of performance on the Differential Calculus course for students

who have taken the course precalculus has been realized, finding that this can be a determining factor for improving student achievement and can get to enhance thinking skills inherent variational.

Key words: Differential calculus, skills, phenomena of variation, variational thinking, technology-mediated learning.

Introducción

El curso de cálculo diferencial en gran cantidad de establecimientos de educación superior se ha caracterizado por ser uno de los que mayores problemáticas presentan al estudiante, siendo este un fenómeno mundial tal y como lo expresan Dávila, Flores, García y Valencia (2008); esto debido, entre otras múltiples causas, a la falta de presaberes lo suficientemente sólidos que les permita comprender los conceptos fundamentales que le son presentados en este curso.

Respecto a esta situación Hitt (2005) menciona que el cálculo está compuesto por una cantidad de subtemas que están conectados de tal manera que el déficit en el manejo de alguno de ellos no permite un desarrollo profundo de los conceptos asociados a fenómenos de variación y acumulación, mismos que actualmente estudiamos en los cursos de cálculo diferencial y cálculo integral.

Además de esto, tal y como lo mencionan Fiallo y Parada (2012) a pesar de que los documentos orientadores del currículo en matemática tanto a nivel nacional como internacional hacen énfasis en el desarrollo de procesos como la resolución de problemas, la modelación, la comunicación, entre otros; el desarrollo de los cursos en las instituciones de educación media y básica centra el proceso de enseñanza en el aprendizaje de contenidos y algoritmos. Las causales anteriores llevan a afectar sobremanera el desempeño académico de los estudiantes en un curso de cálculo diferencial de primer semestre de la educación superior.

En la Universidad Industrial de Santander (UIS), contexto en el que se desarrolla el estudio que aquí se comunica, profesores y directivas institucionales han planteado y llevado a cabo distintas alternativas para afrontar dicha problemática, Botello (2013) menciona las que siguen:

- Prueba piloto de Cálculo I, desarrollada durante el año 2003 y fundamentada en la resolución de problemas mediante un trabajo colaborativo.
- Seis horas semanales de clase directa, desarrollada durante el año 2004.
- Unificación del plan de estudios, que se empezó a desarrollar desde el año 2009 y que aún se viene desarrollando.

Parada (2012) destaca que además de las alternativas mencionadas existe la necesidad del diseño de alternativas curriculares tanto preventivas como remediales. Una de las alternativas preventivas sugeridas por la misma autora es la necesidad de la creación de un curso de precálculo que coadyuve en el desarrollo de procesos matemáticos que permitan comprender fenómenos de variación, los cuales serán objeto de estudio en el curso de Cálculo Diferencial. En muchas universidades se ha planteado la realización de un curso de precálculo enfocados en el repaso de conceptos (conjuntos, álgebra, ecuaciones, inecuaciones, trigonometría, geometría analítica, entre otros), procedimientos y algoritmos que se creen necesarios para este curso.

Contexto de la investigación

Para el momento en que se presenta este escrito, se han puesto en marcha tres versiones de un curso de precálculo en la UIS, el cual ha estado dirigido a 300 estudiantes de nuevo ingreso de

las carreras de Ingeniería y Ciencias los cuales fueron seleccionados para realizar el curso por su bajo puntaje en el área de Matemáticas de las Pruebas Saber 11¹.

El curso de precálculo del cual venimos hablando, y del cual se desprende todo nuestro trabajo de campo, tiene características diferenciadas de otros cursos tradicionales: Fiallo y Parada (2012) explican que el curso de precálculo de la UIS tiene como propósito desarrollar en los estudiantes habilidades para comprender fenómenos de variación y resolver problemas en los que éstos se estudien. Básicamente, el curso está basado en tres criterios: i) problematizar mediante situaciones contextualizadas los objetos matemáticos de estudio del cálculo; ii) explorar fenómenos de variación con el apoyo de las tecnologías digitales y iii) comunicar estrategias e interpretaciones asociadas a los fenómenos de variación. Así mismo, todas las sesiones de trabajo se desarrollan mediante las siguientes fases:

- Información y exploración libre: Planteamiento de un problema que el estudiante debe abordar desde sus conocimientos escolares, de manera intuitiva y buscando una aproximación a la solución.
- Socialización de resultados: Discusión en grupo de las estrategias utilizadas para la solución del problema planteado, aclaración de dudas y promoción de la necesidad de estrategias y soluciones matemáticamente válidas al problema planteado.
- Exploración dirigida: Exploración de un archivo de Geogebra y orientación guiada por preguntas para que el estudiante vaya encontrando respuestas al problema, plantee conjeturas y justifique matemáticamente los resultados percibidos en las diferentes representaciones que le ofrece el software.
- Explicación: Debate, discusión y reflexión de las ideas expuestas de manera que se llegue al objetivo de la actividad que es la construcción del conocimiento; en esta fase el papel del docente es la promoción del debate y la participación de los estudiantes.
- Tarea retadora: Planteamiento de una situación contextualizada donde el estudiante tiene que aplicar lo aprendido pero no de manera mecánica.

A partir de la creación del curso de precálculo, aunado con otras estrategias curriculares tanto preventivas como remediales, la UIS, a través de la Vicerrectoría Académica ha reportado una importante disminución de la reprobación de la asignatura Cálculo Diferencial. Las estadísticas muestran que antes del desarrollo de estas alternativas el porcentaje de reprobación era cercano al 70% mientras que los últimos estudios sitúan esta cifra en un 54%. Dichos resultados, desde el punto de vista cuantitativo, llevan a pensar que las estrategias planteadas y el apoyo de la comunidad académica están contrarrestando la problemática inicial, no obstante hace falta valorar la situación con mayor profundidad y analizar el impacto cognitivo que se ha logrado mediante las alternativas implementadas.

En particular, será del interés de quien escribe responder a la siguiente pregunta de investigación: ¿Qué habilidades cognitivas inherentes a la variación se potencian mediante las actividades que se realizan en el curso de precálculo en estudiantes de primer ingreso a la Universidad Industrial de Santander? Para responder a dicha inquietud se está construyendo un

¹ En Colombia todos los estudiantes de último grado de bachillerato deben presentar las pruebas Saber 11 que realiza el Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior (ICFES) pues es un requisito para el ingreso a la Educación Superior en el país.

marco conceptual que nos permita comprender todos los aspectos que se interrelacionan en el estudio, estos son: habilidades cognitivas, pensamiento variacional y desarrollo de procesos matemáticos mediados por tecnologías digitales.

Aspectos teóricos y conceptuales

Como primera medida se realiza una revisión de la literatura donde se reportan resultados de investigación con respecto a la implementación de cursos de precálculo en diferentes universidades, de dicha literatura citamos a Cantú, Arenas y Flores (2012) quienes realizan un estudio estadístico acerca del impacto del curso de precálculo en el desempeño de los estudiantes en los cursos de Cálculo Diferencial e Integral en la Universidad de Monterrey. Los sujetos de estudio son en su mayoría estudiantes de nuevo ingreso a la universidad de las carreras de Ingenierías y Licenciaturas, el propósito del mismo es probar la necesidad de un examen de pre-requisitos y evaluar el impacto del curso de precálculo en el desempeño de los estudiantes en los cursos de Cálculo. Como resultado de dicho estudio las investigadoras referencian que existe una correlación significativa entre los resultados obtenidos en el curso de precálculo y el resultado en el curso de Cálculo.

Respecto a la enseñanza del cálculo mediante la resolución de problemas y el uso de la tecnología, mencionamos los trabajos realizados por Luis Moreno Armella, en los que habla de la incorporación de las Tecnologías Digitales en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. En Moreno (2001) se destaca que la mediación de los instrumentos toca un punto sensible en la formación de las estructuras cognitivas del ser humano y en particular que las herramientas computacionales modifican profundamente la naturaleza de las exploraciones y su relación con la sistematicidad del pensamiento matemático, permitiendo crear modelos manipulables de los objetos conceptuales matemáticos.

De la misma forma será referente el artículo de Abarca (1999), quien realiza una investigación sobre la enseñanza del cálculo diferencial e integral mediante la resolución de problemas, basada en un híbrido entre las estrategias que plantea Schoenfeld (1985) y el modelo propuesto por Polya (1945); encontrando que la resolución de problemas inherentes a la carrera que cursan los estudiantes es un factor motivador tanto para la adquisición de conocimientos como para el buen desempeño académico.

Se tomará también en cuenta la investigación de Álvarez, Cuicas, Casadei y Debel (2007) sobre el desarrollo de habilidades del pensamiento y el mejoramiento del aprendizaje de la asignatura Matemática II, mediante el empleo de estrategias instruccionales basadas en el uso de software matemático, la cual reporta desde un punto de vista netamente estadístico, la relación existente entre estas estrategias y la obtención de mejoras en el conocimiento de la asignatura en la población de estudiantes.

Desde la perspectiva del desarrollo de habilidades cognitivas serán referentes para la presente investigación el artículo de García, Coronado y Montealegre (2009) donde se realiza un análisis teórico sobre la formación y el desarrollo de competencias matemáticas, enmarcadas por una visión contemporánea de la Didáctica de la Matemática y un enfoque sociocultural; el estudio de casos presentado por Ramos, Herrera y Ramírez (2010) sobre el desarrollo de habilidades cognitivas mediante la implementación de un proyecto de aprendizaje móvil, en el cual se trata de identificar como se promueve el desarrollo de habilidades cognitivas, además de mencionar los tres momentos que se deben efectuar para la adquisición de las mismas y se hace una taxonomía de habilidades.

También asociado al desarrollo de habilidades cognitivas, serán referentes la tesis de Maestría de Estrada (1999) que está focalizada en la habilidad de modelación en el tratamiento matemático de situaciones problema en diversas áreas del conocimiento, las acciones fundamentales que estructuran dicha habilidad y se plantea una secuencia metodológica que contribuye al desarrollo más efectivo de dichas acciones; encontrando que se puede contribuir mediante dicha propuesta metodológica a la motivación de los alumnos y a la interiorización de la relación entre las matemáticas y otras disciplinas. Por último la tesis doctoral de Gilar (2003) hace una caracterización de habilidades cognitivas y habla sobre las fases de adquisición de las mismas, presentando como conclusión que la organización cualitativa del conocimiento es un factor preponderante para dicha adquisición, aunque destaca también factores no cognitivos como la motivación y el contexto de aprendizaje.

¿Qué entendemos por habilidades cognitivas?

Para alcanzar el objetivo de nuestra investigación: caracterizar habilidades inherentes al pensamiento variacional, de estudiantes participantes de un curso de precálculo en el que se problematizan y se exploran fenómenos variacionales por medio de tecnologías digitales, nos vimos en la necesidad de definir habilidades, habilidades cognitivas, habilidades cognitivas en matemáticas. Al respecto encontramos que desde la perspectiva de la Psicología y la Psicopedagogía, Cañedo (2008) menciona que las habilidades son un “sistema de acciones y operaciones dominado por el sujeto que responde a un objetivo. Es la capacidad adquirida por el hombre, de utilizar creadoramente sus conocimientos y hábitos tanto en el proceso de actividad teórica como práctica” (p.21), esta definición la encontramos acorde a lo que se quiere lograr con las actividades del curso precálculo.

Para hablar de las habilidades cognitivas objeto de este estudio citamos a Herrera (2001) quien define las habilidades cognitivas de la siguiente forma:

Hablar de habilidades cognitivas, aunque sea brevemente, nos remite al ámbito de las aptitudes e implica, en primer lugar, introducirnos en el estudio del pensamiento, como proceso o sistemas de procesos complejos que abarcan desde la captación de estímulos, hasta su almacenaje en memoria y su posterior utilización, en su evolución y su relación con el lenguaje; abordar el estudio de la inteligencia y su evolución, como herramienta básica del pensamiento; y profundizar en el estudio del aprendizaje, como cambio relativamente estable del comportamiento producido por la experiencia (p. 1).

A su vez, para la caracterización de las habilidades cognitivas adquiridas, desarrolladas o potenciadas en el estudiante mediante las actividades del curso de precálculo podemos citar la perspectiva de Gilar (2003) quien afirma que el estudio de las habilidades cognitivas tiene sus raíces en el estudio de la solución de problemas propios de cada área o nivel cultural.

Producto de dichas revisiones se ha llegado a conceptualizar y contextualizar para el campo de la educación matemática y de la investigación planteada, lo siguiente:

- Habilidad: consideraremos aquí que una habilidad puede ser un conjunto de acciones secuenciales coherentes y coordinadas realizadas por un individuo, en la consecución de un objetivo. Estas acciones están mediadas por los conocimientos previos y pueden desarrollarse mediante la práctica.
- Habilidad cognitiva: consiste en las operaciones mentales que resultan de la coordinación de acciones tendientes a la consecución de un objetivo ligado a una rama del conocimiento institucionalizado, que podemos llamar saber. De la misma forma consideraremos habilidad

cognitiva las acciones que un individuo puede desarrollar para interactuar con un objeto que el mismo puede identificar como objeto de estudio.

¿Qué comprende el pensamiento variacional y cómo se desarrolla?

En Colombia, en los Estándares curriculares de Matemáticas (MEN, 2006) se describe el pensamiento variacional en los siguientes términos:

[...] este tipo de pensamiento tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos.

Uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir desde la Educación Básica Primaria distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, en la Educación Media, del cálculo diferencial e integral. Este pensamiento cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas (p. 66).

Coincidimos con esta definición dado que centra el énfasis en la resolución de problemas que involucren el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos; lo que implica como lo dice (Vasco, 2006) pensar de forma dinámica, relacionando variables y magnitudes a través de diversos modelos.

Por otro lado, Vasco (2006) menciona que el pensamiento variacional requiere del pensamiento métrico y el pensamiento numérico si las mediciones superan el nivel ordinal. Requiere también el pensamiento espacial si una o varias variables son espaciales. No obstante, nosotros consideramos que el pensamiento variacional (cuando los estudiantes ingresan a la educación superior) implica que éstos a su vez hayan desarrollado cierto nivel en sus pensamientos métrico, numérico, geométrico e incluso aleatorio, y ya desde la actividad matemática que se realiza para resolver problemas de variación reconozca y transite por las nociones de cada pensamientos e identifique situaciones propias de cada contexto (el contexto numérico, el métrico, el geométrico y el aleatorio).

No obstante, parece importante precisar los procesos matemáticos que están inmersos dentro de ese gran proceso de resolución de problemas con los cuales los estudiantes puedan: i. razonar; ii. comunicar; iii. modelar (representar); iv. elaborar, comparar y ejercitar procedimientos. Entendemos entonces la necesidad de engranar todos estos procesos (engranaje entendido como el mecanismo utilizado para transmitir potencia y dinamismo de un proceso a otro y desarrollar la actividad matemática propia del pensamiento variacional) para lograr caracterizarlos como habilidades inherentes al pensamiento variacional, inmersas en el uso de las tecnologías digitales.

Aspectos metodológicos

La investigación, de corte fenomenológico y tipo experimental, sigue metodologías tanto cuantitativas en su fase inicial como cualitativas en las fases restantes. El proceso metodológico está organizado hasta el momento en seis fases que se describen a continuación:

Fase 1. Estudio preliminar

Esta fase corresponde a un análisis descriptivo del rendimiento académico, en el curso de Cálculo Diferencial de los estudiantes que han participado en los cursos de precálculo que se han realizado desde el inicio de esta investigación (2 semestres).

Además de aportar posible información relevante acerca de los procesos realizados o las habilidades adquiridas por los estudiantes participantes de los cursos anteriores, se quería observar, más allá del reporte netamente estadístico en términos de deserción y reprobación de la asignatura Cálculo Diferencial, la existencia de otras posibles variables relacionadas a tener en cuenta al momento de realizar el análisis de los datos recogidos en el curso de precálculo.

Fase 2. Caracterización del curso de precálculo

Caracterización del curso de precálculo que realiza la Escuela de Matemáticas, en coordinación con el programa ASAE y el Sistema de Apoyo a la Excelencia Académica. En esta etapa se revisará cada una de las actividades planteadas en cada sesión del curso de precálculo y se asociará con la habilidad que se considera se puede desarrollar con ésta.

Fase 3. Trabajo de campo

Esta fase consta de la recolección y sistematización de datos desde las siguientes perspectivas:

- Una mirada al docente, de cada una de las sesiones correspondientes a un curso se videograba a los más a dos profesores para posteriormente analizar las producciones de los estudiantes.
- Una mirada a los estudiantes, se seguirá a algunos estudiantes activos en un curso de cálculo que hayan participado en el curso de precálculo para valorar las habilidades que posiblemente desarrolló gracias a su participación en éste.
- Entrevistas complementarias a alumnos para contrastar hallazgos.

Fase 4. Análisis de datos fase 3

En esta etapa se caracterizarán las habilidades en términos de procesos.

Fase 5. Caracterización de habilidades cognitivas

Caracterización de habilidades cognitivas inherentes a la noción de variación que pueden potenciarse mediante la resolución de problemas mediados por tecnologías digitales, en un curso de precálculo con estudiantes de nuevo ingreso a la Universidad Industrial de Santander.

Fase 6. Reporte de Resultados.

Se espera que al final del proceso se pueda consolidar una estructura curricular del curso de precálculo que se ofrecerá a los estudiantes de nuevo ingreso a la UIS, con el fin de que éstos consoliden habilidades del pensamiento variacional que les permite un buen desempeño en el curso de Cálculo Diferencial.

Primeros resultados

A la fecha de escritura de este documento se ha realizado la primera fase de la investigación, la cual corresponde a un análisis descriptivo del rendimiento académico en la asignatura Cálculo Diferencial, de los estudiantes que han participado en el curso de precálculo.

Se presenta a continuación una tabla comparativa con los resultados académicos obtenidos por los estudiantes que han participado en los cursos de precálculo, en la asignatura Cálculo Diferencial; en comparación con quienes no participaron de dicho curso.

Cabe aclarar que aquellos estudiantes que fueron seleccionados para participar del curso de precálculo, por su bajo puntaje en el área de Matemáticas de las Pruebas Saber 11 que realiza el ICFES, eran los que presentaban una mayor probabilidad de tener un rendimiento bajo en la asignatura Cálculo Diferencial.

Tabla 1

Comparación porcentual del desempeño académico de los estudiantes en la asignatura Cálculo Diferencial respecto a su participación en el curso de precálculo. Primer semestre de 2013

Participación en el curso de precálculo	Condición académica en la asignatura Cálculo Diferencial		
	Canceló la asignatura ²	No aprobó	Si aprobó
Si participó	13%	64%	23%
No participó	36%	36%	28%

Tabla 2

Comparación porcentual del desempeño académico de los estudiantes en la asignatura Cálculo Diferencial respecto a su participación en el curso de precálculo. Segundo semestre de 2013

Participación en el curso de precálculo	Condición académica en la asignatura Cálculo Diferencial		
	Canceló la asignatura	No aprobó	Si aprobó
Si participó	13%	48%	39%
No participó	12%	39%	49%

Teniendo en cuenta los datos presentados en las tablas anteriores, además del análisis cualitativo que se desprende de ellos, se pueden referir algunas conclusiones para la fase uno de la presente investigación:

- Los estudiantes que participaron en el curso de precálculo eran en general aquellos que inicialmente se detectaron en alto riesgo de reprobación de la asignatura Cálculo Diferencial, por lo que se considera que el curso de precálculo fue un factor determinante para que un alto porcentaje de estos estudiantes aprobaran la asignatura.
- El porcentaje de estudiantes que participaron en el curso de precálculo y que cancelaron la asignatura fue pequeño en comparación con el porcentaje de cancelación de los estudiantes que no participaron en el curso.

Adicionalmente, el primer autor de este documento ha sido profesor de los cursos de precálculo de manera que ha podido observar que los procesos comunicativos y de representación de los estudiantes que han participado en dichos cursos, se han visto potenciados por medio de

² El proceso de cancelación de asignatura consiste dar de baja la asignatura de manera que la misma no sea tomada en cuenta para efectos de notas, promedio, etc., y se puede realizar hasta la sexta semana de clases, habiendo presentado la primera evaluación de la asignatura.

las actividades realizadas. Dichas observaciones, realizadas a priori, esperan ser confirmadas o refutadas al final de esta investigación.

Referencias y bibliografía

- Abarca, N. (1999). *La enseñanza del cálculo diferencial e integral mediante la resolución de problemas, una propuesta motivadora*. Instituto de Investigaciones tecnológicas, tecnociencia universitaria, Bolivia
- Botello, C. (2013). *Procesos de seguimiento y acompañamiento académico a estudiantes de cálculo diferencial: un aula experimental para profesores de matemáticas en formación* (Tesis de maestría en educación matemática). Universidad Industrial de Santander, Escuela de matemáticas, Bucaramanga.
- Cantú, I., Arenas, R., & Flores, M. (2012). Impacto de pre-cálculo en cálculo. *NÚMEROS, Revista de Educación Matemática*, 80, 135-144.
- Cañedo, C. (2008). *Fundamentos teóricos para la implementación de la didáctica en el proceso enseñanza-aprendizaje*. Universidad Carlos Rafael Rodríguez, Cienfuegos
- Dávila, G., Flores, R., García, M., & Valencia, M. (2008). *Fundamentos del cálculo*. Sonora: Editorial Garabatos.
- Fiallo, J., & Parada, S. E. (2012) *Actividades para el desarrollo del pensamiento variacional de estudiantes que ingresan a la universidad*. Universidad Industrial de Santander.
- García, B., Coronado, A., & Montealegre, L. (2011). *Formación y desarrollo de competencias matemáticas: una perspectiva teórica en la didáctica de las matemáticas*. *Revista Educación y Pedagogía*, 23(59), 159-175.
- Gilar, R. (2003). *Adquisición de habilidades cognitivas: factores en el desarrollo inicial de la competencia experta* (Tesis Doctoral). Universidad de Alicante, Alicante.
- Herrera, F. (2001). *Habilidades Cognitivas*. Notas del departamento de Psicología Evolutiva y de la educación. Universidad de Granada, España
- Hitt, F. (2005). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. En J. Cortés, & F. Hitt (Eds.), *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza* (pp. 81-107). Morelia: Morevallado Editores.
- Laorden, C., García, E., & Sánchez, S. (2005). Integrando descripciones de habilidades cognitivas en los metadatos de los objetos de aprendizaje estandarizados. *Revista de Educación a Distancia*.
- Moreno, L. (2001). *Instrumentos matemáticos computacionales. Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia*, 81-98.
- Parada, S. E. (2012). *Una estructura curricular para atender la problemática relacionada con el curso de Cálculo I en la Universidad Industrial de Santander* (Documento interno no publicado de la Escuela de Matemáticas de la UIS). Bucaramanga.

Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde una visión de construcción social

David **Zaldívar** Rojas

Centro Regional de Formación Docente e Investigación Educativa de Sonora

México

jdzaldivar@crfdies.edu.mx

Resumen

La presente comunicación discute la interpretación de gráficas del movimiento por parte de ciudadanos en actividades extra-escolares. Se realizan análisis desde una perspectiva de construcción social del conocimiento matemático, donde el énfasis está en las justificaciones funcionales. Es decir, no se atienden únicamente los registros de representación, sino a la *función* que tienen esas gráficas que se generan bajo situaciones de modelación del movimiento. La evidencia empírica se conforma bajo un mecanismo social de resignificación que involucra una categoría de conocimiento que convino llamarle el *cotidiano del ciudadano*. Dicha categoría expresa formas culturales de saberes asociadas al uso de las gráficas, pero que se encuentran *opacas* ante una matemática escolar centrada en la algoritmia. Se demuestra que al problematizar la variación y la tendencia en las actividades, la gráfica se resignifica progresivamente a partir de categorías funcionales de la misma, como son las trayectorias o las curvas de comportamiento global.

Palabras clave: cotidiano del ciudadano, usos de las gráficas, resignificación, movimiento, divulgación.

Introducción y planteamiento del problema

En las sociedades actuales, pocos dudarían de la importancia que reviste la educación en matemáticas en la conformación de los sistemas políticos, industriales, científicos y tecnológicos de nuestros tiempos. Principalmente, la importancia conferida a su enseñanza radica en una consigna que tiene que ver con la formación de ciudadanos críticos y preparados en las competencias necesarias para transformar su realidad de manera acorde a una visión científica, tecnológica, integrada y racional de la misma (Brenner & Moschkovich, 2002).

Sin embargo, la escuela y la educación no avanzan al mismo ritmo que los pormenores científicos y tecnológicos actuales. Por ejemplo, se usan las mismas posturas sobre lo que debería significar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, al igual que en épocas pasadas; salvo “modas” de “nuevos” paradigmas que permean los planes, programas y cada reforma educativa. Sin embargo, la constante es una demanda sobre que la matemática aprendida en la escuela debe responder a la realidad y ser funcional, es decir, que permita resolver problemas de la vida cotidiana de las personas que se están formando. Sin embargo, la relación entre la *realidad* y la *matemática escolar*, es la que resulta problemática.

Afirmamos que la enseñanza, el aprendizaje y la manera en la que se conforman los discursos escolares alrededor de las matemáticas transcurren, actualmente, sin considerar la

realidad de las personas. Se constituyen discursos alrededor de una idea centrada en una difusa relación entre la realidad y la matemática escolar como un problema de *transferencia* únicamente. Se asume que de manera “natural” los conocimientos que la escuela *transmite* a los estudiantes, necesariamente se traducen en un conocimiento funcional para los primeros, es decir, que los estudiantes desarrollan un pensamiento matemático que permite resolver problemas del *día a día*. Esto ocasiona que la postura sobre la realidad de los estudiantes que vive en el discurso matemático escolar (dME) se considera únicamente en términos pedagógicos, es decir, como los *conocimientos previos*, el *sentido común* y las *experiencias pasadas*, lo cual parece ser suficiente para impregnar de realidad la enseñanza de la matemática escolar.

Justo la investigación que se propone, problematiza la relación entre la realidad y la matemática escolar al asumir que no existe un *diálogo* entre estos dos escenarios de conocimiento. Es decir, en la conformación del dME no importa entender las condiciones sociales de producción del conocimiento matemático en escenarios diferentes al escolar, sino que se asume que la inserción de los *conocimientos previos* de los estudiantes en el proceso de aprendizaje es suficiente para dotar al discurso de funcionalidad. Lo anterior da lugar a trabajos que proponen metodologías de enseñanza basados en la aplicación de prácticas cotidianas no comunes dentro del salón de clases, como por ejemplo, la discusión, el debate o el consenso (Rodrigo, 1997). Sin embargo, el énfasis principal se encuentra en el desarrollo de contenidos y en la instrucción; donde lo previo, lo cotidiano, lo implícito o lo común se presenta muchas veces como una fuente de saberes que fueron recogidos supuestamente de la experiencia de los estudiantes, pero “errónea” o “alejada” de lo socialmente aceptado en lo escolar, por lo que deben ser sustituidos o en la medida de lo posible “avanzar” hacia la formalización. De esta manera, el discurso Matemático Escolar (dME) se convierte en lo que “debe” considerarse como conocimiento matemático a expensas de que la instrucción escolar debe proveer un conocimiento funcional.

La crítica que se plantea tiene que ver con la manera en la cual el dME se constituye, al brindar evidencia y datos sobre *formas culturales de saberes que deja de lado y opaca el dME pero que participan en otros ámbitos de la actividad humana*, al encontrarse contenidas en estructuras y argumentaciones no convencionales, tradicionales en un sentido clásico y que no están consideradas dentro del discurso por distanciarse de lo “formal” como elemento clave de los objetos matemáticos y su aprendizaje. Por ejemplo, cuando la atención se enfoca en el

desarrollo de algoritmos relacionados con el cociente $m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$ para explicar la noción de

derivada en un curso de Cálculo, se privilegian significados únicamente relacionados con el

límite de dicho cociente, expresado en la siguiente manera: $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$. Sin

embargo, esta centración en los conceptos implica una “arista” de la derivada, lo cual opaca otros procedimientos y significados asociados a la misma, pero más aún, las argumentaciones que los estudiantes pudieran realizar de dicha relación. No se reconoce que la derivada adquiere un nuevo estatus y significados si se ancla a procedimientos donde la *situación de predecir la posición de un móvil* cuando se conoce su posición inicial y la variación en ese instante se pone en funcionamiento (Cordero, 2008).

De esta manera, los resultados que se ponen a discusión pretenden llamar la atención hacia aquellos saberes que se encuentran en el *cotidiano del ciudadano* pero que son opacos en el

dME, puesto que éste se conformó excluyendo aquello que no tenga la forma escolarmente aceptada, a aquello no generalizable y propone a la abstracción como el fin último del aprendizaje de las matemáticas. Lo anterior provoca que se *opaquen* otras formas culturales de saberes funcionales. Esta problemática se asume como provocado por un *fenómeno de opacidad* de los saberes del ciudadano en la conformación del dME.

Ahora bien, el **cotidiano** expresa el conocimiento en uso de los ciudadanos, a partir de mecanismos de construcción social, y se refiere a *ciertas formas culturales del conocimiento que fueron social e históricamente conformadas en ámbitos de la actividad humana, y que se mantienen en cierta situación específica pero que son proclives a transformarse*. Esta caracterización expresa una postura epistemológica y ontológica donde se asume que el conocimiento matemático posee una función social particular, esto es, se inscribe a un escenario de conocimiento donde se expresarán saberes a partir de situaciones específicas en la actividad humana (Figura 1).



Figura 1. La función social del conocimiento matemático

El cotidiano del ciudadano *revela* no el lugar donde sucede conocimiento, sino al conocimiento mismo que se constituye en los *usos que se suceden*, en lo vivencial, en el motivo pragmático y lo situacional; pero también, se refiere a un conocimiento que prevalece y sirve para lidiar con las situaciones del día a día a través de formas culturales de saberes que se estructuran en una dialéctica de *mantenimiento* y de *crisis*. Esos saberes, es decir, ese conocimiento en uso se mantiene, sin embargo, ante situaciones ajenas y por el carácter histórico y cultural propio se desarrollan o bien retroceden (Berger & Luckmann, 2006; Heller, 1977). Es así que *lo cotidiano* en tanto conocimiento se considera como una epistemología particular que se ancla a un escenario específico que se expresa en argumentaciones y sistemas de usos en términos de una dialéctica *Mantenimiento-Crisis* mientras el conocimiento se encuentra en *uso* (Zaldívar, 2014).

De esta manera, el cotidiano no se refiere a contextos de significación relativos a los conocimientos *previos* de los estudiantes, como muchas investigaciones plantean, al momento de discutir sobre la realidad y los contextos. Más bien, el cotidiano alude a un conocimiento legítimo y como elemento crucial para un posible rediseño del dME. Atender a la problemática de la opacidad, implica el cotidiano se debe integrar y *visibilizarse* durante un rediseño del actual dME. Estos elementos generalmente se encuentran subordinados y opacados por un discurso vertical, utilitario y centrado en la conceptualización y algoritmia. El cotidiano entonces surge como una respuesta que pretende atender el fenómeno de opacidad.

En particular, en esta comunicación se dará evidencia de aquellas formas culturales de saberes relativos a las gráficas cartesianas en situaciones de modelación pero en un escenario extra escolar de divulgación de las ciencias.

Fundamentos teóricos

La Matemática Educativa (ME) como disciplina científica no se remite únicamente a la enseñanza de las matemáticas o a la búsqueda de mejores maneras de presentar contenidos matemáticos. Asume como objeto de estudio, por ejemplo, la organización de una actividad cuya intención declarada sea el aprendizaje de un cierto conocimiento matemático o los fenómenos didácticos que se suscitan cuando existe una intencionalidad expresa en la enseñanza de saberes matemáticos (Cantoral & Farfán, 2003). Bajo esta intención es que se propone afectar al sistema educativo en un sentido benéfico, para que de esta manera los estudiantes sean capaces de construir un saber vivo, que se mueve, que evolucione y principalmente que sea funcional. Para ello, la ME afianza diversos modelos teóricos para entender cómo las personas llegan a “aprender” matemáticas y se relacionan entre sí y con el conocimiento. Uno de ellos, que busca construir y modelar explicaciones sistémicas de los fenómenos didácticos en el campo de las matemáticas es la Teoría Socioepistemológica (TS).

Lo “socio” implica tratar con fenómenos de producción, adquisición y de difusión del conocimiento matemático desde una perspectiva sistémica y múltiple con la finalidad de un rediseño del dME. Para ello, reconoce la incorporación a la investigación de la epistemología del conocimiento, su dimensión sociocultural, los procesos cognitivos asociados y los mecanismos de institucionalización vía su enseñanza (Cantoral & Farfán, 2003; Cantoral, 2013). De esta manera, los análisis dentro de la TS no se centran de una manera aislada en el papel de la semiosis o de las construcciones mentales de los estudiantes, sino que su énfasis está en la intervención como forma de afectar directamente el sistema didáctico para transformarlo.

De esta manera, el programa de investigación de la socioepistemología admite que los conceptos y procesos matemáticos puestos en funcionamiento en un acto didáctico posiblemente no admiten la misma forma que los objetos matemáticos aceptados por una comunidad matemática o en una currícula oficial en un sentido más escolar o clásico. Sino que también trata de acciones, actividades, herramientas y prácticas que participan en ámbitos de la actividad humana (Cantoral, 2013; Cordero, 2008).

Apuesta entonces al reconocimiento y delimitación de los usos del conocimiento en situaciones específicas, donde éste adquiere sentido y significación (Cantoral, 2013). Para ello postula que antes de hablar de un entramado de conceptos y definiciones matemáticas, se debe poner atención a las *prácticas sociales* que permiten y acompañan la conformación de dichos conceptos matemáticos. Modelar entonces, el papel de las prácticas sociales y su función en la construcción de conocimiento matemático es de crucial interés para dicho encuadre teórico, lo cual implica diseñar situaciones dotadas de intencionalidad para la intervención didáctica y la cual estará expresada en los usos que los grupos humanos hagan del conocimiento, mientras este se resignifica (Zaldívar, Cen, Briceño, Méndez, Cordero, en prensa).

Por ejemplo, en los planes y programas de estudio del nivel medio superior en México, se plantea a la gráfica como la representación del concepto de función y se avocan a la visualización como estrategia didáctica para el estudio de la gráfica (Cordero, Cen & Suárez, 2010). Para ello, la actividad matemática escolar se plantea tareas relacionadas con la ubicación de puntos en un plano cartesiano que fueron escogidos arbitrariamente y que se obtienen de evaluar valores en la ecuación. Sin embargo, esta construcción de la gráfica debate con otros funcionamientos y formas de la gráfica en escenarios científicos y del trabajo, donde la gráfica se usa en análisis, para tomar decisiones y es un modelo de comportamiento (Roth, 2002; Hoyles,

Noss, & Pozzi, 2001; Buendía & Cordero, 2005). Por lo que desde la TS no es únicamente la acción de representar al objeto matemático lo cual importa, sino aquellas prácticas sociales y de referencia que generan el uso de dichas gráficas, aspecto que desde el dME se encuentra *opaco*.

Metodología y unidad de análisis

El logro teórico que se alcanza en la presente comunicación consiste en proponer un mecanismo de construcción social que caracteriza al *cotidiano*. Este mecanismo nos lo brindó una reinterpretación de los trabajos de Berger & Luckmann (2006). En el fondo estos autores proponen un modelo para entender la construcción de conocimiento del ciudadano en su cotidiano a partir de una dialéctica *mantenimiento-crisis*. Más aún, dejan ver que la realidad, en nuestro caso, interpretándola como *los saberes matemáticos de la gente*, se condensa en núcleos que se tipifican como mantenimientos de rutina, los cuales son proclives a encontrarse con situaciones que alteren su permanencia y estabilidad, de ahí su dialéctica y la relevancia de la socialización.

El aporte de la investigación en la TS consiste en relacionar el mecanismo de construcción social de *mantenimiento-crisis* con los *usos del conocimiento* en un escenario particular y bajo situaciones específicas. Lo anterior se logra cuando se considera que esas formas culturales de saberes, es decir, la dialéctica mantenimiento-crisis, se constituye en las **argumentaciones** (significados, procedimientos, procesos-objetos) que sobre los conocimientos matemáticos se hagan en *el uso* (ver Figura 2).

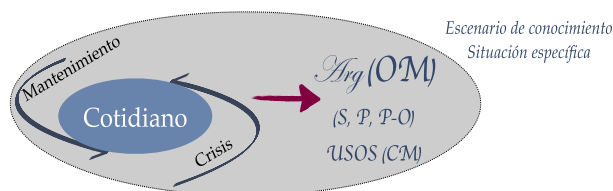


Figura 2. La dialéctica *mantenimiento-crisis* como mecanismo de construcción social

La elección del escenario para vigilar las hipótesis y conformar la evidencia empírica fue idóneo, pues se buscaba promover que el foco y discusión no sean algoritmos o contenidos curriculares previamente establecidos y provocar un alejamiento de los efectos alienantes del discurso matemático escolar. De esta manera el escenario extra-escolar promueve las argumentaciones que se generan bajo situaciones específicas. Por estas razones es que se eligió para el desarrollo de la investigación un escenario de divulgación de las ciencias (DC). Cabe mencionar que no se ahondará en las problemáticas propias de la DC, sin embargo, conviene esclarecer una postura al respecto del escenario y justificar su inserción en la investigación.

En la literatura, muchas veces la DC se considera como una actividad de transmisión unidireccional de los conocimientos científicos a la población en general, usando para ello, un lenguaje accesible y no especializado, con la finalidad de crear interés por la ciencia (Blanco, 2004; Roqueplo, 1983). Sin embargo, muchas de las propuestas en divulgación únicamente se preocupan por hacer del conocimiento algo “atractivo”, sin que se cuestione aquello que se divulga.

Las posturas anteriores consideramos que son limitantes, dados nuestros posicionamientos. Más bien consideramos a la actividad divulgativa como un proceso de socialización, de culturización y democratizadora del conocimiento científico. La DC de esta manera tiene una función sensibilizadora y promover un diálogo entre la ciencia y la población no necesariamente

científica a través de la socialización, es decir, desde las personas mismas. Debe permitir a las personas reconocerse como parte de una sociedad y en el “otro”, donde el conocimiento científico amalgame dichas relaciones.

La inserción en el escenario de DC se realiza bajo un tipo de actividad particular: talleres de ciencias. Dentro de este taller se elaboran situaciones de modelación del movimiento (Suárez, 2014), cuyos diseños se basan en el mecanismo de construcción social de *mantenimiento-crisis* que tipifica a una epistemología del conocimiento del cotidiano. El objetivo entonces es permitir la aparición de ciertas formas culturales de conocimiento que los participantes ponen en juego a través de permitir cierta presencia de las ciencias en la cultura de los mismos alejándonos de una actividad meramente demostrativa (Roqueplo, 1983).

De manera general, el taller tiene por objetivo problematizar desde los ciudadanos, nociones y significados sobre la *variación*, el *cambio* y comportamientos con *tendencia*, por medio de un *uso de las gráficas* que se generan a partir de modelar un fenómeno de movimiento. Los análisis que se llevaron a cabo consideran una situación particular: la Situación del Resorte (Zaldívar, 2014). Dicha situación problematiza, a través de las gráficas, la propiedad de estabilidad de las soluciones de una ecuación diferencial asociada al comportamiento de un sistema físico Masa-Resorte-Amortiguamiento, usando para ello sensores de movimiento y un artefacto físico que representa la situación experimentalmente (ver *Figura 3*). De esta forma, la situación provee un marco de referencia alternativo donde se resignifica a la estabilidad como un *comportamiento asintótico y tendencial a partir de los usos de las gráficas* pero desde lo que los ciudadanos usan y hacen.

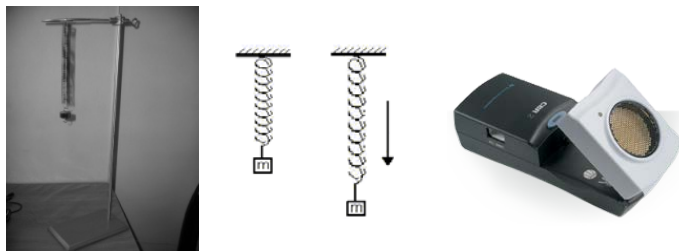


Figura 3. Artefacto de modelación del sistema MRA y sensor de movimiento

La situación del resorte y todo el programa socioepistemológico que sostiene su fundamentación, pretende poner en evidencia ciertos saberes culturales de los ciudadanos sobre el movimiento, las gráficas y la estabilidad misma, que se excluyen en la conformación de los discursos escolares y planes de estudio alrededor de un excesivo trabajo algorítmico en los cursos de ecuaciones diferenciales, por ejemplo. Para ello, el diseño se articula en tres momentos que permiten un desarrollo de las argumentaciones de los participantes cuando se problematiza a la estabilidad a través de un uso de las gráficas: momento de mantenimiento, de crisis y de funcionalidad. Estos momentos además articulan una epistemología que se fundamenta en un mecanismo de *mantenimiento-crisis* que caracteriza al conocimiento cotidiano del ciudadano (Zaldívar, 2014).

I. Momento de mantenimiento: se pretende que los participantes construyan argumentaciones, desde sus experiencias, con su propio lenguaje y vivencias, aspectos que tienen que ver con el fenómeno. En la primera actividad se espera que se haga referencia a aspectos funcionales de la estabilidad, es decir, lo relativo a *lo estable* por medio de representaciones pictográficas alusivas al resorte, a cómo se mueve y en la dirección en la que lo hace.

Principalmente se espera que las producciones se basen en el uso de *trayectorias* para representar el movimiento, aspectos gestuales particulares y dibujos pictográficos que expliquen la situación de movimiento (Zaldívar, 2014). Este momento expresa las formas culturales de los participantes sobre el movimiento, las gráficas y la estabilidad.

II. Momento de crisis del mantenimiento: Los significados que se tratan de generar en los participantes tienen que ver con los modelos que se obtienen con ayuda de sensores de movimiento (ver *Figura 3*). La tecnología por su parte permite múltiples realizaciones y enlazar una estructura culturalmente propias del momento de mantenimiento con estructuras referidas a las gráficas cartesianas y a la aparición de lo cartesiano: posición y tiempo, puntos de referencia, origen cartesiano y fenomenológico (Miranda, Radford & Guzmán, 2007). La anticipación, lo asintótico y el análisis local surgen entonces como las herramientas que se ponen a discusión para generar un argumento más centrado en el comportamiento tendencial. Lo anterior permite la aparición de otros usos de las gráficas más acorde con caracterizar el comportamiento global del sistema por medio de una *curva* y en elementos como su amplitud, altura, variaciones, periodicidad y tendencia.

III. Momento de funcionalidad: La intencionalidad es mantener una estructura más compleja de argumentaciones sobre lo estable a partir de la construcción de gráficas cartesianas como modelos explicativos, manipulables y predecibles, de acuerdo a la situación planteada a partir de la tendencia y la variación. Así mismo, encontrar y analizar las condiciones bajo las cuales el comportamiento del resorte se mantiene y los parámetros involucrados en tipos de comportamientos particulares de la situación con respecto a la solución: subamortiguado, críticamente amortiguado y sobreamortiguado.

Construcción de la evidencia empírica y resultados

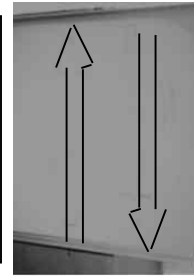
La intención de este apartado es mostrar con ejemplos concretos evidencia de ciertos saberes sobre las gráficas y sus usos opacos en el dME a partir de reconocer la dialéctica mantenimiento-crisis que surgen desde el cotidiano cuando los participantes se enfrentan a una situación de movimiento no convencional en un escenario extra-escolar de divulgación. De manera particular y el caso que se trabaja, el reconocimiento de la dialéctica se objetiva en el desarrollo de las argumentaciones que sobre la estabilidad los participantes elaboren a través de los usos de las gráficas que se sucedan en la modelación de la situación del resorte, a través de los *funcionamientos y formas* de las gráficas en la situación (Cordero, Cen & Suárez, 2010). En este apartado nos restringimos a mostrar dos casos de análisis y la forma en la cual las gráficas cartesianas se interpretaban y usaban, dadas la función que los ciudadanos les confieren en la situación: *la aparición de la trayectoria* y el aparente *abandono de la trayectoria y la discusión sobre la curva*.

La aparición de la trayectoria

La primera actividad consistía en solicitarles a los participantes que dibujaran el movimiento de un resorte cuando se le ponía una pesa, pero sin realizar el experimento. Esta actividad inicial sobre dibujar el movimiento del resorte, de manera general y recurrentemente daba lugar que los participantes formularan respuestas asociadas con la aparición de dibujos icónicos, donde importa dibujar aquello que se mueve y cómo se mueve y en algunas ocasiones indicar una *secuencia temporal* de la situación. A este uso de la gráfica se convino llamarle **orientar el movimiento**. Esto significa que la función de las gráficas en su uso era para indicar dirección y sentido del movimiento repetitivo, pero a través de formular un patrón de ajuste de

tipo icónico, gestual o verbal, por ejemplo mover la mano de “arriba hacia abajo”. En el siguiente extracto se observa una respuesta de una participante y la producción que acompañaba a su explicación.

T: entonces, ¿qué significa esta flecha?...
 P: que sube y que baja (Imita el desplazamiento del resorte con las manos).
 T: ¿Cuántas veces?...
 P: muchas...
 T: ¿Dónde se ve eso? [Las participantes se quedan calladas y con una expresión de sorpresa y confusión].



Extracto 1 y Figura 3. Respuestas a la primera actividad de la situación del resorte

Estas producciones tienen ciertas convenciones sociales y culturales asociados a ellos. Aspectos que diversas investigaciones han detectado también (ver por ejemplo Sherin, 2000). Se puede observar que los participantes necesitan crear un dibujo con el objeto de ser fieles a la historia a contar obviando aspectos que nunca ocurrieron (Nemirovsky & Tierney, 2001). De manera general, los patrones de ajuste icónicos y gestuales sobre el comportamiento se agrupan en la siguiente figura 4:

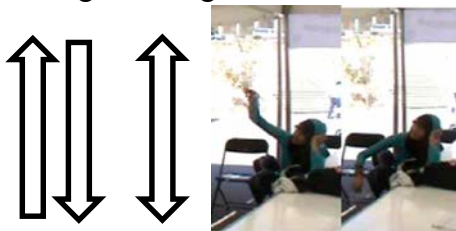


Figura 4. Patrones de ajuste asociados al uso orientar el movimiento de la gráfica

Justo en este uso de la gráfica, las referencias funcionales a la propiedad de estabilidad, es decir lo *estable* en términos argumentativos, aparecían como un modelo de *permanencia*, es decir el significado que se ancla a la estabilidad era que el resorte no se detiene debido a los patrones de ajuste que se proponen basados en *trayectorias*, cuyo surgimiento atiende a una necesidad de orientar el movimiento del resorte.

Con trayectoria no se hace referencia únicamente al lugar geométrico de las posiciones sucesivas por las que pasa un cuerpo en su movimiento. Más bien se llama la atención al tipo de interpretación, lectura y función de esta herramienta icónica o gestual. La cual generalmente aparece como un patrón de ajuste que hace referencia a aquello que se mueve (el resorte y la pesa) pero donde la función es la de indicar dirección y sentido por medio de flechas (arriba, abajo, sube y baja). Pero justo aquello que acompaña a estas producciones escritas también se encontraba en la base de las justificaciones ciertos argumentos gestuales, como el hecho de indicar con la mano que el resorte sube y baja continuamente. La trayectoria resignifica el espacio y el tiempo en un patrón de ajuste donde el tiempo se incrusta en la distancia; por lo que la trayectoria no indica explícitamente variaciones, tendencias, ni es un modelo de anticipación.

El abandono de la trayectoria y la aparición de la curva

En este apartado se discutirá sobre aquello que provocó el empleo de un nuevo patrón de ajuste que parece ser más cercano a lo que podría ser una gráfica cartesiana. La reflexión era

motivada por la tecnología, pero también por el hecho de problematizar los patrones de ajuste como se muestran en la Figura 4. La problematización consistía en poner en crisis a las argumentaciones iniciales en el momento del mantenimiento, específicamente al hacer referencia a la tendencia, a la variación y a aspectos locales del comportamiento. Por ejemplo, el siguiente extracto 2 muestra el tipo de preguntas que se realizan para debatir con un equipo cuya propuesta consiste en una trayectoria:

T: *ahora, una pregunta muy importante. El resorte se detiene, ¿sí o no?*
 T: *P1, tu dijiste que sí se detiene... ¿por qué piensas que se detiene?*
 P1: *porque si se detiene, porque llega a un cierto tiempo en que...*
 P2: *pierde fuerza...*
 P1: *ajá... la fuerza se empieza a hacer más pequeña, más pequeña, más pequeña, más pequeña, hasta que ya...*
 T: *a ver... P3 dice que no se detiene, ¿por qué no se detiene?*
 P3: *porque tiene mucho peso, no se va a detener... va a seguir... [la gravedad siempre jala... no lo deja de hacer]*
 T: *dice que como tiene mucho peso no se va a detener...*

Extracto 2. El paso a la curva y el abandono de la trayectoria

Se observa en el debate entre el tallerista (T) y los participantes (P1, P2, P3) que éstos recurren a nociones físicas como fuerza y gravedad, lo cual era bastante recurrente en los talleres, para explicar cómo será el comportamiento del resorte. Además, esta manera de explicar se acompaña de aspectos gestuales tales como un movimiento vertical con la mano pero reduciéndolo cada vez más mientras se avanza en la explicación, como haciendo que el tiempo “avance”.

En otras ocasiones, se presentaba en un inicio del taller la situación de “Construya su montaña” (Briceño, 2013), donde los participantes ya tenían una cierta experiencia con el uso del sensor de movimiento. Esto ocasionaba que la forma perceptible del dibujo cambiara a “ondas” que expresaban el *comportamiento global del fenómeno*. También permitía una complejización del argumento gestual asociado (ver extracto 3 y Figura 5).

T: *a ver, a ver... ustedes que ya vieron gráficas con el sensor de movimiento... ¿cómo sería la gráfica del movimiento cuando yo ponga la pesa en el resorte?...*



Extracto 5 y figura 5. La aparición de la curva, la curva en el “aire”

Sin embargo, además del ingreso de la tecnología un elemento que permitía el desarrollo de las argumentaciones sobre la estabilidad son la *variación* y la *tendencia*. Los cuales eran argumentos que se discutían también en la situación de la montaña.

Desde nuestros análisis de los usos de las gráficas el “abandono” de la trayectoria como patrón de ajuste surge entonces cuando la situación exige un análisis de la estructura interna del sistema a modelar, pero en términos de problematizar explícitamente lo variacional y lo tendencial anclado al sistema. Esto implica complejizar el patrón de ajuste basado en trayectorias

pero que permita argumentar sobre la tendencia y la variación, por medio de intentar explicar el cómo se mueve el resorte y cómo se comportará.

Consideramos que estos argumentos de variación y tendencia generaron una manera diferente y compleja de interpretar el movimiento, el espacio y hacer explícito el tiempo. Así mismo, el ingreso de la tecnología permitió discutir sobre el origen fenomenológico y el cartesiano y sus relaciones, como puntos de referencia necesarios. De esta manera indicar dirección y sentido parece ser insuficiente pero también necesario para explicitar elementos variacionales y tendenciales; sin embargo, se encuentran en la base de las argumentaciones sobre el movimiento.

Entre los elementos que se discuten se puede apreciar una necesidad por parte de los participantes de “cortar” a la gráfica que proponen, “cuando se mueve”, “cuando empieza a detenerse”, “cuando se detiene”. Pero más aún, no existe una necesidad de expresar todo el recorrido, sino dar una idea general del comportamiento de manera global. Así como tampoco existe una referencia clara al punto de referencia, sino indicios. A este tipo de gráfica, es a la que nos referiremos como “curva” (ver Figura 6).

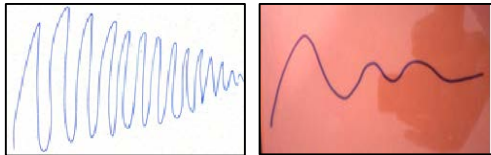


Figura 6. La curva como comportamiento global

La estabilidad de esta manera parece ser reconocida como un comportamiento particular asociado al fenómeno, que se expresa en las curvas suaves y en las partes de la curva. Este significado surge cuando la gráfica se usa para analizar la *estructura interna del sistema y expresar globalidad, variación y en ocasiones tendencia*.

No obstante a esta aparición de la curva, en muchas ocasiones también se presenta un *aparente* abandono de la trayectoria. Es decir, la estructura y la lectura del movimiento se basa en la orientación como uso que se le da a la gráfica, sin embargo, integra elementos variacionales y tendenciales ajustando el patrón de trayectorias. El gesto de la mano vertical que se detiene en un punto medio puede ser un ejemplo de esto y la curva de las flechas que se hacen “chiquitas” (ver figuras 7 y 8).



Figuras 7 y 8. “¡Pero hazlas más chiquitas!”: La “gráfica” como flechas

Esta es una manera en la cual se pone en evidencia que la lectura e interpretación de las gráficas cartesianas exige de *resignificaciones progresivas* no triviales y que no únicamente se basen en la ubicación de puntos para el análisis como en muchos cursos donde tratan el concepto de función la gráfica sirve como una representación al ubicar puntos en el plano.

En las flechas del participante están contenidas la dirección, pero la altura o dimensión de las flechas contiene información sobre la velocidad o intensidad del movimiento del resorte. Esto también significa que se juegan con las características *figurales* de los elementos y la

visualización de las mismas (Nemirovsky Y Tierney, 2001; DiSessa, et al., 1991). Las flechas indican velocidad y no posición relativa del resorte. En ellas está contenida la variación, pero también la tendencia, sin un énfasis en la *continuidad*.

Esto deja entrever que la trayectoria como patrón de ajuste no se elimina de las argumentaciones de los participantes, sino que es parte de esos saberes culturales en el cotidiano; pero que es posible complejizar esas estructuras, con la integración de la variación, la tendencia y puntos de referencia en el cual el sensor deviene importante.

Se tiene entonces que la lectura que los argumentos situacionales permitieron no fue únicamente de “arriba hacia abajo”, sino también de “izquierda a derecha”, lo cual implica “el paso del tiempo”. La estabilidad entonces se significa en este patrón de ajuste de curvas como un comportamiento particular, repetitivo y continuo.

Comentarios finales

La evidencia que conformamos sobre la lectura e interpretación de las gráficas en un escenario extra-escolar permitió modelar las resignificaciones del conocimiento matemático desde los ciudadanos mismos, a través de un mecanismo de construcción social de mantenimiento-crisis. Dicha dialéctica expresa que el conocimiento obedece a un funcionamiento específico bajo ciertas formas culturales y funcionales que se anclan a una situación y a un escenario particular, pero que además se resignifican y trascienden.

La evidencia que se conformó postula que la *búsqueda de la permanencia* (búsqueda de invariantes) en las cosas que varían es parte de la actividad humana relativa a una significación del movimiento relativo, dada la situación específica. Sin embargo, esta función aparece opaca en el dME. En síntesis, el cotidiano ofrece una argumentación basada en trayectorias, la función del cotidiano está en la búsqueda intencional de la permanencia en el cambio, y un patrón de ajuste lo encuentra en las trayectorias. Cabe mencionar que en los análisis lejos de concentrarnos en el gesto, por ejemplo, nos importaba más *aquello que permitía* la aparición de dicho gesto; postura que desde la semiótica no es claro.

Lo importante es entonces que este mantenimiento será resistente y persistente a la transformación (ver ejemplo de la figura 7 y 8). Sin embargo, es posible problematizar, es decir crear crisis en dicho mantenimiento, por medio de socializar y desde la modelación-graficación hacia otras formas de conocimiento basadas en las categorías de conocimiento propuestas por la socioepistemología, a través de la variación y la tendencia. Lo anterior permite analizar la estructura del sistema y anticipar el comportamiento del mismo, por medio de un patrón de ajuste asintótico basado en curvas y posteriormente en gráficas cartesianas.

Referencias y bibliografía

- Berger, P., & Luckmann, T. (2006). *La construcción social de la realidad*. Buenos Aires: Amorrortu.
- Blanco, A. (2004). Relaciones entre la Educación Científica y la Divulgación de las Ciencias. Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias, 1(2), 70-86.
- Brenner, M. & Moschkovich, J. (Eds.) (2002). *Everyday and Academic Mathematics in the Classroom*. Reston, Virginia: The National Council of Teachers of Mathematics (NCTM).
- Briceño, E. (2013). El uso de la gráfica como instrumento de argumentación situacional con recursos tecnológicos. Tesis inédita de Doctorado. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN, Departamento de Matemática Educativa. D.F., México.

- Buendía, G., & Cordero, F. (2005). Prediction and the periodical aspect as generators of knowledge in a social practice framework: a socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics*, 58, 299-333.
- Cantoral, R., & Farfán, R. (2003). Mathematics Education: A vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics*, 53(3), 255-270.
- Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. Estudios sobre construcción social del conocimiento*. México: Editorial Gedisa, S.A.
- Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En R. Cantoral, O. Covián, R. M. Farfán, J. Lezama & A. Romo (Ed.), *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano* (pp. 285-309). México, D. F.: Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C.
- Cordero, F., Cen, C., & Suárez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(2), 187-214.
- DiSessa, A.; Hammer, D.; Sherin, B. (1991). Inventing graphing: meta-representational expertise in children. *Journal of Mathematical Behavior* 10, 117-160.
- Heller, A. (1977). *Sociología de la Vida Cotidiana*. Barcelona: Ediciones Península.
- Hoyles, C., Noss, R., & Pozzi, S. (2001). Proportional reasoning in Nursing practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(1), 4-27.
- Miranda, I.; Radford, L. & Guzmán, J. (2007). Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. *Educación Matemática*, 19(3), 5-30.
- Nemirovsky, R. Tierney, C. & Tracy, W. (1998). Body and graphing. *Cognition and Instruction*, 16 (2), 119-172.
- Rodrigo, M. J. (1997a). Del escenario sociocultural al constructivismo episódico: un viaje al conocimiento escolar de la mano de las teorías implícitas. En Rodrigo, J.M. & Arnay, J. (Eds.), *La construcción del conocimiento escolar* (págs. 177-191). España: Paidós.
- Roqueplo, P. (1983). *El Reparto del Saber. Ciencia, cultura, divulgación*. Buenos Aires: Gedisa.
- Roth, W. (2002b). Aprender Ciencias en y para la comunidad. *Enseñanza de las ciencias*, 20(2), 95-208.
- Sherin, B. (2000). How students invent representations of motion. A genetic account. *Journal of Mathematical Behavior*, 19. 399-441.
- Suárez, L. (2014). *Modelación-graficación para la matemática escolar*. Díaz de Santos: México.
- Zaldívar, D., Cen, C., Méndez, M., Briceño, E. & Cordero, F. (en prensa). El espacio de trabajo matemático y la situación específica de la matemática funcional: un ejercicio de diálogo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*.
- Zaldívar, D. (2014). *Un estudio de la resignificación del conocimiento matemático del ciudadano en un escenario no escolar*. (Tesis inédita de Doctorado). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional, México.

Interpretación de la relación funcional en estudiantes de noveno

Enzo Fabián **Marines** Lamprea

Universidad del Tolima

Colombia

enzofabianmarineslamprea@outlook.com

Cristian Jair **Ayala** Vargas

Universidad del Tolima

Colombia

niels.bohr@hotmail.com

Resumen

El principal motivo de este trabajo es lograr establecer un vínculo de situaciones cotidianas basadas en patrones matemáticos para que los alumnos por medio de su desarrollo manifiesten sus distintas interpretaciones de esta noción. A partir de esto se plantearon 3 sesiones donde se implementaron distintas actividades con patrones matemáticos para observar en los estudiantes el desarrollo de su pensamiento teniendo en cuenta los niveles de conocimiento de Anna Sfard (interiorización, reificación y condensación) utilizando los dos primeros en el análisis de las dos primeras sesiones de nuestro proyecto. En esta investigación se pudo concluir que los alumnos se inclinaron más por escribir expresiones generales por medio del lenguaje natural (representación escrita), también que no estaban familiarizados con este tipo de actividades y por último se pudo observar que el trabajo con patrones es una herramienta eficaz para que los alumnos vean regularidades entre cantidades variantes.

Palabras clave: Patrones matemáticos, regularidades, observar, herramienta, niveles de conocimiento.

Planteamiento del problema

En este proyecto de investigación la intención primordial es lograr que los alumnos desarrollen un concepto de relación funcional porque creemos que la construcción de dicho concepto permite a los estudiantes tener una idea más clara cuando afrontan problemas que tengan que ver con este tópico. También es importante lograr que los alumnos construyan una expresión matemática que permita establecer la conexión entre dos cantidades que varían y así que puedan observar el comportamiento de las cantidades de acuerdo a un contexto dado, por otra parte tratar que los alumnos vean las matemáticas como una herramienta para la vida diaria en la resolución de problemas cotidianos.

El trabajo propuesto espera que los estudiantes puedan encontrar una conexión con las sesiones anteriores y con la propuesta en ese instante para lograr tener un buen resultado en la sesión 3, que es donde se encontraran con una situación del diario vivir.

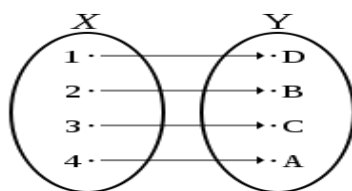
Según nuestra experiencia en el curso de optativa 3 y en nuestros años en el colegio cuando se abordaba el tema de relaciones funcionales el maestro tenía la particularidad de dar la definición, después un ejemplo y por ultimo ejercicios creyendo que los estudiantes ya dominaban esa noción con el solo hecho de haber solucionado un ejercicio. Luego con esa

educación que recibimos y al llegar aquí a la universidad influenciados por algunos cursos y por nuestras propias dudas nos pusimos a pensar ¿qué es lo que los estudiantes entienden por relación funcional? Luego de haber abordado en el curso anterior (optativa 3) y hacer un proyecto de investigación basado con un modelo de Ponte nos interesó saber que interpretación de relación funcional tienen los estudiantes de grado noveno la cual es nuestra pregunta problema y posteriormente observar las diferentes interpretaciones que nos muestre los alumnos de grado 9°; Además de diagnosticar las distintas interpretaciones queremos precisar cuáles son las aproximaciones que tienen los alumnos respecto al concepto de relación funcional y también aquellos que no presentan una idea cercana a dicha noción.

Antecedentes y fundamentación teórica

Según los lineamientos curriculares del Ministerio De Educación Nacional (MEN, 1998) en Colombia los alumnos de grado 9° deben reconocer el concepto de función, graficar una función lineal en el plano, conocer las características de una recta, conocer las propiedades de la recta en el plano cartesiano. Esto significa que el estudiante debe estar en capacidad de identificar relaciones funcionales presentes en situaciones-problema específicas.

Definición de función de un texto guía:



Dados dos conjuntos, no vacíos, X e Y , una regla f , que asigna a cada elemento de X uno y solamente uno del conjunto Y es una función de X en Y . Se denota por: $f: X \rightarrow Y$ que se lee “ f de X en Y ” (Londoño y Bedoya, 1984, 1986, 1988)

El uso de la definición de función tomada de un texto posiblemente no sea la única manera de iniciar el trabajo con funciones.

Una situación-problema del contexto cotidiano que nos ayudó a clarificar nuestras ideas sobre relaciones funcionales es la siguiente, tomada de Agudelo Valderrama, C (2000), p.22-23:

María trabaja los domingos vendiendo helados en la Plaza de Bolívar. Su patrona le paga \$2000 como básico, más \$100 por cada helado que venda.

Pregunta A: ¿Cuánto se puede ganar María en un domingo?

Pregunta B: ¿Cuántos helados debe vender María para ganarse \$6000 en un domingo?

Pregunta C: Qué variables puede identificar en la situación de María vendiendo helados.

Podemos afirmar que en los años escolares los trabajos de reconocimiento de patrones fue un tema que no se trabajó, solo se trabajaba la tabulación de datos con las famosas tablas de valores y conceptos como generalización, patrón matemático, relación funcional eran desconocidos para nosotros. El propósito de este tipo de preguntas es hacer énfasis en los comienzos de la construcción de las primeras bases para los conceptos de relación funcional y de allí que pueda formar su concepto de función por medio de situación cotidianas que van aportar un significado para la comprensión del alumno.

Queremos clarificar que nuestro interés no es que los alumnos construyan el concepto de función, lo que queremos es brindarles las herramientas necesarias para que los alumnos reconozcan que es una relación funcional.

Según Kieran y Filloy (1989) las investigaciones muestran que los estudiantes que entienden de una mejor manera los conceptos básicos de función utilizan los métodos gráficos para mostrar los resultados, mientras que los menos expertos o los que tienen menor comprensión de los conceptos básicos de función proceden a mostrar sus resultados por medio de tabulaciones, es decir construcción de tablas de valores. De lo anterior se puede afirmar que si se inicia el trabajo escolar sobre el tema de función dando la definición de manera gráfica puede llevar a que los alumnos comprendan mejor su significado. También según nuestra experiencia muchos de nuestros compañeros de clase utilizaban la construcción de tablas de valores para poder resolver ejercicios, pero esto se convertía en algo mecánico. Del mismo modo dibujando patrones o gráficos que puedan llevar a la construcción del concepto de relación funcional puede ser un punto de apoyo importante para que los alumnos desarrollen este conocimiento.

Según las investigaciones, trabajar con patrones no produce un conocimiento inmediato de la noción de función (Mc.Gregor y Stacey, 1995) pero puede ser un principio esencial en el desarrollo del alumno para que pueda llegar a una mejor comprensión de la relación funcional, ya que la identificación de la relación que conecta las variables presentes en distintas situaciones de la vida cotidiana, está en el centro de la comprensión de la noción de función

El inicio del trabajo algebraico escolar con la identificación y expresión de patrones ha sido considerada por la comunidad internacional de educadores matemáticos como una forma efectiva de apoyar el desarrollo del pensamiento algebraico y consecuentemente la formación de la noción de relación funcional; Agudelo-Valderrama (1999). Presentación de la versión en español de rutas hacia el álgebra y raíces del álgebra, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Una manera muy eficaz para que el alumno cree, modele, construya es la interacción con hechos de la vida real que le permitan al alumno darse cuenta que los hechos que resuelve mecánicamente o esas definiciones que le son dadas se pueden describir con hechos reales que él mismo puede estudiarlos hasta el punto de construir generalizaciones o nuevos conceptos, involucrar al alumno con los hechos reales es ubicarlo en un mundo en el que él puede encontrar sentido a lo que está trabajando y tenga capacidad de asimilar lo que observa, mediante los cambios del mundo real; involucrar la enseñanza de las funciones necesita basarse en hechos que llamen la atención del niño, que se dé cuenta de los cambios, o de lo que permanece estático, que los comportamientos que él observa tengan un sentido significativo.

Diseño y Metodología

Nuestra investigación está basada en el enfoque de investigación-acción propuesto por Hopkins (2008); S. Kemmis y R. McTaggart (1998); que consta de un proceso continuo en el aula que permite la retroalimentación del maestro en la investigación, basada en el método propuesto por Ponte, P (1995). Para hacer posible este trabajo de investigación-acción diseñamos tres sesiones donde se impartirá unas actividades que fomentaran y desarrollaran el pensamiento variacional del estudiante, con el fin de que él pueda ir iniciando su propia noción de relación funcional y así poder evidenciar las distintas interpretaciones basándonos en los autores que soportan nuestro trabajo y a partir de esto poderlas categorizar. En estas sesiones uno hará el rol de profesor investigador y el otro observador investigador

Resultados

Sesión 1: la rana saltarina

puntos	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
X	1	2	3		5		7					
Y	2	4	6						18			24

Luego se les pedirá que nos respondan las siguientes preguntas:

1. Si X es 5 ¿Cuánto le corresponderá a Y? ¿Por qué?
2. Si X es 7 ¿Cuánto le corresponderá a Y? ¿Por qué?
3. Si Y es 18 ¿Cuánto le corresponderá a X? ¿Por qué?
4. Si Y es 24 ¿Cuánto le corresponderá a X? ¿Por qué?
5. Si X es 800 ¿Cuánto le corresponderá a Y? ¿Por qué? ¿Cómo hizo para encontrar ese número?
6. ¿Se puede hallar una expresión general que permita encontrar cualquier valor dando el valor de X? escriba todo lo que hizo para encontrarla.
7. terminen de llenar esa tabla siguiendo siempre el patrón.

- A: Tipo de representación escrita.
- B: Tipo de representación numérica (por medio de operaciones numéricas o solo colocó la respuesta como un número).
- C: No respondió.
- D: Efecto memoria utilizado en las preguntas 1 y 2.
- E: No hay claridad en la respuesta (les faltó completar la expresión).
- F: caso particular.

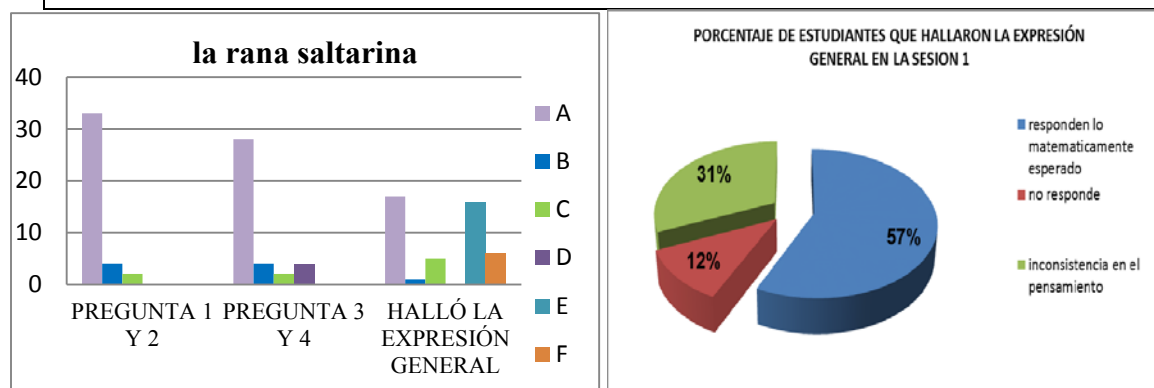


Figura 1. Resultados de la sesión 1.

En esta sesión se encontraban 35 estudiantes que nos proporcionaron distinta información de manera general con respecto a la actividad como la siguiente:

- Todos con excepción de 1 estudiante no completo la tabla de valores.
- Los estudiantes demostraron que no presentaban inconvenientes al saber las coordenadas de un punto en el plano cartesiano.

- Reconocen las matemáticas como algo necesario y elemental para vida cotidiana.
- Identificaron la regularidad presentada en los saltos de la rana.
- Hallaron las coordenadas siguiendo la secuencia de los saltos de la rana en los puntos pedidos.

En las preguntas 1 y 2, de 35 estudiantes que realizaron la actividad, 33 se inclinaron por la opción A (Tipo de representación escrita.), debido a que los estudiantes se les facilitan dar a conocer sus pensamientos por medio del lenguaje natural y tuvieron claridad al expresar el proceso realizado al dar esa respuesta a la pregunta y esto es fundamental para ir construyendo de manera autónoma el concepto de relación funcional.

4 Estudiantes eligieron la opción B (Tipo de representación numérica) en este tipo de representación evidenciamos los estudiantes que respondieron por medio de un algoritmo (operación), estos estudiantes posiblemente estén en un nivel distinto que los que respondieron con lenguaje natural y tengan mayor dificultad en llegar a la contextualización de esta noción.

2 Estudiantes no contestaron debido a diferentes factores, se deduce que no le prestaron el mayor interés, puesto que esta actividad no tendría una nota apreciativa.

Sesión 2: actividad “construyendo la letra L con cuadrados”



FIGURA N°1

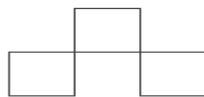


FIGURA N°2

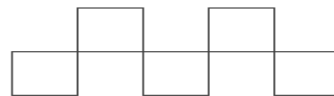


FIGURA N°3

- Pregunta A: Dibuje la Figura N°. 4 y la figura N°. 5
- Pregunta B: ¿Cuántos cuadrados habrá en la Figura N°. 13? ¿Por qué?
- Pregunta C: ¿Cuántos cuadrados habrá en la Figura N°. 100? ¿Por qué?
- Pregunta D: Describa el proceso que hizo para saber el número de cuadrados que hay en la Figura N°. 100.
- Pregunta E: Escriba una regla para encontrar el número de cuadrados de la Figura No. 1000.

Cuando se les pidió que armaran las figuras N° 4, 5, y 6 un grupo cambio la forma de la figura refutando que no importa siempre y cuando mantenga la misma cantidad de cuadrados, construyendo de esa manera un cuadrado o una línea recta que cumpliera la condición del número de cuadrados de la figura original. Pudimos lograr mantener el interés con la actividad “construir la letra L con cuadrados” en los estudiantes, este tipo de actividades es un paso inicial para que los estudiantes puedan llegar a una mejor contextualización de esta noción (relación funcional). Con esta actividad logramos que los estudiantes trabajaran en equipo con el propósito de que comuniquen sus pensamientos y así logren una mayor comprensión.

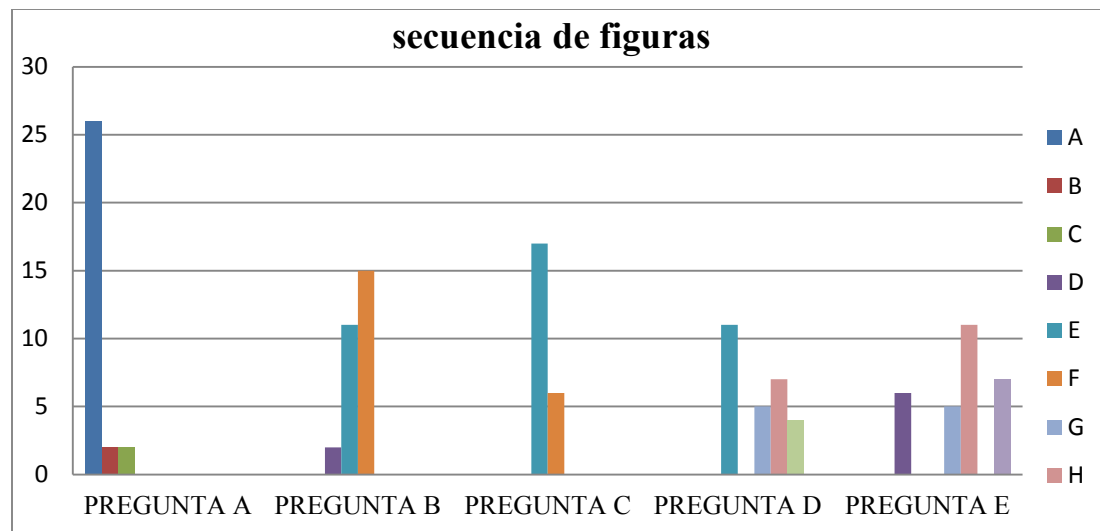


Figura 2. Resultados de la sesión 2.

- A: siguiendo la secuencia.
- B: incompleta.
- C: cambiándola de posición.
- D: no respondió.
- E: relaciono el número de cuadrados de la parte inferior con los de la parte superior para hallar el número de cuadrados de la figura.
- F: sumo 2 a cada una de las figuras anteriores hasta llegar a la numero 13.
- G: representación numérica.
- H: representación escrita.
- I: otro.
- J: encontró la generalidad.

En esta sesión asistieron 28 estudiantes, donde se pudo evidenciar que pudieron reconocer rápidamente la secuencia que tenían las figuras cuando aumentaban de posición.

Antes de entregar las actividades les preguntamos a los estudiantes acerca de lo que es un patrón matemático y un estudiante respondió que era una serie siguiendo un orden y otro relaciono lo de la sesión anterior diciendo que eran aquellas cosas que se pueden repetir.

Con respecto a la pregunta A, B y C algunos estudiantes nos proporcionaron evidencia de una respuesta esperada como: en la figura N°13 hay 25 cuadrados ya que aumenta de 2 en 2 cada figura, gracias a la intervención del profesor-investigador nos da la premisa de que el estudiante hizo el proceso mental de contar de 2 en 2, un estudiante facilito el proceso de dibujar la figura remplazando los cuadrados por puntos siguiendo la secuencia hasta llegar a la figura pedida para así poder hallar el número de cuadrados (estudiante 5). Otra de las respuesta que se evidencio es que algunos estudiantes establecieron una relación entre el número el cuadrados de la parte inferior de la figura con los de la parte superior para poder hallar el número de cuadrados así: en la figura número 13 hay 12 arriba y 13 abajo porque abajo da el número que buscamos y arriba un número menos (estudiante 16), gracias a esto pudimos notar la relación que pudieron establecer algunos estudiantes (en la parte inferior siempre el número de cuadrados es igual que

el de la figura dada y en la parte superior uno menos que el de la inferior) y así solo tenían que sumar el número de cuadrados de la parte inferior con el de la parte superior para hallar el número de cuadrados de la figura pedida.

En la pregunta F que se les pidió encontrar una regla para hallar el número de cuadrados de la figura 1000 pudimos evidenciar que algunos estudiantes escribieron una sucesión de fracciones donde el denominador era el número de la figura y el numerador uno menos que el denominador así: $993/994$, $994/995$, $995/996$, $996/997$, $997/998$, $998/999$, $999/1000$. Esto muestra que estos estudiantes organizaron sus ideas siguiendo la secuencia y forma de la figura para así llegar a esta respuesta. Pero también hubieron estudiantes que hallaron la expresión general para esa situación así: pues uso la fórmula que es $1000 \times 2 - 1 = 1999$ por lo tanto el número de cuadrados de la figura 1000 es 1999 (estudiante 4). Y también hubo un tipo de respuesta no esperada para esta pregunta así: sumando los cuadritos de la figura número 25 ocho veces (estudiante 5), este estudiante decía que si necesito saber el número de cuadrados de la figura 100 solamente debía sumar 4 veces el número de cuadrados de la figura 25.

Sesión 3: María y los helados.

- A: caso particular.
- B: Caso general.
- C: Reconoce los 2000 (básico) como una constante.
- D: Olvida los 2000 (básico), no los reconoce como una constante.
- E: Representación escrita.
- F: Representación numérica.
- G: No responde.

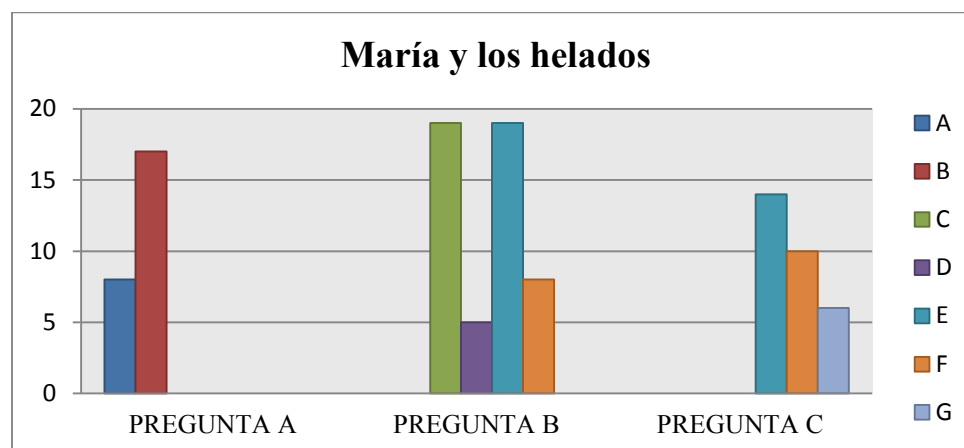


Figura 3. Resultados de la sesión 3.

En esta sesión asistieron 26 estudiantes, donde se pudo evidenciar que en la pregunta A 17 estudiantes generalizaron la pregunta de cuantos helados puede vender maria el domingo identificando así una variable que es el número de helados que ella venda, respondiendo así: Depende del número de helados que venda, y 8 estudiantes particularizaron tomando un caso en específico y haciendo las debidas operaciones para saber cuánto se ganaría suponiendo que hubiera vendido esa cantidad de helados así:

- Si María vende 50 helados ganaría 5000 más los 2000 del básico y si sumamos el básico con los helados que vendió serían 7000 (estudiante 1).
- Si María vende 47 helados ganaría 4700 más los 2000 del básico, si lo sumamos María habría ganado en el domingo 6700 (estudiante 2).

En la pregunta B, se evidenció que 19 estudiantes reconocieron los 2000 del básico como una constante así:

- María tendría que vender 40 helados para ganar 4000 más los 2000 del básico da un igual de 6000. (estudiante 1).

Pero también hubo 5 estudiantes que no tomaron los 2000 como una constante, en lugar de eso lo omiten y no lo tienen en cuenta para dar una respuesta, así:

- 60 helados porque, $60 \times 100 = 6000$ (estudiante 3).

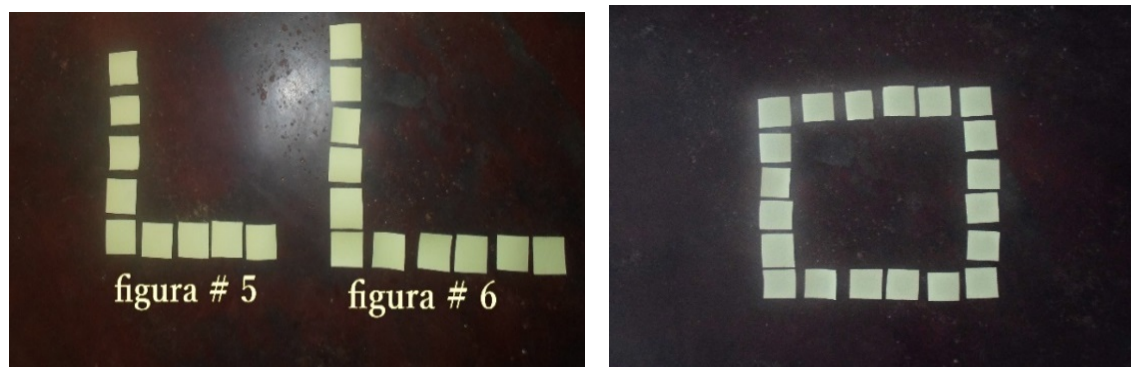
Y en la pregunta C hubo 6 estudiantes que no hicieron la expresión matemática para esta situación de la vida cotidiana, para esta sesión comparada con las anteriores se pudo evidenciar que los estudiantes tuvieron un desarrollo en identificar las regularidades y gracias a esto se les fue haciendo más fácil la construcción de la expresión general, algunos estudiantes construyeron las expresiones matemáticas de forma simbólica, lo que significa que están reconociendo las variables en una situación de la vida cotidiana y se están acercando cada vez más a su propio concepto de esta noción así:

- $2000 + (100X)$, donde X es la cantidad de helados (estudiante 6).

Otros análisis cualitativos

La sesión 2 (secuencia de figuras) fue la que más elementos matemáticos contenía, debido a que en esta parte de nuestro trabajo planteado se consideró de vital importancia hacer énfasis en el trabajo con patrones matemáticos. La actividad de secuencia de figuras trajo un resultado que nosotros como profesor investigador y observador no nos imaginamos, este resultado fue el siguiente:

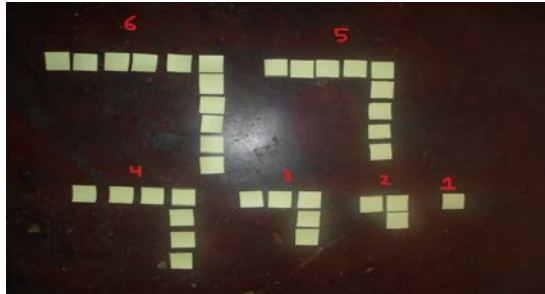
Después de haber construido la secuencia de figuras hasta la número 6, un grupo de estudiantes hicieron lo siguiente.



Y dedujeron que no importa si la figura muestra una “L” porque la figura número 5 más la figura número 6 formaban un cuadrado, este análisis que los estudiantes hicieron indica que para ellos un patrón matemático puede presentarse de una sola manera pero es posible que se comporte de otras maneras diferentes. De tal manera demostraron para un caso particular, es

decir si tuvieras la figura número 1 más la figura número 2, la figura número 2 más la figura número 3 y así sucesivamente tendríamos siempre un cuadrado.

Otros grupos de estudiantes dijeron que si la figura cambiaba de posición el patrón se conserva, es decir: la forma de la figura es diferente pero el número de cuadrados es el mismo.



Lo anterior permite reconocer y valorar más la forma en que los alumnos observan las cosas porque es una manera de inferir resultados esperados pero con puntos de vista distintos y para nosotros este tipo de observaciones se deben a que cierto tipo de estudiantes relacionan ideas o conceptos ya establecidos para obtener conceptos nuevos (Anna Sfard).

Conclusiones

En este trabajo de investigación pudimos concluir que la mayoría de los estudiantes de grado noveno en la institución educativa Juan Lozano y Lozano optaron por dar a conocer la expresión general por medio del lenguaje natural (representación escrita) en las distintas sesiones. Aunque hubo casos en donde algunos estudiantes lograron por medio de una representación simbólica asignándole una letra a lo que en esta investigación denominaremos variable o cantidades cambiantes. También pudimos comprobar que en esta institución los estudiantes tienen una educación muy tradicionalista ya que cuando les llevamos ese tipo de actividades nos mostraron una sensación de confusión es decir que no estaban acostumbrados con este tipo de actividades y estaban con la mentalidad de que las matemáticas son solo algoritmos y dar la respuesta correcta.

Por medio de esta investigación pudimos fomentar la construcción del desarrollo del concepto de relación funcional en la mayoría de los estudiantes, determinando que este tipo de actividades es satisfactorio para promover un pensamiento variacional ya que por medio de estas actividades el alumno desarrolla facultades como expresar sus ideas y un sentido crítico.

Además pudimos notar que aunque los estudiantes estaban viendo funciones (cuadráticas) no eran capaces de identificar una variable y mucho menos establecer una relación entre 2 o más de estas.

Limitaciones

Se habían planeado 3 sesiones para tomar 2 cursos distintos por lo tanto serían 6 sesiones pero la institución no podía suministrarnos tanto tiempo para hacer las sesiones, por lo cual el tiempo fue un factor que limitó nuestro trabajo de investigación.

Al comienzo en este trabajo se pretendía tomar 2 cursos de noveno de la misma institución “Juan Lozano y Lozano” ya que pretendíamos hacer una inducción en un grado noveno y en el otro simplemente aplicar el cuestionario de recolección de información y así poder hacer

comparación en estos cursos con el fin de poder concluir si la inducción dada en el curso fue de ayuda para que los estudiantes dieran una respuesta más significativa y fueran más claros en expresar sus ideas.

Prospectivas

Por medio de estas actividades los estudiantes pueden llegar a la generalización de manera simbólica logrando así una mejor comprensión de la noción de función por medio del trabajo con patrones y que los alumnos por medio del trabajo con patrones matemáticos logren comprender los pasos que se pueden llevar a cabo para llegar a entender la noción de las relaciones funcionales

Referencia Bibliográfica

- Agudelo Valderrama, C. (2000). *Una innovación curricular que enfoca el proceso de transición entre el trabajo aritmético y el algebraico*. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional. (1998). Estándares Curriculares de Matemáticas.
- McGregor M., & Stacey, K. (1995). The effect of different approaches to algebra on students' perceptions of functional relationships. *Mathematics Education Research Journal*, 7(1), 69-85.
- Kemmis, S., & McTaggart, R. (1988). *The action research planer: Cómo planear la investigación acción*. Barcelona: Laertes S. A.
- McGregor, M., & Stacey, K. (1998). Cognitive models underlying algebraic and non- algebraic solutions to unequal partition problems, 10(2), 46-60
- Hurtado, A. (2013). *Caracterización de la comprensión del concepto de función en los estudiantes de grados noveno y once en los colegios público de la Virginia*. Pereira: Universidad Tecnológica de Pereira.
- Sfard, A., (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification the case of function. In G. Harel, & E. Dubinsky (Eds), *The Concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy*. MAA Washington: MAA.
- Sfard, A. (1994) .The gains and the pitfalls of reification the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 26, 191-228.

Investigações Matemática sobre análise combinatória por alunos do ensino médio do Instituto Federal do Tocantins

Albano Dias Pereira **Filho**

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins campus Porto Nacional
Brasil

albano.filho@ifto.edu.br

Nielce Lobo **Da Costa**

Universidade Anhanguera de São Paulo
Brasil

nielce.lobo@gmail.com

Elias Vidal Bezerra **Junior**

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Tocantins campus Porto Nacional
Brasil

eliasvidal@ifto.edu.br

Resumo

Este artigo tem por base um estudo sobre investigação matemática realizada com alunos da 2ª série do ensino médio do Instituto Federal do Tocantins. A investigação se coloca em uma perspectiva qualitativa, com base na tipologia de Ponte (2009). O objetivo da pesquisa foi desenvolver e aplicar atividades que possibilitasse aos alunos o desenvolvimento de investigação matemática acerca do estudo da Análise Combinatória. A finalidade foi investigar o impacto desta experiência nos alunos, tentando compreender não apenas o modo como eles formulam questões e hipóteses, como arquitetam e consolidam a escolha de informação, analisam os dados que coletaram e ainda o disseminar dos resultados obtidos. Durante a concretização da tarefa, havia o papel de professor orientador das tarefas e no desenrolar foram percebidas conclusões as quais garantem que é vantajoso, tanto para os professores como para os aprendizes e ainda que as atividades realizadas promovessem a aprendizagem não mecanizada, surpreendentemente.

Palavra chave: Atividades Investigativas. Princípio Multiplicativo. Análise Combinatória

Introdução

Desde quando foram realizados os primeiros contatos com o ensino de análise combinatória pode-se verificar dificuldades de entendimento e compreensão relativas aos tópicos estudados em Análise Combinatória. Diante de tal preocupação nos motivamos a preparar atividades que possam vir subsidiar o desenvolvimento desse tema.

O estudo da Análise Combinatória incide em resolver problemas do dia a dia. Problemas que são necessários prescrever de quantos modos determinado evento pode ocorrer. Algumas vezes, basta escrever uma lista de todos os elementos do conjunto apresentado e em seguida contá-los. Apesar disso, em muitos casos, o conjunto pode ser demasiadamente grande

para se fazer essa contagem direta dos seus elementos e por isso são necessários outros processos de contagem.

No processo combinatório nos permite estudar os tópicos, a citar, princípio fundamental da contagem, fatorial, arranjos simples, permutação simples, combinação e permutação com elementos repetidos cujo procedimento permite determinar as coleções finitas de objetos que satisfaçam certos critérios específicos, preocupando-se, em particular, com a contagem de objetos nessas coleções, ou seja, permite-nos produzir o número de possibilidades lógicas de certo evento, sem essencialmente enumerar cada caso.

Percebe-se que, na perspectiva do ensino da matemática, a Análise Combinatória se insere na realidade das dificuldades e obstáculos de forma geral, independentemente do nível de ensino. Tal afirmação é baseada em empirismo, uma vez que sempre propus a ministrar tópicos de Análise Combinatória, normalmente o assunto mostrava-se particularmente hipotético para muitos alunos, pensam que ao se deparar com um problema de Combinatória, eles devem inicialmente descobrir se o problema a ser tratado é um problema de arranjo, combinação ou permutação, ou seja, mecanicamente tentam descobrir a que tipo de agrupamento, arranjo, permutação ou combinação o problema pertence, para depois resolvê-lo utilizando a fórmula adequada. Deixando de buscar o raciocínio lógico e até mesmo um único entendimento para as atividades, uma vez que a maioria dos problemas, possa resolvido pelo princípio fundamental da contagem.

Assim, a idéia proeminente deste trabalho é discutir atividades investigativas de Análise Combinatória realizadas com uma turma de alunos do ensino médio, em outras palavras, abordar a Análise Combinatória sem apelar excepcionalmente ao uso de fórmulas. Sendo assim, propomos abordar a Análise Combinatória através de uma vertente cuja principal ferramenta é a investigação matemática e posteriormente o princípio fundamental da contagem.

Entende-se que a Análise Combinatória deveria ser um tópico da matemática repleta de problemas capazes de motivar os alunos, e mesmo assim, ela é considerada uma disciplina complicada, em que o alunato tem dificuldades para encontrar o raciocínio correto para desenvolver cada problema.

Consoante Vazquez e Malagutti (2009), atualmente, a Análise Combinatória é definida como um ramo da Matemática que permite resolver os problemas que são necessários escolher, arrumar e, principalmente, contar os objetos de um conjunto. Tal conteúdo quando explorado em forma de problemas traz certa dificuldade em relação à formulação e interpretação de seus enunciados, pois exige flexibilidade de pensamento, ou seja, para resolvê-los é necessário parar, concentrar, discutir e pensar.

Pretende-se que os alunos trabalhando em grupo, de forma investigativa e colaborativa, consigam parar, concentrar, discutir, pensar, se imaginar realizando o que vai fazer e interagir com o problema, para que assim possam chegar a uma melhor definição dos conceitos, isto é, terminado o estudo, os aprendizes devem comunicar os resultados da sua investigação, obviamente, com cautela a preparar argumentos para defenderem, as opções que tomaram e as interpretações que fizeram ao longo do processo de investigação.

Brasil ([4], p.44) traz um ótimo embasamento para a necessidade de um aprofundamento da Análise Combinatória no seguinte trecho:

As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizarem inferências e fazer previsões com base numa amostra de população, aplicar as idéias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isso mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas. (PCNEM, (Brasil [4], p.44).

Indubitavelmente acredita-se que as habilidades de descrever e analisar um vasto número de dados, realizarem inferências e fazer previsões, deve ser trabalhado desde Ensino Fundamental, assim o raciocínio lógico e combinatório dos alunos já vêm sendo preparado para analisar situações como o método de contagem e, com fator proeminente, principalmente se pensarmos na nova vertente de ensino que estamos vivenciando, um ensino mais cognitivo e menos pautado no uso de fórmulas.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) do Ensino Fundamental, por sua vez, trazem uma preocupação no sentido de acrescentar ao estudo dos números, operações, espaço, formas, grandezas e medidas, conteúdos que permitam tratar as informações que os alunos recebem todos os dias, levando-os a aprender a lidar com dados estatísticos, tabelas, gráficos e a utilizar idéias relativas à probabilidade e à combinatória. Nos PCN's conteúdos como Estatística, Probabilidade e Combinatória estão incorporados ao item "Tratamento da Informação" que a finalidade de evidenciá-los devido à importância de seus usos atuais.

Para os PCN's, o bloco de estudos relativos a noções de estatística, de probabilidade e de combinatória não pretende o desenvolvimento de um trabalho baseado na definição de termos ou de fórmulas envolvendo tais assuntos, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações-problema que envolva combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem.

Percebe-se então a importância de ser explorar em diferentes momentos da aprendizagem, bem como aprofundando adequadamente a cada nível de ensino para que se possa ter o domínio combinatório por parte do aluno, desde o início de sua escolarização. Desta forma, acredita-se que o contato do aluno com a Combinatória desde os primeiros anos da escola básica deve ocorrer de modo a permitir a sua familiarização com os problemas, levando-o a descrever os casos possíveis e contá-los, através de uma representação por ele escolhida, sem regras a princípio, de modo a adquirir uma forma sistemática e gradativa para sua resolução, possibilitando uma posterior formalização no Ensino Médio.

A constatação, depois algum tempo trabalhando com alunos do Ensino Médio, percebendo suas inquietações de entendimento e compreensão referentes à Análise Combinatória, levou-nos a uma ideia que a introdução dos conceitos relativos a esse conteúdo, mesmo que de forma propedêutica, utilizando a metodologia de investigação e o princípio fundamental da contagem, pode ser uma abertura para rompermos com esse paradigma que se trata de um conteúdo árduo, porém sim de um conteúdo interessante e que pode ser entendido através de raciocínios primeiramente simples para depois começar a explorar problemas mais complexos.

Desta forma diante das dificuldades encontradas pelos alunos com relação a este conteúdo, bem como a preocupação de alguns professores em trabalhar o assunto, decidimos preparar um

conjunto de atividades e utilizar método investigativo para trabalhar em sala de aula buscando despertar a curiosidade e a investigação matemática para melhorar sua compreensão.

Fundamentação teórica

Aulas de investigações Matemáticas

Através das aulas de investigações matemáticas pretende-se que os alunos se submergem no seu processo de ensino e de aprendizagem por meio da participação ativa e da gestão autônoma, sendo assim responsável desse processo. Atualmente, é importante que os alunos sejam confrontados com atividades de investigação durante a sua aprendizagem, sendo pela vivência de processos característicos de investigação, ou pelas atividades que os permitam novos desafios.

Conceito de investigação matemática, como atividade de ensino e de aprendizagem, subsidia a trazer para a sala de aula o espírito de atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões, conjecturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com seus colegas e o professor (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2009, p. 23).

Segundo Ponte; Brocardo; Oliveira (2009), as investigações matemáticas são um tipo de atividades que todos os alunos deveriam conhecer, permitindo ao aluno saber como o seu desempenho é visto pelo professor se existem aspectos que se precise dar mais atenção.

Em sua teoria da constituição do sujeito, Vygotsky (1998) afirma que esta ocorre nas interações sociais produzidas nos diversos núcleos de ação. Com base em pressupostos histórico-culturais pode-se afirmar que o processo de elaboração de conhecimentos constitui-se na dinâmica interativa das relações sociais. É interagindo com o outro que cada indivíduo se constitui e se dá a elaboração conceitual. O sujeito social está em processo de formação constante e nestas dinâmicas interativas, a que se considerar a multiplicidade de saberes existente.

Segundo o grande estudioso da seara social, é na interação entre as pessoas que em primeiro lugar se constrói o conhecimento que depois será intrapessoal, ou seja, será partilhado pelo grupo junto ao qual tal conhecimento foi conquistado ou construído.

Sobre a Investigação

Neste artigo apresentamos parte de uma investigação na qual destacamos a análise da aplicação de duas atividades realizadas e discutidas em dois blocos, sendo o primeiro bloco de três aulas seguidas de sessenta minutos e o segundo bloco duas aulas de 60 minutos. Expomos os objetivos, metodologia utilizada no estudo, instrumentos, sujeitos e local da investigação.

Objetivos

Foram estabelecidos os seguintes objetivos específicos:

- Analisar a capacidade dos alunos em realizar investigações;
- Investigar capacidade de promover atitudes, tais como de liderança e postura investigativa;
- Analisar a capacidade de trabalhar em grupo;
- Identificar habilidades no domínio dos conceitos da contagem;
- Analisar e comparar os indicadores de desenvolvimentos dos alunos.

Metodologia da Pesquisa

Cury (2007) recomenda que uma análise qualitativa das respostas dos alunos, com uma discussão aprofundada sobre as dificuldades por eles apresentadas, apoiadas em investigações já realizadas é, talvez, a melhor maneira de aproveitar os erros para questionar os estudantes e auxiliá-los a estabelecer seu conhecimento.

Dessa forma, com o objetivo de contribuir neste processo de sintonia intelectual, este estudo segue uma perspectiva qualitativa, buscando, conceituar através de atividades investigativas as atividades desenvolvidas por estudantes de 2ª série do Ensino Médio do Instituto Federal do Tocantins no processo de ensino e aprendizagem da Análise Combinatória.

Nas palavras de Bogdan e Biklen (1996, p.49) “A abordagem da investigação qualitativa exige que o mundo seja examinado com a idéia de que nada é trivial, que tudo tem potencial para constituir uma pista que permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do objeto de estudo”.

Nesta perspectiva, optou-se por utilizar o caminho metodológico estabelecido por Ponte (2009) e também a metodologia para análise de dados tomando como base a análise de conteúdo proposta por Bardin (1979), o qual considera as seguintes etapas: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados.

A presente investigação foi desenvolvida no laboratório de informática, podendo os alunos utilizar o editor de texto, o universo da pesquisa foram de 23 discentes, fracionados em grupos de 4 ou 5 alunos da turma 2ª série do Ensino Médio do Instituto Federal do Tocantins.

A partir da abordagem de investigação matemática no ensino de Análise Combinatória, buscamos verificar se a aprendizagem teria sido mais significativa, de forma que o aluno pudesse transferir os conceitos aprendidos naquela situação de ensino para outros contextos ainda, mais complexos. Assim, buscou-se atentar a novos elementos que poderiam emergir durante o estudo.

Instrumentos da investigação

A investigação foi realizada em cinco blocos, cada um com duas aulas de 60 minutos, considerando a elaboração e análise das atividades que se configuram como instrumentos de investigação, no qual foram separados em etapas. Neste artigo analisamos os dois primeiros blocos de atividades.

Primeiro bloco

Foi colocado para os alunos pesquisadores que eles deveriam segregar-se em grupos de quatro pessoas e debaterem com os colegas do grupo sobre qual raciocínio/mecanismo iria utilizar para resolver as atividades que seriam propostas neste bloco de aulas, bem como nos outros quatro. Assim que foram entregues as atividades do bloco, procuramos clarificar o significado de alguns termos e certificarmos que todos os alunos a tinham entendido. Eles discutiram então que estratégias poderiam utilizar. Foi explicado que se tratava de questões de raciocínio lógico e deveriam consultar os colegas do grupo. Neste bloco utilizaram-se três aulas de sessenta minutos, os alunos estavam envolvidos com a atividade e prosseguimos com as discussões, sendo adicionada uma aula neste dia. Ao final da aula recolhemos as atividades, apenas um grupo não havia concluído o raciocínio e marcamos devolver para que pudessem continuar na próxima aula.

Atividade proposta no primeiro bloco

Fazer anagramas com as letras de uma palavra é misturá-las de forma diferente, ainda que a palavra formada não tenha um significado. Por exemplo: **ROMA**, **MORA**, **MARO**, **MRAO**, são anagramas da palavra **AMOR**. Desta forma, construa anagramas com as letras da palavra **BIA**.

a) Após o termino (dos anagramas com as letras da palavra **BIA**, b) faça também para as letras da palavra **AMOR**, c) Para finalizar veja quantos anagramas tem as letras da palavra **LAPIS** e digam se existe alguma relação entre as respostas dos três anagramas solicitados.

Segundo bloco

Buscou-se relacionar as atividades anteriores com as do segundo bloco, procurando assim conceituar o principio fundamental da contagem através das atividades de investigação.

Atividade proposta no primeiro bloco

- 01) Cinco cavalos disputam uma corrida. Quantas são as possibilidades de chegada para os quatro primeiros lugares?
- 02) Helio Ricardo tem 5 blusas diferentes e 3 calças jeans diferentes. De quantos Modos diferentes ele pode se vestir, usando uma de suas calças e uma de suas blusas?
- 03)Vamos agora pensar, quantas diferentes placas de carro podem ser confeccionadas considerando uma seqüência de 3 letras e 4 números?



Figura 1. Atividade proposta no primeiro bloco.

Análise e discussão dos resultados

Questão 1 do primeiro bloco

01) Fazer anagramas com as letras de uma palavra é misturá-las de forma diferente, ainda que a palavra formada não tenha um significado. Por exemplo: **ROMA**, **MORA**, **MARO**, **MRAO**, são anagramas da palavra **AMOR**. Desta forma, construa anagramas com as letras da palavra **BIA**.

a) Após o termino ((dos anagramas com as letras da palavra **BIA**, b) faça também para as letras da palavra **AMOR**, c) Para finalizar veja quantos anagramas tem as letras da palavra **LAPIS** e digam se existe alguma relação entre as respostas dos três anagramas solicitados.

Desenvolvimento da atividade:

Enfatizamos algumas discussões dos alunos ao iniciar as atividades.

Aluno k: *“Já apaguei varias vezes... não dá para fazer de qualquer jeito. Tem que uma regra...”*

Aluno A: *“Professor não tem uma fórmula para resolver isso? Na matemática sempre tem fórmula...”*.

Aluno Z *“Professor deve ter um macete, porque se fossem muitas letras? E sei que tem, tem que ter”*

Para esta atividade destacamos as respostas de três grupos.

Grupo X:

Handwritten student work for Grupo X. It includes two 3x3 grids for the word 'BIA' and a 6x5 grid for the word 'LAPIS'. The 'BIA' grids show permutations of the letters B, I, and A. The 'LAPIS' grid shows permutations of the letters L, A, P, I, and S. Handwritten text explains the calculation of 6 anagrams for 'BIA' and 120 for 'LAPIS' using the multiplication principle.

6 Anagramas

Comçando com a tem 6 possibilidades, então terá mais 6 comçando com M, O R ai fica um total de $6 + 6 + 6 + 6 = 24$

São 6 possibilidades com LA, então são 6 com LI, LP e mais 6 com LS, então tem 24 possibilidades comçando com L e outros 24 com A, P, I, S ai fica $24 + 24 + 24 + 24 + 24 = 120$

Figura 2. Discursões dos alunos do Grupo X.

GRUPO Y:

A palavra **BIA** tem três letras e 6 anagramas, a palavra **AMOR** tem quatro letras e 6 possibilidades começando com cada letra, mesma quantidade de anagramas de uma palavra com três letras. Como **AMOR** tem 24 anagramas, sendo assim pelo que observamos a palavra **LAPIS** que tem cinco letras, seguirá o mesmo raciocínio e terá 120 anagramas, pois serão 24 possibilidades para cada letra. Quando aumentamos uma letra diferente, o número de possibilidades para cada letra, é mesma do total de anagramas da palavra anterior

GRUPO H:

Handwritten student work for Grupo H. It shows a calculation for the number of anagrams of the word 'LAPIS'. The student explains that by fixing one letter and permuting the others, they can find 24 anagrams for each starting letter, and then multiply by 5 to get the total of 120.

a palavra lapis forma 120 anagramas: Usei a letra A fixa e mudei as outras letras e consegui formar 24 palavras diferentes e multipliquei por 5 que são o numero de letras e sei que cada uma delas ficando fixa formaria 24 palavras então a palavra forma 120 anagramas: 120

Figura 3. Discursões dos alunos do Grupo H.

Analise do primeiro bloco

Percebeu-se que os alunos sempre queriam formar os grupos com os colegas que julgam mais “espertos”, assim demoramos um pouco na divisão dos grupos, uma vez que intervir um pouco para garantir a participação de todos. Em alguns momentos buscavam o suporte do professor nas resoluções, mas sempre as orientações forma no sentido de despertar a busca pela investigação e não apontar as respostas. Devo destacar que alguns gostariam que a atividade fosse avaliativa, assim poderiam fazer com mais entusiasmos. Sendo assim que todos devem ser avaliados todos os dias, inclusive o professor, pelos alunos.

Desta forma, terminada a aula, foi então um momento de reflexão sobre o modo como esta tinha decorrido e, apesar de considerar que a gestão do tempo não tinha sido a melhor, fez-se um balanço positivo, uma vez que todos os alunos trabalharam com entusiasmo, participação, colaboração e com espírito investigativo.

Para melhor descrever esta experiência, fora feito um acompanhamento, uma espécie de relatório com as mais relevantes características da experiência, com enfoque no que indicaram ao tentar resolver as atividades e também foram registradas as soluções para que pudessem avaliá-las com calma.

Tabela 1

Análise das respostas dos grupos no primeiro bloco.

Grupo X	Os alunos encontraram a resposta da quantidade de anagramas da palavra LAPIS, pelo princípio aditivo, fixaram uma letra e perceberam que a quantidade de possibilidades para as demais eram os mesmo, assim somaram as possibilidades de cada letra. Percebe-se que o grupo não calculou todas as possibilidades começadas com a letra “L” analisaram apenas LA e verificaram que L com as demais letras seriam seis possibilidades também, assim verificaram que os anagramas começando em L seriam 24 possibilidades. Assim não escreveram todos como fizeram as letras da palavra BIA.
Grupo Y	Estes alunos foram surpreendentes nesta questão, uma vez que fizeram analogia dos anagramas das palavras, BIA, AMOR e LAPIS. Afirmando que a quantidade de possibilidades de uma letra é exatamente o numero de anagramas da palavra anterior que tenha menos uma letra. Perceberam que BIA, tem seis anagramas, então cada letra da palavra AMOR tem 6 possibilidades, chegando assim a 24 anagramas pois tem 4 letras. Seguindo o mesmo raciocínio a palavra LAPIS teria então 24 possibilidades para cada letra e somando todas teríamos 120 anagramas. Foi uma grata surpresa este raciocínio para mim, naquele momento.
Grupo H	O grupo fixou a letra A e chegou aos 24 anagramas, perceberam que seriam mais 24 anagramas com as outras letras, então fizeram a multiplicação de 24 com a quantidade de letras. Optamos em não colocar os 24 anagramas começando A, uma vez que a resolução do grupo ficaria extensa no trabalho.

Diante das respostas dos alunos, entendemos que o princípio multiplicativo e aditivo não estavam presente para a maioria dos alunos, acreditamos que eles não tiveram contato com problemas análogos durante o Ensino Fundamental. Percebemos também que alguns deles fizeram tentativas de apresentar o cálculo já que sabiam o resultado passado por outro grupo, assim seus integrantes não conseguiram explicar o raciocínio quando foram questionados. Outro fator interessante foi a rapidez que os mesmos buscavam chegar às respostas, sem antes fazerem uma avaliação mais detalhada do problema.

Percebemos que todos os alunos interferiram com frequência, manifestando opinião, todos participaram na elaboração da conjectura do assunto, buscando sempre uma solução rápida as questões. Devemos destacar que, as características apresentadas pelos vários grupos não eram muito divergentes, alguns se sobressaíam nas hipóteses, algumas vezes acabam repassando para algum grupo ao lado, assim surgiam às conjecturas de cada grupo e algumas divergências de opiniões.

Questão 1 do segundo bloco

Essas questões foram elaboradas com o objetivo de introduzir o conceito de princípio fundamental contagem, observando o número de possibilidades, buscando despertar nos alunos as relações existentes nas questões anteriores.

- 01) Cinco cavalos disputam uma corrida. Quantas são as possibilidades de chegada para os quatro primeiros lugares?

Para esta atividade destacamos as respostas de três grupos.

GRUPO B:

“Se eu representar cada cavalo por uma letra, ficam 24 possibilidades para cada letra para cada letra, 24 vezes 4 dá 96.”

GRUPO C:

“Não entendi direito mas deve ser 20, 5×4 ”

GRUPO Z:

cinco cavalos 1, 2, 3, 4 e 5.

1º	2º	3º	4º
5	4	3	2
5	4	3	1
5	4	1	2
5	4	2	3
5	4	2	1
5	4	2	3

Propor mesmo caso do Lófs LA tem $6 \times (5 \cdot 4)$ tem, então são 120. agora faça? gostava que o senhor me explicasse na próxima aula

Figura 4. Discursões dos alunos do Grupo Z.

Questão 2 do Segundo Bloco

Helio Ricardo tem 5 blusas diferentes e 3 calças jeans diferentes. De quantos Modos diferentes ele pode se vestir, usando uma de suas calças e uma de suas blusas?

Novamente destacamos as respostas de três grupos.

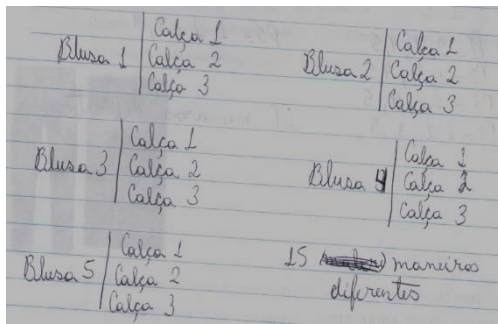
GRUPO K:

Figura 5. Discursões dos alunos do Grupo K.

GRUPO L:

“Pode-se usar de 15 maneiras diferentes”

GRUPO T:

“Se fixarmos uma blusa e testarmos as possibilidades para as calças ficam assim, 05 cinco possibilidades para cada calça. Ai quando faço para todas as calças ficam $5 \times 3 = 15$ possibilidades.”

Ainda no segundo bloco, colocamos uma 3ª questão com o intuito de fazê-los perceber a necessidade de calcular a quantidade de diferentes placas que podem ser confeccionadas com todas as letras do alfabeto e todos os algarismos do nosso sistema de numeração, pois representá-las como fizeram nas questões anteriores seria muito trabalhoso.

Questão 3 do Segundo Bloco

Vamos agora pensar, quantas diferentes placas de carro podem ser confeccionadas considerando uma sequência de 3 letras e 4 números?



Figura 6. Placa de carro.

Destacamos algumas respostas:

GRUPO I:

“ $3 \times 4 = 12$ não pode ser apenas isso”.

GRUPO W:

“(26 + 26 + 26) + 10000 = 1078 Acho pouco ainda”

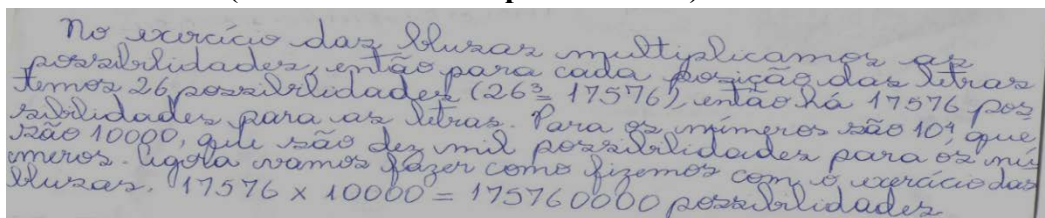
GRUPO Y (este é o mesmo Grupo Y anterior):

Figura 7. Resposta do Grupo Y.

Ao final da aula, as atividades foram recolhidas com as respostas e discutimos um pouco sobre o último exercício, a importância dele em aplicações como números de CPF e telefones.

Alguns alunos começaram a fazer indagações no sentido de ter utilizado este mesmo raciocínio nas questões da aula anterior.

Tabela 2

Análise das respostas dos grupos na questão 1 do segundo bloco.

Grupo B	Percebe-se que os alunos se atentaram para as 24 possibilidades, mas confundiram na análise quanto aos quatro primeiros lugares, pois deveriam observar que se tratava de cinco cavalos sendo 24 possibilidades para cada, sendo assim 120 o número de total de possibilidades.
Grupo C	Quanto a este grupo, percebe-se que começaram a buscar soluções que vem do princípio fundamental da contagem, embora os fizesse de forma inadequada, pois analisaram quatro possibilidades vezes cinco possibilidades e afirmaram um total de 20. Os próprios membros do grupo desconfiaram da resposta, por acreditar ser um valor muito baixo.
Grupo Z	O grupo fez uma analogia com a atividade dos anagramas e perceberam que para o primeiro lugar, era o mesmo caso dos anagramas começando em A, assim fixando um animal e primeiro teriam 24 possibilidades, somado as outras 24 de cada cavalo seriam 25 vezes cinco e assim teriam 120 possibilidades.

Tabela 3

Análise das respostas dos grupos na questão dois do segundo bloco.

Grupo K	O grupo escreveu todas as possibilidades reais com cada blusa e percebeu que se tratava de 15 possibilidades o total.
Grupo L	Este grupo já foi mais além e percebeu que se tratava uma questão de lógica, três possibilidades para todas as calças e cinco para blusa, assim bastava multiplicar $3 \times 5 = 15$.
Grupo T	O grupo fixou uma blusa e utilizou o mesmo raciocínio dos anagramas. Percebendo assim que seriam cinco possibilidades para calça, assim somados ficaram $5 \times 3 = 15$.

Tabela 4

Análise das respostas dos grupos na questão 3 do segundo bloco.

Grupo I	O grupo fez analogia com a questão dois e não conseguiram responder corretamente.
Grupo W	Este grupo se aproximou bastante da resposta, porém somou as possibilidades, sendo que deveriam multiplicar. Mas o raciocínio inicial foi muito bom.
Grupo Y	Este grupo novamente surpreendeu com o raciocínio lógico e respondeu corretamente a questão.

Percebemos que alguns erros cometidos pelos grupos desta pesquisa, foram elencados em Pereira Filho (2012) em duas categorias: uso errado dos dados e erro devido à falsa generalização. Destaca-se, ainda, que um dos maiores problemas encontrados refere-se à tranquilidade em interpretar os dados dos problemas e resolver com paciência, sem pressa para encontrar e não buscar uma solução de imediato para a atividade.

Os autores consideram ainda que analisar e classificar os erros cometidos pelos estudantes confirma a necessidade de engajá-los em atividades que propiciem o desenvolvimento de habilidades e competências, de acordo com as deficiências detectadas, possibilitando assim uma adequação recíproca dos alunos, que podem melhorar o seu desempenho em sala de aula, e dos professores, na efetivação de sua própria missão como educador e na busca da prática de um ensino eficiente.

Pereira Filho (2012), a partir de uma categorização e análise de erros nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral, sugere que o estudo de erros possa ser considerado uma ferramenta de prevenção.

Após análise das respostas dos grupos, considera-se que as dificuldades dos estudantes estão relacionadas principalmente à interpretação dos dados de um problema, ler o problema a ser resolvido com bastante atenção, bem como criar sua própria maneira de incidir os problemas de contagem.

Considerações finais

Na presente investigação, para analisar os dados advindos da realização do teste e as avaliações foi empregada a metodologia de análise do conteúdo das respostas, apresentada em Cury e Cassol (2004). A autora propõe uma metodologia tomando como base as etapas da análise de conteúdo proposta por Bardin (1979): pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados.

Assim, seguindo os pressupostos estabelecidos pela autora, na primeira fase, as respostas coletadas foram organizadas, para escaneamento ou digitação, conforme a possibilidade. Para cada questão, as respostas formaram, então, o material sobre o qual foi feita a análise. A seguir, as respostas foram corrigidas para analisar, quantitativamente.

A fase de exploração do material envolveu o processo de unitarização e classificação das respostas, no qual o material foi lido mais uma vez para definir as categorias. Nesta pesquisa, os critérios de classificação foram determinados a partir do próprio material em que os dados semelhantes foram agrupados.

Já na fase de tratamento dos resultados, as categorias de respostas são descritas por meio de figuras ou tabelas de distribuição de frequências ou com a produção de “um texto-síntese, que permita ao leitor a compreensão do significado da classe, em geral com o apoio de exemplos retirados do próprio corpus” (Cury, 2007, p. 65).

Na pesquisa, durante a aplicação das atividades, percebemos que os alunos sentem-se motivados a resolver problemas quando eles devem tomar as decisões. Ficou claro que a interferência do professor em alguns momentos é muito importante, pois os alunos mais seguros de suas idéias buscam entusiasmados encontrar as soluções.

Enquanto discutiram as possibilidades que pretendiam utilizar para resolver as atividades, formularam hipóteses e procuraram consenso, buscavam apoio em dos colegas em suas ideias, os alunos envolveram-se em experiências favoráveis ao desenvolvimento de competências no âmbito da comunicação e argumentação e ao seu próprio desenvolvimento pessoal. A necessidade de defender as suas idéias e de confrontá-las com as opiniões dos outros fomentou o desenvolvimento de hábitos de reflexão e de capacidade críticas, tão importantes para o exercício de uma cidadania ativa e responsável.

Devemos destacar que as atividades foram realizadas sem a utilização das fórmulas as quais tanto assustam nossos alunos, mas através do uso constante do princípio multiplicativo e do número de permutações dos elementos de um conjunto. Acreditamos que o ensino desse conteúdo realizado dessa forma é muito mais interessante e estimulante tanto para os docentes como para os discentes.

Acredita-se que os resultados obtidos com a pesquisa, especialmente as reflexões geradas, podem servir de base para futuras propostas de trabalho, as quais considerem as investigações matemáticas em sala de aula, realizadas pelos estudantes, como caminho para a construção de conhecimentos. Entende-se que os resultados obtidos, além de sinalizarem oportunidades para a elaboração de estratégias de ensino, foram capazes de fornecer ao próprio professor a possibilidade de uma reflexão quanto à metodologia de ensino adotada, oportunizando ao educador adotar a investigação no processo diário de ensino da disciplina de Matemática, Estatística, além das demais disciplinas.

Por fim, tem-se a certeza de que esta experiência pôde enxergar algumas das potencialidades das investigações matemáticas não apenas como forma de ensinar os conteúdos, mas como modo excepcional de pôr em prática um ensino verdadeiramente integrado, proporcionando aos alunos contextos de aprendizagem significativa, onde estes podem discutir temas interessantes ao mesmo tempo em que aprendem e treinam procedimentos matemáticos. A forma entusiasta como todos os alunos aderiram a esta tarefa proporcionou uma reflexão sobre a prática docente, onde, contrariamente às orientações curriculares mais recentes. Outros estereótipos foram colocados à luz do sistema de ensino, pois era demasiado o tempo no treino repetitivo, isolado e sem significado de procedimentos.

Referências

- Bardin, L. (1979). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70.
- Brasil, Ministério da Educação. (2000). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Ensino Médio*. Brasília: Secretaria de Educação Média e Tecnológica.
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1996). *Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.
- Cury, H. N. (2007). *Análise de erros: o que podemos aprender com as repostas dos alunos*. Belo Horizonte: Autêntica.
- Pereira Filho, & Albano Dias. (2012). *Análise de erros produzidos por estudantes de um curso de engenharia civil na disciplina de cálculo Diferencial e integral I* (Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Luterana do Brasil, ULBRA: Rio Grande do Sul, 2012.
- Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2009). *Investigações Matemáticas na Sala de Aula* (2ª ed.). Belo Horizonte: Autêntica.
- Vazquez, C. M. R., & Malagutti, P. L. (2009). *Atividades Experimentais de Análise Combinatória no Ensino Médio em uma Escola Estadual*.
- Vygotsky, L. S. (1998). *A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores*. São Paulo: Martins Fontes.

La constitución de la Unidad Similar a partir de las formas geométricas de la sección áurea concebida como proceso de Matematización

Liz Pieranllely **Acero** Molina
 Universidad Distrital Francisco José de Caldas
 Colombia

lianllely@gmail.com

Angello David **Chaparro** Fonseca
 Universidad Distrital Francisco José de Caldas
 Colombia

angelodavidch@gmail.com

Resumen

El actual artículo establece los principales aspectos que constituyen el proyecto de investigación el cual se lleva a cabo para optar el título de magister en educación, el cual ha sido abordado desde el paradigma de la Educación Matemática Realista (EMR) y la Fenomenología Didáctica propuesta por Freudenthal (1983), con la finalidad de llevar a cabo un experimento de enseñanza que permita describir un proceso de matematización que posiblemente presentarían los estudiantes de grado séptimo, al momento de trabajar transformaciones geométricas, a partir de la implementación de una secuencia de actividades compuesta por tareas enmarcadas en las formas geométricas de la sección áurea, para la constitución de la unidad similar.

Palabras clave: Unidad similar, Transformaciones geométricas, Educación Matemática Realista, Fenomenología didáctica, pensamiento multiplicativo.

El pensamiento multiplicativo y la unidad similar

Las exploraciones realizadas que conciernen al pensamiento multiplicativo hasta el momento, respecto a la comprensión de objetos matemáticos tal como la razón y la proporción, como las investigaciones realizadas por Bonilla y Romero (2005), MESCUD (2005) y Confrey (1994) exaltan principalmente las dificultades que se presentan al desarrollar este pensamiento en las prácticas escolares enfatizadas en el contexto numérico, tal como se evidencia la constitución de la multiplicación como suma reiterada de los elementos que la compone.

Confrey (1994), realiza una propuesta de enseñanza y aprendizaje denominada conjetura *splitting*, la cual pretende constituirse en una alternativa para superar el énfasis de la práctica escolar en el contexto numérico, aludiendo a conformar una estructura multiplicativa basada en acciones primitivas como el trabajo de la partición continua; originando así, un mundo de similaridad o multiplicidad de un original. Es de resaltar que Confrey (1994) dentro de su propuesta exalta el trabajo y la constitución de la similaridad desde el contexto geométrico.

Concibiendo la similaridad, que propone Confrey (1994), como un mundo caracterizado por describir un crecimiento el cual puede estar determinado por una unidad, Becerra y Romero (2008) han determinado esta como *unidad similar*, la cual describe como *la relación invariante*

entre el sucesor y el predecesor, siendo esta, en el mundo de la similaridad: la razón. De esta forma, se asume la riqueza de la unidad similar como objeto matemático que puede constituir formas geométricas y que describen un crecimiento regulado a través de una razón (específicamente en nuestro proyecto, la razón áurea); generando a su vez una proporción continuada. Y de esta manera, la *unidad similar* pueda ser considerada como una práctica escolar alterna en la construcción de los reales positivos, tal como lo propone Confrey (1994) en referencia a la conjetura splitting.

Teniendo en cuenta la unidad similar como un objeto matemático que puede ser desarrollado por los estudiantes a partir del trabajo con la razón y la proporción, esta investigación tiene como objetivo diseñar y adaptar una secuencia de actividades que puedan propiciar la descripción acerca de un proceso de matematización que se presenta en los estudiantes, en el momento de trabajar transformaciones geométricas desde la razón áurea, y la unidad similar como resultado de la práctica matemática.

Consideración del paradigma de la Educación Matemática Realista

La Educación Matemática Realista (EMR), instituida por Freudenthal en los años 60, como oposición a los procesos de enseñanza con enfoque mecanicista presentada en las aulas modernas de Holanda; es considerada como una corriente didáctica que se caracteriza por generar prácticas escolares donde la matemática debe ser conectada con la realidad cercana a los estudiantes, tomando relevancia para la sociedad en orden a constituirse como un valor humano.

Partiendo de la premisa: “*existe una matemática para todos*”, pensar matemáticamente se torna como una actividad humana a la cual Freudenthal (1983) denomina *matematización*. Según Bressan, Zolkower y Gallego (2004) los principios en que se basa la Educación Matemática Realista se representan en el siguiente diagrama:



Ilustración 1. Interpretación Principios EMR.

Este proyecto de investigación tiene como objetivo diseñar e implementar una secuencia de actividades que permita describir algún proceso de matematización que manifiestan los estudiantes de grado séptimo. Las actividades que constituyen esta secuencia están reguladas bajo los principios de la EMR, como lo es el análisis de contextos geométricos que propicia la sección áurea, la cual alude la propuesta de problemas que generen la actividad matematizada, el establecimiento de herramientas simbólicas y la propiciación de interacción como parte fundamental para la constitución de los conceptos de matematización.

La descripción del proceso de matematización que se derive de la secuencia de actividades, se realizará dentro del paradigma interpretativo (naturalista cualitativo) como lo denomina Nuñez (2010), el cual se caracteriza por concebir múltiples realidades, las cuales se lograrían estudiar casi únicamente de forma holística, identificando en ellas particularidades de tal modo

que no exista predicción ni control de los sucesos por parte de los investigadores, sino una comprensión de los objetos estudiados. Esto en contra posición a la perspectiva positivista, donde se percibe la realidad como una sola y las investigaciones como fuente que logra predecir y controlar fenómenos estudiados.

Las prácticas escolares desde la fenomenología didáctica

De acuerdo con la EMR y teniendo en cuenta que Freudenthal (1983) define la *matematización* como una actividad estructurante y organizadora la cual está al alcance de todos los seres humanos; percibimos que las prácticas escolares están orientadas a postular como objetivo fundamental la constitución de objetos mentales desde contextos realistas a partir de la organización (matematización) de fenómenos presentes en el mundo real o en de las matemáticas.

Por otro lado, se denomina *fenomenología* cuando un *noumenon* es el medio de organización de los *phainomena*; es decir, un objeto de pensamiento que organiza fenómenos de la realidad. Al realizar un estudio de ésta relación -noumenon y phainomena- en la enseñanza y el aprendizaje, se denomina *fenomenología didáctica* de ese noumenon (Freudenthal, 1983).

En una traducción realizada por Puig (1997) de Freudenthal (1983) se establece lo anterior como:

La fenomenología de un concepto matemático, de una estructura matemática o una idea matemática significa, en mi terminología, describir este nómeno en su relación con los phainomena para los cuales es el medio de organización, indicando cuáles son los phainomena para cuya organización fue creado y a cuáles puede ser extendido, de qué manera actúa sobre esos fenómenos como medio de organización y de qué poder nos dota sobre esos fenómenos. Si en esta relación entre *noumenon* y *phainomenon* subrayo el elemento didáctico, esto es, si presto atención a cómo se adquiere tal relación en un proceso de enseñanza-aprendizaje, hablo de la fenomenología didáctica de ese *noumenon* (Puig, 1997, p. 2).

Un objetivo del proyecto de investigación, es establecer una posible fenomenología didáctica acerca de la unidad similar, la cual se organiza a través de las estructuras matemáticas asociadas a la razón y la proporción, donde el mundo de fenómenos en los cuales está centrada la matematización, es la sección áurea; específicamente en las formas geométricas que la caracterizan. En otros términos, la construcción de formas geométricas que se realizan por medio de la razón áurea, describen un contexto de crecimiento (siendo este elemento una característica primordial para el desarrollo de la conjetura splitting). Estas formas crean un mundo similar donde se fortalece la constitución de objetos como la razón y la proporción, la semejanza y la congruencia, entre otros.

El planteamiento de la fenomenología didáctica de la unidad similar, propone al investigador- docente, establecer las relaciones entre el *noúmeno* y el *phainomena* presentadas en situaciones reales donde las estructuras matemáticas permiten al estudiante ordenar y comprender la realidad.

Por otro lado la finalidad de la investigación, al describir el proceso de matematización que presentan estudiantes de grado séptimo cuando involucran formas geométricas de la sección áurea; nos posiciona dentro de un marco interpretativo, en el que queremos capturar (de forma precisa posible) dentro de la realidad construida en un ambiente de aprendizaje (fenomenología didáctica), una manera de proceder, actuar y proponer estrategias por parte de los estudiantes

(mediado por nuestra propuesta e intervención en el aula), cuando se trabaja contenidos matemáticos para la consolidación de un objeto mental asociado a la razón y proporción (Freudenthal, 1983).

Lo que pretendemos desarrollar es un cuerpo detallado de procedimientos de un hecho que describe casos particulares. De esta forma, la realidad es considerada dinámica, múltiple y holística, la finalidad estaría encaminada a comprender e interpretar la realidad de los significados, acciones y concepciones de los estudiantes que en nuestro caso se centran en la matemática, cuando resuelven problemas (matematización) con formas geométricas de la sección áurea.

La Matematización como eje central de la observación

En el proceso de matematización de los estudiantes cuando se enfrentan a tareas propuestas en la secuencia de actividades sobre fenómenos de la sección áurea, es posible identificar en algunas formas de proceder en el aula el nivel de constitución del objeto mental. Entre ellas, algunas acciones relacionadas a formas escritas y otras verbales, que son clasificadas en representaciones externas, y conciernen en nuestro caso a registros de representación y del lenguaje (corporal o verbal), que permiten generar modelos. Según Gravemeijer (2002) citado por (Bressan, 2009) “(...) el modelo es el resultado de organizar una actividad por parte del sujeto” (p. 3). En otras palabras, el modelo es el resultado de matematizar. En consecuencia existe dos usos representacionales del modelo, el primero cuando sirve para trabajo directo (acciones sobre él), y el otro, cuando se reflexiona sobre él (se busca propiedades y operaciones, etc.) (Bressan, 2009).

Por consiguiente, el proceso de matematización como organizador de la actividad tiene dos aspectos importantes: uno horizontal y otro vertical. El primero resulta cuando el estudiante apropia el problema (real o matemático) y lo lleva a términos matemáticos usando entre otros medios, el sentido común y la aproximación empírica. El segundo, se da cuando el trabajo de reflexión se hace dentro de las mismas matemáticas, pasando por procesos de generalización, prueba y rigor (Bressan et al, 2004). Este proceso de matematización es progresivo, en tanto que los estudiantes pasan por distintos niveles de comprensión como lo establece el siguiente apartado:

En este proceso de matematización progresiva, la EMR admite que los alumnos pasan por distintos niveles de comprensión. Estos niveles (Freudenthal, 1971, 1991; Gravemeijer, 1994, 2002) son: *situacional*, *referencial*, *general* y *formal*, y están ligados al uso de estrategias, modelos y lenguajes de distinta categoría cognitiva, sin constituir una jerarquía estrictamente ordenada (Bressan et al, 2004, p. 6).

En conclusión, el proceso de matematización que está asociado al uso de representaciones externas en la creación de modelos en la resolución y comprensión de las tareas propuestas en la secuencia de actividades, permite evidenciar la constitución del objeto mental y el nivel de comprensión en el que se posiciona el estudiante en un determinado momento.

Análisis de los apartados

Si bien, el actual estudio busca interpretar, describir y explicar situaciones en el aula donde se priorice la *matematización*, orientado desde EMR la cual propone, entre otras cosas, una postura concreta para el aula frente al currículo y la investigación didáctica; Bressan et al (2004) afirman:

El motor de este proceso es la investigación para el desarrollo (educativo), una metodología cualitativa/interpretativa basada en experiencias de aulas en las cuales se implementan secuencias didácticas y se observan, registran y analizan hitos, saltos y discontinuidades en el aprendizaje de los alumnos. Su objetivo es llevar a la conciencia el proceso de desarrollo y explicarlo (p. 9).

Es así como consideramos el proceso investigativo y la reconstrucción de la realidad de manera particular, desde un proceso lógico- deductivo en el que es posible reevaluar etapas aún sin plantear un problema de manera específica; es decir, un problema totalmente conceptualizado. Así mismo, este enfoque maneja distintos tipos de instrumentos para recolectar datos en la observación, sin recurrir a la medición numérica donde los datos estandarizados determinan y predicen las conductas que se quiere observar (Hernández, Collado, Lucio y Pérez, 1998).

Teniendo en cuenta que la secuencia de actividades que se propone para implementar en el aula, se caracteriza por orientar la *matematización* de los estudiantes hacia la constitución de la *Unidad similar*; definimos el actual proyecto hace parte de una *investigación del diseño* como lo denomina Molina, Castro, Molina y Castro (2011), donde el modelo investigativo es un experimento de enseñanza, el cual busca analizar un diseño que permita comprender la realidad educativa.

A continuación se presenta las fases de investigación según la interpretación de Penalva, Roig, y Río (2009); Molina et al (2011) con base a la propuesta hecha por Cobb y Gravemeijer (2008), donde se distinguen las siguientes tres fases:

- *Fase 1: Diseño y planificación de la instrucción.* Esta fase se caracteriza por clarificar los objetivos de aprendizaje propuestos para los estudiantes que permitan delimitar las metas del proceso investigativo. También se refiere al diseño de tareas, específicamente la secuencia de actividades, que permite construir trayectorias de aprendizaje. En este sentido, es importante definir los medios de documentación de la investigación y la literatura que permita la construcción teórica del ambiente de aprendizaje conjeturado.
- *Fase 2: Experimentación en el aula o en un entorno virtual de las tareas diseñadas.* En esta fase se implementa el diseño planificado, denominado inicial, que dentro de esta perspectiva puede mejorarse en la medida que el docente- investigador y el investigador-observador, reformula las conjeturas iniciales, el trabajo de los estudiantes y el entorno de aprendizaje.
- *Fase 3: Análisis retrospectivo* Esta fase pretende construir un marco explicativo- histórico del proceso investigativo por el cual una serie de eventos locales (en el aula) puedan ser reproducibles. Por tanto, es importante justificar la selección de los eventos que se examinan y la importancia de los mismos en la historia de la clase.

A manera de conclusión, se interpreta el *experimento de enseñanza* como una investigación cualitativa, con la intención de explicar los eventos dentro de un ambiente de aprendizaje en este determinado aprendizaje y su probable adaptación a otro entorno educativo.

Conclusiones

Se espera con la aplicación de esta secuencia de actividades, identificar y describir los niveles de comprensión que se presentan en el proceso de matematización definida desde la EMR, en la constitución de objetos matemáticos asociados a la razón y la proporción en el

trabajo del contexto geométrico; logrando aportar una forma alterna que pueda fortalecer el pensamiento multiplicativo bajo la corriente didáctica propuesta por Freudenthal (1983).

Por otro lado, es importante la enseñanza de estos conceptos mediante prácticas innovadoras para enfrentar al estudiante a la realidad en la que vive. En otras palabras, teniendo en cuenta la complejidad social en la que se vive, es necesario sofisticar los procesos matemáticos que pueda considerarse como herramientas que le permitan comprender y transformar su realidad. De esta forma, se puede afirmar la necesidad de prácticas escolares diferentes que permitan desarrollar ideas y conceptos matemáticos de manera transformadora para que en realidad se prepare y afronte al individuo a un mundo social, cultural y político complejo (Bonilla y Romero, 2005).

Por lo tanto, ésta propuesta podría ser usada como una alternativa que permita diversificar las prácticas escolares que aporte a la estructura multiplicativa, sustentada en el concepto de la unidad similar por medio de transformaciones geométricas que intentan desarrollar y comprender tópicos matemáticos como: la razón y la proporción desde la semejanza y la congruencia.

Referencias y bibliografía

- Bonilla, M., & Romero, J. (2005). La resolución de problemas: sus posibilidades para el desarrollo del pensamiento multiplicativo. *Centro de investigaciones y desarrollo científico*, 7, 99-120. CIDC-Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá.
- Bressan, A. (2009). Representaciones y modelos en la matemática realista. *Centro de Estudios de la Realidad Nacional*, 8(37).
- Bressan, A., Zolkower, B., & Gallego, M. F. (2004). *La educación matemática realista. Principios en que se sustenta*. Escuela de invierno en Didáctica de la Matemática. Recuperable en Internet: http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/articulo_escuela_invierno2.pdf
- Freudenthal, H. (1983). *Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas*. Dordrecht, The Netherlands: D. Reidel.
- Hernández, S. R., Collado, C. F., Lucio, P. B., & Pérez, M. D. L. L. C. (1998). *Metodología de la investigación*. México: McGraw-Hill.
- MESCUUD. (2005). *El pensamiento multiplicativo: una mirada de su densidad y complejidad en su desarrollo en el aula*. Informe de Investigación IDEP-COLCIENCIAS-Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Molina, M., Castro, E., Molina, J.L., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 75–88
- Penalva, M. C., Roig, A., & Río, M. D. (2009). *Experimento de Enseñanza: Tareas de Aprendizaje de la Geometría en la formación de maestros de Educación Infantil*. VII Jornadas de Redes de Investigación en Docencia Universitaria. La calidad del proceso de enseñanza/aprendizaje universitario desde la perspectiva del cambio. Universidad de Alicante.
- Puig, L. (1997) *Análisis fenomenológico. La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94).
- Puig, L. (2001). *Notas para una lectura de la fenomenología didáctica de Hans Freudenthal. H. Freudenthal: Fenomenología didáctica de las estructuras matemáticas* (textos seleccionados). Segunda edición. México: CINVESTAV.

La construcción continua de la demostración como medio para enseñar y aprender a validar matemáticamente

Víctor **Larios** Osorio

Facultad de Ingeniería, Universidad Autónoma de Querétaro

México

vil@uaq.mx

Resumen

El aprendizaje de la demostración en los niveles educativos primario y secundario (6 a 18 años) comúnmente ha sido mitificada y relegada a momentos específicos de los currículos, incluso ha sido eliminado. Sin embargo, al ser parte primordial en el proceso de aprendizaje de las Matemáticas, la validación es un aspecto que debe ser considerado en el contexto escolar considerando no sólo aspectos ontológicos y semióticos, sino cognitivos, pragmáticos y socio-culturales. Se presenta una reflexión al respecto y la propuesta de herramientas metodológicas que permiten, de inicio, una evaluación en el progreso del aprendizaje de los alumnos sobre la demostración. Se señalan algunas investigaciones realizadas y resultados obtenidos, para plantear un método para incorporar la construcción continua de la demostración en los contextos escolares. En la parte final se señalan algunos aspectos que aún deben ser investigados para poder abordar adecuadamente este aspecto de las Matemáticas en la escuela básica y media.

Palabras clave: validación matemática, aprendizaje de la demostración, aprendizaje de las Matemáticas, geometría dinámica.

Introducción

La demostración matemática forma parte del conocimiento científico constituido en las Matemáticas. A lo largo de la historia de la humanidad la idea de demostración, como medio de validación de un conocimiento matemático, ha ido cambiando bajo la influencia de los desarrollos filosóficos, matemáticos, técnicos y científicos, por no decir que también de la ontología de los objetos matemáticos y la semiótica involucrada. Es decir, la idea de demostración, los requisitos para aceptar una, el rigor utilizado, no ha sido estática y absoluta.

En este proceso los matemáticos en general, como menciona Nicolas Bourbaki (1972, pág. 25) “la historia del concepto de verdad en matemáticas corresponde, pues, a la historia de la filosofía y no a la de las matemáticas, pero la evolución de este concepto ha tenido una influencia innegable sobre la de las matemáticas, y esto hace que uno podamos dejar de tenerla en cuenta”. Es decir, los matemáticos no están interesados o no necesitan pensar en esto para llevar a cabo su trabajo, pero no quedan exentos de estas influencias por desarrollarse académica y profesionalmente en ambientes sociales específicos. Finalmente, como lo expresaba Wilder “lo que constituye una ‘demostración’ varía de una cultura a otra y de una época a otra” (Perero, 1994, pág. 102). En efecto, la demostración, como medio de validación matemático, no puede ser una referencia absoluta e inamovible en el campo de la Educación Matemática y menos si se consideran aspectos cognitivos, semióticos y socio-culturales que están involucrados en los procesos educativos.

Aun así la validación del conocimiento matemático es una parte epistemológicamente importante de la construcción del mismo, por lo que es necesaria su inclusión en el aprendizaje de las Matemáticas.

En este trabajo se hace una revisión sobre la necesidad de incorporar el aprendizaje de la validación de los conocimientos matemáticos que desarrollan los alumnos de los niveles básico y secundario a través de la producción de justificaciones y demostraciones. También se considera el hecho de que una evaluación de esto debe ser considerada para poder determinar los avances en los aprendizajes de los alumnos, por lo que se proponen algunas herramientas que pueden servir como base para avanzar en esta dirección.

En la parte final de este escrito, y con base en algunos proyectos que se han realizado, se propone una manera de aproximarse al aprendizaje de la demostración desde un punto de vista pragmático y activo, basándose en el hecho de que el proceso de construcción de la demostración (y de las Matemáticas) es cognitivamente continuo.

La necesidad de la validación en el desarrollo del conocimiento

Tradicionalmente en las ciencias experimentales se le enseña a los alumnos que la validación forma parte del “método científico”, pues es el medio en el que el individuo (y la comunidad científica) verifica que lo que se está aprendiendo o desarrollando puede ser tomado como cierto y así avanzar en el conocimiento (personal o colectivo).

De esta manera los individuos experimentan con objetos y luego validan sus observaciones. Siempre considerando un marco de referencia (teórico) y siguiendo ciertas reglas (metodología) que ofrecen cierta garantía de que los resultados validados tendrán, valga la redundancia, validez.

En el caso de las Matemáticas se tienen dos diferencias: La primera es que se ha creado la imagen de que no es una ciencia experimental y la segunda, que ha contribuido para tener la anterior, es la naturaleza abstracta de los objetos matemáticos. La forma que tiene la demostración matemática es consecuencia de dicha naturaleza:

La demostración formal nace como una respuesta a una demanda continua de justificación, una demanda que se remonta a Aristóteles y Euclides, a través de Frege y Leibniz. Ha habido siempre una necesidad de justificar nuevos resultados (...), no siempre en el sentido limitado de definir su verdad, sino más bien en la más amplia acepción de suministrar razones para su plausibilidad. La demostración formal ha sido y es una respuesta suficientemente útil a esta preocupación por la justificación.” (Hanna, 1996, pág. 30)

Al considerar esto en el aprendizaje de las Matemáticas, las instituciones mexicanas lo han ido incorporado en sus currículos como parte del desarrollo matemático del estudiante del nivel secundario y orientado hacia la producción de argumentos como parte del proceso. Por ejemplo, en el caso de la Secundaria (nivel Medio Básico, alumnos de 12 a 15 años) oficialmente está planteada como una de las competencias a desarrollarse:

Validar procedimientos y resultados. “Consiste en que los alumnos adquieran la confianza suficiente para explicar y justificar los procedimientos y soluciones encontradas, mediante argumentos a su alcance que se orienten hacia el razonamiento deductivo y la demostración formal.” (SEP, 2011, pág. 23)

Además, para la segunda parte del nivel Medio, que es el Bachillerato (nivel Medio Superior, alumnos de 15 a 18 años), la documentación oficial incluye como una de las competencias del alumno la siguiente:

Argumenta la solución obtenida de un problema, con métodos numéricos, gráficos, analíticos o variacionales, mediante el lenguaje verbal, matemático y el uso de las tecnologías de la información y la comunicación. (SEP, 2008, pág. 22; SEP, 2009)

En este sentido se nota que la argumentación está vinculada con la validación de procedimientos y resultados, con la explicación y la justificación, todo con una orientación definida hacia el razonamiento deductivo y la demostración formal. Es por ello que conviene repasar algunas definiciones como la de explicación que proporciona Balacheff (2000, pág. 12): “En el momento en que la explicación se expresa en un discurso, ésta pretende hacer inteligible a los espectadores la verdad de la proposición ya adquirida por el locutor.”

Sin embargo, cuando Balacheff hace una distinción entre el significado de “prueba” y de “demostración” deja a ésta última fuera del ámbito del contexto escolar de los niveles primario y secundario al situarla únicamente en el contexto de las Matemáticas como ciencia. No obstante es indispensable considerar que la clase de Matemáticas es un contexto muy particular en el que los estudiantes están construyendo sus saberes de una manera continua, social y guiados por el profesor bajo ciertas directrices sociales e institucionales. Es por ello que los significados que toma la demostración en este espacio y su relación con los otros contextos es lo que ocupa y preocupa a aquellos que buscamos estrategias y respuestas para orientar la actividad didáctica y ante tal preocupación se reconoce la necesidad de asumir una postura respecto al desarrollo de la habilidad argumentativa.

En el contexto escolar más que las demostraciones que prueban que un hecho es verdadero, interesan las demostraciones que explican. En éstas el sujeto hace conjeturas, explora y argumenta, desarrollando conocimiento en un proceso significativo en el que el énfasis no está en el rigor, sino en la comprensión del proceso y del resultado. En este sentido en Larios y Acuña (2009) se hace el planteamiento de que si se quiere enseñar la demostración en la escuela (básica y media), entonces “se requiere afinar una idea adecuada de demostración en el entorno escolar que considere como ejes de funcionamiento el rigor (localmente aplicado) y distinguiendo claramente la necesidad de la obtención del significado matemático también aplicado al proceso en cuestión” (pág. 61).

Para lo anterior se ha estado trabajando en proponer una caracterización de las justificaciones que se pueden considerar en la escuela. Ésta considera los elementos que aparecen en una argumentación que, en el proceso de aprendizaje, evolucionaría a lo largo de la vida escolar de un alumno desde el nivel básico al medio (niveles primario y secundario). Por lo que en la siguiente sección se expondrán elementos más específicos al respecto.

Una aproximación pragmática a la noción de demostración

La demostración matemática, como ya se sabe, pertenece al proceso científico de las Matemáticas. En la escuela de los niveles básico y secundario se incluye la enseñanza de la validación matemática y por ello se requiere poder evaluar los avances de los alumnos en este sentido. Para ello es pertinente pensar en cómo justifican (argumentan) los alumnos para poder determinar, con base en la referencia de la institución matemática (en el sentido de Godino y Batanero, 1994), los avances y las acciones necesarias para que, a través de la enseñanza, los alumnos aprendan a validar en Matemáticas.

En las siguientes secciones proporcionaremos elementos que pueden servir para analizar las justificaciones, como argumentos, que proporcionan los alumnos y así acercarnos a la demostración en la escuela.

El modelo funcional de Toulmin

Stephen Toulmin propuso una herramienta que puede ser utilizada para analizar la estructura funcional de los argumentos. Con este modelo, conocido como el modelo de Toulmin (2007), el autor buscó resolver el problema de aportar elementos para determinar si un argumento en particular era válido a partir de su estructura y las relaciones entre los elementos que intervienen.

El esquema más sencillo, que de hecho podría corresponder a un argumento basado en el razonamiento deductivo, es el que se compone de tres elementos: los datos (D), las garantías (G) y la conclusión (C). Además se puede añadir el respaldo (R), que correspondería a la parte de la teoría que está considerando el argumento. Esquemáticamente se tendría lo siguiente:

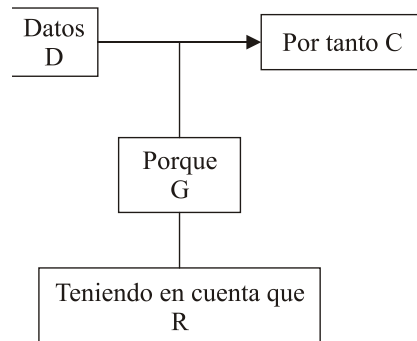


Figura 1. Esquema básico del argumento.

Sin embargo hay que considerar que este tipo de argumentos son los que se esperan para cuando un alumno “aprendió” Matemáticas, es decir, es un matemático o tiene una formación matemática relativamente avanzada. Esto quiere decir que los alumnos al inicio de su vida escolar no argumentan de esta manera, sino que esta es la manera “final” de argumentar en el proceso de aprendizaje matemático.

En este sentido resulta inútil esperar sólo argumentos de este estilo durante la vida escolar del alumno, por lo que se requiere considerar una estructura que incluya más elementos que permitan un análisis y una evaluación que, finalmente, pueda conducir al alumno hacia el esquema “típicamente” matemático.

Consideraremos el siguiente esquema que incluye además modalizadores (M), que permiten matizaciones en el argumento, y condiciones excepcionales (E) que pueden servir para aceptar o rechazar las conclusiones dependiendo de la situación. Así que esquemáticamente lo siguiente:

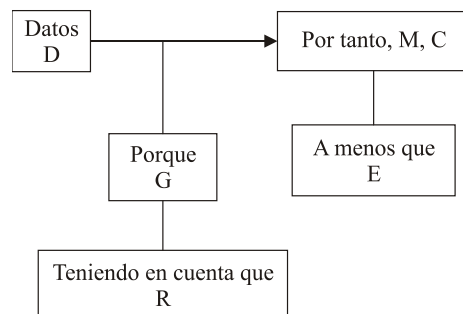


Figura 2. Esquema ampliado del argumento.

Decíamos un par de párrafos arriba que la estructura de la figura 1 correspondería al razonamiento deductivo, pero hay que aclarar que mientras todo argumento basado en el razonamiento deductivo idealmente tendría esa estructura, no todo argumento con dicha estructura correspondería a un razonamiento de este tipo. Esto es porque el tipo de garantía, para esa estructura, y los modalizadores y las excepciones, para la estructura de la figura 2, proporcionarán información sobre el tipo de argumento que se está presentando y que, a continuación, ahondaremos.

Esquemas de argumentación o de demostración

Cuando un alumno proporciona argumentos para sustentar o validar lo que propone (una propiedad, una observación, una respuesta a un problema o ejercicio) lo que está buscando es, principalmente, cumplir con dos aspectos que mencionan Harel y Sowder (Harel, 2007; Harel y Sowder, 1998): el *convencimiento* (o determinación), entendido como el proceso individual para remover las propias dudas acerca de la verdad de una aserción (convencerse a uno mismo); y la *persuasión*, como el proceso de remover las dudas de otros acerca de la verdad de una aserción (convencer a los demás). Con esta consideración estudiaron las maneras en que los individuos validaban sus afirmaciones e introdujeron la idea de esquema de demostración individual llamado esquema de prueba y que definieron como “todo lo que significa convencimiento y persuasión para esa persona”. Los esquemas los agruparon en tres grandes categorías que, a su vez, pueden contener subcategorías (ver la figura 3):

- **Esquemas de pruebas por convicción externa:** Son aquellos que se presentan cuando las afirmaciones se apoyan en elementos ajenos al sujeto y se organizan en tres subcategorías:
 - **Esquemas de prueba autoritarios:** Se sustentan en una autoridad, como el profesor o el libro de texto.
 - **Esquemas de prueba ritual:** Se basan estrictamente en la apariencia del argumento. El ritual de la presentación hecha por la autoridad (el profesor, un libro, un experto) es en este tipo de esquemas lo que convence a alguien y le sirve para despejar sus dudas.
 - **Esquemas de prueba simbólicos no referenciales:** Se apoyan en manipulaciones simbólicas donde los símbolos o las manipulaciones no poseen un sistema coherente de referentes a los ojos del estudiante.
- **Esquemas de prueba empíricos:** En los cuales las conjeturas se aceptan o rechazan en virtud de experiencias sensoriales. De acuerdo al énfasis que aparezca en las mismas, pueden ser:
 - **Esquemas de prueba inductivos:** Basado en la evidencia de ejemplos, de mediciones directas, sustitución de números específicos en expresiones algebraicas, etc.
 - **Esquemas de prueba perceptuales:** Sustentado en percepciones visuales.
- **Esquemas de prueba deductivos:** Que están constituidos a su vez por dos subcategorías:
 - **Esquemas de prueba transformacionales:** Éstos tienen tres características esenciales: la de poseer generalidad (cuando la meta que se persigue es justificar mediante un argumento que resulte válido para todos los casos y no se aceptan excepciones), pensamiento operacional (que se manifiesta cuando un individuo concibe metas o submetas intentando anticipar resultados durante el proceso de la demostración), e

inferencia lógica (cuando el individuo comprende que la justificación en matemáticas debe estar basada en última instancia sobre reglas lógicas de inferencia). La transformación de imágenes ocurre por medio de las deducciones lógicas, a diferencia de las relaciones observadas inductiva o perceptualmente, consideradas como estáticas. Las operaciones de transformación se realizan o pueden realizarse de manera intencionada y prever sus efectos.

- **Esquemas de prueba axiomáticos:** Los cuales poseen las tres características anteriores pero también incluyen el atributo de que el individuo comprende que cualquier proceso de demostración debe empezar desde términos ya definidos y aceptados (axiomas), y las entidades a las cuales se aplican son parte de la realidad matemática de uno (Harel, 2007). Si los axiomas responden a la pura intuición de la persona entonces se trata de un esquema intuitivo axiomático, pero cuando se piensa en las conjeturas como representaciones generales en diferentes modelos que comparten una estructura matemática común se reconoce un esquema axiomático estructural.

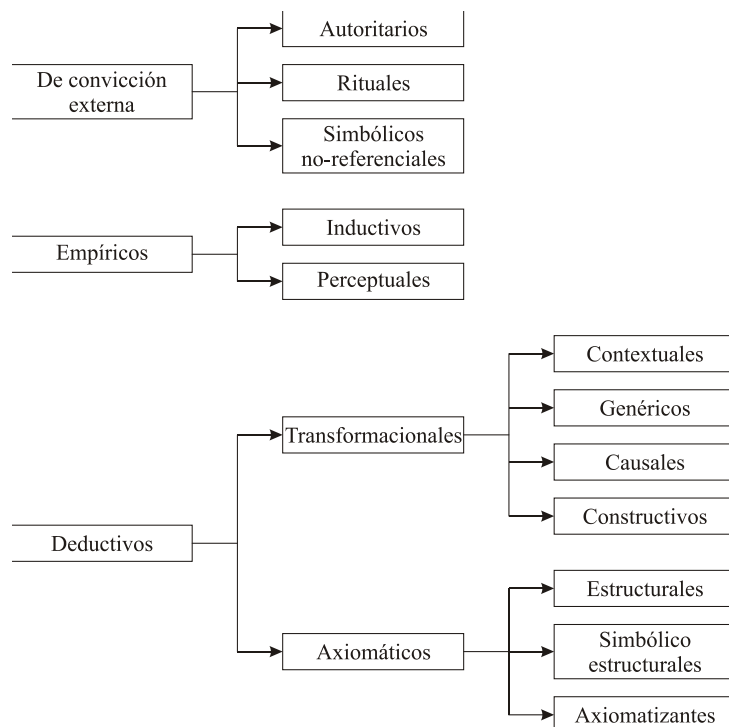


Figura 3. Esquemas de demostración propuestos por Harel y Sowder.

Ahora bien, lo que interesa en este trabajo es más bien la argumentación, como vía para el aprendizaje de la demostración como se le reconoce comúnmente, y en ese sentido la propuesta anterior ha sido tomada por Flores y sus colegas (Flores, 2007; Flores, Gómez y Flores, 2010) para aplicarla al estudio de los argumentos producidos por profesores de bachillerato cuando justificaron soluciones de problemas geométricos. Ellos observaron que existen similitudes en las maneras de argumentar de los profesores de bachillerato en México y de los estudiantes en los que basaron su estudio Harel y Sowder, pero le han llamado más bien «esquemas de argumentación» porque los entienden como “el conjunto de acciones y razonamientos que un individuo pone en juego para justificar o explicar un resultado o para validar una conjetura nacida durante el proceso de resolución de un problema” (Flores, 2007, pág. 71) ya que no están

ligados necesariamente a la demostración de teoremas, sino también a la validación de resultados de problemas. Considerando lo anterior han propuesto una categorización jerárquica de esquemas de argumentación como sigue (ver la figura 4):

- **Autoritarios.** Las argumentaciones se apoyan en las afirmaciones hechas por alguna autoridad. puede ser un libro de texto, el instructor del curso u otro compañero.
- **Simbólicos, (sic)** El estudiante utiliza un lenguaje matemático y símbolos de una manera superflua y poco consistente, sin llegar realmente a las conclusiones a las que quiere llegar. En este tipo de esquemas pueden mencionar conceptos poco claros o inventados.
- **De recuento fáctico o simplemente fácticos. (sic)** en los que el profesor [el individuo] hace un recuento de lo que hizo a manera de explicación o justificación de algún resultado. El estudiante expone una serie de pasos a manera de algoritmo.
- **Empíricos.** El estudiante se apoya en hechos físicos o en un dibujo. En este caso, el dibujo o el hecho físico constituye un argumento por sí mismo y no un apoyo para el argumento.
- **Analíticos.** El estudiante sigue una cadena deductiva, sin que por ello llegue forzosamente a una conclusión válida. Las proposiciones de este tipo de esquema se pueden estructurar en oraciones «si..., entonces...». (Flores, Gómez y Flores, 2010, pág. 28)



Figura 4. Esquemas de argumentación propuestos por Flores y sus colegas.

Esta categorización puede servir para identificar el proceso de los alumnos cuando aprenden a justificar en la clase de Matemáticas (ver la figura 4). Para ello se puede utilizar el modelo de Toulmin previamente mencionado considerando la naturaleza de los datos (D), las garantías (G) y el respaldo (R), así como los modalizadores (M) y las excepciones (E), para así identificar un cierto argumento o justificación en el esquema correspondiente.

Lo anterior lo podemos ejemplificar de las siguiente maneras:

- Si se tiene una justificación que la parte de la garantía (G) está basada en afirmaciones como “el profesor dijo...” o “en el libro dice...” entonces hay indicativos de que dicha justificación corresponde a un esquema autoritario. Incluso pueden omitirse los datos (D) en el argumento porque se ignoran deliberadamente y los elementos M y E pueden omitirse por ser innecesarios.
- En el caso de justificaciones que se ajusten a esquemas simbólicos se podría esperar que la garantía (G) esté basada en el manejo de símbolos de una manera poco clara a partir de los datos (D) existentes. Esto aparecen explícitamente y se utilizan, pero precisamente es la manera en cómo se utilizan, apelando incluso a “propiedades” inventadas, lo que indicaría el tipo de esquema.
- En el caso de los esquemas fácticos (o de recuento fáctico) las garantías proporcionadas hacen referencia directa a las construcciones o algoritmos utilizados. Es posible que el respaldo (R) aparezca de manera explícita, pero tanto ésta como G pertenecen a, como se dijo, algoritmos o pasos realizados. Es como decir que algo “funciona” porque se hizo como se hizo (para que “funcionara”), pero no se proporciona la razón del “funcionamiento”. Tanto los modalizadores (M) como las excepciones (E) pueden estar

presentes por las limitantes de los algoritmos, de los procedimientos y de las herramientas utilizadas (calculadoras, papel, computadoras, etcétera).

- Un esquema empírico podría incluir justificaciones en los que los datos (D) son considerados como casos particulares y la garantía (G) utilizada hace referencia tales casos particulares. La aparición de modalizadores y excepciones que hagan referencias a casos particulares evidenciaría aún más el tipo de esquema utilizado. Algunos tipos de justificaciones podrían considerar el caso de razonamientos abductivos.
- En el caso de que se tuviera una justificación con una estructura como la esquematizada en la figura 1 y tanto la garantía (G) como el respaldo (R) poseyeran la característica de proporcionar propiedades en las que son verificadas hipótesis para la obtención de la conclusión (C), se podría pensar en esquemas analíticos.

Ahora bien, todo lo anterior se ha planteado considerando que los alumnos no inician la escuela (nivel primario y luego secundario) utilizando esquemas del tipo analíticos, sino que están inmersos en un proceso evolutivo. Así que cuando los alumnos están justificando hechos matemáticos lo deben hacer de acuerdo a su desarrollo cognitivo y contexto escolar, siempre considerando que las justificaciones que proporcionen vayan orientadas a la idea matemática que se tiene de referencia. En este sentido valdría la pena entonces acotar el tipo de justificaciones que se podrían considerar como «justificaciones matemáticas» y que abordaremos a continuación.

Una caracterización de la demostración

Como los argumentos que se presentan en el salón de clases de los niveles primaria y secundaria no serían aceptados por la comunidad matemática como “demostraciones”, pero considerando que la misma noción de demostración ha ido cambiando con el tiempo de acuerdo a las prácticas de dicha institución bajo la influencia del desarrollo científico y filosófico de cada una de las épocas (ver González y Larios, 2012; Hanna, 1996; Hanna y Barbeau, 2008; Larios, 2005) y con la finalidad de no continuar fomentando la idea de que los alumnos no pueden demostrar (desmitificarla) para que así se pueda aprender a demostrar (como proceso que involucra la formación del pensamiento), se ha considerado una aproximación pragmática a la noción de la demostración en la escuela.

Esto incluye considerar que hay justificaciones que aparecen en la escuela que no necesariamente cumplen con condiciones adecuadas para encaminarse hacia un pensamiento deductivo o formal, es decir, no todas las justificaciones o argumentos podrían considerarse apropiados. Es por ello que se hace necesario determinar las características de una justificación para que pueda ser considerada una demostración en la escuela (se hace énfasis en la parte “en la escuela”). Esta caracterización propuesta incluye los aspectos semánticos relacionados con el significado que tiene la demostración como medio de validación para eliminar dudas en uno mismo y en los demás (la idea de Harel y Sowder) y aspectos sintácticos relacionados con el lenguaje matemático, tal como los que considera Stylianides (2007) que toma como base para sus análisis la estructura de los sistemas axiomáticos formales.

Así que consideraremos que la demostración matemática en el contexto escolar es una serie de argumentos matemáticos que tiene las siguientes características:

- Hacen referencia a un hecho matemático.
- Tienen como función primaria el de convencerse a sí mismo y a otros para proporcionar una explicación del hecho matemático.
- Las formas de comunicación utilizadas deben ser conocidas por los miembros de la comunidad escolar o, en su defecto, que puedan ser aprendidas por ellos.
- Los enunciados utilizados son aceptados por la comunidad escolar, ya sea explícita o implícitamente.
- La serie de argumentos está organizada con base en formas de razonamiento válidas o correctas. En particular se puede considerar el razonamiento deductivo que provee argumentos deductivos. (González y Larios, 2012, pág. 33)

Así que con estos antecedentes (características, estructura y tipología) podemos considerar en cómo analizar y fomentar el desarrollo de las demostraciones en la escuela como medios de validación del conocimiento matemático personal de cada uno de los alumnos de los niveles básicos.

La construcción continua de la demostración

Ya hemos considerado el hecho de que la validación de los conocimientos matemáticos, tanto para un alumno de primaria o secundaria como para un profesional o investigador matemático, forma parte del proceso de construcción del conocimiento. En este sentido no puede desligarse de manera arbitraria a dicho proceso. Es decir, se ha visto que pierde el sentido que se busca si la dinámica escolar en cuanto a realizar validaciones se restringe sólo a verificar resultados o realizar demostraciones partiendo de afirmaciones ya establecidas por la autoridad en el aula, ya sea el profesor o el libro de texto (ver Boero, Garuti y Mariotti, 1996; Chazan, 1993; Larios, 2005). Resulta conveniente incorporar este proceso de validación a un proceso mayor de construcción del conocimiento.

El ciclo de construcción de demostraciones como proceso de aprendizaje matemático

Es relativamente común que para abordar la producción de justificaciones o demostraciones en los últimos años de los niveles primario y secundario (niveles Medio Básico y Medio Superior en México) se les proporcione a los alumnos afirmaciones ya existentes para después, tras algunos ejemplos, pedirles que proporcione una demostración. Incluso se puede dejar momentos específicos en los cursos en que se haga esto o, incluso, se llega en algunas instituciones a marcar esos momentos en los programas de estudio.

Sin embargo cuando ocurre esta situación como si el demostrar fuese un “momento especial” en Matemáticas se promueve la idea de que la validación del conocimiento matemático es algo ajeno al proceso de construcción del conocimiento. En estos casos no se les pide a los alumnos que formulen conjeturas o elaboren el enunciado que está siendo tomado en cuenta, sino únicamente que reconstruyan el proceso que, previamente, alguien ha realizado. Desafortunadamente, especialmente para el alumno, dicho proceso fue realizado por un individuo (generalmente un matemático) cuyo manejo del conocimiento y de sus habilidades para generar razonamientos deductivos ya han sido desarrolladas, además de que para el enunciado en particular que se está “demostrando” tuvo un conocimiento y una interacción previa, además de que es muy probable que haya asociado a dicha demostración significados surgidos de la interacción teórica entre las hipótesis y la tesis. Esta situación acarrea

innumerables conflictos para el alumno y genera obstáculos para su aprendizaje, dado que estos recursos no le son igualmente accesibles.

En parte las dificultades que enfrentan los alumnos se relacionan con el hecho de que ellos deben *re-construir* la complejidad cognitiva de un proceso en el cual se enlazan funcionalmente actos de pensamiento de diversas naturalezas que los llevan a actividades parciales que son difíciles de *re-unir* en una sola (Larios, 2005). Es por ello que una vía alterna en la Educación Matemática, y en particular en la enseñanza de la demostración, es considerar la producción de justificaciones que para que tengan las características mencionadas en la sección anterior, éstas sean producto de exploraciones o de observaciones. Esto es porque se ha visto que cuando los alumnos exploran situaciones, plantean conjeturas y luego construyen las demostraciones correspondientes aparece una unidad cognitiva en el proceso. A esta noción Boero, Garuti y Mariotti (1996) denominaron la *Unidad Cognitiva de Teoremas*. Con ello se propone que la construcción de la demostración involucra un proceso continuo, en términos cognitivos, en el que se pasa por varias etapas de una manera no necesariamente lineal (como en el caso del proceso de construcción de las Matemáticas como ciencia y que realizan los matemáticos profesionales). Estas etapas se pueden enlistar de la siguiente manera:

1. Exploración de una situación dada que puede ser propuesta por el profesor o generada a partir de situaciones previas.
2. Producción de una conjetura o planteamiento de una propiedad tras la observación llevada a cabo.
3. Exploración orientada a la búsqueda de justificaciones de las conjeturas o propiedades planteadas u observadas.
4. Producción de la demostración que valida o justifica, mediante el encadenamiento de argumentos, las conjeturas o las propiedades planteadas u observadas.

En trabajos previos se ha aprovechado esta idea para que los alumnos del nivel medio (Básico y Superior, 14-17 años) observen situaciones, resuelvan problemas, propongan propiedades geométricas y produzcan justificaciones (Arellano y Larios, en evaluación; González, 2010; González y Larios, 2012; Larios, 2005).

Para situaciones de este tipo se aprovechó el software de Geometría Dinámica (SGD) como instrumento de mediación semiótica entre el individuo y el conocimiento geométrico. En este sentido el software permitió diseñar ambientes que permitieran, precisamente, la exploración y la observación de situaciones para la búsqueda de regularidades y condiciones geométricas. Este software, por la capacidad dinámica que le otorga la operación de «arrastre», permite este tipo de actividades pues es un medio en el que el alumno del nivel medio, que no tiene un desarrollo cognitivo de una persona que ha trabajado con objetos matemáticos de manera asidua (como el matemático profesional), puede manipular representaciones de objetos matemáticos como si fuesen objetos más bien concretos y susceptibles a ser parte de experimentación.

Es importante mencionar que este tipo de herramientas digitales pueden incidir en los significados que se construyen acerca de los objetos matemáticos. En el caso particular de los geométricos se ha reportado en la literatura diversos fenómenos relacionados que deben ser tomados en cuenta por los profesores y que pueden estar vinculados a las representaciones gráficas (Larios y González, 2010), con la escritura de las demostraciones (Leung, 2009), con la necesidad o el sentido de justificar —o la falta de éstos— al confundir los casos particulares con las demostraciones (Chazan, 1993), entre otros que vale la pena explorar e investigar.

Ahora bien, regresando al ciclo recién mencionado hay que decir que este proceso permite partir de una situación y así el alumno realiza exploraciones, planteamientos y valida el conocimiento, de manera individual y grupal. Como se mencionó un poco más arriba, este proceso no necesariamente resulta en un “ciclo” de las etapas mencionadas, sino que puede requerir más de una exploración, pero idealmente se obtendrá una validación del conocimiento matemático observado o conjeturado. Este resultado obtenido (no la validación, sino el conocimiento matemático) o bien algún otro obtenido durante el proceso realizado podría servir como punto de inicio para nuevas exploraciones y así continuar con otros ciclos que lleven a exploraciones, descubrimientos y demostraciones en el salón de clase.

En términos educativos, además, se puede esperar que los alumnos comiencen proporcionando validaciones que tienen características de los esquemas de argumentación autoritarios o simbólicos, pero mediante un diseño y un seguimiento adecuados por parte del profesor podría pensarse que este proceso cíclico de exploraciones y sistematizaciones llevaría a un espiral que, de una manera simplificada, aparece en la siguiente figura:

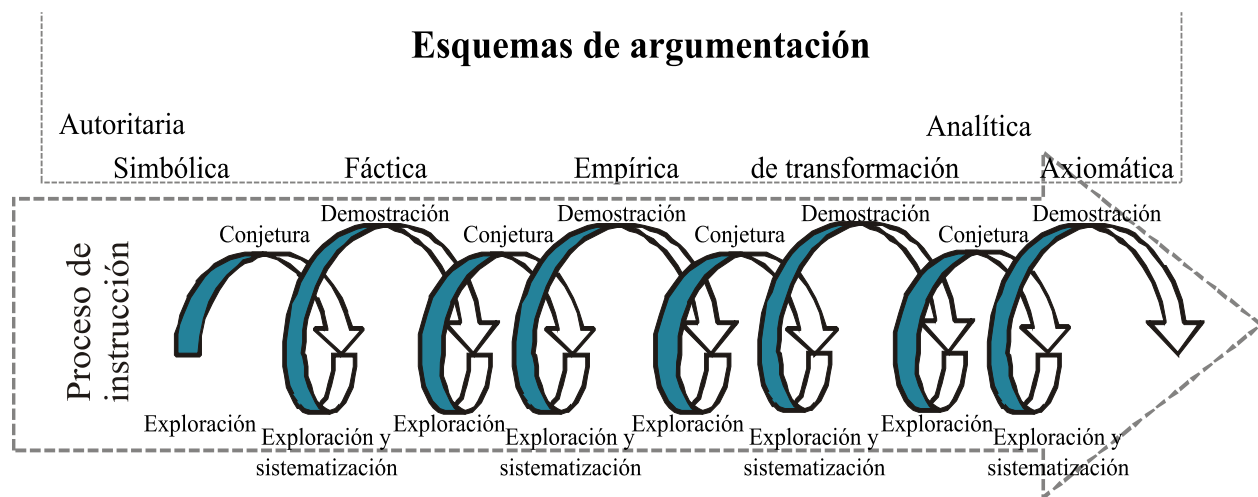


Figura 5. Propuesta del proceso de la construcción continua de la demostración (CCD).

La necesidad de una evaluación

Existe una necesidad institucional por la evaluación que se presentó en la segunda sección de este trabajo donde se hacen referencias a documentos oficiales mexicanos para los niveles Medio Básico y Medio Superior que corresponden a la educación secundaria en otros países.

Pero en términos académicos esa necesidad de evaluación en el proceso educativo es real y más significativa. En efecto, es ahí donde se necesita evaluar el proceso de aprendizaje para determinar la situación en la que se “encuentra” el alumno (o el grupo de alumno) y así permitir al docente proponer acciones o actividades tendientes al logro del aprendizaje de los alumnos.

Es importante mencionar que este tipo de evaluación no está necesariamente vinculada con la calificación o acreditación, sino con el análisis de las condiciones cognitivas y desarrollo de los alumnos. Este requerimiento académico nos lleva a buscar herramientas útiles y adecuadas para llevarla a cabo dicha evaluación. Se propone que los elementos que se han planteado en la tercer sección de este trabajo pueden ser herramientas útiles para analizar los elementos de las demostraciones que proponen los alumnos durante su proceso de aprendizaje:

- La caracterización propuesta permite determinar si un argumento proporcionado por un alumno puede ser considerado como una posible demostración (siempre en el contexto escolar).
- Con el modelo de Toulmin es posible identificar los elementos que aparecen en el argumento proporcionado por el alumno, para así determinar si está completo, es decir, si aparecen todos los elementos necesarios como la garantía (G), la conclusión (C), los datos (D), etcétera. En este sentido vale la pena mencionar que, por ejemplo, se ha observado en diversos trabajos que los alumnos no proporcionan argumentos con todos estos elementos necesarios de una manera “natural”, sino que se requiere la intervención explícita del profesor o del grupo social (ver Arellano y Larios, en evaluación; Toro, 2014).

Además, con este modelo se puede determinar si en el argumento a evaluar aparecen elementos que pueden resultar superfluos como son los modalizadores (M) o las excepciones (E). Además, al identificar las garantías y el respaldo (R) se puede identificar el tipo de éstas y así considerar el tercer elemento.

- A partir principalmente de las garantías y el respaldo de un argumento se puede identificar el tipo de esquema de argumentación que le corresponde y así determinar en qué punto se encuentra el alumno en el proceso de aprendizaje de la demostración.

Es importante mencionar que existe otro aspecto a ser considerado y es la intervención de los procesos cognitivos relacionados con el aprendizaje de la demostración. En relación con esto podemos decir que falta trabajo en este sentido para identificar, si es posible, cuáles son tales procesos involucrados y en qué niveles lo están para así poder desarrollar herramientas que permitan una evaluación. En este momento se está iniciando un proyecto en este sentido con alumnos del nivel Medio Básico en Querétaro.

Comentarios finales

En el Plan de Estudios de la Educación Básica (6 a 15 años) de la Secretaría de Educación Pública de México (2011, pág. 49) se establece: “Para avanzar en el desarrollo del pensamiento matemático en la primaria y secundaria, su estudio se orienta a aprender a resolver y formular preguntas en que sea útil la herramienta matemática. Adicionalmente, se enfatiza la necesidad de que los propios alumnos justifiquen la validez de los procedimientos y resultados que encuentren, mediante el uso de este lenguaje.”

Nuevamente es una necesidad institucional, pero establece de inicio que la validación del conocimiento matemático que sea formulada por los alumnos es una parte ineludible del aprendizaje. Ésta es una etapa forma parte del proceso completo en la atribución de significados adecuados sobre las Matemáticas.

La propuesta de trabajar la demostración matemática en los contextos escolares desde una aproximación pragmática y a través de procesos de una construcción continua del conocimiento matemático promueve, desde nuestro punto de vista, la desmitificación de la demostración. Además, planteado así, este proceso de aprender a demostrar se constituye en un proceso de construcción del conocimiento matemático. Es decir, si se plantean situaciones donde los alumnos tienen que explorar e identificar propiedades invariantes, tienen que investigar además sobre los conceptos y los procedimientos que giran en torno a éstos, y tienen que trabajar en colaboración con sus compañeros y con el profesor en la búsqueda de soluciones. En resumen, esto los lleva no sólo a construir una demostración como validación del conocimiento, sino a construir el conocimiento que están validando.

Todavía hay temas por investigar pendientes al respecto pues –por ejemplo– se tienen que revisar los procesos cognitivos involucrados a fin de proponer herramientas apropiadas para su seguimiento en el desarrollo de los alumnos. También se tienen que considerar aspectos como son los contextos institucional y social de los alumnos, así como el uso de instrumentos y representaciones utilizadas en el aprendizaje.

No obstante, consideramos que un trabajo de este tipo puede hacer que el tema del aprendizaje de la demostración se integre al proceso mismo del aprendizaje matemático a lo largo del desarrollo académico del alumno (de una manera longitudinal). Así haría que perdiese sentido el hecho de que la demostración aparezca como un tema ajeno o independiente en los currículos escolares o atribuido a un cierto tipo de temas (como la Geometría), pudiéndose trabajar también de manera transversal en los cursos. En efecto, el aprendizaje de la demostración no queda aislada, sino que aparece como parte del proceso mismo de lo que se llama “aprender Matemáticas”.

Reconocimientos

Para la presentación de este trabajo se contó con el apoyo del Fondo para el Fortalecimiento de la Investigación de la Universidad Autónoma de Querétaro (FOFI-UAQ) con registro FIN-201421 y del Consejo de Ciencia y Tecnología del Estado de Querétaro (Concyteq) a través de su convocatoria de apoyo para realizar actividades de difusión de la ciencia.

Referencias y bibliografía

- Arellano Camacho, C., & Larios Osorio, V. (En evaluación). La argumentación de alumnos de bachillerato al resolver problemas de geometría con lápiz y papel. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime)*.
- Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá, Colombia: Una empresa docente.
- Boero, P., Garuti, R., & Mariotti, M. A. (1996). Some dynamic mental processes underlying producing and proving conjectures. En Á. Gutiérrez, & L. Puig (Edit.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education*, 2 (pp. 121-128). Valencia, España.
- Bourbaki, N. (1972). *Elementos de historia de las matemáticas*. Madrid, España: Alianza Universidad.
- Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, 24(4), 359-388.
- Flores Estrada, C., Gómez Reyes, A., & Flores Samaniego, Á. H. (2010). Esquemas de argumentación en actividades de geometría dinámica. *Acta Scientiae*, 12(2), 22-42.
- Flores Samaniego, Á. H. (2007). Esquemas de argumentación en profesores de matemáticas del bachillerato. *Educación Matemática*, 19(1), 63-98.
- Godino, J. D., & Batanero Bernabeu, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- González González, N. (2010). *Conceptualización de propiedades de las figuras geométricas en un ambiente de geometría dinámica en el nivel medio* (Tesis de maestría). Querétaro, México: Universidad Autónoma de Querétaro..
- González González, N., & Larios Osorio, V. (2012). *Justificaciones en la geometría dinámica de secundaria*. Saarbrücken, Alemania: Editorial Académica Española.

- Hanna, G. (1996). The ongoing value of proof. En L. Puig, & Á. Gutiérrez (Edits.), *Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 21-34). Valencia, España: Universitat de València.
- Hanna, G., & Barbeau, E. (2008). Proofs as bearers of mathematics knowledge. *ZDM The International Journal on Mathematics Education*, 40(3), 345-353.
- Harel, G. (2007). Students' proof schemes revisited. En P. Boero (Edit.), *Theorems in school* (pp. 65-78). Rotterdam, Holanda: Sense Publishers.
- Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. En A. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Edits.), *Research in collegiate mathematics education III* (pp. 234-282). EEUU: AMS.
- Larios Osorio, V. (2005). *Fenómenos cognitivos presentes en la construcción de argumentos en un ambiente de Geometría Dinámica* (Tesis doctoral). Cinvestav-DME, México.
- Larios Osorio, V., & Acuña Soto, C. M. (2009). Geometrical proof in the institutional classroom environment. En F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. De Villiers (Edits.), *Proceedings of the ICMI Study 19: Proof and Proving in Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 59-63). Taipei, Taiwán: National Taiwan Normal University.
- Larios Osorio, V., & González González, N. (2010). Aspectos que influyen en la construcción de la demostración en ambientes de Geometría Dinámica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime)*, 13(4), 147-160.
- Leung, A. (2009). Written proof in dynamic geometry environment: Inspiration from a student's work. En F.-L. Lin, F.-J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villiers (Edits.), *ICMI Study 19 Conference Proceedings: Proof and proving in mathematics education* (Vol. 2, pp. 15-20). Taipei, Taiwán: ICMI y NTNU.
- Perero, M. (1994). *Historia e historias de matemáticas*. México, México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Secretaría de Educación Pública [SEP]. (21 de octubre de 2008). Acuerdo 444. *Diario Oficial de la Federación*, págs. 18-28 (Primera sección).
- Secretaría de Educación Pública [SEP]. (30 de abril de 2009). Acuerdo 486. *Diario Oficial de la Federación*, págs. 74-77 (Primera sección).
- Secretaría de Educación Pública [SEP]. (2011). *Plan de estudios 2011. Educación Básica*. México, México: Secretaría de Educación Pública.
- Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 289-321.
- Toro Uribe, J. A. (2014). *Acercamiento a la argumentación en un ambiente de geometría dinámica: grado octavo* (Tesis de magíster). Universidad de Medellín, Medellín, Colombia.
- Toulmin, S. E. (2007). *Los usos de la argumentación*. Barcelona, España: Ediciones Península.

La maestra Luna y la enseñanza de la multiplicación

Lorena **Trejo** Guerrero
CINVESTAV, Instituto Politécnico Nacional
México

ltrejog@cinvestav.mx

Marta Elena **Valdemoros** Álvarez
CINVESTAV, Instituto Politécnico Nacional
México

mvaldemo@cinvestav.mx

Resumen

El presente trabajo muestra el resultado obtenido de una investigación terminada, en relación a la construcción del número natural, a través del desarrollo de la multiplicación en la escuela primaria. Así mismo, la aplicación y el reconocimiento de las propiedades de la multiplicación nos permitieron analizar el uso que la maestra hace del lenguaje, en el aula, y su relación con los registros de representación, favoreciendo la reflexión sobre las condiciones didácticas que pueden propiciar un aprendizaje significativo de dicha operación. El estudio del caso de la maestra Luna nos permite un acercamiento a lo que consideramos conocimiento observado del profesor, a partir de la manera de otorgar significado a los contenidos matemáticos tratados en la escuela.

Palabras clave: multiplicación, series, lenguaje, representación, número natural.

Introducción

Consideramos al lenguaje como una de las herramientas más importantes de la herencia cultural, lo que permite la comunicación verbal entre personas, la cual refleja y domina completamente la experiencia cotidiana; pero, es preciso para un buen funcionamiento de intercambio de significados adecuados, poseer el código de lenguaje que se requiere en cada espacio de interacción social, en este caso en el campo de la Matemática Educativa.

En el presente trabajo de investigación (de naturaleza cualitativa) nos propusimos abordar cómo el alumno, apoyándose en el *uso del lenguaje*, adquiere diversas nociones y conceptos referidos al número natural, cómo el estudiante de 5° y 6° grados de primaria interactúa con sus compañeros y con su profesor durante sus clases y qué realiza el maestro con sus colegas para mejorar la enseñanza de las matemáticas. En el presente reporte de investigación presentamos el caso de la maestra Luna y la enseñanza de la multiplicación con números naturales, a partir de la elaboración de series.

Planteamiento del problema

Considerando que el currículo institucionalizado es el primer elemento que tomamos en cuenta para considerar lo que debe ser parte del conocimiento matemático del profesor con respecto al contenido de la multiplicación con números naturales, para lo cual es importante

observar las clases de los maestros, agregando además la observación de sus colegas de trabajo, lo que sin duda es una manera innovadora de ver el desempeño docente de los profesores en servicio. A partir de la observación de la clase de la maestra Luna se pretende analizar el lenguaje del aula, tanto entre maestro – alumnos como entre los estudiantes entre sí. Nuestras preguntas de investigación quedan planteadas de la siguiente manera: 1) **¿Cómo orientar al maestro en la elaboración de situaciones didácticas que favorezcan la comprensión de la multiplicación de números naturales, en el niño?** Y con respecto a los alumnos: 2) **¿Cómo elaboran sus representaciones para explicar el proceso de resolución que utilizaron?**

Marco Teórico

En el marco teórico presentamos los elementos que nos permitieron interpretar las prácticas escolares en nuestra investigación, la cual está enfocada a la enseñanza del número natural en la escuela primaria. También presentamos los elementos teóricos que definen a la enseñanza, dado que nuestros sujetos de investigación son los profesores; lo anterior no sería posible sin el conocimiento de la naturaleza del aprendizaje y las implicaciones del pensamiento y el lenguaje de los alumnos.

Problemas de estructura multiplicativa

Continuando con Vergnaud (1991) los problemas de estructura multiplicativa son aquellas situaciones que pueden ser analizadas como problemas de proporción simple y múltiple, para los cuales usualmente se necesita multiplicar o dividir. En este tipo de problemas se establecen relaciones terciarias o cuaternarias entre dos conjuntos donde existe correspondencia entre los tres o cuatro elementos, según sea el caso, ejemplos: problemas de producto de medidas, es decir de relaciones ternarias: $a \times b = c$; estas relaciones son las que la maestra Luna utilizó en los problemas que planteó al grupo de alumnos.

Análisis del lenguaje en el aula

Para el análisis del lenguaje en el aula tomamos las aportaciones de Cazden (1991) quien en la conversación entre iguales menciona que los niños, a diferencia de las conversaciones con el maestro, es con sus compañeros con quienes pueden aportar, en la interacción, elementos intelectuales, dando directrices o cumpliéndolas, haciendo preguntas y contestándolas. El análisis de la interacción verbal permite estudiar ejemplos de intercambio lingüístico en el ámbito real en el que éste ocurre, dado que se puede reconocer que el orden de la interacción lingüística es en sí mismo el resultado de un proceso progresivo de la aplicación recurrente de las reglas y los dispositivos del diálogo.

Otra de las ideas que conviene destacar es la diferencia entre tener un dominio receptivo lingüístico que permita comprender textos procedentes de todo el dominio lingüístico, y ser capaces de utilizar este bagaje de forma activa, las aportaciones de Chomsky (2009) nos permiten observar en las interacciones lingüísticas que hablar y comprender son manifestaciones diferentes de la misma capacidad subyacente, el mismo principio generativo, cuyo dominio provee al hablante oyente de la capacidad de usar y comprender toda la gama infinita de ítems lingüísticos. Por ello, lo importante será entonces analizar cómo se producen y cómo se transforman las oraciones en el aula de educación primaria.

Si consideramos que la lengua es una herramienta que ayuda a facilitar la adquisición de competencias lingüísticas, es el instrumento simbólico mediante el cual cada uno organiza su entorno; es comunicación y por medio de ella el ser humano organiza su pensamiento; tiene un

desarrollo diferente cuando es oral o, cuando es escrita, presenta una dimensión socio-cultural, exhibiendo también un trascendente canal de comunicación pedagógica (Bourdieu y Passeron, 1970). Entonces, si la escuela tiene la función de que los niños comprendan textos y el sentido de las intervenciones orales, provee las condiciones deseables para que a través de situaciones comunicativas los niños desarrollen y pongan en práctica sus competencias, o reproduzcan cánones establecidos, es por demás interesante analizar el intercambio lingüístico que se genera en el aula.

Consideramos que el conocimiento es uno de los modos de apropiación del mundo por el hombre y el lenguaje pasa a ser el medio más importante que permite la transmisión de este conocimiento; Lévi-Strauss, retomado por Barthes (1997), menciona que el lenguaje aparece como una condición de la cultura, en la medida en que esta última posee una arquitectura similar a la del lenguaje.

Dado que una característica de las construcciones complejas del lenguaje es que representan una estructura articulada, exigen un análisis discursivo, entendida tal labor como una empresa perfectamente legítima e indispensable, retomamos dos propuestas de análisis (Thompson, 1993) para nuestra investigación:

- *Análisis conversacional*: el principio metodológico clave de este análisis es estudiar ejemplos de interacción lingüística en el ámbito real en que ocurren y poner una cuidadosa atención a las maneras en que se organizan, dado que el orden de la interacción lingüística es en sí mismo el resultado de un proceso progresivo donde los participantes producen un orden por medio de la aplicación rutinaria y recurrente de las reglas y los dispositivos conversacionales. Pusimos especial atención en la dinámica conversacional entre el profesor y sus alumnos durante la resolución de problemas multiplicativos.
- *Análisis argumentativo*: las formas del discurso, comprenden cadenas de razonamiento que se pueden reconstruir de diversas maneras, en el caso de las matemáticas, no llegan generalmente a ser argumentos válidos en el sentido tradicional de la lógica formal, se interpretan mejor como patrones de inferencia que conducen de un tema o asunto a otro, de una manera más o menos persuasiva o más o menos implícita. El objetivo del análisis argumentativo es reconstruir y hacer explícitos los patrones de inferencia que caracterizan al discurso, esto permite al analista separar el corpus discursivo en conjuntos de enunciados o aseveraciones organizadas en torno a ciertos asuntos o temas, y trazar después las relaciones existentes entre estos enunciados y asuntos en términos de ciertos operadores cuasi lógicos. Por lo tanto, pusimos especial atención en los argumentos de los profesores al explicar los contenidos matemáticos planteados en el aula.

Método

En el caso de la maestra Luna, observamos su clase en una escuela multi - grado en la cual trabaja, en la Zona Escolar 105, Cuyamaloya, perteneciente al Sector 02, Tulancingo de Bravo, Hidalgo. La maestra Luna tuvo a su cargo un grupo de 29 alumnos, 12 de 5° y 17 de 6° grado. Los 19 profesores observadores de la clase de la maestra Luna participaron tanto en la sesión inicial como en la observación de la clase de otros dos casos.

Para el estudio de la clase (Isoda, Arcavi, Mena, 2007) de la maestra Luna, organizamos la información recopilada para su análisis y posterior interpretación y reinterpretación de los observadores -colegas de la mencionada profesora- y la que describe el presente documento,

cuyas impresiones fueron registradas en el protocolo de observación elaborado, previo a la presentación de la clase, para realizar en otro momento de la investigación la entrevista a profundidad. Todo ello nos permitió contrastar lo que la profesora realizó en el salón de clases y lo que nos dice en la entrevista; con estos elementos rescatamos lo más sobresaliente del caso en estudio.

El análisis del lenguaje escolar lo realizamos en dos momentos, el primero fue en la clase presentada por la maestra Luna con sus alumnos (Cazden, 1991) y el segundo, durante la sesión colegiada con los profesores en servicio que participaron como observadores (Isoda, Arcavi y Mena, 2007); esto nos permitió comprender los variados aspectos del proceso de construcción de significados compartidos en el aula.

Con referencia al primer momento, la clase presentada por la maestra Luna, el análisis conversacional y argumentativo entre la profesora y sus alumnos nos dio -tanto a la investigadora como a los profesores observadores- la oportunidad de acercarnos a la reinterpretación desde el lenguaje natural, al lenguaje formal de las matemáticas en torno a la enseñanza de los números naturales, mediante el planteamiento y resolución de problemas multiplicativos y el uso de series numéricas.

El segundo momento se refiere a la reflexión provocada con los profesores en servicio, -con quienes, desde la lógica, se buscan dar organización al pensamiento y a la discusión. Cabe agregar que estos profesores anteriormente realizaron la observación de las clases de otros dos compañeros y sus alumnos, lo cual les permitió identificar un estilo de enseñanza diferente. Agregamos que al presenciar la clase de la maestra Luna y sus alumnos pudimos acercarnos a lo que consideraríamos como conocimiento observado, dado que el conocimiento matemático -de los números naturales y su enseñanza- de la profesora es más amplio.

Validación de resultados

En nuestra investigación etnográfica, para validar los significados que surgen en el aula durante la clase de matemáticas de la maestra Luna, utilizamos como criterio básico de validez los significados locales de las acciones desde el punto de vista de la maestra y sus alumnos, así como las observaciones y reflexiones de la sesión colegiada, pues consideramos que los participantes construyen los significados con diversas versiones de un contenido, dependientes de las situaciones de interacción en donde estas versiones se confrontan, negocian y reconstruyen, según Bruner (2001), lo cual incluye la comunicación oral y la escrita entre los participantes, con un foco especial en los modos de representación -con el uso de series numéricas, en la resolución de problemas multiplicativos con números naturales- tanto en el pizarrón como en los cuadernos de trabajo de los estudiantes y profesores observadores.

Las series numéricas y la multiplicación desarrollada por Luna

Presentamos el caso de la maestra Luna, con el fin de evaluar el alcance de nuestra investigación con respecto al uso del lenguaje como medio indispensable en la construcción del número natural, en la escuela primaria, para lo cual tomamos algunos pasajes específicos recuperados al revisar el trabajo etnográfico a partir del cual elaboramos ejes de análisis. Con la selección de la enseñanza del número natural que realizó la profesora, ella puso el énfasis en el proceso de instrucción orientado a resolver problemas multiplicativos con números naturales, utilizando series numéricas. Consideramos la importancia del estilo de la maestra, dado que

nuestros sujetos de investigación son los profesores, lo cual no será posible sin el conocimiento de la naturaleza del aprendizaje y la identificación del pensamiento y el lenguaje de los alumnos.

Objetivo de la clase

La clase de la maestra Luna tuvo como aprendizajes promovidos explícitamente por ella, el resolver problemas que implican el uso de múltiplos de números naturales, con el apoyo de series numéricas, las cuales están organizadas de tal manera que podemos apreciar el significado que ella les atribuye como material visual y a partir de este nuevo significado, las utiliza para explicar la multiplicación y la división.

Problemas diseñados por la maestra Luna

La maestra Luna continúa la clase planteando los siguientes problemas (Vergnaud, 1991), los cuales resolvieron tanto los alumnos como los profesores observadores (por separado), en parejas (problemas 1 y 2, ver Tabla 1). En el presente escrito presentamos la manera como los planteó la maestra Luna, cómo los resolvieron los alumnos y el análisis de los profesores observadores en la sesión colegiada, posterior a la clase.

Tabla 1

Problemas propuestos por la maestra Luna

1	Instrucciones: I. Resuelve lo siguiente en parejas: Si se parte del 0 y se va de 3 en 3, ¿Se dirá el número 42? _____ ¿Por qué?
2	Si se parte del 1 y se va de 5 en 5, ¿Se dirá el número 76? _____ ¿Por qué?

La maestra Luna reparte unas hojas a los alumnos y a los profesores observadores e indicó que tenían que resolver los problemas en parejas, luego proporcionó a cada niño una hoja en blanco para que escribieran sus operaciones. Presentamos las dos respuestas de los alumnos al primer problema, resueltos por dos de los alumnos del grupo, ver Tabla 2:

Tabla 2

Soluciones de dos niños al problema 1 planteado por la maestra Luna

a) Dulce escribe la serie de 3 en 3 escribiendo el 0.	b) Toño multiplica calculando el número por 3.
0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42	$14 \times 3 = 42$

Con respecto al inciso a) la niña Dulce pasa al pizarrón y escribe la serie, no hay diálogo entre ella y la maestra, ni con sus compañeros; sólo la maestra Luna pregunta al grupo si está bien su compañera y los niños responden que sí a coro.

Toño levanta la mano y dice tener otra forma de solución; luego escribe la respuesta del inciso b):

Toño: *Yo tengo otra forma de solución.*

La maestra Luna le pregunta cómo trató de encontrar el número.

Maestra Luna: *A ver, pasa.*

Toño escribe la respuesta del inciso b) y la maestra Luna le pregunta:

Maestra Luna: *Tú nada más fuiste tratando de encontrar el número.*

Toño: *Multipliqué.*

Maestra Luna: [...] *¿Y no debiste haber sumado algo?*

Toño: *No, porque parte del 0 y va de tres en tres.*

Aquí podemos notar que los niños, al igual que la maestra, toman al cero como punto de partida para el conteo.

En lo que se refiere al problema 2 la maestra Luna cambia el punto de partida y ahora propone comenzar del 1; notamos que la maestra nunca menciona ante el grupo de alumnos que el uno es el punto de partida del conjunto de los números naturales.

Tabla 3

Respuestas de dos niñas al problema 2 planteado por la maestra Luna

a) La niña Yeni escribe la serie como se indica en el problema.	b) La niña Rosa realiza una multiplicación, le suma 1 al resultado y obtiene 76.
1, 6, 11, 16, 21, 26, 31, 36, 41, 46, 51, 56, 61, 66, 71, 76	$ \begin{array}{r} 15 \\ \times 5 \\ \hline 75 \\ +1 \\ \hline 76 \end{array} $

Con respecto a la respuesta del inciso a), la maestra Luna pregunta si está bien al grupo y los niños contestan que sí; no hubo más comentarios.

Con respecto a la respuesta del inciso b), la niña Rosa explicó:

Rosa: [...] *Va de cinco en cinco y luego, cuando llegué al 75, le sumé 1.*

Con respecto a la forma de presentar las dos respuestas anteriores podemos decir que son como las del primer problema, algunos alumnos hacen la serie y otros multiplican.

Lo anterior nos hace suponer que los conocimientos de la maestra Luna con respecto al cero y al uno como punto de partida para el conteo, le sirven para plantear problemas en la clase. En los problemas 1 y 2 podemos apreciar los conocimientos que la maestra Luna tiene con respecto al conjunto de los números naturales, notamos que ella considera al cero como un inicio para el conteo.

Con los planteamientos anteriores, podemos dar cuenta de las dificultades que ha enfrentado la humanidad en torno a la conceptualización del cero a través de la historia, lo cual implica el uso del símbolo o el concepto más allá del símbolo. La maestra Luna y sus alumnos tomaron al símbolo que representa la nada, pero es precisamente esa conceptualización lo que provocó los malos entendidos de quienes no pudieron resolverlo debido a las implicaciones cognitivas para la maestra y sus alumnos, así como las dificultades que han acompañado a uso del cero a través de la historia.

Sesión colegiada de profesores centrada en la clase de la maestra Luna

En esta sección, nos ocupamos del segundo momento de análisis del lenguaje, el cual se refiere a la reflexión provocada con los profesores en servicio -colegas de la maestra Luna- quienes bajo la dirección de un protocolo de observación elaborado previamente tuvieron la oportunidad de tener una participación presencial en la clase de la maestra y sus alumnos de 5° y 6° grados.

Mediante el análisis del conocimiento observado de la profesora Luna, junto con sus colegas, pudimos acercarnos a lo que consideraríamos como conocimiento matemático de los números naturales tanto de Luna como de algunos de los profesores participantes, dado que ellos mostraron tener un bagaje académico y un “capital cultural” eficiente, entendiéndose éste último como las formas de obrar, pensar y sentir que están originadas por la posición que una persona ocupa en la estructura social, según Bourdieu y Paserón (1970).

Con respecto a las reflexiones de los profesores, éstas comenzaron con el análisis de lo que implica enseñar a multiplicar:

Maestro Guillermo: *Los niños se van a dar cuenta que usan una multiplicación cuando resuelvan un problema de una manera más rápida. Siempre y cuando usen números grandes porque con números pequeños sólo suman.*

Maestra Coral: [...] *¿Qué era conveniente? ¿Hacer una multiplicación o hacer una serie? Cuando el niño se da cuenta de eso se apropia de un concepto.*

Maestra Elsa: *En 3° ya usa el niño el algoritmo, pero aun así se siguen utilizando recuadros (se refiere a la tabla pitagórica) pues el niño dice “si lo sé pero cómo lo explico”. Llegar al concepto es precisamente cuando lo puedes explicar con todos sus elementos sin sustituirlos por otro contenido [...].*

Maestra Yolanda: [...] *¿Concepto o uso de algoritmo? Las series numéricas para eso son, un eslaboncito para entrar a la multiplicación.*

En la conversación anterior podemos notar las reflexiones de los profesores en cuanto a la enseñanza de la multiplicación en la escuela primaria, las cuales estuvieron centradas en torno al uso del algoritmo (al parecer de manera mecánica) y a la comprensión de lo que ellos entendían como concepto de multiplicación, que debe ser expresado con un argumento que reúna las propiedades y signos formales de la multiplicación. En seguida se le cuestionó a la maestra Luna en torno al planteamiento de estos problemas que considera ella empezar con 0 o con 1. El siguiente fragmento conversacional nos muestra la interacción y reflexión entre profesores:

Maestra Luna: *Empezar con 0 quiere decir que no vamos a tener nada. Yo lo entendí así, y si empiezo con 1 es porque ya tengo un dulce (pausa), ya tengo algo.*

Maestra Bellalíz: *Hubo confusión ahí por la conceptualización del cero.*

Maestra Coral: *Por el cero y el uno. Porque cuando comienzan a contar los niños empiezan desde el cero.*

Maestra Bellalíz: *Cuando empiezan a contar en la recta numérica empiezan desde el cero no del uno.*

Maestro Hugo: *Pero cuando comienzan a multiplicar, en las tablas empiezan de “dos por uno” no de “dos por cero”.*

En la conversación anterior la maestra Luna justifica el diseño de sus problemas y argumenta qué entiende por comenzar con 0 y con 1, y como ya lo habíamos dicho, toma al cero como un punto de referencia del cual se parte para el conteo.

En el caso de la clase de la maestra Luna, los maestros notaron las dificultades que enfrentan sus alumnos al conceptualizar el cero, pero el maestro Hugo hizo hincapié en el comienzo de las tablas de multiplicar, lo cual nos hace suponer que está pensando que en las tablas de multiplicar no hay problema con el cero. Los maestros notaron las dificultades que

enfrentan los alumnos de Luna al conceptualizar el cero; tal vez sean las dificultades que ellos también enfrentan.

Reflexiones en torno al caso

Ubicándonos en el marco cultural específico de cada región, los individuos participan recreando la cultura al establecer una relación viva y dialéctica con la misma según Bourdieu y Paseron (1970). Por una parte, organizan sus intercambios y dan significados a sus experiencias en virtud del marco cultural en el que viven, influidos por éste. Por otra parte, los resultados de sus experiencias mediatizadas ofrecen nuevos términos que enriquecen y amplían su mundo de representación y experiencias, lo cual confluye con el planteamiento de Chomsky (2009), modificando con ello aunque sea paulatina pero progresivamente, el marco cultural que debe alojar los nuevos significados y comportamientos sociales. La experiencia de los profesores en la escuela multi - grado ofrece sin duda una perspectiva diferente de la enseñanza en general, los maestros que participaron como observadores muestran varias experiencias al respecto.

Al evaluar los alcances de una investigación es necesario indagar en situaciones escolares específicas (las clases) si las causas de los problemas educativos tienen que ver con la forma de enseñar y organizar el trabajo en el aula (Bennet, 1979) pero, sobre todo, con las reflexiones de esas clases por los propios maestros y sus colegas con quienes comparte puntos en común y diferentes de acuerdo a la experiencia de cada uno. Con respecto a la clase de la maestra Luna podemos rescatar puntos importantes como los siguientes:

- * Realizó una planeación sistemática, con actividades bien organizadas, lo que le permitió conducir adecuadamente las interpretaciones de sus estudiantes a pesar de los errores de percepción que enfrentaron. Consideró a las series numéricas como una buena herramienta para introducir y dar sentido a la multiplicación.
- * Logró un buen manejo del grupo de alumnos, diseñó actividades para el trabajo grupal, los organizó en parejas y en equipos y los motivó a expresar sus argumentos a todo el grupo.
- * Elaboró material visible y útil –ilustraciones con 2 bolitas, otra con 4 bolitas, una más con 6 bolitas y así sucesivamente para componer una serie– porque considera que es importante para el aprendizaje y hace buen uso del material didáctico. Esto le sirvió para la construcción de un código local, atribuyendo a cada ilustración presentada el nombre de “figura” y recurriendo en diversas ocasiones a su material didáctico durante la resolución de los problemas.
- * La maestra Luna justificó el diseño de sus problemas de acuerdo a sus conocimientos en torno al cero y al 1 como punto de partida para el conteo, lo cual provocó un conflicto cognitivo en sus alumnos.

Conclusiones

Desde la perspectiva constructivista, las funciones del profesor tienen que ver con planificar de manera flexible para permitir adaptaciones de la enseñanza a las necesidades de los alumnos; tomar en cuenta los conocimientos de ellos con respecto a los números naturales al inicio de las actividades; establecer tareas adecuadas susceptibles de realizarse con la ayuda pertinente, y fijar objetivos comprensibles con el propósito de que las actividades tengan un sentido claro para los alumnos.

Con respecto al desarrollo didáctico de la multiplicación en el aula, Luna considera que dicha operación es un proceso de composición del número en el que los estudiantes experimentan diversas dificultades, en especial, la correspondiente asignación de sentido a las situaciones concretas involucradas en los problemas y a la propia operación. Ante ello, Luna considera a las series numéricas como herramientas adecuadas para aproximarse a la comprensión de las relaciones implicadas en la multiplicación, particularmente las relaciones terciarias (esto es, las que se vinculan con $a \times b = c$, de acuerdo con la solución realizada por dicha profesora).

Los dos momentos centrados en el análisis del lenguaje escolar –uno, el análisis conversacional de los niños y la profesora Luna y otro momento, el análisis argumentativo de los profesores en la sesión colegiada– nos permitieron de acuerdo a las características propias del proceso de interacción y de la estructura del discurso mismo, según Barthes (1997), percatarnos de cómo los alumnos expresan sus ideas matemáticas, cómo siguen o evaden las indicaciones de su profesor, cómo debaten sobre puntos de vista distintos a los de otros niños o a los del maestro en torno a las series numéricas y a su relación con respecto a las multiplicaciones, cómo contribuyen a los procesos de legitimación y cómo muestran la capacidad de toma de decisiones.

Nosotros consideramos fundamental crear espacios de reflexión en los cuales los maestros compartan tanto su experiencia y sus conocimientos del contenido matemático y de las propiedades de la multiplicación, así como sus estrategias de enseñanza y, de a poco al observar la práctica de sus colegas con sus alumnos, construir juntos una alternativa para mejorar la enseñanza de los números naturales en la escuela primaria. Podemos concluir que los profesores argumentan a partir de su experiencia laboral acumulada durante el trabajo con sus alumnos, lo cual les permite justificar sus respuestas, según Bernstein (1994). En este caso, los profesores que participaron como observadores, realizaron comentarios referentes a las dificultades que implica la conceptualización del cero tratado en la clase de la maestra Luna y sus alumnos, de acuerdo a los conocimientos que al respecto cada uno posee.

A lo anterior podemos decir que la sistematización de hábitos reflexivos son necesarios para reconocer el efecto de las decisiones docentes en la enseñanza como la manifestación de un estilo propio, siempre y cuando sean en torno a una clase observada para proporcionar al maestro observador un marco de referencia específico, así como al maestro observado la oportunidad de retroalimentar su propia práctica. El intercambio de propuestas en cuanto a nuevas formas de abordar las problemáticas encontradas, se convertirán en oportunidades para observar las limitaciones propias y construir alternativas de acción, que guíen y mejoren la práctica docente en la Educación Matemática.

La originalidad de nuestro trabajo residió en poner en relieve la naturaleza de algunas elaboraciones cognitivas referidas a los números naturales y justificar la necesidad de una buena comunicación tanto entre maestros (trabajo colegiado) como con sus alumnos (maestro – alumno) y entre los niños y sus pares; cada espacio ofrece rasgos peculiares que los hacen diferentes unos de otros y no menos importantes entre sí. Asimismo, fue muy relevante para el trabajo didáctico en el aula que estos recursos permitieran re-significar la multiplicación canónica.

Referencias bibliográficas

Barthes, R. (1997). Lengua y habla en lingüística En *La aventura semiológica*. Barcelona, España: Paidós.

- Bennet, N. (1979). *Estilos de enseñanza y procesos de los alumnos*. Madrid, España: Morata.
- Bernstein, B. (1994). *La estructura del discurso pedagógico*. Madrid, España: Morata.
- Bordieu, P., & Passeron, J. C. (1970). *La reproducción: Elementos para la teoría del sistema de enseñanza*. Barcelona, España: Editorial Laia.
- Bruner, J. (2001). *Acción, pensamiento y lenguaje*. Madrid, España: Alianza.
- Cazden, C. B. (1991). *El discurso en el aula: El lenguaje de la Enseñanza y el Aprendizaje*. Barcelona, España: Paidós.
- Chomsky, N. (2009). *Problemas actuales en teoría lingüística. Temas teóricos de gramática generativa*. Siglo XXI Editores.
- Isoda, M., Arcavi, A., & Mena Lorca, A. (2007). *El Estudio de Clases Japonés en Matemáticas*. Valparaíso, Chile: Ediciones Universitarias.
- Isoda, M., & Olfos, R. (2009). *El enfoque de resolución de problemas. En la Enseñanza de la Matemática a partir del Estudio de Clases*. Valparaíso, Chile: Ediciones Universitarias de Valparaíso.
- Thompson, J. (1993). *Ideología y cultura moderna*. México, México: UAM.
- Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad*. México, México: Trillas.

La transmisión del conocimiento matemático en la formación de profesores en Matemática

Daniela **Emmanuele**

Departamento de Matemática, Universidad Nacional de Rosario

Argentina

emman@fceia.unr.edu.ar

Marta **Risso**

Instituto Superior del Profesorado N° 3 “Dr Eduardo Laferriere” – Villa Constitución

Argentina

martar@yahoo.com.ar

Florencia **Rodil**

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura, Universidad Nacional de Rosario

Argentina

florencia.rodil@gmail.com

Cintia **Vernazza**

Escuela de Formación Básica, Universidad Nacional de Rosario

Argentina

cinvernazza@gmail.com

Resumen

El presente escrito surge de los estudios y actividades llevadas a cabo dentro del Proyecto de Investigación 1 ING 418 radicado en el Dpto de Matemática de la ECEN – FCEIA y de los resultados obtenidos en el Proyecto 1563 financiado por el Instituto Nacional de Formación Docente. El propósito es indagar las concepciones ontológicas de los diversos actores involucrados en la producción y en la transmisión del conocimiento matemático y poder caracterizar el proceso de deconstrucción, en pos de describir la transmisión del conocimiento matemático en la formación de profesores. Para ello se recolectaron datos a través de encuestas, observaciones de clases y entrevistas, realizados a docentes y a futuros docentes. Los resultados sugieren serias contradicciones entre la postura ontológica y las propuestas didácticas, dificultando el proceso de deconstrucción necesario para una transmisión de la matemática que habilite la producción y no la reproducción de conocimientos.

Palabras clave: conocimiento matemático, concepción ontológica, deconstrucción.

Planteamiento del problema

La preocupación que nos convoca es la forma en que los profesores de Matemática se están formando en relación a cómo podrán transmitir la Matemática dentro del aula. Es una idea compartida por la comunidad de profesores de Matemática, que la manera en que se ejercen las prácticas docentes en el aula de Matemática, está estrechamente vinculada a factores de orden didáctico, pedagógico, de formación disciplinar y a condicionantes institucionales, por mencionar los más importantes; esto es, la forma en que se ejercen las prácticas docentes para la

transmisión del conocimiento matemático se relaciona, en general, con aspectos relativos a los contenidos matemáticos, a la didáctica de la Matemática, a la trayectoria profesional y la experiencia del profesor a cargo, a las características propias de la institución (escuela, profesorado, universidad) en que dichas prácticas se llevan a cabo, entre otras cosas.

Para atender a esta problemática, hemos estado abordando diversas cuestiones: en primer lugar, las concepciones ontológicas de todos los actores involucrados en la producción y en la transmisión del conocimiento matemático; y en segundo lugar, el proceso de deconstrucción en todos los actores involucrados en la transmisión del mismo.

La intención es hallar patrones de regularidad - o diferencias sustanciales - respecto a las concepciones ontológicas de los diversos actores involucrados en la producción y en la transmisión del conocimiento matemático (estudiantes de grado, profesores de nivel secundario, profesores de nivel superior no universitario y universitario, docentes-investigadores y estudiantes de carreras de posgrado relacionadas a la enseñanza de la Matemática) que puedan brindarnos indicios respecto a cómo se gesta el proceso de deconstrucción y que nos permita caracterizarlo, particularmente, entre los futuros docentes, esto es, entre los alumnos avanzados de Profesorado en Matemática.

Partimos del convencimiento de que la manera de concebir una determinada relación entre el saber y la realidad sobre la cual ese saber se fundamenta, afecta al modo en que la transmisión del saber matemático se efectúa y en que las actividades matemáticas se despliegan. En concordancia con esta idea pretendemos encontrar una correlación concreta entre la postura ontológica del docente en su clase, y la propuesta didáctico-pedagógica que hace en su aula, en tanto promotora (o no) de una efectiva transmisión de la matemática, generadora (o no) de construcciones adecuadas de los objetos matemáticos y por ende, de aprendizajes genuinos.

Pero, dentro del ámbito de formación de profesores –tanto universitario como no universitario –, el conocimiento matemático en sí, suele ser un aspecto no abordado, no interrogado, proponiéndolo entonces como algo que está fijo y ha de permanecer inmóvil, inmutable. Por ello, no es frecuente que se discuta la pertinencia de los significados y formas de construcción institucionalizadas de los objetos matemáticos. Así, creemos que es difícil lograr que quien se está formando como futuro profesional de la enseñanza de la Matemática, pueda apropiarse de los conocimientos, evitando en sus prácticas la tendencia a una mera reproducción (Cabrera Chim y Cantoral, 2012, junio). La formación de nivel superior debe contribuir a que los alumnos de profesorado sean capaces de generar diferentes formas de concebir y significar los objetos matemáticos.

Con el fin de lograr que los futuros docentes sean capaces de transmitir significativamente los contenidos matemáticos, en su futura práctica áulica en la escuela secundaria, es fundamental que ellos, como alumnos de profesorado, hayan sido partícipes de una clase configurada como una comunidad de producción (Sessa, 2011); es decir, una clase donde hayan tenido la posibilidad de deconstruir y reconstruir el conocimiento que fundamenta y organiza la acción sobre los objetos de la matemática, dotándolos de significado. La *deconstrucción* es la integración de las diferentes fuentes de conocimientos profesionales (matemático, didáctico, contextual de su salón de clase, curricular, entre otras), que el docente es capaz de abstraer respecto de su propio proceso de construcción, de modo que pueda favorecer el desarrollo de procesos similares *intencionalmente* en los estudiantes.

Por esto mismo, creemos que la *problematización del conocimiento matemático* en sí, dentro de la formación de profesores, es una temática primordial a la que se debe atender, pues es una forma de romper con el *discurso matemático escolar (dME)* institucionalizado, entendido éste como aquel discurso que normativiza, homogeneiza y hegemoniza la manera en que se construyen los conocimientos matemáticos, y que inflexibiliza y hasta enajena la significación de los objetos matemáticos a enseñar. Los intersticios, las fracturas, las resquebrajaduras que la problematización del conocimiento matemático puede generar en el dME - conformado éste por el conjunto de prácticas y representaciones sociales *invariantes* en los actores del sistema didáctico, respecto de lo que es la enseñanza y de lo que es la Matemática (Soto, 2010) – permitirían incidir favorablemente en la práctica de los futuros docentes, al posibilitar la aparición de formas alternativas de presentación de los conocimientos matemáticos, que los liguén a sus distintos tipos de uso y lo asocien a sus distintos significados (Soto y Cantoral, 2010).

Ahora bien, ¿cómo podría problematizarse aquello que se considera dado, fijo e inmutable? De allí que las concepciones ontológicas (mayormente implícitas y no devenidas concientes), tanto de quienes producen como de quienes transmiten la matemática, juegan un papel central a la hora de diseñar estrategias didácticas que favorezcan la construcción del conocimiento matemático en los alumnos. Aún más, cuando se trata de alumnos futuros docentes, esto es, alumnos del Profesorado en Matemática.

Antecedentes y fundamentación teórica

El modelo educativo ha estado histórica y fuertemente influenciado por una visión platónica y hegemónica del conocimiento, según la cual los objetos matemáticos (conceptos y procesos matemáticos) son preexistentes a la experiencia humana, es decir el rol del estudiante es aprender y no construir. La concepción de la Matemática que subyace en la enseñanza es considerada, de acuerdo con este modelo, independiente de la experiencia humana, y de las condiciones históricas, políticas, económicas y sociales en que dicho conocimiento surge. De allí que se sostenga que el conocimiento matemático se ha concebido como un sistema de verdades seguras, no modificable por el individuo. Esta postura obtura la posibilidad de que los actores del sistema didáctico *trastoquen* el conocimiento (Soto, 2010); en particular, no permite que los futuros profesores sean capaces de *deconstruir* los conocimientos en pos de una apropiación efectiva y de una transmisión exitosa de los saberes matemáticos.

Las concepciones ontológicas sobre la matemática pueden ser analizadas desde dos paradigmas, bien diferenciados: uno absolutista, centrado en el platonismo; y otro histórico-social, centrado en el pragmatismo/constructivismo. Cada uno de estos ejes desde los cuales podemos categorizar a los objetos y a la producción de saberes matemáticos, aporta una visión respecto a la posición epistemológica que la matemática ocupa en el ámbito de las ciencias y a la jerarquía de las verdades que enuncia.

El estudio ontológico nos permitirá discutir sobre la dialéctica descubrimiento/creación, la consideración matemática producto/matemática proceso, la relación entre el objeto y el sujeto de conocimiento, la relación entre el conocimiento individual y el conocimiento colectivo, la relación entre el conocimiento matemático y la naturaleza material, el valor de verdad de los conocimientos matemáticos y la utilidad y/o belleza de las matemáticas. (Flores Martínez, 1998: p 40).

La problemática que inscribe la diferencia entre ambas posturas radica en el modo en que se concibe la relación entre saber y realidad. La concepción tradicional de la teoría del conocimiento presenta esta relación como un acuerdo o correspondencia gráfica-icónica; por otro lado, las corrientes constructivistas conciben dicha relación como una adaptación o ajuste en el sentido funcional.

Las acciones de descubrir e inventar nos llevan en la actividad matemática a dos concepciones ontológicas diferentes. La primera supone aceptar que los objetos matemáticos y las relaciones entre ellos tienen un carácter objetivo, la segunda, por el contrario, dota de subjetividad a estos objetos y sus relaciones. (Socas Robayna, Camacho Machín, 2003: p 153).

Cada una de estas posturas repercute de modo particular en la enseñanza de la matemática (Font, 2003). Muy resumidamente podemos decir que desde el platonismo, las teorías matemáticas que se deben enseñar son acabadas y organizadas deductivamente, sin relación directa al problema concreto que las originó, puesto que sus objetos son intemporales y ahistóricos. Desde esta visión platónica se le resta importancia a las traducciones entre las distintas representaciones ostensivas que dotan de sentido a los objetos mismos. Pero, desde el pragmatismo/constructivismo, el conocimiento matemático es activamente construido por el sujeto, y la cognición es funcional a la organización de las experiencias y no al descubrimiento de una realidad trascendente. Desde este planteo histórico-social se destaca la importancia de la negociación de significados y la dialéctica individuo/institución que posibilita la intersubjetividad como factor interviniente sustancial en la representación y conocimiento del mundo.

Existen diversos trabajos tendientes a caracterizar los conocimientos que los profesores de Matemática deben poseer para favorecer el aprendizaje en sus estudiantes. Algunos realizan sus análisis tomando como población de estudio a profesores ya en ejercicio profesional y que cursan estudios de posgrado (diplomaturas o maestrías) relativos a la Enseñanza de la Matemática o a la Didáctica de la Matemática (Cabrera Chim y Cantoral, 2013); otros lo hacen con los profesores formadores de Profesores de Matemática (Sessa, 2011), y hasta encontramos artículos incluso que plantean esta temática entre los profesores universitarios (que enseñan asignaturas matemáticas o no) en carreras de Ingeniería (Emmanuele, 2009, sept; Chirinos, Rondón y Padrón, 2011). No obstante, ninguno de ellos, focaliza la mirada en lo que ocurre desde la perspectiva de los futuros profesores dentro de la formación de Profesores de Matemática, ya sea en Institutos Superiores de Formación Docente (ISFD) no universitarios como dentro de la Universidad misma.

La *socioepistemología*, propone una perspectiva sociocultural para abordar el problema del estudio de las matemáticas, permite explicar la naturaleza de un discurso específico, el discurso matemático escolar (dME), que es aquel que regula e instituye las formas de construir y transmitir los objetos matemáticos en el aula, y permite además, mostrar evidencias de cómo se construye el conocimiento matemático escolar a partir de una intencionalidad didáctica (Maldonado, Rodríguez y Tuyub, 2007). Además, en tanto se trata de una *epistemología de prácticas*, concibe a las prácticas sociales como generadoras de resignificaciones de conocimiento matemático, brinda una clasificación de los *tipos de prácticas sociales* y sus implicaciones en los diseños curriculares y en las aulas de matemática (Camacho Ríos, 2006). La teoría foucaultiana nos ofrece un marco general para la comprensión del discurso (que nos

permite caracterizar al dME en términos generales) y de cómo éste genera tanto a los objetos como a los sujetos discursivos (Foucault, 1992).

La formación de profesores debe apuntar a construir una intencionalidad del futuro docente de matemática, a partir de la cual pueda planificar sus clases y sostenerlas en el aula de modo tal que resulte un ámbito de producción individual y colectiva (Sessa, 2011). Para que esto sea posible, los futuros profesores necesitan reflexionar acerca de su relación con la matemática (no sólo como aprendientes sino además, y fundamentalmente, como enseñantes) y *empoderarse*, esto es, pasar a sentirse ellos mismos personas con una posición de dominio cabal de la disciplina (Reyes, 2011). Para que esto sea posible, los docentes formadores de los institutos de profesorado deben garantizar la puesta en acto de todo el conjunto de prácticas relativas a la producción y transmisión de la matemática, que favorezca una estructuración progresiva y abierta del saber; esto es, los futuros docentes deben ineludiblemente acceder de manera activa a los rasgos esenciales de la cultura matemática.

Abogamos por una formación docente que no consista exclusivamente en brindar un conjunto de normas técnicas a seguir, sino en educar a los futuros profesores en el ejercicio de aquellas prácticas que le permitan dotar de significado a los objetos matemáticos, con la finalidad de facilitar el proceso de construcción de los objetos matemáticos, en sus futuros alumnos. Creemos que sólo es posible generar cambios respecto a las prácticas docentes instituidas, modificar algo del orden de su normatividad, y facilitar el proceso de construcción/deconstrucción de los saberes, necesario para la aprehensión de los conocimientos, haciendo visibles las *contradicciones inherentes al dME* (características de toda práctica social).

El marco socioepistemológico, de enfoque foucaultiano, en el que nos posicionamos, problematiza la construcción social del conocimiento matemático, pues no centra su atención en los conceptos o procesos matemáticos, sino en los elementos sociales, culturales, funcionales e institucionales que permiten la construcción de ellos, caracterizando a las prácticas sociales como generadoras de conocimientos. El enfoque foucaultiano nos posibilita concebir tanto a los objetos como a los sujetos, producidos por los discursos sociales (Verón, 1998).

Diseño y metodología

La presente ponencia se basa parcialmente en una investigación llevada a cabo dentro del Proyecto 1 ING 418 (radicado en la FCEIA – UNR) - y se relaciona con los resultados obtenidos en el marco del Proyecto Interinstitucional 1563 financiado de acuerdo con los Proyectos Concursables de Investigación Pedagógica “Conocer Para Incidir en las Prácticas Pedagógicas” del Instituto Nacional de Formación Docente. Dichas investigaciones están enmarcadas en un enfoque cualitativo (Rodríguez Gil, Gil Flores y García, 1996), pretendiendo estudiar de manera subjetiva particularidades dentro del tema seleccionado, extrayendo conclusiones - permanentemente atravesadas por el contexto – a partir de la valoración de los datos recogidos, con la intención de analizar y comprender cabalmente los aspectos epistemológicos, ontológicos y didácticos que atañen al proceso de enseñanza/aprendizaje de la matemática. Dado que el diseño seleccionado es de tipo transeccional exploratorio (Hernández Sampieri, Fernández Collado y Lucio, 2008), para poder valorar, analizar y correlacionar las variables *concepciones ontológicas y propuestas didáctico-pedagógicas*, confeccionamos una encuesta que fue administrada (con pequeñas variantes) en los distintos grupos de actores intervinientes en la producción de la matemática y su enseñanza. Para la confección de la misma atendimos a distintos aspectos que hacen a nuestro objeto de investigación: **Bloque 1** (Datos personales de la

formación docente - Pregunta 1: ¿En qué año egresó del profesorado? ¿Qué título obtuvo? ¿En qué institución cursó sus estudios de profesorado? Si tiene alguna otra formación, ¿cuál, cuándo se tituló y en qué institución?); **Bloque 2** (Aspecto profesional del docente de Matemática - Preguntas 3: ¿Por qué eligió esta profesión?; 4: ¿Qué representa para Ud. ser Profesor en Matemática? Nombre tres actividades relacionadas al ejercicio profesional de un Profesor en Matemática; y 5: ¿Por qué cree que se debe enseñar/aprender Matemática?); **Bloque 3** (Conocimiento matemático - Preguntas 6: ¿Ud. cree que los conocimientos matemáticos escolares resultan de utilidad en cuestiones relacionadas con el quehacer diario? Si su respuesta es afirmativa, mencione ejemplos; 7: ¿Qué significa para Ud. saber Matemática?; y 8: ¿Ud. considera que los conocimientos de la Matemática han sido inventados o descubiertos?); y **Bloque 4** (Práctica docente - Preguntas 2: ¿Qué porcentaje de sus clases de Matemática destina Ud. habitualmente al trabajo grupal? (menos del 20% - entre el 20% y el 50%- más del 50%); 9: ¿Considera que aprender Matemática es más complejo que aprender otra asignatura? ¿Reconoce que hay algún obstáculo para su aprendizaje? ¿Cuál?; y 10: ¿Qué estrategias utiliza cuando debe introducir un “tema nuevo” en sus clases?).

Hasta el presente, la muestra de a quiénes administramos dicha encuesta se compone como sigue: a) 85 alumnos ingresantes al profesorado provenientes de distintas instituciones; b) 25 profesores de nivel secundario, entre los cuales 4 de ellos ejercen docencia de nivel superior no universitario; c) 3 docentes-investigadores de nivel superior universitario; d) 2 alumnos de *Maestría en Didáctica de las Ciencias*; y e) 13 alumnos del último año del profesorado. Cabe aclarar que en el primer subgrupo (el de los alumnos ingresantes) sólo se testeó cuáles eran las concepciones ontológicas previas mientras que en el resto de los casos se investigó además respecto de las concepciones didáctico-pedagógicas de los docentes o futuros profesores. En general, siempre se planteó la misma modalidad: se les entregó el cuestionario con preguntas a responder y se les pidió que en el plazo de una semana aproximadamente lo completaran y lo entregaran.

Además, hemos trabajado principalmente, con la población de los *futuros docentes*, esto es, con los alumnos avanzados de la carrera Profesorado en Matemática; pero también, con los docentes formadores de estos alumnos. Dentro de esta población, hemos aplicado como técnicas de recolección de datos, las siguientes: a) observaciones de clases en los distintos ámbitos de formación de profesores (ISFD y universidad), con el propósito de identificar las prácticas discursivas que caracterizan al dME; b) entrevistas semiestructuradas a los futuros docentes y a los docentes formadores, para explorar el proceso de deconstrucción. En algunos casos, las **observaciones de clase**, fueron consensuadas con las profesoras dictantes; en otros, hemos contado con la participación de observadores participantes. En todos los casos se trata de clases de asignaturas correspondientes al trayecto de formación disciplinar del Profesorado en Matemática. Para la mayoría de las **entrevistas** realizadas a los futuros docentes y docentes formadores (cuyas clases fueron observadas), se usó un grabador, como medio de registro, cuando el entrevistado lo consintió. Cuando no fue así, el dispositivo de registro que se utilizó fue el cuaderno de notas. Las preguntas fueron confeccionadas atendiendo a la finalidad perseguida con la entrevista, esto es, recoger datos que nos permitieran caracterizar el proceso de deconstrucción y los tipos de prácticas que los entrevistados asocian al rol del profesor. Por ello, lo que primero preguntamos estuvo dirigido a ver la importancia que los futuros docentes y docentes formadores, le dan a la planificación de la materia (en tanto componente del proceso de deconstrucción); luego, se les pidió que seleccionaran un tema desarrollado en la asignatura observada que fuera de su agrado, para que, a partir de él, pudiéramos explorar qué componentes

del proceso de deconstrucción reconocen (objetivos del tema, bibliografía empleada, recursos y estrategias didácticas de presentación del tema, tipo de problemas y/o de ejercicios de aplicación del mismo, contenidos previos, contextualización histórica, uso y utilidad, actividades didácticas significativas, necesidad de aprendizaje del tema, campo de aplicación, entre otros). Estas fueron las preguntas que guiaron la entrevista, pero, al ser semiestructurada, los entrevistados podían expresarse con soltura. Esta última muestra se compone de 20 alumnos de 4° año de Profesorado y 5 docentes formadores. Toda la información recogida a través de las distintas técnicas mencionadas, se obtuvo entre abril del año 2013 y septiembre del año 2014.

Discusión preliminar de resultados

1) De las encuestas surge que:

La falta de un hábito de reflexión acerca de los que enseñamos (o de lo que aprendemos en el caso de los ingresantes) y no tanto de cómo lo enseñamos (o cómo nos lo enseñan) provocó fuertes resistencias a entregar el cuestionario respondido y en muchos casos hubo que insistir mientras que en otros no logramos conseguir la devolución solicitada. Muchos docentes manifestaron una abierta sensación de molestia por no saber qué responder cuando se les preguntaba acerca de si los conocimientos matemáticos eran descubiertos o inventados.

Por razones de espacio, se omiten aquí los comentarios de los bloques 1 y 2 (ya hechos en otros trabajos anteriormente presentados por nuestro equipo). Con respecto al bloque 3 y en relación al aspecto utilitario de la matemática escolar, casi la totalidad de los encuestados valora la utilidad de la disciplina en grado superlativo, pero cuando se les pide que citen ejemplos, en general, mencionan cuestiones que involucran operaciones básicas (relativas a procesos de compra-venta o mediciones espaciales o temporales): “ir de compras”, “preparar recetas de cocina”, “administrar tiempo y dinero”, “contar”, “medir”, “sacar porcentajes”. Otro número significativo de docentes manifiesta que la matemática es útil más allá de ese piso de operaciones básico que se le adjudica, pero no citan concretamente estas otras aplicaciones/utilidades de mayor jerarquía. El saber Matemática, queda – a grandes rasgos - categorizado como: “Tener herramientas para la resolución de situaciones”, “Sirve para pensar de un modo organizado (estructurado)”, “Nos permite realizar conjeturas, argumentar, reflexionar, poder demostrar”, “Genera prestar atención a los procesos lógicos”. En relación a si los conocimientos matemáticos son descubiertos o inventados, aproximadamente el 40% optó por “descubiertos”; el 36% optó por “inventados”; el 12% contestó “construidos”; el 4% “creada”; y un 8% respondió “ambos”, argumentando que “*Consideraban que algunos han sido inventados, ya que surgen de la imaginación y otros han sido descubiertos a partir de buscar regularidades*”. Con respecto al bloque 4, el 72% de los docentes dedica entre el 20% y el 50% de la clase para que los alumnos trabajen en grupo, y el 16 % dedica menos del 20%. Respecto del aprendizaje de la Matemática, prácticamente las opiniones se dividieron por mitades: un 50% dice que es más complejo que aprender otras asignaturas, mientras que el 50% restante, cree que la matemática tiene la misma complejidad que cualquier otra disciplina. De los que dijeron que sí, presentaron como obstáculos que “La matemática tiene conceptos abstractos”, “Está catalogada como una materia que a la mayoría no les gusta y como consecuencia tienen una mala predisposición”, “No tienen los conceptos básicos bien internalizados, por lo que luego les es difícil seguir avanzando”. A la hora de introducir un tema nuevo, las respuestas fueron variadas: muchos incluyen la presentación de un problema introductorio donde sea necesario incorporar algún nuevo concepto para resolverlo y en lo posible que dicho problema esté relacionado con la vida cotidiana. Otros, deciden, o bien, utilizar juegos, videos, búsqueda previa de información en sus casas, o bien,

partir de los conocimientos previos de los alumnos para luego (mediante el diálogo o cierta ejercitación), llegar al nuevo concepto. También, algunos docentes proponen clases expositivas, sin participación del alumno, pero – aclaran – “*que dicha clase esté bien organizada*”.

2) De las observaciones y entrevistas surge que:

La práctica (en los futuros docentes) de planificar su estudio (práctica didáctica), como después debería hacerse con las clases a desarrollar al momento de posicionarse como docente, aparece en relación sólo al momento de preparar el examen final, pero no durante el cursado, de manera de acompañar el proceso de aprendizaje y construcción de los conocimientos. La práctica didáctica de conocer en forma explícita los objetivos y la bibliografía seleccionada conduce a la posibilidad de un cuestionamiento genuino de los conocimientos matemáticos y de los significados que a ellos se les atribuyen. Pero no es habitual que los docentes brinden sus planificaciones ni que los futuros docentes la soliciten, al comienzo del dictado de la materia. Los futuros docentes, en general (y quizás como consecuencia de lo anterior), no logran reconocer los núcleos temáticos que se articulan en la materia. A lo sumo, pueden mencionar contenidos en forma desarticulada. Esta desarticulación conceptual es característica del DME.

Hay apreciaciones por parte de los futuros docentes que nos permiten pensar que la concepción que tienen del conocimiento matemático, es como aquello que ya está dado, acabado. (Se menciona por parte de un alumno: “*...no investigábamos temas por propia decisión, sí investigábamos en Filosofía, o en Historia de la Matemática, porque son más de temas que podés investigar y lo que el docente dijo no te alcanzó y necesitas más información para entender el tema*”). Los docentes no introducen coordenadas espacio-temporales que permitan situar históricamente aquello que enseñan, como así tampoco indican los posibles campos de aplicación de los temas abordados. Por su parte, los futuros docentes prácticamente no se interesan por estos tópicos ni preguntan por ellos, pero, en los casos en que han demostrado interés, no encuentran respuestas adecuadas en los docentes formadores. Estas apreciaciones dan muestra de la atomización en los conceptos, en tanto, el conocimiento matemático se propone como ahistórico y acultural, no teniendo relevancia para su constitución los aspectos sociales, culturales y contextuales que lo producen. En algunos de los alumnos apareció la importancia de la contextualización histórica del conocimiento matemático, pero quedó eclipsada por la aparición del carácter utilitario del conocimiento, porque se generó a partir de la pregunta “¿para qué sirve este tema?”.

Observamos falta de marcos de referencia para la resignificación del conocimiento matemático. No se manifiesta el hecho de que la matemática responde a otras prácticas de referencia, que la resignifican, dotando de significado a sus objetos. Falta de identificación y de valoración de los contenidos previos necesarios para poder desarrollar los temas en forma integral, reforzándose la concepción del conocimiento como un cúmulo de saberes que ni siquiera llega a constituir una estructura; y mucho menos el resultado de un proceso histórico-social. Sin embargo, se destaca la participación de los alumnos (futuros docentes) y el compromiso con las tareas y el estudio, pero es manifiesta una actitud de aceptación de aquello que se les enseña tendiente a la reproducción y no al replanteo o al cuestionamiento. No es habitual que los alumnos cuestionen los conocimientos matemáticos tal como se presentan en la clase, y cuando lo intentan, los docentes no encuentran el modo de resignificar dicho conocimiento a raíz de las dudas que les manifiestan.

En este sentido, el conocer los objetivos y la bibliografía, podría promover cierto grado de autonomía, para propiciar el cuestionamiento de los conocimientos matemáticos. Y, la valoración del contexto histórico podría ser un componente que facilite el proceso de construcción, aunque en general en las entrevistas, sólo haya aparecido como un componente didáctico: la motivación de una clase.

Lo aquí señalado está en consonancia con los resultados a los que han llegado Cabrera Chim y Cantoral (2013), quienes concluyen en sus estudios que el conocimiento matemático en los espacios de formación del profesorado, es un elemento no cuestionado y que permanece inamovible, limitando al profesor a la reproducción de ese conocimiento institucionalizado, favoreciendo en los alumnos esta misma acción. La diferencia radica que, nuestro estudio se basó en los futuros docentes y no en docentes en ejercicio. Esto podría significar que la problemática de la deconstrucción debería ser atendida en las etapas iniciales de formación docente, dedicando mayores esfuerzos a articular los conocimientos disciplinares con aquellos que aportan elementos del orden pedagógico-didáctico. Otras coincidencias con los autores mencionados: a) se observa en ambos trabajos (con docentes o futuros docentes), la necesidad de una evaluación tradicional (evaluar o ser evaluados); b) la contextualización se entiende en tanto situación que permite *“hablar de algo concreto o vivible por el estudiante, más que como un medio en donde tiene significado por sí mismo para la sociedad en la que se desarrolla”* (Cabrera Chim y Cantoral, 2013: p 1600). Esto es, la contextualización no es significativa ni permite cuestionar al conocimiento; c) es manifiesta la necesidad del docente de profundizar en diferentes aspectos de un conocimiento ya estudiado con anterioridad, más que en favorecer la construcción de conocimientos matemáticos.

Coincidimos además con Carmen Sessa (2011) que la dimensión del estudiante de profesorado como sujeto que construye conocimientos nuevos en tanto alumno, está sobrevalorada respecto a la dimensión de futuro docente que reflexiona sobre los procesos de enseñanza/aprendizaje de la matemática.

Conclusiones y reflexiones finales

A modo de conclusión parcial (porque aún quedan pendientes observaciones de clases y entrevistas a docentes formadores y a futuros docentes), observamos que del bloque 3 de la encuesta, se desprende que la idea que predomina sobre la utilidad de la matemática pareciera estar alejada de los alcances reales del saber matemático, y de acuerdo con las respuestas obtenidas, dicho carácter utilitario se enlaza casi con exclusividad al manejo de operaciones básicas. Los que afirman que la matemática *sirve para algo más* no pueden establecer ejemplos concretos de tal utilidad en alguna situación no relacionada en forma directa con las operaciones aritméticas básicas. Con respecto a las concepciones ontológicas, nos sorprendió que un grupo respondiera que los conocimientos matemáticos eran “construidos”, que no era una opción ofrecida en la pregunta. No estamos seguras si este término es sinónimo de alguno de los dados (inventados o descubiertos) o, si representa una categoría diferente. Del bloque 4, notamos que para aproximadamente la mitad, enseñar matemática es más difícil que enseñar otras disciplinas, lo que probablemente genere una predisposición negativa en sus alumnos, entorpeciendo el proceso de enseñanza-aprendizaje. También apreciamos cierta incongruencia entre la concepción ontológica del conocimiento matemático (descubierto, inventado, construido) y el tipo de estrategias didácticas seleccionadas a la hora de introducir un tema nuevo. Quienes sostienen que los conocimientos matemáticos fueron inventados, no obstante, dan clases expositivas y, no nos queda claro si de esta manera evitan, por un lado, un desarrollo donde los mismos se presenten

como acabados e inmutables y, por otro, una mera incorporación que impida una construcción que los dote de significado. Por otra parte, quienes los conciben descubiertos, plantean a sus alumnos actividades centradas en problemas para que ellos creen algún tipo de herramienta que permita arribar a la solución. Estas cuestiones, de estar presentes en las clases, supondrían la existencia de una clara contradicción entre la postura ontológica y didáctico-pedagógica vertida por el encuestado.

Comparando los distintos grupos (estudiantes y docentes) algunas de las categorías que hemos propuesto para el establecimiento de similitudes y diferencias son: a) Actividades inherentes a la práctica profesional del Prof en Matemática: Hay serias dificultades para reconocer cuáles son las actividades relacionadas con el ejercicio profesional de un Profesor de Matemática; entre ellas figuran *planificar y organizar, formar personas, razonar, discutir, evaluar, reflexionar sobre la práctica y conocer a los alumnos*, entre otras. Todas ellas son actividades inherentes a la profesión docente en general, pero no específicamente al ser docente de Matemática. Es por ello que sostenemos que las respuestas carecen, en general, de especificidad en nuestra área; b) Saber Matemática: En cuanto a este punto, los alumnos encuestados lo relacionan principalmente al hecho de “*comprender y analizar el mundo que nos rodea*”, “*traer pasión a la vida*”, “*abrir la mente*”, “*ejercitar el cerebro y entretenerse*” y *se les presenta como “un desafío”*. Para los docentes, en cambio, es “*tener herramientas para la resolución de situaciones*”, “*saber pensar de un modo estructurado*”, “*reflexionar y argumentar*”; “*tener capacidad para comprender cuestiones relativas a la disciplina*”, “*conocer la historia y el contexto, así como las implicaciones epistemológicas*”, “*no se reduce a poder realizar cálculos*”; c) Complejidad del aprendizaje de la Matemática: Prácticamente la mitad de los docentes encuestados manifestaron que aprender matemática es más complejo que aprender otras materias por sus conceptos abstractos; el resto dice tener la misma complejidad que otras materias, pero que la dificultad de su enseñanza radica en el rechazo manifiesto de los alumnos hacia el área. Consideramos que quizás el trabajo en grupos dentro del aula, podría ser utilizado como una estrategia didáctica en pos de aminorar los efectos negativos de las problemáticas que obstaculizan el aprendizaje de la disciplina (la abstracción y el rechazo antes mencionado). Sin embargo, la mayoría de los alumnos encuestados recuerda haber dedicado menos del 20% de sus clases al trabajo grupal durante su paso por la escuela secundaria; y casi la totalidad de los docentes reconoce dedicar sólo entre un 20% y un 50% al trabajo en grupo; d) Utilidad de la matemática escolar: Respecto a este ítem, la mayoría, tanto estudiantes como profesores, contestaron que “*es útil para todos los aspectos de la vida*”, pero al brindar ejemplos concretos de tal utilidad, la misma se reduce a un uso comercial o relativo a la economía doméstica y a ciertos cálculos geométricos (en particular, de áreas); e) Concepción ontológica del conocimiento matemático: En el caso de los docentes encuestados, cuya formación se llevó a cabo en institutos de formación superior del profesorado (y no de universidad) - y en contraste con lo recogido entre los estudiantes - surgió un dato que consideramos llamativo: la cuarta parte de ellos, sostiene que los conocimientos matemáticos han sido *construidos*, opción que no estaba categorizada en la encuesta. Consideramos que la aparición de este término puede estar favorecida por el tipo de formación pedagógica recibida, que – de acuerdo con nuestro conocimiento acerca del funcionamiento de los ISFD, dejan una fuerte impronta constructivista en el campo de la didáctica. De cualquier modo, lo sustancial es que en ambos grupos (estudiantes y docentes), la mayoría de los encuestados optaron por responder “descubiertos” (55% de alumnos y 44% de docentes). Significativamente, un 27% de los alumnos respondió “ambos”, mientras que entre docentes este porcentaje es menor (8%). Cabe aclarar que la opción

“ambos” tampoco era una categoría posible brindada por la encuesta. Amerita decir que sólo una pequeña minoría entre los estudiantes ingresantes (14%) y aproximadamente la tercera parte entre los docentes (32%) piensan que son “inventados”. Este porcentaje es del 67% entre los docentes-investigadores que ejercen sus funciones en la universidad; f) Propuestas didáctico-pedagógicas: Entre las más frecuentes encontramos la presentación de un problema introductorio o de una situación problemática, pero también se trabaja a partir de la tradicional clase expositiva. Detectamos cierta naturalización del constructivismo didáctico (sin quizás una adecuada reflexión sobre ello) que podría estar en conflicto con una concepción platónica de los conocimientos matemáticos. Ante una situación contradictoria como ésta, es posible suponer dificultades para realizar una deconstrucción satisfactoria que permita a los alumnos la construcción de los conocimientos matemáticos.

La apropiación de los conocimientos (considerada como práctica que de ser ejercida permitiría romper, fisurar al dME) es, de acuerdo con lo registrado y analizado aquí, responsabilidad del profesor; y no parece que en ningún caso esta responsabilidad pudiera ser transferida al estudiante, quien aparentemente no ha logrado la independencia suficiente para tender a contribuir a la construcción de su propio conocimiento. Su posición como sujeto discursivo, constreñida por las limitaciones impuestas por el discurso matemático escolar, así lo sugiere. Esta dificultad para apropiarse de los conocimientos es el efecto de la enajenación producida por el dME. En cuanto a prácticas discursivas, las expresiones de los futuros docentes, con las que manifiestan dudas o pretenden canalizar demandas dentro del escenario institucional y áulico, son en general, no adecuadas al nivel de la carrera que transitan. Es así, que la dimensión discursiva que prevalece es la de sujeto reproductor, y no, productor como pensamos que debería ocurrir en el ámbito de una institución de nivel superior.

Hallamos muchas dificultades para caracterizar al proceso de deconstrucción a partir de su exploración. El proceso de deconstrucción que - creemos - debería haber comenzado (aunque sea a gestarse) en un tercer/cuarto año de profesorado, se halla aun prácticamente ausente. Esto es así, pues los componentes sustanciales que - creemos - lo integran (reconocimiento de estrategias didácticas, núcleos de articulación temática, distintos casos de uso, contextualización histórica, campo de aplicación, etc) están muy débilmente presentes todavía. Aún en esta etapa avanzada de su formación docente, los estudiantes no logran (o tienen serias dificultades para) posicionarse en el rol de profesor. Más aún, la dinámica del profesorado como institución de nivel superior, conspira contra ello, en un caso (el de los ISFD), por estar secundarizado, vale decir, por estar dominado por una disciplina de características similares a las que encontramos en las escuelas secundarias, al menos en varios aspectos. En el otro caso (profesorado universitario), por estar fuertemente formalizado. (Decimos esto, en parte apoyándonos en los indicios que las observaciones de clases nos brindaron respecto a la disciplina y al esquema de interacciones que se permiten dentro y fuera del aula. Por ejemplo, las carpetas de los alumnos son prolijas y completas pero muy poco personales, no se consideran un medio válido para registrar dudas, o información proveniente de otras fuentes extra-áulicas).

La práctica de reflexionar sobre las acciones ejercidas sobre los objetos matemáticos, tendientes a dotarlos de distintos significados, o al menos de un significado diferente del que haya aparecido en relación a la situación mediante la cual se introdujo su estudio, no es asociada por los futuros docentes al rol del profesor. Prevalece una concepción de la matemática como conjunto de elementos yuxtapuestos, no ligados, no articulados; y no como el resultado de un proceso que contempla o que depende entre otras cosas, de sujetos pertenecientes a un contexto

histórico, social y económico determinado, proceso que se da en el marco de una cultura y no de otra. Respecto de esto señalamos también que, se detectan prácticas solapadas de transculturación en relación a la búsqueda de videos que brinden información sobre ciertos temas.

Bibliografía

- Cabrera Chim, L., & Cantoral, R. (2013). La deconstrucción del conocimiento matemático: un medio para el análisis del desarrollo profesional del profesor. *CLAME*, 26, 1595-1603.
- Cabrera Chim, L., & Cantoral, R. (2012, junio). *La deconstrucción de los conocimientos matemáticos. Elemento del desarrollo profesional del profesor*. Ponencia presentada como avance de investigación en el Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN.
- Camacho, A. (2006). Socioepistemología y prácticas sociales. *Revista de Educación Matemática Santillana*, 18(1), 133-160.
- Chirinos, N., Rondón, E., & Padrón, E. (2011). Deconstrucción de la práctica docente en la formación del ingeniero. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 27(64), 102-111.
- Emmanuele, D. (2009, septiembre). *¿Cómo influye la postura del docente respecto a la naturaleza ontológica de la Matemática en la transmisión efectiva del saber? Reflexiones a partir de una clase de Análisis Matemático*. Ponencia presentada en la XXXII Reunión de Educación Matemática. Universidad Nacional de Mar del Plata.
- Flores, P. (1998). *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje. Investigación durante las prácticas de enseñanza*. Mathema Colección. Granada: Editorial Comares.
- Font, V. (2003). Matemáticas y Cosas. Una Mirada desde la Educación Matemática. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, X(2), 249-279.
- Foucault, M. (1992). *El orden del discurso*. Barcelona: Tusquets.
- Hernández, R., Fernández, C., & Lucio, B. (2008). *Metodología de la Investigación*. México: McGraw-Hill.
- Maldonado, M., Rodríguez, M., & Tuyub, J. (2007). *“Un estudio sobre el discurso en los libros de texto de Matemáticas. Su relación con la práctica escolar”* (Tesis de Licenciatura en Enseñanza de las Matemáticas). Universidad Autónoma de Yucatán. CINESTAV-IPN.
- Reyes, D. (2011). *Empoderamiento docente desde una visión Socioepistemológica: Estudio de los factores de cambio en las prácticas del profesor de matemáticas* (Tesis de Maestría en Ciencias). México: Centro de Investigación y de Estudio Avanzados del Instituto Politécnico Nacional.
- Rodriguez, G., Gil Flores, J., & García Jiménez, E. (1996). *Metodología de la Investigación cualitativa*. Granada: Aljibe.
- Sessa, C. (2011). *La formación en las carreras de profesorado en Matemática*. Informe final Noviembre 2011. Ministerio de Educación de la Nación (Argentina).
- Socas, M., & Camacho Machín, M. (2003). Conocimiento Matemático y Enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria. Algunas reflexiones. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10(2), 151-171.
- Soto, D. (2010). *El Discurso Matemático Escolar y la Exclusión. Una Visión Socioepistemológica* (Tesis de maestría no publicada). México: CINESTAV del IPN.

Soto, D., & Cantoral, R. (2010). ¿Fracaso o exclusión en el campo de la matemática? *Acta Latinoamericana de Educación Matemática*, 23, 839-848.

Verón, E. (1998). *La Semiosis Social*. Buenos Aires: Gedisa.

Linguagem Matemática e tradução: movimentos e discussões acerca da polissemia

Janeisi de Lima **Meira**
 Universidade Federal do Pará
 Brasil
janeisimeira@hotmail.com
 Robson André Barata de **Medeiros**
 Universidade Federal do Pará
 Brasil
Barata.medeiros@yahoo.com.br
 Marisa Rosâni Abreu da **Silveira**
 Universidade Federal do Pará
 Brasil
marisabreu@ufpa.br

Resumo

No presente artigo discutimos acerca da tradução da linguagem matemática para a linguagem natural do estudante. Durante esse processo muitas interpretações são equivocadas e perpassam pela falta de domínio e conhecimento do vocabulário matemático, pois o domínio da linguagem proporciona o entendimento daquilo que se pretende traduzir. A linguagem materna possibilita interpretações que não correspondem ao real significado do objeto matemático, pois é polissêmica, levando a pensar que a matemática também seja. A mudança do significado no universo matemático não é possível, mesmo que se mude o contexto. Isto acontece devido a linguagem matemática ser objetiva e universal, não podendo proporcionar outros entendimentos e interpretações além do que está posto. As análises de nossas experiências docentes apontaram que os alunos atribuem à linguagem matemática os problemas da sua tradução. Todavia, o processo de tradução adequada é de grande importância para que proporcione a aprendizagem da matemática de modo coerente.

Palavras chave: tradução, linguagem matemática, linguagem materna, polissemia.

O presente artigo tem por objetivo discutir a tradução da linguagem matemática, que é monossêmica, para a língua materna, que é polissêmica. A primeira, por sua vez, foi construída e elaborada pela humanidade durante a sua história com um caráter universal, não contraditório e monossêmico (Eves, 2004), e, por conseguinte não poderá ocorrer uma polissemia em seu entendimento, possuindo assim um significado único. A matemática atualmente possui uma linguagem que proporciona o mesmo entendimento de seu objeto em qualquer parte do mundo, não correndo o risco de ser interpretada de modo equivocado em cada contexto que será ensinado. Por exemplo, o que se ensina, aqui no Brasil, não pode e não será diferente do que se ensina no Japão ou em qualquer outra parte do mundo, deste modo a língua materna deve ter o máximo de precisão para que não comprometa a compreensão do objeto matemático.

Monossemia e tradução nos textos matemáticos

Um texto matemático para ser devidamente entendido necessita ser o mais preciso possível afim de que possa ser traduzido para a língua materna do aluno. As traduções em muitos casos perpassam por muito equívocos, contribuindo, deste modo, para entendimentos errôneos a respeito do objeto matemático e assim torna-se para o aluno mais um empecilho em sua aprendizagem. A língua materna usa alguns termos da matemática, porém com outro sentido, por exemplo, “sair pela tangente”, “ver por outro ângulo”, etc., todavia, não apresenta o real sentido do objeto matemático. Uma linguagem mais precisa e rebuscada é muito mais do que necessário, é na verdade condição imprescindível para o entendimento real do objeto matemático.

Em muitos casos, o professor pretende dar uma aula por meio de uma linguagem mais simples, que se aproxima da realidade dos alunos afim de que tenham uma melhor compreensão do conteúdo, por exemplo, na simplificação de frações, diz-se: “corta, corta”; na operação de subtração entre números inteiros, diz-se: “números que possuem sinais diferentes, subtrai-se e conserva o sinal do maior” utilizando, dessa forma, uma linguagem sem maiores cuidados e precisões, trazendo significados totalmente diferentes do que se pretendia ensinar. Deste modo, o uso dessa linguagem mais simplista pode influenciar equivocadamente na aprendizagem do objeto matemático por proceder de uma tradução errada e não proporcionando o desenvolvimento de níveis maiores de abstração, o que é imprescindível na aprendizagem da matemática.

Neste sentido, Duarte (2008, p. 80) afirma que “é, portanto, necessário que o processo de aprendizagem da matemática desenvolva essa capacidade de trabalhar com níveis cada vez maiores de abstração”. Para atingir esses níveis de abstração, é necessário a preocupação com uma linguagem cada vez mais elaborada que proporcione tal desenvolvimento.

Outro problema que pode ocasionar um entendimento errado do objeto matemático ao se traduzir para a língua materna é a falta de domínio ou de conhecimento do conteúdo matemático de modo que não proporciona a transmissão do seu real significado. No processo de ensino, muitos conceitos estão implícitos aos conceitos matemáticos, numa situação em que é solicitado a um aluno que calcule o limite de uma função num determinando ponto, não o é informado, que deva dominar as operações com polinômios, isso, em geral, não é revelado aos alunos o que ocasiona dificuldades em compreender os conceitos matemáticos ao qual estejam estudando.

Então, nem sempre é somente a tradução que foi realizada de forma equivocada pelo professor, que domina certo conteúdo matemático, que possui a intenção de tornar aquele conhecimento mais acessível, mas também ocorrem traduções equivocadas simplesmente pelo fato de o professor não dominar o conteúdo matemático, deste modo, muitas palavras empregadas erroneamente são provenientes do pouco domínio matemático daquele que ensina.

O cotidiano é o lugar propício para opiniões e subjetividades, contudo no ambiente escolar isso precisa ser superado, ainda mais quando se utiliza uma linguagem *estandardizada*. A linguagem que se utiliza na matemática no ambiente escolar deve ser ensinada de maneira rigorosa e sem contradições, o que carece não só de domínio do conteúdo por parte do professor, mas a utilização de uma linguagem mais precisa e usos de termos matemáticos corretamente.

O conhecimento matemático é objetivo, isto é, não possibilita múltiplas interpretações do seu objeto, ele é o que está posto. A subjetividade de quem ensina e de quem aprende neste caso

pode proporcionar interpretações equivocadas e errôneas quanto ao objeto matemático. Os reflexos dessas interpretações aparecem na aprendizagem dos conceitos da matemática.

A matemática já consolidada, ou seja, a que foi construída e acumulada pela humanidade e não somente por uma cultura, como pensam alguns educadores matemáticos, não proporciona aberturas para questionamentos e dúvidas de seus resultados, isto acontece devido sua linguagem não ser contraditória, essa linguagem favorece que a matemática não abra espaço para discussões de juízos de valor.

Não se está aqui dizendo que o aluno não deva fazer perguntas ao não entender um determinado conceito ou conteúdo matemático que está sendo ensinado, mas que seu entendimento deve ser preciso, caso contrário, terá várias interpretações para aquele objeto. Se o aluno pensar que pode fazer o que quiser teremos uma contradição, mas isso não existe na matemática, esta apresenta uma linguagem monossêmica, portanto, única, não pode ser para cada um ou para cada lugar do jeito que se queira, isso seria retornar às origens da matemática, ou seja, retornar ao imediatismo, à mera preocupação com a sobrevivência e a particularidade de cada contexto.

A contradição é algo que não pode haver na matemática, e para isso ela parte de verdades inquestionáveis, ou seja, de axiomas, os quais devem ser aceitos sem necessitar de demonstrações, devido serem evidentes ou serem baseados em outros axiomas. Contudo, estes axiomas devem ser coerentes e apresentar certo rigor.

Quando um determinado conteúdo matemático é questionado, não significa que será refutado, ainda que isso aconteça entre matemáticos, aquilo que já foi instituído e é aceito não se conhece nenhum caso de refutação, o que ocorreu foi no máximo a criação ou desenvolvimento de novas áreas na própria matemática ou a evolução do assunto em questão, por exemplo, o quinto postulado de Euclides, que discutiremos adiante.

Aquilo que já está construído e aceito como verdade matemática, não é substituído por uma “nova maneira” de se conceber este conhecimento como acontece em outras ciências como a física, a química e a biologia. Mas há uma introdução de um novo elemento, o que não implica na eliminação daquilo que já se conhecia. Este fato pode ser ilustrado com a geometria euclidiana, em que se constatou a partir do quinto postulado de Euclides que havia outras possibilidades para este postulado, uma vez que foram aceitos novos postulados e o quinto postulado de Euclides se manteve até os dias atuais, inclusive é estudado nas escolas atualmente, enquanto que outras concepções mais recentes da geometria ainda são pouco conhecidas até mesmo por professores de matemática.

Desse modo, o que era verdade na matemática de Euclides ainda hoje continua sendo, essa verdade não tem qualquer contradição e nem pode ter, pois não apresentar contradição é uma das condições para a existência do conhecimento matemático dedutivo. A não existência de contradições proporcionará à matemática um único entendimento de seu objeto, mesmo que tal objeto mude de contexto matemático, assim levantamos a tese da não existência de polissemia na matemática e, por conseguinte em sua linguagem e em sua tradução à língua materna.

A matemática dependeria do contexto ao qual está inserido?

Quando se afirma que algo em matemática pode ser relativo, ou seja, que depende de um contexto, é bastante arriscado, por exemplo, quando se necessita utilizar o “ x ” em determinadas situações da matemática, pois se chega a dizer que o “ x ” depende de um contexto, porém o

problema a ser focado não é o “ x ” e sim o conceito matemático. Ao se falar em incógnita o aluno deveria saber (ou pressupõem) o conceito ou definição de incógnita em uma equação e não relacioná-la com um “ x ”, pois o “ x ” é somente a representação de que ele deveria ter o conhecimento, em virtude de aquela ser simplesmente uma letra do alfabeto latino utilizada para representação de um conceito matemático e não o conceito matemático propriamente dito.

Além do caso da letra “ x ” poder representar a incógnita de uma equação, pode ser usado para representar o lado de uma figura geométrica, também, pode ser a parte literal na álgebra e pode ainda ser um termo de uma Progressão Aritmética (P.A.). Estes exemplos evidenciam que a letra, “ x ”, é apenas uma representação e não o objeto matemático em si. Traduções equivocadas podem levar a essas confusões.

A linguagem matemática que geralmente é aprendida dentro do ambiente escolar tem um caráter objetivo e universal, isto é, não admite interpretações diversas, não pode apresentar contradições como a língua materna e muito menos ser polissêmica. Deste modo, ao se ensinar matemática de forma não clara e não objetiva, quanto ao significado da sua linguagem, pode proporcionar problemas quanto à tradução, à compreensão e a aprendizagem dos conceitos matemáticos universalmente aceitos.

Ao apresentar um texto escrito na linguagem materna, embora com informações sobre um problema que trata de um conteúdo matemático, deve apresentar uma linguagem que não proporcione interpretações variadas, para que o aluno não apresente respostas ou mesmo resoluções com conclusões diferentes. Assim, o problema não estaria na linguagem matemática, mas na interpretação a partir da língua materna. Como vimos a linguagem matemática não apresenta erros, o máximo que pode acontecer são equívocos de tradução à língua materna do aluno.

A língua materna proporciona uma abertura para interpretações diversas, justamente por ser polissêmica, isto é, ter vários significados para um mesmo termo. Contudo, a linguagem matemática não pode depender de contextos diferentes, cada termo é destinado a um contexto específico e não pode ser interpretado e ter vários significados, mas somente um. Deste modo, a matemática possui uma linguagem com significado preciso e único.

Segundo Baruk (1973) uma das causas da perda de sentido no ensino da matemática é a confusão entre três línguas distintas: a língua materna, a língua acadêmica (que é a língua que predomina nos ambientes escolares) e a linguagem da matemática em si.

Quando um aluno é solicitado a resolver determinado problema e confunde em sua resolução regras de um conceito com regras de outro conceito, o problema não estaria numa polissemia da linguagem matemática, mas sim, de um aprendizado errôneo ou até mesmo o não aprendizado de tal conceito matemático, devido certa confusão proporcionada pela utilização da língua materna de maneira incorreta quanto ao conceito matemático.

Na trigonometria, por exemplo, há casos em que o aluno não sabe quando se utiliza o $\pi = 3,1415...$ ou o $\pi = 180^\circ$, não é que a matemática seja polissêmica, quando falamos de comprimento de um arco se utiliza sempre $\pi = 3,1415...$ E quando se aborda ângulo sempre se utiliza $\pi = 180^\circ$, a letra emprestada do alfabeto grego serve apenas para representar tal objeto, que poderá confundir o aluno, mas a letra π não é o objeto matemático, mas a representação do próprio objeto matemático.

O objeto ângulo, de 180° , não poderá ser confundido com o valor de 3,1415..., pois este valor é obtido da razão entre duas grandezas existentes na circunferência, a saber: comprimento da circunferência e seu diâmetro. Assim, é a representação que poderá trazer certa dubiedade e não o objeto matemático em si.

Quando solicita a um aluno que calcule a derivada de $f(x) = x^2 + x + 4$, e este calcula a equação, isto não seria um exemplo de polissemia na matemática, pois a resolução da equação é algo diverso da resolução da derivada desta função, assim o aluno procura resolver a partir do que conhece, com isso, não significa que a derivada de $f(x)$ possa também ser resolvida ao se calcular uma equação do segundo grau. Derivada e equação serão sempre derivada e equação em qualquer contexto matemático.

Ao se empregar a linguagem materna de modo que seu uso não seja claro, poderá ocasionar problemas na interpretação de textos que abordam matemática e em sua resolução. Também se estes conteúdos não forem abordados de modo que tenha um significado para o aluno, este aluno não saberá traduzi-los, pois este deve apreender tal significado para que se possa traduzir, caso contrário poderá utilizar outro conteúdo matemático, apreendido anteriormente, para tentar resolver o que não apreendeu.

Quando, por exemplo, aborda-se potenciação, por exemplo, três elevado ao quadrado, 3^2 , e o aluno responde seis, isto não pode ser atribuído a uma polissemia matemática, mas sim a não apreensão do conhecimento matemático de potenciação. Como o aluno não tem domínio da resolução de problemas envolvendo potenciação, recorre ao que já sabe, neste caso a multiplicação de números inteiros. A potenciação não depende de um contexto para ser resolvida, isto é, que em cada contexto matemático se resolve potenciação de uma forma diferente, é resolvido sempre da mesma maneira.

A potenciação sempre será resolvida em qualquer contexto matemático e social da mesma maneira e será sempre potenciação, o que reforça a não existência de polissemia. Outro aspecto, já mencionado, é a não apreensão do significado do objeto matemático de forma correta, assim não cabe à linguagem matemática esta incompreensão, mas a sua tradução por meio da língua materna de modo errôneo ou sem clareza. Conforme indica Arrojo (1992) a tradução deve levar em consideração o conceito a ser traduzido, pois pode interferir na interpretação e no sentido do texto independente das circunstâncias e idiosincrasias de seu tradutor.

Quine (1980) discute que o processo de tradução de uma língua à outra deve envolver os aspectos culturais, em que decompõem os enunciados a partir de certas projeções de conjecturas e hipóteses que se aproxima do texto em sua língua originária. Assim, o modo de expressão do sujeito linguístico, entendido neste caso também como sujeito da ação, passa pela organização institucional da sociedade que estabelece e lhe atribui papéis e que distribui a possibilidade de enunciar determinadas práticas em determinadas circunstâncias tida como apropriadas, isto é, a possibilidade de realizar ações de acordo com valores culturais e padrões de comportamento que pressupõem um determinado sistema social (Marcondes, 2001).

Assim, ao se utilizar a língua materna para ensinar a matemática, tem a difícil tarefa de torná-la mais clara e objetiva possível, para que a tradução seja apreendida de maneira que não venha a comprometer o que a linguagem matemática significa de fato. A matemática não necessita destes aspectos culturais em sua tradução a partir da língua materna, somente se deve ter este cuidado com a língua materna e seus aspectos culturais para não distorcerem o que a matemática comunica de fato.

Segundo Machado (1990) a língua materna tem uma relação mútua com a linguagem matemática, pois a linguagem matemática não possui oralidade, a qual é emprestada da língua materna. Neste sentido, que se deve ter o devido cuidado ao se utilizar desta oralidade impregnada de diversos significados. É necessário ter cuidado com estes significados diversos que a língua materna possui ao se ensinar matemática, pois, obviamente, se ensina por meio da língua materna, então ela deve ser um meio que proporcione a comunicação da matemática e não o inverso.

Entre a Matemática e a língua materna existe uma relação de impregnação mútua. Ao considerarem-se esses dois temas enquanto componentes curriculares, tal impregnação se revela através de um paralelismo nas funções que desempenham, uma complementaridade nas metas que perseguem, uma imbricação nas questões básicas relativas ao ensino de ambas. É necessário conhecer a essencialidade dessa impregnação e tê-la como fundamento para a proposição de ações que visem à superação das dificuldades com o ensino de Matemática (Machado, 1990, p. 10).

Em consonância com o autor, acrescentamos ainda que as dificuldades encontradas no processo de ensino e da aprendizagem da Matemática podem ser minimizadas se forem levadas em consideração a essencialidade da impregnação mútua entre a língua natural e a linguagem matemática durante o processo de tradução da linguagem matemática à língua materna.

A relação entre língua materna e linguagem matemática é denominada pelo autor de relação mútua, porém este mutualismo entre as duas linguagens pode ficar comprometido devido a matemática ser objetiva e necessitar da oralidade de uma linguagem polissêmica, implicando assim em entendimentos diversos ou sem sentido. Para que essa dificuldade seja superada acredita-se na tradução correta da linguagem matemática.

Outro exemplo que se pode remeter no ambiente de sala de aula é a resolução de equação do primeiro grau. Em geral, se afirma que uma equação possui dois membros, e para sua resolução diz-se, que, aquilo que está em um membro passa para outro membro mudando-se de operação. Contudo, esta mudança de membro não ocorre de fato na matemática, na verdade, o que há é apenas a realização mutuamente da mesma operação que é simétrica a um membro. Aqui não são as palavras que não tem sentidos na matemática ou que estes sentidos sejam dúbios, mas são termos que remetem ao aluno a realização de passagens que na equação não existem de fato. Sabemos que não se passa nada para o outro membro. Essa linguagem simples pode trazer e –, como já percebemos em nossa prática de sala de aula trás muitos problemas na resolução de equações.

Deste modo, o significado que o aluno deveria apreender é mostrado de forma que poderá trazer-lhe problemas em algumas resoluções. A matemática é clara no sentido daquilo que deve ser realizado, mas a língua materna, responsável pela oralidade da matemática, em muitos casos, possui vários significados, o que pode introduzir significados equivocados quanto ao objeto matemático.

Ao lidar com o objeto matemático, este apresentará o mesmo significado independente do contexto que estiver, por exemplo, a potenciação será resolvida sempre como se resolve uma potenciação. Uma equação em qualquer outro contexto matemático será uma equação e resolvida como tal, caso contrário possivelmente deixa de ser uma equação.

Quando se aborda radiciação, em geral se recorre à questão da potenciação, como se a raiz quadrada de um determinado número fosse simplesmente uma operação de potenciação e ainda

sendo quase que uma adivinhação. Porém, sabe-se que a raiz quadrada de um determinado número está associada à área de um quadrado.

Estes equívocos não são próprios do objeto matemático, pelo contrário, o objeto matemático não pode ter este tipo de equívoco. Também não se pode considerar a representação como o próprio objeto matemático. Em grande parte esses equívocos são reflexos de traduções equivocadas ou da não apreensão dos conceitos matemáticos.

A representação não é o objeto matemático, mas sua re-apresentação, isto é, o objeto é apresentado novamente por outro objeto, assim, esta representação poderá assumir diferentes significados dependendo do conteúdo matemático que estará sendo abordado.

Alguns questionamentos que desafiam os estudos voltados para a linguagem matemática: como uma língua polissêmica, que é a língua materna, pode tomar um caráter objetivo e explicar a objetividade e a universalidade da matemática? Será que este seria um dos problemas cruciais na aprendizagem da matemática? Ou seja, não seria a matemática em si o problema, mas o fato de a língua materna não ter a mesma natureza da linguagem matemática, que não depende de cada contexto matemático ou social para ser compreendida de fato e não simplesmente ser interpretada.

Stella Baruk mostra no livro *A idade do capitão* (1973) mais uma consideração quanto à relação problemática entre a língua materna e a matemática, pois ao se utilizar a oralidade da língua materna no aprendizado da matemática, também está emprestando a sua polissemia, conforme exposto acima, contudo há casos, como afirma a autora, que a língua materna possui palavras que tem um significado completamente diferente da linguagem matemática quando comparado a língua natural, como é o caso das palavras *absoluto* e *relativo*.

As palavras *relativo* e *absoluto* quando usadas no cotidiano, não são empregadas como se emprega no contexto matemático. Então, o valor absoluto de um número não se explica somente pela palavra *absoluto*, mas sim pelo significado desta palavra no contexto matemático. Deve-se dizer o que é o valor absoluto de um número, assim, o aluno tem que se apropriar da forma que é empregada tal palavra na matemática e não mais como usada em seu cotidiano.

Da mesma forma acontece com a palavra raiz quadrada, pois se deve exemplificar o que significa raiz na matemática. No cotidiano o significado da palavra raiz é empregado de modo completamente diferente de como se usa na matemática, além da própria operação dificilmente ser usada no contexto matemático. Além deste caso, pode-se também citar a utilização de palavras somente dentro do contexto matemático, como por exemplo, apótema, hipotenusa, cateto, cotangente, seno, cosseno, etc.

Para muitas pessoas estas palavras não lhes remetem a nenhum significado em suas vidas, logo, estas palavras serão novas para o aluno e deverão ser empregadas em seu aprendizado da matemática, é lá que estas palavras serão empregadas, e quem sabe, poderá utilizar em seu cotidiano, porém de forma totalmente diversa da que se usa na matemática. Assim, o emprego das palavras deve ser preciso, correto e rigoroso acerca do objeto que se pretende transmitir ao aluno por meio da tradução da linguagem matemática universalmente aceita.

Considerações finais

Neste artigo foi exposto e proposto um grande cuidado na tradução da língua materna no processo de ensino e aprendizagem da matemática, pois a matemática não apresenta um caráter polissêmico e independe de cada contexto para ter o significado coerente. A língua materna não

possui a mesma objetividade e clareza que necessita a linguagem matemática, mas, é algo fundamental para o aprendizado da matemática, ainda que devido essa polissemia forneça aos alunos diversos significados e assim proporcionando em muitos casos uma compreensão equivocada ou até mesmo parecendo polissêmica quanto ao objeto matemático, o qual não pode possuir esta ambiguidade no seu significado.

Na matemática o significado de seu objeto independe do contexto, isto é, mudando o contexto não muda seu significado, o que pode mudar é a representação do objeto matemático em cada contexto. A matemática e sua linguagem são objetivas e universais e seu objeto nunca muda de significado, pode ser entendido da mesma forma em qualquer parte deste planeta, assim podendo ser ensinado a qualquer pessoa igualmente sem precisar recorrer a contextos limitados e imediatistas de cada cotidiano, sendo esta mentalidade pura ilusão de ideologias adotadas por alguns educadores matemáticos.

Uma operação de potenciação em qualquer contexto matemático será uma potenciação. Também é necessário reforçar o cuidado no emprego de palavras que fornecem ao objeto matemático um significado totalmente equivocado ao seu real significado, podendo implicar na aprendizagem da matemática pelo aluno, além do que reduzir a uma linguagem simples e próxima do aluno pode ocasionar num distanciamento do que a matemática está de fato querendo comunicar. Novos termos devem ser introduzidos para o conhecimento do aluno para que possa relacionar com o objeto e conteúdo em pauta. Pois, ficando com palavras do cotidiano do aluno propicia que ele não se aproprie dessa linguagem mais rebuscada e sofisticada que só é apreendida no ambiente escolar e transmitida pelo professor.

Espera-se que este professor tenha domínio do objeto matemático, pois deve, de fato, ensinar ao aluno e não ao contrário. A tradução também poderá ser feita erroneamente por professores que não conhecem os conceitos matemáticos que pretende ensinar. Neste caso os termos serão empregados errados e apreendidos errados pelos alunos. Aqui, alertamos para o fato de não empregar uma linguagem simplista a fim de facilitar a aprendizagem, mas devido o professor não saber qual termo deve ser empregado por falta de conhecimento do assunto.

Referências e bibliografia

- Arrojo, R. (1992). *O signo desconstruído - implicações para a tradução, a leitura e o ensino*. Campinas: Pontes.
- Baruk, S. (1973). *L'Age Du capitain: De l'erreur em mathématiques*. Paris: Éditions Du Seuil.
- Eves, H. (2004). *Introdução à história da matemática*. Campinas: Editora da UNICAMP.
- Duarte, N. (2008). *O ensino de matemática na educação e adultos*. São Paulo: Cortez.
- Machado, N. J. (1990). *Matemática e Língua Materna: análise de uma impregnação mútua*. São Paulo: Cortez.
- Marcondes, D. (2001). *Filosofia, linguagem e comunicação*. São Paulo: Cortez.
- Quine, W. von. (1980). *De um ponto de vista lógico* (Tradução de Andréa Altino de Campos Loparic). São Paulo: Abril cultural.

Los usos del conocimiento matemático en un escenario de educación no formal

Plácido **Hernández** Sánchez
Universidad Autónoma de Zacatecas
México

placidohernan@gmail.com

Gabriela **Buendía** Abalos
Colegio Mexicano de Matemática Educativa
México
buendiag@hotmail.com

Resumen

En este trabajo analizamos cómo se usa el conocimiento matemático en un escenario de educación no formal. Para realizar esta investigación hemos propiciado intencionalmente una interacción en tiempo real entre un grupo humano y el fenómeno periódico del movimiento de los satélites de Júpiter para evidenciar los usos de lo periódico a través de sus funcionamientos y formas con base en una epistemología de prácticas para la periodicidad. Reportamos evidencias de formas y funcionamientos de lo periódico en un integrante del grupo analizado. También parecieran manifestarse el uso euleriano de lo periódico. Los hallazgos sugieren que el conocimiento matemático se está resignificando.

Palabras clave: uso, educación no formal, funcionamientos, formas, epistemología de prácticas, lo periódico, uso euleriano, resignificación.

Introducción

Diversos organismos internacionales reconocen que los salones de clase son ambientes limitados y que los programas escolares de ciencia deben ser llevados más allá de las paredes de la escuela (NRC, 1996); que las experiencias fuera del salón de clase apoyan y dan forma a los conocimientos científicos que los estudiantes traen al aula (NRC, 2007); que la educación científica no formal complementa (Barbeau y Taylor, 2009; UNESCO (2011)), suplementa, profundiza y mejora las clases de ciencia en la escuela (NSTA, 2001). El (NRC, 2009) subraya que el aprendizaje de la ciencia sucede en contextos no formales y que es importante entender qué sucede allí con el conocimiento científico.

Dentro y fuera de la escuela, la ciencia tiene propósitos sociales específicos que buscan hacerla funcional poniendo en relieve sus significados y usos sociales. Por lo tanto, la manera en que el humano percibe el conocimiento científico no sólo se relaciona con el entendimiento del contenido formal del conocimiento científico y los métodos y procesos de la ciencia, sino que también tiene relación con la manera en cómo se usan estos procesos para resolver problemas (Laugksch, 2000). Esto centra nuestro interés no en cómo aprende un ciudadano, sino en cómo usa su conocimiento científico.

La problemática

A partir del reconocimiento del potencial educativo de los espacios de educación no formal se ha emprendido una búsqueda para entender qué ocurre con el aprendizaje en esos escenarios. Para ello ha sido necesario fijar una postura respecto a la noción de aprendizaje y exhibir herramientas para medirlo. Esto genera una problemática peculiar pues en primer lugar revela que el aprendizaje no formal ha sido difícil de definir y de medir (Cox-Petersen, Marsh, Kisiel, Melber, 2003).

Posiblemente la negación así como la dificultad para medir el aprendizaje ha incidido en una escasez de estudios en ambientes de educación no formal. Roqueplo (1983) aseveró que no es posible establecer condiciones para el aprendizaje no formal y Trigueros y Sánchez (1996) estuvieron convencidos de que los espacios no formales eran para que el público disfrutara de la ciencia y que no habían sido diseñados para que la gente aprendiera. Pensaban ellos: es posible que se aprenda, pero su fin no es tal. Aunado a esta problemática está el carácter polisémico del aprendizaje.

El marco teórico

Buscando entonces cómo analizar el papel del conocimiento matemático en escenarios de educación no formal, requerimos un marco de referencia que nos permita considerar no sólo la adquisición del objeto matemático. Esto es cómo se construye, cómo se aprende, cómo se logra ese objeto. Proponemos considerar las epistemologías de naturaleza social propuestas bajo la perspectiva socioepistemológica en las que la matemática adquiere sentido y significación a partir de las prácticas en la que se involucra el ser humano al hacer matemáticas (Buendía y Cordero, 2005). Esto ha permitido develar el por qué se hace lo que se hace con respecto al conocimiento matemático y el centro está en considerar las prácticas sociales epistemológicamente relacionadas con la generación de dicho objeto, de donde se deriva la importancia del uso del conocimiento (Cantoral y Farfán, 2003; Cordero, 2001).

Al cambiar la mirada del desarrollo de objetos matemáticos hacia el conocimiento en uso, podemos reconocer que aunque dicho objeto –una definición, una propiedad- no se conozca en toda su extensión y complejidad, sí se usa y que cuando se usa va adquiriendo y desarrollando diferentes formas y funcionamientos acorde a las situaciones particulares que el humano vaya enfrentando (Cordero, 2008; Cordero, Cen y Suárez, 2010; Buendía, 2012). De ahí entonces, la noción de uso desarrollada bajo esta visión teórica nos puede permitir analizar el saber matemático –entendido ahora como un conocimiento en uso- en un escenario de educación no formal, por ejemplo un museo de ciencias.

En un espacio de educación no formal pareciera que no tiene sentido la idea de que los ciudadanos entiendan las nociones matemática como en la escuela o si saben demostrarlas o aplicarlas, pues no existe sanción ni evaluación sobre la integración rigurosa de los conocimientos o sobre la construcción de los mismos (Briseño, 2013; Guisasola y Morentín, 2007).

Ante ello, el interés de esta investigación es analizar cómo un sujeto usa el conocimiento matemático en un escenario de educación no formal. Esto nos sitúa en una línea de investigación en la que se busca reconocer el carácter social de la matemática en el sentido de reconocer en el hacer del individuo –y no sólo su producción matemática final- el referente para explicar la construcción del conocimiento matemático.

Para realizar esta investigación, nos centramos en el caso de los fenómenos y situaciones periódicas ya que la periodicidad es una propiedad que resulta familiar para cualquier individuo pues forma parte de su vida cotidiana y, en particular, es muy común en un escenario de educación no formal. Así, la investigación se enfoca en ver cómo se usa la periodicidad en un ambiente de educación no formal.

Usos, funcionamientos y formas

Por forma entenderemos cómo actúa el sujeto sobre lo periódico, es decir, cómo percibe lo periódico y sus elementos constituyentes. Por funcionamiento, se entenderá para qué le sirve al sujeto lo periódico, de qué manera le está funcionando en una situación específica. Esta investigación da cuenta de cómo se usa la periodicidad en un escenario de educación no formal evidenciando los diferentes funcionamientos y formas de lo periódico cuando un trabajador de un museo de ciencias –un escenario de educación no formal- se confronta ante el movimiento de los satélites de Júpiter. *Lo periódico* lo entenderemos como todo aquello que tiene que ver con el reconocimiento significativo de la periodicidad y no sólo con la estructuración lógica relativa a la aplicación o reconocimiento de una propiedad. Y por resignificación entenderemos los usos situacionales del conocimiento matemático.

Metodología

Proponemos una actividad con un grupo personas que trabajan en el Centro Interactivo de Ciencia y Tecnología de Zacatecas (Zigzag). El objetivo de este reporte es analizar las formas y funcionamientos de lo periódico que se manifiestan cuando un sujeto interactúa durante la observación -intencionalmente propuesta- de Júpiter y de cuatro de sus satélites.

El sujeto con el que se trabajó es uno de los -llamados Expertos- que son personas con experiencia en astronomía observacional y trabajan en el museo como responsables de la sala de astronomía. Una de sus actividades básicas es seleccionar y capacitar a los guías en el manejo de las exhibiciones que constituyen la sala de astronomía así como para poner en marcha los talleres científicos. El resto del grupo experimental son guías del museo que se irán integrando; son estudiantes de diversos niveles educativos que voluntariamente asisten al museo para formarse como tal.

La actividad general consta de un estudio prospectivo astrofotográfico de las lunas de Júpiter, la colecta de datos que captura fotográficamente a Júpiter con sus lunas y finalmente la interacción entre el sujeto y la base de datos para rastrear los usos de lo periódico en un escenario de educación no formal.

A lo largo de la actividad hemos seleccionado episodios para explorar las diferentes formas y funcionamientos de lo periódico. Estos episodios los hemos caracterizado como un conjunto de sucesos conflictivos, identificables y con capacidad de ser aislados con fines de análisis. En cada uno podemos identificar formas y funcionamientos de lo periódico.

En este escrito, consideramos solamente un episodio que llamaremos ¿Quién es quién? cuyo protagonista es uno de los expertos, este episodio ocurre en el seno de la primera parte de la actividad general. Evidenciaremos los funcionamientos y formas que se manifiestan cuando el experto identifica el satélite más alejado del planeta Joviano.

El episodio 1. ¿Quién es quién?

Para Pedro, como el experto que guía toda la actividad, resulta imprescindible distinguir a los satélites en las astrofotografías. Alejándose del trabajo que están realizando los otros expertos, simula con el software Stellarium¹ que observa a Júpiter durante dieciocho noches a la misma hora, captura la imagen correspondiente a cada noche y las compara con las astrofotografías de la base de datos. Arregla las imágenes obtenidas en tiempo real y coloca la primera imagen en el primer renglón, la segunda imagen en el segundo renglón y así sucesivamente hasta distribuir las dieciocho imágenes en una columna, cuidando que los círculos más grandes que representan a Júpiter, queden alineados; el resto de los puntos son los satélites.

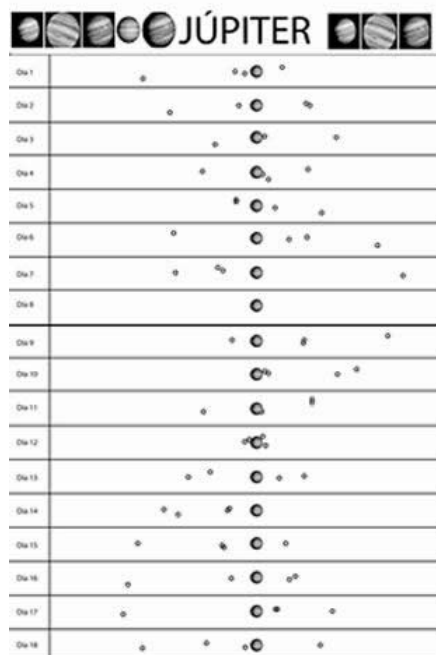


Figura 1. Dieciocho fotografías del planeta y sus satélites alineadas con base en Júpiter

Tomando como base el arreglo de imágenes, Pedro realiza una proyección de las fotografías por medio de un cañón y empleando como pantalla papel cuadriculado, marca sobre este las imágenes proyectadas y separa con líneas horizontales cada fotografía tomada consecutivamente durante 18 noches. El objetivo es realizar un análisis autorreflexivo sobre el comportamiento de los satélites.

Usos de lo periódico. Cuando el experto arregla las 18 fotografías, la forma de uso de lo periódico se manifiesta a través de la identificación de una unidad de análisis. Su referente es su conocimiento institucional que le sugiere que el periodo del satélite más alejado del planeta Júpiter es de un poco más de 17 días. Esta es una forma de uso de lo periódico que le funciona al experto para visualizar un comportamiento regular del satélite más lejano, para identificar los puntos en los cuales el satélite se repite y de allí estimar el periodo y para identificar al satélite más lejano. Al comparar el arreglo de Pedro con el arreglo de Euler, cuando el experto decide alinear las fotografías respecto a Júpiter pareciera emerger un uso de tipo euleriano si comparamos la línea formada por la secuencia de planetas con el eje de simetría de Euler A^4A^{-4} .

¹ Un software que simula en tiempo real la cinemática de los cuerpos celestes.

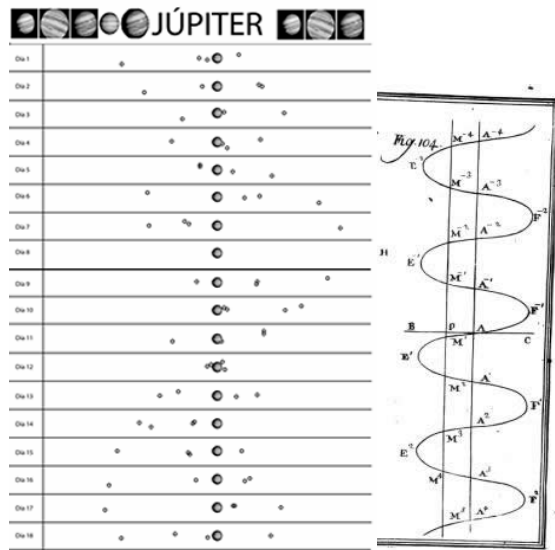


Figura 2. Manifestación del uso euleriano de lo periódico

Para empezar a develar en detalle las formas y funcionamientos de lo periódico que emergen alrededor de la unidad de análisis, el investigador de manera intencional le plantea la primera pregunta al experto tratando de visualizar el origen de la idea de organizar las fotografías una tras otra.

Investigador: Ahora platíqueme cómo se le ocurrió esta secuencia. ¿De dónde sacó que había que colocar las fotografías una bajo la otra?

Pedro: Pues intentaba hacer una especie de [pausa] de proyección en el tiempo para ver cómo cambiaba la configuración de las lunas de un día para otro [pausa] entonces [pausa] primero pensé en hacer un video, sacar las fotos y pasarlas como video [mueve su mano izquierda simulando el paso continuo de las fotografías] pero no tenía las herramientas en la computadora para hacerlo [pausa] entonces otra forma de visualizarlo era poner una detrás de la otra [...].

El experto percibe un comportamiento repetitivo

El experto continúa su monólogo en torno a la forma de arreglar las astrofotografías tratando de percibir algún patrón de regularidad en estas.

Pedro: [pausa] Ver qué pasaba [segmento inaudible] ser yo el que se moviera y que no fueran los dibujos. Así podía ver este, este, este [pausa] [y señala los satélites empezando con el más alejado del planeta en la fotografía del día uno]. Y cuando lo hice ya me di cuenta de algunas cosas muy interesantes como esta curva.

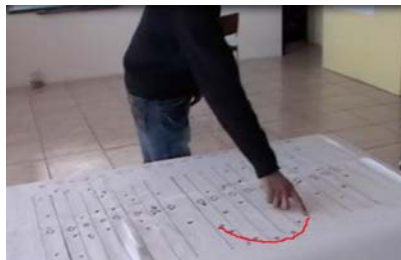


Figura 3. El experto identifica un comportamiento global del satélite más alejado

Usos de lo periódico. La manera en que el experto habla de la curva manifiesta una perspectiva visual ante el arreglo de astrofotografías. La forma de uso de lo periódico se manifiesta en el experto cuando él habla de que un golpe de vista le llevó a descubrir una curva interesante es decir, él identifica un comportamiento periódico de los satélites sin aludir a la definición rigurosa de periodicidad. Este es un momento importante en la epistemología que estamos construyendo pues muestra que la práctica antecede al concepto.

En este momento de autorreflexión la forma de uso se manifiesta cuando el experto desliza su dedo en un trozo de la curva, es decir, el experto no visualiza toda la curva. Más bien está visualizando un trozo de la curva. La primera reacción del experto es a nivel local. No obstante pareciera que hay una visión global en el experto pues lo que realmente detecta es una unidad de análisis, es decir la curva completa. Cuando identifica la unidad de análisis pareciera manifestarse una perspectiva global de los datos. Por otro lado, pareciera estar emergiendo un uso euleriano de lo periódico cuando el experto señala el trozo de la curva y asegura que se repite. Esta manifestación de uso es muy parecida a lo que plantea Euler cuando señala los máximos de la curva.



Figura 4. Manifestación del uso euleriano de lo periódico

La manera en que mueve sus manos pareciera indicar que con la distribución propuesta para el acomodo de fotografías detecta un patrón regular de comportamiento del satélite más alejado. Es decir, antes de hacer referencia al objeto periodicidad realiza un acto propio de la actividad humana, percibe y despliega con sus sentidos el comportamiento regular que califica al satélite más alejado del planeta.

Por otro lado, hasta este momento no hay un argumento que indique que se trata del mismo satélite. Él reconoce que es un golpe de vista, es un golpe intuitivo que activa el aspecto afectivo – el interés- que lo impulsará a un análisis exhaustivo de este comportamiento hasta identificar los satélites y calcular sus periodos; he allí el primer funcionamiento.

Pero, ¿cómo le funciona esta forma de uso? El siguiente segmento evidencia que esta forma de uso le permite al experto iniciar la identificación del satélite más alejado:

Pedro: La curva de allí ya me dio la idea de que esta podría tratarse de la misma luna.



Figura 5. El comportamiento de la curva le funciona al experto para identificar intuitivamente el primer satélite

Entrevistador: ¿Y por qué tendría que tratarse de la misma luna?

Pedro: No, no, no, no tendría todavía, no tendría ninguna prueba, pero se me ocurrió que podría ser la misma porque era un avance muy suave, parece ser la misma; entonces viendo esto y siguiendo una curva más o menos del mismo estilo, aquí se encuentra otra [Con su dedo sigue el rastro de los puntos unidos por la línea].

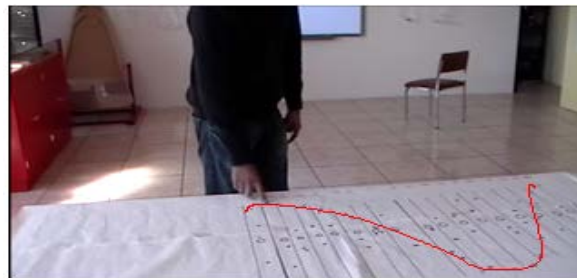


Figura 6. Identificando una unidad de análisis

Entrevistador: ¿Es la misma?

Pedro: Eso es ya lo que se intenta probar. Pero esa es nada más la primera intuición [pausa] la primera intuición.

Usos de lo periódico. La forma de uso de lo periódico se manifiesta a través de la identificación de un patrón de repetición puntual. Si bien hasta este momento es una visión meramente intuitiva como reconoce él, es una forma de uso donde los sentidos juegan un papel fundamental para su identificación, lo cual no le resta importancia. El menciona que “podría ser la misma”, “parece ser la misma”, “del mismo estilo”; este encadenamiento de afirmaciones que evidencian el reconocimiento de un patrón repetitivo culmina en la detección de una unidad de análisis cuando el experto menciona “aquí se encuentra otra”. Detectada una primera unidad de análisis busca su repetición. Esta forma de uso le funciona al experto para una identificación intuitiva del satélite más alejado del disco joviano.

Hacia un análisis menos sensorial y más analítico

El experto no ha quedado conforme con el análisis intuitivo realizado al planeta más lejano. Ahora emprende un análisis más analítico.

Pedro: Entonces ya lo que se me ocurre para empezar a clasificar es ver su distancia, el máximo alejamiento al que yo pueda tener a partir de Júpiter. Entonces veo aquí un alejamiento que es de los máximos. Y señala el alejamiento a partir de Júpiter al satélite.



Figura 7. El máximo alejamiento del satélite es una forma de uso

Usos de lo periódico. Una vez que el experto detecta un comportamiento regular del satélite más alejado del planeta, se dirige hacia un análisis local. La curva que representa el comportamiento regular del satélite presenta ciertos máximos, esta forma de uso de lo periódico es más fina pues implica poner en juego la noción de estimación para evidenciar en qué punto podría el satélite estar en su máximo alejamiento. La estimación como forma de uso tiene sentido porque se captó una fotografías por día, lo que lleva a una estimación burda del máximo alejamiento, sin embargo esta forma de uso sigue funcionando para clasificar los cuerpos que rodean al planeta. Cuando el experto reconoce un alejamiento máximo del satélite pareciera estarse manifestando el uso euleriano de lo periódico al comparar el máximo de Pedro con la propuesta de Euler relativa al diámetro BC de la curva.

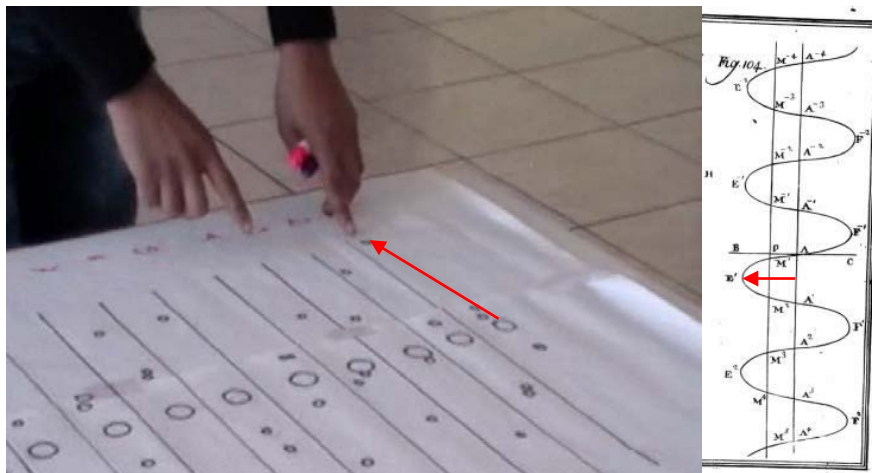


Figura 8. Manifestación del uso euleriano de lo periódico

Se manifiesta la unidad de análisis como forma de uso de lo periódico cuando Pedro reflexiona:

Pedro: [Segmento inaudible] [pausa] pero en el día dieciocho.



Figura 9. El día dieciocho es una unidad de análisis

Entrevistador: ¿Y por qué en el día dieciocho?

Pedro: Hasta ese día tomamos su frecuencia.

Entrevistador: ¿Pero por qué justamente el día dieciocho?

Pedro: Bueno, nos detuvimos hasta allí porque fueron los días que observó Galileo.

Entrevistador: ¡Ah! Entonces usted está haciendo referencia al texto de Galileo.

Pedro: ¡Sí!

Usos de lo periódico. La forma de uso de lo periódico es la unidad de análisis institucional de dieciocho días para el satélite más alejado. Una mirada al comportamiento del satélite le permite al experto verificar que en efecto, el satélite más alejado repite su posición el día dieciocho, lo cual concuerda con su conocimiento institucional sobre el periodo del satélite más alejado. Esta forma de uso le funciona al experto como una herramienta para identificar al satélite en cuestión.

Optimizando la unidad de análisis

Entrevistador: ¿Podríamos dar alguna razón de este día dieciocho sin recurrir a Galileo con base en ese comportamiento que acaba de sugerir?

Pedro: [pausa] [Camina pensativo de extremo a extremo de la mesa donde yace la secuencia de fotografías]. ¡Mmmh! Lo puedo dar pero ya sería con base en el resultado. [Se queda meditando momentáneamente]. Lo podemos hacer haciendo un análisis de menos días y dándonos cuenta de que es insuficiente para sacar algunos periodos. Señala el rango comprendido entre el día uno y el día siete.



Figura 10. Buscando una unidad de análisis mínima

Pedro: Entonces lo alargamos un poco, y nos damos cuenta de que el día diecisiete o dieciocho, eso es suficiente para sacar los periodos de todas las lunas.

Entrevistador: ¿Y por qué es suficiente?

Pedro: Porque ya aparecen todos los periodos. Y señala el dibujo completo.

Entrevistador: ¡No entiendo!

Pedro: ¡Mmmh!

Entrevistador: ¿Cómo que aparecen todos los periodos?

Pedro: Sí, ya es posible calcularlos todos.

Entrevistador: ¿Pero por qué ya es posible calcularlos todos?

Pedro: ¡No!, ¡No!, ¡No! por eso digo hasta ahorita no tengo una razón. Más bien es el trabajo que ya hemos hecho. Sin [segmento inaudible] referirse a Galileo. Si lo hacemos con diez días y no es suficiente aún, lo hacemos con catorce y no es suficiente todavía.

Entrevistador: Pero, ¿Hay alguna razón de fondo? [pausa] Intuitiva, no importa.

Pedro: ¡Mmmh! [Se queda meditando, pausa larga, se aleja del dibujo y vuelve a observar]. ¿Intuitiva? Yo creo que si lo hubiéramos hecho, tendríamos que haberlo hecho por más días. Veintitres, veinticuatro, para ver [pausa] para que fueran más evidentes los patrones.

Entrevistador: ¿Y qué patrón buscaríamos?

Pedro: Esta curva. Y señala la sucesión de puntos que forma la curva.

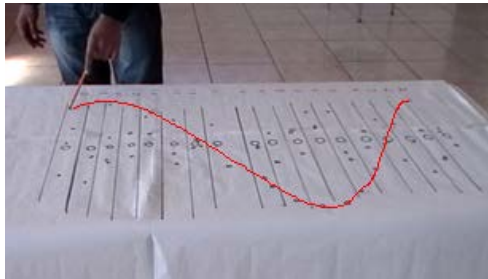


Figura 11. Identificando una unidad de análisis con base en el comportamiento regular del satélite

Usos de lo periódico. Cuando Pedro propone dieciocho como unidad de análisis, él dice que no puede desprenderse del conocimiento institucionalizado. Pareciera que en su mente se grabó la unidad de análisis institucional. Esa imagen no se desvanece ni cuando interacciona con las fotografías. Pareciera más bien que sucede una resignificación de la unidad de análisis. El experto conoce y acepta los resultados de Galileo, ha aceptado el conocimiento institucional sin cuestionarlo. Sin embargo, al interactuar con las fotografías este conocimiento es resignificado pues el experto ha encontrado en principio de dónde proviene ese conocimiento, cuando verifica que el satélite se repite el día dieciocho. El conocimiento institucional adquiere un sentido que no tenía antes y decimos que el conocimiento se está resignificando.

Discusión

La puesta en marcha de la práctica social de la predicción mediante una situación experimental intencional hace que emerja la pregunta ¿Quién es quién? y con ella la manifestación de usos de lo periódico en un escenario de educación no formal. A su vez estos usos de lo periódico se hacen visibles a través de formas y funcionamientos concretos. El comportamiento repetitivo de los satélites, la identificación de una unidad de análisis, la simetría y la velocidad de los satélites son las formas de uso de lo periódico que son develadas cuando el experto trata de responder la pregunta ¿Quién es quién? Estas formas de uso de lo periódico le funcionan al experto para identificar y calcular los periodos de cada uno de los satélites. La situación intencional es propia de un escenario de educación no formal y por tanto los usos de lo periódico son propios de este contexto. Además, pareciera evidenciarse un uso euleriano de lo periódico. A lo largo de la actividad pareciera haber un desarrollo de usos de lo periódico, lo cual nos hace pensar en una resignificación del conocimiento matemático.

Conclusión

Hemos dado cuenta parcialmente de cómo se usa la periodicidad en un escenario de educación no formal cuando se pone en marcha de manera intencional la práctica de la

predicción mediante la actividad del movimiento periódico de los satélites de Júpiter. Hemos encontrado evidencia de que se manifiestan formas y funcionamientos de lo periódico así como el uso euleriano que nos llevan a sugerir que el uso del conocimiento matemático se está resignificando.

Si bien es cierto que solo hemos analizado un episodio y a un sujeto, para lograrlo la metodología ha sido fundamental. Consideramos que esta metodología constituyó el hilo conductor que nos guió para develar parcialmente las formas y funcionamientos de lo periódico en un escenario de educación no formal. Pareciera que estos esquemas son una contribución científica importante que podría facilitar la búsqueda de evidencias del uso del conocimiento matemático en un escenario de educación no formal y por ende del robustecimiento de la Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa. En estos esquemas se amalgaman el grupo humano, su conocimiento científico institucional, una situación desafiante y un escenario de educación no formal. Esta amalgama podría ser caldo de cultivo para propiciar el surgimiento de formas y funcionamientos de lo periódico a través de herramientas específicas para la resignificación del conocimiento. En el episodio analizado se propone una estrategia concreta para dar cuenta de cómo se usa el conocimiento en la situación que proponemos. Nada podemos afirmar respecto a los usos de lo periódico manifestados por el grueso del grupo que inicialmente nos propusimos estudiar. El tiempo y sus condiciones de permanencia en el museo nos impidieron explorar las formas y funcionamientos de lo periódico con ellos. La manifestación de usos de lo periódico en el grueso del grupo así como en usuarios de museos de ciencia o de otros ambientes de enseñanza no formal será otra historia.

Referencias y bibliografía

- Barbeau, E. y Taylor, P. (2009). *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom: The 16th ICMI Study*. New York: Springer
- Buendía, G. y Cordero, F. (2005). Prediction and the periodic aspect as generators of knowledge in a social practice framework. A socioepistemological study. *Educational Studies in Mathematics*, 58 (3), 299-333
- Buendía, G. (2012). El uso de las gráficas cartesianas. Un estudio con profesores. *Educación Matemática*, 24 (2), 9-35.
- Briseño-Garzón, A. (2013). More than science: family learning in a Mexican science museum. *Cultural Studies of Science Education*, 1-21.
- Cantoral, R. y Farfán, R. (2003). Matemática Educativa: Una visión de su evolución. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 6(1), 27-40.
- Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 4(2), 103-128.
- Cordero, F. (2008). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. En Cantoral, R., Covián, O.; Farfán, R.M., Lezama, J., Romo, A. (Eds.) *Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: Un reporte Iberoamericano*. Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C. y Díaz de Santos S.A. 285-309.
- Cordero, F., Cen, C. y Suárez, L. (2010). Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el Bachillerato. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 13(2), 187-214.

- Cox-Petersen, A. M., Marsh, D. D., Kisiel, J., y Melber, L. M. (2003). Investigation of guided school tours, student learning, and science reform recommendations at a museum of natural history. *Journal of Research in Science Teaching*, 40(2), 200-218.
- Guisasola, J. y Morentin, M. (2007). ¿Qué papel tienen las visitas escolares a los museos de ciencias en el aprendizaje de las ciencias? Una revisión de las investigaciones. *Enseñanza de las ciencias* 25(3), 405-411.
- Laugksch, R. (2000). Scientific literacy: A conceptual overview. *Science Education* 84, 71-94.
- Lave, J. (1988). *Cognition in practice: Mind, mathematics, and culture in everyday life*. Cambridge: Cambridge University Press.
- National Research Council. (1996). *National Science Education Standards*. Washington, DC: National Academy Press.
- National Research Council. (2007). *Ready, set, science!: Putting research to work in K-8 science classrooms*. Washington, DC: National Academy Press.
- National Research Council. (2009). *Learning science in informal environments: People, places, and pursuits*. Washington, DC: The National Academies Press.
- National Science Teachers Association. (1998). NSTA position statement on informal National Science Teachers Association. (2001). An NSTA position statement on informal science education. In P. Katz (Ed.), *Community Connections for Science Education* (pp. ix xi). Arlington, VA: NSTA Press.
- Roqueplo, P. (1983). *El reparto del saber*. Buenos Aires: Gedisa.
- Trigueros, M., Sánchez A. y Vázquez, E. (1996). Una experiencia de teatro como medio para divulgación de la ciencia. *Ciencia* 43(4), 310-316.
- UNESCO (2011). *Les défis de l'enseignement des mathématiques dans l'éducation de base*. Paris: UNESCO. <http://unesdoc.unesco.org/images/0019/001917/191776F.pdf>

Matriz asociada a una transformación lineal. Una mirada desde la Teoría APOE

Isabel **Maturana** Peña

Instituto de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Chile

isamatup@hotmail.com

Marcela **Parraguez** González

Instituto de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Chile

marcela.parraguez@ucv.cl

María **Trigueros** Gaisman

Instituto Tecnológico Autónomo de México.

México

trigue@itam.mx

Resumen

Basados en la teoría APOE (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas), investigamos desde una postura cognitiva las construcciones y mecanismos mentales necesarios para construir la Matriz Asociada a una Transformación Lineal. Diseñamos una descomposición genética para el teorema de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal, esto es, investigar, mediante la metodología usada en la teoría APOE propuesta por Dubinsky y el grupo RUMEC, los procesos de aprendizaje del concepto. Reportamos en este trabajo; un caso de estudio, las evidencias mostraron que los estudiantes que construyen el concepto de coordenadas de un vector, no necesariamente lo generalizan hacia una matriz de coordenadas.

Palabras clave: matriz asociada, Transformación lineal, Teoría APOE.

Introducción

Nuestra propuesta de investigación estudió en profundidad las estrategias de aprendizaje que los estudiantes ponen en juego para aprender el teorema matriz asociada a una transformación lineal, dicho estudio se realizó durante el año 2013, en una universidad de Chile.

La enseñanza del álgebra lineal es un tema que se encuentra presente en la mayoría de los programas de matemáticas para carreras como ingeniería, licenciatura en ciencias o en economía; es así que surge el interés por investigar los procesos de enseñanza y aprendizaje de sus conceptos. Existen numerosas investigaciones que ofrecen evidencias sobre las dificultades que muestran los estudiantes para comprender conceptos relativos al álgebra lineal. Por ejemplo en la mayoría de las universidades, los cursos de álgebra lineal no son exitosos (Harel, 1989a; Harel, 1989b; Sierpinska, 2000; Sierpinska, Dreyfus y Hillel, 1999). Sobre el concepto de transformación lineal, y en particular el de matriz asociada podemos citar algunas de las investigaciones recientes: Karrer y Jahn (2008) presentan una investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de las transformaciones lineales y el uso del Cabri Géomètre, como herramienta

de apoyo, a fin de explorar las tareas que implican distintos registros de representación; su estudio mostró que uso del Cabri Géomètre promueve la identificación de las relaciones entre lo gráfico, y la matriz asociada a una transformación lineal. Roa y Okaç (2010), proponen un modelo de construcción del concepto Transformación Lineal, el cual se sustenta en la teoría APOE, proporcionando como resultado de investigación, una descomposición genética del concepto, que consideró dos perspectivas de construcción, determinados por diferentes mecanismos mentales: el primero por la coordinación de procesos y el segundo por la aplicación de acciones específicas sobre objetos iniciales. Montiel y Batthi (2010) abordan la problemática de enseñanza de los conceptos de la matriz cambio de base y la representación matricial de las transformaciones lineales, bajo el enfoque ontosemiotico, centrando su atención en el rol de problemáticas semánticas y gestuales en la interacción en el aula; Bagley, Rasmussen y Zandieh (2012) centran su investigación en la relación conceptual que los estudiantes establecen entre las matrices y las funciones lineales, en su informe determinan que algunos estudiantes concilian ambos conceptos, y que son estos capaces de trabajar con matrices sin dificultades. Por el contrario los que no articulan el concepto de función con el de matriz se les trae dificultades. Wawro, Larson, Zandieh y Rasmussen (2012) presentan en su trabajo una trayectoria hipotética de aprendizaje, sobre el concepto de transformación lineal y su relación con la multiplicación de matrices.

Sin embargo las investigaciones reportadas no han hecho énfasis, propiamente tal, en aspectos cognitivos importantes de la transformación lineal en su perspectiva matricial, como por ejemplo en el Teorema Matriz Asociada a una Transformación Lineal (TMATL), dicho teorema establece que; sean V y W espacios vectoriales de dimensión finita sobre un mismo cuerpo K , $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal, $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ una base de V y $B' = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ una base de W . Los vectores $T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)$ están en W y por lo tanto, cada uno de ellos se puede expresar como combinación lineal de los vectores de la base B' :

$$T(v_1) = a_{11}w_1 + a_{21}w_2 + \dots + a_{m1}w_m$$

$$T(v_2) = a_{12}w_1 + a_{22}w_2 + \dots + a_{m2}w_m$$

$$\vdots$$

$$T(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{mn}w_m.$$

En otras palabras,

$$[T(v_1)]_{B'} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} \dots [T(v_n)]_{B'} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix};$$

y la matriz asociada a la transformación lineal T en las bases B y B' , que rotulamos como

$$[T]_{B'}^B \text{ es } \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

tal que $[T]_{B'}^B [v]_B = [T(v)]_{B'}$, para todo v en V . (Poole, 2006).

Consideramos son dos las principales razones de por qué es importante el aprendizaje de este teorema. En primer lugar, el Teorema de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal,

proporciona una manera eficiente de llevar las transformaciones lineales a un equipo digital. La segunda razón es teórica; consideremos A matriz asociada a una transformación lineal T , esta elección depende de bases B y B' , normalmente uno elegiría B y B' para hacer el cómputo de matrices de coordenadas, tan simple como sea posible, cuando esto se hace en la forma correcta la matriz A puede proporcionar información importante sobre la transformación lineal.

Como objetivos de Investigación nos propusimos determinar las construcciones y mecanismos mentales que pone en juego un individuo como estrategia cognitiva para construir el Teorema de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal. En el lenguaje de la teoría APOE: diseñar y evidenciar una descomposición genética del teorema.

Teoría APOE

La investigación usó la teoría APOE desarrollada por Dubinsky y el grupo de investigación RUMEC (Research in Undergraduate Mathematics Education Community). Actualmente en Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros y Weller (2014) se presentan los elementos de la teoría y su uso en investigaciones en Educación Matemática. Dubinsky se basa en la abstracción reflexiva de Piaget para describir la construcción de objetos mentales, y distingue varios tipos de mecanismos: interiorización, coordinación, encapsulación, y reversión. Estos originan diferentes construcciones mentales: acciones, procesos, objetos, esquemas (APOE).

Consideremos F de concepto matemático –Teorema de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal–. Un individuo posee una concepción acción de F si las transformaciones que hace sobre él se realizan paso a paso, obedeciendo a estímulos que son y percibe como externos. Él interioriza la acción en una concepción proceso de F si puede realizar una operación interna que hace (o imagina) esencialmente la misma transformación enteramente en su mente, sin necesariamente recorrer todos los pasos específicos. Si piensa en un proceso como un todo, donde realiza y construye transformaciones sobre su totalidad ha encapsulado el proceso en una concepción objeto de F . Un esquema de aquel trozo es una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente del individuo en una estructura cognitiva coherente. La coherencia es la capacidad para reconocer relaciones al interior del esquema y establecer si este permite solucionar una situación matemática particular y usarlo en tal caso. Un esquema está siempre en evolución y puede considerarse como un nuevo objeto al cual pueden aplicársele acciones y procesos; en tal caso, se dice que el esquema se ha tematizado.

Una descomposición genética, (DG), describe en detalle los aspectos constructivos de F para explicitar un camino factible de su aprendizaje en términos de construcciones y mecanismos mentales. Tal DG no es única, pues depende de los caminos de construcción y de las estructuras mentales previas.

Diseño Metodológico de la investigación

En esta investigación se propuso comprender los procesos mentales que operan en las estrategias de aprendizaje del Teorema de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal; para ello, se utilizará la teoría cognitiva APOE como marco teórico y metodológico, al cual se le incorpora el estudio de caso (Stake, 2010). Los estudio de caso son particularmente apropiados para realizar investigaciones en un determinado periodo de tiempo, identificando los distintos procesos interactivos que conforman la realidad de su enseñanza-aprendizaje Arnal, J. del Rincón, D., y La Torre, A. (1992). Las unidades de estudio fueron alumnos chilenos de una

universidad del país, de las carreras de pedagogía y licenciatura en matemática. Los estudiantes de esta unidad de estudio trabajada como “caso”, se vinculan con las siguientes categorías e indicadores: estudiantes exitosos académicamente, experiencias previas, avance curricular, ejercitan ampliamente en matemática, estudiantes voluntarios, heterogeneidad en los procesos de formación de los estudiantes, accesibilidad de los investigadores.

Se trabajó con una unidad de análisis de 20 estudiantes, atendiendo a los criterios antes señalados y se diseñaron protocolos de entrevistas semi-estructuradas, previstas por la teoría las cuales se video grabaron. Al caso de estudio se le aplicó el ciclo de investigación previsto en la teoría APOE, el cual estableció: un análisis teórico, conocido como DG; un diseño, basado en la DG teórica, y aplicación de instrumentos; seguido de un análisis y verificación de datos (Arnon *et al.*, 2014). La aplicación de este ciclo permite obtener una descripción de las construcciones y mecanismos mentales que realizan los estudiantes; y a partir del análisis de los datos obtenidos, se lo puede repetir, para refinar tanto el análisis teórico como los instrumentos.

Descomposición genética hipotética

A continuación presentamos parte del relato de la descomposición genética propuesta en la investigación para construir la Matriz Asociada a una Transformación Lineal. Bajo la hipótesis de la teoría APOE y las nociones matemáticas sobre la Matriz Asociada a una Transformación Lineal, sostenemos que:

Para que un estudiante construya la Matriz Asociada a una Transformación Lineal como objeto, es necesario que muestre una construcción objeto del concepto espacio vectorial de dimensión finita, de esta forma consideramos dos espacios vectoriales V y W , con dimensiones finitas: digamos n y m respectivamente, para luego, desencapsular de este objeto; por una lado bases ordenadas $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ y $B' = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$ de los espacios V y W respectivamente como procesos y la pertenencia de un vector w al espacio vectorial W , también como proceso. Paso seguido se dan dos coordinaciones de los procesos antes mencionados a través, uno de la transformación lineal y el otro por medio de la combinación lineal de vectores. Específicamente, la primera coordinación, mediante la transformación lineal, es entre los procesos de las bases ordenadas B y B' de V y W respectivamente, donde se calculan mediante la transformación lineal las imágenes de los vectores de la base B . La segunda coordinación es entre los procesos base ordenada B' de W , con la pertenencia de un vector w a W , se coordina a través de la combinación lineal de vectores, dando origen al proceso de expresar w como combinación lineal de los vectores de la base ordenada B' de W , este nuevo proceso se encapsula en el objeto coordinada de vector w en la base B' , es decir, $[w]_{B'}$. En la Figura 1 se muestra en el esquema la coordinación de los procesos que se obtienen de desencapsular el objeto coordinada y el proceso que obtuvimos de la coordinación mediante la transformación lineal, ambos nuevamente serán coordinados por la generalización dada por el cuantificador que determina que el proceso se repetirá en todos los vectores de la base ordenada B de V , de esta forma se obtiene la matriz de coordenadas, es decir un ordenamiento de las coordenadas de las imágenes, este proceso es encapsulado en el objeto matricial y rotulado como $[T]_{B'}^{B'}$.

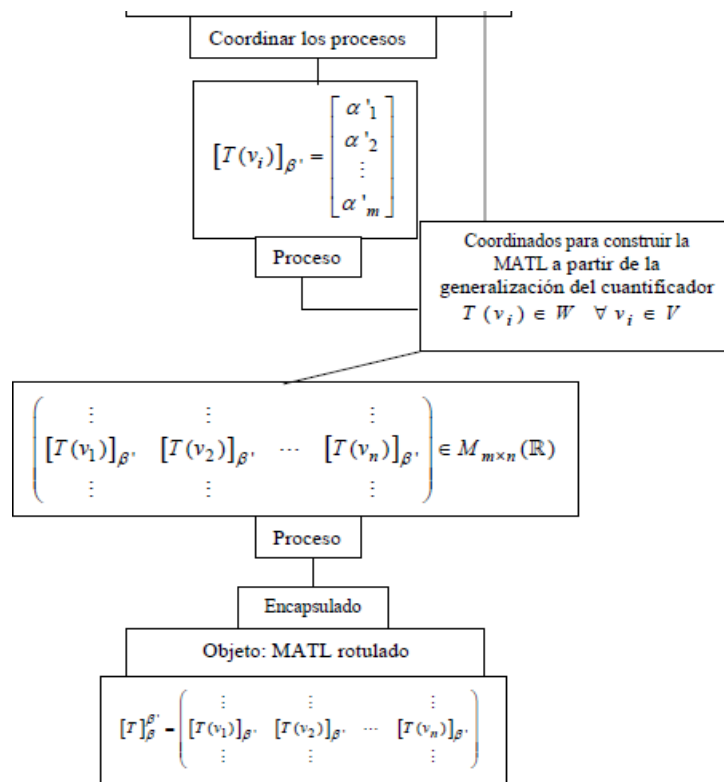


Figura 1. Detalles de la DG de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal.

Por otra parte, la DG da cuenta de la desencapsulación de los objetos matriz rotulada de coordenadas y las coordenadas de un vector v de V , ambos objetos desencapsulados como procesos son coordinados por el producto matricial, formando una matriz resultante de dicho producto, es decir $[T]_{\beta'}^{\beta}[v]_{\beta}$ lo cual es un proceso el que se podrá encapsular en un objeto matricial y posteriormente rotular como $[T(v)]_{\beta}$.

En búsqueda de evidencias empíricas para la DG

Diseñamos un cuestionario de 5 preguntas, con la intención de documentar las construcciones y mecanismos mentales necesarios para construir la Matriz Asociada a la Transformación Lineal. En anexo 1 y tabla 1, se encuentran las preguntas realizadas en el cuestionario completo. Realizamos un análisis a priori y uno a posteriori para cada una de las preguntas. Hemos seleccionado dos preguntas del cuestionario, para mostrar parte de las evidencias obtenidas, que a continuación serán analizadas a la luz de la DG.

Pregunta 4 del cuestionario

Determine la matriz asociada a la transformación lineal definida desde $IP_2[x]$ (polinomios de grado menor o igual a dos) a $\mathbb{R}^3$, por $T(ax^2+bx+c)=(a+c, a-b, b)$, en las bases $B_4=\{x^2, x^2+x, x^2+x+1\}$ y $B_5=\{(1,1,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ de $IP_2[x]$ y $\mathbb{R}^3$ respectivamente.

La pregunta propone determinar si el estudiante muestra una construcción proceso del Teorema Matriz Asociada a Transformación Lineal. Para ello, como se muestra en la figura 1, se considera el tramo en la DG, donde debe coordinar los procesos e incorporar la generalización.

Es así que el estudiante da evidencias de tener una construcción proceso producto de la generalización de la matriz constituida por las coordenadas de las imágenes de los vectores de la Base B_4 .

En la respuesta esperada, un estudiante debe calcular las imágenes de los vectores de la base B_4 , es decir:

$T(x^2) = (1, 1, 0)$, $T(x^2+x) = (1, 1, 1)$ y $T(x^2+x+1) = (2, 0, 1)$. De esta forma calcula las coordenadas de cada vector imagen, es decir $(1, 1, 0) = \alpha_1(1,1,0) + \beta_1(0,1,0) + \delta_1(0,0,1)$, $(1, 1, 1) = \alpha_2(1,1,0) + \beta_2(0,1,0) + \delta_2(0,0,1)$ y $(2, 0, 1) = \alpha_3(1,1,0) + \beta_3(0,1,0) + \delta_3(0,0,1)$, de esta forma se obtienen los valores de las coordenadas de cada vector imagen, ordenado los sistemas que se obtienen en una matriz se tiene $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$, de donde la Matriz

Asociada a una Transformación Lineal corresponde a $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Pregunta 5 del cuestionario

Considere la transformación lineal $F: \langle (1,0,0,1), (0,1,1,0) \rangle \rightarrow \langle x^2, x+1 \rangle$, definida por $[F]_{B'}^{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$; donde $B = \langle (1,0,0,1), (0,1,1,0) \rangle$ y $B' = \langle x^2, x+1 \rangle$ determine las coordenadas de la imagen del vector $[v]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

La pregunta permite observar si la construcción de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal es un objeto encapsulado del cual se reconoce su propiedad de continuar siendo una función. En la respuesta esperada, un estudiante para determinar las coordenadas del vector, debe aplicar $[F]_{B'}^{B} [v]_B = [F(v)]_{B'}$, por lo que se tiene que las coordenadas del vector pedidas son: $[F(v)]_{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 24 \end{bmatrix}$.

El desempeño de los estudiantes y análisis a posteriori

Con el fin de mostrar ejemplos de los datos obtenidos, a continuación presentamos una selección del trabajo realizado por cuatro estudiantes del caso a las preguntas antes descritas.

Análisis a posteriori Pregunta 4

La Figura 2, el estudiante E4 muestra una construcción objeto del concepto Matriz Asociada a una Transformación Lineal; al describir la construcción indicando las coordenadas de las imágenes de los vectores de la base del espacio de partida, en un arreglo matricial.

Determine la matriz asociada a la transformación lineal T en las bases $B_4 = \{x^2, x^2+x, x^2+x+1\}$ y $B_3 = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ de $IP_2[x]$ y R^3 respectivamente.

has qto asf

$$T(ax^2+bx+c) = (a+c, a-b, b)$$

$$\left([T(x^2)]_{B_3} \mid [T(x^2+x)]_{B_3} \mid [T(x^2+x+1)]_{B_3} \right)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

matriz asociada a la TL.

que no recuerdo como se denota

$$\begin{cases} T(x^2) = (1, 1, 0) \\ T(x^2+x) = (1, 0, 1) \\ T(x^2+x+1) = (2, 0, 1) \end{cases}$$

Figura 2. Producción del estudiante E4.

Esto nos permite decir junto con su trabajo a las otras preguntas que coordina las construcciones proceso de la imagen de un vector con el concepto de matriz, mediante la base, lo que hemos entendido como la generalización de los procesos de formación de las coordenadas de las imágenes mediante la transformación lineal.

Opuestamente a E4, en la Figura 3 se muestra la producción de E3, al que se le dificulta dar respuesta.

Determine la matriz asociada a la transformación lineal T en las bases $B_4 = \{x^2, x^2+x, x^2+x+1\}$ y $B_3 = \{(1,1,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ de $IP_2[x]$ y R^3 respectivamente.

$$T: IP_2[x] \longrightarrow IR^3$$

$$ax^2+bx+c \rightsquigarrow (a+c, a-b, b)$$

$$\{x^2, x^2+x, x^2+x+1\} \rightsquigarrow \{(1,1,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$$

Figura 3. Producción del estudiante E3.

E3, no puede dar respuesta a la pregunta, pero en sus respuestas a las preguntas anteriores mostró una construcción proceso del concepto coordenadas de la imagen de un vector, esto es la construcción de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal, a pesar de necesitar el concepto de coordenadas no es suficiente para asegurar su construcción.

Análisis a posteriori Pregunta 5

La Figura 4 muestra, la respuesta de E12 a la pregunta 5.

$$V = 2(1, 0, 0, 1) + 3(0, 1, 1, 0)$$

$$V = (2, 3, 3, 2)$$

$$T: \langle (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0) \rangle \longrightarrow \langle x^2, x+1 \rangle$$

$$1, 0, 0, 1 \rightsquigarrow x^2$$

$$0, 1, 1, 0 \rightsquigarrow$$

Figura 4. Respuesta que realiza el E12.

A la luz de la DG, podemos argumentar que no ha construido el concepto Matriz Asociada a una Transformación Lineal, pues a pesar de mostrar una construcción proceso del concepto combinación lineal y de base de un espacio vectorial, no le alcanza para dar respuesta, en las

preguntas anteriores construye las coordenadas, pero no construye la matriz, lo que constituye un obstáculo para lograr dar respuesta a una pregunta que le pide operar con ella. Por el contrario el estudiante E9 muestra según Figura 5, la Matriz Asociada a una Transformación Lineal como una construcción mental objeto, la que desencapsula permitiéndole realizar transformaciones sobre él, y llegar a construir TMATL.

$$[F]_{B'} \cdot [v]_B = [F(v)]_{B'} \quad \text{eso es así}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 24 \end{pmatrix}$$

2+6=8
3+16=19

$$\therefore [F(v)]_{B'} = \begin{pmatrix} 8 \\ 24 \end{pmatrix}$$

Figura 5. Respuesta que realiza el E9.

En el anexo 2 se encuentra la tabla 2, que resume la información sobre los análisis de las producciones escritas de todos los estudiantes del caso de estudio, y de todas sus respuestas al cuestionario completo, donde se ha determinado cuál es la construcción mental mostrada prevista en la DG.

Conclusiones

La investigación desde una postura cognitiva para el caso de estudio, muestra construcciones y mecanismos mentales para modelar el aprendizaje del TMATL, entre los que se destacan la construcción mental objeto del concepto coordenadas del vector y la coordinación entre los procesos: el proceso de coordenada de un vector que se repite en todos los vectores de la base ordenada del espacio dominio de la transformación, con el proceso matriz, para obtener como resultado un ordenamiento de las imágenes mediante la transformación. Acerca del teorema que nos ocupa, las evidencias obtenidas dan cuenta desde el carácter del modelo DG, levantando desde allí las siguientes conclusiones: la no construcción del concepto de coordenadas de un vector, imposibilita la construcción de la MATL, a su vez la determinación de las coordenadas de un vector, no basta para construir la matriz asociada la Transformación lineal. Según lo dispuesto en la DG, la dificultad que muestran los informantes del caso, está en que no han construido la coordinación entre: proceso que permite escribir a estos vectores imagen como combinación lineal de los vectores de la base del espacio dominio de T , con el de matriz para obtener un ordenamiento de las imágenes mediante T , en una matriz que se identifica con la matriz coordenadas.

Por otra parte, la construcción de la MATL como un objeto, no es garantía de haber construido la relación $[T]_{B'}^{B'} [v]_B = [T(v)]_{B'}$, que establece el TMATL como un objeto.

En general podemos decir que las construcciones previstas en la DG que aparecen en el trabajo de los estudiantes son fundamentalmente, la construcción objeto del concepto de coordenadas de un vector, la construcción objeto de la MATL; y el reconocimiento de MATL como una función. Estos datos muestran que la DG diseñada parece dar cuenta de las construcciones necesarias en el aprendizaje del TMATL. Aunque este estudio no es suficiente para afirmarlo. Es necesario llevar a cabo más investigación que contemple entrevistas a los estudiantes para poder asegurarlo. Se propone, así, esta DG a la comunidad interesada en el

aprendizaje de este tema como un posible modelo de enseñanza-aprendizaje del TMATL y como diseño de investigación que permita validarla.

Reconocimientos

Este trabajo ha sido subvencionado parcialmente por el Proyecto FONDECYT N° 1140801. Los autores manifiestan sus agradecimientos por la buena disposición de todos los participantes en la investigación.

Referencias y bibliografía

- Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education*. New York: Springer.
- Arnal, J. del Rincón, D., & La Torre, A. (1992). *Investigación educativa: fundamentos y metodología*. Barcelona: Labor.
- Bagley, S., Rasmussen, C., & Zandieh, M. (2012). Inverse, composition, and identity: The case of function and linear transformation. In S. Brown, S. Larsen, K. Marrongelle, & M. Oehrtman (Eds.), *Proceedings of the 15th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics*.
- Harel, G. (1989a). Applying the principle of multiple embodiments in teaching linear algebra: aspects of familiarity and mode of representation. *School Science and Mathematics*, 89, 49-57.
- Harel, G. (1989b). Teaching in learning linear algebra; difficulties and an alternative approach to visualizing concepts and processes. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 11(1-2), 139-148.
- Karrer, M., & Jahn, A-P. (2008). Studying plane linear transformations on a dynamic geometry environment: analysis of tasks emphasizing the graphic register. *ICME 11- TSG 22*. Theme number 1.
- Montiel, M., & Bhatti, U. (2010) Advanced Mathematics Online: Assessing Particularities in the Online Delivery of a Second Linear Algebra Course. *Online Journal of Distance Learning Administration*, XIII(II). University of West Georgia, Distance Education Center.
- Poole, D. (2006). *Álgebra Lineal. Una introducción Moderna*. México: Thomson Internacional.
- Roa, S., & Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(1), 89-112.
- Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. En J.-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 209-246). Kluwer Academic Publishers.
- Sierpinska, A., Dreyfus, T., & Hillel, J. (1999). Evaluation of the teaching design in linear algebra: the case of linear transformations. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(1), 7-40.
- Stake, R.E. (2010). *Investigación con estudio de casos*. Barcelona: Labor.
- Wawro, M., Larson, C., Zandieh, M., & Rasmussen, C. (2012). A hypothetical collective progression for conceptualizing matrices as linear transformations. *Paper presented at the Fifteenth Conference on Research in Undergraduate Mathematics Education*. Portland, OR.

Apéndice A

Anexo 1

Tabla 1

Preguntas del cuestionario correspondientes a TMatL.

Pregunta 1	Sea $T: R^2 \rightarrow R^3$ transformación lineal definida por $T(x, y) = (x + y, x - y, x)$, considere $C_2 = \{(1, 0), (0, 1)\}$ base canónica de R^2 y $C_3 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ base canónica de R^3 . Determine las coordenadas de la imagen del vector $(2, 1)$ en la base C_3 .
Pregunta 2	Sea $T: R^3 \rightarrow R^2$ transformación lineal definida por $T(x, y, z) = (x + y - z, x + z)$, considere $B_1 = \{(1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$ base de R^3 y $B_2 = \{(1, 1), (0, 1)\}$ base de R^2 . Determine $[T(2, 1, 0)]_{B_2}$.
Pregunta 3	Sea $T: M_2(R) \rightarrow R^2$ transformación lineal definida por $T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (a + b - c, d)$. Considere $B_3 = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ base de R^3 y $B_2 = \{(1, 1), (0, 1)\}$ base de R^2 . Determine $[T\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)]_{B_2}$.
Pregunta 4	Determine la matriz asociada a la transformación lineal definida desde $IP_2[x]$ (polinomios de grado menor o igual a dos) a R^3 , por $T(ax^2 + bx + c) = (a + c, a - b, b)$, en las bases $B_4 = \{x^2, x^2 + x, x^2 + x + 1\}$ y $B_5 = \{(1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ de $IP_2[x]$ y R^3 respectivamente.
Pregunta 5	Considere la transformación lineal $F: \langle (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0) \rangle \rightarrow \langle x^2, x + 1 \rangle$, definida por $[F]_B^{B'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$; donde $B = \langle (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0) \rangle$ y $B' = \langle x^2, x + 1 \rangle$ determine las coordenadas de la imagen del vector $[v]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

Anexo 2

Tabla 2

Resumen de la recogida de datos TMatL. Fuente propia año 2013.

Pregunta Estudiante	P1 Construcción mental del concepto coordinada de la imagen de un vector específico	P2 Construcción mental del concepto coordinadas mediante la Transformación lineal, en un vector específico	P3 Construcción mental del concepto coordinadas mediante la Transformación lineal, en un vector cualquiera	P4 Construcción mental del concepto MATL	P5 Construcción mental del Concepto MATL como función
E1	Acción	No Responde	No Responde	No Responde	No Responde
E2	Acción	Proceso	Proceso	Acción	No Responde
E3	Proceso	Objeto	Objeto	Proceso	Objeto
E4	Proceso	Objeto	Objeto	Objeto	Objeto
E5	Acción	Acción	Acción	No Responde	No Responde
E6	Acción	Acción	Acción	No Responde	No Responde
E7	No Responde	No Responde	No Responde	No Responde	No Responde
E8	Acción	Proceso	Acción	No Responde	No Responde
E9	Proceso	Proceso	Objeto	Objeto	Proceso
E10	Proceso	Proceso	Objeto	No Responde	No Responde
E11	Acción	No Responde	No Responde	No Responde	No Responde
E12	Acción	Acción	Acción	No Responde	No Responde
E13	Proceso	Proceso	No Responde	Proceso	Acción
E14	Proceso	Acción	Acción	No Responde	No Responde
E15	Proceso	Objeto	Objeto	No Responde	No Responde
E16	Proceso	Objeto	Objeto	No Responde	No Responde
E17	Proceso	No Responde	No Responde	No Responde	No Responde
E18	Proceso	Objeto	Objeto	No Responde	Proceso
E19	Acción	Proceso	Proceso	No Responde	No Responde
E20	No Responde	No Responde	No Responde	No Responde	No Responde

O desempenho de alunos do 6º ano em questões que envolvem a decomposição de um número em fatores primos e seu uso para simplificar cálculos

Gabriela dos Santos **Barbosa**

Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Brasil

gabrielasb80@hotmail.com

Sandra Maria Pinto **Magina**

Universidade Estadual de Santa Cruz

Brasil

sandramagina@gmail.com

Resumo

Este artigo objetiva analisar o desempenho de alunos de 6º Ano do Ensino Fundamental de uma escola particular da zona norte do Rio de Janeiro, Brasil, em situações-problema que envolvem o uso da decomposição em fatores primos para simplificar cálculos. Para tanto, aplicamos um diagnóstico (pré e pós-testes) antes e após uma intervenção de ensino baseada em atividades lúdicas e jogos. Neste artigo, analisaremos quatro situações do teste, o qual enfocou conceitos associados ao Teorema Fundamental da Aritmética. Os resultados apontam que houve crescimento significativo nos rendimentos dos alunos nas quatro situações. Com base nas ideias de Vergnaud (2009), Campbell (2002), Barbosa (2002), Piaget (1994) e Macedo, Petty e Passos (2000) analisamos as representações, estratégias e equívocos encontrados nas soluções e em que medidas eles foram superados. Concluimos que, para o grupo pesquisado, as atividades lúdicas e os jogos contribuíram fortemente para o avanço na compreensão dos conceitos em questão.

Palavras chave: Teorema Fundamental da Aritmética, números primos, decomposição em fatores primos, Teoria dos Campos Conceituais.

Introdução

No presente artigo temos o objetivo de analisar o desempenho de alunos de 6º Ano do Ensino Fundamental de uma escola particular da zona norte do Rio de Janeiro, Brasil, em situações-problema que envolvem o uso da decomposição em fatores primos para simplificar cálculos.. Trata-se de um recorte de uma pesquisa mais ampla que teve por objetivo descrever e analisar o processo de construção dos principais conceitos associados ao Teorema Fundamental da Aritmética (TFA) pelo mesmo grupo. Cabe mencionar que, entre estes conceitos, estão os conceitos de múltiplo e fator, de divisibilidade, de distinção entre números primos e compostos, de decomposição em fatores primos e da utilização da decomposição como estratégia de cálculo. A pesquisa de campo, que forneceu dados para tal investigação, foi constituída por três etapas: a primeira correspondeu à aplicação de um teste diagnóstico com nove questões; a segunda à realização, durante dois meses, de uma intervenção de ensino composta por jogos e outras

atividades lúdicas; e a terceira envolveu a reaplicação do teste diagnóstico utilizado na primeira etapa, para investigar as contribuições efetivas da intervenção de ensino. Cabe mencionar que para cada uma das etapas de aplicação dos testes, os alunos trabalharam individualmente durante dois encontros de 100 minutos, sem consultar a professora, que apenas fazia uma leitura prévia do material. Para efeito deste artigo, compararemos o desempenho dos alunos nas questões 6, 7, 8(a, b, c) e 8d, que abordam a decomposição de números em fatores primos e seu uso na simplificação de cálculos. Doravante chamaremos essas questões de q6, q7, q8abc e q8d. Para que o leitor tenha mais informações sobre as etapas do estudo (desenho do experimento), a Tabela 1 a seguir apresenta uma síntese da pesquisa.

Tabela 1

Síntese das atividades

Atividade	Duração	Conceito (s) envolvidos (s)
Aplicação do teste diagnóstico – 100 min		
1) jogo de restos	150 min	Divisão euclidiana
2) construção de retângulos	150 min	Reconhecimento dos fatores de um número
3) tábua de Pitágoras	100 min	Propriedades dos fatores e dos múltiplos de um número
4) jogo de mensagem	150 min	Representações para o produto de mais de dois números
5) jogo do telegrama	150 min	Decomposição de um número em fatores
6) construção da árvore de decomposição	150 min	Decomposição em fatores primos de um número
7) jogo da árvore	150 min	Relações entre os fatores primos de um número e os fatores primos dos fatores deste número
Reaplicação do teste diagnóstico – 100 min		

Fonte: Pesquisa privada. 2009.

A teoria que deu sustentação para a realização do estudo foi a Teoria dos Campos Conceituais, a qual apresentaremos sucintamente a seguir.

A Teoria dos Campos Conceituais e o papel dos jogos no processo de ensino-aprendizagem

Desde a elaboração do teste até sua aplicação e correção estivemos fundamentados na Teoria dos Campos Conceituais (TCC). Esta é uma teoria cognitivista que tem fornecido subsídios para o estudo dos processos de construção de conceitos presentes nas ciências exatas, com destaque para os conceitos matemáticos e físicos. Segundo Vergnaud (2009), seu criador, um conceito não pode ser construído isoladamente. Um conceito está associado a muitos outros formando um campo conceitual. Para a formação de conceito, por sua vez, é necessário que o indivíduo interaja com uma diversidade de situações. As situações que escolhemos para trabalhar os conceitos relacionados ao Teorema Fundamental da Aritmética, envolveram jogos atividades lúdicas.

Nossa opção por utilizar jogos vem da importância que autores consagrados como Piaget e Macedo dão a tal ferramenta. De fato, Piaget (1994) explica que por meio dos jogos a criança pode vivenciar os processos de assimilação e de acomodação. Tais processos consistem em

acrescentar novos eventos aos esquemas já existentes e em modificar esses esquemas. Trazendo a situação de jogo para a sala de aula, encontramos em Macedo, Petty e Passos (2000) que os jogos favorecem a produção de experiências significativas para os estudantes, seja em termos dos conteúdos disciplinares, seja por meio do desenvolvimento de competências e de habilidades.

Retornando à TCC, entendemos que, junto com as situações, as ideias de representação e esquemas formam os pilares desta teoria. Esquema é um conceito introduzido por Piaget, para considerar as formas de organização das habilidades sensório-motoras e das habilidades intelectuais. Um esquema gera ações e deve conter regras, é eficiente para toda uma série de situações e pode gerar diferentes sequências de ação, de coleta de informações e de controle, dependendo das características de cada situação particular. Existe, ainda, presente nos esquemas, uma série de conhecimentos, os chamados invariantes operatórios. Analisando os registros e representações que os alunos fizeram nos testes, procuramos identificar os esquemas que mobilizaram e os consequentes conceitos matemáticos (teoremas-em-ação e conceito-em-ação) subjacentes a cada um.

Estudos correlatos

As pesquisas de Campbell (2002) e Barbosa (2002) apontam para a necessidade de mudanças no ensino da Aritmética, respectivamente, nos cursos de formação de professores e na educação básica. É um aspecto consensual entre os pesquisadores a relevância do estudo da Teoria Elementar dos Números desde a educação básica, porque, aplicando seus conhecimentos da estrutura multiplicativa nesse contexto, o sujeito terá oportunidades valiosas para enriquecer sua compreensão das propriedades de multiplicação e divisão. Para fazer uso das possibilidades oferecidas pelos conceitos da estrutura multiplicativa, o indivíduo deve ter experiência com a representação de números naturais como produto (s) de primos. Isto inclui decompor em fatores primos, executar aritmética sobre as decomposições e usar a estrutura embutida nas fatorações para reconhecer e justificar relações de divisibilidade. Com base nestes estudos, procuramos inferir sobre os procedimentos empregados por nossos alunos.

Desempenho nas questões de identificação de números primos e de decomposição em fatores primos (q6 e q7)

Iniciando por uma análise quantitativa, como mostra a tabela, o teste de Mc Nemar apontou como significativo ao nível de 5% (p-valor menor ou igual a 0,05) o crescimento do número de acertos nas questões que enfatizamos aqui.

Tabela 2

Síntese dos desempenhos dos alunos nas questões q6, q7, q8abc e q8d.

Questões	Teste Inicial (% de acerto)	Teste final (% de acerto)	Ganho (%)	p-valor
q6	55,0	95,0	72,7	0,008
q7	0,0	60,0	**	0,000
q8abc	45,5	86,4	90,0	0,004
q8d	40,9	72,7	77,8	0,016

Fonte: Pesquisa privada. 2009.

Como vimos anteriormente, os conceitos de números primos e de decomposição de um número em fatores primos subjazem o Teorema Fundamental da Aritmética. A fim de investigar

os conhecimentos dos alunos sobre estes conceitos, em q6, solicitamos que listassem três números primos e, em q7, pedimos que fizessem a decomposição do 36 em fatores primos.

Segundo o Teste de McNemar, os crescimentos das taxas de acerto destas questões do teste inicial para o teste final foram considerados significativos. Podemos facilmente verificá-los. A questão q7, por exemplo, não teve nenhum acerto no teste inicial e atingiu 60% de acerto no teste final. Em todos os acertos, o procedimento foi o mesmo: os alunos construíam a árvore do 36 para obter sua decomposição em fatores primos (Figura 1):

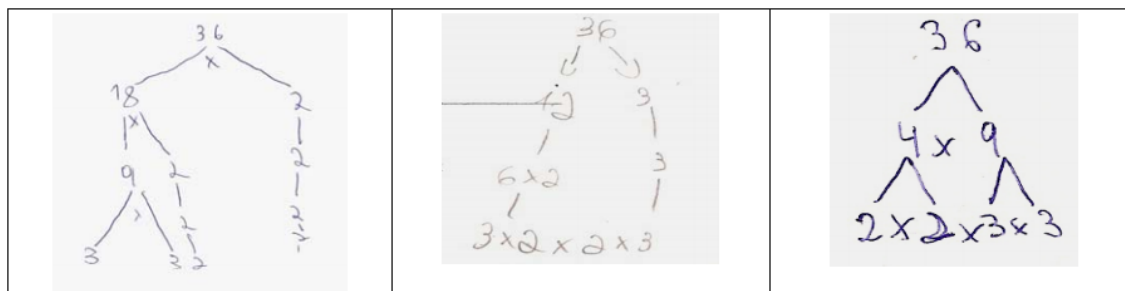


Figura 1. Obtenção dos fatores utilizando a árvore.

Observamos na Figura 1 as árvores construídas por três alunos no teste final. O método de obtenção da decomposição por meio da “árvore” foi apresentado aos alunos durante a atividade de construção da árvore de decomposição (atividade 6 da Tabela 1) e consiste num recurso alternativo ao método tradicional em que se deve dividir sucessivamente o número que se pretende decompor pela sequência de números primos até se chegar ao quociente 1. Como a ordem dos fatores não altera o produto, as três decomposições estão corretas. Este foi um aspecto muito discutido com os alunos ao longo da intervenção e é de suma importância para a compreensão do TFA. A comparação entre as árvores favoreceu, por exemplo, o uso adequado dos símbolos da Matemática para expressar a decomposição em fatores primos. Nas Figuras 2 e 3, apresentamos extratos dos protocolos com as representações feitas por dois alunos (o primeiro, que decompôs construindo a árvore do número e o segundo, que buscava mentalmente os fatores primos):

) Os números que só possuem como fator o 1 e si são chamados números primos. Agora tente escrever o 36 como um produto envolvendo apenas números primos. Mas, atenção: você pode repeti-los quantas vezes precisar!

$3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36, 3 \times 2 \times 3 \times 2 = 36, 3 \times 3 \times 2 \times 2 = 36$

Figura 2. Teorema Fundamental da Aritmética.

Os números que só possuem como fator o 1 e si são chamados números primos. Agora tente escrever o 36 como um produto envolvendo apenas números primos. Mas, atenção: você pode repeti-los quantas vezes precisar!

~~$12 \times 2 = 36$~~ $2 \times 3 = 6 \times 3 = 18 \times 2 = 36$

Figura 3. Registro próprio para decomposição.

Podemos observar que, o primeiro aluno, que desenhou a árvore, escreveu igualdades matemáticas verdadeiras. Como já mencionamos, a manipulação destas igualdades favorece o uso da decomposição em fatores primos para simplificar cálculos. O segundo aluno, que buscou mentalmente os fatores primos de 36, sabia decompor, entretanto produzia a escrita na medida em que efetuava os cálculos. Isto o conduziu a escrever falsas igualdades matemáticas que, em momentos subsequentes, não lhes favoreceriam avançar na construção dos conceitos.

Já os erros cometidos pelos alunos, inicialmente, sugerem que eles não admitiam a possibilidade da decomposição envolvendo mais de dois fatores. Para resolver q7, listavam os pares que usaram para responder q3 (questão que solicitava a escrita do maior número possível de pares de números naturais cujo produto é 36) ou escreviam somas cujo total é 36. Os protocolos das Figuras 4, 5 e 6 nos oferecem exemplos da recorrência ao raciocínio aditivo:

- f) Os números que só possuem como fator o 1 e si são chamados números primos. Agora tente escrever o 36 como um produto envolvendo apenas números primos. Mas, atenção: você pode repeti-los quantas vezes precisar!

$$3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 36$$

Figura 4. Compreensão da fatoração como soma de parcelas repetidas.

- f) Os números que só possuem como fator o 1 e si são chamados números primos. Agora tente escrever o 36 como um produto envolvendo apenas números primos. Mas, atenção: você pode repeti-los quantas vezes precisar!

$$1 + 2 + 3 + 12 + 6 + 4 + 9$$

Figura 5. Compreensão da fatoração como soma.

- f) Os números que só possuem como fator o 1 e si são chamados números primos. Agora tente escrever o 36 como um produto envolvendo apenas números primos. Mas, atenção: você pode repeti-los quantas vezes precisar!

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 + 17 + 18 + 19 + 20 + 21 + 22 + 23 + 24 + 25 + 26 + 27 + 28 + 29 + 30 + 31 + 32 + 33 + 34 + 35 + 36$$

Figura 6. Compreensão da fatoração como soma em que as parcelas são a unidade.

Entrevistas informais realizadas com os alunos, realizadas logo após os testes, em que foi pedido que explicassem seus procedimentos nos permitem inferir que, na Figura 4, o aluno decompôs 36 em 12 parcelas iguais a 3, usando inadequadamente o símbolo da multiplicação. Já na Figura 5, o aluno pensou em números primos cuja soma é 36, porém cometeu erros de cálculo e, nem todos os números que listou são primos. E, na Figura 6, a expressão presente no enunciado “como fator 1 e si mesmo” chamou a atenção do aluno para o número 1 e ele entendeu que o 36 deveria ser obtido usando apenas a unidade. A recorrência ao pensamento aditivo, quando vivenciando situações multiplicativas, foi verificada com boa parte dos sujeitos das pesquisas de Campbell (2002). No caso da nossa pesquisa, esta recorrência fez parte das ações de alguns sujeitos até o último teste.

Com relação à questão q6, além do avanço de 55% para 95%, foi possível notar alterações na qualidade das respostas dos alunos, que merecem destaque. A primeira alteração foi referente às presenças dos números 2 e 9 entre os números primos que listavam. No teste inicial, nenhum aluno listou o número 2 e boa parte deles listou o número 9. Isto nos sugeriu que empregavam os falsos teoremas-em-ação “*todo número ímpar é primo*” e “*todo número primo é ímpar*”, o que confirmamos durante a intervenção de ensino. Além disso, os números primos listados no teste inicial foram apenas 3, 5 e 7, enquanto, no teste final, foram citados todos os primos até 31. À luz de Vergnaud (2009), entendemos que, durante a intervenção, os alunos que cometiam estes equívocos tiveram oportunidade de testar e validar ou refutar suas hipóteses por meio de exemplos numéricos, o que os levou a abandonar os falsos teoremas-em-ação e generalizar o conceito de número primo. A atividade de construção no papel quadriculado de retângulos cujas dimensões são números inteiros e a área é um número inteiro dado a priori foi decisiva neste processo. Observando que, com área 2 e dimensões inteiras só existe o retângulo 2×1 e que, com área 9, existem o 1×9 e o 3×3 , os alunos reviram seus falsos teoremas e avançaram na construção do conceito de número primo. Um aspecto interessante aí é que efetuar a compreensão do conceito de primo ocorreu de forma integrada à compreensão da decomposição em fatores primos, rompendo com o ensino tradicionalmente linear destes dois conceitos.

É importante mencionar ainda que aqueles alunos que confundiam produto com fatores, que descrevemos no item anterior, quando solicitados a listar os primos, listaram produtos, como mostra a Figura 7:

Além do número 7, você conhece outros números que só possuam como fatores o 1 e si mesmo? Dê, pelo menos, três exemplos.

$9 \times 1, 5 \times 1, 7 \times 1.$

Figura 7. Identificação dos números primos.

Em vez de escrever 9, 5 e 7, o aluno escreveu os produtos 9×1 , 5×1 e 7×1 . Com exceção do número 9, que não satisfaz às condições do enunciado, estas respostas não estão erradas, pois o produto de qualquer número por 1 é o próprio número, entretanto a confusão entre produto e fator associada à ênfase dada no enunciado à expressão “*si mesmo*”, favoreceu a produção da seguinte escrita por alguns alunos:

Além do número 7, você conhece outros números que só possuam como fatores o 1 e si mesmo? Dê, pelo menos, três exemplos.

$1 \times 1 = 2 \times 2 \quad 3 \times 3$

Figura 8. Registro incorreto dos números primos.

Pensando em responder 3, 5 e 7, o aluno escreveu 3×3 , 5×5 e 7×7 . Para nós, estas escritas foram evidências de que nem todos os alunos compreendiam de fato o conceito de primos. Afinal, segundo Vergnaud (2009), as simbologias associadas ao conceito formam um dos conjuntos que o compõem. Julgamos que o uso desta simbologia inadequada certamente ofereceria algum tipo de obstáculo na interpretação e uso que deveriam fazer da decomposição

de números em fatores primos. Na intervenção de ensino, tentamos impedir que os alunos permanecessem adotando-a.

Desempenho nas questões de uso da decomposição dos números em fatores primos para otimizar cálculos (q8abc e q8d).

O objetivo central de toda a intervenção de ensino era criar condições para que os alunos operassem com a decomposição dos números em fatores primos e realizassem simplificações e cálculos mentais. Com estas questões, desejávamos investigar se já realizavam tais ações.

Assim, oferecíamos dois números naturais e solicitávamos aos alunos que dividissem o maior pelo menor. Entretanto, pelo menos, um destes números era apresentado decomposto em fatores primos. Para melhor esclarecer, nas questões q8abc, dividendo e divisor eram apresentados decompostos em fatores primos e pedíamos aos alunos que encontrassem o quociente. Na questão q8d, eram apresentados dividendo e quociente, sendo que apenas o primeiro decomposto em fatores primos, e era preciso obter o divisor.

Consideramos q8d mais difícil que q8abc, pois requer, para sua solução, que o aluno reconheça que, quando a divisão é exata, o divisor é o resultado da divisão do dividendo pelo quociente, o que usando a linguagem matemática pode ser expresso: “se $a : b = c$, então $a : c = b$, sendo a , b e c números inteiros”. Contudo, as dificuldades apresentadas pelos alunos no teste inicial em todos os itens da questão 8 estão associadas sobretudo à interpretação do enunciado. Nas Figuras 9 e 10, fornecemos dois exemplos:

Complete os espaços em branco. Não deixe de fazer os cálculos no papel!

João dividiu $2 \times 3 \times 5 \times 11$ por $2 \times 3 \times 5$ e encontrou 50,224

$$\begin{array}{r} 23555 \overline{) 235} \\ 235 \\ \hline 00055 \end{array}$$

Gabriela dividiu $2 \times 3 \times 5 \times 11$ por 3×11 e encontrou

$$\begin{array}{r} 23555 \overline{) 333} \\ 333 \\ \hline 20465 \end{array}$$

Figura 9. Outra interpretação para decomposição em fatores primos.

b) Gabriela dividiu $2 \times 3 \times 5 \times 11$ por 3×11 e encontrou 10,778

$$2 \times 3 = 6 \times 5 = 30 \times 11 = 330 \times 3 = 998 \times 11 = 10,778$$

Figura 10. Outra interpretação para a palavra por.

Na Figura 9, o aluno desprezou o símbolo da multiplicação escrito entre os números e interpretou $2 \times 3 \times 5 \times 11$, como o número 23511 (vinte e três mil, quinhentos e onze). Na Figura 10, a presença da palavra *por* sugeriu para o aluno a operação de multiplicação e ele não levou em consideração outros termos também presentes no enunciado como “*dividiu*”.

Realizamos, também, o Teste de McNemar para estas questões e os crescimentos das taxas de acerto do teste inicial para o teste final foram considerados significativos.

Devemos destacar que 80% dos alunos que erraram tais questões no teste inicial, passaram a acertá-las no teste final. E mesmo os alunos que as haviam feito corretamente no teste inicial, alteraram os procedimentos adotados de um teste para o outro.

Assim, no teste inicial, realizavam os cálculos para identificar cada número separadamente e, em seguida, efetuar as divisões, o que requeria mais tempo e envolvia cálculos com números maiores. No teste final, realizaram simplificações tendo em vista a decomposição dos números para, então, obter o resultado da divisão de um pelo outro.

Na Figura 11, apresentamos o extrato do teste final de um aluno que mudou seus procedimentos:

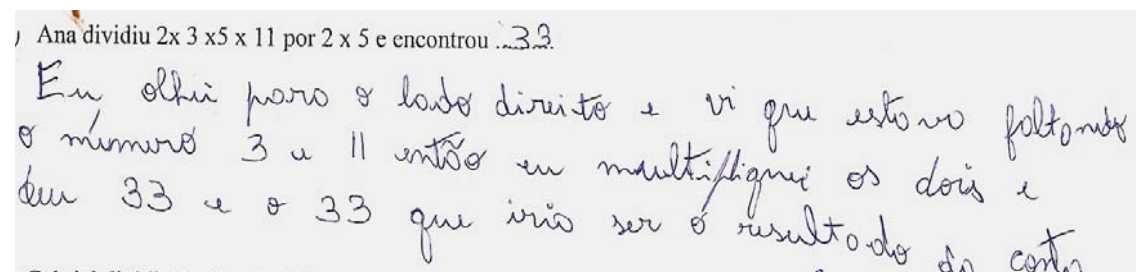


Figura 11. Operando com as fatorações.

No teste inicial, o aluno fez os cálculos e descobriu que $2 \times 3 \times 5 \times 11$ é igual a 330. Em seguida, fez novos cálculos para obter o resultado de $2 \times 3 \times 5$. Somente de posse destes números, calculou o quociente 11. Já, no teste final, o aluno não se preocupou em efetuar quaisquer cálculos. Simplificou primeiro, ou seja, “*eliminou*” os fatores comuns às duas decomposições para encontrar o mesmo resultado do teste inicial, mas, desta vez, mais rapidamente e operando com números menores. Esta mudança nas estratégias de solução é, para Vergnaud (2009) consequência da incorporação pelos alunos de novos esquemas aos esquemas que possuíam inicialmente para lidar com esta situação. A atividade da intervenção que mais contribuiu para isso foi o jogo da árvore. Nele solicitávamos aos alunos que, a partir da observação da árvore de decomposição em fatores primos de um número, produzissem o maior número possível de igualdades matemáticas. É especificamente nesse momento que temos as representações servindo como instrumento de pensamento. Além disso, ainda podemos percebê-la como um elemento constituinte do conceito tal como na terna que define um conceito para Vergnaud (2009).

Apenas em q8d alguns alunos ainda mantiveram o mesmo procedimento empregado no teste inicial. Atribuímos isto ao fato de que um dos números do enunciado, 55, não estava decomposto em fatores primos. Para efetuar as simplificações, o aluno deveria fazer sua decomposição, ou seja, era necessário incorporar mais esta ação ao esquema de resolução da questão que envolve a simplificação. Entretanto, nem todos o fizeram e empregaram o esquema

antigo, que já dominavam e que envolvia cálculos com números maiores, como mostramos nos protocolos a seguir (Figuras 12 e 13):

d) Gabriel dividiu $2 \times 3 \times 5 \times 11$ por um certo número e encontrou 55. O número é 6...

Eu olhei para o 55 e multipliquei o número 11 e 5 que deu 55
 eu eliminei o 11 e 5 e multipliquei 3 e 2 que deu 6 então o solto que esse era o resultado da conta

Figura 12. Fatorando para efetuar os cálculos.

d) Gabriel dividiu $2 \times 3 \times 5 \times 11$ por um certo número e encontrou 55. O número é 6...

$2 \times 3 \times 5 \times 11 = 330$
 e $330 \div \text{por}$
 $55 = 6$

$\begin{array}{r} 355 \\ \times 6 \\ \hline 330 \\ 000 \end{array}$

$\begin{array}{r} 330 \overline{) 55} \\ - 330 \\ \hline 000 \end{array}$

~~$\begin{array}{r} 355 \\ \times 6 \\ \hline 330 \\ 000 \end{array}$~~

$\begin{array}{r} 355 \\ \times 6 \\ \hline 330 \overline{) 55} \\ - 330 \\ \hline 000 \end{array}$

$\begin{array}{r} 355 \\ \times 6 \\ \hline 330 \end{array}$

Figura 13. Cálculos e estimativas para resolver q8d.

Ao comparar as duas soluções apresentadas pelos alunos no teste final, percebemos que o primeiro decompôs 55 e efetuou as simplificações possíveis. O segundo não só efetuou cálculos para obter o resultado de $2 \times 3 \times 5 \times 11$, como também ficou estimando o número por que deveria dividir 330 para encontrar 55. Neste caso, o aluno não aplicou nem a propriedade da divisão exata (se $a : b = c$, então $a : c = b$, para quaisquer inteiros a , b e c).

Finalmente, não podemos deixar de comentar a maneira como os alunos registravam seus pensamentos e suas soluções para as questões. Aqueles que empregavam o procedimento mais longo de efetuar os cálculos, simplesmente deixavam os cálculos escritos e não houve variação considerável nestas escritas.

Mas os que optaram pela simplificação e precisaram operar com a decomposição dos números, circulavam ou riscavam os fatores comuns, para que, então, ficassem evidentes os fatores “*incomuns*” que compõem o resultado da divisão a ser feita. Entretanto, quando tinham de organizar suas respostas, apagavam os traços e os círculos que faziam e escreviam uma operação matemática. Os extratos dos protocolos abaixo são exemplos:

Ana dividiu $2 \times 3 \times 5 \times 11$ por 2×5 e encontrou 33

$$\begin{array}{r} 330 \overline{) 10} \\ \underline{30} \\ 030 \\ \underline{30} \\ 000 \end{array}$$

Figura 14. Identificação dos fatores comuns.

Ana dividiu $2 \times 3 \times 5 \times 11$ por 2×5 e encontrou 33

$$\begin{array}{r} 300 \overline{) 10} \\ \underline{30} \\ 000 \end{array}$$

Figura 15. Procedimento padrão.

O primeiro é um dos raros registros que conseguimos impedir que o aluno apagasse. Nele, vemos que ele circulou o 2 e o 5 nas duas decomposições, destacando num retângulo maior os fatores restantes. No segundo, vemos uma conta armada com muita organização, sem pequenos cálculos ao redor, o que é comum quando os alunos operam com números grandes. Foi exatamente este excesso de limpeza e organização que nos levou a desconfiar do procedimento que adotavam.

Em entrevista informal os alunos explicaram-se. Assim, nas palavras de um aluno: “*sai cortando tudo e depois armei a conta para dar a resposta certa*”. Em outras palavras, o aluno efetuou as simplificações, entretanto entendia que a maneira correta de resolver um problema é armar uma conta. Não admitia outra forma de solução, mesmo depois de uma longa intervenção de ensino em que lhe foi permitido jogar, desenhar árvores, construir retângulos e tabelas, etc. Temos, então, uma evidência das consequências de um ensino tradicional que prioriza alguns raciocínios e representações em detrimento de outros. Entretanto, nossos dados sinalizam também que isto pode mudar. Trata-se de um processo longo, mas possível.

Considerações Finais

Ao apresentarmos nossos resultados, não temos a pretensão de generalizá-los para além do universo pesquisado, pois temos consciência de que se trata de um estudo com um pequeno

número de sujeitos. Não temos, também, a pretensão de apontar o melhor ou único caminho a ser percorrido pelos alunos para a construção dos conceitos ligados ao Teorema Fundamental da Aritmética.

Sabemos que cada sujeito traça o seu caminho e que outros fatores, como as experiências anteriores com o assunto ou com as situações-problema propostas são determinantes para sua caminhada. Acreditamos que nossos resultados poderão trazer contribuições significativas para a discussão científica sobre a construção de conceitos ligados não só ao Teorema Fundamental da Aritmética como à Teoria dos Números, de modo geral.

Referências

- Barbosa, G. S. (2002). *Construção dos conceitos de múltiplo e divisor à luz da Psicologia de Vygotsky* (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática). Rio de Janeiro: Universidade Santa Úrsula.
- Campbell, S. (2002). *Coming to terms with division: Preservice teachers' understanding*. In S. Campbell, & R. Zaskiz (Orgs.), *Learning and Teaching Number Theory* (pp. 1-14). Westport: Ablex Publishing.
- Macedo, L. de., Petty, A. L. S., & Passos, N. C. (2000). *Aprender com jogos e situações problemas*. Porto Alegre: Artes Médicas.
- Piaget, J. (1994). *A formação do símbolo na criança: imitação, jogo e sonho; imagem e representação* (Tradução de Álvaro Cabral e Cristiano Monteiro Oiticica, 3ª ed.). Rio de Janeiro: LTC.
- Vergnaud, G. (2009). *A criança, a Matemática e a Realidade: problemas do ensino da matemática na escolar elementar* (Trad. Maria Lucia Moro). Curitiba: UFPR Press.

O laboratório de Educação Matemática e a microinvestigação: aliados na formação do professor pesquisador

Américo Junior Nunes da **Silva**

Departamento de Ciências Humanas-Campus IX, Universidade do Estado da Bahia
Brasil

amerjun2005@hotmail.com

Resumo

Este artigo apresenta parte da pesquisa de mestrado realizada junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade de Brasília-UnB, que objetivou analisar como um grupo de estudantes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado da Bahia, Campus IX, vivenciou e (re)significou a formação lúdica realizada na disciplina Laboratório de Ensino de Matemática I. Tratou-se de uma pesquisa qualitativa, do tipo pesquisa-ação, em que foram sujeitos o pesquisador e um grupo de estudantes matriculados na disciplina. Foi foco, nesse recorte, analisar o envolvimento e percepções dos estudantes durante a atividade de microinvestigação desenvolvida na disciplina de Laboratório do Ensino da Matemática I. A microinvestigação permitiu aos licenciandos estabelecerem um contato com a sala de aula, na condição de pesquisadores, e possibilitou aos mesmos (re)significarem as teorias estudadas a partir do contato estabelecido com a sala de aula e (re)pensarem alguns aspectos da formação.

Palavras chave: laboratório de educação matemática, educação matemática, formação de professores pesquisadores, pesquisa, microinvestigação.

Introdução

Levando em consideração o atual cenário do ensino-aprendizagem da Matemática no Brasil, tendo em vista que, embora apresente significativos avanços, o ensino dessa ciência encontra-se distante, no que diz respeito a qualidade, de outros países. Concordamos que, um dos fatores necessários para refletir nessa qualidade é que nossas aulas se tornem diferentes, atrativas e que, a partir delas, os alunos estabeleçam significados para a Matemática. Contudo, sabemos que isso faz-se-á possível quando, também, se (re)pensarem os cursos de formação de professores, principalmente quando se reconhecerem a importância que o LEM-Laboratório de Educação Matemática tem. É preciso levar em consideração que o LEM pode possibilitar ao professor tornar a aprendizagem Matemática agradável aos alunos, e essa discussão precisa ser feita dentro do curso de licenciatura, permitindo ao futuro professor pensar sua prática.

Mas, para que isso seja possível, é necessário que o sujeito, futuro professor, reúna características importantes, por exemplo: ser criativo, trabalhar em equipe, conhecer bem a Matemática e as diferentes metodologias. Como um professor vai conseguir auxiliar o aluno no processo de ensino-aprendizagem, principalmente apresentar uma Matemática com significado, se isso não o foi apresentado durante o seu processo formativo? Passos (2010) apresenta como necessárias essas discussões dentro dos cursos de formação, e Lorenzato (2010) destaca que só

temos condição de dar aquilo que temos. Nesse caso o mesmo se aplica no espaço do LEM: como vamos explorar um espaço que não conhecemos? Com certeza nos perderíamos nele. Voltamos a destacar e apresentar o LEM como um importante espaço de formação lúdica e do perfil de pesquisador, que permitiria aos futuros professores o conhecerem mais, sabendo como explorá-lo adequadamente.

O ensino da Matemática, muitas vezes, desarticulado das vivências dos educandos, não tem permitido que essa ciência seja vista e relacionada com a realidade do sujeito, ou melhor, que é a realidade do sujeito. Isso, de certa forma, impossibilita a formação plena do indivíduo, e o alcance aos objetivos apresentados no PCN. A Matemática vista como difícil, complexa e para poucos, ainda tem sido comum no meio escolar. Em boa parte das formações de professores existe uma preocupação exacerbada com os conceitos, não que não sejam importantes; pelo contrário, são, mas referimo-nos à necessidade da articulação desse saber com os demais, e o LEM possibilita isso de forma contextualizada e lúdica.

Tem sido um desafio para os professores, segundo Kallef (2011), incentivar as características subjetivas e a criatividade dos alunos, pois a formação está longe de permitir isso. Mas, como promover a formação de sujeitos criativos se os próprios professores não o são? É preciso que o ato de criar e pesquisar seja incentivado durante o processo formativo, contribuindo para o fim da apatia e inércia que rondam a formação e, principalmente, desbloqueando os medos que paralisam a criatividade responsável pelo surgimento do novo.

Ainda segundo a autora, a sociedade atual, desde cedo, ensina que a curiosidade precisa ser refreada, que o erro e o fracasso devem ser evitados a qualquer custo e que os sentimentos e emoções precisam ser controlados. E, dessa forma, chegam os sujeitos nos espaços de formação, e principalmente nos laboratórios de ensino, sem conseguirem criar e pensar em formas diferentes de matematizar, por medo de errar. Não adianta pensar em um espaço como esse, sem que nele aconteçam processos de criação. Acreditamos que só assim, no momento de criar, os sujeitos conseguirão refletir mais profundamente sobre sua prática, sobre o processo de aprendizagem e sobre como valorizar as matemáticas produzidas pelos alunos. É criando, sendo criador, que se valoriza o ato de criação das outras pessoas.

Porém, vale ressaltar que, como aponta Kaleff (2011, p. 4), “a nossa sociedade nos leva a acreditar que o talento, inspiração e criatividade são resultados de fatores pertinentes a poucos indivíduos privilegiados”. Assim como aponta a autora, não acordamos com a ideia posta pela sociedade, principalmente por acreditar na existência de uma cultura lúdica que interfere no processo de construção do sujeito que brinca.

Nesse sentido, pontuamos que as escolas tradicionais, e quando colocamos tradicionais referimo-nos às escolas que apresentam um modelo expositivo em que o aluno pouco participa e a ele se reserva o papel de adestrado e imitador de maneiras “corretas” de se proceder, nessas escolas pouco se contribui para que o sujeito desenvolva o seu potencial criativo e perceba-se capacitado para agir, como aponta Kaleff (2011).

Ainda para a autora, o professor de Matemática é um profissional que concebe a Matemática como um meio e não como um fim em si mesmo. Ao professor de Matemática, aplica-se a tarefa de educar pela Matemática e não para a Matemática. Porém, trazemos a reflexão: Temos formado os professores de uma maneira (Kaleff, 2010), muitas vezes, para trabalhar de outra, pois a própria sociedade tem cobrado posturas diferentes dos mesmos (Freitas & Nacarato et al, 2005).

Nessa discussão, vale pontuar a importância que as ações do laboratório têm, segundo Kaleff (2011), na formação do educando criativo, e que as vivências realizadas por ele tem sido bem aceitas, principalmente por escolas que apresentam poucos materiais didáticos. Nesse caso, voltamos a afirmar a necessidade de pensar a existência desse espaço, e que funcione como espaço de formação lúdica, permitindo que, de fato, tudo isso que evidenciamos anteriormente aconteça.

É importante, como aponta Silva (2013a, 2013b), Turrioni e Perez (2010), que os cursos de formação de professores de Matemática (re)pensem sua estrutura curricular objetivando a inclusão de disciplinas que permitam a utilização do LEM durante o curso e principalmente a sua exploração como espaço de formação de professores pesquisadores por meio da iniciativa de desenvolver microinvestigações.

Método

A pesquisa, objeto de análise para construção desse artigo, foi de caráter qualitativo, do tipo pesquisa-ação, e teve como sujeitos participantes o pesquisador, que é o coordenador do LEM e professor da disciplina de Laboratório do Ensino da Matemática I, bem como cinco alunos do curso de Licenciatura em Matemática do Campus IX, da Universidade do Estado da Bahia, matriculados na disciplina de Laboratório e que, até o momento da pesquisa, não tinham participado de nenhuma ação no LEM.

Todo o percurso metodológico é traçado em volta da disciplina de Laboratório do Ensino da Matemática I, que foi pensada de forma a contribuir para a formação, levando em consideração o caráter de pesquisador, desse futuro professor. Foram 15 encontros, sendo que, desses, dez encontros foram utilizados para análise, todos gravados, de forma a possibilitar maior mobilidade do pesquisador/professor no momento de vivências e discussões durante a disciplina. O processo de gravação áudio e/ou vídeo foi feito após os então futuros participantes terem autorizado o registro por meio da assinatura do Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE), concordando, portanto, em participar da mesma. Vale salientar que a Uneb autorizou, por escrito, a realização dessa atividade de pesquisa.

Para análise de dados optou-se pela Análise de Conteúdo, que dividiu a seção em categorias, pensadas a partir dos objetivos específicos e, cada categoria, por sua vez, em subcategorias motivadas a partir dos conteúdos produzidos pelos sujeitos participantes da pesquisa. Durante a disciplina de Laboratório do Ensino da Matemática I, algumas atividades foram propostas, a saber: *As Temáticas de Discussão*, *as vivências de práticas lúdicas* e *a microinvestigação*. Percebeu-se, ao longo dos encontros, que as metodologias adotadas promoveram mudanças na concepção dos estudantes [serão as microinvestigações, foco de análise nesse artigo].

Revisão e fundamentação teórica

Não há como observar o mundo independentemente das práticas sociais e significados vigentes. Ademais, e principalmente, a capacidade de compreensão do observador está enraizada em seus próprios significados, pois ele (ou ela) não é um relator passivo, mas um agente ativo (Bortoni-Ricardo, 2008, p. 32).

Escolhemos, para dar início a escrita da fundamentação teórica, a reflexão de Bortoni-Ricardo (2008), em seu livro “O professor pesquisador”, para destacar o nosso entendimento de que quando o sujeito está incluído no ambiente a ser pesquisado, isso não invalida a pesquisa. Ao

contrário, a participação do sujeito, ou seja, “o ator envolvido no fenômeno”, configura-se como uma oportunidade, já que está inserido em um ambiente repleto de informações importantes para o desenvolvimento do seu trabalho. É óbvio que isso não o exime da responsabilidade de ser coerente, bem como de garantir o rigor e a qualidade que um trabalho de pesquisa exige, como apresenta André (2001).

A abordagem de Bortoni-Ricardo (2008) diz respeito à pesquisa em sala de aula. Esta se insere no campo da pesquisa social, podendo ter uma abordagem interpretativa, oriunda de um paradigma qualitativo. A autora define abordagem interpretativa como aquela de tradição interpretativa ou hermenêutico-dialética, que pressupõe a superioridade da razão dialética sobre a analítica e busca a interpretação dos significados culturais. No mesmo sentido, defende Gil (2012, p. 05):

Frente aos fatos sociais, o pesquisador não é capaz de ser absolutamente objetivo. Ele tem suas preferências, inclinações, interesses particulares, caprichos, preconceitos, interessa-se por eles e os avalia com base num sistema de valores pessoais. [...] E é com base nessas pré-concepções que irá abordar o objeto de seu estudo. É pouco provável, portanto, que ele seja capaz de tratá-lo com absoluta neutralidade. Na verdade, nas ciências sociais, o pesquisador é mais do que um observador objetivo: é um ator envolvido no fenômeno.

Diante dessas reflexões, nos colocamos, com este trabalho e da proposta realizada com os estudantes do curso de Licenciatura em Matemática durante a disciplina de Laboratório, na posição do professor-pesquisador que, estando totalmente envolvido em sua prática – e justamente por estar envolvido – levanta constantes questionamentos acerca de suas ações, a fim de encontrar caminhos para o melhor desempenho de suas atividades e de seus pares e, assim, contribuir para a melhoria da educação. É, portanto, em busca de melhorias para o campo educacional, que voltamos o nosso olhar para esse espaço, percebendo-o como espaço de pesquisa.

Observam-se as dificuldades inerentes à formação do perfil de professor pesquisador ainda durante os cursos de licenciatura. Tais dificuldades se estendem à percepção desse como um momento importante para o levantamento de problemas: “o problema toma corpo e [se] forma a cada minuto da ação educativa em sala de aula” (Bortoni-Ricardo, 2008, p. 35), e exige que se busquem soluções. Na nossa prática, porém, nos colocamos na contra-corrente dessa tendência e procuramos superar tais dificuldades.

O docente que consegue associar o trabalho de pesquisa a seu fazer pedagógico, tornando-se um professor pesquisador de sua própria prática ou das práticas pedagógicas com as quais convive, estará no caminho de aperfeiçoar-se profissionalmente, desenvolvendo uma melhor compreensão de suas ações como mediador de conhecimentos e de seu processo interacional com os educandos (Bortoni-Ricardo, 2008, p. 33).

É nesse sentido que a produção de novos conhecimentos passa pela percepção da sala de aula como um espaço importante e necessário para a pesquisa. De fato, a pesquisa elaborada pelo próprio professor torna a sua prática objeto de investigação, o que permite um (re)pensar da sua ação em sala de aula. Dessa relação estreita entre sala de aula e professor, partindo do conhecimento da realidade, o pesquisador protagoniza a busca de soluções para problemas cotidianos. Em outras palavras, a pesquisa, fruto de demandas percebidas pelo professor em ação, transforma profundamente a sua própria prática através da ação-reflexão-ação.

O trabalho de microinvestigação proposto na disciplina de Laboratório do Ensino da Matemática, buscou melhorias para o processo de formação e prática do futuro professor de Matemática, partindo do trabalho do pesquisador em sala de aula, propondo desenvolver uma pesquisa qualitativa, por aceitar “o fato de que o pesquisador é parte do mundo que ele pesquisa” (Bortoni-Ricardo, 2008, p. 58). Para tanto, tentou-se articular a formação lúdica do futuro professor de Matemática propiciada pela disciplina de Laboratório de Ensino de Matemática I com as questões de pesquisa referentes também a esse espaço. De acordo com Minayo (2010, p. 21):

Trabalha com o universo de significados, motivos, aspirações, crenças, valores e atitudes, o que corresponde a um espaço mais profundo das relações, dos processos e dos fenômenos que não podem ser reduzidos à operacionalização de variáveis.

Segundo Baldino (1999, p. 221), “o ensino de Matemática é uma atividade humana assombrada pelo fracasso”. Voltar o olhar da pesquisa para ampliar as discussões a esse respeito é importante por permitir repensar o processo de formação do professor de Matemática e buscar, dentro dessa formação, de que forma a ludicidade, enquanto dimensão humana, pode contribuir para (re)construção dessa imagem tão estigmatizada. Ainda segundo o autor, muitas das teses e dissertações sobre Educação Matemática ficam empoeiradas nas prateleiras e impedidas, pela própria formatação, de serem usadas em sala de aula.

Pesquisa-ação: fazendo parte e construindo um novo olhar

Destacamos anteriormente a importância que o contexto do pesquisador (nesse caso, a sala de aula) e o seu objeto de estudo têm na constituição de uma pesquisa. Cabe salientar que a construção de uma pesquisa em que o pesquisador é participante do processo possui especificidades, por exigir um rigor e uma qualidade que repercutem na relevância que o trabalho terá para a comunidade acadêmica. Assim, propomos, para este trabalho, uma pesquisa-ação, por entendê-la como “tentativa continuada, sistemática e empiricamente fundamentada de aprimorar a prática” (Tripp, 2005, p. 443).

Ainda segundo o autor, esse tipo de pesquisa no campo educacional é uma estratégia que busca o desenvolvimento dos profissionais, professores e pesquisadores, objetivando a utilização de suas pesquisas para aprimorar o ensino e a aprendizagem de seus alunos. A pesquisa-ação é um processo de aprimoramento, em que só descobrimos a natureza de algumas coisas quando tentamos mudá-las.

[...] embora a pesquisa-ação tenda a ser pragmática, ela se distingue claramente da prática e, embora seja pesquisa, também se distingue claramente da pesquisa científica tradicional, principalmente porque a pesquisa-ação ao mesmo tempo altera o que está sendo pesquisado e é limitada pelo contexto e pela ética da prática (Tripp, 2005, p. 447).

Para entender o que é pesquisa-ação, Tripp (2005) apresenta-o como sendo a oscilação sistemática entre o agir e o investigar, o que promove o aprimoramento da prática, e que este tipo de pesquisa é “participativa na medida em que inclui todos os que, de um modo ou outro, estão envolvidos nela e é colaborativa em seu modo de trabalhar” (Tripp, 2005, p. 448).

De acordo com Tripp (2005), a sequência a ser seguida em uma pesquisa-ação é: Planejamento, Implementação e Avaliação. Nesse sentido, fica evidente, ainda segundo o autor, que o ato de planejar nesse tipo de pesquisa deve ser feito “tanto para a mudança na prática quanto para a avaliação dos efeitos da mudança na prática” (Tripp, 2005, p. 453), e que o planejamento da avaliação, pela sua rigorosidade, constitui-se como uma etapa importante nesse

tipo de pesquisa por promover reflexões necessárias para o processo de produção de conhecimento e mudança da realidade.

Ainda levando em consideração a sequência exposta no parágrafo anterior, vale estabelecer relação entre a ideia apresentada e a pesquisa em questão. Inicialmente, ao planejar a disciplina¹, espaço em que se sistematizam ações, objetivava-se uma mudança na realidade observada. A fase de análise é o momento em que reflexões sobre as mudanças, ou não, na realidade observada, acontecem.

Porém, vale destacar que não é pelo simples fato de promover reflexões que temos caracterizado a pesquisa como ação.

Isso é importante por que se qualquer tipo de reflexão sobre a ação é chamada de pesquisa-ação, arriscamo-nos a sofrer a rejeição exatamente por parte das pessoas com as quais a maioria de nós conta para aprovação ou financiamento do trabalho universitário (Tripp, 2005, p. 447).

Entendemos, assim, que a pesquisa-ação é um tipo de pesquisa social em que a “metodologia de pesquisa deve sempre ser subserviente à prática, de modo que não se decida deixar de tentar avaliar mudança por não se dispor de uma boa medida ou dados básicos adequados” (Tripp, 2005, p. 448). Nesse sentido, as pesquisas sociais são definidas por Gil (2012, p. 26) “como o processo que, utilizando a metodologia científica, permite a obtenção de novos conhecimentos no campo da realidade social”. Por realidade social, entendemos, ainda segundo o autor, os “aspectos relativos ao homem em seus múltiplos relacionamentos com outros homens e instituições sociais”.

Ao perceber a Universidade não apenas como o espaço físico, mas como o espaço constituído de pessoas, relações e vivências que aí acontecem, não podemos entendê-la de forma isolada. Sabemos que essa Universidade, e todo o processo de formação que ela promove, sofre interferência de campos diferentes, como político, cultural, social etc. Nesse sentido, há uma série de questões que norteiam a construção de currículos, de posturas e da identidade docente, questões estas que extrapolam o espaço físico da universidade e das quais não podemos nos furtar, já que o tema que debatemos assim o exige.

O objeto de estudo desta pesquisa permitiu perceber o processo formativo do professor de Matemática e (re)pensar essa formação na perspectiva de inclusão da ludicidade enquanto dimensão necessária para a constituição da identidade docente.

Nessa sistemática, elege-se o método dialético, o qual

procura captar os fenômenos históricos, caracterizados pelo constante devir. Privilegia, pois, o lado conflituoso da realidade social. Assim o relacionamento entre o pesquisador e o pesquisado não se dá como mera observação do primeiro pelo segundo (Gil, 2012, p. 31).

¹ Observa-se que muitas das dificuldades apresentadas durante os anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio são oriundas de falta de domínio de conteúdos básicos, muitas vezes foco dos anos iniciais. Porém, sem conseguir multiplicar, por exemplo, possivelmente os alunos não conseguiram trabalhar com potenciação. Foi, a partir dessas questões, que as atividades foram propostas. Pensando em munir os futuros professores de estratégias, muitas vezes não foco das licenciaturas, para trabalhar com essas dificuldades, quando aparecem.

Esse método deu suporte lógico à pesquisa por fornecer “bases para uma interpretação dinâmica e totalizante da realidade, já que estabelece que os fatos sociais não podem ser entendidos quando considerados isoladamente, abstraídos de suas influências políticas, econômicas, culturais etc.” (Gil, 2012, p. 14).

Discussão dos resultados

Como aconteceu o envolvimento e quais foram as percepções dos estudantes nas atividades desenvolvidas durante a disciplina de Laboratório do Ensino da Matemática I?

Serão analisados, a seguir, os registros de 10 encontros da disciplina de Laboratório do Ensino da Matemática I, a partir da observação participada, e os questionários finais dos 5 estudantes envolvidos na pesquisa. Essa categoria foi pensada a partir do seguinte objetivo específico: Analisar o envolvimento e percepções dos estudantes nas atividades desenvolvidas durante a disciplina de Laboratório do Ensino da Matemática I.

Esse tópico busca analisar como, ao longo dos encontros na disciplina, aconteceram o envolvimento e as percepções dos estudantes, nas atividades de microinvestigação vivenciadas. Dessa forma, pretende-se discutir a influência que o Laboratório do Ensino de Matemática teve para a formação de um professor pesquisador.

Algumas atividades propostas durante o Laboratório do Ensino da Matemática I foram desencadeadoras de práticas e vivências. Vale destacar que as atividades se articulavam entre si, de forma a promover a construção da concepção da teoria e prática como indissociáveis, como assinalou Pimenta (1996). As atividades desenvolvidas foram as *Temáticas de Discussão*, as *Vivências de Práticas Lúdicas* e a *microinvestigação*. Porém, como já evidenciado, focaremos na microinvestigação, como proposta de formação do professor pesquisador, permitindo que as discussões estabelecidas dentro do espaço do LEM fossem contextualizadas com as vivências (observações, entrevistas, construção e validação de jogos, por exemplo) realizadas nas escolas públicas municipais, responsáveis pelos anos finais do Ensino Fundamental. A escolha dessa atividade permitiu colocar, antes mesmo do início das atividades de estágio, o sujeito em contato com as situações práticas, percebendo as questões de teoria e prática como indissociáveis.

Subcategoria

A Microinvestigação e a realidade escolar como ponto de partida

Conhecendo a realidade do curso do qual os estudantes pesquisados fazem parte, percebemos como problemática importante para pautar o planejamento da disciplina e formação desses futuros professores, a seguinte: A ligação entre o que se trabalha no centro de formação e a sala de aula da Educação Básica. Consideramos a ausência dessa questão um ponto negativo, por considerá-la importante para o constituir a identidade docente (Pimenta, 1996).

Foi a partir do que Tardif (2012) destaca, na impossibilidade de falar em “Saber” como categoria autônoma e desarticulada das outras realidades sociais, organizacionais e humanas, que pensamos na proposição de uma microinvestigação que aproxime o futuro professor da sala de aula, mesmo antes das atividades de estágio, por acreditar ser impossível isolar o futuro professor, como se as questões nas quais ele se encontra envolvido não influenciem em sua formação.

Vale destacar que o processo de microinvestigação nasceu, principalmente, para permitir aos licenciandos mergulharem nas realidades de seu meio social, permitindo que a identidade

docente surja e seja construída a partir das discussões dessas dadas realidades. Segundo Lorenzato e Zuffi (2009), as vivências com as situações reais permitem ressignificar as teorias estudadas.

A apresentação da microinvestigação aconteceu logo no segundo encontro, depois da apresentação da pesquisa e da assinatura do TCLE. A proposta era que eles, logo na primeira semana, procurassem uma escola que os aceitasse para desenvolver a atividade investigativa. Com essa atividade proposta, objetivava-se que os estudantes comesçassem a identificar as inúmeras problemáticas existentes no espaço escolar, sobretudo com o intuito de que esses problemas, ou melhor, a busca de soluções para eles, fosse também objetivo de sua [futura] prática pedagógica.

Muitas das discussões estabelecidas ao longo dos encontros, como se pode identificar ao longo dos encontros apresentados, foram fomentadas pelas experiências e vivências oriundas da microinvestigação ou da prática pedagógica dos mesmos, quando já atuavam como docentes nas escolas públicas. Acreditamos que, a partir desse movimento, faríamos os sujeitos (re) significarem muitas das teorias e estudos apresentados e pensados em um outra realidade. A microinvestigação forneceu elementos importantes para que os licenciandos e as discussões realizadas estivessem pautadas no “chão da sala de aula”.

A fala deles de que muitos professores na Universidade não apresentam “domínio de base”, ou seja, como destaca o estudante E5, “eles não conhecem a realidade da sala de aula”, é fator para a falta de ligação entre os conteúdos trabalhados durante a formação e a futura prática profissional. É, como destacam Borges (2010), quando apresenta que umas das dificuldades dos cursos de formação é justamente romper com as estruturas fragmentadas e desconectadas, e Souza (2010), ao apontar que a prática de muitos professores se distancia do cotidiano dos discentes.

O trabalho proposto na microinvestigação culminava na escrita de um artigo que seria posteriormente apresentado e submetido em eventos científicos. Partimos da ideia de que, nada melhor que apresentar o que foi realizado pelos estudantes na microinvestigação para percebermos o envolvimento e percepção na atividade proposta.

Tendo em vista a futura publicação desses trabalhos em eventos científicos da área de Educação Matemática, optamos por não identificar o estudante responsável por cada trabalho.

O primeiro trabalho de microinvestigação desenvolvido teve como tema *A percepção do aluno da EJA (Educação de Jovens e Adultos) com relação à utilização dos jogos na aula de Matemática*. Este trabalho versou sobre a percepção dos alunos da EJA de uma escola pública do município de Barreiras-Bahia com relação à utilização dos jogos na aula de Matemática. Teve um caráter qualitativo e foi desenvolvida com alunos da modalidade jovens e adultos que estavam concluindo o módulo I, referente ao 6º ano do Ensino Fundamental. Seu desenvolvimento apresentou três momentos: num primeiro momento, foi observada a sala de aula onde estes alunos estudavam; o segundo momento foi reservado a uma conversa com os mesmos, com o objetivo de perceber quais concepções eles tinham com relação aos jogos; e no terceiro momento, foi aplicado um jogo desenvolvido para a realidade da turma observada. Segundo o estudante, o jogo foi desenvolvido justamente para que se pudesse observar qual a percepção dos alunos com relação à aplicação deste na sala de aula.

O segundo trabalho, intitulado *O lúdico e o constituir-se professor de Matemática: pensar a sala de aula brincando*, consistiu numa microinvestigação desenvolvida em uma escola pública do município de Barreiras – BA, com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental. Objetivou identificar as dificuldades dos alunos referentes à potenciação, radiciação e expressões numéricas, e mostrar que atividades lúdicas em sala de aula podem contribuir no processo de ensino-aprendizagem. Foi usado o jogo “Dominó das expressões”.

O terceiro trabalho, *A importância do lúdico no Ensino Fundamental*, foi desenvolvido, assim como os outros, em uma escola pública do município de Barreiras. Para o desenvolvimento desta microinvestigação, fora selecionada uma turma do sétimo ano, a fim de se examinar, na prática, como se dá o trabalho com jogos matemáticos. A atividade escolhida foi o jogo o “Dominó da Divisibilidade”. Um jogo simples e que pode ser feito com qualquer material, como cartolina, folha de papel, caixas de fósforo vazia entre outros.

Ludicidade no ensino de Matemática: contribuições do jogo para o ensino de potências foi o título escolhido pelo estudante para seu trabalho. Objetivou analisar como ocorre o processo de aprendizagem, realizado com os alunos do 6º ano do EF, em uma instituição de ensino da esfera Municipal da cidade de Barreiras. A pesquisa foi dividida em duas etapas: em um primeiro momento, foram feitas observações da sala de aula para conhecimento do espaço e para conhecer os alunos da instituição; e, num segundo momento, houve a validação do jogo “pescaria das potências”.

O último trabalho desenvolvido recebeu como título: *Microinvestigação: o jogo como instrumento facilitador no ensino da Matemática*. Esta microinvestigação se propôs a analisar como o jogo pode ser utilizado como uma importante ferramenta para o ensino da Matemática. Foi desenvolvido com uma turma de 8º/9º ano do Ensino Fundamental, da modalidade EJA, com idades variando entre de 18 a 39 anos. A pesquisa foi dividida em duas etapas; em um primeiro momento, foram feitas observações do objeto de estudo; num segundo momento, houve a criação e validação de um jogo matemático.

Vale destacar que não houve a obrigatoriedade em usar jogos matemáticos ou outras atividades lúdicas no trabalho de pesquisa desenvolvido. Deixamos os estudantes livres para escolherem a temática que queriam discutir a partir de cada realidade. Observa-se, a partir da escolha do lúdico para pautar cada artigo, que os alunos interessaram-se pela temática e queriam conhecer mais sobre. Os textos usados durante as temáticas de discussão foram usados para fundamentar teoricamente os trabalhos.

Vejamos o posicionamento dos estudantes quanto à atividade de microinvestigação desenvolvida:

Estudante E1: “Uma atividade que serviu **para observar de perto como é a sala de aula** e como utilizar uma atividade lúdica com os alunos”.

Estudante E2: “A microinvestigação foi importante para que **víssemos, na prática, o que era discutido em sala**, desde a prática educacional à utilização de atividades lúdicas como ferramenta de ensino”.

Estudante E3: “O contato com a sala de aula, para mim, é sempre prazeroso e encantador. Para mim, essa foi uma atividade lúdica”.

Estudante E4: “Eu achei interessante, apesar de eu ter tido alguns contratemplos no processo. E a parte que mais gostei [foi] a do desenvolvimento da atividade, pois percebi que é algo que os alunos também gostam e se divertem”.

Estudante E5: “Essa microinvestigação foi muito oportuna para vivenciar **a realidade das escolas**, dos alunos, dos professores e da administração”.

Nesse caso, fica evidente que a formação desses estudantes, a partir da atividade de microinvestigação, permitiu o estabelecimento de relação com a futura prática. O envolvimento e percepções dos estudantes, pelo menos as manifestas, deixam claro como isso se configurou importante para a constituição da identidade docente.

Algumas Considerações

Durante a disciplina de Laboratório do Ensino da Matemática I, algumas atividades propostas, articulando-se entre si, foram desencadeadoras de práticas e vivências lúdicas. As *Temáticas de Discussão* promoveram reflexões e o (re)pensar a formação a partir da leitura de autores e da contextualização com as outras situações vividas durante a disciplina. As *vivências de práticas lúdicas* possibilitaram o experienciar de sequências didáticas, manipulação e construção de jogos e outros materiais, ouvir música, brincar, criar, desenhar e manifestar ludicamente, permitindo, dessa forma, que os estudantes vivenciem sua ludicidade. A *microinvestigação* aproximou o futuro professor da sala de aula e permitiu aos sujeitos mergulharem nas realidades de seu meio social, (re)pensando sua formação e prática pedagógica.

Sabemos e não queremos, de forma alguma, ser imediatista e achar que uma ação pontual como a desenvolvida durante uma disciplina resolveria os problemas referentes à formação de um professor pesquisador; pelo contrário, consideramos que o espaço do LEM, também, precisa promover ações que articulem, ao longo de todo o curso, aspectos importantes dessa formação. Portanto, precisa ser reconhecida sua necessidade nesse processo de formação profissional e de desmistificação da imagem que, muitas vezes, a Matemática apresenta, isto é, de disciplina difícil e desconectada das questões do dia a dia.

É inegável, porém, a partir dos dados apresentados, que o trabalho desenvolvido teve uma contribuição significativa para a formação desses sujeitos, futuros professores. Acreditamos que, outros aspectos, além das questões profissionais, foram discutidos ao longo de todo o trabalho, e a percepção de formação pautada em uma dimensão humana possibilita pensar no sujeito e em sua formação de forma plena.

Diante do exposto, cabe às Universidades repensarem as formações oferecidas e o perfil profissiográfico desejado. A pesquisa precisa ser vista como importante para essa formação. O LEM, espaço visto como importante dentro do curso, precisa realmente cumprir o seu papel e promover discussões e vivências que permitam tal formação.

Referências ou bibliografia

- André, M. (2001). Pesquisa em educação: buscando rigor e qualidade. *Cadernos de Pesquisa*, 113, 51-63, jul.
- Baldino, R. (1999). Pesquisa-Ação para formação de professores: Leitura sintomal de relatórios. In M. A. V. Bicudo (org.), *Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas* (pp. 221-245). São Paulo: Editora UNESP.
- Borges, L. F. F. (2010). Um currículo para a formação de professores. In I. P. A. Veiga, & E. F. S. Silva (orgs.), *A escola mudou. Que mude a formação de professores* (pp. 35-60). Campinas, SP: Papirus.

- Bortoni-Ricardo, S. M. (2008). *O professor pesquisador: introdução à pesquisa qualitativa*. São Paulo: Parábola Editorial.
- Freitas, M. T. M., & Nacarato, A. M., et al. (2005). O desafio de ser professor de matemática hoje no Brasil. In D. Fiorentini, & A. M. Nacarato (Orgs.), *Cultura, formação e desenvolvimento profissional de professores que ensinam matemática*. São Paulo: Musa Editora.
- Gil, A. C. (2012). *Métodos e técnicas de pesquisa social* (5ª ed.). São Paulo: Atlas.
- Kalief, A. M. M. R. (2010). Do fazer concreto ao desenho em geometria: ações e atividades desenvolvidas no laboratório de ensino de geometria da Universidade Federal Fluminense. In S. Lorenzato, *Laboratório de Ensino de matemática na formação de professores* (pp. 113-134). Campinas: Autores Associados.
- Lorenzato, S. (2010). *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores* (2ª ed. ver.). Campinas, SP: Autores Associados.
- Lorenzato, S., & Zuffi, E. (2009). M. Formação de professores e (des)caminhos da educação matemática no Brasil. *Revista Educação e Cidadania*, 8, 45-55.
- Minayo, M. C. S. (Org.). (2010). Ciência, técnica e arte: o desafio da pesquisa social. In S. F. Deslandes, O. Neto & R. Gomes, *Pesquisa social: teoria, método e criatividade* (29ª ed., pp. 9-29). Petrópolis: Editora Vozes Ltda.
- Passos, C. L. B. (2010). Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In S. Lorenzato, *Laboratório de Ensino de matemática na formação de professores* (pp. 77-92). Campinas: Autores Associados.
- Pimenta, S. G. (1996). Formação de professores - saberes da docência e identidade do professor. *R. Fac. Educ., São Paulo – SP*, 22(2), 72-89, jul./dez.
- Silva, A. J. N. (2013a). Laboratório de Educação Matemática: articulando as ações desse espaço e a formação lúdica do futuro professor. In *XV Encontro Baiano de Educação matemática*. Teixeira de Freitas-BA. Anais do XV EBEM.
- Silva, A. J. N. (2013b). Laboratório de Educação Matemática: o lúdico e suas contribuições para o processo de construção da identidade docente. In *III Colóquio Práticas Pedagógicas Inovadoras na Universidade*. Salvador. Salvador: Eduneb.
- Tardif, M. (2012). *Saberes docentes e formação profissional* (13ª ed.). Petrópolis, RJ: Vozes.
- Tripp, D. (2005). Pesquisa-ação: uma introdução metodológica. *Educação e Pesquisa*, 31(3), 443-466, set./dez. São Paulo.
- Turrioni, A. M. S. & Perez, G. (2010). Implementando um laboratório de educação matemática para apoio na formação de professores. In S. Lorenzato (Org.), *O laboratório de matemática na Formação dos Professores* (pp. 57-76). Campinas: Autores Associados.

O método *jigsaw* e a mobilização de estilos de pensamento matemático por estudantes de engenharia

Eloiza **Gomes**

Instituto Mauá de Tecnologia

Brasil

eloiza@maua.br

Benedito Antonio da **Silva**

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

Brasil

benedito@pucsp.br

Gabriel Loureiro de **Lima**

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

Brasil

gllima@pucsp.br

Resumo

Estudos mostram que compreender os estilos de pensamento dos alunos pode auxiliar os professores a diferenciarem o ensino no sentido de maximizar os resultados de aprendizagem. Desta forma, o objetivo deste trabalho é apresentar os resultados iniciais de uma pesquisa de doutorado que procura investigar os estilos de pensamento matemático mobilizados por alunos ingressantes no curso de Engenharia. Os estudos sobre estilos de pensamento de Sternberg e a categorização dos estilos de pensamento matemático desenvolvida por Ferri fundamentam as análises da pesquisa. O método *jigsaw* de aprendizagem cooperativa, desenvolvido por Elliot Aronson, foi utilizado na coleta de dados. Os primeiros resultados obtidos indicam uma predominância do estilo de pensamento matemático analítico, o que, em parte, pode ser consequência da influência exercida pelo professor sobre os alunos, uma vez que tal estilo é valorizado no modelo tradicional de ensino.

Palavras-chave: aprendizagem cooperativa, método *jigsaw*, estilo de pensamento matemático, engenharia.

Introdução

Neste trabalho apresentaremos os primeiros resultados de uma pesquisa de doutorado em Educação Matemática que procura investigar alguns aspectos do ensino da Matemática para alunos iniciantes nos cursos de Engenharia. Diante das dificuldades encontradas por tais alunos nas disciplinas matemáticas nas primeiras séries dos cursos superiores (diferenças essas apontadas por diversas pesquisas como um dos motivos do alto índice de reprovação e evasão dos cursos de Engenharia), a questão dos estilos, em suas mais diversas terminologias, tais como, estilos cognitivos, estilos de pensamento, estilos de percepção, estilos de aprendizagem etc., ganha relevância.

Apesar da variedade das concepções e teorias sobre estilos, os estudiosos da área convergem quando afirmam que compreender os estilos dos alunos pode auxiliar os professores a diferenciarem o ensino no sentido de maximizar os resultados de aprendizagem (Ferri (2003, 2012), Sternberg e Zhang (2005), Burton (1999)).

O sucesso e o insucesso na aprendizagem, não só na opinião de professores mas também para muitos pedagogos e psicólogos, são causados, dentre outros fatores, pelas diferentes habilidades de aprendizagem dos estudantes e também por como estes mobilizam tais habilidades. Neste sentido, Ferri (2012) destaca que, ao buscar respostas para questões como, por exemplo, o porquê de um mesmo aluno ter um desempenho fraco em um teste matemático de múltipla escolha e um excelente resultado quando envolvido em um projeto, estas não podem levar em consideração apenas as habilidades dos estudantes, mas também o estilo de pensamento matemático do indivíduo, que diz respeito exatamente às preferências para o uso de suas habilidades matemáticas. Não há como desconsiderar, portanto, que os estilos de pensamento matemático são fatores que influenciam a aprendizagem e o ensino da Matemática.

A literatura especializada mostra que os diferentes estilos de pensamento matemático nem sempre são explorados nos materiais didáticos e em sala de aula. Desta forma, não se oferecem visões alternativas que possam auxiliar o estudante a compreender um determinado conteúdo matemático (Burton, 1999).

Diante disso, nos colocamos as seguintes questões:

- Quais os estilos de pensamento matemático que predominam nos alunos ingressantes de um curso de Engenharia?
- Como desenvolver um conteúdo de forma a privilegiar os vários estilos de pensamento matemático?

Nossas pesquisas nos levaram à aprendizagem cooperativa que é a metodologia de ensino que propicia aos estudantes trabalhar em equipes para atingir um objetivo comum, em condições que envolvem a interdependência positiva (todos os membros devem cooperar para completar a tarefa) e individual (cada membro é responsável pelo resultado final). Desta forma, outras questões surgiram:

- A estratégia de aprendizagem cooperativa seria um método de trabalho em sala de aula interessante do ponto de vista didático pedagógico?
- Tal estratégia poderia propiciar aos alunos explorarem melhor os diferentes estilos de pensamento matemático? E ajudar os alunos novos nos cursos de Engenharia a melhorar seu desempenho nas disciplinas da área de Matemática?

Partindo destes questionamentos, o objetivo principal da tese em desenvolvimento é investigar se a estratégia de aprendizagem cooperativa pode propiciar ao estudante ingressante em cursos de Engenharia o trânsito por diversos estilos de pensamento matemático.

Para atingir este objetivo, optamos por trabalhar com conteúdos desenvolvidos no curso de Geometria Analítica, em especial o estudo da reta. A hipótese é que, se abordado por meio de um método de aprendizagem cooperativa, o tratamento vetorial no estudo de retas nos espaços tridimensional e bidimensional pode favorecer ao aluno o trânsito por vários estilos de pensamento matemático.

Existem vários métodos de aprendizagem cooperativa, dentre os quais destacamos o método *jigsaw*¹, desenvolvido por Elliot Aronson. Essa metodologia propicia a discussão em grupo, mas o trabalho individual é fundamental para a resolução de certa tarefa. Assim, acreditávamos que essa dinâmica poderia ser um momento importante para analisar a presença dos estilos de pensamento matemático e verificar se tal metodologia favorece o estudante a transitar por vários estilos e não ficar restrito apenas ao de sua preferência.

Neste artigo, apresentaremos, em primeiro lugar, algumas considerações teóricas a respeito dos estilos de pensamento matemático. Em seguida, discorreremos sobre a aprendizagem cooperativa e o método *jigsaw* para, então, relatarmos o processo de coleta de dados que contou com a participação de 21 estudantes, voluntários, da primeira série do curso de Engenharia da Escola de Engenharia Mauá² no ano letivo de 2014. O processo envolveu quatro encontros com os sujeitos da pesquisa. Finalmente, analisaremos os dados coletados em dois destes encontros.

Estilos

As discussões sobre a construção do estilo em cada indivíduo ocorrem principalmente no campo da Psicologia Cognitiva e existem poucas abordagens com referência a Matemática (Ferri, 2012). Não existe consenso ainda sobre a definição de estilo; há várias vertentes. Frota (2010) cita que a literatura em Psicologia refere-se a estilos utilizando terminologias distintas: estilo cognitivo, estilo de resolução de problemas, estilo de pensamento, estilo de percepção, estilo de aprendizagem, entre outros. Salienta ainda, que tais terminologias não representam, necessariamente, ideias convergentes.

Ferri (2003) apresenta da seguinte maneira a classificação de Sternberg para os estilos:

- Estilos de aprendizagem: podem ser usados para caracterizar como se prefere aprender. Alguns aprendem melhor visualmente, outros auditivamente. Ou, talvez, alguns prefiram uma forma ativa de aprendizagem *versus* uma forma passiva.
- Estilos de pensamento: podem ser usados para caracterizar como o indivíduo prefere pensar sobre o objeto de estudo, durante o aprendizado ou depois. Por exemplo, um indivíduo pode preferir pensar sobre questões globalmente ou localmente.
- Estilos cognitivos: dizem respeito às formas de cognição. Por exemplo, algumas pessoas separam a informação, outras as mantêm compactadas. Os estilos cognitivos tendem a ficar mais perto da personalidade do que os outros tipos de estilos. (Ferri, 2003, p.3, tradução nossa).

Em resumo, pode-se dizer que um estilo de aprendizagem é, de maneira genérica, a forma como um aprendiz recebe a informação, enquanto que um estilo de pensamento é a maneira como este a processa e a opera. Manifesta-se como uma preferência do indivíduo por utilizar, durante o processamento da informação ou no momento em que está trabalhando com a mesma, certas habilidades em detrimento de outras. Deste modo quando se destacam diferenças individuais no estilo de pensamento, estas são, de fato, apenas diferenças, não podendo ser classificadas como melhor ou pior.

¹ Uma tradução livre para *jigsaw* é quebra cabeça, mas neste texto usaremos o termo em inglês que é mais utilizado na literatura.

² Escola de Engenharia Mauá faz parte do Centro Universitário do Instituto Mauá de Tecnologia que foi fundado em 11 de dezembro de 1961, situado em São Caetano do Sul, São Paulo, Brasil. É uma entidade de direito privado - associação sem fins lucrativos - de utilidade pública, dedicada ao ensino e à pesquisa científica e tecnológica, visando à formação de recursos humanos altamente qualificados.

Estilos de Pensamento

O estilo de pensamento refere-se a padrões habituais ou formas preferenciais de fazer algo (pensar, aprender, ensinar) que são consistentes durante longos períodos de tempo em muitas atividades (Ferri, 2012). Sternberg e Zhang (2005) apresentam algumas características gerais de estilo de pensamento:

- Os estilos são preferências e não habilidades. Existe uma diferença entre de que forma o aluno é criativo (habilidade) e quanto gosta de ser criativo (estilo).
- Estilos não são 'bons' ou 'ruins', o que importa é sua serventia para a relação aluno/professor ou aluno/material. O que um professor considera um bom estilo, outro pode considerar ruim, e vice-versa.
- Os estilos podem variar entre tarefas e situações. As pessoas variam seus estilos, pelo menos um pouco, para se adequar ao que estão fazendo. Elas não têm um estilo fixo.
- As pessoas diferem em dosagens de preferências estilísticas. Algumas pessoas preferem mais um determinado estilo, outras menos.
- As pessoas diferem em termos de flexibilidade estilística. Algumas pessoas facilmente podem alternar entre os estilos, outros não.
- Os estilos são socializados. Estilos são aprendidos por meio de interações com o ambiente.
- Os estilos podem variar ao longo da vida, eles são não fixos. As pessoas podem mudar seus estilos no decorrer dos anos.
- Os estilos são mensuráveis.
- Os estilos são modificáveis. As pessoas não estão "presas" a determinados estilos, a menos que queiram.
- O que é valorizado em um instante e lugar pode não ser em outro. Um estilo que leva ao sucesso em uma escola ou trabalho pode levar ao fracasso em outra. (Sternberg; Zhang, 2005, p.246, tradução nossa).

Diante destas características colocadas pelos autores, percebe-se a diversidade de modos que se podem explorar os estilos de pensamento de um indivíduo, no sentido de propiciar um melhor desempenho em uma atividade. Uma vez que os estilos são aprendidos por meio de interações sociais, o ambiente escolar pode criar oportunidades que levem o estudante a modificar um determinado estilo, de modo que lhe propicie melhor resultado na vida escolar.

Estilos de Pensamento Matemático

O desempenho acadêmico dos alunos em matemática é muito discutido no ambiente escolar. Muitos professores, pedagogos e psicólogos atribuem o sucesso e fracasso na aprendizagem às capacidades individuais dos estudantes. Assim, ainda permanece sem resposta a questão: Porque um aluno tem um bom desempenho em uma avaliação de múltipla escolha e quando trabalha com projeto o seu resultado é fraco? Ferri (2012), aponta que a primeira justificativa que vem à mente são as diferenças nas habilidades matemáticas dos alunos. A autora apresenta outra explicação: os estilos de pensamento matemático, que não são as habilidades matemáticas, mas sim como os alunos preferem utilizá-las.

Desta forma, na perspectiva dos estudos de Sternberg, Ferri (2012) enumera alguns princípios dos estilos de pensamento matemático:

- são atributos da personalidade, porque as preferências são conectadas com aspectos positivos;
- não são as estratégias de resolução de problemas matemáticos, porque as estratégias são desenvolvidas em um nível maior de consciência;
- são, em parte, influenciados socialmente, o que significa que os pais ou, na maioria dos casos, os

professores, dão as diretrizes de como a Matemática tem de ser aprendida e representada durante as aulas ou exames, por exemplo, com ou sem visualização, esboços etc. (Ferri, 2012, p.abcde+3, tradução nossa).

Não existe um consenso sobre as características ou classificação dos estilos de pensamento matemático. Em 1892, Felix Christian Klein, matemático alemão, construiu uma tipologia de três classes de matemáticos: o filósofo, que constrói sobre a base de conceitos; o analista, que essencialmente "opera" com fórmulas e o geômetra, cujo ponto de partida é o visual.

Esta classificação, que pode ser generalizada em dois tipos, visual e analítico, como afirma Ferri (2012), foi baseada em observações feitas em cooperação com outros matemáticos e não com base em estudos empíricos.

Em 1945, o matemático francês Jacques Salomon Hadamard criou uma tipologia similar restrita a dois estilos de pensamento, visual e analítico. Seu trabalho, segundo Ferri (2012), foi orientado pela questão de como surgem, sob o ponto de vista da psicologia, as ideias abstratas para as soluções de problemas matemáticos. A autora salienta que nos estudos de Hadamard, são analisados trabalhos do psicólogo francês Théodule-Armand Ribot, que distingue dois tipos de matemáticos: aqueles que pensam de uma forma puramente algébrica, com a ajuda de sinais, e aqueles que precisam de uma representação figurada, uma construção, mesmo que esta seja considerada como pura ficção, sem nenhum embasamento teórico.

Burton (1999), trabalhando com os matemáticos, acrescentou à caracterização de Hadamard mais um estilo, que chamou de conceitual. Assim, para Burton os estilos de pensamento matemático são: visual, analítico e conceitual.

Os resultados da pesquisa de Burton, utilizando sua caracterização, mostram que quase um terço dos matemáticos apresenta apenas um estilo, enquanto a maioria dos restantes permeava entre dois estilos e poucos utilizavam os três.

Burton(1999) manifesta suas preocupações como educadora de Matemática, ao referir-se aos dados de sua pesquisa que mostraram que professores que usam o estilo visual estão cientes que outros estilos de pensamento existem, enquanto para os que não se enquadram nesta classificação, o estilo de todos são similares aos seus. Afirma ainda que poucos percebem que existe uma via de mão dupla entre os estilos de pensamento e a aprendizagem. Assim, em geral, um professor com um determinado estilo dominante só se comunica fluentemente com os alunos que compartilham do mesmo estilo. Além disso, os materiais de ensino não são preparados para explorar as diferenças de estilos de pensamento e, na maioria das vezes, não oferecem visões alternativas que possam auxiliar o estudante a compreender um determinado conteúdo matemático.

Os estilos de pensamento matemático, até então, não haviam sido analisados em estudantes. Com tal objetivo, Ferri, em 2003 e 2004, realiza um primeiro estudo qualitativo com alunos do nono e décimo ano escolar, utilizando a classificação de Burton. A coleta dos dados dessa pesquisa foi realizada por meio da resolução de problemas matemáticos resolvidos pelos alunos em duplas.

Destes estudos, Ferri coloca uma nova classificação para os estilos de pensamento matemático:

- **Estilo Visual:** mostram preferências por imagens internas e representações externas pictóricas. A compreensão de fatos matemáticos é feita por representações holísticas. As imagens internas são

realizadas, principalmente, por fortes associações com situações vividas.

- Estilo Analítico: mostram preferências por imagens internas e representações externas formais. São capazes de compreender fatos matemáticos, de preferência, por meio simbólico ou verbal. Preferem conduzir os pensamentos sequencialmente, passo a passo.
- Estilo Integrado: combinam maneiras visuais e analíticas de pensar e são capazes de mudar de forma flexível entre as diferentes representações ou formas de prosseguir. (Ferri, 2012, Abcde+3, tradução nossa)

Embora Ferri, com base nos estudos de Sternberg, destaque que os estilos de pensamento matemático não são estratégias de resolução de problemas, estes se revelam, ainda que implicitamente, em tais estratégias adotadas pelos estudantes.

Na sequência, tecemos algumas considerações a respeito de aprendizagem cooperativa e do método *jigsaw*.

Aprendizagem Cooperativa e o método *jigsaw*

A aprendizagem cooperativa é um termo genérico que se refere a numerosas técnicas de organizar e conduzir as atividades em sala de aula. Consiste principalmente na utilização de pequenos grupos para desenvolver um trabalho com objetivos comuns. Esse trabalho em conjunto propicia aos estudantes criarem formas de interdependência que os tornam responsáveis pelo sucesso de sua aprendizagem e também pela dos outros (Vieira, 2000)

Alguns docentes podem achar que já desfrutaram dessa metodologia, quando pediram para seus alunos sentarem em pequenos grupos para desenvolver um determinado trabalho. Nas aulas de matemática isso é muito comum. Os professores exploram determinado assunto e apresentam uma bateria de exercícios na sequência. Para resolução desses, colocam os alunos em pequenos grupos que tem como meta resolvê-los e depois apresentam a solução. Esta atitude está muito longe de ser uma aprendizagem cooperativa, pois tal metodologia exige mais do que os estudantes estarem reunidos em torno de uma mesa com o professor dizendo para trabalharem juntos e colaborarem um com o outro. (Aronson, 2000)

Na aprendizagem cooperativa os grupos de estudantes desenvolvem um trabalho com objetivos comuns. Tal trabalho deve ser organizado de forma a maximizar a aprendizagem de cada indivíduo do grupo durante o processo de realização do mesmo (Santos, 2011). Existem vários modelos e diferentes formas de implementação da aprendizagem cooperativa, mas há um consenso da presença de cinco componentes para que se possa falar nesta abordagem pedagógica. Segundo Johnson e Johnson, 1999, são eles:

- interdependência positiva – percepção que só será possível atingir o objetivo final de uma tarefa se o trabalho for realizado em conjunto.
- responsabilidade individual – promover responsabilidade do estudante pela própria aprendizagem, fazendo com que cada componente do grupo fique mais forte.
- interação face a face – promover a colaboração mútua entre os alunos dos grupos.
- habilidades interpessoais – reunir os alunos em grupos e pedir para cooperarem, não necessariamente tem-se êxito. Alguns aspectos devem ser ensinados como a liderança, tomada de decisão, aquisição de confiança, comunicação e resolução de conflitos.
- processamento grupal – a participação de cada componente deve ser garantida e dificuldades de relacionamento entre os integrantes devem ser superadas (Johnson e Johnson, 1999, p.70-71).

A compreensão destes cinco elementos básicos deve refletir no trabalho do professor que deverá adaptar os conteúdos a serem desenvolvidos às necessidades dos alunos, dimensionar o

uso da aprendizagem cooperativa, prevenir e resolver os problemas (que devem aparecer) de alunos que não tem afinidade com trabalhos em grupo.

Várias técnicas para se utilizar a aprendizagem cooperativa vem sendo desenvolvidas desde os anos sessenta. Dentre estas, destacamos o método *jigsaw*, em que o professor divide a turma em grupos heterogêneos de 4 a 6 alunos e não se utiliza de aulas tradicionais. Ele é responsável por preparar o material que deverá ser estudado, dividindo o assunto, em um número de temas igual ao número de alunos de cada equipe. O trabalho inicial é individual. Cada aluno recebe seu tema e deve estudá-lo antes de se reunir com os colegas dos outros grupos com tema semelhante. Nestes grupos, os alunos aprendem a dominar o assunto do seu tema, que depois deverão explicar aos seus colegas da equipe inicial (Vieira, 2000). Com essa dinâmica a classe dos alunos poderá ter condições de aprender o conteúdo pretendido pelo professor. Não está prevista nenhuma avaliação para a produção do grupo, apenas individual que será gerada por uma prova ao fim da atividade.

De posse dos pressupostos teóricos sobre os quais discurremos nas seções anteriores, realizamos um experimento com estudantes de Engenharia. Apresentamos, a seguir, algumas considerações a respeito do processo de coleta de dados.

Coleta de dados

A coleta de dados foi realizada em quatro encontros. O primeiro teve como objetivo explicar para os participantes como funcionaria nossa atividade. Explicamos o método *jigsaw* e, principalmente, como deveriam proceder no momento em que fossem apresentar como pensaram para resolver as questões. Tínhamos que garantir que explicassem seus pensamentos e não que apresentassem uma simples reprodução de procedimentos da resolução. No segundo encontro o método *jigsaw* foi realizado e teve duração de 120 minutos. Os alunos foram distribuídos em 5 grupos e a escolha dos grupos foi realizada de forma aleatória. Do terceiro encontro participaram 21 alunos e neste realizamos uma discussão das resoluções produzidas pelos grupos durante o segundo encontro, com o objetivo de dar uma devolutiva aos estudantes sobre o que foi desenvolvido naquela ocasião. No quarto e último encontro, realizado dois meses após o terceiro, se propôs aos estudantes que participaram dos três encontros anteriores, que resolvessem a mesma questão já proposta no primeiro.

O conteúdo matemático explorado nestes quatro encontros, referia-se ao estudo da reta nos espaços bidimensional e tridimensional. A escolha deste assunto deve-se ao fato de pressupomos que este daria condições de explorarmos os três estilos de pensamento matemático expostos na classificação de Ferri. Outro fato que reforçou a escolha do conteúdo é que este já era de conhecimento dos alunos, uma vez que o estudo da reta no $\mathbb{R}^3$ já havia sido tratado nas aulas da disciplina Geometria Analítica e no $\mathbb{R}^2$, além de terem estudado no ensino médio, havia sido reforçado nas aulas de Cálculo I, quando se abordou a interpretação geométrica da derivada de uma função no ponto. Essa preocupação de trabalhar com um conteúdo que fosse de domínio dos alunos deve-se ao fato de, como afirma Ferri (2012), os estilos de pensamento matemático estarem relacionados a como o indivíduo utiliza suas habilidades matemáticas e não a como aprendem Matemática. Não foi nossa intenção ensinar nenhum novo conteúdo aos participantes desta pesquisa, mas sim verificar como os mesmos mobilizam as habilidades matemáticas que já possuem para elaborar a solução de um problema.

No primeiro encontro, a questão proposta aos estudantes, com o objetivo de observar quais estilos de pensamento matemático seriam manifestados por eles, foi a apresentada na Figura 1.

Sejam as retas s , determinada pelos pontos $A = (1, 2, 0)$ e $B = (2, -1, 0)$, e r $\begin{cases} x = 3\lambda \\ y = -4 + \lambda \\ z = 0 \end{cases}$ com $\lambda \in \mathbb{R}$.	
Estude a posição relativa das r e s .	Passos do desenvolvimento.

Figura 1. Questão proposta no primeiro encontro.

No segundo encontro, foi aplicado o método *jigsaw* e o objetivo final era que cada grupo apresentasse uma resolução da questão exposta na Figura 2.

Com os estudos realizados por cada integrante do grupo, respondam as questões a seguir, justificando as respostas. - Existem semelhanças entre as equações paramétricas da reta no $\mathbb{R}^2$ e no $\mathbb{R}^3$? Em caso afirmativo, identifique-as. - Escreva por meio do tratamento vetorial as equações paramétricas da reta que passa pelo ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ e tem coeficiente angular m, indicando o vetor diretor. - Com os assuntos discutidos pelo grupo, deve-se ter verificado que no $\mathbb{R}^2$ duas retas são paralelas se os coeficientes angulares são iguais e perpendiculares se o produto deles é -1. Já no $\mathbb{R}^3$, utilizam-se os vetores diretores das retas para tal discussão. Este modelo agora pode ser utilizado também para o $\mathbb{R}^2$. Utilize o tratamento vetorial para mostrar que, em $\mathbb{R}^2$, se duas retas são paralelas, então os coeficientes angulares são iguais; e se são perpendiculares, o produto dos coeficientes angulares é -1. - Por que no $\mathbb{R}^3$ é necessário um tratamento vetorial?

Figura 2. Questão proposta ao final do segundo encontro.

Para que o objetivo fosse atingido, conforme determinam as regras do método, cada componente do grupo recebeu um tema de estudo que seria subsídio para resolução da questão que o grupo deveria apresentar ao final do encontro. Cada aluno teve 30 minutos para que, individualmente, estudasse o texto referente ao seu tema. Após esse tempo de trabalho individual, os alunos que estudaram o mesmo tema reuniram-se no intuito de esclarecerem eventuais dúvidas e organizar a apresentação, a respeito daquela temática, que cada um deveria fazer ao seu grupo inicial. Após os responsáveis por cada um dos temas apresentarem os resultados de seus estudos para seus colegas de equipe que trabalharam com outras temáticas, o grupo deveria estar apto a resolver a questão principal.

No terceiro encontro, além da devolutiva feita pelo pesquisador, referente ao trabalho desenvolvido no encontro anterior, foi proposta uma questão visando comparar os estilos mobilizados pelos estudantes neste momento com aqueles que haviam se manifestado no primeiro encontro.

Finalmente, no quarto encontro, optou-se por reaplicar a questão trabalhada no primeiro encontro com o objetivo de verificar se, após dois meses, seria possível identificar alguma mudança na mobilização dos estilos. A indagação que tentamos responder era se, caso houvesse uma mudança entre o primeiro encontro e o terceiro, isso se manteria após dois meses.

Apresentaremos, então, na sequência, uma primeira análise dos dados coletados durante o primeiro e o terceiro encontros.

Primeiros resultados

No primeiro encontro identificamos que 11 alunos demonstraram o estilo de pensamento matemático analítico. As soluções são sempre formais e muito semelhantes as apresentadas pelos professores em sala de aula. Como prevíamos, a predominância foi de tal estilo, uma vez que, a parte visual e, podemos dizer também a geométrica, são pouco exploradas no ensino das disciplinas da área de Matemática nos cursos de Engenharia. Tal fato vem corroborar, com a afirmação de Ferri, de que os estilos de pensamento matemático são, em parte, influenciados socialmente, o que significa que os professores dão as diretrizes de como a Matemática tem de ser aprendida e representada durante as aulas ou exames.

O estilo de pensamento matemático exclusivamente visual é manifestado por apenas 2 alunos. Esses resolveram a questão utilizando a representação gráfica, esboçando as retas em um sistema de coordenadas e então respondendo a questão do problema. Os gráficos são apresentados de forma desorganizada e as justificativas são confusas. Nenhum deles respondeu corretamente a questão. Analisando o desempenho escolar desses alunos percebemos que os mesmos têm notas, não só nas disciplinas da área de Matemática, muito baixas. São estudantes com idades superiores à média dos demais e que ficaram um período fora da escola. Uma conjectura que pode ser feita é que, por não terem conhecimento do conteúdo, fazem associações com situações de ensino anteriores, característica do estilo visual na classificação de Ferri.

O estilo de pensamento matemático integrado se manifesta em 7 estudantes. Não podemos afirmar que esta integração é feita igualmente entre os estilos visual e analítico. Percebemos que a maioria dos alunos tende mais para o analítico do que o visual.

Observando os dados coletados no terceiro encontro, notamos que 17 alunos apresentam exclusivamente o estilo analítico e 3, o visual. O único aluno que classificamos com pertencente a categoria do estilo integrado apresenta uma pequena parte do estilo visual indicada pela presença um gráfico pouco representativo.

Como já mencionamos, no segundo encontro, utilizando método *jigsaw*, realizamos um estudo vetorial para as retas no $\mathbb{R}^2$. Mesmo assim, apenas 9 dos 21 participantes percebem e optaram por uma resolução no plano, sendo que apenas 2 utilizaram um tratamento gráfico. Isso nos mostra que, mesmo identificando que o estudo poderia ser realizado no $\mathbb{R}^2$, o estilo de pensamento matemático analítico ainda predomina.

Dos 3 alunos que no terceiro encontro faziam parte do estilo visual, 2 deles eram classificados anteriormente no integrado, sendo que um estudante no primeiro encontro percebeu que a resolução poderia ser feita no $\mathbb{R}^2$. Este fato pode ter influenciado, após o segundo encontro, a mudança para o estilo visual. Já o outro mostrou ter dificuldade na resolução das questões, principalmente no primeiro encontro, colocando suas explicações de maneira confusa, utilizando os estilos visual e analítico. No terceiro encontro, este aluno, deixa explícito o estilo de pensamento matemático visual quando escreve que: *“para mim torna-se mais fácil enxergar onde cada reta está posicionada exatamente.”*

O único aluno que permaneceu manifestando unicamente o estilo de pensamento visual foi o mais velho da turma. Em conversas informais nos relatou que já tinha um diploma de curso superior e que agora estava tentando realizar seu sonho de ser engenheiro formado pela Escola de Engenharia Mauá. Uma conjectura, embora precoce, pois um estudo mais detalhado deveria

ser realizado, é que os alunos com mais idade e com mais experiências educacionais, têm uma resistência maior a mudança de estilo de pensamento.

Outro fato que notamos, é que 7 alunos que no primeiro encontro foram classificados no estilo de pensamento matemático integrado passaram para um determinado estilo, visual ou analítico, sendo que a maioria (5 dos 7) para o analítico.

Considerações Finais

Ao iniciarmos a investigação de doutorado em andamento, tínhamos, a princípio, duas indagações envolvendo os estilos de pensamento matemático dos calouros nos cursos de engenharia. Uma delas dizia respeito a quais estilos predominavam dentre tais alunos, já que pouco se encontrou na literatura a respeito deste assunto. A outra indagação era se, por meio da análise de resoluções de questões matemáticas solucionadas por tais estudantes, seria possível fazer conjecturas a respeito dos estilos de pensamento matemático manifestados pelos mesmos. Embora a literatura afirme que não se pode confundir estilos de pensamento com estratégias de resolução, levantamos a hipótese de que, como Ferri considerou em seus trabalhos com os alunos do ensino básico, também no ensino superior as resoluções podem dar indícios dos estilos de pensamento matemático empregado pelos estudantes. Foi a partir desta hipótese, verificada por meio de uma fase que chamamos de exploratória, que planejamos os instrumentos para a coleta de dados utilizados nesta pesquisa.

Por meio dos dados coletados nos dois encontros analisados neste artigo, notamos a predominância do estilo de pensamento matemático analítico, que pode ser, em parte, reflexo do modo como as aulas são ministradas e da influência que o professor exerce nos alunos. Uma conjectura inicial é que tal estilo é mais privilegiado no ensino dito tradicional, levando os alunos, mesmo aqueles que tenham características do estilo visual ou integrado, a procurarem apresentar tal estilo. Tal conjectura é feita com base nas reflexões de Ferri (2012), que salienta que os estilos de pensamento matemático sofrem influências do meio, especialmente dos professores que, mesmo inconscientemente, determinam de que maneira os alunos devem procurar mobilizar suas habilidades para aprender Matemática e para responder questões desta ciência.

Percebe-se, muitas vezes, que os professores acabam levando os alunos a ficarem com a impressão de que estratégias envolvendo o estilo de pensamento matemático visual servem apenas para dar uma ideia a respeito da solução de um problema, mas que esta, para que seja entendida de fato como uma solução formal, deve sempre ser apresentada na forma analítica. É preciso, portanto, que, durante suas aulas, os professores proponham atividades e utilizem materiais que desafiem os estudantes a mobilizarem suas habilidades matemáticas de maneiras diversificadas, isto é, a recorrer a diversos estilos de pensamento matemático. Não basta, ao trabalhar com determinado conteúdo, o docente propor apenas questões de um mesmo tipo, às quais os alunos serão capazes sempre de resolver recorrendo àquele estilo de pensamento que é de sua preferência; é preciso que estes percebam a necessidade de reestruturar a maneira como irão mobilizar suas habilidades matemáticas, ou seja, adotar estilos de pensamento aos quais, em geral, não costumam recorrer.

Dando continuidade à pesquisa, analisaremos os protocolos produzidos pelos alunos durante o segundo encontro, nos atentando especialmente para as produções daqueles estudantes que, conforme indicam os primeiros resultados apresentados, manifestaram estilos de pensamento matemático distintos no primeiro e no terceiro encontro. Verificaremos se é possível

perceber alteração no estilo já ao final do segundo encontro e, caso isso tenha de fato ocorrido, se o tema designado para cada um dos alunos nesta situação e a maneira como o mesmo foi proposto teve alguma influência nesta modificação de estilos de pensamento matemático mobilizados. Além disso, caso existam alunos para os quais a alteração de estilo de pensamento matemático ocorreu somente após a aplicação completa do método *jigsaw*, procuraremos analisar como se deu, nesta mudança, a interferência de cada uma das fases de tal método. Outro fato que pretendemos verificar com a análise das produções escritas do segundo encontro diz respeito aos alunos classificados, tanto no primeiro quanto no terceiro encontro, com o estilo de pensamento matemático analítico. Será que, nestes momentos, tais estudantes manifestaram o estilo analítico por eles envolverem a resolução de questões semelhantes àquelas apresentadas em sala de aula, quando o professor, em geral, privilegia o estilo analítico? E será que tais alunos, quando colocados diante de uma situação diferente, como a que foi proposta no segundo encontro, poderão mobilizar um estilo diferente do analítico? Finalmente, diante dos primeiros resultados obtidos, percebemos a necessidade de realizarmos entrevistas com alguns estudantes, visando tentar entender o motivo da maioria desses alunos manifestar, predominantemente, o estilo analítico. Não encontramos na literatura estudos sobre os estilos de pensamento matemático de alunos com perfis semelhantes aos sujeitos desta pesquisa. As investigações que mais se aproximam do universo considerado neste trabalho são as de Burton, que trabalhou com matemáticos. Entre tais sujeitos, o estilo de pensamento matemático privilegiado foi o integrado e não o analítico.

Referências e bibliografia

- Aronson, E. (2000). Jigsaw in 10 Easy Steps. Retirado de <http://www.jigsaw.org/steps.htm>. Acessado em: 10 dezembro 2013.
- Burton, L. (1999). Mathematics and their Epistemologies - and the Learning of Mathematics. In: *European Research in Mathematics Education I*, Edited by Inge Schwank, 87 – 102, Osnabrück. Retirado de <http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/cerme1-proceedings-1-v1-0-2.pdf>. Acessado em: 09 dezembro 2012.
- Ferri, R. B. (2003). Mathematical Thinking Styles - an Empirical Study. *Third Congress of the European Society for Research in Mathematics*, CERME 3, Bellaria, Itália. Retirado de http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG3/TG3_BorromeoFerri_cerme3.pdf. Acessado em: 20 maio 2013.
- _____, R. B. (2012). Mathematical Thinking Styles and Their Influence on Teaching and Learning Mathematics. In: *12th International Congress on Mathematical Education*, Program Name XX-YY-zz (pp. abcde-fghij), COEX, Seoul, Korea. Retirado de http://www.icme12.org/upload/submission/1905_F.pdf. Acessado em: 20 maio 2013.
- Frota, M. C. R. (2010). Perfis de Estilos de Aprendizagem Matemática de Estudantes Universitários. In: *Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC-SP*. v.12, n.1, pp.89-110.
- Johnson, D. W. & Johnson, R. T. (1999). Making Cooperative Learning Work. *Theory into Practice*, v.38, n.2, pp. 67-73. Retirado de http://www.proiac.uff.br/sites/default/files/documentos/cooperative_learning_johnsonjohnson1999.pdf. Acessado: em 10 setembro 2013.
- Santos, M. C. S. C. (2011). Aprendizagem Cooperativa em Matemática: um estudo longitudinal com uma turma experimental do Novo Programa de Matemática do 2º ciclo do Ensino Básico. 617 f. Tese (Doutor em Ciências da Educação) – Faculdade de Ciências Humanas e Sociais da Universidade do Algarve.

- Sternberg, R. J. & Zhang, L.-F. (2005). Styles of thinking as a basis of differentiated instruction. *Theory into Practice*, 44(3), 245–253. Retirado de <http://hub.hku.hk/bitstream/10722/45445/1/128798.pdf?accept=1>. Acessado em: 10 fevereiro 2013.
- Vieira, P. N. B. (2000). Estratégias Alternativas de Ensino-Aprendizagem na Matemática: estudo empírico de uma intervenção com a aprendizagem cooperativa, no contexto do ensino profissional. 271 f. Dissertação – Faculdade de Psicologia e Ciências da Educação da Universidade do Porto.

O uso de materiais manipulativos no ensino da subtração: uma experiência com material dourado e dinheiro chinês

Ariana Costa **Silva**

Universidade Estadual da Paraíba

Brasil

arianasilvamme@gmail.com

José Lamartine da Costa **Barbosa**

Universidade Estadual da Paraíba

Brasil

lamartine.barbosa@uol.com.br

Resumo

O estudo teve por objetivo analisar o desenvolvimento de alunos de uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental, acerca do ensino da subtração com números naturais, assim como verificar a compreensão do algoritmo utilizado nesta operação matemática fazendo uso de materiais manipulativos. O trabalho desenvolvido neste estudo caracteriza-se por uma abordagem metodológica qualitativa, assumindo a forma de um estudo de caso. A análise dos resultados revelou que os alunos possuíam pouco conhecimento nas operações matemáticas e utilizavam de procedimentos mecânicos e termos inadequados para resolver as questões. As atividades com materiais manipulativos geraram a oportunidade de cada um criar sua própria estratégia, corrigindo automaticamente os erros de maneira descontraída e consolidando o conhecimento matemático. O estudo permitiu considerar que o uso desse material traz a oportunidade de aprender de forma diferente, atraente, divertida e significativa, pois ao manipular objetos e ao representar dados de uma situação fazendo uso dos mesmos os alunos podem perceber as regularidades e algumas propriedades existentes no ensino da matemática.

Palavras chave: materiais manipulativos, subtração, algoritmo, educação, matemática, ensino fundamental.

Abstract

The study aimed to analyze the development of students in a class of 5th grade of elementary school, about teaching subtraction with natural numbers, as well as checking the understanding of the algorithm used in this mathematical operation making the use of manipulative materials. The work developed in this study is characterized by a qualitative methodological approach, taking the form of a case study. The results revealed that the students had little knowledge in operations mathematical and they used mechanical procedures and inadequate terms to resolve the issues. The Activities with manipulative materials generated the opportunity to create your own strategy, automatically correcting the errors in a relaxed way and consolidating mathematical knowledge. The study allowed us to consider that the use

of this material brings the opportunity to learn in the different way, attractive, fun and meaningful way, as the manipulate objects and to represent data from a situation making the use of these objects, the students may perceive regularities and some existing properties in mathematics

Key words: manipulative materials, subtraction, algorithm, education, mathematics, elementary education.

Introdução

Neste artigo, trazemos uma pesquisa realizada com alunos do 5º ano do Ensino Fundamental, de uma escola pública, situada da cidade da Baía da Traição no estado da Paraíba, Brasil, em busca de investigar a usabilidade de materiais manipulativos na compreensão dos conceitos envolvidos no ensino da subtração com números naturais. Sabemos que a matemática tem se mostrado como um dos grandes desafios no processo de ensino aprendizagem, os alunos que tantas vezes não a reconhecem no seu dia a dia, acreditando que não a utilizam e apresentam dificuldades e baixo desenvolvimento nas atividades da sala de aula, mas muitos destes se saem muito bem nas atividades da própria vida, onde não percebem a matemática inserida neste contexto. Assim, muitos alunos diante das situações do cotidiano, fazendo uso de algum material concreto, resolvem as situações de maneiras diferentes das que resolveriam na escola, com lápis e papel, consideram as duas experiências como universos diferentes, a escola da vida, não fazendo alguma relação entre elas. Ao se referir a esses fatos Zunino (1995, p.68) afirma que os mesmos “coloca em evidência a necessidade de tomar sempre como ponto de partida situações-problema reais ou hipotéticas no lugar de apresentar contas carentes de significado”.

O presente trabalho se justifica por ser o assunto continuação de pesquisa e experiência vivida em uma turmas do Ensino Fundamental, onde foi possível pensar sobre nosso fazer pedagógico e buscar novos elementos que melhore esse quadro. Esta necessidade de busca foi sentida por meio dessa experiência, onde os alunos mesmo já tendo visto as quatro operações aritméticas ainda apresentavam dificuldades e principalmente quando se tratava de utilizar o algoritmo da subtração, não compreendendo o procedimento utilizado e alguns quando utilizavam este algoritmo nem ao menos sabiam explicar o real significado, fazendo tudo de forma mecânica. A presente pesquisa surgiu com o desejo de descobrir como os materiais manipulativos poderiam ajudar os alunos a construir um conhecimento significativo acerca do ensino da subtração. Objetivando o desenvolvimento de atividades com materiais manipulativos, que proporcionem a melhoria no ensino e na compreensão dos procedimentos utilizados na subtração com números naturais, faremos a análise de procedimentos utilizados pelos alunos antes e depois da utilização de materiais manipulativos na resolução de situações-problema envolvendo as ideias associadas à subtração.

O ensino da subtração

As operações de adição e subtração aparecem muito cedo na vida das crianças, antes mesmo da vida escolar elas já entram em contato com essas operações, mas não as reconhecem formalmente e as mesmas são as primeiras que a criança tem contato na escola. A subtração não é uma operação tão simples quanto à adição, que demonstra-se ser afetivamente prazerosa. Quando nos referimos à subtração podemos afirmar que a mesma apresenta-se dessa forma por vários motivos, pois possui um aspecto afetivo contrário já que tantas vezes esta relacionada a situações de perda, envolvendo também ideias bastantes diferentes e ainda utilizam um

vocabulário nas situações que acabam confundindo o raciocínio das crianças e induzindo-as a erros.

Toledo e Toledo (2009) afirmam tais dificuldades citando as pesquisas de Piaget que comprovam que de início o raciocínio das crianças se concentra em aspectos positivos da ação, percepção e cognição. Os aspectos negativos, como inverso e recíproco, só são construídos mais tarde. Neste mesmo contexto Kamii (2005) também enfatiza os estudos de Piaget, onde afirma que a subtração é um desenvolvimento que surge após a adição. Para a autora não devemos tratar das duas operações como se apresentasse com o mesmo grau de dificuldades. A mesma relata um estudo feito com estudantes da primeira e quarta série (atual segundo e quinto ano), onde cada criança era solicitada a responder questões oralmente e passar para a próxima, neste estudo as respostas destas crianças foram divididas nas categorias de “sucesso” para as crianças que respondia em até três segundos e “sem sucesso” para os demais. Nessa entrevista foram entregues aos alunos continhas de adição e subtração, as contas de adição apareciam no início e as de subtração ao final. A maioria das crianças da categoria “sem sucesso” deu resposta correta, porém levou mais do que três segundos para pensar e descobrir o resultado.

Os resultados desta pesquisa levaram Kamii (2005) a perceber que nenhuma das crianças participantes da pesquisa obteve sucesso na subtração sem o ter obtido na adição. E que quando o conhecimento nas operações de adição é bastante significativo a fluência na subtração melhora consideravelmente, contudo os dados dos resultados levaram os autores a concluir que as crianças deduzem as diferenças a partir de seus conhecimentos das somas.

Por isso, para a autora tem-se a necessidade de estimular procedimentos aditivos antes dos subtrativos para que os alunos possam ter uma maior maturidade e facilidade de compreensão ao lidar com as operações de subtração. O professor dos anos iniciais não precisa ter pressa em apresentar as situações de subtração, pois o aluno precisa antes de tudo compreender toda ideia e procedimento relacionado à adição para que a subtração seja um conhecimento que surja simultaneamente com a adição, onde o aluno pode ainda compreender a relação inversa entre adição e subtração.

Nos anos iniciais a compreensão da subtração de números de dois dígitos apresenta-se de maneira difícil para os alunos nesta fase, muitas vezes porque os alunos ainda não possuem a habilidade de pensar simultaneamente sobre adição e subtração, já que não é tão fácil para eles pensar apenas na subtração. Estas dificuldades podem se dar pelo fato da criança ainda não ter construído uma compreensão acerca do valor posicional do número, por isso trabalhar com materiais que facilite a compreensão do valor posicional do número pode ajudar a criança a entender o procedimento utilizado quando tiverem que lidar com subtração de números com dois ou mais dígitos anos seguintes. Para Kamii (2005, p.76),

As crianças que inventam seus próprios procedimentos para operações de muitos dígitos esforçam-se para resolver problemas, mas esse esforço lhes traz diversão, confiança e alegria, algo que é muito diferente da monotonia emocional que observamos nas crianças que são ensinadas a “transportar” e a “emprestar”.

Quando as crianças compreendem de fato o valor posicional dos números elas sabem que não tem sentido usar o termo “pedir emprestado” e resolvem os problemas de maneira gratificante, agradável porque entendem todo o procedimento utilizado. Dessa forma, diante de todo entendimento passam a criar os próprios procedimentos e não resolvem de maneira mecânica porque assim lhes foram apresentados. Em relação ao aprendizado através de meios

concretos, podemos destacar o relato da vivência de autores quando afirmam que alunos do terceiro ano ao trabalhar a soma e a subtração com o uso de blocos de base 10 apresentaram mais conhecimento de valor posicional do que os alunos de quarto, quinto e sexto ano que receberam instrução tradicional (Golbert, 2002).

Acreditamos ser muito importante o processo de a criança representar situações que envolvam a subtração agindo sobre objetos para realizar cálculos e ter um raciocínio cada vez mais significativo, desta forma ela também irá perceber que não tem sentido tirar 9 objetos de 5 nos números naturais. Torna-se extremamente importante que desde muito cedo os alunos trabalhem bastante com as situações de subtração antes de lidar com sua representação formal, pois antes do início da vida escolar da criança ela já utiliza conhecimentos matemáticos sem perceber e tantas vezes ao iniciar as atividades escolares encaram a apresentação de técnicas de como resolver as continhas de subtração, daí não compreendem tais procedimentos e percebem que não fazem uso do que sabem, como consequência disto passam a não gostar da disciplina.

Representando com objetos dados de uma situação problema antes do uso de uma operação ou de algoritmos permite uma maior compreensão do aluno contribuindo para que não ocorram futuros “traumas” na disciplina. Desta forma cada um terá uma maior possibilidade de superar as dificuldades que ao longo dos estudos possam aparecer. O trabalho com materiais manipulativos permite que a criança resolva as situações sem ter a preocupação de descobrir qual a “conta” que deve utilizar.

Toledo e Toledo (2009, p.114) afirmam que “exigir a sentença matemática muito precocemente serve apenas para deixar a criança insegura quanto a seu próprio modo de resolver as questões”. Sabemos que tantas vezes a criança é incentivada a utilizar sempre os algoritmos estudados nas aulas de matemática para resolver problemas, assim ela muitas vezes passa a não confiar na sua própria capacidade de raciocinar e resolver questões. Quando se trata de trabalhar com números bem maiores os materiais concretos podem ser inviáveis, daí surge a necessidade de conhecer suficiente o algoritmo da subtração, mas neste estágio o aluno já deverá ter bastante segurança ao utilizar os algoritmos, para poder percebê-los como um instrumento auxiliar e adequado na resolução daquele problema.

Das diferentes ideias associadas à subtração estão as ideias de tirar, comparar e completar, porém a ideia de tirar é a que mais permanece em nossas mentes, podendo ser associada facilmente as operações da subtração. Na ideia de tirar apresenta-se um todo e tira uma parte, já na ideia de comparar apresentam-se quantidades independentes ou compara-se uma parte com o todo e logo após com outra parte. Os alunos apresentam maior dificuldade nessa ideia, como mostram os exemplos a seguir:

- Marcos tem 20 postes, 17 são do flamengo e o restante de outros times, quantos são de outros times?
- Juliana tem 13 bombons e sua prima tem 7, quantos Juliana tem a mais que sua prima?

No segundo exemplo as crianças tantas vezes associam o vocabulário utilizado com as operações de adicionar. Em relação à terceira ideia associada à subtração, a de completar, temos que, é necessário completar uma parte para chegar ao todo como:

- Quero comprar uma blusa de 35 reais, mas tenho apenas 26 reais. Quanto falta?

Nesta situação geralmente a criança vai completando como fazemos quando trabalhamos com troco, dificilmente as crianças, até mesmos os adultos, recorrem ao algoritmo da subtração neste caso.

As crianças podem apresentar diferentes formas de resolver questões ao lidar com situações-problemas que envolvam as ideias de subtração. Zunino (1995) apresenta em seu estudo feito com crianças dos anos iniciais, a fim de avaliar os efeitos produzidos nas mesmas pelas práticas escolares que geralmente estão em uso, várias situações e indagações feitas a estes alunos. Em uma das situações que a autora levou podemos destacar a seguinte: “Um ônibus leva 24 passageiros, em uma parada desceram 17. Quantos passageiros ficaram ?”

Os alunos apresentaram várias maneiras de resolução dentre elas podemos destacar um aluno que ao resolver a situação citada utilizou os dedos de sua mão esquerda pra contar até 17 e para continuar até 24 utilizou os dedos de sua mão direita, ao ser questionado sobre o porquê de utilizar os dedos de uma mão para uma contagem e os da outra para o restante, afirmou que os dedos da mão direita estavam relacionados aos passageiros que não faziam parte dos 17, ou seja, que não estavam no ônibus. Algumas crianças podem ainda resolver este tipo de situação utilizando a adição, somando para encontrar quanto falta aos 17 para se tornar 24. Nesta mesma pesquisa outra criança compreende de imediato e logo responde, quando faz uso de material concreto, utilizando feijões, a mesma contou 24 e depois retirou 17, quando outro aluno diante da mesma situação, mas desta vez sem material concreto a disposição, resolve a questão desenhando 24 pontinhos para representar os passageiros e apagando os 17 para representar os que desceram.

Foi possível perceber que ao utilizar material concreto o aluno compreenderá de forma rápida e agradável a ideia relacionada à operação, ou quando não há material a disposição precisamos permitir que o aluno crie seu próprio método de resolução, pois representado com objetos dados de um problema podemos tornar o aprendizado mais significativo.

A autora apresentou outra situação, que desta vez não estava relacionada à ideia de “tirar”. Foi apresentada aos alunos uma figura de dois cestos contendo diferentes quantidades de ovos, questionando quantos ovos havia a mais no primeiro cesto que no segundo. Neste caso vimos que diferentes de nós adultos, que automaticamente usaríamos a continha de subtração, as crianças interpretaram de outra forma, para elas simplesmente teriam que indicar qual dos dois cestos continha uma maior quantidade de ovos. Ao analisar as questões apresentadas pela autora percebemos que os alunos logo identificam a subtração quando a ideia associada à mesma é a de “tirar”, já que na segunda situação os mesmos não identificaram a operação, pois não envolvia a diminuição da quantidade de elementos.

Daí, podemos refletir que não devemos apresentar procedimentos prontos para serem utilizados pelos alunos, procedimentos que nós atualmente utilizamos, pois resolveríamos todas por meio de uma operação que é a subtração, onde será mais eficaz permitir que os alunos criem os próprios métodos de resolução, já que cada um resolve de maneira diferente por se tratar de situações diferentes. Diante deste tema Zunino (1995, p. 37) pôde concluir que,

É necessário então levar em conta que o fato de que uma criança resolva de uma determinada maneira uma situação específica de subtração (ou de soma) não significa que ela resolverá da mesma maneira outra situação que envolva a mesma operação.

Não podemos generalizar acreditando que todos os alunos resolverão situações seguindo o mesmo caminho ou que compreenderão o procedimento apresentado pelos professores de

maneira significativa, devemos considerar os diferentes aspectos que levam uma criança a uma determinada conclusão, aceitando e socializando os diferentes métodos utilizados por eles para que desta forma tenham a oportunidade de criar suas próprias estratégias gerando mais autonomia e confiança entre eles.

O uso de materiais manipulativos

Trazemos neste estudo o uso de Materiais Manipulativos no ensino da Subtração com Números Naturais, como recurso facilitador da aprendizagem. Sabemos que esses materiais existem desde muito cedo na vida de qualquer criança, elas sempre estão manipulando objetos para representar alguma situação, até mesmo quando ainda não estão na escola e ao iniciar sua vida escolar começam a utilizar objetos para representar cálculos, onde as mesmas na educação infantil aprendem de forma lúdica, fazendo associações e manipulando objetos. Diferentes termos são utilizados por autores quando se referem aos materiais manipulativos. Apresentaremos então concepções de alguns autores no que se refere a este recurso.

Lorenzato (2010, p.18) utiliza Material didático (MD) quando se refere aos materiais concretos enfatizando ser “qualquer instrumento útil ao processo de ensino-aprendizagem. Portanto, MD pode ser um giz, uma calculadora, um filme, um livro, um quebra-cabeça, um jogo, uma embalagem, uma transparência, entre outros”. O autor quando fala de material manipulativo diz ser um material didático (MD) manipulável.

Os materiais manipuláveis também são conhecidos como objetos ou coisas que o aluno é capaz de sentir tocar, manipular e movimentar. Ainda neste contexto Bezerra (1962) fala sobre materiais didáticos como sendo o quadro-negro, o giz, o apagador, os livros, instrumentos, os aparelhos e todo meio áudio-visual, pois são acessórios usados pelo professor para realizar a aprendizagem ou pelo o aluno durante o processo de aprendizagem.

Contudo, mesmo diante dos diferentes termos dados a esses materiais, eles vêm sendo utilizados com um objetivo comum no processo educativo, contribuir com uma aprendizagem significativa, gerando conhecimento, para que surjam descobertas nas salas de aula, para que os conteúdos não sejam simplesmente apresentados de maneira mecânica. Nesta ideia concordamos com Passos (2010) quando considera todos esses materiais como mediadores que contribuem e facilitam a relação professor/aluno/conhecimento.

Podemos perceber que nos dias atuais há uma enorme preocupação sobre o uso de materiais manipulativos, também denominados materiais concretos, o mesmo é um tema muito discutido na área de Educação Matemática. Segundo Fiorentini e Miorim (1993), relatam no artigo “Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática” que os professores estão cada vez mais procurando inovações para a prática docente, uma prova disso é o numero de docentes que vem aumentando cada vez mais nos encontros, conferencias e cursos. Porém ainda enfatizam que muitos não têm conhecimento das reais razões pelas quais são usados os materiais concretos e os jogos na sala de aula. Considerando o processo de ensino aprendizagem dos alunos quando fazem uso de materiais manipulativos, defende-se que “[...] os conceitos matemáticos que eles devem construir, com a ajuda do professor, não estão em nenhum dos materiais de forma que possam ser abstraídos deles empiricamente” (PASSOS, 2010, p. 81.)

De fato, muitos professores não reconhecem o verdadeiro sentido da metodologia dos jogos e Materiais Manipuláveis ou concretos em sala de aula, e muitas vezes o uso desses

recursos acabam se tornando uma simples brincadeira. Alguns professores usam materiais manipulativos com o intuito de tornar as aulas diferentes, alegres, utilizando-os como um caráter motivador, mas apenas estes motivos não são suficientes, pois precisamos definir nossos objetivos na sala de aula, que acreditamos não estar relacionado com uma simples diversão, mas sim a uma ferramenta importante para um processo de ensino e aprendizagem com qualidade.

O professor de matemática deve repensar sua prática e ter cuidado ao utilizar materiais manipulativos na sala de aula, aplicados a determinados conteúdos matemáticos, pois esses materiais devem ser um caminho para a aprendizagem, pois permitem tornar as aulas mais interessantes, atrativas, participativas e principalmente significativas para os alunos.

Metodologia

O trabalho desenvolvido neste estudo caracteriza-se por uma abordagem metodológica qualitativa, assumindo a forma de um estudo de caso, já que o mesmo consiste quando o pesquisador tem o interesse de observar a ocorrência de um ou mais casos, que por meio dos dados obtidos será feito um relatório e reflexões de exemplos que estimulem a compreensão do fato estudado. Esta pesquisa foi constituída não só pela participação, mas também pela discussão, fazendo avançar o debate das questões abordadas no problema de pesquisa. Foi realizada uma sequência didática a fim de descobrir quais seriam as consequências do uso dos jogos em turmas do Ensino Médio, ou seja, analisar os resultados obtidos após o uso desse recurso nas aulas de Matemática.

Em relação aos procedimentos para aquisição e análise de dados é importante ressaltar que este estudo se caracteriza por apresentar uma tipologia de estudo de caso simples, com única interação dos dados, que segundo Yin (2005) é um estudo intensivo das variáveis envolvidas, a partir de uma ampla compreensão do assunto investigado.

Dessa forma, o estudo seguiu importantes etapas metodológicas. Realizamos uma atividade diagnóstica, que tinha por objetivo verificar o conhecimento prévio dos alunos diante do tema abordado, foi baseado em quatro situações-problema envolvendo as ideias da subtração, onde os alunos dispostos de seus saberes resolveriam as situações-problema utilizando a operação que julgasse correta ou necessária. Na turma a qual foi realizada a intervenção estavam matriculados 24 alunos, porém apenas 16 participaram. Os alunos se organizaram em duplas, onde ao longo da resolução os mesmos responderiam os questionamentos feitos pela pesquisadora. Para complementar esta primeira atividade, realizamos um questionário entrevistando os alunos, visando ampliar informações acerca do procedimento utilizado ao lidar com questões que envolvem a ideia da subtração, desta vez seria respondido individualmente, trazendo opinião e esclarecimentos sobre a resolução das situações-problema.

Na segunda etapa realizamos uma atividade trabalhando as ideias associadas à subtração, a mesma também foi composta por quatro situações, contudo teríamos neste momento todo o auxílio da pesquisadora que trazia o material dourado¹ como auxiliar na elaboração das respostas, que por meio deste material procuramos desenvolver habilidades nos processos de subtração, assim como a compreensão do algoritmo, enfatizando o processo das trocas e evitando

¹ Material dourado – Conjunto de peças contendo um cubo com dez placas, uma placa com dez barras, barras formadas por 10 cubinhos e cubinhos, que auxiliam na compreensão das operações matemáticas.

termos inadequados. Esta atividade teve como objetivo principal verificar o desenvolvimento dos alunos no processo de ensino-aprendizagem ao fazer uso de um material manipulativo.

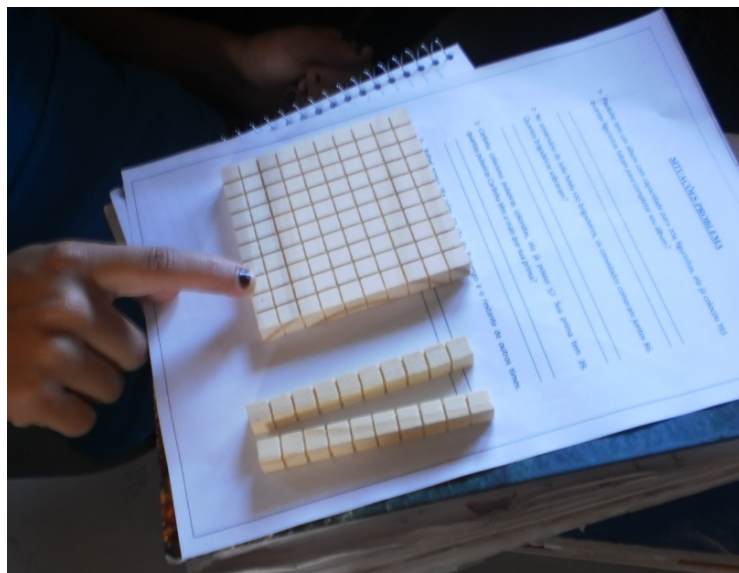


Figura 1. Subtração com o Material Dourado.

Ainda como complemento da segunda etapa, em outro momento, realizamos uma atividade composta também por quatro questões envolvendo as ideias da subtração. A resolução foi mediada com o uso do dinheiro chinês². Para que também fosse verificado o envolvimento e desenvolvimento dos alunos ao manipularem um objeto concreto. Nossa intenção diante da sequencia didática foi verificar e acompanhar o desenvolvimento do conhecimento matemático dos alunos quando fazem uso de algum material concreto antes da representação formal dos algoritmos matemáticos.

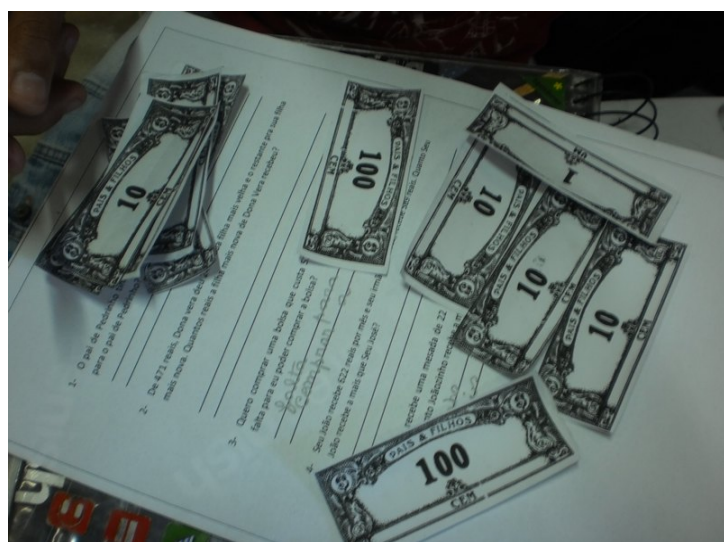


Figura 2. Subtração com Dinheiro Chinês.

² Dinheiro Chinês – notas de 1,10 e 100 que motiva as crianças a realizarem o cálculo mental e auxilia na compreensão dos métodos utilizados nos algoritmos.

Análise dos resultados

Ao iniciar a pesquisa fizemos um estudo aprofundado do tema, foi neste momento que nos colocamos no lugar dos alunos, pensando como socializariamos o conhecimento, quais seriam as principais dificuldades, como receberiam todas as atividades, pois tudo foi um desafio por se tratar de uma turma onde a pesquisadora não atuava, já que não lecionava na mesma, mas o problema que nos inquietava nos motivou a ir adiante para conhecer e auxiliar os alunos no conhecimento matemático.

Durante a aplicação do diagnóstico os alunos mostraram insegurança ao resolver as questões, não relacionando-as com a operação abordada, a subtração. A maior parte dos alunos percebia quando a ideia relacionada era a ideia de tirar, mas a de comparar foi a que mais eles apresentaram dificuldade. Nos procedimentos utilizados por eles usaram lápis e papel para desenhar bolinhas ou riscos e quando estavam diante da ideia de completar utilizavam os dedos da mão ou recorriam ao cálculo mental. Embora tentassem fazer as contas utilizando o algoritmo, não conseguiam obter resultados satisfatórios, não compreendiam o procedimento, não realizavam as trocas necessárias e utilizavam termos inadequados como “pedir emprestado”. Nenhum aluno utilizou o processo de trocar dezenas por unidades ou centenas por dezenas ao realizar a conta de subtração na atividade diagnóstica.

A atividade com o material dourado trouxe uma enorme concentração dos alunos, os mesmo pegavam nas peças com muita atenção, tiveram um enorme cuidado para não perde-las e quando estavam representando os dados das situações com as peças foi possível observar que refletiam a cada momento fixando os olhares nas peças e analisando como realizariam a subtração. Daí, podemos concluir que esta atividade abriu um caminho para novas descobertas auxiliando-os na criação de estratégias, gerando confiança e autonomia, coisas que eles não apresentaram no pré-teste. Embora esperássemos outro procedimento, até então a maioria desses alunos não realizavam as trocas necessárias ao lidar com a subtração, mas diante das peças e utilizando o processo de contagem realizaram a operação corretamente, pois no material dourado estava visível a quantidade de peças, já que podiam ver as barrinhas das dezenas contidas na placa da centena e os cubinhos referentes às unidades, tratava-se de um material físico, empírico, então alguns não realizavam a troca, como por exemplo, de uma placa para dez barrinhas, automaticamente contavam marcando as peças com o dedo e davam o resultado.

Já no que se trata da atividade com o dinheiro chinês, isso não aconteceu, os alunos apresentaram dificuldades na resolução das situações-problema fazendo uso desse material. Ao realizar a subtração não compreendiam, por exemplo, que podiam retirar 89 de 120, diante das notas que possuíam, lembrando que com o material dourado muitos não realizavam trocas para efetuar a subtração, mas percebiam a quantidades de unidades contidas em cada peça, já com o dinheiro chinês só conseguiam quando trocavam uma nota de cem por dez notas de dez, daí retiravam os 89. Este fato nos chamou muita atenção, pois acreditávamos que com o dinheiro chinês tudo seria mais compreensível. Aproveitamos essa oportunidade para enfatizar o processo das trocas, já que com o material dourado muitos não realizaram, auxiliando qual o procedimento a ser utilizado diante de situações que envolvem subtração com zero no minuendo ou com um numero menor, evitando os termos inadequados utilizados por eles e tornando mais compreensivo o algoritmo da subtração.

Considerações finais

O presente estudo nos trouxe uma ampla visão dos diferentes procedimentos utilizados pelos alunos no processo educativo do conteúdo abordado. Os alunos faziam questão em participar, temos uma enorme concepção que esse fato deu-se por sentirem que estavam aprendendo algo real, lógico, onde eles mesmos criavam os próprios métodos e não seguiam procedimentos mecânicos sem ao menos compreender. A experiência nos proporcionou uma reflexão de como a ação é importante no processo de aprendizagem, é isso que precisamos nas aulas de matemáticas, de mais ação, e não de permitir que os alunos se mantenham sentados ouvindo ou escrevendo, eles precisam agir, interagir com os demais colegas e com o professor, trocar ideias é uma principal forma de intervir num mundo que esta em constante mudança.

Torna-se extremamente importante que, paralelamente ao desenvolvimento de atividades fazendo o uso de materiais manipulativos, jogos e/ou materiais concretos, o cotidiano pedagógico favoreça atividades que estimulem o pensar matemático, onde os alunos possam reconhecer os conteúdos abordados nas atividades presentes do dia a dia de cada um, fazendo as possíveis relações e descobrindo as regularidades existentes. Neste trabalho fica o enorme desejo de dar continuidade aos estudos dentro do eixo números e operações, provocando reflexões sobre diferentes ideias envolvidas, oferecendo e adquirindo subsídios para a prática pedagógica.

Referências bibliográficas

- Bezerra, M. J. (1962). *O material didático no ensino da matemática*. Diretoria do Ensino Secundário / Campanha de Aperfeiçoamento e Difusão do Ensino Secundário / MEC. Rio de Janeiro.
- Fiorentini, D., & Miorim, M.A. (1993). Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da matemática. *Boletim SBEM*, 4, 7. São Paulo,
- Gil, A. C. (2011). *Métodos e Técnicas de Pesquisa Social* (6ª ed.). São Paulo: Atlas.
- Golbert, C. S.(2002). *Novos rumos na aprendizagem da Matemática*. Porto Alegre: Mediação.
- Kamii, C. (2005). *Crianças pequenas continuam reinventando a aritmética: implicações da Teoria de Piaget*, 2. Porto Alegre: Artmed.
- Lorenzato, S. (2010). O Laboratório de ensino de matemática e materiais didáticos manipuláveis. In S. Lorenzato (org.), *O Laboratório de ensino de matemática na formação de professores*. 3. Campinas, SP: Autores Associados.
- Passos, C. L. (2010). Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In S. Lorenzato (org.), *O Laboratório de ensino de matemática na formação de professores*. Campinas: Autores Associados.
- Toledo, M., & Toledo, M. (2009). *Teoria e Prática de Matemática: como dois e dois*. São Paulo: FTD.
- Yin, R. K. (2005). *Estudo de Caso: Planejamento e métodos* (Tradução: Daniel Grassi. 3). Porto Alegre: Bookman.
- Zunino, Delia Lerner de. (1995). *A matemática na escola: aqui e agora*. 2. Porto Alegre: Artmed.

Representaciones dinámicas como apoyo para la interiorización del concepto de transformación lineal

César Fabián **Romero** Félix
Cinvestav, Instituto Politécnico Nacional
México

cesar.rfelix@gmail.com

Asuman **Oktaç**
Cinvestav, Instituto Politécnico Nacional
México

oktac@cinvestav.mx

Resumen

Se presentan algunas observaciones y ejemplos de las ventajas brindadas por las representaciones dinámicas para interiorizar concepciones Acción referentes a transformaciones lineales, en el sentido de la teoría APOE (Arnon et al., 2014). El análisis presentado es parte de una investigación de doctorado sobre la construcción mental del concepto de transformación lineal apoyada en la coordinación de registros de representación (Duval, 1999) estáticos y dinámicos. Se identifican a las representaciones dinámicas de vectores y transformaciones del plano como facilitadores del mecanismo de interiorización para lograr concepciones de linealidad; tras la aplicación de actividades de enseñanza apoyadas fuertemente en representaciones gráficas dinámicas.

Palabras clave: Álgebra lineal, transformaciones lineales, teoría APOE, registros de representación, representaciones dinámicas, GeoGebra.

Introducción

El presente reporte muestra algunos de los avances de una investigación doctoral acerca de las construcciones mentales en el aprendizaje de las transformaciones lineales del plano en un entorno de aprendizaje dinámico creado con GeoGebra para estudiantes universitarios. La propuesta de enseñanza está dirigida por un análisis teórico desde un punto de vista que intenta coordinar las teorías de representaciones semióticas de Duval (1999) y la teoría APOE (Arnon et al., 2014). Las actividades de enseñanza que se diseñaron fueron apoyadas generalmente con el uso de applets creados en GeoGebra con la intención de evitar las complejidades inherentes a los registros de representación formales, así como evitar y superar diversas dificultades de aprendizaje reportadas por otros investigadores (ver Soto et al., 2012).

Proponemos que para el caso específico de transformaciones lineales podría ser conveniente iniciar la construcción del concepto partiendo de acciones que utilicen representaciones gráficas dinámicas en un ambiente diseñado con GeoGebra. Partiendo de las construcciones gráficas y favoreciendo la articulación de registros, se espera obtener concepciones independientes de los registros, concepciones que puedan ser utilizadas para cualquier representación.

Mediante la interacción con ambientes dinámicos se buscó que los estudiantes tuvieran la oportunidad de construir el concepto de transformación lineal gráficamente, a través de la interacción con sus representaciones para resolver problemas. Las actividades que los estudiantes tenían que realizar favorecían además la coordinación de los registros gráfico y algebraico, estableciendo conexiones entre ambas representaciones y buscando constantemente pasar de un registro a otro para resolver problemas.

Se describirán en este reporte algunas observaciones acerca del papel de las representaciones dinámicas durante la transición de concepciones Acción a concepciones Proceso de las propiedades de linealidad y de transformación lineal. Estas observaciones se realizaron a partir del análisis de un examen diagnóstico, observaciones de clase, examen posterior a la enseñanza y entrevistas individuales.

Concepto de referencia

La definición escrita del concepto transformación lineal tiene algunas variaciones en los libros comúnmente usados en cursos de Álgebra Lineal. Podemos organizar las definiciones en dos categorías: las que utilizan dos propiedades de linealidad y las que presentan ambas propiedades de linealidad como una sola. Para facilitar un primer acercamiento simplificado del concepto a los estudiantes, decidimos tomar como referencia una definición que use dos propiedades; conocidas también como propiedades de linealidad. La definición aparece como sigue (adaptada de Friedberg, Insel & Spence, 2002, p. 65):

Definición: Sean U y V espacios vectoriales (sobre K). Llamamos una función $T: U \rightarrow V$ una **transformación lineal de U a V** si para todos $x, y \in U$ y $c \in K$ tenemos que

$$(1) \quad T(c \cdot x) = c \cdot T(x)$$

$$(2) \quad T(x + y) = T(x) + T(y)$$

Nos parece pertinente aclarar en qué sentido la anterior es considerada como referencia. No se busca directamente que los estudiantes puedan reproducir la definición escrita como aquí aparece (aunque sería conveniente), se busca que los estudiantes desarrollen las concepciones a las que las expresiones escritas de manera formal y en lengua natural representan. De tal manera, sería satisfactorio que los estudiantes muestren haber construido tales concepciones de las propiedades 1 y 2 incluso si su dominio de los lenguajes mencionados no les permitiera exteriorizar la definición escrita como aparece en el libro.

Elementos teóricos

Teoría APOE

APOE estudia las concepciones logradas a través de la abstracción reflexiva, idea que surge de Piaget, quien la identificaba como:

El principal mecanismo para las construcciones mentales en el desarrollo del pensamiento y [al mismo tiempo] el mecanismo mental por medio del cual todas las estructuras lógico- matemáticas son desarrolladas en la mente de un individuo (visto en Arnon et al., 2014, p. 6).

Por tal razón, éste es el tipo de abstracción que se debería buscar en el aprendizaje de matemáticas, pero no es el único posible. Piaget describía también abstracciones empíricas y pseudo-empíricas. Las diferencias entre los tres tipos de abstracción se pueden describir en

términos de la actividad de los sujetos: la *abstracción empírica* genera conocimiento a partir de la observación de Objetos externos, como la idea de color o peso que se obtienen después de percibir a través de los sentidos esas características intrínsecas de los Objetos; la *abstracción pseudo-empírica* va un paso más allá, después de actuar sobre los Objetos el sujeto les atribuye propiedades que no eran originalmente parte de estos, como la cardinalidad de un conjunto obtenida tras la correspondencia uno a uno con elementos de otro conjunto que el sujeto ha ordenado; por último, la *abstracción reflexiva* consiste en la coordinación general de acciones, obtener propiedades a partir de acciones mentales o físicas, de manera consciente pudiendo incluir la separación entre la forma y el contenido obteniendo abstracciones cada vez en un plano superior del conocimiento (visto en Dubinsky, 1991, pp. 97-99).

La teoría APOE extiende el análisis de la abstracción reflexiva en el aprendizaje de matemáticas, describiendo las etapas de conocimiento mencionadas por Piaget mediante las construcciones mentales que le dan nombre a la teoría: Acción, Proceso, Objeto y Esquema; describiendo además los mecanismos para desarrollar cada una de éstas. Describe la construcción del conocimiento matemático, en términos generales, como una progresión de estructuras mentales lograda a través de los mecanismos de abstracción reflexiva. Las relaciones entre estas estructuras y mecanismos son representadas con el siguiente diagrama.

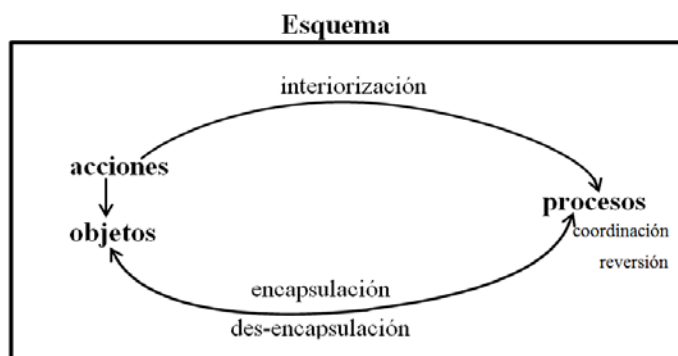


Figura 1. Estructuras mentales y mecanismos para la construcción de conocimiento matemático (Arnon et al., 2014, p. 18).

La teoría propone que el desarrollo de las construcciones mentales sigue un ciclo auto-retroalimentado, logrando con cada iteración del ciclo concepciones de mayor complejidad y generalidad (Arnon et al., 2014, pp. 18-26). Se puede tomar como inicio del ciclo Acciones sobre Objetos ya existentes, éstas son realizadas de manera externa al sujeto manteniendo siempre los mismos pasos y en el mismo orden. Una concepción Acción de transformación lineal permitiría a un sujeto sólo “puede tomar dos vectores particulares de U y sumarlos mediante la adición definida en este espacio, determinar su imagen bajo T como elemento de V , obtener un nuevo elemento de V y comparar los vectores resultantes” (Roa-Fuentes & Okaç, 2010, p. 104).

La manera inicial de desarrollar concepciones Proceso es la interiorización de las acciones. Teniendo una concepción Proceso dejan de ser necesarios los estímulos externos para poder realizar las Acciones y se obtiene también control interno sobre las partes de éstas; se puede imaginar u omitir pasos y revertir el orden de éstos mentalmente. También se pueden coordinar concepciones Proceso para formar nuevos Procesos, por ejemplo el Proceso de duplicación (multiplicar por dos) se puede coordinar con el Proceso de números naturales para obtener el Proceso de números pares.

Enfrentándose a la necesidad de aplicar acciones a lo que se percibe como un Proceso se inicia el mecanismo de *encapsulación*; con ella los Procesos dejan de ser acciones interiorizadas y llegan a ser entes por sí mismos, Objetos. Cuando se ve el Proceso como un todo, al cual se le pueden aplicar Acciones, y se construyen estas Acciones para aplicarlas de manera externa o mental, se dice que el Proceso ha sido encapsulado en un Objeto. Para el caso de transformación lineal, la encapsulación permite realizar composiciones y también poder ver a las transformaciones como elementos de algún conjunto y con ello formar un espacio vectorial de transformaciones lineales entre otros dos espacios (Roa-Fuentes & Oktaç, 2012, p- 227).

Los mecanismos y construcciones mentales mencionados son utilizados para plantear posibles caminos específicos de la construcción mental de conceptos matemáticos. Tomando como prerequisite algunas construcciones mentales se propone una progresión de procedimientos de abstracción reflexiva, por ejemplo una iteración del ciclo de la Figura 1, con los que se podría llegar a la concepción deseada.

Elementos de la teoría de representaciones semióticas y de representaciones dinámicas

La teoría de Duval (1999) se dirige principalmente a aquellos sistemas de signos que pueden ser clasificados como registros de representación, en palabras del autor:

Para que un sistema semiótico pueda ser un registro de representación, debe permitir las tres actividades cognitivas fundamentales ligadas a la semiosis.

La formación de una representación identificable como una representación de un registro dado ... Esta formación implica una selección de rasgos y de datos en el contenido por representar.

El tratamiento de una representación es la transformación de esta representación en el registro mismo donde ha sido formada... Naturalmente, existen reglas de tratamiento propias de cada registro.

La conversión de una representación es la transformación de esta representación en una representación de otro registro conservando la totalidad o una parte solamente del contenido de la representación inicial (Duval 1998, p. 4).

Los registros de representación utilizados para representar los conceptos del Álgebra Lineal han sido analizados en diversas investigaciones. Resaltamos que “nos encontramos ante una falta de consenso sobre las definiciones de registros específicos” (Ramírez, Romero & Oktaç, en prensa) ya que “Pavlopoulou habla de un registro gráfico y uno algebraico, mientras que Soto analiza dos registros gráficos y dos algebraicos distintos” (p. 7). En este reporte nos referimos sólo a un registro algebraico y a las representaciones gráficas de vectores como flechas que parten de la intersección de dos rectas, llamadas comúnmente ejes.

Por otro lado, utilizamos también representaciones que originalmente nos podían ser tomadas en cuenta desde el punto de vista de la teoría de registros de representación; las representaciones dinámicas obtenidas a través de GeoGebra. Estas representaciones permiten representar Objetos que no podrían representarse en un ambiente estático, los Objetos variables, como la “c” en la expresión “ $3c+2$ ” o la “V” en “ VER^2 ”. Desde el planteamiento de la teoría de registros de representación se han desarrollado nuevos tipos de representaciones gracias a los avances tecnológicos: las representaciones dinámicas continuas (ver Moreno, Hegedus & Kaput, 2008). Teniendo estas representaciones dinámicas continuas en el registro gráfico podemos, por ejemplo, construir un vector en pantalla primeramente como un vector fijo y al arrastrar el extremo de tal vector se puede convertir en un vector variable.

En matemáticas, la diversidad de registros de representación es prácticamente evidente, aunque es generalmente considerada por algunos como útil pero finalmente trivial para el aprendizaje de matemáticas ya que la comprensión de algún objeto en una de sus representaciones sería suficiente para su utilización en cualquier contexto. Sin embargo, es muy frecuente el problema de encapsulamiento de los aprendizajes restringidos a los registros en los que estos se llevaron a cabo. El encapsulamiento obstaculiza la comprensión conceptual y “se manifiestan principalmente por el fracaso de la conversión en caso de no -congruencia y por la ausencia de transferencia de los conocimientos más allá de las situaciones estándar de aprendizaje” (Duval 1999, p. 60). Duval afirma que la diversidad de registros no es sólo una útil casualidad, sino que es necesario utilizarla para el desarrollo de concepciones, en sus palabras: **“la actividad conceptual implica la coordinación de los registros de representación... [ya que] la comprensión conceptual aparece ligada al descubrimiento de una invarianza entre representaciones semióticas heterogéneas”** (1999, p. 60).

La coordinación (o articulación) de registros consiste en la movilización y utilización conjunta, de los registros de representación semiótica. Ésta supone como condición principal la discriminación de las unidades significantes a poner en correspondencia en cada registro y se ve fuertemente afectada por los fenómenos de no congruencia entre representaciones. Con esta definición se podría suponer que sólo hay coordinación de registros cuando se utilizan varios explícitamente, sin embargo:

Un sujeto que ha desarrollado suficientemente la coordinación de los registros, muy bien puede atenerse a las representaciones de un sólo registro. Pero en realidad, él dispone potencialmente de representaciones que provienen de otros registros y que de manera latente permanecen asociadas a las que él utiliza (Duval, 1999, p. 67).

De tal manera, una persona que decida trabajar externamente con sólo un registro también podría estar ejerciendo una buena coordinación de registros al considerar este acercamiento como la manera más eficiente de llegar a la solución tomando en cuenta los datos que tiene, los tratamientos que podría realizar en otros registros disponibles y el tipo de solución a la que desea llegar.

La coordinación de registros de representación es vista por Duval como primordial para el aprendizaje de las matemáticas debido a que *“toda representación es cognitivamente parcial en relación con lo que ella representa”* (1999, p. 67). Por lo tanto, un aprendizaje realizado en un solo registro, o que privilegie alguno en particular, limita la posible comprensión de los contenidos matemáticos estudiados; “incluso si han sido movilizados varios registros, simultánea o sucesivamente, esto no acarrea su coordinación” (p. 72), lo que complica aún más la situación.

Uso conjunto de las teorías

La teoría de registros de representación no analiza construcciones y procesos mentales que no involucran directamente la utilización de representaciones externas, por tal razón nos parecen convenientes los desarrollos teóricos de APOE; principalmente sus resultados al utilizar los conceptos de abstracción reflexiva para analizar el pensamiento matemático avanzado. Encontramos varias investigaciones basadas en la teoría APOE que sirven para comprobar la utilidad de la teoría y de su ciclo de investigación para estudiar el aprendizaje del Álgebra Lineal, por ejemplo los trabajos de Roa-Fuentes y Oktaç (2010, 2012). Además, existe ya un acercamiento para el análisis del aprendizaje matemático que se apoya en ambas teorías:

Trigueros y Martínez-Planell (2010) utilizaron un marco compuesto por la teoría APOE y la teoría de representaciones semióticas para analizar el aprendizaje de funciones de dos variables.

Prevedemos que el uso coordinado de las dos teorías como un solo marco permitiría ganar precisión y entendimiento sobre varios aspectos del aprendizaje de las transformaciones lineales: sobre el desarrollo de las estructuras mentales, el papel de la semiosis en el aprendizaje y la naturaleza de varias dificultades de aprendizaje.

El papel de las representaciones dinámicas con respecto a las variaciones cognitivas

Consideramos posible que un uso inapropiado de registros de representación en el aprendizaje promueva la realización de abstracción pseudo-empírica en lugar de abstracción reflexiva. El aprendizaje generado por enseñanza mono-registro podría coincidir con las construcciones mentales desarrolladas por medio de la abstracción pseudo-empírica: forzosamente dependientes de los estímulos externos específicos de los cuales se obtuvieron, requiriendo la repetición de las situaciones originales para poder utilizar los conocimientos generados, en este caso, las mismas representaciones en las que se *aprendió* el concepto. Basados en los resultados sobre los aprendizajes fundados en la coordinación de registros, suponemos que las construcciones mentales desarrolladas de esa manera no caerían en la misma categoría que las obtenidas por la abstracción pseudo-empírica. La independencia de los registros obtenida por la comprensión integrativa nos lleva a suponer que el aprendizaje obtenido de esta manera coincidiría con las concepciones obtenidas por medio de la abstracción reflexiva o al menos facilitaría su desarrollo.

La teoría APOE no ignora la diversidad de tipos de representaciones en la actividad matemática y reconoce como un problema el equiparar la habilidad de conversión con el aprendizaje conceptual. Sin trivializar la actividad de conversión, se advierte que:

La razón por la cual los estudiantes tienen tantos problemas para realizar transiciones entre una representación y otra es que ellos van directamente de una representación a la otra (y así son enseñados) sin pasar por el significado cognitivo del concepto (dado por la descomposición genética)”(Arnon et al., 2014, p. 181).

El mismo Duval se expresa en contra de tal reducción, al hablar del modelo de aprendizaje centrado en la coordinación de registros, argumentando que “sería ingenuo creer que introducir ejercicios de conversión sobre algunos casos típicos sería suficiente para crear las condiciones favorables para la coordinación de los registros de representación en los alumnos (1999, p. 172). Él advierte que estos intentos no funcionarían para desarrollar la coordinación de registros y, por lo tanto, tampoco para el aprendizaje conceptual:

Se ve pues que las tareas de conversión [algorítmicas o de algunos prototipos] de representaciones no pueden favorecer la coordinación de los registros de representación. Y esto, porque toda actividad de conversión presupone la discriminación de las unidades significantes a poner en correspondencia en el registro de partida y en el de llegada” (Duval, 1999, p. 73).

La discriminación de las unidades significantes no se puede lograr por completo de manera algorítmica, es por ello que el tipo de enseñanza de conversiones mencionado por Dubinsky necesariamente falla. Esta discriminación, como un elemento de la semiosis, corresponde a un tipo de abstracción (Duval, 1999, p. 14), y de tal manera parece susceptible a ser mantenida como abstracción empírica o pseudo-empírica y no alcanzar la reflexiva. En los casos de aprendizaje algorítmico de las conversiones parece sencillo argumentar que no se trata

de abstracción reflexiva, pues se desarrolla simplemente con las características propias de los signos y no refiere a las características de los representados.

Duval (1999) aclara que “la discriminación de las unidades significantes de una representación, y la posibilidad de una aprehensión de lo que ella representa, depende de la aprehensión de un campo de variaciones posibles relativo a la significancia en un registro” (p. 74). En otras palabras, que la discriminación involucra *reflexiones* sobre los invariantes y las diferencias generadas al hacer variar las representaciones de un mismo concepto en diferentes registros para distinguir entre *variaciones cognitivas* y *neutras*: variaciones en los símbolos que cambian el *contenido* de la representación y las que no lo hacen. De tal manera, la discriminación de las unidades significantes, por medio de la identificación de las variaciones cognitivas, genera el establecimiento de relaciones entre las representaciones y los conceptos representados: conocimiento sobre las limitaciones y ventajas de cada registro en términos de posibilidades de representación y tratamiento.

Características de la Investigación

Las observaciones presentadas son parte de una investigación de doctorado sobre la construcción mental del concepto de transformación lineal apoyada en la coordinación de registros de representación estáticos y dinámicos. Ésta es a su vez desarrollada por medio de una adaptación del ciclo de investigación APOE (Arnon et al., 2014). El ciclo propuesto dentro del paradigma APOE se compone de tres etapas, mostradas en el siguiente diagrama.

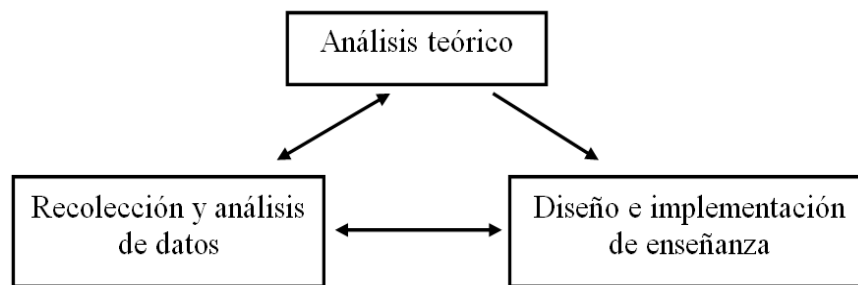


Figura 2. Ciclo de investigación (adaptado de Arnon et al., 2014).

Se está realizando prácticamente una iteración completa del ciclo propuesto, con algunas variaciones en la etapa de diseño e implementación de enseñanza y la inclusión de la teoría de representaciones semióticas para el análisis teórico. El diseño de enseñanza no fue realizado directamente con el ciclo ACE propuesto por APOE (Arnon et al., 2014, p. 57). Sin embargo, consideramos que la propuesta de enseñanza es compatible con el ciclo de investigación de APOE al promover activamente el desarrollo de las construcciones mentales guiadas por una descomposición genética.

Partimos de un análisis teórico con el que se plantea una descomposición genética preliminar que tome en cuenta el papel de las representaciones para el concepto de transformación lineal. La descomposición genética surge del análisis de libros de texto, resultados de investigaciones previas (principalmente Soto et al., 2012; Roa-Fuentes & Oktaç 2010, 2012) y experiencia práctica. Ésta se caracteriza por el desarrollo de concepciones Acción en un contexto gráfico dinámico y la búsqueda de coordinación de registros (en el sentido de Ramírez et al., 2013) desde los inicios del desarrollo conceptual para lograr construcciones independientes de las representaciones (Romero & Oktaç, 2014).

De tal manera, se propone desarrollar concepciones Acción y Proceso para las propiedades de linealidad, inicialmente dependientes de los registros utilizados. Posteriormente, mediante la articulación de los registros gráfico y algebraico, los Procesos dependientes a estos serían coordinados en nuevos Procesos que puedan ser utilizados en cualquier registro. Se espera que estos nuevos Procesos independientes de los registros sean más apropiados que los Procesos mono-registro para ser coordinados como Proceso de transformación lineal y posteriormente encapsulados y relacionados con otros Objetos.

Se seleccionaron estudiantes de Ingeniería Matemática del Instituto Politécnico Nacional para participar en la investigación, pues su perfil de estudiantes, las instalaciones de su institución, y el estilo del profesor encargado del grupo facilitaban la puesta en práctica del diseño de enseñanza. Durante las clases hubo etapas de trabajo individual y discusión en grupo sobre el problema general de clasificar las transformaciones del plano en dos categorías, las lineales y las no lineales.

La enseñanza diseñada se llevó a cabo en seis sesiones. Los ejercicios de clase y tareas extra-clase se presentaron a los estudiantes en una página web (<http://goo.gl/r29KMh>) para facilitar su acceso y permitir la repetición de las actividades para favorecer la interiorización; estos incluyeron actividades con applets de GeoGebra así como actividades para resolver *a mano* y situaciones para discutir en clase.

Los estudiantes interactuaron con applets pre-construidos en los que se podían manipular representaciones de vectores y transformaciones lineales y no lineales. Tomando como referencia representaciones tipo dynagraph (Goldenberg, Lewis & O'Keefe, 1992) en los applets se representan por separado los planos del dominio y co-dominio de las transformaciones (**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**); se puede manipular un vector del dominio mientras GeoGebra calcula la imagen de tal vector bajo alguna transformación y la muestra en el co-dominio, opcionalmente mostrando el rastro del vector manipulado así como el de su imagen; en algunos de los applets se puede además modificar la transformación de manera gráfica o algebraica.

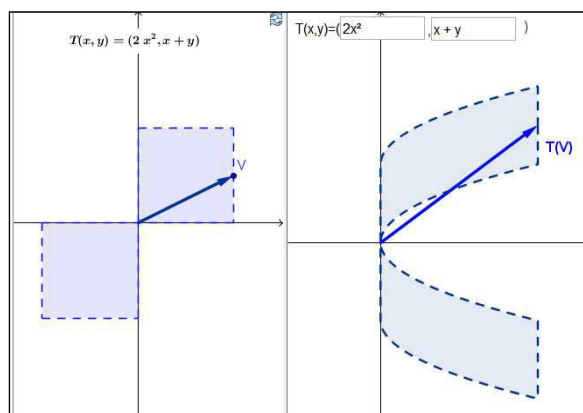


Figura 3. Ejemplo de applet sobre transformaciones lineales.

Los applets fueron diseñados para permitir la exploración libre de las situaciones representadas y por medio de las actividades de enseñanza se dirige la interacción para analizar las variaciones cognitivas de las representaciones. Mediante tal análisis, durante la resolución de problemas se definen por separado las propiedades de linealidad y se clasifican las transformaciones del plano según su cumplimiento como lineales o no lineales. Inicialmente los

estudiantes manipulan directamente las representaciones gráficas de vectores y posteriormente tienen que manipular las transformaciones, gráfica o algebraicamente, para lograr algún efecto gráfico particular en la imagen de una región fija. En la mayoría de problemas y situaciones planteadas a los estudiantes se propicia la coordinación de registros al plantear los problemas en uno y requerir la solución o interpretación en otro; por ejemplo, después de plantear las propiedades de linealidad gráficamente se les pide a los estudiantes expresar la propiedad 1 en el registro algebraico y analizar el hecho de que gráficamente la propiedad se refiere a dos características (colinealidad y proporcionalidad) mientras que en el registro algebraico se escribe como sólo una propiedad.

El papel de las representaciones dinámicas en el tránsito a la concepción Proceso

La interiorización hacia Procesos requiere generalmente de reflexión durante la repetición de las Acciones para llegar a abstraer los pasos de las Acciones; analizar una cantidad suficiente de repeticiones para lograr una versión interna de ellas. Las representaciones dinámicas hacen disponible una mayor cantidad de información, prácticamente de manera inmediata y continua a los estudiantes a través de manipulaciones intuitivas de las representaciones. Por tal motivo se aprecian como preferibles, en algunas situaciones, sobre las representaciones gráficas (no dinámicas) y las algebraicas ya que se alcanza la experiencia necesaria más rápidamente.

Por la naturaleza análoga, no discursiva ni formal de los registros gráficos, éstos dificultan la realización de tratamientos sin referirse a los Objetos representados. Los signos gráficos generalmente conservan más propiedades de los Objetos representados que las representaciones algebraicas (que son no-analógicas) (Duval, 1999, p. 34); de tal manera la formación o interpretación de las representaciones gráficas refiere a las propiedades de los Objetos más directamente. Esto facilita el análisis de las variaciones cognitivas, promueve la interpretación conceptual de las situaciones de aprendizaje y evita el abuso de representaciones vacías.

En nuestra investigación el caso más claro de desarrollo de la concepción Proceso mediante las representaciones dinámicas es el del estudiante A, mientras analiza en un applet la propiedad 2 para una transformación lineal. El estudiante A intentaba decidir gráficamente si la transformación T_3 era lineal, partiendo de que T_3 genera la imagen mostrada en la *Figura 4*, para esa región del dominio. El applet le permitía analizar cualquier vector de la región del dominio, moviendo la flecha V , y observar su imagen en el contra-dominio. Esta actividad se llevó a cabo después de desarrollar las concepciones Acción de las propiedades de linealidad y de haber definido las transformaciones lineales; se analizaron casos en los que las propiedades se cumplen por separado o de manera conjunta para algunos o todos los vectores del dominio.

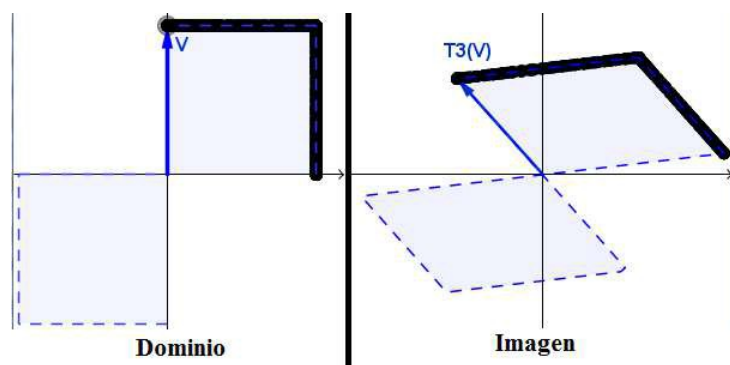


Figura 4. Uso de la concepción Proceso gráfica de la propiedad 2.

Después de analizar varios casos específicos y recordar la propiedad de que la imagen de un segmento de recta bajo una transformación lineal es otro segmento de recta, el estudiante A concluye que todas las sumas disponibles se encuentran en regiones similares a la marcada en el dominio de la Figura 4, por lo que sólo necesita comprobar que esas combinaciones lineales se conserven.

Entrevistador: Entonces ¿Qué hay que revisar? [para comprobar que T_3 sea lineal]

Estudiante A: Lo fácil sería checar esto: todo esto y esto [señala la región del dominio marcada en la Figura 4] en estas líneas va a caer la suma más escalares [combinaciones lineales]. Lo único que hay que checar es que las imágenes de todos estos cayeran en línea recta. Entonces, ya, así [realiza un movimiento cíclico recorriendo el dominio de la transformación un segmento de recta a la vez y señala el movimiento en las imágenes] podría ser una forma rápida de checar que es combinación [que las imágenes de combinaciones lineales son las combinaciones lineales de las imágenes] sólo esto.

Para llegar a esa técnica, el estudiante coordina los Procesos de las propiedades de linealidad y el de combinación lineal en uno, el Proceso de transformación lineal. Luego realiza conversiones al registro gráfico y aplica su concepción Proceso (que es transferible entre los dos registros) para llegar a una técnica que lo convence de la linealidad de la transformación que analiza. En el applet sólo se podía analizar un subconjunto del plano, pero la técnica desarrollada se podría extender con el fin de analizar suficientes vectores para deducir la linealidad de las transformaciones gracias a que está basada en el Proceso de transformación lineal.

Para otro estudiante, el estudiante C, las representaciones dinámicas sirvieron como un apoyo para alcanzar concepciones Proceso en varias ocasiones. Mientras trabajaba en la actividad recién mencionada, pero con la transformación T_2 del examen (Figura 5), inicialmente utilizó las representaciones gráficas como estáticas, probando las propiedades de linealidad para vectores fijos sin observar el dinamismo de las gráficas mientras las manipulaba y concluyó que la transformación era lineal. Sin embargo, al explicar su razonamiento en la entrevista, el estudiante C aprovecha que la representación dinámica le brinda más ejemplos para intentar mostrar la certeza de su deducción, sólo que esta era incorrecta debido a que inicialmente sólo comprobó las propiedades de linealidad para algunos vectores. A continuación se presenta cómo el estudiante C explicó su respuesta en la entrevista.

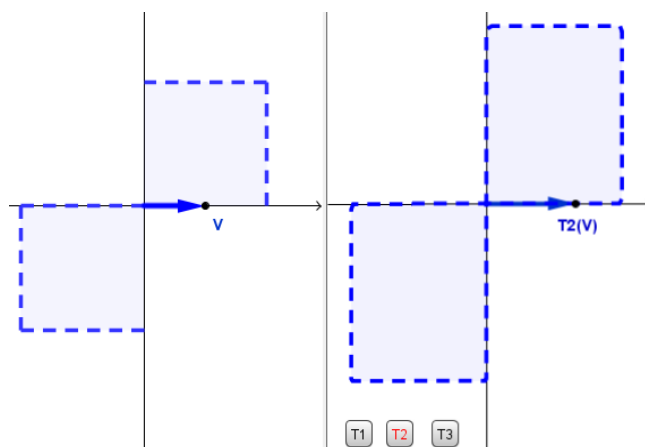


Figura 5. Transformación T_2 del examen.

Estudiante C: Aquí está V [elige un vector, aparentemente al azar] y si lo multiplicamos por un medio te queda como por aquí [calcula con el applet y señala la $\frac{1}{2} \cdot V$]

Entrevistador: ¿Y las imágenes?

Estudiante C: Checamos las imágenes y te da más o menos... si T(V) está aquí [señala la pantalla] entonces [señala donde esperaba que estuviera $T(\frac{1}{2} \cdot V)$ y observa que no coincide con la imagen calculada por el applet]... [pausa larga]

Estudiante C: ¡Ay!

Entrevistador: ¿Qué pasó?

Estudiante C: ¡Ah no!

Entrevistador: ¿Esto sí lo checaste cuando estabas haciendo el examen?

Estudiante C: No. ¡No es una transformación lineal!

Entrevistador: ¿Por qué?

Estudiante C: Porque no cumple con esa propiedad, la del escalar no cumple. No lo chequé...

El estudiante C en el examen había afirmado que la transformación era lineal, y había probado las propiedades de linealidad para algunos vectores, utilizando concepciones Acción. Después del extracto mostrado continúa desarrollando la concepción Proceso de la propiedad 1. Lo que resaltamos de este extracto es que las ventajas dinámicas y ejecutables de GeoGebra no se aprovechan de facto. En efecto, se pueden tratar a las representaciones como si fueran estáticas y desaprovechar la información disponible. El estudiante C siguió analizando la transformación T2 y encontró que la propiedad 1 se cumple para un subconjunto infinito de vectores del dominio, pero aun así no se cumple para todos y por lo tanto no puede ser llamada lineal.

En el problema del examen correspondiente al extracto anterior se analizan representaciones dinámicas como las mostradas en la Figura 5 para decidir si tres transformaciones distintas son lineales o no. En el siguiente problema se pide a los estudiantes aproximar la expresión algebraica de cada transformación y demostrar algebraicamente si las expresiones propuestas corresponden a transformaciones lineales o no. La mayoría de los estudiantes intentó realizar las demostraciones basados en las propiedades de linealidad y no en la manipulación ciega de representaciones, como utilizar el criterio de la fórmula general. Incluso estudiantes que durante el resto de la entrevista mostraron preferencia por estrategias algorítmicas desapegadas de los conceptos, partieron de las propiedades de linealidad para analizar las expresiones algebraicas. Interpretamos que se evita que las representaciones algebraicas sean vacías debido a su fuerte vínculo con las representaciones gráficas manejadas previamente. En este caso, desde el inicio las representaciones algebraicas se refieren a algo más que a los tratamientos posibles, y ese algo está suficientemente desarrollado para que una estrategia conceptual sea percibida como más útil.

Basados en observaciones como las mencionadas, proponemos que las representaciones gráficas dinámicas funcionan para los estudiantes como catalizadores del mecanismo de interiorización. Facilitan el análisis de las variaciones cognitivas al resolver problemas que involucren conversiones con otros registros, facilitando así la reflexión necesaria para la abstracción reflexiva.

Referencias y bibliografía

- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. DOI 10.1007/978-1-4614-7966-6. New York: Springer.

- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-126). Kluwer Academic Publishers.
- Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En F. Hitt (Ed.), *Investigaciones en matemática educativa II* (pp. 173-201). México: Cinvestav.
- Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Cali, Colombia: Universidad del valle. (Traducido por Myriam Vega Restrepo).
- Moreno, L., Hegedus, J., & Kaput, J. (2008). From static to dynamic mathematics: historical and representational perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 68(2), 99-111.
- Friedberg, S., Insel, A., & Spence, L. (2002). *Linear Algebra*. New Jersey: Prentice Hall.
- Goldenberg, P., Lewis P. & O'Keefe, J. (1992). Dynamic representation and the development of an understanding of function. En G. Harel, & E. Dubinsky (Eds), *The concept of Function: Aspects of Epistemology and Pedagogy* (pp. 235-260). Washington: Mathematical Association of America.
- Pavlopoulou, K. (1993). Un problème décisif pour l'apprentissage de l'algèbre linéaire: la coordination des registres de représentation. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 5, 67-93.
- Ramírez, O., Romero, C. F., & Oktaç, A. (2013). Coordinación de registros semióticos y las transformaciones lineales en el plano. En A. Ramírez. & Y. Morales (Eds.), *Memorias del I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe* (pp. 537-547). República Dominicana.
- Ramírez, O. Romero, C. F., & Oktaç, A. (en prensa). Coordinación de registros de representación semiótica en el uso de transformaciones lineales en el plano.
- Roa-Fuentes, S., & Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(1), 89-112.
- Roa-Fuentes, S., & Oktac, A. (2012). Validación de una descomposición genética de transformación lineal: Un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 15(2), 199-232.
- Romero, C. F. & Oktaç, A. (2014). Coordinación de registros y construcciones mentales en un ambiente dinámico para el aprendizaje de transformaciones lineales. Enviado para su publicación
- Soto, J. L., Romero, C. F., & Ibarra S. E. (2012). El concepto de transformación lineal: una aproximación basad en la conversión Gráfico-Algebraica, con apoyo de GeoGebra. En F. Hitt, & C. Cortés (Eds), *Formation à la recherche en didactique des mathématiques* (pp. 38-49). Quebec, Canada: Loze- Dion éditeur inc.
- Trigueros, M., & Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two-variable functions. *Educational Studies in Mathematics*, 73(1), 3-19.

Roles, organizaciones e interacciones en el aula de Matemáticas

Rossmajer **Guataquira** López
 Universidad Distrital Francisco José de Caldas
 Colombia

rossmajer@yahoo.com

Orlando **Lurduy** Ortégón
 Universidad Distrital Francisco José de Caldas
 Colombia

jolurduy@gmail.com

Resumen

En consideración de la importancia que tiene la historicidad y vivencias extraclases de los estudiantes en un proceso de estudio se está desarrollando esta investigación cualitativa de tipo descriptivo-exploratoria mediante la realización de un estudio de caso que permita recolectar la información necesaria para conceptualizar y tipificar elementos del entorno del aula en la escuela que afectan el conjunto de roles, interacciones y organizaciones en la clase de matemáticas, cuando se gestiona una secuencia de actividades sobre la representación de la función lineal en un grado octavo de un colegio colombiano. Ello, a partir de la teoría de significado del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática, el análisis cualitativo de contenido, la teoría fundamentada en los datos y el análisis semiótico de textos.

Palabras Clave: Roles, organizaciones, interacciones Relaciones estudiante(s)- profesor, normas socio-matemáticas, ambientes de aprendizaje.

Planteamiento del problema

En revisión teórica hecha se ha evidenciado que son escasos los estudios (por lo menos en Colombia y desde la perspectiva teórico metodológica del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática (EOS)) que han centrado su mirada en la descripción y análisis de la trayectoria interaccional y ecológica, puesto que muchos de los estudios realizados se enfocan (desde el EOS) en el estudio de la trayectoria cognitiva, epistémica y mediacional de los procesos de estudio.

Esto, a pesar de que enfoques como el del Interaccionismo Simbólico señalen que “las dimensiones culturales y sociales no son condiciones periféricas del aprendizaje matemático sino parte intrínseca del mismo” (Godino & Llinares, 2000), lo cual hace manifiesto la importancia de realizar estudios que permitan describir y caracterizar la trayectoria interaccional y ecológica en el aula de clase en torno al saber, como parte constituyente y no periférica del aprendizaje.

Y que grupos de investigación como las Rutas de Estudio y Aprendizaje (REA) por Lurduy (2005, 2012, 2013) han determinado que la interacción que tiene lugar en el aula está estrechamente relacionada con la labor misma del docente y del estudiante; por la influencia del entorno que los rodea y por la estructura social de la escuela en la que se lleva a cabo el proceso de aprendizaje.

Planteamientos que son complementados por los expuestos por Mockus, A., Hernández, C., Granés, J., Charum, J., & Castro, M. (1995) citando a Bernstein y Kuhn, al afirmar que los sujetos, a través de su experiencia en el aula, se ven obligados a regular y coartar, en el qué y en el cómo, sus posibilidades de conocimiento y comunicación, puesto que al ingresar a la escuela deben privilegiar en su lenguaje los significados y formas de expresión considerados como válidos por ésta, teniendo que relegar la experiencia de comunicación y de conocimiento que han adquirido extraescolarmente. Motivo por el cual, estos autores señalan como vital establecer

(...) las relaciones que pueden mantenerse o establecerse entre uno y otro polo (...) {para} intentar reducir la separación entre escuela y vida (...)” (p. 30) y superar los obstáculos epistemológicos postulados por Bachelard (citado por Mockus & otros, 1995, p. 31) en los que la adquisición del saber científico implica una ruptura con los conocimientos anteriores a la escuela.

Al respecto, los lineamientos curriculares de matemáticas y la Ley 115 de 1994 (Ley General de Educación en Colombia), estipulan que la educación escolar debe orientarse hacia “la visión nueva de la educación capaz de hacer realidad las posibilidades intelectuales, espirituales, afectivas, éticas y estéticas de los colombianos, que le garantice el progreso de su condición humana...” (MEN, 1998, p. 60). Un llamado que le otorga a la escuela -como escenario propicio para la educación- el deber de formar integralmente a sus estudiantes, dando igual importancia al aprendizaje de contenidos como a la formación integral de las personas.

Sin embargo, desde mi experiencia como estudiante y docente de matemáticas, he evidenciado que en los procesos de estudio, en muchas ocasiones, se dejan de lado las experiencias, necesidades, dificultades e intereses de los estudiantes, privilegiando la formación disciplinar de los mismos y faltando así a la formación integral de ellos, puesto que el docente “no puede pensarse un proceso de enseñanza-aprendizaje sin considerar las perspectivas concretas de los actores involucrados” (De Oliveira, 2009, p. 198), sin considerar “al otro” en su complejidad y particularidad, pues su historia y saberes extraclase son los que deben orientar y delimitar las estrategias didácticas y pedagógicas a seguir.

Dificultades y tensiones que motivan el planteamientos de las siguientes preguntas: ¿Cómo se pueden caracterizar los elementos del entorno del aula en la escuela que afectan el conjunto de roles, interacciones y organizaciones en la clase de matemáticas? ¿Qué aspectos del entorno del aula en la escuela afectan la relación estudiante-profesor, estudiante-estudiante y estudiante-saber de la clase de matemáticas? A las cuales se pretenden dar respuesta mediante la realización de ésta de investigación.

Antecedentes y fundamentación teórica

Para la contextualización de los factores del entorno educativo escolar que influyen en los roles, interacciones y organizaciones en el aula de clase, se realizó una revisión teórica respecto a la influencia del entorno en las relaciones profesor-estudiante, las normas que regulan dichas relaciones, y las metodologías de investigación implementadas en estudios de este tipo, encontrando lo que sigue:

En cuanto a la influencia del entorno en las relaciones profesor-estudiante, algunos autores (como Bejarano, 1990; Vayer, Duval & Roncin, 1993; Mockus, A., Hernández, C., Granés, J., Charum, J., & Castro, M., 1995; León, 1999; Doménech & Viñas, 1999; Bejarano 2000, citado por Lurduy, 2005; Pérez, 2000, citado por Lurduy, 2005; Duarte, 2003; Cid, 2004; Lurduy,

2005; Espitia, 2006; Tenti, 2007; Choque, 2009; De Oliveira, 2009; Bernal, 2013), describen y analizan los ambientes de aprendizaje, las relaciones y expectativas de los estudiantes y del profesor y la influencia de los conocimientos e historicidad del estudiante en los procesos de estudio.

Respecto a las normas que regulan dichas relaciones, los autores (tales como Coob & Bauersfeld, 1995; Chevallard, Bosh & Gascón, 1997; Gvirtz, 1997; Godino & Llinares, 2000; D'Amore, 2006; León & Calderón, 2003) plantean que el aula de clase está regulada por normas sociales, matemáticas, sociomatemáticas y por situaciones y contratos didácticos que de acuerdo a ciertas características dinamizan la clase de formas particulares.

Y finalmente, respecto a la metodología de investigación, se encontraron los planteamientos de Godino (1991-2014) y Lurduy (2012) cuya teoría da pautas para la realización del análisis de procesos de estudio y de contenido de texto y del análisis de roles, organizaciones e interacciones en el aula.

De tales referentes, se han tenido en cuenta principalmente los planteamientos del Enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática (EOS) en cuanto a los tipos de significado (personales e institucionales) y los elementos de significado de un objeto matemático (lenguaje, proposiciones, conceptos- definición, procedimientos, situaciones-problema, argumentos), puesto que de acuerdo con Godino, Batanero & Font (2008) con ellos se puede otorgar significado a los objetos matemáticos (para el caso de este estudio, se emplearán para dar significado a objetos interaccionales y organizacionales que tienen lugar en el aula de clase cuando se hace un proceso de estudio de un objeto matemático) en referencia a la acción que realiza una persona en relación con dichos objetos, ya que...

Son las situaciones las que dan sentido a los conceptos matemáticos, pero el sentido no está en las situaciones ni en las representaciones simbólicas. Es una relación del sujeto con las situaciones y los significados. Más precisamente, son los esquemas evocados en el sujeto individual por una situación o un significante lo que constituye el sentido de esta situación o este significante para el individuo (Vergnaud, 1990, citado por Godino y otros, 2008, p. 12).

También se ha empleado la teoría del enfoque de investigación conocido como Interaccionismo Simbólico, un enfoque acuñado por Herbert Blumer en 1938, cuyo supuesto básico es que “las dimensiones culturales y sociales no son condiciones periféricas del aprendizaje matemático sino parte intrínseca del mismo” (Godino y Llinares, 2000, p. 166) lo cual implica que la actividad matemática está fundamentada en los procesos culturales y sociales que tienen lugar en el aula de clase, ya que...

El profesor y los estudiantes constituyen interactivamente la cultura del aula; las convenciones y convenios tanto en lo relativo al contenido de la disciplina, como en las regularidades sociales, emergen interactivamente; y el proceso de comunicación se apoya en la negociación y los significados compartidos” (p. 166).

Estableciendo que en dicho proceso de aprendizaje -debido a las interacciones que tienen lugar en la clase de matemáticas y a la negociación de significado que se debe hacer- se pueden presentar diferentes patrones de interacción (extractivo y de discusión, de embudo y focalización, entre otros) y normas sociales y sociomatemáticas, que configuran algunas regularidades en <el frágil proceso de negociación de significados>, brindando así un marco conceptual útil para la investigación, puesto que permite categorizar los roles, las

organizaciones y las interacciones que se dan al interior del aula de clase, concluyendo su influencia e importancia en los procesos de formación al interior de los centros educativos.

De igual manera, se ha hecho uso de los planteamientos de Lurduy (2005) respecto a la descripción de las interacciones que tienen lugar en el aula de clases entre los protagonistas de dicho escenario (profesor, estudiante y saber) y la relación de tales interacciones con el ambiente de aprendizaje. Puesto que se establece que las interacciones en el aula se llevan a cabo mínimo entre dos agentes (uno de los cuales puede ser el profesor) y que tienen lugar en cualquier momento del proceso de estudio y por lo tanto, bajo un ambiente de aprendizaje, el cual es caracterizado por el autor como "... un todo organizado, donde espacios, saberes y personas se relacionan con el propósito de aprender..." (p. 60)

Así, las diversas relaciones entre el profesor-estudiante, estudiante-estudiante y estudiante- saber, son estudiados por Lurduy (2007-2009) mediante un análisis de los elementos físico/concretos (referidos a los medios físicos y distribución de tiempos) y de los elementos lógico/abstractos (referidos a los saberes y las relaciones entre los agentes del proceso de enseñanza), postulando que en estos últimos, se generan diversas influencias de los unos en los otros, que se ven reflejadas en los modelos de enseñanza establecidos y en las expectativas y actitudes que tiene cada agente del proceso con relación al objeto o sujeto con el cual se interactúa; cada una de éstas influencias son descritas por el autor, estableciendo cómo intervienen en los procesos de estudio.

Así mismo, se ha retomado a Mockus y otros (1995) quienes siguiendo a Wittgenstein, plantean, respecto a las interacciones comunicativas del aula de clase, que "(...) el aprendizaje del <<lenguaje escolar>> implica llegar a conocer (y a participar en) una serie de juegos lingüísticos cuyas reglas no están íntegramente manifestadas en los discursos correspondientes (...)" (p. 39), es decir, el aprendizaje implica conocer el significado que tienen las palabras de acuerdo al uso que se hace de ellas, demostrándose la comprensión del significado cuando se hace un "uso correcto" de las palabras en un juego lingüístico específico, o sea, un uso acorde con las reglas del juego.

Y que por tanto, pueden existir situaciones en las que el estudiante use palabras cuyos significados no estén acordes con los presupuestos de una disciplina formalizada y en consecuencia, el estudiante -al evidenciar su error-, se vea forzado a reubicarse en el juego lingüístico en el cual se le ha formulado la pregunta aceptando sin rodeos la explicación "correcta". Lo cual implica que...

No solo por la diferencia de <<nivel>> o de <<elaboración>> se distingue el lenguaje escolar de los lenguajes extraescolares. El lenguaje extraescolar se distancia del que se maneja en la escuela por la forma de relación entre las palabras y las acciones, por la conexión entre los conceptos y las estructuras teóricas, por la forma de la fundamentación y la demostración de las proposiciones y por las efectivas posibilidades de introducir modificaciones en las reglas y en el tratamiento de los elementos (...) (Mockus & otros, 1995, p. 43).

Marcándose una ruptura entre la comunicación escolar y la extraescolar, pues muchas de las dificultades escolares provienen de la incapacidad del estudiante para reconocer la especificidad de un juego y de la habilidad para aplicar las reglas aprendidas en otro. Así, cuando se opone la comunicación escolar con la extraescolar, se está supeditando un enorme caudal de juegos lingüísticos respecto a otro.

Y por tanto, se hace necesario acudir a los planteamientos de la educomunicación como “búsqueda de una construcción de caminos que lleven a la libertad de conocimiento y de expresión frente a la vocación conductista de la industria cultural” (De Oliveira, 2009) en la que la educación y la comunicación son concebidas como actividades grupales, donde se privilegia el dialogo consigo mismo y la experiencia personal y en la que el rol del educador (comunicador)

no será transmitir el conocimiento sino “facilitar y ayudar al grupo a compartir el conocimiento que tiene en su interior y a tomar del mundo nuevos conocimientos” (p. 197).

Diseño y metodología

Esta investigación cualitativa de tipo descriptivo-exploratoria se ha llevado a cabo a través de un estudio de caso y la implementación de una secuencia de actividades sobre la representación de la noción de función lineal en un grado octavo de un colegio privado del norte de la ciudad de Bogotá, con una población cuyo estrato socioeconómico oscila entre 3-6.

La mirada investigativa que tiene el estudio está centrada en la cara del tetraedro¹ que relaciona al polo cognitivo, didáctico y ecológico, puesto que entre ellos es donde se generan los roles, organizaciones e interacciones en el aula. Sin embargo, vale la pena aclarar que el cuarto polo del tetraedro: el saber, es tenido en cuenta dentro del estudio como el polo que configura el ambiente en el que se observa el objeto de estudio.

Para la configuración de este ambiente se ha realizado la adaptación y aplicación de una secuencia de actividades que ha sido pilotada y validada por estudiantes de doctorado, maestría y pregrado de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas y la cual ha sido diseñada para la enseñanza en grado noveno de la representación de la noción de función lineal desde el concepto del zoom, empleando los planteamientos de Guerrero, F., Sánchez, N. & Lurduy, O. (2006) respecto a la estructuración de situaciones didácticas de DECA y Brousseau.

Ahora bien, para el manejo adecuado de la información recolectada y dispuesta como textos se empleó el método de investigación propuesto por Lurduy (2013) adaptando procedimientos y estrategias comunes y complementarias de la Teoría Fundamentada en los Datos (TFD) (Glaser & Strauss, 1967; Strauss y Corbin, 1990, 2002), el Análisis Cualitativo de Contenido (ACC) (Bardin, 1986; Andreu, 2009) y el Análisis Semiótico de Textos (AST) (Abril, 1994; Fontanille, 2004) para con ello determinar unidades de análisis (muestreo, contexto y registro), la elaboración de criterios para el tratamiento de la información, codificación, categorización y plantillas de registro de la información.

Así la recolección de la información y la forma de emplear los métodos de recolección de la misma, estaban guiados por los criterios de establecimiento de las unidades de análisis y por los criterios para el tratamiento de la información. De acuerdo a ello se implementó la **observación directa** (realizada por la docente investigadora en el aula de clase de matemáticas y en el entorno del aula en la escuela) y **mediatizada** (haciendo uso de una cámara de video) de las fases de formulación, validación e institucionalización de la secuencia de actividades, ello, con el fin de que en la fase de formulación los estudiantes se acoplaran a la cámara de video dentro del aula y así, garantizar mayor fiabilidad y validez de los datos que serían recogidos en

¹ Ver Lurduy (2012). El Sistema Didáctico y el tetraedro didáctico. En: O.L. León (Ed.), *Pensamiento, epistemología y lenguaje matemático* (pp. 75-97). Bogotá, Colombia: Énfasis. Doctorado Interinstitucional en Educación.

las fases de validación e institucionalización (estas dos fases fueron elegidas como óptimas para recolección de los datos de acuerdo a la caracterización que hace Brousseau de cada una de estos momentos de la secuencia, pues es en ellos donde los estudiantes ejercen mayores procesos de interlocución, de argumentación y de organización en el aula). Este método de investigación fue implementado para tener un registro de aquello que sucedía dentro del aula de clase de matemáticas y de las interacciones, roles y organizaciones que tuvieron los estudiantes en la misma.

Los vídeos son transcritos y separados en unidades de texto que posteriormente son analizados haciendo uso del ACC, TFD y AST y en consecuencia, mediante la observación de la población se delimitó la información a un subconjunto denominado **unidad de muestreo**, con la cual se definió cuál de los tres octavos (cursos con aproximadamente 30 estudiantes) en los cuales se había implementado la secuencia de actividades sería el elegido para recolectar los datos.

En búsqueda de establecer diferencias en los elementos del entorno del aula en la escuela que afectan los roles, organizaciones e interacciones en la clase de matemáticas, se implementó la realización de **relatos periodísticos** por parte de los estudiantes durante el transcurso del día hasta que entraban a la clase de matemáticas, tales relatos estuvieron a cargo de nueve (9) estudiantes que conformaron una nueva unidad de estudio: la **unidad de contexto**.

Ésta se configuró de acuerdo a la información recolectada con la observación (directa y mediatizada de las clases) de la unidad de muestreo realizada por la investigadora en las fases de acción y formulación de la secuencia de actividades, pues allí se establecieron tres grupos de tres personas: un grupo con tres estudiantes de alto nivel de interacciones, roles y organizaciones en la clase de matemáticas, uno de tres estudiantes con nivel medio y otro, con tres estudiantes de nivel bajo con respecto a los aspectos descritos. El propósito que guió este tipo de selección de la muestra de contexto fue el de especificar y caracterizar qué factores dentro de la institución hacen que ciertos chicos se comporten con altos, medios y bajos niveles de roles, interacciones y organizaciones en el aula de matemáticas.

Éstos nueve estudiantes, mediante sus relatos, describen lo que ha pasado en su día dentro de la institución, especificando emociones, sensaciones, circunstancias, personas, expectativas, lugares y tiempos desde que salen de su casa hacia el colegio hasta que entran a la clase de matemáticas. La información brindada en estos relatos fue clasificada en una nueva unidad denominada **Unidad de Registro**, la cual está conformada por tres estudiantes, uno de cada subgrupo de la unidad de muestreo: aquellos que fueron más representativos de cada subgrupo. Los relatos de estos tres estudiantes fueron separados en unidades de texto que serán analizadas bajo las mismas técnicas de análisis empleadas por Lurduy (2013).

Los datos adquiridos con los relatos periodísticos de los estudiantes serán contrastados con los recolectados en el vídeo de las clases correspondientes a la fase de validación e institucionalización, y teniendo en cuenta el producto de dicho contraste se diseñará una entrevista semiestructurada que permita ampliar y/o ratificar información relacionada con los factores externos al aula dentro de la escuela con el fin de poder caracterizar y tipificar los factores que afectan los roles, interacciones y organizaciones en el aula de matemáticas.

Toda la información recogida es organizada y sistematizada a través de rejillas de información que permiten categorizar la información recolectada para posteriormente, caracterizarla. Éstas rejillas tienen en cuenta la información que se ha recopilado en el marco

referencial de este estudio respecto al análisis de los ambientes de aprendizaje, de las normas que regulan el aula matemática, los elementos del entorno que influyen en el aula de clase, los tipos y elementos de significado propuestos por el EOS y las rejillas propuestas por Lurduy (2013).

Resultados

Los resultados esperados al finalizar esta investigación son los siguientes:

- Proponer algunos elementos teóricos y metodológicos que permitan ampliar la comprensión de las relaciones en el aula de clase matemática.
- Aportar el diseño de instrumentos de categorización de elementos del entorno del aula en la escuela y su afectación en las relaciones escolares.
- Brindar elementos de caracterización respecto a los elementos del entorno del aula en la escuela que afectan la relación estudiante-profesor, estudiante-estudiante y estudiante-saber de la clase de matemáticas.
- Aportar elementos de conceptualización para la comunidad educativa en cuanto a las relaciones e interacciones en el aula de clase de matemáticas.

Discusión de resultados

Este estudio de investigación se está llevando a cabo bajo los criterios de pertinencia, validez y fiabilidad que exige el reporte de una experiencia descriptivo-exploratoria realizada por una estudiante de maestría en educación, sin tener la pretensión de generalizar los resultados que se obtengan para dar respuesta a las siguientes preguntas: ¿Cómo se pueden caracterizar los elementos del entorno del aula en la escuela que afectan el conjunto de roles, organizaciones e interacciones en la clase de matemáticas? ¿Qué aspectos del entorno del aula en la escuela afectan la relación estudiante-profesor, estudiante-estudiante y estudiante-saber de la clase de matemáticas?

El análisis de la información se realizará de acuerdo a los planteamientos de Lurduy (2013) en cuanto a la aplicación de una re-interpretación de algunas nociones y herramientas del análisis ontosemiótico, complementados con la adaptación que hace de la perspectiva semiótica peirceana. El procedimiento de segmentación, organización y sistematización de la información en los textos se llevará a cabo de acuerdo a la interpretación que este mismo autor hace de las propuestas de Abril (1994, citado por Lurduy, 2013), utilizando la codificación selectiva de la información, registro de comentarios en los textos y la dimensionalización cualitativa de la información en rangos y rasgos de la información.

Conclusiones

Dado que la investigación se encuentra en proceso de realización aún no se tienen conclusiones específicas de la misma, no obstante podemos señalar que mediante la realización de este estudio se espera identificar cómo se ven afectados los roles, organizaciones e interacciones en el aula de matemáticas por elementos del entorno del aula en la escuela, también se pretende poder describir las situaciones en las que son observados dichos roles, organizaciones e interacciones en la clase de matemáticas y así determinar los elementos característicos del entorno del aula en la escuela que los afectan; todo ello con el fin de conceptualizar y tipificar los elementos del entorno del aula en la escuela que afectan el conjunto de roles, organizaciones e interacciones en la clase de matemáticas cuando se gestiona una secuencia de actividades sobre la representación de la función lineal en grado octavo.

Limitaciones del estudio

Esta investigación se está llevando a cabo en Colombia en la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, por una estudiante de maestría en educación con énfasis en matemáticas y bajo la dirección de un Doctor en Educación Matemática. La recolección, organización, sistematización y análisis de la información se ha hecho de acuerdo al análisis cualitativo de contenido, la teoría fundamentada en los datos y el análisis semiótico de textos de acuerdo a una interpretación didáctica de la teoría del significado propuesta por el Enfoque Ontosemiótico (EOS) y el método de investigación propuesto por Lurduy (2013).

Además, cabe resaltar que el análisis de la información se ha restringido a una unidad de referencia de tres estudiantes de grado octavo y al análisis puntual de dos sesiones de clase de la secuencia de actividades implementada.

Referentes teóricos

- Colombia. Congreso General de la República. (1994). Ley 115 de 1994, por la cual se expide la Ley General de Educación. Bogotá: El Congreso, 1994.
- De Oliveira, I. (2009). Caminos de la comunicación: utopías, confrontaciones, reconocimientos. *Nómadas*, 30, 194-207.
- Godino, J. D., & Llinares, S. (2000). El interaccionismo simbólico en educación matemática. *Educación Matemática*, 12(1), 70-92. Consultado el 18 -03 -2010. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos-teoricos/Godino_Llinares_Interaccionismo.pdf
- Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2008). *Un Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemática*. España.
- Guerrero, F., Sánchez, N., & Lurduy, O. (Marzo, 2006). La práctica docente a partir del modelo DECA y la teoría de las situaciones didácticas. En M. Murillo (Coordinador), *Matemática como lenguaje para interpretar nuestro entorno*. Ponencia llevada a cabo en el V Festival Internacional de Matemática, Costa Rica.
- Lurduy, O. (2005). Algunos elementos conceptuales para la comprensión de la cultura del aula. Ambientes e interacciones de aprendizaje. *Cuadernos de investigación* No. 5. Rutas de estudio y aprendizaje en el aula. Grupo de investigación MESCUD. Editado: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Lurduy, O. (2007-2009). *El sistema didáctico y el tetraedro didáctico. Elementos para un análisis didáctico de los procesos de estudio* (Trabajo de investigación doctoral, no publicado). En: "Evaluación de las competencias para el análisis y la reflexión didáctica en estudiantes para profesor de matemáticas". Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.
- Lurduy, O. (2012). *El tetraedro didáctico como modelación de los procesos de estudio de las matemáticas en el aula*. DIE-UD. Bogotá.
- Lurduy, O. (2013). Conceptualización y evaluación de las competencias para el análisis, reflexión y semiosis didáctica. El caso de los estudiantes para profesor de matemáticas. *Revista Científica*, 16, 87-108. Recuperado de: <http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/revcie/article/view/4025>
- MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de matemáticas*. Ministerio de Educación Nacional.
- Mockus, A., Hernandez, C., Granés, J., Charum, J., & Castro, M. (1995). Articulación entre conocimiento escolar y conocimiento extraescolar. En I. Sánchez (Coord. Ed.), *Las fronteras de la escuela: articulaciones entre conocimiento escolar y conocimiento extraescolar* (1ª ed., pp. 27-48). Lugar: Cooperativa Editorial Magisterio.

Subjetividad del profesor de Matemática. Discursos que circulan

Alex Montecino

Universidad de Aalborg

Dinamarca

montecino@learning.aau.dk

Resumen

Se busca investigar, desde los distintos discursos que circulan, al profesor de matemáticas, focalizándose en cómo se constituye en sujeto dentro de condiciones temporeo-espaciales particulares. Se tiene como preguntas de investigación: cuáles son las regularidades discursivas y cómo éstas fabrican las condiciones para subjetivar al profesor. Se pone en operación herramientas teóricas propuesta por los trabajos de Foucault; Deleuze; y Pais y Valero. El material analizado será documentos publicados por la OCDE e investigaciones publicadas en el *Journal of Mathematics Teacher Education*. Por lo tanto con este trabajo se busca vislumbrar cómo se está sujetando y subjetivando al profesor de matemáticas desde el deber ser y deseado de la sociedad globalizada y moderna.

Palabras claves: Subjetivación, profesor de matemáticas, discursos, prácticas, fabricación de subjetividad.

Introducción

Se reconoce que ciertas ideas que hoy en día tomamos como verdaderas han surgido en configuraciones epistemológicas de las ciencias educativas frente a lo que se define como problemáticas de la investigación en educación matemática (Valero & García, 2014), estas configuraciones epistemológicas están estableciendo discursos y prácticas dentro de un entramado en donde la investigación, como conocimiento experto, favorece a la configuración de lo que se dice y se piensa que debe ser el profesor de matemáticas, conduciendo al establecimiento de verdades sobre el profesor de matemáticas, dando forma a una imagen del profesor, una imagen idealizada. Además, instituciones internacionales, como la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) y el Banco Mundial, instauran iniciativas e ideas que guían a los diferentes países hacia determinados intereses, conformando así lo deseado por la sociedad moderna y globalizada. Éstas iniciativas e ideas, a su vez, están favoreciendo a la configuración de una imagen del profesor de matemáticas. Esta imagen del profesor se conformará como un nodo dentro del entramado en el cual se constituye la subjetivación del profesor.

Se puede evidenciar la existencia de ciertas regularidades o resonancias en los discursos que circulan sobre el profesor de matemáticas. Donde gran parte de estas regularidades muestran una centración sobre las prácticas y conocimientos del profesor. Los discursos se encuentran compuestos de enunciados y enunciaciones (Foucault, 1971, 1980), los cuales expresan, en palabras de Valero y García (2014): visiones deseadas sobre los distintos sujetos involucrados en la educación; el papel de la educación matemática en la construcción de un mundo mejor; y

algunas de las verdades que se establecen en las diversas prácticas de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas escolares.

El profesor de matemáticas toma relevancia, ya que, es el responsable de transmitir y enseñar a las nuevas generaciones un conocimiento que es considerado como valioso y útil. Además está favoreciendo a la fabricación de un sujeto lógico y racional, el cual se ajuste a las necesidades y demandas de la sociedad moderna del siglo XXI. La educación matemática conforma uno de los muchos nodos que configuran el entramado en el cual una persona es subjetivada y su importancia recae en el valor que se le otorga a la matemáticas para la explicación de fenómenos y el desarrollo del conocimiento, además por su cualidad de ser objetiva y racional

Por lo tanto, lo que se busca en este trabajo es problematizar los discursos que circulan sobre el profesor de matemáticas y cómo éstos propician prácticas que favorecen a la fabricación de subjetividades y condiciones que nos permite pensar al profesor de una forma particular, además de vislumbrar la formación de determinados dominios en el que el conocimiento se edifica y el poder se ejerce. Lo cual se realizará mediante un análisis discursivo (Pais & Valero, 2012), desplegando herramientas teóricas desde marcos Foucaultianos y Deleuzianos, en los últimos documentos publicados por la OCDE y los artículos publicados en el último número del *Journal of Mathematics Teacher Education*.

Estrategia analítica

Dentro de la educación matemática, se reconoce que el conocimiento matemático es poderoso y empodera a quien lo posee (Valero, 2008), además este conocimiento dota a la persona de herramientas y habilidades para poder hacer frente a diversas labores y problemas de la vida diaria y de su contexto, forjando en el sujeto una racionalidad que propicia una forma de comprender y entender lo que le rodea, en otras palabras, “pensar matemáticamente proporciona un medio poderoso para comprender y controlar la propia realidad social y física” (Noss y Hoyles, 1996 en, Lundin, 2012), lo cual es primordial para el sujeto racional, objetivo, universal que encarna al ciudadano cosmopolita Moderno (Valero & García, 2014).

Como ejemplo de lo antes mencionado, la OCDE elabora discurso sobre la enseñanza de las matemáticas, habilidades del estudiante y competencia del profesor, tales como:

Muchas naciones de todo el mundo han llevado a cabo amplias reformas del plan de estudios, la instrucción y las evaluaciones con la intención de preparar mejor a todos los niños para las demandas de educación superior de la vida y el trabajo en el siglo 21. ¿Cuáles son las habilidades que los jóvenes necesitan para tener éxito en este mundo cambia rápidamente y qué competencias necesitan los profesores, a su vez, para enseñar con eficacia esas habilidades? (OCDE, 2012, p. 12).

Tradicionalmente las matemáticas se enseñan a menudo en un mundo matemático abstracto, utilizando el formalismo primero, retirado de contextos auténticos, y desalentando a los estudiantes que no ven su importancia [...], en el siglo 21, los estudiantes necesitan tener una comprensión de los conceptos fundamentales de las matemáticas, que necesitan para ser capaces de traducir una nueva situación o problema a los que se enfrentan en forma que expone la relevancia de las matemáticas, hacer que el problema susceptible de tratamiento matemático, identificando y utilizando el conocimiento matemático relevante para resolver el problema, y luego evaluar la solución en el contexto problema original. Además, su creatividad se puede mejorar mediante la elaboración de nuevas soluciones, e incluso los nuevos problemas con soluciones no estándar (OCDE, 2012, p. 34).

Este trabajo, promueve pensar al profesor de matemáticas como una construcción histórica-cultural, situado en configuraciones temporeo-espaciales, inmerso en prácticas discursivas y configurado en un entramado socio-político. Para lo cual se tiene como premisa que las prácticas y desarrollo de conocimientos en educación matemática tiene un carácter de poder, configurado en la persona formas de ser, es decir, subjetividades. Además, las formas de conocimiento no sólo llevan consigo el qué conocer y cómo hacerlo, sino que también imponen formas de ser en quienes conocen (Valero & García, 2014). En este contexto se reconoce, en las investigaciones y discursos que se elaboran dentro y fuera en la educación matemática, la existencia de verdades. Estas verdades que se configuran en los discursos, propician un razonamiento y entendimiento sobre el quehacer de los agentes, constructos y objetos involucrados en educación matemática. Valero (2014) argumenta que la investigación en educación matemática es una de las prácticas que genera tanto los lenguajes para nombrar objetos de estudio, como también las maneras de pensar que se consideran verdaderas sobre tales objetos.

Por consiguiente la estrategia desarrollada despliega conceptos del marco teórico de Foucault y Deleuze para desarrollar el análisis de los discursos que circulan sobre el profesor de matemáticas, teniendo presente las condiciones de posibilidad y efectos de poder que se constituyen en esta particularidad. El foco de atención está sobre los discursos, los cuales se entenderán como repeticiones de enunciados en ciertas condiciones de posibilidad, los cuales permiten la generación de verdades y la constitución de formas de razonamientos. Es por ello que, se busca investigar desde los distintos discursos cómo el individuo –profesor de matemáticas– se constituye en sujeto de determinados saberes y poderes. Y cuáles son las regularidades o resonancias discursivas y cómo éstas favorecen y propician una subjetividad particular.

Este estudio realizar un análisis discursivo, en el cual se busca las regularidades y sistematicidades que permiten la formulación discursiva. En el cual, los diversos enunciados forman un entramado rizomático, donde el sujeto deseado es configurado para normar lo esperado. El rol de este análisis es revelar la convergencia de una compleja red de prácticas discursivas, mediante el estudio de la configuración de ideas y nociones dentro de diversos juegos de poder. Por consiguiente, se considera a la subjetividad inseparable de un marco social, político y cultural. Las subjetivación estará propiciando prácticas y formas de ser del profesor de matemáticas, pero a su vez las diferentes prácticas estarán normando las subjetividades, al establecer ‘tesis culturales’ (Popkewitz, 2008), racionalidades y verdades sobre lo deseado, en específico sobre el sujeto deseado de la educación matemática. De esta forma, se estará abordando el entendimiento del poder en la educación matemática a través de la fabricación de subjetividades (Valero & García, 2014).

Realizar una lectura desde los estudios socio-políticos dentro del nuestro campo, permite pensar a la educación matemática desde los efectos de poder que ejerce la matemática sobre el sujeto, por ejemplo, la fabricación de subjetividades que hacen de las prácticas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas sea parte de un dispositivo elitista y burocrático (Kollosche, 2014).

Pensar al profesor de matemáticas desde herramientas Foucaultianas

Aproximarse desde las herramientas teóricas de Foucault, nos ayuda a pensar al profesor de matemáticas no como un sujeto racional y universal, sino más bien a un sujeto definido en sus

prácticas, dentro de los espacios discursivos en que se desarrolla su experiencia y se define sus conocimientos y saberes, por consiguiente, esta aproximación teórica lleva a pensar al profesor de matemática como una construcción histórico-cultural que estará situado en un espacio y tiempo determinado, favoreciendo a determinados aspectos sociales, políticos y de poder.

Con ello, se entenderá al profesor de matemática como sujeto y como una idea o constructo, que conduce y es conducido bajo los parámetros de lo establecido como lo deseado. Los cuales se ven reflejados en los discursos que circulan y están propiciando formas de sujeción y subjetividad, es decir modos de ser del sujeto.

Pensar al profesor de matemática como un sujeto inserto en determinados discursos y prácticas, ayuda a vislumbrar: la constitución del sujeto bajo ciertos discursos, en donde se establece lo que se acepta y es considerado plausible pensar; los procesos en los cuales se constituyen el profesor de matemáticas como sujeto y como un agente para gobernar a otros, propiciando determinadas prácticas que buscan establecer la normatividad y con ello diferenciar lo deseado con lo no deseado, como por ejemplo, buen/mal estudiante y buen/mal profesor; las configuraciones históricas que han favorecido el establecimiento de determinados conocimientos, nociones e ideas, como por ejemplo, la idea de ‘buen profesor’ y las habilidades y/o conocimientos necesarios para desempeñarse como profesor de matemáticas.

Analizando desde dos nodos del entramado discursivo

Mediante los discursos que circulan –en la investigación en educación matemática y las propuestas realizadas por organismos internacionales– se desarrollan, constituye y edifican una forma de concebir al profesor de matemáticas que es sustentado bajo ideas tales como, globalización, equidad y oportunidad de acceso al conocimiento, lo cual ha favorecido a una estandarización del profesor de matemáticas, es decir, la fabricación de un profesor estándar, el cual otorga importancia a la racionalidad matemática dentro de las prácticas y discursos que se conforman en un momento determinado la enseñanza de las matemáticas. Este profesor estandarizado, que si bien no responde a las particularidades, es un resultado de las fuerzas que confluyen al establecer un ideal de profesor, un profesor de matemáticas que responda a las demandas de una sociedad que busca la globalización.

Podemos reconocer una infinidad de lugares donde se generan y circulan discursos sobre el profesor de matemáticas, éstos en su totalidad, estarán constituyendo el entramado discursivo en donde se enuncia las ideas que norman y conducen al profesor hacia el deber ser y su vez validan y establecen verdades sobre éstos. Por motivos prácticos focalizaremos la atención en dos nodos de este entramado, el primero de ellos hará referencia a las propuestas e ideas que se generan sobre el profesor de matemática dentro de los diferentes documentos que son publicados por la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE), el segundo nodo considerará la investigación dentro del campo de la educación matemática, en específico a la investigación sobre el profesor de matemática, por lo cual pondremos la atención en el último número del *Journal of Mathematics Teacher Education*, es decir, el número 17, el cual se conforma de 6 volúmenes.

Se ha optado por considerar dentro de un universo estos dos nodos, debido a que proponemos que son unos de los nodos más significativos a la hora de establecer un referente de lo que se dice sobre el profesor de matemáticas. En el caso de los discursos elaborados por la OCDE, se puede notar que estos obedecen a una visión de mundo moderno y globalizado, gran parte de los países se circunscribe bajo lo que en esta organización se propone y se dice, un

ejemplo de esto, es lo que sucede con el Programa Internacional para la Evaluación de Estudiantes (PISA) y toda la información que se genera en torno a esta evaluación y como los diferentes países hacen uso de ella, más aún en como esta evaluación norma el quehacer educativo de los diferentes países, encuadrándose a sus lineamientos y concepciones. Por otra parte, en el caso de las investigaciones sobre el profesor de matemáticas, se optó por el *Journal of Mathematics Teacher Education*, ya que, se reconoce en éste un nivel de representatividad y calidad dentro de la comunidad de educadores matemáticos, es un Journal dedicado sólo para la publicación de investigaciones sobre el profesor de matemáticas, además las investigaciones publicadas son de diversos marcos y aproximaciones teóricas, lo que hace que las temáticas abordadas sean muy variado.

Qué se puede decir desde los diferentes discursos

Dentro del material empírico, podemos considerar que las investigaciones y propuestas de organismos internacionales son un conglomerado de enunciaciones, y que estas representan y revelan la convergencia de las redes de ideas, pensamientos, nociones, deseos y fuerzas. Pero lo que nos preocupa en este estudio son las recurrencias o resonancia de estos enunciados, es decir, como ideas son frecuentemente repetidas, sin importar el contexto en el cual fueron elaboradas. Por ejemplo, es posible identificar algunas resonancias de los discursos presentes en el material empírico, las cuales permite pensar al profesor de matemática en termino de su desarrollo – desarrollo profesional, académico, etc.– (JMTE, 2014, pp. 1, 86, 180, 303, 380, 405; OECD, 2012, 2014), habilidades (JMTE, 2014, pp. 15, 87, 110, 284, 337), conocimiento (JMTE, 2014, pp. 5, 41, 101, 373, 420) y prácticas (JMTE, 2014, pp. 66, 150, 202, 240, 299, 409), más aún, donde el profesor es contantemente evaluado (JMTE, 2014, pp. 106, 465; OECD, 2012).

Estas resonancias dan a conocer los intereses y urgencias que existe en las diferentes esferas de la sociedad. Desde estas resonancias se configuran diversos ‘régimen de verdad’ (Foucault, 1980) en torno al profesor de matemáticas, ya que la verdad es una construcción discursiva y los diferentes regímenes de conocimientos determinan lo que es falso y verdadero (Jørgensen & Phillips, 2002). Por lo tanto, estas resonancias están dando forma a lo que es posible y deseado pensar sobre el profesor, por ejemplo sobre su quehacer o formación, favoreciendo a una subjetividad del profesor de matemáticas

Foucault (1972) al referirse a sobre la producción de los discursos, nos lleva a centrar la atención a que:

En toda sociedad la producción del discurso está a la vez controlada, seleccionada y redistribuida por cierto número de procedimientos que tienen por función conjurar sus poderes y peligros, dominar el acontecimiento aleatorio y esquivar su pesada y temible materialidad (Foucault, 1972, p. 216).

Por consiguiente, la producción de discursos no es inocente e imparcial a su contexto temporeo-espacial, los discursos conllevan ideales, nociones y deseos, entre otros, de quienes los formulan o regula, más aún, de los regímenes de conocimientos y racionalidades.

Dentro de las regularidades discursivas que circulan, se tomara como ejemplo las resonancias que hacen referencia a las prácticas del profesor de matemáticas, en ésta se puede apreciar la elaboración de diferentes discursos, donde la focalización e interés es las prácticas del profesor, por ejemplo:

They [effective teachers] ensure that the lesson content has a strong mathematical focus and contains opportunities for students to think, reason, communicate, reflect upon and critique mathematics (JMTE, 2014, p. 299).

...there is a strong correlation between the teacher's knowledge of mathematics and successful classroom practice... (JMTE, 2014, p. 373).

...teachers' goals intended to provide students opportunity to clarify and communicate their thinking. (JMTE, 2014, p. 483).

...¿Cuáles son las habilidades que los jóvenes necesitan para tener éxito en este mundo [...] y qué competencias necesitan los profesores [...], para enseñar con eficacia esas habilidades? (OCDE, 2012, p. 12).

Sistemas educativos de alto rendimiento tienden a priorizar la calidad de los profesores con respecto a otros insumos, sobre todo el tamaño de clase (OCDE, 2014, p. 2), al hablar de calidad del profesor hacen alusión a las habilidades, conocimientos que tiene para desempeñar su labor, es decir su práctica.

Esta focalización e interés sobre la práctica, podrían entenderse como la preocupación que se tiene por conducir a las personas hacia lo deseado, ya que, promover una práctica del profesor implica conducir al profesor hacia una dirección, para que éste a su vez conduzca a los estudiantes hacia esa dirección y con ello fabricar al sujeto deseado. Como se puede inferir de las enunciaciones antes presentadas, se busca un estudiante que sea capaz de razonar, resolver problemas y comunicar sus pasamientos, reflexivo, crítico, que se pueda adaptar a los fuertes cambios de la sociedad, entre otros aspectos.

La fabricación de subjetividades es entonces uno de los efectos constructivos del poder de los discursos, lo cual busca gobernar al sujeto desde el deber ser y deber deseado de la sociedad moderna y globalizada del siglo XXI.

Cuando se cuestiona sobre lo relevante para la sociedad la educación en matemáticas, pueden surgir diferentes respuestas, pero es muy interesante analizar como de los discursos que circulan se pueden encontrar enunciaciones que relacionan a la educación matemática con el progreso y desarrollo de la sociedad. Como por ejemplo.

Las ciencias son un conjunto de conocimientos adquiridos por la humanidad, una necesidad del ser humano para su progreso y desarrollo, son un acto creativo del individuo. La gran mayoría de estas ciencias están relacionadas con la ciencia lenguaje del universo: la matemática (Rodríguez, 2011, p. 1).

Consecuentemente, las regularidades discursivas se tornan hacia el conocimiento y habilidad del profesor de matemáticas, ya que estos serán primordiales a la hora de hablar sobre el desempeño y quehacer del profesor, es decir sus prácticas. Lo cual se puede ver reflejado en las enunciaciones antes presentados, principalmente en la que establece la existencia de un relación entre el conocimiento del profesor y sus exitosas practicas, ver JMTE (2014, p. 373)

A modo de conclusiones

Se reconoce que, el trabajo del profesor de matemáticas, la enseñanza, es generalmente considerado como un compleja y engorrosa, además, la práctica requiere una mezcla de conocimientos teóricos y prácticos, habilidades y diferentes entendimientos del niño (White, Jaworski, Agudelo-Valderrama, & Gooya, 2013), por otra parte, Castañeda (2009) dice que los efectos de la normalización de los maestros están presentes en el hecho de que las personas están

socialmente instituidas, acatar las normas porque han dependido históricamente de una normalidad impuesta, ya sea que estas no tenga relación a su trayectoria e identidad.

El desarrollo del profesor de matemáticas se configura bajo determinadas epistemologías y éstas responden al razonamiento imperante de un determinado momento temporeo-espacial, en la actualidad se puede considerar que éste se encuentran fuertemente influenciadas por la idea de globalización y modernidad. Constituyendo, en términos de Foucault, a diversos dispositivos y tecnologías que favorecen al establecimiento de verdades y subjetividades.

Por su parte, la UNESCO (2009) propone que la enseñanza de la matemática debe ser organizada de forma tal que el tratamiento escolar de los temas seleccionados, contribuyan a desarrollar una concepción de la matemática como instrumento para conocer y transformar el mundo, además, como un campo de conocimiento con objetos, reglas y fundamentos propios, lo cuales se encuadra con las resonancias encontradas en el material empírico. Este tipo de discurso propicia afirmaciones y enunciaciones donde se confía en la matemática como si estuviéramos obligados a tener fe en las matemáticas (Lundin, 2012), por lo cual se pueden encontrar elaboraciones de discursos como: ‘para comprender cualquier fenómeno se necesita la matemática’ (Rodríguez, 2011)

El profesor de matemática se constituye dentro de prácticas discursivas, prácticas de su quehacer y prácticas sociales que se han configurado desde el deber ser y deber deseado, ejerciendo fuerzas al sujeto que se subjetiva como profesor. Ya que este nuevo sujeto, el profesor de matemáticas, se reconfigura constantemente. Los discursos establecidos por la investigación y OCDE, juegan el papel de dar a conocer que es lo permitido decir y pensar en la sociedad sobre el profesor de matemática, fundando sus principios en lo deseado y anhelado.

La fabricación de un profesor de un profesor estandarizado que se promueve desde las ideas de globalización, modernidad, equidad, se está promoviendo la búsqueda y el establecimiento de la homogeneidad en un contexto en que predomina las diferencias, por consiguiente, esto llevará a desnaturalizar la labor docente, desconociendo aspectos de su contexto y particularidad, para así poder hablar de un profesor estándar.

Se torna importante mirar al profesor de matemáticas, ya que una de sus labores primordiales para la sociedad, es la formación del ciudadano, las prácticas del profesor estarán conduciendo al estudiante, formando y estableciendo en él una racionalidad que se promueve desde los diferentes lugares que componen el entramado que subjetiva al estudiante y se establece la imagen deseada que regulará todo.

La intención de los discursos presentes en la investigación y los documentos de la OCDE no es sólo mostrar, cuestionar y/o analizar lo que están haciendo los profesores de matemáticas, sino más bien es determinar y establece una subjetividad del profesor de matemáticas, lo que favorece a una normalización en la fabricación de la sujeto. Y por otra parte, tiene la intención de dar a conocer el deber ser y el deber deseado de los agentes involucrados en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Podemos ver que las enunciaciones establecidas han sido fuertemente influenciados por la idea de objetividad del conocimiento, favoreciendo a determinadas prácticas y formaciones discursivas que buscan una abstracción y generalización del conocimiento. Por otra parte, pensar al profesor de matemáticas desde lo social, podemos ver diversos discursos que establecen verdades que pretende formar parte de la deseado, para así poder conducir a otros hacia ello.

Referencias

- Castañeda, A. (2009). *Trayectorias, experiencias y subjetivaciones en la formación permanente de profesores de educación básica*. México: UPN.
- Foucault, M. (1971). Orders of discourse. *Social Science Information*, 10(2), 7-30.
- Foucault, M. (1972). *Archaeology of Knowledge* (A. M. S. Smith, Trans. 1st english ed.). London: Routledge.
- Foucault, M. (1980). *Power/Knowledge: selected interviews and other writings 1972-1977*. New York: Pantheon Books.
- Jørgensen, M., & Phillips, L. J. (2002). *Discourse analysis as theory and method*. London: SAGE Publications.
- Journal of Mathematics Teacher Education [JMTE]. (2014). *Journal of Mathematics Teacher Education*, 17(1-6), 1-582.
- Kollosche, D. (2014). *Gesellschaft, Mathematik und unterricht. ein beitrag zum soziologisch-kritischen verständnis der gesellschaftlichen funktionen des Mathematikunterrichts* (Ph.D.). Universität Postdam.
- Lundin, S. (2012). Hating school, loving mathematics: On the ideological function of critique and reform in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 80(1-2), 73-85. doi: 10.1007/s10649-011-9366-6
- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos [OCDE]. (2012). *Preparing teachers and developing school leaders for the 21st century: lessons from around the world* (A. Schleicher Ed.). OECD Publishing.
- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos [OCDE]. (2014). *How much are teachers paid and how much does it matter? Education Indicators in Focus*, 21.
- Pais, A., & Valero, P. (2012). Researching research: mathematics education in the political. *Educational Studies in Mathematics*, 80(1), 9-24. doi: 10.1007/s10649-012-9399-5
- Popkewitz, T. S. (2008). *Cosmopolitanism and the age of school reform : science, education, and making society by making the child*. New York: Routledge.
- Rodríguez, M. E. (2011). La matemática y su relación con las ciencias como recurso pedagógico. *Números, Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 77, 35-49.
- UNESCO. (2009). *Aportes para la enseñanza de la matemática*. Chile: SERCE.
- Valero, P. (2008). Discourses of power in mathematics education research: Concepts and possibilities for action. *PNA. Revista de investigación en didáctica de la matemática*, 2(2), 43-60.
- Valero, P. (2014). Investigación en educación matemática, currículo escolar y constitución de la subjetividad. *Actas del VII CIBEM*.
- Valero, P., & García, G. (2014). Matemáticas escolares y el gobierno del sujeto moderno [School mathematics and the governing of the Modern subject]. *Bolema: Boletim de Educação Matemática.*, 28(49), 491-515. doi: <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n49a02>
- White, A., Jaworski, B., Agudelo-Valderrama, C., & Gooya, Z. (2013). Teachers learning from teachers. In M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (Vol. 27, pp. 393-430): Springer New York.

Uma análise dos artigos que tratam da formação de professores em Matemática a partir de critérios de cientificidade

Carla Melli **Tambarussi**

Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Brasil

carlatambarussi@hotmail.com

Edson **Reginaldo**

Instituto Federal Paraná

Brasil

edson.reginaldo@ifpr.edu.br

Paulo **Wichnoski**

Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Brasil

wichnoski@gmail.com

Tiago **Klüber**

Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Brasil

tiago_kluber@yahoo.com.br

Resumo

A presente investigação consiste em uma análise de artigos científicos que tratam sob algum aspecto da formação de professores em Matemática com o objetivo de identificar se alguns dos critérios de cientificidade destacados por Laperrière (2010) são atendidos nesses trabalhos. Desse modo, assumimos a seguinte interrogação de pesquisa: *Como se mostra a pesquisa qualitativa de formação de professores de Matemática a partir de alguns critérios de cientificidade definidos por Laperrière?* Assim, buscando responder essa interrogação, efetuamos um mapeamento, no *Scielo*, no qual levantamos seis pesquisas que dizem dessa temática. Para o desenvolvimento do trabalho, assumimos a abordagem qualitativa de pesquisa. A investigação, colocou em destaque algumas fragilidades das pesquisas, no que se refere aos critérios de cientificidade, bem como contribuiu para uma mudança de postura, enquanto pesquisadores, no que concerne a leitura de artigos científicos.

Palavras-chave: Pesquisa Qualitativa, Análise Crítica, Periódicos Científicos, Educação Matemática, Ensino de Ciências.

Sobre o contexto da pesquisa

As pesquisas assumidas na perspectiva qualitativa assumem presença considerável no âmbito educacional. Talvez isso se deva ao fato de que esse tipo de abordagem permita a interlocução entre os resultados das pesquisas e as variáveis que possuem efeitos diretos sobre a pesquisa, o que comumente não é possível quando se trabalha sob a abordagem quantitativa.

Nesse contexto, ao tratar da pesquisa qualitativa, de modo específico da pesquisa em Educação Matemática, Bicudo (2012) afirma que

[...] são pesquisas que permitem compreender características do fenômeno investigado e que, ao assim procederem, oferecem oportunidade para possibilidades de compreensões possíveis quando a interrogação do fenômeno é dirigida a contextos diferentes daquele em que a investigação foi efetuada. Sustentam raciocínios articuladores importantes para tomadas de decisão políticas, educacionais, de pesquisa e, aos poucos, semeiam regiões de inquérito com análises e interpretações rigorosas (p. 19).

A abordagem qualitativa se sustenta, portanto, no pressuposto de que aspectos como a subjetividade humana, o contexto social e histórico, bem como de outros fatores presentes no contexto em que se realiza a pesquisa, são considerados essenciais para a análise e interpretação dos dados. Frente a isso, a pesquisa qualitativa, propõe que os efeitos causados por essas variáveis sejam considerados, diferentemente da abordagem quantitativa que visa construir instrumentos que possam garantir a objetividade da pesquisa, além de, segundo Bicudo (2006) ter a ver com o objetivo, passível de ser mensurável. Destacando como pontos importantes, o método a definição de conceitos.

A pesquisa qualitativa, no entanto, começa a ganhar espaço a partir de 1950, quando pesquisadores americanos propuseram a renovação dos métodos de pesquisa, frente a atual situação que se encontrava a pesquisa no âmbito das ciências humanas (Laperrière, 2010).

Segundo a autora, antes de a pesquisa qualitativa ganhar o seu espaço, a pesquisa convencional nas ciências humanas tentou resolver os problemas de cientificidade com a padronização dos instrumentos e resultados de pesquisa, bem como com a desconsideração dos reflexos causados pelas variáveis envolvidas. Dessa forma, acreditava-se que os efeitos perturbadores da subjetividade humana e do contexto social sobre os dados poderiam ser neutralizados.

Mas, o que se entende por cientificidade nas pesquisas qualitativas? Frente a essa pergunta, na tentativa de respondê-la sucintamente, recorreremos, primeiramente, ao significado da palavra cientificidade e posteriormente faremos alusão ao contexto em que ela se encontra. Cientificidade, segundo o contexto gramatical significa qualidade de ciência, que qualifica o processo ou método como científico. Nesse sentido, quando olhamos para o contexto das pesquisas qualitativas, podemos entender a cientificidade como critérios e procedimentos que visam propiciar uma pesquisa mais rigorosa.

De modo específico, no âmbito da pesquisa, diversos autores trazem reflexões referentes ao campo da cientificidade em abordagens qualitativas. Entretanto, nessa investigação nos limitaremos a tratar de alguns dos critérios de cientificidade assumidos por Laperrière (2010).

De um modo geral, a autora classifica os critérios de cientificidade em 3 grandes “grupos”:

- 1) critério de validade interna**, que diz respeito a verificação da exatidão dos resultados de pesquisa, isto é, assegura essencialmente a pertinência da ligação existente entre o fenômeno observado e a sua interpretação;
- 2) critério de validade externa**, visa especificar os limites de uma possível generalização da pesquisa, ou seja, a que grau de generalização pode-se levantar uma nova hipótese de trabalho aplicando a mesma perspectiva teórica porém sob outras circunstâncias e
- 3) critério de confiabilidade**, critério que visa garantir que os resultados não sejam advindos de causas acidentais.

Em outras palavras, esse último critério tenta assegurar que a intencionalidade da pesquisa seja mantida, não de forma a evitar a instabilidade da pesquisa, mas de forma a considerar as

mudanças ocorridas pela própria evolução do fenômeno explorando suas múltiplas facetas e aprofundando suficientemente o sentido dos dados obtidos.

Dizemos determinados critérios tendo em vista que a autora subdivide os 3 grandes grupos citados anteriormente, em vários tópicos que dizem do critério de validade interna, critério de validade externa e critério de confiabilidade.

Assim, à luz da interrogação: *Como se mostra a pesquisa qualitativa de formação de professores de Matemática a partir de alguns critérios de cientificidade definidos por Laperrière?* explicitamos, na próxima seção, os procedimentos metodológicos, bem como os critérios de cientificidade que serão analisados nos artigos que foram mapeados para análise.

Antes, porém, de apresentarmos a metodologia da nossa pesquisa, destacamos que a opção por olhar para os artigos desenvolvidos sob a temática da formação do professor em Matemática se justifica, por um lado, pelo fato de que as pesquisas realizadas no âmbito da formação de professores, em geral, seguem uma abordagem qualitativa.

Por outro, se justifica por estarmos inseridos em um contexto no qual as reflexões e discussões sobre essa temática se fazem presentes, bem como por estarmos motivados em conhecer “o que” e “o modo” como essas pesquisas estão sendo desenvolvidas.

Sobre a metodologia da pesquisa

Ao estabelecermos a interrogação: *Como se mostra a pesquisa qualitativa de formação de professores de Matemática a partir de alguns critérios de cientificidade definidos por Laperrière?*, como orientadora da pesquisa, outras possibilidades investigativas se abriram, dentre as quais: 1) como efetuar o levantamento dos artigos; 2) que critérios de cientificidade analisar; 3) como efetuar o processo de análise e de interpretação dos dados.

Para o levantamento dos artigos, pesquisamos na plataforma do *Scielo* investigações que tratassem da formação de professores em Matemática. Para isso, realizamos uma busca pelas palavras: “Formação de Professores”, “Matemática” e “Educação Matemática”.

Essa busca resultou em 6 artigos que abordam aspectos diferenciados da formação do professor e que estão veiculados à diferentes periódicos científicos, que apresentamos no quadro abaixo.

Quadro 1

Artigos e Periódicos

Título do Artigo	Períódico	Qualis ¹
A1 - Modelagem na sala de aula: resistências e obstáculos	BOLEMA	A1
A2 – O conhecimento matemático do professor: Formação e prática docente na escola básica	Revista Brasileira de Educação	A1
A3 – O ensino da estatística e da probabilidade na Educação Básica e a formação dos professores	Cadernos Cedes	A2
A4 – Ser professor de Matemática: Escolhas, caminhos, desejos...	Ciência & Educação	A1
A5 – Pitágoras e van Hiele: uma possibilidade de interlocução	Ciência & Educação	A1
A6 – Um ensino sobre as concepções de professores de Matemática: Possibilidades metodológicas e um exercício de pesquisa	Educação e Pesquisa	A1

Fonte: os autores

¹ Os qualis dos periódicos científicos foram pesquisados no Sistema Webqualis, disponível em: <http://qualis.capes.gov.br/webqualis/principal.seam>

Como já mencionamos, a análise crítica desses artigos será efetuada a partir dos critérios de cientificidade estabelecidos por Laperrière (2010), que estão organizados em 3 “grupos” sendo eles: 1) Critério de Validade Interna; 2) Critério de Validade Externa; 3) Critério de Confiabilidade. Esses “grupos” estão subdivididos em critérios que também são passíveis de serem analisados nas produções científicas. Nesse sentido, sob a abordagem qualitativa de pesquisa, escolhemos dois critérios de validade interna, um critério de validade externa e dois critérios de confiabilidade para serem analisados nos artigos de formação de professores em Matemática.

A opção por esses critérios se justifica pelo fato de eles priorizarem aquilo que julgamos de mais importante de ser considerado numa pesquisa de abordagem qualitativa. Desse modo, no quadro 2, apresentamos os critérios de cientificidade que serão utilizados para a análise dos artigos em nossa investigação.

Quadro 2

Critérios a serem utilizados nas análises

Critérios	Procedimentos
Validade Interna	1) Levar em conta o posicionamento teórico durante todo o processo de pesquisa; 2) Sob a condição de que sejam rigorosamente especificadas as ligações entre as observações empíricas e os objetivos, a perspectiva teórica e a metodologia específicas da pesquisa.
Validade Externa	1) A especificação das características do contexto e da população da pesquisa;
Confiabilidade	1) A implicação a longo termo no campo que permite também delimitar os processos sociais fundamentais que podem explicar a evolução da situação da pesquisa; 2) A pesquisa da concordância dos resultados obtidos por uma diversidade de instrumentos (triangulação dos dados).

Fonte: critérios extraídos de Laperrière (2010)

Análise e interpretação dos dados

A partir da leitura dos trabalhos desenvolvidos sob a temática da formação de professores em Matemática, destacamos fragmentos que dizem dos critérios estabelecidos para análise. Além disso, com o intuito de apresentar de modo resumido e contribuir para a interpretação dos dados, organizamos o quadro 3, no qual apresentamos os critérios de cientificidade, os 6 artigos analisados, bem como efetuamos marcações naqueles trabalhos que atenderam os critérios estabelecidos por nós.

Quadro 3

Do atendimento aos critérios estabelecidos

Critérios	A1	A2	A3	A4	A5	A6
Levar em conta o posicionamento teórico durante todo o processo de pesquisa	X	X	X	X		
Sob a condição de que sejam rigorosamente especificadas as ligações entre as observações empíricas e os objetivos, a perspectiva teórica e a metodologia específicas da pesquisa	X					

A especificação das características do contexto e da população da pesquisa	X	X		X	X	X
A implicação a longo termo no campo que permite também delimitar os processos sociais fundamentais que podem explicar a evolução da situação da pesquisa	X	X	X	X		X
A pesquisa da concordância dos resultados obtidos por uma diversidade de instrumentos (triangulação dos dados)	X	X		X		

Fonte: os autores

Nesse sentido, tomando como referência o quadro 3, na sequência, apresentamos as nossas interpretações que dizem das análises dos artigos, efetuadas com o intuito de identificar que critérios de cientificidade assumidos por Laperrière se mostram dos artigos de formação de professores em Matemática.

No que diz respeito ao primeiro critério, revelou-se que 4 artigos apresentaram em seu âmbito o posicionamento teórico (emocional e social) do pesquisador. No artigo A1, esse critério se mostra, quando olhamos, por exemplo, para o seguinte fragmento: *Sustentamos a perspectiva da Modelagem enquanto uma concepção de Educação Matemática*. No artigo A2, destacamos o seguinte trecho: *O trabalho desenvolve-se, portanto, a partir de uma concepção de matemática escolar que ultrapassa tanto a ideia de transposição didática, quanto a de uma construção fundamentalmente endógena à escola*.

Os artigos A3 e A4 também satisfizeram o primeiro critério estabelecido por nós. Ressaltamos que, o primeiro critério apresentado no quadro 3, se refere aos aspectos concernentes à validade interna dos artigos. Nesse sentido, Laperrière (2010) afirma que esses aspectos dizem, além da consideração dos aspectos teóricos, da consideração do papel da subjetividade na ação humana. Nesse contexto, destacamos do artigo A4 o seguinte fragmento: *Assim, a questão da escolha profissional aproximamos várias outras: identidade, adolescência, desejo, memória de vida*.

Retornando ao quadro 3, desvela-se que dois artigos não apresentaram o primeiro critério em seu contexto, pelo menos não de maneira explícita. No artigo A5, por exemplo, o trecho que dá indícios de que o primeiro critério foi satisfeito é: *Delimitando os aspectos sociológicos envolvidos*, quando argumentam sobre o enquadramento da pesquisa sob uma abordagem qualitativa. Já no artigo A6, não identificamos indícios desse critério no bojo da investigação. Frente a isso, consentimos que, se houve consideração desse critério nesses dois trabalhos, ela foi realizada implicitamente, ou de modo superficial, o que não nos permite garantir que as questões relacionadas à subjetividade humana, bem como ao posicionamento particular (teórico, emocional e social) foram consideradas nos trabalhos.

No que tange ao segundo critério exposto no quadro 3, revelou-se que dos 6 artigos analisados, apenas 1 o satisfaz de modo integral. Ressaltamos que os autores do artigo A1 explicitam os seus objetivos e os relacionam com os procedimentos metodológicos: *Para realizar essa seleção, foram criados e enunciados alguns critérios que enumeramos a seguir. 1) Busca no banco de teses e dissertações da Capes segundo alguns descritores [...]*.

Os demais artigos satisfizeram parcialmente esse critério, uma vez que, como podemos observar no artigo A2, a metodologia bem como os procedimentos metodológicos não se mostraram de modo evidente no decorrer do artigo.

Isso vai ao encontro do que analisamos no artigo A3, haja vista que a autora elenca o objetivo da pesquisa, mas não esclarece a metodologia assumida. Com relação ao artigo A4, desvelou-se que as ligações entre as observações empíricas e os objetivos não são especificadas de forma clara, o que ocorre é que por vezes essa ligação aparece de maneira intrínseca na redação.

Relacionado à perspectiva teórica e a metodologia específica, destacamos que 2 artigos (A4 e A6) não estabelecem um referencial teórico, porém explicitam os procedimentos metodológicos. Essa afirmação pode revelar, a postura de pesquisa assumida pelos pesquisadores. Dizemos isso, tendo em vista, por exemplo, a postura fenomenológica que não trabalha com um quadro teórico estabelecido *a priori* e, nem com categorias previamente estabelecidas. Por outro lado, caso a postura de pesquisa não seja fenomenológica, o quadro teórico pode se mostrar no âmbito dos trabalhos.

No que diz respeito ao artigo A5, ressaltamos que apesar de os autores assumirem uma teoria, o texto não explicita os procedimentos metodológicos utilizados, bem como não efetua uma articulação entre a teoria, a metodologia, os objetivos e os resultados obtidos.

Diferentemente do segundo critério, o terceiro critério apresentado no quadro 3 é satisfeito por praticamente todos os artigos, exceto o A3.

No caso do artigo A1, podemos destacar o seguinte fragmento: *Para nosso corpus, optamos por quatorze dos dezesseis trabalhos [...]*. O artigo A2, especifica a característica do contexto e da população ao explicitar que no âmbito do trabalho irão fazer uso das seguintes fontes: *livros didáticos escolares e livros destinados a professores do ensino básico, documentos relativos ao curso de licenciatura em Matemática, entrevistas com os professores das disciplinas do curso de licenciatura da UFMG [...]*.

Quanto ao artigo A4, ele não expõe as características do contexto e da população da pesquisa, apenas situa de forma breve o contexto em que a pesquisa foi realizada. Isso pode ser observado quando os autores afirmam: *A tomada de dados foi realizada com 38 alunos do curso de licenciatura em Matemática (período noturno) da Universidade Estadual de Londrina*. O artigo A5 também satisfaz esse critério, de tal modo que os autores criam um quadro no qual especificam a formação de cada integrante, bem como o período em que se encontram os estudantes pesquisados e explicitam: *Os dados do Quadro 1 permitem delinear o ambiente em que a pesquisa foi realizada quanto aos sujeitos investigados. De um total de 12 participantes, oito são alunos da licenciatura em Matemática, variando do 3º, 4º, 5º e 8º período; dois são professores universitários, e dois, professores em exercício na Escola Básica*.

No que se refere ao artigo A6, revela-se que os autores não apresentam muitas características dos envolvidos na pesquisa, uma vez que, ao longo do artigo apenas citam a quantidade de participantes e o local onde atuam: *dez professores de Matemática com experiência docente em escolas públicas estaduais e municipais foram entrevistados*.

Quanto ao único artigo que não satisfaz esse critério, a única afirmação que podemos efetuar é que ele não apresentou as características do contexto e da população da pesquisa, mas isso pode ser resultado da própria proposta do trabalho, uma vez que se trata de um artigo de cunho mais teórico, de discussão acerca da inserção da estatística no âmbito da sala de aula desde as séries iniciais.

Como pode ser observado no quadro 3, a grande maioria dos artigos satisfizeram o quarto critério estabelecido para análise. Quanto aos artigos A1 e A2, revela-se que os resultados apresentados são fruto de investigações anteriores. Essa constatação vai ao encontro da análise efetuada no artigo A6, haja vista que as explicitações efetuadas pelos autores são resultado de um “recorte” de uma pesquisa maior, neste caso de uma dissertação. Desse modo, as interpretações realizadas referem-se a uma trajetória mais longa, o que pode indicar que as reflexões foram aprofundadas.

Por mais que o artigo A3 não explicita se a pesquisa é resultado de algum trabalho anterior, a autora deixa claro que o artigo: *traz reflexões a partir dos resultados das pesquisas realizadas na Educação Estatística e na Educação Matemática nas últimas décadas*. Isso revela, em certo sentido, que o conteúdo apresentado já vem sendo discutido na área em que o artigo se estabelece.

Em relação ao artigo A4, consentimos que esse critério foi atendido, uma vez que a descrição empírica da situação desvelou novas faces do objeto em estudo, implicando em mudanças no rumo da pesquisa, as quais foram consideradas pelos autores. Isso se justifica na seguinte citação: *durante o desenvolvimento da nossa pesquisa – à medida que nos defrontávamos com a análise de nossos achados – sentimos a necessidade de ampliar nosso leque de olhares, nossa maneira de ver ou de interpretar a realidade que buscávamos compreender*. Nesse sentido, ainda no que se refere ao artigo A4, o fragmento: *foram realizadas notas de campo, no período referente a um ano letivo, em todos os dias que os alunos tiveram aula com um dos pesquisadores* sugere que esse critério tenha sido atendido e, com isso a ocorrência das falhas inevitáveis do “instrumento humano de coleta” pode ter sido minimizada.

A partir da nossa análise, o artigo A5 não satisfaz o critério que trata do tempo de integralização da pesquisa. Isso se revelou no seguinte trecho: *A pesquisa tem conotação qualitativa e foi realizada num evento de Educação Matemática, durante a realização de uma oficina sobre os níveis de Van Hiele*, o que permite intuir que o tempo destinado à pesquisa tenha sido curto.

No que tange ao último critério do quadro 3, destacamos que dos 6 artigos analisados apenas 3 o satisfizeram. Nesse sentido, o artigo A1 traz a seguinte afirmação: *Procedemos à análise transversal para dar conta do propósito aqui alinhavado*.

Quanto ao artigo A4 destacamos que foram utilizados mais de um instrumento para a coleta de dados. Esse cuidado implica diretamente no processo da triangulação de dados, pois a partir da leitura de Laperrière (2010) compreendemos que o procedimento da triangulação dos dados, da codificação precisa, consistente e exaustiva é possível ser elaborado quando os instrumentos de coleta de dados são variados.

Segundo os autores: *um dos pesquisadores estabeleceu uma série de conversas, bate-papos em sala de aula e nos corredores da universidade*. Essa ação é entendida na literatura como observação participante e constitui uma importante ferramenta de coleta de dados. Ainda com relação à coleta de dados os autores afirmam: *foram realizadas notas de campo, no período referente a um ano*.

Isso, por sua vez, permitiu que a triangulação das informações e das perspectivas confrontando o posicionamento subjetivo do pesquisador com o conjunto de observações fosse efetuada.

Como podemos observar no quadro 3, os demais artigos não apresentaram a pesquisa da concordância dos resultados obtidos por uma diversidade de instrumentos (triangulação dos dados).

Quanto ao artigo A3, a ausência desse critério pode estar relacionada à própria característica da investigação, uma vez que se refere à um ensaio de cunho mais teórico. No que se refere ao artigo A5, destacamos que não houve pluralidade dos instrumentos de coleta de dados, sendo esta realizada somente pela recolha dos registros escritos dos participantes. O autor traz indícios de como foi realizada a coleta de dados ao mencionar: *A utilização do registro escrito é uma forma produtiva na pesquisa qualitativa, pela facilidade maior do que a entrevista oral ou gravada, uma vez que o indivíduo tem um tempo para a reflexão e análise do seu pensamento.*

O artigo A6, também não faz uso de uma diversidade de procedimentos. Os autores explicitam que para as interpretações efetuadas, eles utilizaram as entrevistas dos professores que foram gravadas e transcritas. Nesse sentido, os autores afirmam que: *as entrevistas foram gravadas e transcritas. Ao processo de transcrição, seguiu-se de outro, mais elaborado, ao qual chamamos textualização.*

Algumas considerações

Tendo em vista que propiciar aos alunos um processo de ensino e aprendizagem com significado é um dos maiores desafios dos professores, em particular, dos professores de Matemática, a formação desses professores tem sido colocada em pauta no âmbito da Educação e consequentemente na Educação Matemática.

Frente a isso, nos chamou a atenção a quantidade reduzida de trabalhos levantados na plataforma *Scielo*, apenas 6. Isso se levamos em consideração que esta plataforma constitui-se em um dos principais *locus* de divulgação das pesquisas científicas, nas qual estão indexadas as revistas com melhores avaliações. Porém, mencionamos que existem outras plataformas as quais não foram utilizadas na coleta dos dados e podem, eventualmente, abordar trabalhos com essa temática.

No entanto, apesar de termos focado o nosso levantamento a uma única plataforma, esse número reduzido de pesquisas cuja temática esteja voltada à formação de professores, pode revelar que essas investigações não estão encontrando respaldo em uma das principais bases de indexação do país, o que pode desvelar, em muitos casos, fragilidades no contexto dessas pesquisas, bem como a falta de aprofundamento no que se refere às discussões no que concerne a formação do professor.

Ainda, depreendemos que as análises efetuadas denunciaram algumas fragilidades que, em leituras realizadas sem uma reflexão profunda acerca dos critérios de cientificidade podem passar despercebidas. Também reforçam a ideia de que o processo de pesquisa deve ser contínuo, isto é, a medida que se aumenta a discussão entre os pares, diminui-se a possibilidade de pesquisas frágeis e com contribuições relevantes para a área de interesse. Esse processo de disseminação entre os pares vem assegurar o que Laperrière (2010) denomina de critério de validade externa.

O trabalho efetuado, além de permitir uma aproximação com os critérios de cientificidade e revelar o nosso próprio entendimento acerca do tema, proporcionou uma mudança de postura no que diz respeito ao nosso olhar tanto na produção a ser estudada, como na nossa própria produção.

Referências e bibliografia

- Bicudo, M. A. V. (2006). Pesquisa Qualitativa e Pesquisa Qualitativa segundo a abordagem fenomenológica. In: Borba; Marcelo de Carvalho; et al. *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.
- Bicudo, M. A. V. (2012). A pesquisa em educação matemática: a prevalência da abordagem qualitativa. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, v. 5, n. 2, p. 15-26.
- Garnica, A. V. M. (2008). Um ensaio sobre as concepções de professores de matemática: possibilidades metodológicas e um exercício de pesquisa. *Educação e Pesquisa*, n. 3, p. 495-510.
- Laperrière, A. (2010). Os critérios de Cientificidade dos Métodos Qualitativos. In: Poupart, J. (et al). *A pesquisa qualitativa: Enfoques epistemológicos e metodológicos*. Trad. Ana Cristina Nasser. 2.ed. Petrópolis: Vozes. (Coleção Sociologia).
- Leivas, J. C. P. (2012) Pitágoras e Van Hiele: uma possibilidade de conexão. *Ciência & Educação*, n. 3, p. 643-655.
- Lopes, C. E. (2008). O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. *Cadernos Cedes*, n. 74, p. 57-73.
- Moreira, P. C.; David, M. M. M. S. (2005). O conhecimento matemático do professor: formação e prática docente na escola básica. *Revista Brasileira de Educação*, n. 28, p. 50-61.
- Passos, M. M.; Martins, J. B.; Arruda, S. de M. (2005). Ser professor de matemática: escolhas, caminhos, desejos.... *Ciência & Educação*, n. 3, p. 471-482.
- Silveira, E.; Caldeira, A. D. (2012). Modelagem Matemática: resistências e obstáculos. *Bolema*, n. 43, p.1021-1047.

Uma revisão crítica da tendência¹ investigação Matemática no Brasil

Paulo **Wichnoski**

Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Brasil

wichnoski@gmail.com

Tiago Emanuel **Klüber**

Universidade Estadual do Oeste do Paraná

Brasil

tiago_kluber@yahoo.com.br

Resumo

Neste artigo sintetizamos uma pesquisa do tipo Estado da Arte que tematizou a Investigação Matemática. Efetuamos uma revisão de trabalhos acadêmicos, em nível de pós-graduação *stricto sensu*, que tem como foco o tema citado acima e estabelecemos a seguinte interrogação: *que focos se mostram nas pesquisas em Investigação Matemática e o que isso revela?* Para tanto, destacamos dos resumos de dissertações e teses acessadas por meio do portal da BDTD – Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações, os objetos de estudo, os objetivos e outros aspectos concernentes ao perguntado. Com isso, consideramos possível argumentar sobre aquilo que ainda não foi focado, corroborando para o avanço das pesquisas nesta área. Os resultados revelam que as pesquisas, em geral, ocorrem com vistas à efetivação de práticas pedagógicas sob um caráter empírico e apontam para a urgência em tratar detidamente aspectos epistemológicos da Investigação Matemática, na busca por teorizações mais profundas.

Palavras-chave: estado da arte, pesquisa bibliográfica, pesquisa qualitativa, Investigação Matemática, Educação Matemática.

Introdução

O presente trabalho deriva do projeto de pesquisa “Investigações Matemáticas na Educação Matemática: teoria e atividades”, que teve como um dos objetivos promover a proximidade com a Investigação Matemática por meio de uma revisão de trabalhos acadêmicos, em nível de pós-graduação *stricto sensu*. Para que tal aproximação pudesse ser efetivada, sentiu-se a necessidade de estudar as principais referências sobre o assunto e fazer um levantamento para que pudessemos conhecer o que foi ou está sendo pesquisado.

Frente a isso, buscamos delinear esse trabalho sob a metodologia da pesquisa denominada “Estado da Arte”, de modo próximo ao proposto por Ferreira (2002). Em suma, são pesquisas de caráter bibliográfico, que enfrentam o desafio de mapear e discutir certa produção acadêmica em

¹ Entenderemos a expressão “tendência Investigação Matemática” na acepção dada por Klüber (2012), ao referir-se à Modelagem Matemática, ou seja, como “um movimento efetivo daquilo que tem permanecido enquanto e como alguns modos de se pensar e fazer Educação Matemática em nosso país e também em outras partes do mundo”(Klüber, 2012, p. 33).

diferentes campos do conhecimento, tentando responder que aspectos e dimensões vêm sendo destacados e privilegiados em diferentes épocas e lugares.

Nesse mesmo sentido, Queiroz e Noronha (2004) realizaram um estudo cujo objetivo foi traçar um panorama temático das dissertações de mestrado e teses de doutorado apresentadas ao Programa de Pós-graduação em Ciências da Comunicação – Área de concentração: Ciência da Informação e Documentação – da Escola de Comunicações e Artes da Universidade de São Paulo, no período de 1979 a 2002.

Esse tipo de pesquisa é também recorrente na região de inquérito de nosso objeto, a Educação Matemática. Podemos citar, a título de exemplo, o trabalho de Silva e Klüber (2012), no qual os autores buscaram investigar em que níveis de ensino focam as pesquisas brasileiras sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática e o que isso revela.

No âmbito da pesquisa com a tendência Investigação Matemática, já foram desenvolvidos trabalhos de Estado da Arte, tais como Ponte (1993), no qual o autor relata num artigo, segundo o seu entendimento, todas as fases que a Investigação Matemática havia passado até aquele momento em Portugal, fazendo uma abordagem histórica. Posteriormente, organiza um rol dos temas e metodologias estudados dentro da Investigação Matemática juntamente com algumas reflexões.

Ferreira (2002) argumenta que esse tipo de pesquisa favorece a identificação ou constatação de aspectos e dimensões que vêm sendo destacados e privilegiados em diferentes épocas e lugares. Enseja ainda, conhecer as formas e em que condições esses trabalhos têm sido produzidos.

Esses exemplos e o argumento supracitado subsidiam a nossa pesquisa, pois consideramos plausível conceber uma pesquisa de “Estado da Arte” visando mapear e discutir criticamente a produção acadêmica brasileira com enfoque na tendência Investigação Matemática, visto que é um campo de pesquisa pouco explorado no país.

Para tanto, a estrutura da discussão será apresentada da seguinte maneira: alguns aspectos teóricos sobre a tendência Investigação Matemática, metodologia e procedimentos da pesquisa, coleta de dados, categorização, interpretação e reflexões.

Investigações Matemáticas: Aspectos teóricos

Pensando na Investigação Matemática como uma subárea dentro da Educação Matemática, revela-se que nos últimos anos é um assunto presente na pauta de diversas pesquisas realizadas no âmbito acadêmico. Durante esse período de ascensão, vários foram os aspectos tidos como objetos de estudo a serem pesquisados nos diversos trabalhos que tratam da Investigação Matemática enquanto prática educativa. Dentre vários pesquisadores, João Pedro da Ponte, destaca-se pelas significativas contribuições que tem dado a essa linha de pesquisa no cenário mundial. Também autores como, Brocardo e Oliveira (2006), Braumann (2002), Fonseca, L. (2002), Fonseca, H. (2002), Serrazina (2002), contribuíram com o crescimento dos estudos nessa linha de pesquisa.

Embora sejam crescentes as discussões acerca dessa perspectiva, pode-se considerar recente a sua integração como campo de pesquisa no contexto da Educação Matemática, cerca de trinta anos, tendo a sua origem em Portugal no início dos anos oitenta, segundo Ponte (1993). No

nosso país é mais recente ainda². Mas, diante disso, somos remetidos a seguinte questão: o que se entende por Investigação Matemática no âmbito da Educação Matemática?

Ainda que o elemento principal deste artigo seja a pesquisa sobre a tendência Investigação Matemática, consideramos necessário abordar algumas das concepções acerca do tema na tentativa de relacionar com a teoria e as análises que serão elaboradas.

Pensando a Investigação Matemática no âmbito da Educação Matemática, pode-se entendê-la como sendo uma metodologia de ensino, que busca, por meio de atividades investigativas, conduzir o aluno a pensar e construir o conhecimento de maneira um pouco mais autônoma criando situações que o leve a raciocinar e entender o novo conceito.

Essa perspectiva em Educação Matemática caracteriza-se pelo estilo conjectura-teste-demonstração em que o aluno extrai informações, realiza testes de validação sobre estas informações, refina-as se necessário e, por fim, demonstra e comprova os resultados obtidos, conforme depreendido de Ponte, Brocardo e Oliveira (2006).

Para os autores supracitados, investigar em Matemática significa descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou não, estudá-los e retirar informações que podem ou não possibilitar a solução do problema de investigação posto.

Assim, podemos pensar a Investigação Matemática não somente como um forte instrumento para o ensino da Matemática, mas também para a construção e edificação da Matemática como ciência, pois, certamente, todos os seus conceitos passaram por fases características da investigação, sendo elas: 1) Exploração e formulação de questões a serem respondidas, 2) Elaboração de conjecturas, 3) Testagem e reformulação, 4) Justificação e validação dos resultados (Ponte, 2003, p. 21).

Relatados alguns aspectos que delimitam e justificam a pertinência desse trabalho, passamos para a descrição dos procedimentos metodológicos da pesquisa.

Metodologia e procedimentos da pesquisa

Seguindo na linha da pesquisa denominada “Estado da arte”, delimitamos essa pesquisa focando o estudo dos trabalhos acadêmicos em nível de pós-graduação *stricto sensu* que tratam de aspectos inerentes à tendência Investigação Matemática. Para isso, utilizamo-nos da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações – BDTD³, tendo em vista que este se constitui num dos principais bancos de teses e dissertações brasileiros.

Delineamos a elaboração desse trabalho em quatro etapas, sendo elas: 1) leitura dos resumos dos trabalhos feita na base da coleta dos dados, 2) releitura dos resumos para o destacamento das unidades que dizem dos enfoques das pesquisas; 3) categorização e 4) interpretação das categorias.

A primeira etapa corresponde a uma leitura preliminar dos resumos ainda no portal da BDTD. O objetivo foi identificar os trabalhos que de algum modo tratassem da Investigação Matemática em seu conteúdo, para assegurar os elementos básicos de interesse dessa pesquisa.

² Tendo em vista a revisão efetuada neste trabalho, os primeiros trabalhos catalogados no banco de dados da BDTD datam de aproximadamente cerca de 7 anos atrás.

³ <http://bdtb.ibict.br/>

Além disso, buscávamos encontrar trabalhos que tratassem dos aspectos da Investigação Matemática sob suas mais diferentes facetas.

Para isso, buscamos pelos trabalhos que tivessem em comum a expressão “Investigação Matemática”. Isso se constituiu num refinamento inicial dos dados a serem analisados e dessa análise encontramos 12 trabalhos que tratam sob algum aspecto da Investigação Matemática.

A etapa dois consistiu em uma nova leitura dos resumos, agora feita de maneira reflexiva, para que fosse possível identificar os focos das pesquisas em Investigação Matemática.

A terceira etapa emergiu da leitura feita na etapa anterior, pois sentiu-se a necessidade de categorizá-los de forma a contemplar quais os objetos de estudos que esses trabalhos enfocaram de modo articulado.

A partir desse momento, fizemos uso do *software* Atlas T. i. o qual segundo Klüber (2014), tem uso em pesquisas que requerem uma análise qualitativa.

Ainda de acordo com o autor supracitado, esse *software* apresenta algumas características principais, a saber: 1) Unidade Hermenêutica - (*Hermeneutic unit*); agrupa e administra os dados de um projeto de pesquisa; 2) Documentos primários – (*Primary documents*); consistem nos dados primários, podendo ser transcrições de entrevistas e notas de campo, figuras e áudio; 3) Citações - (*Quotes/quotation*); trechos relevantes destacados nos documentos primários; 4) Códigos – (*Codes/coding*); consistem em conceitos criados pelas interpretações do pesquisador das unidades destacadas; 5) Notas de análise - (*Memos*); registra o histórico da pesquisa e as interpretações do pesquisador, bem como dúvidas e questionamentos; 6) Esquemas gráficos - (*Network View*); permite a visualização das associações entre códigos e situações e 7) Comentários – (*Comment*); possibilitam registrar informações consideradas importantes e podem ser utilizados em todos os elementos anteriores.

E, na quarta etapa, interpretamos as categorias e efetuamos uma descrição geral dos trabalhos analisados. Nesse sentido, apresentaremos em seção específica, explicitações, críticas, reflexões e respostas à questão estabelecida.

Dessa análise emergiram cinco categorias que dizem de diferentes aspectos encontrados nas pesquisas, a saber: 1) Investigação Matemática e a prática docente, 2) Aprendizagem no contexto da Investigação Matemática, 3) Investigação Matemática e conteúdos matemáticos, 4) Investigação Matemática e as teorias da aprendizagem, 5) Relação da Investigação Matemática com outras possibilidades para o ensino de Matemática. Essas categorias estão dispostas no quadro 1.

Quadro 1

Categorias dos trabalhos analisados

Categorias	Síntese	Quantidade de trabalhos
C1 - A Investigação Matemática e o professor de Matemática	Esta categoria abrange os trabalhos que têm como enfoque a formação docente sob a prática investigativa. Esses estudos se debruçam sobre o professor, suas concepções acerca da Investigação Matemática e sua prática docente de sala de aula num ambiente investigativo.	4

C2 - Aprendizagem no contexto da Investigação Matemática	Os trabalhos que se inserem nesta categoria enfocam o processo de aprendizagem dos alunos em aulas com tarefas exploratório-investigativas. Buscam compreender quais as potencialidades e limitações do trabalho investigativo para a aprendizagem dos conceitos matemáticos, bem como da argumentação matemática.	2
C3 - Investigação Matemática e conteúdos matemáticos	A categoria expressa a abordagem dos conteúdos matemáticos por meio da Investigação Matemática como estratégia de ensino.	3
C4 - Investigação Matemática e as teorias da aprendizagem	Essa categoria reúne trabalhos que associam a Investigação Matemática com as teorias da aprendizagem.	1
C5 - Investigação Matemática e outras possibilidades para o ensino de Matemática	Nesta categoria, encontram-se os trabalhos que relacionam a Investigação Matemática com outras tendências para o ensino de matemática, bem como com outras possibilidades de ensino.	2

Fonte: Os autores.

Explicitados os elementos que dizem da metodologia e dos procedimentos de pesquisa utilizados, passamos a descrição das categorias emergentes.

Descrição das Categorias

A partir das categorias elencadas acima, destacamos em seguida, algumas reflexões sobre os trabalhos analisados, à luz da interrogação: *que focos se mostram nas pesquisas em Investigação Matemática e o que isso revela?*

Os trabalhos serão denotados pelas siglas D, T e DP para fazer referências aos trabalhos que são dissertações de mestrado, teses de doutorados e dissertações de mestrado profissional, respectivamente. Além disso, será mencionado o número de classificação do trabalho, por exemplo, a sigla D1 faz referência ao trabalho 1, o qual consiste em uma dissertação de mestrado, a sigla T10 faz referência ao trabalho 10 que caracteriza-se como tese de doutorado.

As discussões serão feitas seguindo a ordem de classificação posta no quadro 1. Para tanto começamos trazendo reflexões concernentes aos trabalhos da categoria C1.

Nesta categoria, **C1- A Investigação Matemática e a prática docente** agrupam-se os trabalhos D1, D4, D5, T10 que datam dos anos de 2008, 2007, 2007 e 2007 respectivamente.

Esses trabalhos possuem como foco de estudo a prática e a concepção docente, relacionando-as com a Investigação Matemática. Em geral, são estudos de caso realizados de maneira empírica, oportunizando que os professores experienciem uma prática investigativa em sala de aula. A partir disso, as reflexões incidem, por exemplo, sobre as transformações ocorridas na postura profissional do sujeito investigado ou sobre os conhecimentos acerca da Investigação Matemática que são revelados pela prática desses professores.

Um dos trabalhos dessa categoria se destacou por ter como objetivo proporcionar e analisar a reflexão da própria prática empreendida pela professora pesquisadora, ou seja, trata-se de uma pesquisa da própria prática num contexto de tarefas exploratório-investigativas, refletindo sobre

a contribuição da prática investigativa para a transformação de alguns saberes docentes, convergindo com Freire (2006, p. 38) que afirma que “ensinar exige reflexão crítica sobre a prática”.

A categoria **C2 - Aprendizagem no contexto da Investigação Matemática** é composta por dois trabalhos, D3 e D8, elaborados em 2009 e 2012 respectivamente, os quais têm como objeto de estudo a aprendizagem matemática no contexto da Investigação Matemática. Esses trabalhos incidem sobre o estudo do processo de aprendizagem de vários conceitos matemáticos amparado na Investigação Matemática.

Também se debruçam sobre a contribuição dessa tendência no desenvolvimento do pensamento algébrico, no processo de argumentação do pensamento matemático, bem como a mudança de comportamento e participação dos alunos nas aulas sob a perspectiva investigativa.

Em geral, esses estudos são empreendidos no contexto de sala de aula em turmas do Ensino Fundamental e Médio e os resultados são inferidos a partir da análise dos registros escritos em forma discursiva e dos registros das resoluções das atividades investigativas propostas.

Na categoria **C3 – Investigação Matemática e conteúdos matemáticos**, os trabalhos dedicam-se ao estudo da abordagem de alguns conteúdos matemáticos por meio da Investigação Matemática e apresentam uma sequência de atividades para o ensino de Matemática. Nos três trabalhos que compõem essa categoria, D2, DP6 e D11, os conteúdos abordados são conteúdos de álgebra, de geometria, de conjuntos finitos e infinitos. Os trabalhos datam de 2008, 2013 e 2009, respectivamente.

Esta categoria possui ligação com a categoria **C2**, tendo em vista que nos trabalhos analisados, o estudo do processo de aprendizagem da Matemática num caráter investigativo ocorre, em geral, amparado por um conteúdo matemático. Por exemplo, um dos trabalhos tinha por objetivo investigar como se desencadeia e se desenvolve a argumentação dos alunos em atividades de Investigação Matemática e para isso utilizou atividades investigativas que abordavam conceitos de geometria, como propriedades de polígonos e comprimento de circunferência.

A categoria **C4 – Investigação Matemática e as teorias da aprendizagem**, é composta por apenas um trabalho, denotado por D7, realizado no ano de 2008. Este trabalho investiga as potencialidades de Investigação Matemática na formação dos conceitos algébricos fundamentado na teoria de Vygotsky (1934) e Vergnaud (1994) sobre a formação de conceitos. Talvez o fato de haver somente um trabalho com essa característica esteja relacionado com a dificuldade inerente ao processo de transpor conceitos de uma teoria para o ensino de Matemática sob determinada tendência. Essa característica indica o quanto a área é nova e ainda sem teorização mais consistente, pois a tendência de toda área nova é ficar restrita a ela mesma.

Na categoria **C5 - relação da Investigação Matemática com outras possibilidades para o ensino de Matemática** encontram-se dois trabalhos, DP9 realizado no ano de 2013 e D13 realizado em 2010, que relacionam a Investigação Matemática com outras tendências para o ensino de Matemática, a saber, as TIC's educacionais e o lúdico. Também relacionam a Investigação Matemática com outras possibilidades de ensino, como por exemplo, ensinar Matemática a partir da Investigação de paradoxos.

Essa categoria revela o caráter intercoletivo da Investigação Matemática, tendo em vista que ela pode ser concebida em consonância com outras metodologias para o ensino de Matemática.

Considerações finais

O estudo e as interpretações aqui realizadas, mesmo que se configurem como preliminares oportunizaram além de descrever as características dos trabalhos mapeados, constatar os enfoques, as características, a epistemologia das pesquisas em Investigação Matemática.

O estudo veio fortalecer os argumentos que dizem da recente emergência da Investigação Matemática como campo de pesquisa no contexto da Educação Matemática brasileira. Isso se confirma pelo número de trabalhos que emergiram na busca realizada, bem como na temporalidade, sendo o ano de 2007 a publicação do trabalho mais antigo e o ano de 2013 do trabalho mais recente.

Outro fator relevante apontado pela pesquisa é que a maior parte dos trabalhos consiste em dissertações de mestrado acadêmico, perfazendo oito trabalhos. Isso mostra que as pesquisas relacionadas à Investigação Matemática estão ocorrendo com mais veemência na pós-graduação em nível de mestrado. Além disso, este fato aponta para um nível de pesquisa que ainda é exploratório, pois o mestrado é o primeiro degrau da formação de um pesquisador profissional.

Pode revelar também que os pesquisadores que desenvolveram suas dissertações de mestrado nessa temática ou mudaram de área de estudo ou não deram continuidade à formação acadêmica. E isso pode influenciar no avanço e consolidação da área.

Diante das análises das categorias que emergiram e tendo em vista os focos que se mostram nas pesquisas em Investigação Matemática, pode-se afirmar que em geral as pesquisas estão focadas no professor, no que diz respeito às suas concepções acerca da Investigação Matemática e a sua prática docente de sala de aula num ambiente investigativo. Também enfocam no estudo de como se dá o desenvolvimento e a transformação da prática profissional do professor de Matemática em um ambiente investigativo. Portanto, em outras palavras, acredita-se no potencial intrínseco da própria investigação.

Outro enfoque dado pelas pesquisas concerne ao processo de aprendizagem dos alunos em aulas com tarefas exploratório-investigativas. As pesquisas buscam compreender quais as potencialidades e limitações do trabalho investigativo para a aprendizagem dos conceitos matemáticos.

Tratar da abordagem dos conteúdos matemáticos por meio da Investigação Matemática como estratégia de ensino é também um dos enfoques dos trabalhos analisados. Talvez esse enfoque seja o mais plausível a ser esperado, tendo em vista que a Investigação Matemática é uma metodologia para o ensino da Matemática que tem no seu âmago a abordagem dos conteúdos matemáticos.

Enfocar a Investigação Matemática em consonância com as teorias da aprendizagem, por exemplo, a teoria Vigotskiana, também se mostrou como um dos objetivos das pesquisas analisadas. Essa categoria é esclarecedora no sentido de que a temática, ainda em consolidação, está imersa nela mesma, sem relações mais consistentes com teorias de aprendizagem. Em certa conotação, podemos conceber que poucos são os argumentos advindos de outras teorias que tem circulado no âmbito da pesquisa em Investigação Matemática.

E, por fim, com menor intensidade, porém não com menor importância, as pesquisas voltam-se para a relação existente entre a Investigação Matemática e outras tendências para o ensino de Matemática, bem como com outras possibilidades de ensino, como por exemplo, a Investigação Matemática e os paradoxos.

Ao indagarmos *o que isso revela?* alguns aspectos podem ser explicitados. Os pesquisadores olham para o professor como componente importante em tarefas de natureza investigativa. Há uma não ingenuidade dos pesquisadores ao assumirem que há limitações nesse tipo de trabalho. Isso se evidencia quando as pesquisas explicitam a busca por potencialidades e limitações do trabalho investigativo.

Outro aspecto revelado pelas pesquisas é que elas buscam fundamentar a compreensão e significado dos conceitos matemáticos por meio de práticas com a Investigação Matemática. Isso do ponto de vista epistemológico denuncia que as pesquisas empreendem seus estudos sob um caráter empírico, concebendo a ideia de que o conhecimento deriva dos fatos concretos.

Diante de todo esse contexto, revela-se a pluralidade existente entre as pesquisas que tratam da Investigação Matemática. Entretanto, ao indagarmos o que as pesquisas revelam, fomos direcionados a indagarmos sobre o que elas não revelam, e dessa forma, o estudo mostra que nenhuma das pesquisas dedicou-se a estudar aspectos filosóficos e epistemológicos da Investigação Matemática. Vale ressaltar que pode haver pesquisas com esse enfoque, entretanto não estão registradas no Banco de Teses da BDTD até o ano de 2013.

E, por fim, destaca-se a urgência em tratar detidamente dos aspectos epistemológicos que dizem da Investigação Matemática na busca por teorizações mais profundas, embora as pesquisas sobre as práticas pedagógicas possuam sua significância e papel na consolidação desta tendência.

Referências e bibliografia

- Baccarin, F. L. (2013). *Conjuntos infinitos e suas surpresas: uma sequencia de atividades* (Dissertação de Mestrado profissional em matemática). 87 f. Programa de Pós-graduação em Matemática, Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina.
- Dorta, F. (2013). *Os paradoxos e as aulas de matemática: algumas reflexões e sugestões* (Dissertação de Mestrado profissional em matemática). 146 f. Programa de Pós-graduação em Matemática, Centro de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Londrina, Londrina.
- Ferreira, J. P. (2010). *Aprendizagem, Investigação Matemática e Tecnologias*. UFMG/FaE. 115 f., enc, il.
- Ferreira, N. S. A. (2002). As pesquisas denominadas “Estado da Arte”. *Rev. Educação & Sociedade*, XXIII(79).
- Klüber, T. E. Atlas.ti como instrumento de análise em pesquisa qualitativa de abordagem fenomenológica. *ETD – Educ. temat. digit.* Campinas, 16(1), 5-23, jan./abr. 2014 ISSN 1676-2592. SP.
- Lamonato, M. (2007). *Investigando Geometria: Aprendizagens de professoras da educação infantil* (Dissertação de Mestrado). 244 f. Programa de Pós-graduação em Educação, Centro de Educação e Ciências Humanas, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos.
- Oliveira Baccarin, S. A. (2008). *Investigação Matemática: uma análise da sua contribuição na construção de conceitos algébricos* (Dissertação de Mestrado). 145 f. Programa de Pós-graduação, Faculdade de Educação, Universidade de Brasília, Brasília.

- Ponte, J. P. A educação matemática em Portugal: Os primeiros passos de uma comunidade de investigação. *Quadrante*, 2(2), 95-126. <http://hdl.handle.net/10451/4225>. Acessado em 26/09/2014.
- Ponte, J. P., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2006). *Investigações Matemáticas na sala de Aula* (1a edição). Belo Horizonte: Autentica (Coleção Tendências em Educação Matemática).
- Queiroz, F. M., & Noronha, D. P. (2004). Temática das dissertações e teses em ciência da informação no Programa de Pós-Graduação em Ciências da Comunicação da USP. *Ci. Inf.*, 33(2), 132-142, maio/ago. Brasília.
- Reginaldo, B. K. S. (2012). *Argumentação em atividades investigativas na sala de aula de matemática* (Dissertação de Mestrado). 168 f. Programação de Pós-graduação em Educação: Conhecimento e Inclusão Social, Faculdade de Educação, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.
- Resende, M. R. (2007). *Re-significado a disciplina Teoria dos Números na formação do professor de matemática na licenciatura* (Tese de Doutorado em Educação Matemática). 240 f. Pontífice Universidade Católica, São Paulo.
- Silva, V., & Klüber, T. E. (2012). Modelagem Matemática nos anos iniciais do ensino fundamental: uma investigação imperativa. *Revista Eletrônica de Educação*, 6(2), nov. 2012. Artigos. ISSN 1982-7199. Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, Brasil.

Un taller de Matemáticas para Ingeniería Estadística en una universidad pública de Chile

Claudia Vargas Díaz

Departamento de Matemática, Universidad del Bío-Bío
Chile

cvargas@ubiobio.cl

Nicolas Thériault

Departamento de Matemática, Universidad del Bío-Bío
Chile

ntheriau@ubiobio.cl

Resumen

Quisimos indagar las percepciones de alumnos y docentes acerca de la experiencia docente de un taller especial realizado en el programa de Ingeniería Estadística de la Universidad del Bío-Bío en Chile cuyos estudiantes poseen una base de matemática deficiente. Hemos considerado grupos de dos años diferentes en cuatro asignaturas de primer año. Se quería conocer qué significaría para los estudiantes modificar la sesión de práctica con la aplicación de un taller donde participaría el docente responsable de la asignatura y un segundo docente para apoyar mejor a los estudiantes trabajando en grupos. Los grupos contaron con una hoja con problemas de los contenidos vistos en la teoría y al final de la sesión debían ser evaluados. Del estudio, pudimos extraer algunas conclusiones acerca de la aplicabilidad del taller y de los hábitos de estudio de los estudiantes.

Palabras clave: trabajo colaborativo, matemática, didáctica, clases de práctica.

Introducción

Los últimos 15 años se vienen desarrollando proyectos de mejoramiento de la calidad de la enseñanza superior en Chile. Se inició el proyecto MECESUP¹ que entregaba recursos a las universidades chilenas.

Los objetivos del Programa van dirigidos al centro de los esfuerzos de Chile para proveer las competencias necesarias que permitan aumentar la competitividad global, sostener el desarrollo económico y social, y asegurar que ningún talento se pierda por diferencias en las oportunidades de aprendizaje. Para ello, deberá mejorar la flexibilidad y coherencia del sistema de Educación Superior chileno, crear los incentivos necesarios para el mejoramiento de la calidad y eficiencia y apoyar el sistema nacional de innovación a través del aumento del inventario de capital humano avanzado. (Fuente: <http://www.mec2.com/>).

Nosotros queremos rescatar la importancia de investigar si una metodología funciona teniendo en cuenta el contexto estudiantil, los recursos de la universidad y la infraestructura. No

¹ "El Programa de Mejoramiento de la Calidad y Equidad de la Educación (Programa MECESUP) forma parte de los esfuerzos del Gobierno de Chile para apoyar la transición de su economía actual a una basada en el conocimiento, incrementando la equidad y la efectividad de su sistema de Educación Terciaria". (<http://www.mec2.com>)

obstante, no es fácil que el conocimiento generado en la investigación se transforme en estrategias educativas efectivas (Artigue, 2003). Es así, que para dar paso a una innovación dentro de una institución sería muy necesario en primer lugar, conocer el impacto de ella con un grupo pequeño de estudiantes para identificar, a través de sus percepciones (y quizás sus calificaciones) la eficacia del método y posibles mejoras.

Los estudiantes de la carrera estudiada

La caracterización de los estudiantes de la UBB la realiza cada año la Dirección General de Análisis Institucional (DGA) a través de la aplicación de un cuestionario. Para la caracterización socioeconómica familiar de los estudiantes, se utiliza el estándar nacional de quintiles (Tabla 1).

Tabla 1

Quintiles Mensuales de Ingreso per cápita

Quintil	Monto Mínimo	Monto Máximo
1	0	\$70.000
2	\$70.967	\$118.854
3	\$118.855	\$182.793
4	\$182.794	\$333.909
5	\$333.910	Sin tope

Actualmente, los estudiantes de la UBB pertenecen al primer quintil con un 35.07%, seguido por el 26.43% de estudiantes pertenecientes al segundo quintil y un 16.58% del tercer quintil. La distribución porcentual por quintiles de los alumnos de la carrera donde llevamos a cabo la experiencia está dada en la Tabla 2 para los años 2012 y 2013 de nuestro estudio.

Tabla 2

Distribución de quintiles para la carrera estudiada.

Quintil	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Sin información
2012	35,71%	42,86%	7,14%	0%	0%	14,29%
2013	54.55%	27,27%	0%	9.09%	0%	0,09%

Los datos nos indican que la mayoría de los estudiantes se encontraron en los quintiles 1 y 2 en los años 2012 y 2013 respectivamente, lo cual, motiva aún más a considerar el esfuerzo económico de los alumnos y pensar en ofrecer los mejores apoyos que puedan significar para ellos a largo plazo el éxito académico.

Los estudiantes de la UBB provienen mayormente de liceos municipales (públicos) y de colegios particulares subvencionados. En la carrera del estudio, la distribución por tipo de establecimiento es la que sigue en la Tabla 3:

Tabla 3

Procedencia de los estudiantes de la carrera

Año	Particular Pagado	Particular Subvencionado	Público
2012	0	14,29	85,71
2013	0	18,18	81,82

Pensamos que de alguna manera, la preparación de los estudiantes se relaciona con su procedencia, lo que invita a realizar los esfuerzos necesarios para impedir que los posibles talentos no se pierdan por diferencia de oportunidades.

Los estudiantes que ingresan a esta carrera poseen un bajo nivel en la matemática elemental (manejo de la operatoria básica de fracciones, potencias, radicación, factorización entre otros) que les dificulta enfrentar las asignaturas del primer año de universidad. Además, el promedio de ingreso a la carrera es bajo. Por ejemplo, en 2011 el promedio fue de 554 puntos siendo el último puntaje de ingreso de 510 puntos, por lo que es una de las carreras con el corte más bajo de ingreso vía Prueba de Selección Universitaria (PSU)² en la UBB.

Una opinión generalizada de los docentes es que los estudiantes de primer año en general poseen un desarrollo más bien mecánico de la matemática sin un pensamiento matemático desarrollado que les permita resolver problemas de matemática de nivel universitario. Es así, que al principio del primer semestre nos encontramos frente a diferentes tipos de obstáculos para poder llevar a cabo nuestra docencia o al menos para solamente explicar los contenidos sin tener que detenernos a corregir errores algebraicos o aritméticos. En ocasiones, el estudiante se resiste y se ve impedido de realizar una adecuada transposición didáctica (Chevallard, 1985). Es decir, de adaptar los nuevos conocimientos a lo que ya se sabe previamente de la enseñanza escolar.

En la asignatura de Cálculo, por ejemplo, donde se enseña funciones, los alumnos necesitan una atención especial para este tópico. Se ha estudiado la incidencia que puede tener en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las funciones el considerar sus diferentes tipos de representación y las conversiones entre ellas (Font, 2005). Como docentes de la asignatura de Cálculo, necesitamos que los estudiantes comprendan el concepto de función puesto que este concepto precede en nivel de abstracción a los temas posteriores de cálculo de límites y derivadas que son parte del programa.

Dado que el aprendizaje depende en gran medida del entorno donde los estudiantes desarrollan sus aprendizajes (Vigotski, 1963) quisiéramos propiciar un ambiente donde el estudiante pueda contar con docentes disponibles y cercanos para atender sus consultas. Por ello, nos interesan las percepciones de los estudiantes sobre esta nueva manera de trabajar en clases y sobre esto consideramos la aplicación de un cuestionario.

Para el planteamiento del taller también tuvimos en cuenta el proyecto educativo de la universidad a la cual nos encontramos adscritos. El modelo educativo desarrollado por la Universidad del Bío-Bío presenta tres ejes temáticos con sub-dimensiones (Tabla 4).

Tabla 4
Ejes del modelo educativo UBB

Dimensiones	Sub-dimensiones
Compromiso	Disposición al aprendizaje Responsabilidad Social
Diversidad	Trabajo colaborativo
Excelencia	Capacidad emprendedora y liderazgo Capacidad para comunicarse

² El proceso de selección universitaria se aplicó por primera vez en el año 1967 a cargo de la Universidad de Chile para el ingreso a sus aulas. Actualmente, sus pruebas de selección se realizan para seleccionar los estudiantes que ingresan a las 25 universidad adscritas al Consejo de Rectores de Chile CRUCH. El puntaje máximo de cada prueba es de 850 puntos. De acuerdo a los puntajes alcanzados los candidatos pueden elegir a qué carrera postular.

El diseño del taller

El taller propuesto para la clase de práctica se pensó como trabajo en grupo donde los integrantes colaboran para la resolución de los problemas propuestos por su profesor. Las características del taller son las siguientes:

1. Taller de 80 minutos (duración de la sesión de práctica) orientado a la realización de ejercicios donde se organizará a los estudiantes en grupos de cuatro.
2. Se entregará a cada grupo una Hoja de Trabajo acerca de los contenidos vistos durante la semana de clases. En la sesión trabajan dos docentes: el docente que imparte la asignatura y otro docente financiado por el proyecto. El docente entrega listados de ejercicios a los estudiantes.
3. El grupo variará cada sesión con el fin de fomentar que cada estudiante sea capaz de trabajar en equipo con cualquiera de los compañeros de la asignatura.
4. Cada sesión tendrá una evaluación grupal llamada Quiz que será calificado por el segundo docente
5. La cantidad de ejercicios será siempre la misma en cada Hoja de Trabajo (10 ejercicios relevantes de la materia) y la evaluación será en los 20 últimos minutos.
6. La asistencia al taller es obligatoria y el promedio de las notas de las evaluaciones se promediará será un 10% de la nota final.

La definición de trabajo en grupo que consideramos es la de Artzt y Newman "Una actividad que involucra a un pequeño grupo de estudiantes que trabajan juntos como un equipo para resolver un problema, completar una tarea, o realizar un objetivo común" ³

Los beneficios que supone para los estudiantes trabajar en grupo son múltiples. Sólo desde el punto de vista social, el intercambio de información, el desarrollo de habilidades socio-comunicativas entre otros viene a justificar su necesidad. Estos aspectos han sido abordados desde la psicología por los investigadores Johnson & Johnson (1998) en sus trabajos acerca de Aprendizaje Cooperativo donde destacan beneficios como:

- mayor productividad de los estudiantes
- relaciones positivas entre los pares
- mayor autoestima y capacidad de enfrentar la adversidad

Sin embargo, aprender es un hecho social que se ve limitado si el único que comunica es el docente con escasas intervenciones por parte de los estudiantes como suele ocurrir en el aula universitaria. Además, formar grupos en el aula no es lo habitual en las clases de matemática del contexto estudiado. Pese a que como declaramos antes, en el modelo educativo⁴ propuesto por la universidad, se explicita que como parte del perfil del egresado se espera que trabaje de manera asociativa en la consecución de logros como parte de la competencia genérica de Trabajo Colaborativo. Sostenemos que en clases de matemática es posible trabajar en esta competencia con los estudiantes pero evidentemente, deben darse las condiciones.

³ La definición está declarada en el artículo: Trabajo Cooperativo en Clase de Matemática, disponible en <http://www.ugr.es/~pflores/textos/otros/LaXSanFernando.pdf>

⁴ [http://www.ubiobio.cl/web/descargas/Modelo_Educativo_\(08.07.08\).pdf](http://www.ubiobio.cl/web/descargas/Modelo_Educativo_(08.07.08).pdf)

Lo natural y lo común es encontrar un solo profesor, maestro o tutor dentro de un aula. Pero, ¿puede un profesor atender las consultas e inquietudes de todos sus estudiantes? Podría darse el caso en que sí, quizás si estamos hablando de un profesor que pasa bastante tiempo con sus estudiantes, pero es difícil en el contexto de cursos de 3 sesiones de 80 minutos cada semana. Si bien, existe la instancia para los estudiantes de asistir a consultar a la oficina del profesor a realizar consultas, esto suceda poco puesto que los estudiantes tienen hasta cinco asignaturas por semestre, lo cual completa su disponibilidad horaria. La cuestión es, resolver las inquietudes en el tiempo de clases, lo cual es más factible si hay dos profesores atendiendo consultas de grupos en vez de uno.

Existen experiencias con dos profesores en aula, registradas por el Grupo de Investigación de Organización de Centros (GROC, Grup de recerca d'organització de Centres⁵) que les han llevado a analizar la posibilidad de trabajar dos maestros en el aula a nivel de educación primaria. GROC menciona que es una manera de mejorar el aprendizaje de los niños ya que disminuye el ratio de estudiantes que debe abarcar el profesor, y además, es más fácil la detección de dificultades de los alumnos y de los potenciales también, junto con el establecimiento de relaciones más estrechas entre profesores y alumnos. Además, el hecho de compartir dos docentes en el aula, estrecha los vínculos profesionales y ofrece la posibilidad de identificarse con el otro.

Objetivos y metodología

El objetivo que nos planteamos fue conocer las percepciones de los estudiantes y de los profesores acerca de los talleres antes descritos en las asignaturas del primer año de universidad en la Carrera de IE.

Las percepciones de estudiantes se han considerado en diferentes etapas de la enseñanza. Desde edades preadolescentes (Ampadu, 2012) hasta estudios que involucran estudiantes y profesores universitarios. Por ejemplo, en términos de evaluación (Trillo & Porto, 1999), de metodología docente (Diez et al, 2009) (Gil, 2013) y sobre los cursos recibidos y elegidos en la universidad (Alfaro, 2012).

De lo anterior se desprende que es importante considerar las percepciones y que ellas nos orientan y nos ayudan a “escuchar” a los estudiantes para tomar decisiones.

Los objetivos específicos que nos planteamos fueron:

1. Diseñar los talleres adecuados para los estudiantes de la carrera de IE.
2. Impartir los talleres con dos docentes del Departamento de Matemática.
3. Conocer la opinión de los estudiantes de IE de primer año acerca de los talleres.
4. Reconocer si los talleres resultaron un apoyo para los estudiantes de la carrera de IE.

La *población de estudio* estuvo conformada por estudiantes de primer año de la carrera de IE de la Facultad de Ciencias de dos promociones seguidas (2012 y 2013) y para ello se contó con el respaldo y autorización del jefe de carrera.

Para obtener la información consideramos la aplicación de dos cuestionarios a los estudiantes: uno al inicio de la asignatura y el otro al final. El primero para conocer las

⁵ <http://www.joanteixido.org>

expectativas del estudiante con respecto al Taller, y el segundo para conocer las impresiones de los estudiantes sobre la efectividad del Taller. Además, se aplicó otro cuestionario a los profesores que participaron en la parte experimental para conocer sus impresiones.

Los cuestionarios fueron planteados para obtener una respuesta abierta (ver Apéndice A). Las preguntas buscaron orientarnos para saber si el taller fue de ayuda para el estudio y/o el aprendizaje de los contenidos por parte de los estudiantes. Con respecto a los cuestionarios aplicados a los profesores, era muy importante conocer la opinión de ellos puesto que su opinión enriquecería el trabajo si se logra implementar a futuro. Como complemento a la información también consideramos realizar consultas a los profesores a través del correo electrónico.

Primer año de aplicación y percepciones de los docentes

En 2012 ingresaron once estudiantes a la carrera (muy debajo de los años anteriores). Aunque el proyecto estuvo pensado para 30 estudiantes al menos, decidimos aplicarlo puesto que las características de los estudiantes seguían siendo las mismas de años anteriores. Los talleres debieron hacerse con parejas de estudiantes en lugar de grupos de cuatro estudiantes como teníamos pensado. El puntaje promedio de ingreso de este año alcanzó los 540 puntos, siendo el más alto de los puntajes de 606 puntos y el más bajo de 505.

Los docentes, que identificaremos por una letra mayúscula, estuvieron a cargo de la asignatura en el semestre indicado y colaboraron con el proyecto de acuerdo a su carga académica en forma voluntaria (Tabla 5). El docente que acompañó las sesiones de práctica de ambas asignaturas lo identificaremos por la letra Q, su formación es de Licenciado en educación y su título profesional es de Profesor de matemática.

Tabla 5

Información básica acerca de los profesores responsables del primer semestre 2012

Docente	Formación	Asignatura	Teoría	Práctica
Profesor L	Licenciado en Matemática	Cálculo I	x	x
Profesor M	Magister en Matemática	Álgebra	x	x

Finalizado el semestre, aplicamos el cuestionario (ver Apéndice A) a los docentes y obtuvimos por ejemplo las respuestas (R) a las preguntas (P):

P: Estimado profesor, ¿considera usted que el taller (la guía de ejercicios más la presencia de los dos profesores en el aula) significó una ayuda para el aprendizaje de los estudiantes?

Las respuestas obtenidas fueron las siguientes:

R: “Me pareció que si por los resultados y también debo manifestar que hubo alumnos que tomaron un desinterés, pues faltaban a los talleres”. Profesor M

R: “Pienso que el trabajo realizado fue de gran ayuda para los alumnos, pues si consideramos los escasos conocimientos que traían de enseñanza media y además los bajos hábitos de estudio, las posibilidades de reprobar el ramo eran bastante altas, sin embargo, gran parte del curso pudo aprobar, al menos los cursos del primer semestre. Por lo demás, dado que habían alumnos con tan mala base, era necesario que alguien les explicara de manera personalizada” Profesor Q.

Sobre la pregunta,

P: ¿Fue para usted un apoyo en la atención de los estudiantes contar con la presencia del profesor ayudante?

La respuesta de uno de los profesores fue:

“Fue un aporte valioso ya que permitió una atención personalizada a los estudiantes”
Profesor L Álgebra 1er. Semestre 2012

Se les consultó también lo siguiente:

P: ¿Consideraría usted realizar talleres del mismo tipo para cursos más numerosos?

R: “Creo interesante la posibilidad de extender esta estrategia ...”

“...estimo importante implementar mesas para trabajo en grupo de los estudiantes, más aún si son cursos numerosos” Profesor L.

Interpretamos que los docentes valoraron positivamente el taller y no les incomodó contar con la presencia de un docente que en el fondo les cooperaba con la atención que han denominado “personalizada”.

Como explicamos en un principio, el proyecto contemplaba que los talleres estuvieran dirigidos por el mismo profesor del curso contando además en el aula con el profesor ayudante. Sin embargo, para el segundo semestre la dirección del Departamento de Matemática distribuyó la carga horaria de modo que los horarios de práctica fueran atendidos por profesores diferentes a los profesores responsables de la asignatura (horario de teoría) (Tabla 6) .

Tabla 6

Información básica acerca de profesores responsables del segundo semestre 2012

Docente	Formación	Asignatura	Teoría	Práctica
Profesor C	Doctor en Matemática	Cálculo II	x	
Profesor X	Profesor de Matemática	Cálculo II		x
Profesor D	Magister en Matemática	Álgebra Lineal	x	
Profesor Y	Licenciado en Matemática	Álgebra Lineal		x

Tanto el profesor C como el profesor D no se vieron involucrados directamente en las prácticas y se contrataron dos profesores (X e Y) para hacer la práctica. El profesor acompañante (Q) que fue el mismo profesor del primer semestre.

Posterior a la ejecución del proyecto se les pasó un cuestionario con consultas a los profesores siendo una de las preguntas la siguiente con una de las respuestas:

P: ¿Cuál es su visión acerca de los estudiantes en la asignatura en que usted realizaba la práctica durante el segundo semestre de 2012 para la carrera de Ingeniería Estadística? Por ejemplo, el interés de los estudiantes en el curso, la motivación para resolver los problemas que usted le proporcionaba, la asistencia y compromiso con el taller.

R: 1. Material de talleres realizados, yo no tengo.(No guardé)

2. Referente al interés de los alumnos, comenté con el profesor de la asignatura mi impresión de:

- Pasividad de los alumnos frente a la asignatura.

-Trabajaban durante los talleres y/o clases, sin embargo, también se observó que muchas veces no estaban claros en la materia que estaban en cátedra. Profesor X

Cabe destacar que el profesor X, en ninguna oportunidad entregó una hoja con ocho problemas como se le había solicitado, pero escribió algunos problemas en la pizarra. No realizó evaluaciones todas las semanas y de las que si se hicieron no cooperó en tomarlas de manera a

dos alumnos juntos como se le había solicitado (cada alumno contestaba por sí sólo). Podría esperarse esta situación ya que desde el principio el profesor X advirtió que no prepararía material ni revisaría las evaluaciones, pese a haberle entregado las indicaciones a seguir y a contar la cooperación del profesor D y el profesor Q.

El profesor Y que atendía las horas de práctica de la asignatura de Álgebra Lineal no contestó la consulta formalmente, sin embargo, en ocasiones, mencionó preocuparse por el escaso contacto con el profesor a cargo del curso.

Percepciones de los estudiantes en el primer año de ejecución

Al comienzo y final de semestre del primer año de ejecución del proyecto, año 2012, se aplicó un cuestionario a los estudiantes para conocer sus percepciones en cuanto al trabajo realizado en el taller. Las preguntas iban enfocadas a conocer si los estudiantes tenían alguna idea de para qué podría servir un taller (ver Apéndice A) Las preguntas de respuesta abierta buscaban orientarnos de si el taller fue de ayuda en el estudio y en el aprendizaje de los contenidos por parte de los estudiantes. Unánimemente, los estudiantes manifiestan total convicción de que el taller significó para ellos una gran ayuda. Además, expresan que la modalidad de trabajo y la evaluación les acomodaba y favorecía su estudio. Debemos destacar que el taller fue bien considerado por los estudiantes. En efecto, citamos uno de sus comentarios:

Estamos reforzando constantemente lo que hemos visto en clases anteriores, además que lo que no entiendo muy bien en clases me lo explican en el taller” Estudiante 1, 2012.

En relación a las preguntas realizadas y sus respuestas queremos destacar la siguiente:

P: Le resultaría un apoyo en el estudio de otras asignaturas los talleres de este tipo?
Justifique su respuesta.

R: “Si, porque como somos pocos, nos alcanza con los dos profesores” Estudiante 2, 2012

R: “Si, porque los dos profesores son atentos y nos ayudan en todas las dudas, lo requeramos o no” Estudiante 3, 2012.

En general, los estudiantes explicitan necesidad de este tipo de talleres en otras asignaturas de matemática. También quisieran tener este taller en asignaturas fundamentales de la carrera. Esto nos hace pensar que al menos este semestre, los estudiantes necesitan bastante acompañamiento.

El segundo semestre pensamos que era importante agregar una pregunta para cautelar la asistencia de los estudiantes al taller.

P: ¿Ha asistido usted a todo los talleres? Si/No

En efecto, descubrimos un desinterés significativo en la asistencia al taller de Álgebra Lineal. Esto porque los estudiantes notaron que el taller de álgebra lineal faltó coordinación entre el profesor de teoría y el profesor de práctica. Incluso los estudiantes afirman no haber asistido porque el taller no les aportaba.

Como en el taller de cálculo 2 no se evaluó a los estudiantes todas las semanas y las evaluaciones que se tomaron no fueron bi-personales como se le había solicitado al docente de práctica. Esto provocó un gran desconcierto en los estudiantes. Los estudiantes manifestaron que funcionaba mejor el semestre anterior el sistema del taller porque el profesor de teoría era el mismo que el de taller.

Segundo año de ejecución del proyecto: primer semestre del año 2013

En el primer semestre se ejecutó el proyecto con bastante normalidad. Como habíamos mencionado antes, la carrera ha experimentado una baja en la cantidad de matriculados. En efecto, en 2013 ingresaron 9 estudiantes. Con respecto al puntaje de ingreso, el más alto de los puntajes fue de 663 puntos y el más bajo de 483. El promedio de ingreso de este año alcanzó los 551 puntos.

De nuevo, las respuestas de los estudiantes al cuestionario con respecto al taller realizado fueron positivas. En gran medida, pensamos que puede deberse a la necesidad continua que tienen de acompañamiento, motivación y superación de falencias de conocimientos previos.

Este año trabajó en la asignatura dos nuevos docentes para apoyar las clases que denominaremos W y Z, cuya formación es de Licenciado en Matemática en ambos casos.

Tabla 7

Información básica acerca de profesores responsables del primer semestre 2013.

Docente	Formación	Asignatura	Teoría	Práctica
Profesor N	Licenciado en Matemática	Cálculo I	x	x
Profesor M	Magister en Matemática	Álgebra	x	x

En esta oportunidad se aplicó el cuestionario al profesor N que no había participado anteriormente (el profesor M había participado con el mismo curso en 2012) (Tabla 7).

P: ¿Consideraría usted realizar talleres del mismo tipo para cursos números?

R: Es posible, sólo que se requiere más preparación en la elaboración del taller para que se cumpla su objetivo. Profesor N.

Otra de las respuestas a la pregunta fue la siguiente:

P: ¿Qué nota de a 7 le pondría a la participación de los estudiantes en los talleres? (escala de notas 1 a 7 vigente en la UBB)

R: Un 5,5. No hubo muchas diferencias con respecto a una práctica común. Profesor N.

Aquí tenemos que comentar que el Profesor N no realizó evaluaciones todas las semanas.

Para tener mayor información consultamos la opinión del Profesor W a través del correo electrónico solicitando que indicase los aspectos positivos y negativos que pudo detectar en la realización de los talleres (el enunciado de la cuestión está indicado en la metodología). Su respuesta fue la siguiente:

R: Aspectos Positivos

- Existe mejora en el aprendizaje por parte del alumno.
- El alumno tiene un papel activo en cada taller.
- Mejora la formación como docente al interactuar con los alumnos.

Aspectos Negativos

- Requiere un mayor esfuerzo de responsabilidad y disciplina por parte del alumno.
- Algunos alumnos tenían dificultades para comprender las explicaciones de clase debido a falta de conceptos matemáticos básicos.

- Algunas veces una hora de práctica resulta insuficiente para abarcar todos los temas vistos en la semana. Profesor W por correo electrónico.

Puede ser que ambos profesores jugaban roles diferentes. Uno más activo y el otro más pasivo. Esto motivado por el hecho que el profesor que acompañaba los talleres menciona que los estudiantes estuvieron más motivados. Y además, el profesor manifiesta que ha mejorado su formación como docente.

Lo que sí aparece es una de nuestras preocupaciones de cada año sobre la falta de conocimientos básicos de los estudiantes. Surge a partir de la respuesta del profesor acompañante W, la realidad del tiempo insuficiente para la práctica. No obstante, las horas consideradas para teoría son reducidas (dos bloques de 80 min.) si se considera la extensión de los programas.

Una observación importante que debemos realizar es que durante el segundo semestre no fue posible realizar el proyecto en la parte de la aplicación de los talleres debido a dos situaciones. En el curso de Cálculo 2, el docente a cargo se opuso a que se realizara el taller en el horario de práctica. Sus argumentos fueron que él no podía otorgar una hora de práctica al desarrollo del proyecto. Para el curso de Álgebra Lineal, se nos comunicó al principio que la asignatura finalizaría en octubre (por actividades de investigación del docente a cargo), más o menos un mes y medio antes que lo normal.

En relación a la negativa del profesor de Cálculo 2, quedan abiertas las preguntas siguientes: ¿todos los docentes están preparados para innovaciones? ¿es posible que haya docentes menos dispuestos a compartir el aula con otro par?

Aunque estas preguntas quedarán sin respuesta, quisimos indagar entre los estudiantes mediante un cuestionario de respuesta cerrada la importancia que tuvo para ellos la ejecución del taller del primer semestre. La última pregunta fue,

P: ¿hubiera necesitado el apoyo del taller con dos profesores durante este semestre?

La respuesta unánime (que contestaron individualmente) fue *sí*. Incluso, un estudiante agregó la palabra “mucho”.

Conclusiones

Consideramos que favorecer el trabajo en pequeños grupos de estudio en el aula donde los estudiantes puedan contar con dos docentes para realizar consultas resulta un apoyo importante para los estudiantes de esta carrera. También podría significar un apoyo para estudiantes de similares características en otras carreras. Sin embargo, existieron ciertas resistencias en casos puntuales al hecho de compartir el aula con otro docente, a preparar materiales y en general a la innovación por parte de algunos docentes.

Por razones que obedecen a asuntos de responsabilidad y ética, sostenemos que para solicitar recursos tendientes a incorporar innovaciones o cambios dentro de la docencia en un organismo educativo, es necesario investigar los efectos positivos reales de ello sobre los estudiantes. Esto no debe pensarse únicamente como el resultado de sus calificaciones y su aprobación con nota mínima, sino, el apoyo que ello significa para los estudiantes.

El objetivo detrás del estudio fue favorecer el aprendizaje de estudiantes que provienen en su mayoría del sistema público de educación secundaria de la región del Bío-Bío en Chile y cuyos conocimientos de matemática son deficientes.

Con respecto a los objetivos, pensamos que los objetivos 1 y 2 fueron ejecutados por parte de los colegas participantes con experiencia docente que dictaron cursos de matemáticas. Se intentó modificar en la forma lo menos invasiva posible el normal desarrollo de las clases de los docentes. La mayoría de ellos estuvieron de acuerdo, encontrando cierta resistencia en casos puntuales. El objetivo 3 se logró a través de los cuestionarios de investigación que se pasaron a los estudiantes durante el año 2012 al iniciar y finalizar cada semestre. En relación al objetivo 4 en base a las respuestas obtenidas en los cuestionarios se puede afirmar que los estudiantes si se sintieron apoyados. No ofrecemos un análisis estadístico de las respuestas puesto que el 100% de los estudiantes participantes manifestaron que el taller fue un apoyo para ellos tanto en el año 2012 como en el primer semestre de 2013.

Quedaron algunas preguntas abiertas como hemos mencionado antes que constituyen un desafío para investigaciones posteriores en torno a las creencias de los profesores en relación a la innovación en la docencia de matemática en la universidad.

Con respecto al taller, dado que este tiene como base el trabajo en grupo, pensamos que este modelo se vería enriquecido con la posibilidad de realizarlo en aulas equipadas para este tipo de trabajo. También pensamos que convendría informar a los docentes la realidad de los estudiantes (necesidades, situaciones sociales, el significado de vivir en pensiones fuera de su ambiente familiar, la adaptación a la universidad después de la escolaridad, entre otros) para motivarlos a involucrarse en actividades que podrían ser beneficiosas no sólo para los estudiantes ni también para el ejercicio de su propia docencia.

Para la realización de este tipo de taller, es necesario tener un apoyo claro a nivel departamental (Departamento de Matemática) e institucional. Para las asignaturas implicadas, se debe asignar responsables de ambas clases, tanto las teóricas como las prácticas. Esto por la falta de coordinación entre diferentes docentes (natural por dar clases a tiempo parcial) y que finalmente repercute como en este caso en el interés en clases por parte de los estudiantes.

Para finalizar, queremos enfatizar que con este tipo de apoyo estamos intentando disminuir la brecha de éxito académico entre estudiantes que provienen de la educación privada y estudiantes que provienen del sistema de educación pública como lo es el caso de los estudiantes de esta carrera. Este debería ser uno de los principales nortes de la educación.

Referencias y bibliografía

- Alfaro, A. (2012). El proyecto matemática para la enseñanza media (MATEM-UNA): Percepción de los estudiantes sobre los cursos recibidos y las carreras en educación superior que eligieron. *UNICIENCIA*, 27(1), 34-58.
- Ampadu, E. (2012). Students' Perceptions of their Teachers' Teaching of Mathematics: The Case of Ghana. *International Online Journal of Educational Sciences*, 4(2), 351-358.
- Artigue, M. (2003). ¿Qué se puede aprender de la Investigación Educativa a nivel universitario? *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, 10(2), 117-134.
- Chevallard Y. (1985). La transposition Didactique : du savoir savant au savoir enseigné. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Grenoble: Ed. La Pensée Sauvage.
- Diez, M. et al. (2009). Percepción de los estudiantes universitarios de educación respecto al uso de metodologías docentes y el desarrollo de competencias ante la adaptación al EEES: datos de la Universidad de Valladolid. *Aula Abierta*, 37(1), 45-56. ICE. Universidad de Oviedo.

- Font, V. (2005). Funciones y derivadas. En *Actas del XXI Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, tomo II* (pp. 5-54). Bogotá. Colombia.
- Gil, P. (2013). Percepción de utilidad y grado de satisfacción del alumnado de formación del profesorado con el método de caso. *Aula Abierta*, 41(3), 79-90.
- Johnson, & Johnson, D. (1998). *Cooperation in the classroom* (7ª ed.). Interactionbook Company.
- Trillo, F., & Porto, M. (1999). La percepción de los estudiantes sobre su evaluación en la universidad. Un estudio en la Facultad de Ciencias de la Educación. *Innovación Educativa*, 9, 55-75.
- Vigotsky, L. (1963). *Pensamiento y lenguaje*. Bs. As.: La Pléyade.

Apéndice A

Cuestionarios

Cuestionario docentes

Estimado profesor,

A través de las siguientes preguntas queremos conocer sus impresiones acerca del Taller realizado en la asignatura que UD. dictó para la carrera.

1. ¿Qué nota de 1 a 7 le pondría a la participación de los estudiantes en los talleres propuestos por UD.? ¿Por qué?
2. ¿Fue para UD. un apoyo en la atención de los estudiantes el hecho de contar con la presencia del profesor ayudante? ¿Por qué?
3. ¿Consideraría UD. realizar talleres del mismo tipo para cursos más numerosos?

Cuestionario estudiantes

Estimado estudiante,

a través de las siguientes preguntas queremos conocer sus impresiones iniciales acerca de los talleres de matemática especiales que se está realizando en su carrera de Ingeniería Estadística.

Por favor conteste las siguientes preguntas:

1. ¿Sabe UD. en qué consisten los talleres de Álgebra y Cálculo?
2. ¿Qué espera Ud. de estos talleres?
3. Hasta ahora, ¿podría decir qué ha aprendido en estos talleres? ¿en qué lo nota?
4. ¿Le resultaría un apoyo en el estudio de otras asignaturas contar con talleres de este tipo? Justifique su respuesta.

Una mirada al proceso matemático de elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos en la resolución de problemas con el que ingresan los estudiantes a la universidad

Claudia **Barajas** Arenas

Grupo EDUMAT-UIS, Universidad Industrial de Santander
Colombia

claubaren28@hotmail.com

Sandra Evely **Parada** Rico

Escuela de Matemáticas, Universidad Industrial de Santander
Colombia

hsv@hr.ac.br

Resumen

En esta contribución se presentan resultados iniciales de una investigación que tiene por objetivo caracterizar algunas dificultades de estudiantes de nuevo ingreso a la universidad mientras resuelven problemas que implican variación, esto específicamente desde el proceso matemático de elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. Dicho estudio surge de un programa institucional de la Universidad Industrial de Santander (UIS; Colombia) en el que se pretende atender la problemática asociada a la enseñanza y aprendizaje del Cálculo Diferencial. Reportamos aquí, algunos resultados emergentes de una prueba diagnóstica inicial en la que se plantearon 14 situaciones asociadas a los Estándares Básicos de Competencias contemplados por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN, 2006); el 58,82% de los estudiantes evidenció dificultades al aplicar la definición de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo en la solución de problemas trigonométricos.

Palabras clave: cálculo diferencial, dificultades, pensamiento variacional, procesos matemáticos.

Summary

This contribution presents initial results of an investigation that aims to characterize some of the difficulties new entrants to university students who solve problems involving variation, specifically from the mathematical process of elaboration, comparison and training processes. This study stems from an institutional program of Industrial University of Santander (UIS; Colombia) in which is intended to address the problems associated with the teaching and learning of the differential calculus. Here, we report some emerging results from an initial diagnostic test that raised 14 situations associated with basic standards of competence covered by the Ministry of education of Colombia (MEN, 2006); in this test that 58,82% of students showed difficulties in applying the definition of trigonometric ratios in the triangle in solving trigonometric problems.

Key words: differential calculus, variational thinking, difficulty, mathematical processes.

Contexto de la investigación y problemática

Esta investigación se desarrolla en el marco de un proyecto de la Universidad Industrial de Santander de Colombia, universidad de carácter público que cuenta en su sede principal con cinco facultades, tres de las cuales agrupan a las carreras de Matemáticas, Licenciatura en Matemáticas y a las ingenierías, programas que cursan en primer nivel Cálculo I (Cálculo Diferencial).

Recientes resultados del seguimiento al fenómeno de deserción escolar en el país muestran que un factor determinante del abandono de estudios en Colombia se sitúa en la dimensión académica (MEN, 2009). Esto se ha identificado, desde varios proyectos realizados por la Vicerrectoría Académica de la universidad, que el curso Cálculo I (Cálculo Diferencial) se ubica en el primer y segundo lugar en cuanto reprobación, cancelación y repitencia en los estudiantes que recién ingresan a la universidad (Botello, 2013).

Con el propósito de apoyar a los estudiantes en sus procesos de enseñanza y aprendizaje en Cálculo, la Escuela de Matemáticas de la universidad ha desarrollado algunas iniciativas para reducir la problemática; el trabajo en equipo alrededor de ésta ha sido tal que se han institucionalizado el proyecto “Una estructura curricular para atender la problemática relacionada con los cursos de cálculo de la Universidad Industrial de Santander”, éste cuenta con varias alternativas curriculares para atender, específicamente, la problemática relacionada con el curso de Cálculo Diferencial desde dos flancos: preventivo (estudiantes admitidos) y remediales (estudiantes matriculados) (Parada, 2012). En el curso de precálculo (flanco preventivo) participan los 300 estudiantes con bajo desempeño en la Prueba Saber 11, siendo este escenario en el cual surgió la inquietud por profundizar en aquellas dificultades relacionadas con el pensamiento variacional que traen los estudiantes de su educación media para responder a la pregunta de investigación: *¿con cuáles dificultades llegan los estudiantes a la universidad para resolver problemas que implican situaciones de variación, específicamente desde el proceso matemático de elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos?* Esto traza el siguiente objetivo de la investigación: *caracterizar algunas dificultades en la resolución de problemas que implican variación, específicamente desde el proceso matemático de elaboración, comparación y ejercitación de procesos.*

Fundamentación teórica

Se hizo necesario, entonces, revisar lo que el Ministerio de Educación Nacional (MEN) de Colombia indica respecto a lo que debe ser la formación matemática del estudiante una vez culmine el grado once. Para empezar, es importante señalar que en Colombia el currículo que se adopte en cada establecimiento educativo debe tener en cuenta tres elementos directrices: (1) la Ley General de Educación emanada en la Ley 115 de 1994; (2) los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998); y (3) los Estándares Básicos en Competencias en Matemáticas (MEN, 2006).

Elementos directrices de la educación colombiana

Los lineamientos pretenden dar orientaciones para la formulación del currículo de matemáticas. Este documento introduce dos ideas centrales: los procesos generales y los tipos de pensamiento matemático. Con esto, se pone el propósito de las matemáticas escolares en el desarrollo del pensamiento matemático en sus diversas formas y su utilización socialmente más poderosa: la modelación, sin limitar las matemáticas escolares a la mera aplicación de algoritmos

ya conocidos para “resolver problemas”, los cuales, más que problemas abiertos y retadores, son apenas ejercicios escolares, por necesarios que éstos sean (Vasco, 2006).

Los Estándares se basan en las ideas de los lineamientos para formular expectativas curriculares para ciclos de grados para contribuir a la competencia matemática de los escolares siendo, entonces, éstos últimos pertinentes para evaluar los niveles de desarrollo de las competencias que van alcanzando los estudiantes en el transcurrir de su vida escolar aunque el MEN (2012) aclara que un estándar no es un objetivo, una meta o un propósito.

Tipos de pensamiento matemáticos

Dentro de la estructura curricular colombiana, el pensamiento matemático se subdivide en cinco tipos de pensamiento cada uno con un sistema curricular asociado a saber: *i. pensamiento numérico y sistemas numéricos; ii. pensamiento espacial y sistemas geométricos; iii. pensamiento métrico y sistemas de medidas; iv. pensamiento aleatorio y sistemas de datos; y, vi. pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos* (MEN, 1998, 2006) siendo este último el objeto de estudio ya que en este convergen los cuatro pensamientos matemáticos restantes ya que requiere el pensamiento métrico y el pensamiento numérico si las mediciones superan el nivel ordinal; requiere también el pensamiento espacial si una o varias variables son espaciales. Su principal herramienta son los sistemas analíticos, pero puede valerse también de sistemas lógicos, conjuntistas u otros sistemas generales de relaciones y transformaciones (Vasco, 2006).

Se consideran cuatro estándares para el pensamiento variacional, a saber (MEN, 2006, p. 89):

- (1) *utilizo las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos;*
- (2) *interpreto la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrollo métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos;*
- (3) *analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas;*
- (4) *modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas.*

Pensamiento Variacional. En los últimos años, parte de la literatura en educación matemática resalta la importancia que tiene el estudio de procesos de variación y el reconocimiento de aspectos dinámicos de algunos conceptos matemáticos (Tall, 2009). De manera particular se llama la atención sobre el valor de la percepción, la identificación y la caracterización de la variación en diferentes contextos para el desarrollo del pensamiento matemático (Cantoral y Farfán, 1998; MEN, 2006; Posada y Villa-Ochoa, 2006; Cantoral, 2004; Dolores, 1999, 2007; Camargo y Guzmán, 2005; Tall, 2009). El NCTM (2003) motiva a los profesores de matemáticas a favorecer una “comprensión más profunda de las maneras en que los cambios en las cantidades se pueden representar matemáticamente” (2000, p. 305) mientras que el Ministerio de Educación Nacional de Colombia propone el estudio de la variación en las aulas escolares como una manera de aproximarse al desarrollo del pensamiento variacional por lo que debe cultivarse desde temprana edad diseñando estrategias significativas para favorecerla comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, en la Educación Media, del

cálculo diferencial e integral. Este pensamiento cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas (MEN, 2006, p. 66).

Este tipo de pensamiento, entonces, tiene que ver con el reconocimiento, percepción, identificación y caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos (MEN, 2006, p. 66). Es decir, lo que se quiere es desarrollar una forma de pensamiento que identifique de manera natural fenómenos de cambio y que sea capaz de modelarlos y transformarlos (MEN, 2004, p. 17).

De modo que para efectos de esta investigación se dirá que un estudiante ha desarrollado su pensamiento variacional si tiene la capacidad de resolver situaciones de variación y cambio, en caso de no evidenciar dicha capacidad hablaremos de dificultad en el pensamiento variacional. El poder identificar el fenómeno de cambio, describirlo, interpretarlo, predecir sus consecuencias, cuantificarlo y modelarlo, son las características del pensamiento variacional que se pretenden desarrollar desde el currículo tomando en cuenta, además, diferentes momentos (no necesariamente consecutivos) que aparecen en el estudio de situaciones de variación y cambio:

1. Descripción e interpretación de situaciones de variación y cambio desde un punto de vista cualitativo.
2. Formas de representación cualitativa de estas situaciones
3. Formas de representación cuantitativa de situaciones de variación y cambio
4. Interpretación de representaciones de situaciones de variación y cambio

Es, entonces, desde de los estándares señalados para el pensamiento variacional que buscamos caracterizar las dificultades con las que llegan los estudiantes a la universidad, en términos del proceso elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos ya que se refiere a los “modos de saber hacer” y por ende involucra la comprensión de su carácter de herramientas eficaces y útiles en unas situaciones y no en otras.

Procesos matemáticos

Las habilidades que una persona requiera para resolver un problema matemático son variadas y dependen del tipo de problema a resolver y del nivel de desarrollo de los procesos matemáticos que responden a cinco: *i. el razonamiento; ii. la comunicación; iii. la modelación; iv. la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos; y, v. la resolución y el planteamiento de problemas* (MEN, 1998). Se espera que en el currículo se integren estos elementos (pensamientos y procesos) a través del contexto que se refiere a los ambientes que rodean al estudiante y que le dan sentido al conocimiento matemático que aprende.

Rico (1995) señala que dicho conocimiento está organizado, desde una perspectiva cognitiva, en dos grandes campos: conceptual y procedimental; indica también que el conocimiento procedimental consiste en los modos de ejecución ordenada de una tarea y que los procedimientos son aquellas formas de actuación o ejecución de tareas matemáticas. El autor expone tres niveles diferentes en el campo de los procedimientos:

- a. Las **destrezas** que se ejecutan procesando hechos [unidades de información]

- b. Los **razonamientos** que se presentan al procesar relaciones entre conceptos, y permiten establecer conexiones entre los mismos.
- c. Las **estrategias**, que se ejecutan sobre representaciones de conceptos y relaciones.

El MEN (2010) complementa lo anterior enfatizando en que para analizar la contribución de la ejecución de procedimientos rutinarios en el desarrollo significativo y comprensivo del conocimiento matemático es conveniente considerar los mecanismos cognitivos involucrados en dichos algoritmos; éstos son:

- ✓ *La alternación* de momentos en los que prima el conocimiento conceptual y otros en los que prima el procedimental, lo cual requiere atención, control, planeación, ejecución, verificación e interpretación intermitente de resultados parciales.
- ✓ *La automatización* que contribuye a adquirir destrezas en la ejecución fácil y rápida de cierto tipo de tareas aún cuando no contribuye directamente al desarrollo significativo y comprensivo del conocimiento.
- ✓ *La reflexión* sobre cuáles procedimientos y algoritmos conducen al reconocimiento de patrones y regularidades en el interior de determinado sistema simbólico y en qué contribuyen a su conceptualización. Este mecanismo demanda al estudiante dominio para explicar y entender los conceptos en los cuales se apoya un procedimiento o algoritmo.

Los procedimientos empleados en la resolución de problemas se consideran de tipo (MEN 1998, p. 104-106 citando a Rico (1995)): aritmético, métrico, geométrico y analítico. Tomando de referencia el trabajo de Posada et al. (2005), en términos del pensamiento variacional se dirá que un estudiante no tiene dificultades en los procedimientos de tipo

- ✓ *aritmético*, si tiene un correcto dominio del campo de los números reales y de las operaciones básicas y superiores; si establece relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada; si utiliza argumentos de la teoría de números para justificar relaciones que involucran números naturales, entre otros.
- ✓ *métrico*, si emplea correctamente los aparatos de medida más comunes de las magnitudes longitud, tiempo, amplitud, capacidad, peso y superficie; si domina el sistema métrico decimal; si justifica resultados obtenidos mediante procesos de aproximación sucesiva, rangos de variación y límites en situaciones de medición, entre otros.
- ✓ *geométrico*, si evidencia rutinas para construir un modelo de un concepto geométrico, para manipularlo o para hacer una representación del mismo en el plano. Si domina y emplea determinados convenios para expresar relaciones entre conceptos geométricos. Si describe y modela fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas, etc.
- ✓ *analítico*, tienen que ver con “álgebra”, “funciones” y “cálculo diferencial e integral”. Algunas habilidades de este tipo de procedimientos son: modelar situaciones de cambio a través de las funciones, las gráficas y las tablas; traducir de una a otra de las distintas representaciones de una función; resolver ecuaciones; comprender y hallar las tasas de inflación; analizar las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales; analizar los procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales, etc.

También son considerados, por el *Estudio de las Tendencias en Matemáticas y Ciencias* (TIMSS, por sus siglas en inglés), los *procedimientos de rutina* los cuales se consideran dos categorías: i. usar equipos (instrumentos como reglas, transportadores, calculadoras, entre otros); ii. ejecutar procedimientos de rutina como calcular, graficar, transformar y medir.

De modo que cuando un estudiante domina los procedimientos está evidenciando fortalezas en sus destrezas, estrategias y razonamientos para la resolución de problemas variacionales (para el caso de la investigación); al mismo tiempo que articula su capacidad de alternar, automatizar y reflexionar sobre los conceptos y, por ende, establece conexiones entre el conocimiento conceptual y procedimental pues éste implica mucho más que la simple puesta en práctica. Caemos, entonces, en la línea delgada que separa el saber hacer con el aprendizaje basado en procedimientos, y algoritmos desligados del conocimiento conceptual necesario para la comprensión de las ideas fuertes del cálculo.

Artigue (2003, p. 123) quien ha estudiado las dificultades del aprendizaje del cálculo con el ánimo de comprenderlas y describirlas, señala una posible justificación a ello ya que “la transición hacia aproximaciones más formales [de los conceptos matemáticos], que tiene lugar en la universidad, representa un salto tremendo, tanto conceptual como técnicamente”. Salinas y Alanís (2009, p. 359) afirman que

... este desarrollo [el de la problemática de la enseñanza y aprendizaje del Cálculo] se justifica ante el esclarecimiento de un paradigma tradicional de enseñanza que deja mucho que desear en cuanto al aprendizaje: elevados índices de reprobación, aprendizaje sin comprensión y actitud negativa hacia el aprendizaje de las matemáticas son hechos que han sido reportados en los últimos treinta años con respecto a los cursos de Cálculo en el nivel medio superior y superior de educación (Salinas y Alanís, 2009, p. 359).

Así, Artigue (2003) y Salinas y Alanís (2009) señalan una cuestión subyacente muy compleja: los métodos de enseñanza del cálculo continúan siendo muy tradicionales ya que se enfocan en prácticas algorítmicas y algebraicas lo cual afecta negativamente la comprensión de los conceptos fundamentales del cálculo: *acumulación y variación*. Abrate, Pochulu y Vargas (2006) enfatizan en que debemos tener en cuenta que en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la Matemática nos encontramos con una gran variedad de dificultades que son potencialmente generadoras de errores; tales dificultades son categorizadas por los autores desde Di Blasi Regner y otros (2003, citado por Abrate, Pochulu y Vargas, 2006, pp. 31-34) en los siguientes tópicos:

1. Dificultades asociadas a la complejidad de los objetos matemáticos.
2. Dificultades asociadas a los procesos de pensamiento matemático.
3. Dificultades asociadas a los procesos de enseñanza.
4. Dificultades asociadas al desarrollo cognitivo de los alumnos.
5. Dificultades asociadas a las actitudes afectivas y emocionales.

Neira (2000) planteó buscar las causas del problema de la reprobación y la incompreensión del cálculo no solo en el cálculo mismo o en los recursos empleados para su enseñanza, sino en la transición del álgebra al cálculo, ya que el lenguaje, los razonamientos, la lógica, el tratamiento de los signos usados en el cálculo, plantean una ruptura con lo que se hace en álgebra exigiendo el dominio del conocimiento conceptual de los elementos del cálculo, de modo que cuando este dominio no se da, da lugar a las dificultades indicando la “dificultad” el mayor o

menor grado de éxito de los estudiantes ante una tarea matemática. Así, reiterando, esta investigación, caracterizará las dificultades en la resolución de problemas propios del pensamiento variacional, desde los procedimientos en las cuales los estudiantes presentan dificultades.

Procedimiento metodológico

Para alcanzar el objetivo propuesto, esta investigación siguió metodologías cuantitativas y cualitativas por lo que se podría tipificar como una investigación fenomenológica de tipo experimental. El proceso metodológico responde a las siguientes fases:

Fase 1: Exploración de datos del Programa ASAE

Desde hace tres años se viene implementando un programa de tutorías entre pares, dirigido a estudiantes de Cálculo Diferencial que presentan dificultades en su aprendizaje a medida que transcurre el semestre académico; las tutorías son facilitadas por profesores en formación (tutores y estudiantes del curso de Didáctica del Cálculo), y coordinado por formadores de profesores: ASAE, Atención, Seguimiento y Acompañamiento a los Estudiantes de Cálculo I. Los alumnos-tutores realizan, tras cada tutoría, un reporte del desempeño de los estudiantes en el “Formato para las tutorías de Cálculo I” refiriéndose tanto a las fortalezas, dificultades del estudiante y a las actividades tratadas durante la tutoría. Por lo anterior, los formatos se consideraron como una primera fuente de exploración para este trabajo, tras lo cual se diseñó un instrumento (Formato DIPEVA¹) para sistematizar los datos de 37 alumnos-tutorados atendidos por 17 alumnos-profesores en segunda versión del programa.

Fase 2: Elección del contexto de estudio

Tras los resultados de la fase 1, se eligió el curso de precálculo de la UIS ya que es el primer espacio universitario, con el cual tienen contacto los estudiantes de primer nivel de programas de ingenierías y de la Facultad de Ciencias, desde hace un año. Este curso lo ofrece la universidad a estudiantes caracterizados en riesgo académico en matemáticas después de revisar el desempeño en el área de Matemáticas en la Pruebas Saber 11 realizada por el Ministerio de Educación Nacional.

El curso realiza como parte de sus actividades, una prueba diagnóstica inicial (PDI) y una final (PDF). El primer semestre de 2014, la prueba se realizó por primera vez a través de una plataforma virtual que genera un reporte individual del desempeño del estudiante; la prueba constó de 14 preguntas que responden cada una, a un indicador que permite medir los estándares mencionados en el apartado anterior.

Fase 3: Diseño del Experimento 1

Desde sus inicios, tras cada semestre, los profesores del curso de precálculo entregan un informe cualitativo que reporta la asistencia, el desempeño (fortalezas y debilidades) de cada estudiante en la PDI y en el desarrollo del curso. Para efectos de este trabajo, se consideró conveniente modificar ese informe adaptando el instrumento empleado en la Fase 1 para que los profesores evaluaran las dificultades del pensamiento variacional (Formato de Evaluación DIPEVA) usando los indicadores definidos para valorar cada estándar. También se consideró el diseño de un segundo instrumento (Hoja de Procesos) para que los estudiantes escribieran en él

¹ DIPEVA responde a la abreviatura de “dificultades en el pensamiento variacional”.

los procedimientos empleados. De dicho instrumento se recolectaron los datos de 460 estudiantes que dan paso a la fase siguiente.

El formato ofreció al profesor de precálculo valorar al estudiante con un puntaje entre 0 a 5, significando 0 “ausencia de dificultad”, y 5 “el máximo nivel de dificultad” esto valorando cada indicador en tres tiempos: (i) PDI (aquí se toman en cuenta la Hoja de Procesos y el reporte de plataforma que arroja “X” para el indicador en el cual el estudiante erró en la respuesta a la pregunta, y “chulito ($\sqrt{}$)” en caso contrario); (ii) el desarrollo del curso de precálculo; y (iii) la PDF. De tal suerte que dichas características son fundamentales para el análisis del experimento.

Fase 4. Análisis del Experimento I

El Formato de Evaluación DIPEVA se entregó de manera electrónica a los 17 profesores; cada formato tenía una programación para recuperar sintéticamente las valoraciones de los estudiantes. A su vez, a los 17 formatos se les realizó un tratamiento para consolidar los datos de todos los estudiantes participantes. Finalmente, se realizó un análisis cuantitativo-descriptivo desde los indicadores, del cual reportaremos algunos resultados en el siguiente apartado.

Fase 5. Diseño del experimento II

Para el segundo semestre de 2014, se aplicó la PDI. El instrumento de la Hoja de Procesos fue aplicado solo a los estudiantes de las carreras que han reportado mayor porcentaje de errores en la prueba diagnóstica durante el curso: Matemáticas, Licenciatura en Matemáticas e Ingeniería de Sistemas, como lo reportó la coordinación del programa ASAE.

Esta fase responde a tres sub-fases:

- i. *Análisis a priori* de los 13 problemas de la PDI para identificar los procedimientos (y el tipo de éstos) que se esperaba el estudiante empleara para la solución del mismo.
- ii. *Recolección de los datos*; subfase que ya fue realizada tras la ejecución del curso de precálculo 2014-II.
- iii. *Análisis a posteriori* en el cual se revisarán cuidadosamente las Hojas de Respuesta para entrar a categorizar las dificultades que emerjan de éstas en cada problema; de modo que logremos reportar tanto cuantitativa y cualitativamente las dificultades en el proceso mencionado de tal suerte que hallemos respaldo en diferentes autores de la educación matemática desde quienes interpretaremos las evidencias de las dificultades.

Fase 6. Caracterización de las dificultades

Tras las fases anteriores, se realizará la caracterización que dará cumplimiento al objetivo de esta investigación desde el proceso de elaboración, comparación y ejecución de procedimientos.

Finalmente, queremos señalar que las fases anteriores reportan el procedimiento de la investigación en su estado actual después de varias reflexiones y ajustes que sobre el mismo se realizaron desde la publicación del primer reporte de este trabajo en Barajas y Parada (aceptado).

Primeros resultados

Del programa ASAE (fase I) se tuvo una primera aproximación a las dificultades del pensamiento variacional de los estudiantes participantes. Esto se realizó desde los formatos para las tutorías de Cálculo I de la versión 2013-II del programa. Para este fin se diseñó el primer

instrumento DIPEVA que viene a ser, para esta fase, una malla a través de la cual se recuperaron las dificultades reportadas alrededor de los procesos matemáticos. La exploración de los datos de 34 alumnos-tutorados se obtuvo que aproximadamente el 73% de éstos evidenciaron dificultades en el conocimiento procedimental, en particular: casos de factorización, operaciones con fracciones, y representaciones gráficas de funciones (rationales y a trozos), y funciones trigonométricas.

Los hallazgos de esta fase, nos motivaron a profundizar más en el proceso de elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos de los estudiantes de nuevo ingreso ya que, dentro del proyecto de la estructura curricular para atender la problemática de reprobación en Cálculo I la UIS, se tiene una fuente rica de exploración que es el curso de precálculo pues los estudiantes que pertenecen a éste aún no han iniciado el curso de cálculo. Esta población nos dará muestras más claras de cómo los estudiantes egresan del nivel de educación media.

De las dificultades reportadas por los profesores en los indicadores de los estándares, se rescató que la mayoría de estudiantes presentó mayor dificultad en la resolución de problemas del estándar “modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas” pues en promedio el 62,50% de la población evidenció nivel 5 de dificultad mostrando mayor porcentaje de dificultad en el indicador “modela situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas”.

Tabla 1

Resultados porcentuales del Formato de Evaluación DIPEVA, Fase 4

ESTÁNDAR	ESTUDIANTES CON NIVEL DE DIFICULTAD 5	INDICADORES	ESTUDIANTES CON NIVEL DE DIFICULTAD 5
Análisis de las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas	52,45%	1. Relaciona correctamente los diferentes registros de representación de una función en una situación problema.	54,77%
		2. Modela con propiedad una situación de cambio a través de una función.	54,52%
		3. Identifica con claridad una función, la relación que existe entre la gráfica y la expresión algebraica.	43,66%
		4. Reconoce las derivadas de funciones polinómicas o racionales, y las relaciona con el crecimiento o decrecimiento de las mismas.	56,86%
Interpreto la noción de derivada como razón de cambio y como valor de la pendiente de la tangente a una curva y desarrollo métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos.	56,06%	5. Reconoce e interpreta situaciones que implican variación.	47,67%
		6. Interpreta la derivada como razón de cambio de cantidades variables y funciones en contextos matemáticos o no matemáticos.	54,66%
		7. Desarrolla o aplica métodos para hallar las derivadas de algunas funciones básicas en contextos matemáticos y no matemáticos.	58,82%
		8. Interpreta la derivada en un punto como la pendiente de la recta tangente a la curva.	63,08%
Modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas.	62,50%	9. Modela situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas.	64,37%
		10. Interpreta la derivada como razón de cambio de cantidades variables y funciones trigonométricas en contextos matemáticos o no matemáticos.	64,30%
		11. Comprende y aplica la definición de las razones trigonométricas en el triángulo rectángulo en la solución de problemas trigonométricos.	58,82%
Utilizo las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos.	37,92%	12. Reconoce características de los procesos infinitos utilizando diversas representaciones: gráficas, tablas o explicaciones verbales.	34,88%
		13. Utiliza aproximaciones numéricas o gráficas para deducir intuitivamente el límite de una función.	40,98%
		14. Aplica procedimientos aritméticos para resolver problemas que involucran procesos infinitos.	37,90%

Fuente: Investigadora.

De la lectura de los indicadores en la Tabla 1, se tiene que los que corresponden a los numerales 4, 7, 11, 12, 13, y 14 se desarrollan a la luz del proceso de comparación, elaboración y ejecución de procedimientos con un promedio del 46,28% de dificultad. Esto sostiene nuestra primera hipótesis en tanto a que los estudiantes tienen dificultades al elaborar y ejecutar procedimientos como lo mostraron los resultados encontrados de la Fase 1. Esto destaca que las dificultades no aparecen al azar sino que surgen en un marco consistente formado por conocimientos adquiridos previamente, y del proceso de enseñanza que, como lo señala Pochulu (s.f.), es potencialmente generador de errores, debido a diferentes causas, algunas de las cuales se presentan inevitablemente.

A modo de cierre

Para concluir, queremos expresar que la investigación en educación matemática es un campo en continuo cambio y progreso y que los contextos de donde surgen los fenómenos a estudiar son complejos por sus magnitudes y por las variables involucradas las cuales resultan difíciles de manejar. No obstante, tras el aprendizaje que nos viene dejando el recorrido transitado en este trabajo, nos hemos permitido reflexionar profundamente sobre el fenómeno de las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas a nivel superior para, por ende, brindar a la comunidad educativa una brújula que permita comprender una parte del origen de las mismas. De modo que en este momento nos encontramos analizando, con mayor detalle, las hojas de procesos tras lo cual reportaremos nuestros hallazgos los cuales esperamos fortalezcan las alternativas curriculares que ofrece la UIS para ofrecer a los estudiantes mayores oportunidad de alcanzar superar sus aprietos académicos y sus dificultades cognitivas alrededor del conocimiento matemático aún cuando diversas investigaciones reportan que los “presaberes erróneos” de los estudiantes son persistentes al cambio.

Bibliografía

- Abrate, R., Pochulu, M., & Vargas, J. (2006). *Errores y Dificultades en Matemática. Análisis de causas y sugerencias de trabajo*. Buenos Aires: Universidad Nacional de Villa María. Recuperado de <http://unvm.galeon.com/Libro1.pdf>
- Artigue, M. (2003). “¿Qué Se Puede Aprender de la Investigación Educativa en el Nivel Universitario?”. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, X(2). Recuperado de <http://www.emis.de/journals/BAMV/conten/vol10/artigue.pdf>
- Barajas C., & Parada, S. (en edición). Aproximación a las dificultades del pensamiento variacional de estudiantes de nuevo ingreso de la Universidad Industrial de Santander. En *XV Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (Asocolme)*. Universidad Industrial de Santander. Colombia.
- Botello, C. (2013). *Procesos de Seguimiento y Acompañamiento Académico a Estudiantes de Cálculo Diferencial: Un Aula Experimental para Profesores de Matemáticas en Formación* (Tesis de maestría no publicada). Universidad Industrial de Santander. Colombia.
- Camargo, L., & Guzmán, A. (2005). *Elementos para una didáctica del pensamiento variacional. Relaciones entre la pendiente y la razón de cambio*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio
- Cantoral, R., & Farfán, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon*, 42, 353-369.
- Cantoral, R. (2004). Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. Una mirada socioepistemológica. En L. Díaz (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (17, pp. 1-9). México, D.F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

- Dolores, C. (1999). *Una introducción a la derivada a través de la variación*. México D.F.: Grupo Editorial Iberoamericana.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Lineamientos curriculares en matemáticas*. Bogotá: Autor.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2004). *Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales*. Bogotá: Autor.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanas*. Bogotá: Autor.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2009). *Deserción estudiantil en la educación superior colombiana. Metodología de seguimiento, diagnóstico y elementos para su prevención*. Bogotá: Autor.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2012). Normas Técnicas Curriculares. En: *Altablero, El periódico de un país que educa y que se educa* [versión en línea]. Recuperado de <http://www.mineduacion.gov.co/1621/article-87801.html>
- Neira, G. (2000). El paso del álgebra al cálculo: punto fundamental para lograr una comprensión significativa en matemáticas. *Revista Universidad Distrital Francisco José de Caldas*. Colombia Recuperado de <http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/reviving/article/viewFile/3505/5053>
- Parada, S. (2012). *Una estructura curricular para atender la problemática relacionada con el curso de Cálculo I en la Universidad Industrial de Santander* (Documento interno no publicado de la Escuela de Matemáticas). Bucaramanga, Colombia: UIS.
- Pochulu, D. (s.f.). “Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática”. *Revista Iberoamericana de Educación*. Recuperado de <http://www.rieoei.org/deloslectores/849Pochulu.pdf>
- Posada, M., et al. (2005). *Interpretación e Implementación de los Estándares Básicos de Matemáticas*. Gobernación de Antioquia. Tomado de <http://www.centauros.edu.co/pdf/PENSAMIEWNTO%20NUMERICO.pdf>
- Posada, F., & Villa-Ochoa, J. (2006). El razonamiento algebraico y la modelación matemática. En F. Posada, & G. Obando (Eds.), *Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico Didáctica de las matemáticas*, 2(2). (pp. 127-163). Medellín: Gobernación de Antioquia.
- Rico, L. (1995). “Consideraciones sobre el currículo escolar de matemáticas”. *Revista Ema*, 1(1), 4-24. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/984/1/1_Rico1995Consideraciones_RevEMA.pdf
- Salinas, P., & Alanís, J. A. (2009). “Hacia un nuevo paradigma en la enseñanza del Cálculo dentro de una institución educativa”. *Relime*, 12(3), Noviembre de 2009. Recuperado de <http://www.scielo.org.mx/pdf/relime/v12n3/v12n3a4.pdf>
- Tall, D. (2009). Dynamic mathematics and the blending of knowledge structures in the calculus. *ZDM. Mathematics Education*, 41(4), 481-492
- Vasco, C. (2006). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. En C. Vasco, *Didáctica de las matemáticas: artículos selectos* (pp. 134-148). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.