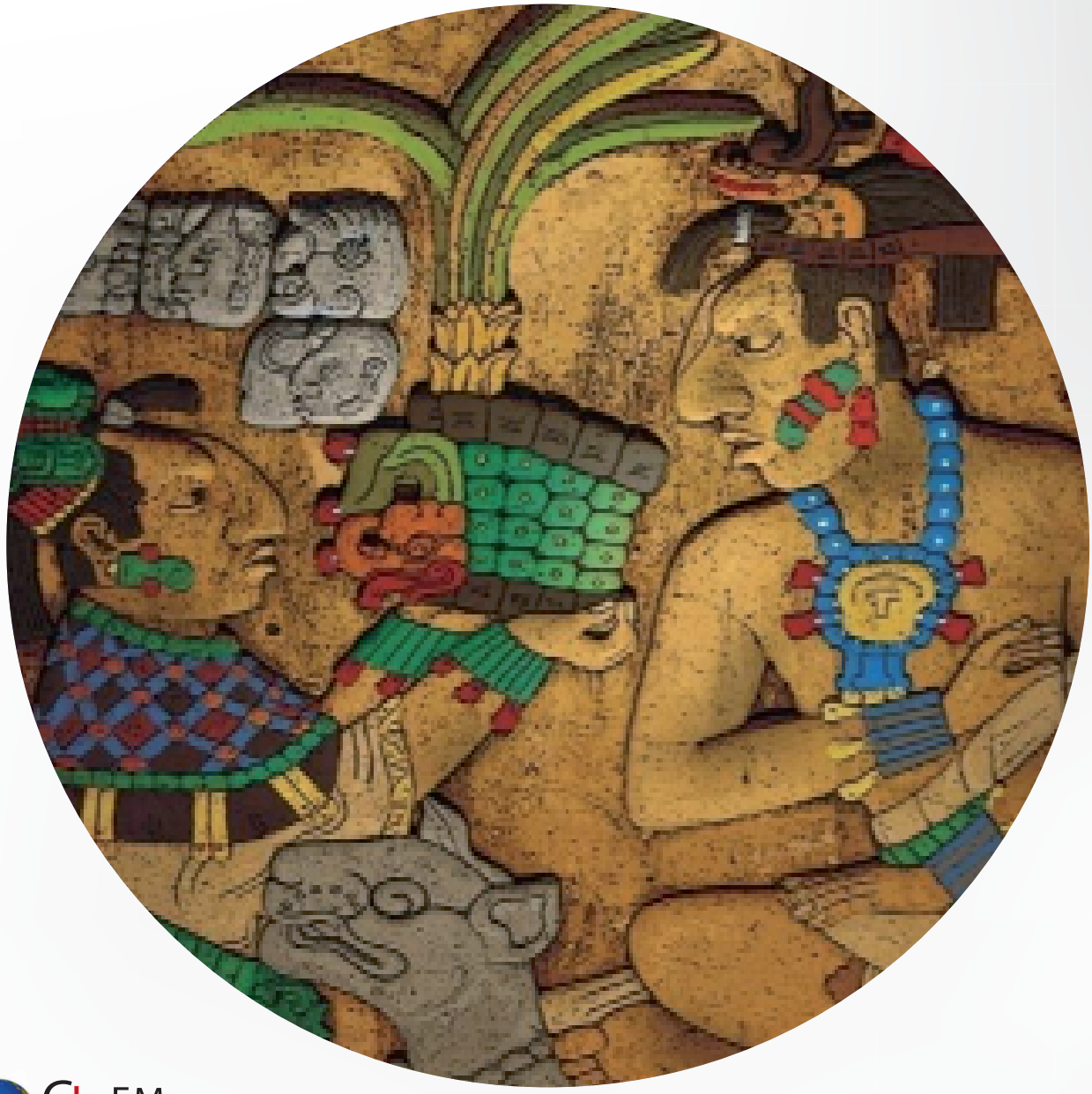
Educación Matemática en las Américas 2015

Volumen 4: Uso de Tecnología



CIAEM
CME
Fundado Founded: 1961

© 2015
Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM)
Paseo de la Reforma 383., 7° Piso,
Colonia Cuauhtémoc, Delegación Cuauhtémoc,
México D.F. CP 06500, MÉXICO

www.ciaem-iacme.org
ciaem.iacme@gmail.com

Educación Matemática en las Américas 2015
Volumen 4: Uso de la Tecnología
Editado por Patrick (Rick) Scott y Ángel Ruiz
Colaboradora: Sarah González.

ISBN Volumen: 978-9945-603-01-9
ISBN Obra Completa: 978-9945-415-97-1

El Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM) es una organización fundada en 1961 asociada a la International Commission on Mathematical Instruction. Busca potenciar la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en las Américas.

Se permite la reproducción de cualquier parte de este libro para fines no lucrativos siempre que se consignen los créditos a los autores y al Comité Interamericano de Educación Matemática.

Para citar este libro y este volumen:

Comité Interamericano de Educación Matemática (2015). *Educación Matemática en las Américas: 2015. Volumen 4: Uso de la Tecnología*. Editores: Patrick (Rick) Scott y Ángel Ruíz. República Dominicana.

Tabla de Contenidos

Presentación i-iii

A autonomia em um curso a distância de formação de professores que ensinam matemática nos anos iniciais 1-11
Luciane Bertini-BR, Reginaldo Carneiro-BR

A configuração do curso de licenciatura em Matemática-educação à distância 12-24
Ana Chiummo-BR, Elisabete Brihy-BR, Emilio Oliveira-BR, Marisa Bernardes-BR, Valéria Carvalho-BR

A discussão e a produção de conhecimento matemático no âmbito cultural que envolve o jogo League of Legends 25-35
Lucas Seibert-BR, Rodrigo Dalla Vecchia-BR

Alguna herramientas de la web 2.0 mediadas por un LMS e incluidas en el análisis didáctico de las funciones trigonométricas 36-46
Nathalia Valderrama-CO, Plinio del Carmen Teheran-CO, Rogelio Alvarado-CO

As possíveis inter-relações das redes sociais online com alguns conceitos de comunidades de prática no processo de formação de professores de Matemática 47-58
Maria Angela de Oliveira Oliveira-BR, Rosana Giaretta Sguerra Miskulin-BR

A utilização das tecnologias digitais na licenciatura em Matemática a distância na América Latina: um mapa em construção 59-69
Marcelo Borba-BR, Helber Almeida-BR, Aparecida Chiari-BR

Algebrator, una valoración como instrumento de enseñanza-aprendizaje en la resolución de sistemas de ecuaciones 70-76
Damian Clemente Olague-MX, Edgar Limón Villegas-MX

Alunos do ensino médio desenvolvendo atividades sobre transformações no plano no VMT 77-86
Andreia Barbosa-BR, Janete Frant-BR, Arthur Powell-US

Análisis de la motivación de logro al implementar la TI-Nspire Cx Cas en el aprendizaje de la matemática 87-97
Irma Flores Allier-MX, Enrique Arce Medina-MX, Francisco Lagunes-MX

Aplicação de recursos computacionais ao ensino de matemática: propostas metodológicas e a sala de aula do futuro 98-109
Chrisley Ribeiro Camargos-BR, Rosilane Da Silva-BR

Área de figuras planas com o Apprenti Géomètre 2: uma análise de uma atividade 110-119
Anderson Rodrigues-BR

As concepções dos professores quanto ao uso do computador como ferramenta pedagógica para o ensino da geometria 120-128
Cleia Alves Nogueira-BR, Antonio Villar arques de Sá-BR

Base de un espacio vectorial de R^n y tecnología 129-140
José Guzmán Hernández-MX, José Zambrano Ayala-MX

Caracterização em uma trajetória de aprendizagem com funções trigonométricas 141-152
Sonner Figueiredo-BR, Nielce Lobo da Costa-BR, Salvador Llinares-ES, Julia Valls-ES

Construcción de conceptos matemáticos mediante la visualización geométrica 153-164
César Briseño Miranda-MX, José Guzmán Hernández-MX

Construcción de los conceptos partición y sumas de Riemann con Geogebra 165-174
Isaac Gonzalo Espinoza Vásquez-CL

Contribuições dos recursos didáticos do Portal Dia a Dia Educação 175-186
Natália Pacheco-BR, João Berssanette-BR, Rafaela Oliveira-BR, Guataçara Junior-BR, Amanda Miranda-BR

Diseño de tareas alrededor de las cónicas en geometría analítica desde lo puntual y lo global usando geometría dinámica 187-197
Edinsson Fernández Mosquera-CO, María Mejía Palomino-CO

El aula virtual como organizador del currículo: caso fundamentos de Matemáticas para los programas de Ingeniería y Matemáticas 198-209
Francisco Sánchez Acero-CO, Oscar Pantano Mogollón-CO

El uso de Vodcasts en la disciplina de cálculo diferencial e integral: el punto de vista de los estudiantes 210-222
Daise Souto-BR

Formação de professores sob a perspectiva da Inclusão 223-233
Adriana Richit-BR, Luciane Mocrosky-BR, Andriceli Richit-BR

Impactos sobre a utilização das tecnologias digitais em sala de aula de Matemática: microanálise nas aplicações em México, Estados Unidos, Portugal e Brasil 234-240
Eimard Gomes Nascimento-PT, Jascqueson Oliveira-PT, Miguel Silva-BR, Joserlene Pinheiro-BR

Instrumentalización de la elipse utilizando Geogebra 241-248
José León Ríos-PE, Jesús Victoria Flores Salazar-PE

Interpretación de fenómenos de crecimiento. Sus representaciones y el uso de herramientas digitales. 249-260
Carolina Guerrero Ortiz-CL, Hugo Mejía-MX, Matías Camacho-Machín-ES

Investigação de padrões fractais no GeoGebra 261-272
Rejane Faria-BR, Marcus Vinicius Maltempi-BR

La construcción del plano cartesiano apoyada en software didáctico 273-281
Carlos Espinosa-MX, Jaime Arrieta-MX, Celma Espinosa-MX, Rolando Roa-MX

La entrevista de carácter socrático como una estrategia para producir conocimiento matemático en educación a distancia online 282-290
Edison Sucerquia Vega-CO, René Londoño Cano-CO, Carlos Jaramillo López-CO

La interacción en foros virtuales en el desarrollo del proceso de Modelación Matemática con estudiantes de ingeniería 291-301
Jazmín Juárez Ramírez-MX, José Chamoso Sánchez-ES, María González-ES

La noción de función mediada por entornos dinámicos. El caso del punto dinámico. 302-312
Rosa Ferragina-AR, Leonardo Lupinacci-AR

La visualización en tareas de rotación y traslación sobre el plano del videojuego. 313-324
Jenny Patricia Acevedo-BR, Leonor Camargo Uribe-CO

Matematización a través del curso abierto en línea: Lógica y Conjuntos 325-336
Yolanda Campos-MX, Eymard Hernández-MX, Leonardo Rodríguez-MX

Mobilização de registros de representação semiótica em tarefas de Cálculo Diferencial e Integral 337-348
Paulo Oliveira-BR, Rogério Pires-BR

Nivel de apropiación tecnológica con respecto al uso de Recursos Educativos Abiertos en la enseñanza de la Matemática a distancia en Costa Rica 349-360
Cristian Quesada Fernández-CR

O (não) uso das tecnologias para o ensino de Matemática nas “boas” escolas: uma análise a partir da cultura da performatividade 361-372
Vanessa Neto-BR, Marcio Silva-BR

O ensino de Matemática Financeira no ensino médio com o simulador UOLInvest 373-380
Dilamar Lamberty-BR, Magnus Ody-BR, Alexandre de Silva-BR

O estudo da cicloide utilizando o software GeoGebra 381-390
André Grange-BR

O laboratório de informática em escolas públicas de Guaratinguetá e o Programa Acessa Escola 391-400
Ingrid Cordeiro Firme-BR, Rosa Monteiro Paulo-BR

O potencial da elaboração de aplicativos na contextualização do uso da simbologia algébrica no ensino médio 401-412
Sani Rutz da Silva-BR, Rodrigo Duda-BR

O professor Vídeo na disciplina Cálculo 1 a distancia 413-422
Helber Rangel Formiga Leite de Almeida-BR

O software GrafEq e os registros de representação semiótica: uma análise de trabalhos com ilusão de ótica 423-434
Márcia Notare-BR, Leandra Fioreze-BR, Fabrício Halberstadt-BR

O uso do facebook no ensino de matemática: um estudo de caso 435-443
José Gaspar-BR, Lenon Izidorio Fernandes-BR, Vilmar Fonseca-BR, André Silva-BR, Bruno Vianna-BR

Olimpíada de Programação de Computadores para Estudantes do Ensino Fundamental: Scratch como recurso interdisciplinar 444-455
Adriano Teixeira-BR, Ariane Pazinato-BR, Neuza Oro-BR, Jaqueline Zilli-BR, Adler Gross-BR

Orquestração instrumental da tutoria online da Geometria Analítica 456-466
Rosilângela Lucena-BR, Verônica Gitirana-BR

Programação de Computadores e Matemática: potencializando a aprendizagem 467-478
Neuza Oro-BR, Ariane Pazinato-BR, Valéria Lessa-BR, Franciele Forigo-BR

Proposta de formação do professor para o uso pedagógico das tecnologias digitais com a metodologia da Sequência Fedathi 479-486
Marta da Silva-BR, Hermínio Borges Neto-BR, Francisco Edisom de Sousa-BR

Representaciones semióticas de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 con Excel 487-494
Elvira Borjón Robles-MX, Mónica Torres Ibarra-MX, Leticia Sosa Guerrero-MX

Sobre a utilização de objetos de aprendizagem no ensino de Matemática na perspectiva de futuros professores 495-505
Renata Meneghetti-BR, Raissa de Castro Moda-BR

Tecnologias digitais na formação do professor de Matemática 506-513
Eline Victer-BR, Adriano Freitas-BR, Renan Pereira-BR

Un enfoque transdisciplinario de Cálculo potenciado por tecnología 514-522
Horacio Bosch-AR, Mercedes Bergero-AR, Mario Di Blasi Regner-AR, María Clara Rampazzi-AR

Un estudio exploratorio sobre prácticas de búsqueda de ayuda matemática en Internet entre estudiantes de ingeniería mexicanos 523-531
Danelly Esparza Puga-MX, Mario Sánchez Aguilar-MX

Unidades virtuales de aprendizaje en capacitaciones docentes en el uso de tecnología en la enseñanza de las Matemáticas 532-543
Luis Hernández-CR

VilGebra como recurso de enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal 544-552
Enrique Vílchez Quesada-CR

Presentación

La **XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática** realizada en Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México, del 3 al 7 de mayo del 2015, contó con la participación de cerca de 1000 personas de 23 países y la presentación de más de 500 trabajos (conferencias plenarias y paralelas, mesa redonda, minicurso, diálogos, comunicaciones, talleres y posters) Esta fue una reunión regional de la *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI). El CIAEM es la organización afiliada al ICMI con mayor antigüedad. Su creación se remonta al año 1961 cuando se realizó la primera conferencia en Bogotá, Colombia.

Un gran nivel científico dominó los trabajos, en un ambiente cultural muy especial, con una gran hospitalidad por parte de los colegas de Chiapas.

Los conferencistas plenarios fueron Michèle Artigue (Francia), Carlos Vasco (Colombia), Diane Briars (USA), Abraham Arcavi (Israel-Argentina), Celia Hoyles (Reino Unido), María Teresa Tatto (USA) y Alicia Ávila (México). Ellos también desarrollaron *Diálogos* especiales, espacios adicionales de conversación e intercambio.

Una mesa plenaria organizada por la *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe* contó con la participación de Carlos Sánchez (Cuba), Nelly León (Venezuela), Edison de Faría (Costa Rica), Luis Carlos Arboleda y Jhony Villa (Colombia).

El evento tuvo conferencias paralelas y minicursos impartidos por académicos invitados, entre ellos: Gabriele Kaiser (Alemania), Richard Noss (Reino Unido), Manuel Santos (México), Gert Schubring (Alemania), José Chamoso (España), José Luis Lupiáñez (España), Arthur Powell (USA), Alessandro Ribeiro (Brasil), Roberto Araya (Chile), Gilberto Obando (Colombia), Uldarico Malaspina (Perú).

Los dos temas principales fueron la *Preparación de docentes que enseñan matemáticas* y el *Uso de tecnologías en la Educación Matemática*.

El congreso tuvo el valioso patrocinio de varias instituciones internacionales y nacionales: International Commission on Mathematical Instruction; Universidade Luterana do Brasil; Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas, y Centro de Investigación y Formación en Educación Matemática de la Universidad de Costa Rica; Secretaría de Educación del Estado de Chiapas; Universidad del Valle de México; Sindicato de Trabajadores de la Educación de México; Centro Regional de Formación Docente e Investigación Educativa (CRESUR); Oficina de Convenciones y Visitantes de Chiapas; Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas de México; Escuela Normal Superior de Chiapas; Universidad de Costa Rica; HP; CASIO; y EduSystems.

Desde el 2007 el CIAEM ha logrado, entre otras cosas:

- Potenciar la calidad académica en los trabajos, la organización eficiente y la proyección de las conferencias interamericanas
- Consolidar la publicación de trabajos seleccionados de la Conferencias en la revista *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* (editada en Costa Rica)

- Fortalecer la relación del CIAEM con la comunidad internacional de Educación Matemática, especialmente con el ICMI y la *International Mathematical Union*.
- Crear y consolidar la Medalla *Luis Santaló*
- Apoyar el desarrollo del *Capacity and Networking Project* del ICMI en América Latina (Costa Rica 2012, Perú 2016)
- Auspiciar la creación y las actividades de la *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe*
- Apoyar la organización del *I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe*, celebrado en Santo Domingo, República Dominicana, en noviembre del 2013
- Consolidar el uso intenso de tecnologías de la comunicación en todas las actividades del CIAEM
- Crear una comunidad virtual del CIAEM de gran proyección tanto a través de su sitio web principal como de su página en Facebook
- Fundar en México el *Comité Interamericano de Educación Matemática* con personalidad jurídica para atender los múltiples compromisos formales que posee
- Traducir al español y publicar algunos textos del NCTM relacionados con la temática *Principles to actions* y continuar una línea importante de colaboración con el *National Council of Teachers of Mathematics* de los USA

En la XIV CIAEM fue confirmada la decisión de tener la XV CIAEM en Medellín, Colombia, en el 2019. Será desde hará 58 años la segunda ocasión en que se realizará una CIAEM en tierra colombiana.

CIAEM es el evento internacional más importante en Educación Matemática en América Latina. Constituye un punto de referencia para investigadores, docentes y estudiantes en todo el continente.

La mayoría de los textos de base para las presentaciones plenarias o paralelas ha sido incluidas en el número 15 de los *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* que se edita en Costa Rica: http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem.

Las comunicaciones, talleres, minicursos y posters han sido incluidas en esta colección digital de volúmenes que titulamos *La Educación Matemática en las Américas: 2015.* Los trabajos se han organizado de la siguiente manera:

- Volumen 1 *Educación Matemática en las Américas 2015: Formación Inicial para Primaria*
- Volumen 2 *Educación Matemática en las Américas 2015: Formación Inicial para Secundaria*
- Volumen 3 *Educación Matemática en las Américas 2015: Formación Continua*
- Volumen 4 *Educación Matemática en las Américas 2015: Uso de Tecnología*
- Volumen 5 *Educación Matemática en las Américas 2015: Etnomatemática y Sociología*
- Volumen 6 *Educación Matemática en las Américas 2015: Currículum, Evaluación y Competencias*
- Volumen 7 *Educación Matemática en las Américas 2015: Investigación*
- Volumen 8 *Educación Matemática en las Américas 2015: Estadística y Probabilidad*
- Volumen 9 *Educación Matemática en las Américas 2015: Geometría*
- Volumen 10 *Educación Matemática en las Américas 2015: Álgebra y Cálculo*

- Volumen 11 *Educación Matemática en las Américas 2015: Educación Primaria*
- Volumen 12 *Educación Matemática en las Américas 2015: Historia y Epistemología*
- Volumen 13 *Educación Matemática en las Américas 2015: Nuevos Enfoques y Relación con Otras Áreas*
- Volumen 14 *Educación Matemática en las Américas 2015: Necesidades Especiales*
- Volumen 15 *Educación Matemática en las Américas 2015: Resolución de Problemas*
- Volumen 16 *Educación Matemática en las Américas 2015: Modelación*
- Volumen 17 *Educación Matemática en las Américas 2015: Talleres y Minicursos*
- Volumen 18 *Educación Matemática en las Américas 2015: Posters*

El CIAEM desea agradecer a todos los autores que presentaron sus trabajos en la XIV CIAEM y que incluimos en esta colección de volúmenes. Y a todos los revisores, directores de tema, y colaboradores que participaron en la revisión científica de las ponencias de este magno evento.

La organización detallada y la edición en sus diversas dimensiones fue realizada por nuestro segundo vicepresidente Patrick Scott (Estados Unidos) quien dedicó un esfuerzo extraordinario para tener estas *Memorias* disponibles. Quiero expresar en nombre de nuestra organización nuestro agradecimiento a Rick. Nuestra compañera Sarah González (Vocal para El Caribe) se encargó de tramitar su registro en República Dominicana que contó con el apoyo de la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra de ese país, a las que también expresamos nuestra gratitud.

Los enlaces de estos volúmenes se han colocado en las páginas web oficiales del CIAEM.

Esperamos que la publicación de todos estos trabajos contribuya al progreso de la investigación y la acción de aula en la Educación Matemática de las Américas.

Angel Ruiz
Presidente
Comité Interamericano de Educación Matemática

A autonomia em um curso a distância de formação de professores que ensinam Matemática nos anos iniciais

Luciane de Fatima **Bertini**
Departamento de Ciências Exatas e da Terra, Universidade Federal de São Paulo
Brasil
lfbertini@gmail.com
Reginaldo Fernando **Carneiro**
Faculdade de Educação, Universidade Federal de Juiz de Fora
Brasil
reginaldo.carneiro@ufjf.edu.br

Resumo

Neste artigo, temos como objetivo compreender o papel da autonomia exercida por estudantes e tutores em um curso de formação de professores dos anos iniciais no que diz respeito à matemática. Para tanto, realizamos uma pesquisa qualitativa em que investigamos as disciplinas Linguagens Matemática 1 e Linguagens Matemática 2. Para produção de dados, utilizamos as interações registradas no ambiente virtual de aprendizagem, bem como dados de entrevistas realizadas com tutores e estudantes. A análise dos dados evidenciou que os estudantes exerceram sua autonomia quando participaram de discussões em fóruns, sobre o material da disciplina, sobre os conceitos matemáticos e ao apresentarem reflexões sobre a prática e o processo formativo. Os tutores virtuais também exerceram a autonomia ao trazerem materiais complementares, ao participarem da organização inicial das atividades, ao elaborarem e construírem os critérios de correção das avaliações.

Palavras chave: autonomia, formação de professores, matemática, educação a distância, pedagogia.

Introdução

A Educação a Distância (EaD) está em foco nas discussões no cenário educacional brasileiro devido à criação, pelo Ministério da Educação (MEC), do Sistema Universidade Aberta do Brasil (UAB) em 2006 que tem como objetivo a formação, em cursos de licenciatura, dos professores da Educação Básica e também formação em serviço, e a capacitação de dirigentes, gestores e trabalhadores da Educação.

A UAB foi criada para proporcionar o acesso ao ensino superior de pessoas que têm dificuldades em frequentar um curso presencial, seja por indisponibilidade de horário ou por dificuldade de locomoção e, assim, busca reduzir as desigualdades existentes no Brasil.

O Sistema UAB envolve uma parceria entre o MEC, os governos estaduais, municipais e as universidades. Essa articulação acontece da seguinte forma: a universidade pública oferta cursos em nível superior a distância contando com o apoio de polos presenciais que são de responsabilidade dos Estados e dos municípios, que devem estruturar, organizar e manter os polos de acordo com as orientações da UAB.

A Universidade Federal de São Carlos (Brasil) passou a integrar o Sistema UAB em 2007, oferecendo diversos cursos de graduação, dentre eles, o de formação a distância, via internet, de professores da Educação Infantil e dos anos iniciais do Ensino Fundamental, que atendem crianças de 3 a 10 anos.

Esse curso tem duas disciplinas que se referem ao ensino e a aprendizagem da matemática – Linguagens Matemática 1 (LM1) e Linguagens Matemática 2 (LM2) –, ambas com carga horária de 60 horas, e que abordavam aspectos teóricos e metodológicos como a natureza do conhecimento matemático, a função da matemática no Ensino Fundamental, algumas considerações sobre a matemática na Educação Infantil e conteúdos matemáticos ensinados nos Anos Iniciais: sistema de numeração decimal e as operações fundamentais, espaço e forma, grandezas e medidas, frações e pensamento estocástico.

Essas disciplinas foram o cenário de nossa pesquisa que teve como objetivo compreender o papel da autonomia exercida por estudantes e tutores em um curso de formação de professores dos anos iniciais no que diz respeito à matemática.

Referencial teórico

Borba, Malheiros e Zulatto (2007) propõem um tripé em que devem estar pautados os programas em EaD: a interação, o diálogo e a colaboração. Segundo os autores, essas características são fatores que condicionam a natureza da aprendizagem e, por isso, influenciam na qualidade dos cursos.

Acrescentamos a autonomia dos atores desta modalidade de ensino como sendo outro elemento da EaD que vem sendo evidenciado pela literatura dessa área. Apenas para efeito didático discutiremos essas características separadamente, compreendendo que elas estão inter-relacionadas.

Contreras (2002, p. 193) compreende a autonomia, no contexto da prática, como "um processo de construção permanente no qual devem se conjugar, se equilibrar e fazer sentido muitos elementos. Por isso, pode ser descrita e justificada, mas não reduzida a uma definição autoexplicativa". Esses elementos entrelaçam:

> Aspectos pessoais (os próprios compromissos profissionais) com os de relacionamento (já que o ensino se realiza sempre em um contexto de relações pessoais e sociais); as tentativas de compreensão e equilíbrio social com a defesa profissional de valores educativos, e a independência de juízo com participação social (Contreras, 2002, p. 193).

Segundo Preti (2005, p. 113), a autonomia não pode ser confundida com liberdade sem interferências, pois se trata de um processo individual, mas também permeado pelo outro, pelo professor, pela escola que "mesmo quando propõem desenvolver ação emancipatória em relação ao cidadão, ao educando, acabam exercendo algum tipo de influência, apontando a direção, produzindo valores e significados". Assim, o indivíduo não é o único responsável por desenvolver sua autonomia, mas pode assumir uma posição ativa, participante e consciente quando está nesse processo que se constitui "de relações e inter-relações, em que as dimensões política e afetiva, além das dimensões cognitivas e metacognitivas, se fazem presentes" (Preti, 2005, p. 139).

Esse autor (2005) destaca que o desenvolvimento da autonomia é um processo inacabado e que deve estar constantemente sendo construído. Esse processo é permeado por diferentes dimensões que o influenciam e, por isso, o compreende como:

> Construção sócio-histórica, teórica e prática, como tarefa individual e coletiva ao mesmo tempo, como constante desafio e exercício do aprendiz e da instituição educativa. A autonomia se dá em contextos determinados, é datada, situada historicamente, exigindo tomada de consciência de nossa parte, como humanos libertos, capazes de tomar decisões, de dar significados e direções às nossas ações (Preti, 2005, pp. 119-120).

Assim, podemos perceber aproximações do conceito de autonomia apresentado por Preti (2005) com as ideias de Contreras (2002) em que seu desenvolvimento se configura como um processo em permanente construção e, portanto, em constante modificação que ocorre de forma individual e na relação com o outro.

Nessa perspectiva, autonomia não é sinônimo de autodidatismo que é compreendido como a pessoa que consegue estudar por conta própria. Para Preti (2005, p. 120), a autonomia é a "capacidade de desenvolver independência nas situações cognitivas, de tomar consciência e superar conflitos cognitivos, de desenvolver atitude metacognitiva, isto é, aprendizagem autônoma".

De acordo com Belloni (2012), a aprendizagem autônoma como sendo o processo de ensino e aprendizagem que tem como foco o estudante em que se deve considerar suas experiências. Assim, o professor auxilia o aluno que é "gestor de seu processo de aprendizagem, capaz de autodirigir e autorregular esse processo" (p. 40).

No entanto, destaca essa autora (2012) que ainda são raros nos cursos de EaD esse estudante autônomo e que a grande maioria participa passivamente do seu processo de aprendizagem.

Algumas condições subjetivas são responsáveis pela dificuldade em desenvolver a autonomia dos estudantes de EaD. Os alunos foram formados para repetir, copiar, memorizar, obedecer e não questionar, sendo assim, essas vivências escolares anteriores engessam hábitos de estudos que dificultam a aprendizagem. Também, eles não têm conhecimento das dificuldades que enfrentarão em um curso de EaD e, por isso, se culpam facilmente por seu fracasso e acabam abandonando-o (Preti, 2005).

Nos cursos realizados na modalidade a distância, é possível também observar o papel da autonomia no trabalho dos tutores virtuais. Ainda que as ações sejam específicas, uma vez que a organização desta modalidade de ensino requer o exercício da docência coletiva e envolve a hierarquização entre algumas funções, considera-se que a autonomia, na perspectiva apresentada por Preti (2005) faz parte da profissionalidade docente deles. É preciso esclarecer como o tutor exerce autonomia neste cenário.

Sendo a polidocência (Mill, 2012) caracterizada ao mesmo tempo pelo trabalho fragmentado e coletivo, a autonomia do tutor pode ser exercida em momentos nos quais ele faz escolhas e toma decisões de forma individual – característica do trabalho fragmentado – e também nos momentos nos quais participa de decisões coletivas – característica do trabalho coletivo.

Ao considerar a autonomia por parte dos tutores no exercício da docência coletiva, não se pretende ignorar ou negar a hierarquização existente neste tipo de trabalho. Ao discutir o exercício da autonomia pelos sujeitos na participação de decisões sociais e políticas, Martins (2002, p. 211) afirma que tal participação "não implica, necessariamente, uma ruptura nas estruturas de poder, mas sim, a possibilidade de construção de mecanismos que distribuem o

poder". Da mesma forma, considerar o exercício da autonomia pelos tutores na docência coletiva envolve, apesar do reconhecimento das relações de poder, a possibilidade da distribuição deste poder.

Mill, Ribeiro e Oliveira (2013) consideram que, para que a autonomia possa ser exercida a contento, é necessário que a construção da polidocência seja assim compreendida pelos diferentes atores. Além disso, os autores identificam como fundamentais, neste processo de desenvolvimento da autonomia por parte do tutor, a sua experiência docente prévia e a sua formação.

A partir do exposto, passaremos agora a apresentar alguns aspectos metodológicos sobre como esta pesquisa desenvolveu-se.

Metodologia

Está pesquisa teve como objetivo compreender o papel da autonomia exercida por estudantes e tutores em um curso de formação de professores dos anos iniciais no que diz respeito à matemática. Para tanto, a coleta e análise dos dados foram desenvolvidas em uma perspectiva qualitativa por meio da priorização da compreensão do processo e não apenas nos resultados obtidos (Bogdan & Biklen, 1994).

O cenário utilizado para a coleta de dados foi o curso de Licenciatura em Pedagogia — na modalidade a distância — da Universidade Federal de São Carlos (Brasil), no que diz respeito à formação matemática dos futuros professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental e da Educação Infantil.

A opção pela UFSCar foi motivada pelas especificidades da organização dos cursos a distância em relação ao trabalho da tutoria. Essa instituição tem o papel do tutor virtual bem definido e considera que este tem a função de contribuir no processo de formação dos estudantes não apenas quanto ao uso do ambiente virtual e das ferramentas, mas também em relação ao conteúdo e à formação enquanto professor. Embora a universidade faça parte do Sistema UAB, apresenta algumas particularidades quanto ao modelo de tutoria virtual, pois prevê um tutor para 25 ou 30 estudantes em cada uma das disciplinas, enquanto, nas demais universidades do País, o tutor acompanha um grupo de estudantes em todas as disciplinas que ocorrem concomitantemente ou atende a um grupo maior de estudantes em uma mesma disciplina.

Além disso, há especificidades na forma de escolha e organização dos tutores virtuais nas disciplinas que envolvem os conteúdos matemáticos. Nestas disciplinas são selecionados tutores com diferentes formações iniciais – Pedagogia e Matemática – e com diferentes experiências como docente, quanto ao tempo de experiência e quanto ao nível de ensino. Esses tutores são organizados em duplas para o trabalho, procurando, na medida do possível, colocar nas duplas um pedagogo e um matemático. Da mesma forma, procura-se garantir que na dupla um dos tutores tenha experiência docente nos anos iniciais. Essa organização tem como objetivo a troca de conhecimento entre os tutores.

Considerando o objetivo deste trabalho, optou-se por analisar as interações que envolvessem de alguma forma o ensino da matemática nos anos iniciais, nas disciplinas LM1 e LM2, acompanhando os tutores vituais e estudantes de uma mesma turma na realização das duas disciplinas. Assim, constituem-se como dados desta pesquisa todas as interações registradas no ambiente virtual de aprendizagem destas disciplinas, bem como dados de entrevistas realizadas

com tutores e estudantes. Ressaltamos que os estudantes que participaram desse estudo já eran professores dos anos iniciais e que estavam cursando a Pedagogia para obterem o curso superior.

A opção pelo objeto a ser estudado e pela forma de análise dos dados permite aproximar tal pesquisa de um estudo de caso (André, 2005), que envolveu a busca de conhecimento a partir de focalização de um caso específico que nesta pesquisa envolverá a especificidade da escolha e organização do grupo de tutores virtuais nas disciplinas do curso de formação de professores dos anos iniciais que envolvem conteúdos matemáticos.

O direcionamento das discussões realizadas foi delineado durante a coleta e o processo de análise de acordo com aquilo que se pode observar nos dados. Numa investigação qualitativa os dados não são coletados para comprovação de categorias pré detreminadas, mas as abstrações são construídas no decorrer do processo de coleta e análise. Ainda, apresenta-se uma análise descritiva, realizada a partir do registro de algumas citações presentes nos dados coletados (Bogdan & Biklen, 1994).

A autonomia exercida por estudantes e tutores virtuais

Na análise dos dados da presente pesquisa, observou-se situações que evidenciaram a autonomia exercida por estudantes e tutores no processo formativo de professores que ensinam matemática nos anos iniciais realizado na modalidade a distancia.

A autonomia exercida pelos estudantes foi evidenciada em momentos nos quais: puderam desenvolver uma atitude ativa em relação às suas aprendizagens a partir da interação com o outro, nos fóruns de discussão, nas discussões propostas pelo material da disciplina ao apresentar articulações destas com outros materiais e práticas e nas reflexões sobre sua própria prática e processo formativo. Apresentamos algumas situações para discussão.

No fórum disponibilizado para a discussão das resoluções dos problemas sobre fração, a estudante Alice apresentou algumas dúvidas com relação à maneira como um colega os resolveu.

> **Aluno 1**: Olá Tutor 1 e colegas! Para a resolução dos problemas, as frações foram convertidas numa mesma unidade de medida e representadas na forma pictórica (desenhos onde a fração que se quer é destacada por cores, hachuras, etc.), […]Essa foi a estratégia por mim utilizada para a resolução das situações-problema indicadas. Como foi que vocês realizaram essa tarefa?
>
> **Tutor 1:** Excelente estratégia, Aluno 1! Isso pode ajudar a gente na interpretação dos problemas.E vocês pessoal, como solucionaram, compartilhem conosco.
>
> **Alice**: Olá Tutor 1, não realizei completamente a leitura do material, não sei se estou certa, mas como estou somando frações (exercício 1 e demais) resolvê-las através de desenho, e faria também o cálculo reduzindo as frações ao mesmo denominador, será que estou certa? Não compreendi bem a explicação do Aluno 1, estou retornando a leitura, pra sanar dúvidas.
>
> **Aluno 2:** Olá Alice e colegas! A maneira como resolvi as questões foi simplesmente seguindo o material impresso; procurei trabalhar o mais simples possível imaginando estar passando essa atividade em uma sala de aula para as crianças.Segue anexa a resolução dos exercícios. (Fórum de discussão, LM2)

Nessa interação, constatamos que a explicação do aluno fez com que Alice percebesse que não havia compreendido bem as ideias presentes no material, o que a fez retomá-lo para realizar uma leitura mais atenta. Além disso, o questionamento do tutor sobre como os alunos estavam resolvendo os problemas, a fez expor a forma como estava pensando.

Essa incompreensão indicada por Alice poderia ter passado despercebida se o Aluno 1 não tivesse postado no fórum a explicação sobre a resolução. Assim, essa ferramenta do AVA, que possibilita que os registros fiquem gravados, pode, como no caso de Alice, fazer com que outros estudantes compreendam a forma de resolver as situações-problema e também identifiquem lacunas.

No fórum de discussão sobre os conteúdos de geometria na disciplina de LM2, Ana disponibilizou *sites* em que podiam ser encontradas obras de artes para se ensinar matemática, assim como um arquivo com obras de Tarsila do Amaral, corroborando assim a afirmação do material impresso, feita por ela, de que os alunos podem fazer conexões da matemática com outras áreas do conhecimento ao explorarem obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas etc.

> Segue em ANEXO exemplos de obras da Tarsila do Amaral que podem ser trabalhadas na sala de aula com as crianças, como as figuras bidimensionais e tridimensionais, situações-problema, tamanho original da obra, área e perímetro, etc.
>
> Além disso, o professor poderá trabalhar a biografia da autora, textos sobre o movimento cubista (Língua Portuguesa e História), entre outras situações.
>
> www.suapesquisa.com/artesliteratura/cubismo/
>
> www.google.com.br/imagens (Ana, Fórum de discussão, LM2).

O fórum configurou-se como um ambiente em que os estudantes puderam compartilhar suas ideias e experiências de sala de aula, fato que enriqueceu muito as discussões. Esses trechos permitem compreender que o fórum não se limita às discussões baseadas nas ideias do material impresso, mas extrapolam mostrando outras relações que as alunas-professoras fazem com a prática de sala de aula ou ainda com reportagens encontradas na Internet.

Alice e Ana mostraram exercer autonomia, a partir da interação com os tutores ou com outros estudantes e em suas propostas de ampliação das discussões, na perspectiva apresentado por Preti (2005) ao tomar consciência dos conflitos cognitivos e buscar superá-los, bem como ao desenvolver independencia nas situações cognitivas. Nos exemplos apresentados observa-se ainda a contribuição que estes momentos trouxeram para o processo de aprendizagem dos conteúdos matemáticos (como a fração) e do ensino de matemática (como a relação com arte).

Ao falar, na entrevista, sobre uma atividade de elaboração de texto coletivo, Renata destaca que é

> um exercício de compreensão da ideia do outro. [...] proporciona um espaço mais acadêmico, em que normas são mais rígidas e que nos aproximam de uma forma de escrever o que se compreende com bases teóricas sólidas. Caso o que se colocou não esteja em consonância com o assunto tratado anteriormente e posteriormente, há uma desarmonia perceptível e, consequente, uma reconstrução do que se aprendeu (Renata, Entrevista).

Essa atividade, por possibilitar a interação mais efetiva entre os participantes, pode promover a autonomia. Assim, Palloff e Pratt (2007) discutem que essa ferramenta pode auxiliar os estudantes a proporem novas ideias e as compartilharem com o grupo, o qual pode fornecer um retorno e, baseado em argumentos sólidos, sobre essas ideias no sentido de aceitação ou recusa, para que o autor do proposto reveja sua posição.

Os tutores virtuais exerceram sua autonomia quando estes mostraram assumir uma posição ativa, participante e consciente (Preti, 2005). Foram momentos nos quais: mostraram-se dispostos a buscar materiais complementares e a fazer uso destes nas interações com os

estudantes; puderam decidir sobre prazos e organizações no AVA; participaram, de alguma forma, da organização inicial das atividades, na elaboração de avaliações e na construção dos critérios de correção; envolveram-se com seu próprio processo formativo enquanto docente.

Considerando o processo interativo e dialógico desenvolvido no AVA, necessidades não previstas poderão surgir e exigirão tomadas de decisão que no curso analisado nesta pesquisa ficam a cargo dos tutores virtuais que acompanham e que participam das interações.

Neste sentido, foi possível identificar a iniciativa de alguns tutores em apresentar materiais complementares de acordo com o tema estudado, com a necessidade da turma ou com a necessidade individual de alguns estudantes.

O tutor Felipe, por exemplo, a partir da necessidade dos estudantes em representar frações em uma das atividades que solicitava a resolução de problemas com esse conteúdo, postou um tutorial, disponível na *internet*, indicando a utilização de uma ferramenta para edição de textos matemáticos.

> A pedido da colega de vocês, [nome da estudante], disponibilizarei um editor de textos matemáticos disponível no MicrosoftWord, que se chama microsoft equation 3.0, tentem localizá-lo no programa de vocês, [...] foi o mais didático que encontrei, ele ajudará vocês a escrever frações no corpo do texto.http://www.youtube.com/watch?v=71LgRpJ79Ik. (Felipe, Fórum de discussão, LM2).

Além disso, propôs a ampliação das discussões sobre estocática apresentando a ideia de *infográfico* através da disponibilização de uma imagem e de um texto informativo sobre esse tipo de gráfico que não era apresentado no material da disciplina.

> Muito bem turma as discussões de vocês estão ótimas, para continuar nesse ritmo gostaria de apresentar para vocês, mais uma ferramenta de divulgação de informação que dispomos atualmente, ela já é bem antiga, mas vem sendo muito utilizada pela imprensa em seus vários níveis, é o **INFOGRÁFICO**, ele alia imagem, textos e números para transmitir informações de forma mais clara, objetiva e direta, sem perder o teor da informação, muitas revistas e mídias têm utilizado esse recurso, devido ao seu aspecto visual e interativo, como é o caso da internet, logo abaixo tem um exemplo: [Figura 10]. Se quiserem conhecer um pouco mais sobre infográficos, deem uma olhadinha aqui, ou procurem na internet:http://veja.abril.com.br/infograficos/index.shtml. (Felipe, Fórum de discussão, LM2).

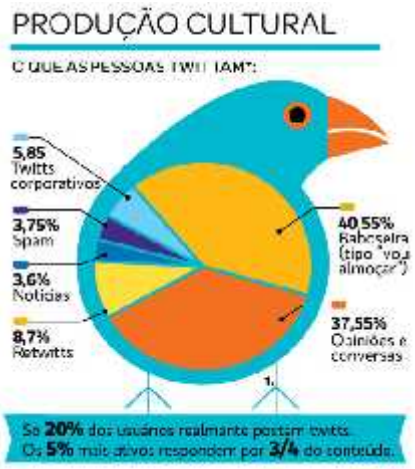


Figura 1. Imagem postada pelo tutor Felipe.

As ações descritas revelaram uma forma de autonomia exercida pelos tutores; afinal, nenhum dos materiais apresentados constava no livro-texto das disciplinas, nas atividades propostas e nem foram frutos de orientação do professor da disciplina. As intervenções foram provenientes dos conhecimentos e das experiências de cada tutor e atenderam as necessidades específicas e de interesse de cada estudante e de cada turma.

Este tipo de ação dos tutores revela uma preocupação com o atendimento mais específico às necessidades dos estudantes individualmente e do grupo. Autores como Belloni (2012, pp. 87-88), identificam a necessidade de que o papel do docente passe a ser o de "parceiros dos estudantes no processo de construção do conhecimento", não apenas na EaD.

Nas disciplinas, objetos de análise deste estudo, os docentes responsáveis foram os idealizadores dos materiais e das atividades a serem propostas e desenvolvidas em todas as salas e por todos os estudantes. Contudo, a possibilidade do estabelecimento de uma parceria no processo de construção do conhecimento, a possibilidade de atender de forma mais específica às necessidades de cada grupo e de cada estudante, tornando o estudante e sua aprendizagem como centrais, só puderam ser realizados a partir da atuação dos tutores.

O fato de se considerar a contribuição deste tipo de ação para a qualidade do curso também coloca luz sobre a questão da formação do tutor. Para que este possa exercer tal forma de autonomia, precisa ter conhecimentos específicos em relação à disciplina com a qual trabalha.

Este aspecto é abordado por Mill (2012, p. 275) quando identifica que "dominar os conteúdos específicos da disciplina e os materiais didáticos de apoio" é um dos cuidados em termos de saberes e de competências necessários ao exercício da função de tutoria.

A formação específica dos tutores e suas experiências têm influência na autonomia que exercitam, já que, como afirma Preti (2005, p. 114), a autonomia é uma qualidade construída a duras penas, uma vez que envolve "[...] a capacidade de decidir o que fazer e como fazer, de dar 'intencionalidade' e direção às ações". Tais qualidades envolvem, no caso da tutoria, conhecimentos sobre os conteúdos envolvidos, sobre os objetivos do curso, sobre a prática pedagógica nos anos iniciais, sobre a docência e sobre a EaD.

Além do acompanhamento do desenvolvimento das atividades e da interação com os estudantes, os tutores das disciplinas LM1 e LM2 tiveram participações na organização da

disciplina. Os tutores da LM1, foram convidados pela professora a participar de decisões durante o planejamento da disciplina, na elaboração de avaliações bem como na elaboração de critérios e de direcionamentos para a correção delas.

As tutores Leticia e Mariana, por exemplo participaram da elaboração das avaliações elaborando casos de ensino baseados em sua prática docente com as crianças dos anos iniciais do Ensino Fundamental. As questões que compuseram a avaliação foram criadas em conjunto pelaos tutores envueltos na disciplina por meio de conversas via e-mail pessoal. Os tutores ainda estabelceram em conjunto os critérios de correção e procuraram resolver coletivamente as avaliações traçando o que se espera, minimamente em cada uma das questões propostas.

A tutora Mariana comenta sobre sua participação na elaboração das avaliações:

> [...] eu participei da elaboração dessas avaliações, eu vejo também como um momento formativo [...]. Eu contei a minha experiência e não consegui articular com enunciados de provas, mas conforme a minha experiência eu sugeri algumas ideias e outros tutores […] conseguiram articular como questões de avaliação e, depois a gente foi discutindo os critérios, levantando os pontos de respostas que os alunos poderiam ter ou os conceitos que eles precisariam levantar referente a questão para a gente elaborar os critérios de avaliação. Eu aprendi muito, com essa correria dos compromissos, nem sempre é possível contribuir como eu acho que a gente poderia e deveria, mas há momentos também que eu aprendo. (Mariana, Entrevista).

De acordo com Mariana, as interações entre os tutores colaboram para qualificação do trabalho de tutoria e também para a formação deles em exercício. Aqui também se destaca a contribuição do exercício da coletividade entre o professor da disciplina e os tutores na qualificação do trabalho desenvolvido.

As contribuições apresentadas revelam a importância de que tais participações poderiam ser parte do trabalho do tutor e que estes tivessem garantidas condições trabalhistas e salariais para isso. Preti (2005) discute o papel da instituição e a necessidade de ações concretas na construção da autonomia. Para o autor, esta construção não está centrada apenas no sujeito, e, sendo um projeto político, social e institucional, precisa ganhar concretude nas ações para que não se torne apenas um discurso sobre autonomia.

Da mesma forma, como destacado quando se observou a autonomia dos tutores em propor materiais complementares, aqui também há destaque para a influência que a formação específica do tutor tem neste tipo de participação do trabalho docente coletivo. As tutoras puderam participar da elaboração de uma avaliação considerando os aspectos relacionados aos conteúdos matemáticos e ao ensino da matemática devido a sua formação acadêmica e devido às suas experiências profissionais enquanto docentes dos anos iniciais. Destaca-se ainda a possibilidade de contribuição do trabalho conjunto entre pedagogos e matemáticos.

Ao falar sobre a autonomia que exerceram nas disciplinas, os tutores reconheceram a sua importância e o papel que os professores da disciplina têm ao possibilitar tal exercício e, ao mesmo tempo, oferecerem apoio.

> Ela [professora] oferece autonomia para a gente trabalhar e, ao mesmo tempo que oferece essa autonomia, ela está ali por perto. A gente sabe que ela está presente e se for preciso ela intervém [...]. Ela deixa a gente a vontade para trabalhar, isso eu acho que é bom. E esse a vontade não é um a vontade laissez-faire, que ela abandona a gente, é um a vontade que você pode ser você, atuar com a sua experiência a partir das diretrizes, objetivos e critérios da

disciplina. (Mariana, Entrevista).

Mariana reconhece que o exercício da autonomia por parte do tutor depende também da atitude do professor ao conduzir o trabalho chmando a atenção para a importância de que o tutor possa sentir-se à vontade para fazer uso de seu próprio conhecimento e de sua experiência.

O exercício da autonomia por parte dos tutores envolveu ainda o seu envolvimento no seu processo formativo por meio: de reflexões dos tutores sobre seus saberes e suas dificuldades no exercício da tutoria; do envolvimento dos tutores na busca da superação dessas dificuldades e na sua preparação para a disciplina; das reflexões acerca do papel do tutor virtual na EaD bem como as reflexões sobre sua própria atuação.

A consciência dos tutores sobre suas próprias dificuldades e suas limitações, a atitude de busca de superação dessas dificuldades, o reconhecimento de que a participação na disciplina é um instrumento de formação e o reconhecimento de que as suas ações sofreram alterações no decorrer da participação em diferentes ofertas da disciplina relacionam-se com a ideia de *metaformação*, apresentada por Mill (2012). Para o autor, a formação dos docentes na educação virtual tem-se dado por *metaformação* na medida em que se aprende ser professor sendo professor, por tentativa/erro/reflexão/acerto. Nesta mesma perspectiva, Mizukami (2008) considera que a formação do formador ocorre através de um processo continuado de autoformação.

Considera-se também que este exercício da autonomia tem relação com seu papel de formador de professores do tutor virtual, pois, como observou Rêgo (2010), o exercício da autonomia por parte dos tutores é de grande importância para que os estudantes possam também exercer sua autonomia. Houve o reconhecimento de que ele depende de diferentes fatores, e a observação de que, nos momentos nos quais aconteceram, trouxeram qualificação para o desenvolvimento da docência coletiva e oportunidades de qualificação do curso oferecido.

Considerações

A observação dos momentos nos quais os estudantes evidenciaram exercer autonomia no seu processo formativo mostrou que estes contribuíram de forma significativa para suas aprendizagens em relação ao conteúdo matemático, bem como, sobre o ensino e aprendizagem dessa disciplina. Por se tratar de um curso de formação de professores o desenvolvimento da autonomia como estudante apresenta também contribuição para seu exercício na prática docente deles.

Por meio do exercício da autonomia, os tutores realizaram ações que trouxeram ao processo formativo possibilidades de um atendimento mais individualizado contribuindo para a formação dos professores (ou futuros professores) na medida em que pôde ser realizado a partir do posicionamento e das necessidades de cada um.

A formação específica do tutor para a atuação nas disciplinas e as suas experiências, enquanto docente, se mostraram fundamentais para o exercício da autonomia e para seu envolvimento crítico e participativo nas disciplinas. Além disso, o papel da instituição e do professor da disciplina mostraram ter grande influência na possibilidade de um trabalho autônomo por parte do tutor. A instituição como aquela que determina os tipos de relações trabalhistas, a forma de organização do trabalho da tutoria, e os professores como os responsáveis pelas disciplinas que podem dar uma maior ou menor abertura para a participação dos tutores na docência coletiva.

Também foi observar que os tutores virtuais identificaram-se como formadores de professores, e isso teve influências na sua forma de atuação implicando no seu desenvolvimento, quando possível, nas decisões e na organização das disciplinas e no seu envolvimento com seu processo formativo.

Referências

André, M. E. D. A. (2005). *Estudo de caso em pesquisa e avaliação educacional*. Brasília: Livro Editora.

Belloni, M. L. (2012). *Educação a distância*. Campinas: Autores Associados.

Borba, M. C., Malheiros, A. P. S. & Zulatto, R. B. A. (2007). *Educação a distância online*. Belo Horizonte: Autêntica.

Bogdan, R, C. & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Contreras, J. (2002). *Autonomia de professores*. São Paulo: Cortez.

Martins, A. M. (2002). Autonomia e educação: a trajetória de um conceito. *Cadernos de Pesquisa, 115,* 207-232. Recuperado em 27 agosto, 2013, de http://www.scielo.br/pdf/cp/n115/a09n115.pdf

Mill, D. (2012). *Docência virtual: uma visão crítica*. Campinas, SP: Papirus

Mill, D., Ribeiro, L. R. C. & Oliveira, M. R. G. (2013). Trabalho docente na educação contemporânea: saberes e prática pedagógica presencial e virtual. In D. Mill & C. Maciel (Org.). *Educação a distância: elementos para pensar o ensino-aprendizagem contemporâne*o. Cuiabá: EdUFMT.

Mizukami, M. G. N. (2008). Aprendizagem da docência: conhecimento específico, contexto e práticas pedagógicas. In A. M. Nacarato & M. A. V. Paiva. (Org.). *A formação do professor que ensina matemática: perspectivas e pesquisas*. Belo Horizonte: Autêntica.

Palloff, R. M. & Pratt, K. (2007). *Building online learning communities: effective strategies for the virtual classroom*. San Francisco: Jossey-Bass.

Preti, O. (2005). A "autonomia" do estudante na educação a distância: entre concepções, desejos, normatizações e práticas. In O. Preti. (Org.). *Educação a distância: sobre discursos e práticas*. Brasília: Liber Livro Editora

Rêgo, M. C. L. C. (2010). *Trabalho docente e autonomia: a tutoria e formação humana no ensino superior a distância*. Tese de Doutorado, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

A configuração do curso de Licenciatura em Matemática – educação à distância

Ana **Chiummo**
Universidade Paulista
Brasil
anachiummo@uol.com.br
Elisabete**Brihy**
Universidade Paulista
Brasil
bb@unip.br
Emilio Celso de **Oliveira**
Universidade Paulista, Prefeitura do Município de São Paulo
Brasil
emilio.celso@gmail.com
Marisa Rezende **Bernardes**
Universidade Paulista
Brasil
marisarb@globo.com
Valéria **Carvalho**
Universidade Paulista
Brasil
carvaleria@gmail.com

Resumo

Esta comunicação abordaa configuração do curso de Licenciatura em Matemática, modalidade Educação a Distância, da Universidade Paulista.A compreensão de que a construção do conhecimento se dá pela interação entre todos os elementos envolvidos no processo de ensino e aprendizagemé fundamental, na perspectiva da abordagem pedagógica conectiva. Apresentamos a arquitetura pedagógica do curso, em relação aos aspectos organizacionais, conteúdo e metodologia, tecnologia e avaliação institucional. Nessa arquitetura pedagógica, destacamos opapel de professores e tutores no processo de ensino e aprendizagem, que se viabiliza na construção de interações intra e interpessoal dos envolvidos, por meio do uso de estratégias dialógicas, tais como os chats, fóruns de discussão e orientação de trabalhos interdisciplinares, buscando-se um Ambiente Virtual de Aprendizagem criativo e incentivador.Concluímos com alguns resultados de pesquisa realizadapela Comissão Própria de Avaliação da instituição, em que se apontam fragilidades e potencialidades do curso.

Palavras chave: Educação a Distância, Ambiente Virtual de Aprendizagem, Licenciatura em Matemática.

Introdução

Esta comunicação tratade apresentara configuração do curso de Licenciatura em Matemática, modalidade Educação a Distância (EaD), da Universidade Paulista.

A questão central consiste em discutir quais as características básicas do curso de Licenciatura, que além da formação específica, atende ao pressuposto da instituição,em obedecer estritamente aos princípios de respeito à dignidade da pessoa e aos seus direitos fundamentais, proscrevendo quaisquer formas de discriminação.

Apresentamos a seguir o quadro teórico, objetivos, metodologia, e alguns resultados, destacando os processos de formação, a organização das disciplinas, a metodologia de ensino e aprendizagem, o sistema de comunicação, a concepção do Laboratório de Educação Matemática e Biblioteca de materiais e atividades virtuais. Concluímos apontando perspectivas para o curso.

Rodrigues (2011, p. 25), considera que o processo de ensino e aprendizagem em Ead, embora traga inquietações aos profissionais envolvidos, é um desafio que pode ser superado com uma concepção de educação para a cidadania, na qual a qualidade, a democratização e a inclusão são metas educacionais indispensáveis.

Para o alcance dessa concepção de educação, Rodrigues (2011) destaca que a configuração de um curso de Ead implica construir uma abordagem pedagógica conectiva:

> construir uma abordagem conectiva em um processo de EAD implica assegurar o princípio da autonomia na especificidade didática de um planejamento minucioso e flexível, na adoção de linguagens diversificadas, de metodologias interativas, de acompanhamento individualizado e processos avaliativos contextualizados, bem como o desenvolvimento da interaprendizagem de cunho colaborativo (p. 80).

Behar (2009) aponta que a educação está vivenciando uma mudança paradigmática que torna evidente e necessária o repensar das práticas educacionais e, consequentemente, os modelos pedagógicos. Repensar a educação significa acima de tudo buscar um novo olhar sobre o aprender, permeado pelo uso das tecnologias da informação e comunicação integrado às atividades educativas em tempos e espaços diversos.

Behar (2009, p. 25), no caso da educação a distância, significa construir uma arquitetura pedagógica com os seguintes cuidados:

1. fundamentação do planejamento/proposta pedagógica (*aspectos organizacionais*), em que estão incluídos os propósitos do processo de ensino-aprendizagem a distância, a organização do tempo e do espaço e as expectativas na relação da atuação dos participantes ou da também chamada organização social da classe;
2. *conteúdo* – materiais instrucionais e/ou recursos informáticos utilizados, objetos de aprendizagem, *software* e outras ferramentas de aprendizagem;
3. atividades, formas de interação/comunicação, procedimentos de avaliação e a organização de todos esses elementos em uma sequência didática para a aprendizagem (*aspectos metodológicos*);
4. definição do ambiente virtual de aprendizagem (AVA) e suas funcionalidades, ferramentas de comunicação tais como vídeo e/ou teleconferência, entre outros (*aspectos tecnológicos*).

Além desses aspectos, acrescentamos a necessidade de avaliação institucional, por meio da qual todos os aspectos propostos por Behar (2009) são revistos, para reformulação do curso.

Utilizando esse quadro teórico, apresentamos alguns resultados obtidos, apontando os aspectos da arquitetura pedagógica na configuração do curso de Ead em Licenciatura em Matemática da Universidade.

Resultados obtidos: a arquitetura do curso EaD de Licenciatura em Matemática

Nesta seção, apresentamos a arquitetura pedagógica do curso EaD de Licenciatura em Matemática, trazendo:

(a) os *aspectos organizacionais*, em especial, a *metodologia de ensino e aprendizagem* e os *processos de formação em EaD*;

(b) o *conteúdo* e os *aspectos metodológicos,* a *concepção de educação e currículo* e a *organização das disciplinas e dinâmica do curso*;

(c) os *aspectos tecnológicos*;

(d) a avaliação institucional da Universidade, estabelecida por meio da Comissão Própria de Avaliação (CPA).

Aspectos organizacionais

Nesta seção, apresentamos os aspectos organizacionais do curso.

No que diz respeito à *metodologia de ensino e aprendizagem*, segundo Vygotsky, a aprendizagem deflagra vários processos internos de desenvolvimento mental, que tomam corpo somente quando o sujeito interage com objetos e sujeitos em cooperação. Uma vez internalizados, esses processos tornam-se parte das aquisições do desenvolvimento. Assim, um processo interpessoal é transformado num processo intrapessoal.

Como metodologia de ensino-aprendizagem, o nosso curso adota algumas atividades, como: aulas expositivas, aulas dialogadas, dinâmicas de grupo, leituras comentadas, visitas técnicas, palestras, pesquisa bibliográfica e outras atividades acadêmico-científico-culturais visando à oferta de experiências diversificadas aos discentes. O curso busca o desenvolvimento de programas que privilegiem o enlace entre a teoria e a prática, enfocando o uso e a adequação de recursos audiovisuais, tecnológicos, de novos métodos e técnicas de ensino, buscando o aperfeiçoamento do trabalho acadêmico e sua aplicação profissional.

A integração entre estudos teóricos, aulas e atividades práticas é exercida nas atividades complementares, trabalhos individuais e em grupo, nos estágios e atividades de extensão.

A educação a distância (EaD) é uma modalidade educacional cuja característica principal é a forma de interação, tendo como instrumento facilitador a comunicação baseada em recursos diversificados. Nessa perspectiva, oferecemos o contato visual, auditivo e verbal direto e frequente por meio de teleaulas, outros recursos didáticos e dialógicos, promovem a interatividade e estimulam a aprendizagem dos estudantes.

Levando em consideração as demandas específicas, motivadas pelo processo de ação e reflexão, confluentes e divergentes, de pessoas oriundas de diversas regiões, na Interativa são utilizas teleaulas, materiais impressos, chats, fóruns, textos complementares, slides de teleaula, atividades complementares e questionários, para efetivar uma interação de qualidade, a fim de proporcionar a dialogicidade, contribuindo para a construção do conhecimento entre os agentes envolvidos no processo de ensino-aprendizagem.

No curso de Matemática, as atividades seguem uma dinâmica que pressupõe, além dos momentos de interação com o professor, o autoaprendizado (aprendizagem independente). De acordo com Barreto (2007), o enfoque da autoaprendizagem ou aprendizagem independente surgiu no mundo inteiro a partir dos anos 1970, com o objetivo de criar um modelo de organização mais flexível no processo de ensino-aprendizagem e buscando ofertar não um programa universitário padronizado, mas programas alternativos capazes de atender necessidades e interesses mais específicos ou, ainda, voltados para o desenvolvimento de competências.

É sob esse contexto que podemos ressaltar que o curso de Matemática da EaD pode, mesmo sendo uma forma de aprender, em que há distância física entre aluno e professor, aproximar o discente de seu interesse e proporcionar a formação sólida.

Diante disso, entende-se que o aluno deve ser incentivado a estudar e pesquisar de modo independente e com atividades extras, buscando o fortalecimento do aprendizado colaborativo, a dinamização da comunicação e a utilização das ferramentas existentes. Saber comunicar-se, descrever, analisar e sintetizar fatos e informações da vida cotidiana, das relações na família, na comunidade, no curso e na empresa, bem como saber trabalhar em grupo de maneira participativa é parte das estratégias de maior investimento do aluno em sua formação, pois isso fortalece o saber científico e o que advém da experiência. Estratégias de ensino que incorporem a experiência de vida dos alunos os ajudam a ter um maior rendimento em seu processo de aprendizagem. Assim, nossos alunos são orientados a desenvolver o hábito de estudo independente. O perfil do professor deve acompanhar os movimentos e transformações na sociedade em decorrência dos avanços científicos e tecnológicos identificados.

Em relação aos processos de formação em EaD, conforme Projeto Pedagógico Institucional (PPI), preparamos profissionais competentes, com sólida formação humanística e técnico-científica, conscientes do seu papel social e do compromisso com a cidadania.

A modalidade EaD, como um sistema específico de ensino-aprendizagem, tem uma gestão acadêmico-administrativa distinta daquela que atende à modalidade presencial, visto que a modalidade, as ferramentas e os processos são outros devido à distância física entre os atores. Por essa razão, instituiu-se o Centro de Educação a Distância – UNIP Interativa, órgão suplementar da universidade, responsável pela coordenação, supervisão, assessoramento e prestação de suporte técnico à execução de atividades pedagógicas e da formação na EaD. Para atender as demandas específicas das diversas regiões, oferecemos os seguintes formatos na modalidade EaD: o Sistema de Ensino Interativo (SEI).

A configuração deste formato é Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA). No AVA, o aluno acessa todo o conteúdo disponibilizado a qualquer momento pela internet. Isso possibilita ao estudante a organização do seu ritmo de estudo. O SEI prevê, ainda, momentos presenciais que perfazem 20% (vinte por cento) da carga horária total do curso.

A interação com o professor ocorre por meio do fórum, que acontece durante a disciplina. Esse espaço é utilizado para debates entre alunos, professores, e tutores a distância, que atuam na mediação das ações pedagógicas. Nesse formato, é disponibilizado o plantão tutorial presencial, realizado por profissional habilitado na área específica de atuação. Ele orienta os alunos com relação ao AVA, auxilia na organização dos estudos, na realização dos estágios, nas atividades complementares e facilita a interação dos alunos com o pólo, onde o aluno deve realizar suas avaliações, atividades e participar dos encontros programados.

Neste sentido, o docente conteudista é umprofissional indispensável na produção de textos é o professor conteudista. A ele cabe redigir o material didático da disciplina e/ou produz material para o Ambiente Virtual de Aprendizagem e/ou grava o conteúdo nas mídias, áudio e vídeo (quando for o caso).

Ele recebe orientações sobre a utilização das diversas mídias e participa de treinamentos e workshops.

O conteúdo e os aspectos metodológicos

A *concepção de educação e currículo* e a*organização das disciplinas*são aspectos destacados do conteúdo, que se relacionam com os aspectos metodológicos.

A concepção de educação e currículo está explicitada no Plano de Desenvolvimento Institucional (PDI), que preconiza a "educação ao longo de toda a vida", que se organiza em torno de quatro aprendizagens fundamentais, que constituem os pilares do conhecimento:

1) *Aprender a conhecer* significa, antes de tudo, o aprendizado dos métodos que nos ajudam a distinguir o que é real do que é ilusório e, assim, ter acesso aos saberes de nossa época. A iniciação precoce na ciência é salutar, pois ela dá acesso, desde o início da vida humana, a não aceitação de qualquer resposta sem fundamentação racional e/ou de qualquer certeza que esteja em contradição com os fatos.
2) *Aprender a fazer* é um aprendizado da criatividade. "Fazer" também significa criar algo novo, trazer à luz as próprias potencialidades criativas, para que venha a exercer sua profissão em conformidade com suas predisposições interiores.
3) *Aprender a viver junto* significa, em primeiro lugar, respeitar as normas que regulamentam as relações entre os seres que compõem uma coletividade. Contudo, essas normas devem ser verdadeiramente compreendidas, admitidas interiormente por cada ser, e não sofridas como imposições exteriores. "Viver junto" não quer dizer simplesmente tolerar o outro com suas diferenças, embora permanecendo convencido da justeza absoluta das próprias posições.
4) *Aprender a ser* implica em aprender que a palavra "existir" significa descobrir os próprios condicionamentos, descobrir a harmonia ou a desarmonia entre a vida individual e social.

Focada nessas premissas norteadoras, incorporamos o nosso curso abordagens que busquem:

- a construção coletiva expressa na intenção e prática de cada segmento institucional, levando em conta a articulação dialética, diferenciação e integração, globalidade e especificidade;
- a interação recíproca com a sociedade caracterizada pela educação e desenvolvimento econômico-social sustentáveis, reafirmando o seu compromisso como potencializadora da formação humana e profissional;
- a construção permanente da qualidade de ensino – entendida e incorporada como processual e cotidiana da graduação e da pós-graduação, indagando continuamente sobre o tipo de sociedade que temos e queremos, a função dos cursos superiores frente às novas relações sociais e de produção, e sobre o perfil do profissional a formar frente às exigências do mercado de trabalho;

- a integração entre ensino, pesquisa e extensão, objetivando a construção de um processo educacional fundado na elaboração e reelaboração de conhecimentos, para poder alcançar a apreensão e intervenção em uma realidade dinâmica e contraditória;
- a extensão voltada para seus aspectos fundamentais, como tornar a coletividade beneficiária direta e imediata das conquistas do ensino e da pesquisa, socializando o saber e a coleta do saber não científico elaborado pela comunidade para, estruturando-o em bases científicas, restituí-lo a sua origem;
- o desenvolvimento curricular contextualizado e circunstanciado, expressão da concepção de conhecimento como atividade humana processualmente construída na produção da vida material;
- a unidade entre teoria e prática mediante o desenvolvimento, por parte de professores e alunos, em atividades de pesquisa e iniciação científica.

Cada disciplina está dividida em unidades, e, para cada uma, o aluno deve assistir à teleaula sem a obrigatoriedade de data e horário, devendo estudar o conteúdo referente a cada unidade, realizar as atividades propostas pelo professor, responder aos questionários no AVA, respeitando o período preestabelecido em calendário acadêmico.

Os slides utilizados pelos professores nas teleaulas, contendo os principais tópicos da unidade, também ficam disponíveis no AVA. O aluno deve desenvolver todas as atividades previamente descritas antes avançar à unidade subsequente.

Em relação à avaliação do aluno, esta não deve apenas medir seu rendimento acadêmico, mas principalmente estimulá-lo a sustentar um desempenho positivo. O crescimento intelectual do discente ao longo do processo de sua formação deve ser valorizado, considerando-se os objetivos do curso e as qualidades desenvolvidas, apontando-se as insuficiências observadas e os caminhos para superá-las.

O sistema de avaliação é concebido na perspectiva de garantir o desenvolvimento de competências no processo de formação. Nesse sentido, a avaliação destina-se a induzir a aprendizagem dos alunos, de modo a favorecer seu percurso e regular as ações que orientam e incentivam sua formação. Desse modo, a avaliação não tem por objetivo punir os que não alcançam o que se pretende atingir, mas a ajudar cada aluno a identificar melhor as suas carências de formação e empreender o esforço necessário para realizar sua parcela de investimento no próprio desenvolvimento profissional.

O sistema de avaliação não deve incidir sobre elementos a serem memorizados, mas na verificação da capacidade de refletir sobre o conhecimento, de questioná-lo e de (re)construí-lo do ponto de vista científico, metodológico e político.O que se pretende avaliar não é só o conhecimento adquirido, mas a capacidade de acioná-lo e de buscar outros saberes para realizar o que é proposto. Avaliar significa verificar não apenas se os alunos adquiriram os conhecimentos necessários, mas também, o quanto e como fazem uso deles para resolver situações-problemas (reais ou simuladas) relacionadas, de alguma forma, com o exercício da profissão.

Dessa forma, a avaliação é realizada mediante critérios explícitos e compartilhados com os alunos, uma vez que o objeto de avaliação representa uma referência importante para quem é avaliado, tanto para a orientação dos estudos como para a identificação dos aspectos considerados mais relevantes para a formação em cada momento do curso.

Aspectos tecnológicos

O sistema de comunicação da EAD- Matemática- Interativa, tem base em serviço de tecnologia da informação e comunicação, responsável por prover e dotar recursos de interação por meio de AVA, para que professores, alunos e tutores mantenham relação no processo da formação. Organiza e dispõe informação fundamentada nos conteúdos afins aos programas, cursos e projetos desenvolvidos na modalidade à distância.

Os projetos pedagógicos dos cursos oferecidos nas modalidades presenciais e a distância são os mesmos, no entanto, as especificidades da modalidade EaD tornaram necessária a criação de serviços que suportem as demandas por interação entre os envolvidos no processo ensino-aprendizagem. O sistema de comunicação atende, prioritariamente, a essa interação.

O material didático utilizado na Interativa é desenvolvido consoante os princípios epistemológicos, metodológicos e políticos explicitados no PDI da Instituição, nas Diretrizes Curriculares Nacionais e nos Projetos Pedagógicos dos Cursos – PPC. Seu uso é precedido de avaliação por especialistas externos, que sugerem e orientam a adoção de medidas almejando o seu aperfeiçoamento.O conjunto de mídias, selecionado para desenvolver as competências específicas propostas para cada curso, respeita as características socioeconômicas dos diferentes grupos de alunos.

A produção do material impresso e disponibilizado no AVA atende às lógicas distintas de concepção, produção, linguagem e tempo. A convergência e a integração entre as diversas mídias são garantidas pelas equipes multidisciplinares, constituídas por especialistas em conteúdos, em desenvolvimento de páginas web, em desenho instrucional, em ilustração, em diagramação, em revisão do material produzido.

O livro texto é um dos materiais produzidos pela Instituição que possuem um papel muito importante, pois:

- exercem a função de um mediador privilegiado, atuando como roteiro de estudos;
- contêm sugestões de atividades que fomentam reflexões, pesquisas e a sistematização de ideias;
- ensejam relações com o campo de conhecimento, além de outros “olhares” e possíveis saberes que esse campo incita;
- compõem “trilhas” com várias possibilidades de acesso, instigando o aluno à procura de outros tipos de fontes para estudo;
- inserem-se em uma rede de diferentes tipos de materiais – livros, filmes, artigos, etc. – cuja composição permite atingir os objetivos propostos para a formação dos alunos;
- utilizam ícones padronizados;
- inserem imagens e gráficos;
- apresentam ao menos dois exercícios por módulo, que estimulam a reflexão mais aprofundada, a aplicação e a ampliação do conhecimento, oferecendo a resposta de um exercício no próprio livro e de outro na plataforma.

A elaboração do livro-texto é realizada de forma dialógica, ancorada no tripé *educador-educando-objeto* do conhecimento, permitindo aos alunos agir, refletir e interagir no desenrolar

da ação pedagógica. Esse material deve fomentar a reflexão do discente, levando-o a buscar informações em outras fontes, realizar novas leituras, descobrir novos caminhos e apropriar-se dos conhecimentos criados e adquiridos.

Esse processo contínuo considera o aluno como um agente ativo e capaz de autoavaliar o seu progresso no decorrer do curso.O texto dialógico estabelece uma conversa amigável entre o autor e o leitor, desenvolvendo o senso crítico do estudante e levando-o a compreender a relevância do conteúdo do texto para seu cotidiano e prática profissional. O conteúdo deve contemplar a ementa da disciplina e compor um todo coeso, integrando de forma contínua e complementar as suas diferentes partes: unidades, tópicos, reflexões, atividades, bibliografia, gráficos e imagens.

Para suporte ao livro-texto há as teleaulas, produzidas na sede da Universidade em São Paulo e transmitidasaopólo de apoio presencial via satélite ou via internet.

Assim, os componentes tecnológicos empregados pela Interativa e que podem ser adotados são: internet, satélite, CD-ROM, DVD e webcast.

Toda a infraestrutura tecnológica desenvolvida pelo NUTEC – Núcleo de Tecnologia– está consolidada em conceitos de comunicação baseada em bancos de conteúdos distribuídos por dispositivos multimídia (conectados ou não). A fundamentação técnico-teórica para isso está nos conceitos de Tecnologia da Informação e Comunicação (TIC),em que todos os recursos tecnológicos estão organizados em estruturas computacionais gerenciadas por bancos de dados, assegurando que os conteúdos programáticos dos cursos sejam distribuídos de forma sistêmica e controlada.

Com base nisso, é necessária a organização desses conteúdos dentro de uma base informatizada, que garanta a produção e distribuição do conhecimento em um ambiente monitorado e acompanhado por professores e tutores de forma interativa. Tradicionalmente, o banco de dados era o repositório de informações, e atualmente evoluiu para o controle das mídias textuais e audiovisuais, transformando-se de fato em um banco de conteúdos multimídia.

As teleaulas contêm a ementa e o programa da disciplina e seu conteúdo é elaborado por um professor escolhido pelo coordenador do curso em conjunto com o líder da disciplina; ouvindo sempre as considerações do Núcleo Docente Estruturante (NDE), bem como as reflexões feitas por todos os presentes (docentes, tutores a distância e representante discente) nas reuniões pedagógicas do curso.

O professor distribui o conteúdo da disciplina nas unidades, respeitando a carga horária definida na matriz curricular, e organiza a sua apresentação aos alunos. As teleaulas são gravadas de acordo com a organização elaborada pelo professor.

As teleaulas, com duração de uma hora, são divididas em quatro blocos de quinze minutos cada, sendo que, ao final de cada bloco, o professor propõe uma questão referente ao tema abordado. O bloco seguinte inicia-se com um comentário do professor referente à atividade proposta no bloco anterior. A separação em blocos tem o objetivo de tornar a aula mais dinâmica e interativa, bem como oferecer um momento pausa reflexiva ao aluno.

É importante ressaltar que todas as teleaulas possuem intérprete de libras, o que permite aos alunos portadores de necessidades especiais acompanharem o conteúdo ministrado pelo professor.

As teleaulas são gravadas em estúdio e acompanhadas por profissionais da TV Web e do apoio pedagógico (um tutor da área da disciplina), bem como por um tradutor de libras, as teleaulas são enviadas ao departamento de Educação Digital,que prepara o link e realiza a sua inserção no AVA.

Como ambiente virtual de aprendizagem, utilizamos o Conteúdo On-line (COL), uma ferramenta própria que gerencia informações textuais e produtos multimídia, que, associados a exercícios, ajuda na aquisição do conhecimento proposto.

Como controlar toda entrega de trabalhos dos alunos, atividades complementares, documentos, relatórios de estágio e trabalhos de curso?

Disponibilizamos para os alunos o ATOL – Atividades On-line, que armazena nos banco de dados todo o gerenciamento dos locais onde estão guardados os trabalhos dos alunos. O Blackboard e o Moodle são utilizados como plataformas de distribuição de conteúdos em diferentes suportes, tais como: textos, teleaulas, vídeos (entre os principais), integrando recursos de interação entre professores, tutores e alunos.

No Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA), o suporte tecnológico distribui-se em três dimensões:

- uma dimensão ampla (que congrega os meios necessários para o desenvolvimento pedagógico dos cursos);
- uma dimensão de recursos de interação para o acompanhamento dos alunos;
- uma de avaliação.

No projeto pedagógico, elucidam-se as especificidades da EaD, que originam demandas de interação entre todos os envolvidos no processo. Para tanto, destacaremos a seguir os sistemas de informação utilizados na veiculação dos conteúdos pertinentes.

O *Blackboard* é uma plataforma utilizada pela Universidade – Interativa- como espaço de publicação de conteúdos e de centralização das demais plataformas desenvolvidas. Dispõe de ferramentas que permitem a interação do alunado com todo o corpo docente, bem como a publicação dos conteúdos pedagógicos de forma clara e acessível. Além dos dispositivos oferecidos pelo programa, a instituição o utiliza para integrar o acesso às demais plataformas desenvolvidas, a fim de centralizar o acesso em um único login, o que viabiliza a auditoria completa da vida acadêmica do aluno e do corpo docente.

Ao acessar a plataforma, o aluno terá disponível o conteúdo necessário para a realização de seu curso. Além das disciplinas, o discente terá acesso a diversos ambientes, como: avisos gerais, avisos da disciplina, guia do aluno, vídeos instrucionais, manuais explicativos, brinquedoteca, calendário acadêmico, secretaria virtual (Lyceum) e demais ferramentas personalizáveis pelo aluno, como calendário de tarefas e até o próprio layout da plataforma.

O material pedagógico é disponibilizado por disciplina e por turma. Nas disciplinas, são propostos fóruns de discussão que permitem o debate entre os alunos – e entre os alunos e o corpo docente – sobre temas específicos. Para tratar de assuntos gerais, o estudante utiliza a ferramenta “mensagens”, que permite o envio de recados a um ou a todos os usuários matriculados na disciplina. Os prazos e a ordem das disciplinas seguem o calendário acadêmico.

Consideramos importante em cursos de Licenciatura em Matemática a existência de Laboratório de Educação Matemática (LEM), para propiciar ao estudante o contato com o pensamento sistematizado da investigação, levando-o a conhecer formas de intervenção ditas "científicas", linguagens e teorias específicas, bem como a elaborar e produzir materiais didáticos. Esse espaço pode ser uma contribuição fundamental para que o estudante, futuro professor, avalie criticamente, em trajetória, sua própria formação e organize suas intervenções futuras – em caráter formativo, instrumental e tecnológico – quando no exercício da prática docente.

O Laboratório de Educação Matemática amplia as perspectivas do processo ensino-aprendizagem quando investe na formação do futuro professor não apenas como mero reprodutor de conceitos cristalizados, mas como potencial criador de novos horizontes na educação:

Não temo dizer que inexiste validade no ensino em que não resulta um aprendizado em que o aprendiz não se tornou capaz de recriar ou de refazer o ensinado. [...] Nas condições de verdadeira aprendizagem, os educandos vão se transformando em reais sujeitos da construção e da reconstrução do saber ensinado [...]. Percebe-se, assim, que faz parte da tarefa docente não apenas ensinar conteúdos, mas também ensinar a pensar certo (Freire, 1998, p.26-9 apud Fainguelernt; Nunes, 2012, p.23).

Não há como desconsiderar atualmente na prática do professor o uso das novas tecnologias. Os recursos computacionais constituem-se em instrumentos de grande potencial: possibilitam, entre outros, o enriquecimento e a melhoria da qualidade do ensino, bem como facilitam e tornam prazerosa a aprendizagem. No entanto, alertam Fainguelernt e Nunes (2012), o uso do computador e de outras tecnologias, por si só, não garante melhorias no processo de ensino-aprendizagem. Os recursos tecnológicos não podem ser utilizados apenas como recursos passivos, como ferramentas de armazenamento ou recursos ágeis para cálculos ou busca de informação. Assim, para desenvolver os temas presentes no currículo de Matemática do Ensino Médio com o recurso das novas tecnologias, alertam as autoras, é preciso que o professor elabore atividades investigativas e significativas que deverão ser resolvidas pelo aluno com o auxilio de materiais manipulativos – instância privilegiada propiciada pelo Laboratório de Educação Matemática, nas modalidades presencial e EaD.

Esse é um posicionamento importante, uma vez que o Laboratório de Educação Matemática estabelece um ambiente de aprendizagem diferente, mas com exigências similares para o ensino presencial e o EaD. Esta modalidade de educação caracteriza-se por ser uma prática educativa que exige do estudante, mais do que em outra instância, construir conhecimentos e participar efetivamente de seu próprio crescimento. Tal modelo implica, obviamente, um processo de ensino próprio, uma vez que modifica ou suprime o ambiente das salas de aula do ensino tradicional. Assim, a função docente sofre um deslocamento, seu papel torna-se descentralizado e a forma de atenção ao aluno está mais próxima do que se entende por orientação em pesquisas acadêmicas. É um formato de ensino-aprendizagem na graduação no qual os estudantes, assim como aqueles que se iniciam em pesquisas acadêmicas, devem aprender a estudar sozinhos, a buscar informações com base em indicações do docente responsável pelo curso (orientador) e ser capazes de fazer inferências na produção do seu conhecimento.

O objetivo geral de um Laboratório de Educação Matemática pode ser caracterizado como uma integração estratégica, ou seja, constituir-se em um ambiente que favoreça o debate em

relação às práticas profissionais e sociais, de forma que possibilite aos futuros professores reconhecer e analisar os fatores que limitam sua atuação e, em seguida, dar-lhe a oportunidade de ver-se como agentes potencialmente ativos e comprometidos com a defesa de suas convicções profissionais. Segundo Smole, Diniz e Cândido (2011), um dos pressupostos do LEM é a interação entre os alunos. Na discussão com seus pares, o aluno e futuro profissional docente pode desenvolver seu potencial de participação, cooperação, respeito mútuo e crítica. No desenvolvimento do aluno, observam as autoras, as ideias dos outros são importantes porque promovem situações que o levam a pensar criticamente sobre as próprias ideias em relação às dos outros.

No nível tático, o Laboratório de Educação Matemática propicia uma oportunidade para que seja investigado como os instrumentos técnicos podem ser utilizados nas relações em âmbito escolar.

O Laboratório de Educação Matemática – LABEMATECA – foi constituído com base em diferentes recursos: virtuais, multimídias ou disponíveis em ambientes frequentados pelos alunos. Proporcionará o desenvolvimento de atividades suplementares, que estimulam a prática de estudos independentes, transversais, opcionais, de interdisciplinaridade e de atualização profissional, integrando a comunidade interessada às diversas peculiaridades da educação matemática.

A proposta para a estruturação do Laboratório de Educação Matemáticaestá baseada em uma perspectiva de resolução de problemas, o que, na concepção de Smole*et al*. (2011), proporciona uma forma de organizar o ensino envolvendo mais que aspectos puramente metodológicos, pois inclui toda uma postura diante do que é ensinar e, consequentemente, do que significa aprender. Daí a escolha da expressão, cujo significado corresponde a ampliar o conceito de resolução de problemas como simples metodologia ou conjunto de orientações didáticas.

Assim, segundo essa perspectiva, o Laboratório promove uma integração entre o ensino e as expectativas do futuro profissional docente, além de propiciar a integração entre as atividades de ensino, pesquisa e extensão de forma que promova maior relacionamento entre a universidade, a comunidade e as escolas.

Avaliação institucional

Em termos de avaliação institucional, a Comissão Própria de Avaliação (CQA) da Universidade iniciou suas atividades em 2005, a partir da construção de sua proposta de avaliação institucional interna vinculada ao Sistema Nacional de Avaliação da Educação Superior (SINAES) instituído pela Lei nº10.861, de 14 de abril de 2004

A CPA da UNIP tem como objetivo o autoconhecimento da instituição sustentado no ato contínuo de analisar seu PDI e sua missão institucional, verificando o cumprimento do PDI, de maneira a propor metas e estratégias para superação das fragilidades e sustentação das potencialidades.

A CPA da UNIP também tem como objetivo a construção de uma cultura de avaliação na instituição que ultrapasse as críticas e reclamações em prol de uma permanente busca de sua eficácia institucional e efetividade acadêmica e social.

Para tanto, buscou sempre alcançar a participação voluntária e não-identificada de todos os segmentos da comunidade acadêmica.

Alguns resultados e considerações finais

Apresentamos alguns resultados de pesquisa realizada em 2013 pela Comissão Própria de Avaliação (CPA) da modalidade EaD, junto aos segmentos discentes, docentes e de apoio técnico-administrativo.

No que se refere ao curso atender o que o alunos esperava ao ingressar na instituição, observou-se que 87% alegaram estar muito satisfeitos ou satisfeitos; apenas 4% alegaraminsatisfação. Indagados se, livro-texto permite o entendimento adequado dos conteúdos disciplinares e se ele responde às necessidades do estudante, 86% responderam que estão muito satisfeitos ou satisfeitos, apenas 3% revelaram insatisfeitos. Quando perguntamos se participava das aulas deforma ativa e interessada; 89% dos discentes responderam estar muito satisfeitos ou satisfeitos e 3% estão insatisfeitos com a própria participação. Também estávamos interessados em detectar a percepção dos alunos no que se refere aos conteúdos das disciplinares, sua coerência e potencialidade demantê-los atualizadospara atuação no mercado de trabalho, ao que 91% alegaram estar muito satisfeitos ou satisfeitos e apenas 2% alegaram insatisfação. Ainda na mesma pesquisa, levantamos a opinam dos alunos sobre a coerência das diversas atividades estudantis ofertadas (trabalhos, exercícios, questionários, chatetc.), sendo que 90% alegaram estar muito satisfeitos ou satisfeitos e apenas 3% alegaram insatisfação. Sobre as técnicas adotadas para a aprendizagem, 80% dos alunos consideram que são atraentes e dinâmicas; já sobre o processo avaliativo disciplinar, 76% responderam que é claro e reflete o desempenho do aluno adequadamente (UNIP, 2013, p. 9).

Em síntese, a organização didático-pedagógica, a apresentação das aulas virtuais,as ferramentas disponibilizadas, a qualidade dos docentes, o material de apoio e aoportunidade de aprendizagem foram aspectos que obtiveram resultados satisfatórios entre 70 e 90%. Foi considerado também satisfatório entre 75 a 85% o atendimento e apoio prestado pelos tutores, pelos polos e pela ouvidoria. A infraestrutura também foi considerada satisfatória com 70% de aprovação, principalmente em relação ao ambiente virtual disponível e o apoio técnico prestado. No que se refere às fragilidades levantadas que ensejam ações de melhoria, destacamos: a instituição precisa realizar uma ação mais efetiva de divulgação das oportunidades que oferece para a comunidade acadêmica e sociedade civil em relação às atividades extracurriculares, sua missão, seus objetivos e as ações de caráter social que realiza (UNIP, 2013, p. 9). A instituição também iniciou, após a pesquisa da CPA divulgação mais efetivadas possibilidades de cursos e atividades de nivelamento,pesquisa, pós-graduação e as atividades de extensão que são oferecidos para discentes, docentes e pessoal de apoio técnico-administrativo.

Posto isso, entendemos que a configuração do curso na Universidade atende à sua missão de promover o ensino, a pesquisa e a extensão, aplicando-os a serviço do progresso da comunidade que vive em sua área de abrangência e influência, contribuindo para o fortalecimento da solidariedade entre os homens e para o esforço de desenvolvimento do País.

Além disso, com o desenvolvimento das tecnologias, percebemos a ampliação das possibilidades, de maneira que podemos falar hoje não apenas na utilização de computadores, mas também o acesso que ele permite aos recursos disponíveis na Internet, o queconfigura os ambientes digitais de aprendizagem. Professores e alunos tem um papel dinâmico neste processo de aprendizagem com as tecnologias, são levados a um processo deaprender fazendo, e ao mesmo tempo, refletir sobre como fazer.

Referências bibliográficas

Behar, P. A. (2009). Modelos pedagógicos em educação à distância. In: Behar, P. A. (org.). *Modelos Pedagógicos em Educação a Distância*. Penso Editora.

Fainguelernt, E. K., Nunes, K. R. A. (2012). *Matemática - Práticas Pedagógicas para o Ensino Médio*. São Paulo: Penso Editora.

Rodrigues, C. A. C.(2011). Configurações das abordagens pedagógicas da educação a distância. In: *Revista Brasileira de Aprendizagem Aberta e a Distância, 10,* 71-82. Disponível em <http://www.abed.org.br/revistacientifica/Revista_PDF_Doc/2011/ Artigo_06.pdf. Acesso em 12/10/2014.

Smole, K. S., Diniz, M. I., Cândido, P. (2011). *Resolução de problemas*. v. 2. (Coleção Matemática). Disponível em: <http://online.minhabiblioteca.com.br/books/9788536311937/page/7>. Acesso em: 19 jul. 2013.

UNIP. (2013). *Relatório da Avaliação Interna da UNIP – EAD*. São Paulo, UNIP.

A discussão e a produção de conhecimento Matemático no âmbito cultural que envolve o jogo League of Legends

Lucas Gabriel **Seibert**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
lucasseibert@hotmail.com
Rodrigo **Dalla Vecchia**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
rodrigovecchia@gmail.com

Resumo

Este artigo apresenta uma discussão matemática que envolve o universo do jogo League of Legends e aspectos da Modelagem Matemática. Com o objetivo de tangenciar o entendimento entre a associação do modelo com a realidade assumimos uma postura qualitativa, avaliando as discussões matemática e sua relação em termos de atualização no jogo, assim como os debates que envolvem matemática nos fóruns oficiais de Legue of Legends. Os resultados apontam que ao lidar com a Modelagem Matemática no campo do mundo cibernético, não há necessariamente uma relação ou referência ao empírico, abrindo assim espaço para considerar situações as quais tenham sua referência também no âmbito do imaginado e que encontram um espaço de atualização.

Palavras chave: League of Legends. Modelagem Matemática. Matemática e Realidade.

Introdução

Uma das características marcantes da atualidade é a rápida evolução que os recursos tecnológicos vêm sofrendo. A velocidade de introdução de novos meios faz com que novas perspectivas e potencialidades surjam constantemente, transformando o cotidiano vivencial de cada um. No que diz respeito à Educação Matemática, com o advento dessas tecnologias, diversas atividades que são apresentadas como problemas tendem a não ser mais caracterizadas dessa forma, trazendo como consequência um profundo repensar sobre o enfoque pedagógico que o processo de ensino e aprendizagem da Matemática deve assumir (Borba, Malheiros, Zulatto, 2007).

Autores como Jablonka e Gellert (2007) olham com cuidado para a relação entre tecnologias e o processo de ensino e aprendizagem de matemática. Em suas investigações, defendem que o uso das tecnologias pode promover aquilo que chamam de desmatematização. Este termo descreve a trivialização e a desvalorização do desenvolvimento da matemática que ocorre quando uma calculadora, software ou ambiente computacional é utilizado para procedimentos matemáticos.

Sob certos aspectos, concordamos com Jablonka e Gellert (2007) principalmente quando discutem que aquilo que dá suporte ao software torna-se uma espécie de "caixa preta", que

infalivelmente produz resultados verdadeiros. Entretanto, não olhamos para as tecnologias somente por esta ótica, entendendo que para quebrar essa visão é necessário, cada vez mais, buscar ambientes no quais a matemática pode se mostrar de modo implícito e, principalmente, explícito.

Essa busca por ambientes que podem contribuir para que discussões matemáticas ocorram com naturalidade por meio de tecnologias pode ser avaliada sob inúmeros pontos de vista. Nosso foco se dará em um campo diferenciado dos comumente investigados que envolvem softwares específicos para o desenvolvimento de matemática, como Geogebra, WinPlot, Maple, entre outros. Trataremos das discussões que envolvem os chamados *e-sports* (esportes eletrônico[1]). Nesse âmbito, focaremos no jogo League of Legends (LoL), que também pode ser classificado como um MOBA (Multiplayer Online Battle Arena ou Arena de Batalha de Multijogadores) e é desenvolvido e publicado pela empresa Riot Games.

Em todo o mundo existem mais de 70 milhões de pessoas registradas nos servidores de *LoL*. O Brasil está entre os 10 países que mais comentam sobre o jogo no Facebook. Estes dados tornam *LoL* o jogo mais jogado no mundo[2].

A comunidade de *LoL* possui fóruns oficiais, desenvolvidos pela Riot Games, que envolvem discussões acerca das principais questões referentes ao jogo e formam, em nosso ver, um ambiente com cultura própria, envolvendo amizades, afinidades e alianças intelectuais. Dentre as discussões desse ambiente que consideramos ser cultural ou cibercutural (LÉVY, 2010) nos chama a atenção as que tratam de estratégias, tomadas de decisões e técnicas de jogo, principalmente pelo fato da matemática ser um dos aspectos discutidos de modo natural. Embora a matemática não seja expressa de modo explícito durante o jogo, há uma comunidade tentando entender quais os aspectos matemáticos fazem parte de jogo, contribuindo para que haja um movimento contrário ao que Jablonka e Gellert (2007) chamaram de desmatematização.

Ao avaliar as discussões específicas, observa-se o interesse contínuo da comunidade em conhecer os múltiplos aspectos matemáticos. Tais discussões envolvem desde regras de três e discussões quantitativas na tomada de decisão, até situações mais complexas nas quais questões referentes ao Cálculo Diferencial e Integral ou a técnicas de Pesquisa Operacional são empregadas.

Somente por existir um ambiente, uma comunidade, que possui suas características culturais próprias e que, dentre o universo abrangido por suas discussões, a matemática ocorre de modo natural, por si só, já ressalta a necessidade de investigações, no sentido de buscar contribuições para os processos de ensino e aprendizagem. Entretanto, entendemos que as discussões podem abranger e contribuir para uma esfera específica, que é a relacionada aos aspectos da Modelagem Matemática (MM).

Uma das características que parece perpassar os diferentes modos que a MM é compreendida, no âmbito abarcado pela Educação Matemática é a referência à realidade (Anastacio, 1990; Araújo, 2002; Dalla Vecchia, Maltempi, 2009; 2010). Entretanto, com o advento das tecnologias digitais (TD), a discussão acerca do real se potencializa, gerando adjetivações como realidade do mundo cibernético, realidade aumentada, hiperrealidade, realidade virtual, etc. Imergir nesses ambientes, considerados como dimensões da realidade

[2] http://majorleagueoflegends.s3.amazonaws.com/lol_infographic.png

(Bicudo, Rosa, 2010), pode fazer com que surjam um "pensar matematicamente" próprio, que não ocorre do mesmo modo em outros ambientes (Lévy, 1993, 1996, 2010; Borba, Penteado, 2001; Borba, Villarreal, 2005).

Está justamente nesse conjunto de potencialidades, tanto em termos da relação e importância da matemática para um determinado grupo cultural, quanto para as potencialidades de discussões teórico-ontológicas envolvendo a MM num espaço de jogo abrangido e formatado pelas tecnologias digitais, que reside nossos interesses investigativos. Para a especificidade desse artigo, focaremos nossa atenção no que diz respeito a um modelo matemático específico, construído pelos próprios jogadores e discutido nos fóruns, que trata do dano causado pela aplicação de um determinado item ao oponente. Em particular, pretendemos contribuir para a compreensão da relação existente entre a matemática e suas atualizações em termos de decisões no jogo.

O universo do League of Legends

LoL[3] é um MOBA (Multiplayer Online Battle Arena ou Arena de Batalha de Multijogadores) desenvolvido e publicado pela empresa Riot Games. Atualmente este jogo é disponibilizado no formato *free-to-play* ou seja, livre para jogar, gratuito

O jogo possui quatro mapas para serem jogados e cada mapa possui as suas características, são eles: Summoner Rift, Twisted Treeline, Crystal Scar e Howling Abyys. Todas as informações contendo neste projeto se referem ao mapa Summoner Rift, uma vez que, neste mapa, ocorrem as partidas competitivas.

No mapa são dispostas duas equipes de cinco jogadores. O meta-game[4] atual utiliza quatro jogadores divididos em três linhas e um jogador na selva (Figura 1), que constitui a parte do mapa entre as linhas.

Figura 1. Mapa Summoner Rift.

O jogo inicia com os cinco personagens de cada equipe em suas bases, perto do Nexus (que pode ser observado na Figura 2), que funciona como uma espécie de base que deve ser protegida. Estes 5 personagens são escolhidos dentre os 121 possíveis e são chamados de "campeões". O objetivo dos jogadores é avançar nas linhas e destruir o Nexus oposto. Para

[3] Disponível para download no site http://br.leagueoflegends.com.
[4] O mesmo que estratégia.

cumprir este objetivo as equipes devem destruir pelo menos cinco das onze torres inimigas e um dos três inibidores.

Figura 2. Início do jogo/Personagens na base.

A Figura 2 apresenta a interface inicial da partida, com todos os jogadores da equipe posicionados dentro da base. No canto superior direito, está situado o Nexus de sua equipe (objetivo do time inimigo). No canto inferior esquerdo é possível observar os dados do personagem que está sendo utilizado pelo jogador e, na parte inferior, as cinco habilidades do personagem selecionado para o jogo.

Durante uma partida é possível evoluir (em termos de aumento de habilidades) partindo do nível zero até o nível dezoito. A cada nível é possível evoluir uma das habilidades, tornando-a mais forte. O jogo é iniciado com todos os personagens possuindo 475 de ouro, que é a "moeda" que permite a compra dos itens que favorecem o jogador. No entanto, no decorrer da partida, é possível coletar mais ouro eliminando as tropas inimigas (minions), os monstros da *jungle* ou abatendo um personagem inimigo (que ressurgirá após um tempo determinado). O processo de abater minions é chamado de farm.

Matemática e realidade

Entendemos que para compreender o modo como o modelo e as atualizações do jogo LoL se deram, é preciso entender o modo como os modelos matemáticos fazem o entrelaçamento entre os conceitos teóricos matemáticos e a realidade. Para essa tarefa trazemos as ideias apresentadas por Granger (1994), acerca do que entende por *fato virtual*.

O virtual, no sentido apresentado por Granger (1994), não deve ser confundido com o espaço gerado pelas tecnologias digitais, como coloquialmente o é. Trata-se de um virtual considerado em termos filosóficos e que pode ser entendido como sendo "[...] um complexo problemático, o nó de tendências ou de forças que acompanha uma situação, um acontecimento, um objeto ou uma entidade qualquer" (Lévy, 1996, p. 16). Assim, em termos filosóficos, o virtual não busca sua essência nas tecnologias como comumente é considerado, mas sim na ideia de problema, encontrando sustentação num campo não-atual. O não-atual, segundo Granger é formado pelo possível, pelo provável e pelo virtual e diferem do atual que pode ser considerado como a situação ou entidade que se mostra ao observador no estado que contempla o aqui e o agora. É aquilo que "[...] aparece na realidade mundana" (Bicudo, Rosa, 2010, P. 24).

O provável é um modo de não-atual que pode ser compreendido como uma espécie de pré-atualidade, podendo abranger graus da esfera do atual. A aproximação do provável com o

atual pode estar associado a dados probabilísticos, estatísticos e, até mesmo, a cálculos determinísticos.

O possível está relacionado, nessa visão, à linguagem e ao simbólico e diz respeito àquilo que pode ser feito e àquilo que não pode ser feito ou referido (por meio da linguagem ou símbolo), mostrando *amplitude e limitação*. Granger (1994) aborda a importância da linguagem e do simbolismo no processo de evolução histórica da ciência. Segundo esse autor, "[...] não se pode aperfeiçoar a linguagem sem aperfeiçoar a ciência" (Granger, 1994, p. 53). Com isso quer dizer, ao mesmo tempo, que a evolução da linguagem abre novos caminhos para a ciência e que a linguagem e símbolos usados condicionam possibilidades para a ciência. É importante aqui, não confundir o símbolo e a linguagem com os conceitos expressos por elas: os símbolos permitem a construção dos conceitos em termos de linguagem.

Já o virtual, para Bicudo e Rosa (2010), designa a modalidade de não-atual que não visa relação com o atual. É distinto do provável, pois este já se mostra como um pré-atual. Conforme Bicudo e Rosa (2010, p. 27), o virtual "[...] refere-se à forma em geral, que poderá atualizar-se mediante ações que estão junto às materialidades e técnicas disponíveis, em aplicativos particulares, explicações da empiria etc". Em outras palavras, o virtual tem sua essência em si mesmo e não busca, necessariamente, vínculo com o atual, mas eventualmente pode abarcar situações que possam vir a se atualizar.

Mas como estes aspectos podem se relacionar com o modelo, explicando o modo como é feita a relação entre ciência e realidade? Segundo Granger (1994), as ciências (em particular a matemática) ao discorrerem sobre uma situação, não tratam diretamente do fato que se mostra ao observador no estado que contempla o aqui e o agora, isto é, no *fato atual*, mas sim, dos *fatos virtuais*, ou seja, dos "[...] fatos esquemáticos, completamente determinados na rede de conceitos da própria teoria, mas incompletamente determinados enquanto realizáveis aqui e agora numa experiência" (Granger, 1994, p. 48). A relação entre o fato atual e o fato virtual no âmbito das ciências é dada pelo modelo, que se ampara no referencial (teórico), compreendido por Granger (1994) como o conjunto dos princípios e hipóteses que constituem uma teoria. É importante salientar que nas ideias defendidas por esse autor, a teoria é entendida como sendo

> [...] um conjunto de enunciados, atualmente formulados ou potencialmente formuláveis. Este conjunto deve ser fechado para certos procedimentos de dedução que lhe são próprios, ou seja, toda sentença deduzida de sentenças pertencentes à teoria deve ser também uma sentença da teoria (Granger, 1994, p. 48).

Essa teoria, enquanto inerente ao campo das ciências, é sustentada por um campo simbólico, entendido por Granger (1994, p. 54) como "as linguagens" da ciência e que abrangem o campo não-atual do *possível*. De acordo com o mesmo, é por meio das linguagens específicas das ciências, de seus signos e de sua sintaxe que é possível tratar de conceitos de modo operatório, produzindo assim novos significados. É mediante a linguagem específica do referencial teórico considerado que o objeto ou a situação a ser investigada pode ser avaliado frente a um número finito de aspectos, fazendo com que o fato virtual se torne totalmente determinado perante o referencial teórico assumido. O fato atual, por sua vez, é, em relação ao referencial teórico, determinado incompletamente, uma vez que representa apenas uma possibilidade dentro do universo abrangido pela teoria e pode sofrer ações que dizem respeito à particularidade de sua atualização que não foram incluídas em suas premissas.

Metodologia

Para este artigo, que tem a proposta de tangenciar o entendimento entre a associação do modelo com a realidade, assumimos uma postura qualitativa. Especificamente, procuraremos discutir um modelo matemático apresentado no fórum americano de LoL. Para compreender todo o processo, é necessário esclarecer algumas etapas que foram percorridas.

A produção de dados iniciou com a pesquisa em diferentes fóruns oficiais do jogo. Sendo assim, buscamos nos fóruns brasileiro, americano e europeu pelas palavras Matemática, Mathematic e Math, com a intenção de encontrar tópicos que poderiam discutir aspectos matemáticos do LoL. Entendemos que é importante ressaltar que no fórum brasileiro não foi encontrado nenhuma menção aos termos e que não exploramos os fóruns coreano, turco e leste europeu, que possuem um número significativo de participantes, por limitações linguísticas.

Ao encontrarmos tópicos relacionados com a matemática, avaliamos tanto as discussões matemática e sua relação em termos de atualização no jogo, quanto as falas dos envolvidos nas conversas. A autorização para discussão das mensagens contidas nos fóruns de discussão foi concedida aos pesquisadores pela empresa Riot Games, responsável pela criação e manutenção dos ambientes de discussão.

Discussões matemáticas nas comunidades do League of Legends

Os tópicos relacionados com a matemática nas comunidades do LoL, em sua grande maioria, se referem a otimização de compra de itens para determinados personagens. Estas discussões, na maior parte das vezes, apresentam aspectos da matemática que envolvem as operações básicas, porcentagem, probabilidade e estatística. No entanto, em alguns casos, podem ser encontradas discussões que apresentam uma matemática um pouco mais complexa, como a que iremos apresentar nesse artigo. A situação que nos interessa pode ser encontrada no fórum americano e datam do dia vinte de novembro de 2013.

Na especificidade das postagens, um dos jogadores (que chamaremos de Jogador SV) quis discutir sobre o item que confere dano, conhecido por "Tormento de Liandry". Este item possui uma característica única no jogo, que é a capacidade de causar dano-sobre-tempo, ou seja, após receber dano de uma habilidade o oponente perde 2% da vida a cada segundo, durante três segundos (Figura 3).

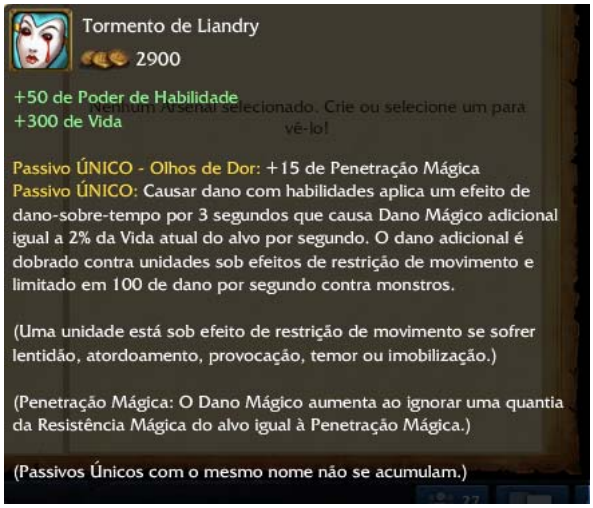


Figura 3. O Tormento de Liandry.

Sabendo destas característica, sentiu a necessidade de entender melhor o funcionamento deste item, e, no fórum de discussões apresentou o seguinte[5] modelo matemático para explicar o dano causado.

Jogador SV

O dano é aplicado em uma série de 6 momentos (espaçados por um intervalo de meio segundo). A cada meio segundo é dado 1% de dano baseado na vida atual do oponente. Considerando a vida inicial do oponente como ***h*** *e o tempo* ***t****. Pode ser calculado o dano bruto (*$\boldsymbol{D_{bruto}}$*) do Tormento de Liandry durante as 6 marcações de tempo.*

$$D_{bruto} = \int_{t=0}^{t=6} 0.01(h - 0.01ht)\, dt$$

Após integrar é encontrada a seguinte função:

$$D_{bruto} = 0.01ht - 0.00005ht^2$$

Essa função é o dano bruto dado pelo Tormento de Liandry (note que a resistência mágica do inimigo não está sendo levada em conta). Agora nós devemos considerar a relação entre a resistência mágica ($\boldsymbol{R_m}$*) e a porcentagem de redução de dano (*$\boldsymbol{\%D_{redução}}$*), que pode ser descrito por*

$$\%D_{redução} = \frac{R_m}{100 + R_m}$$

Isto representa o dano que <u>*não*</u> *é aplicado no oponente. Para encontrar a parte do dano que afeta o oponente nós devemos ajustar a equação. Nós chamaremos de porção de dano que afeta o inimigo (*$\boldsymbol{\%D_{afeta}}$*).*

$$\%D_{afeta} = 1 - \left(\frac{R_m}{100 + R_m}\right)$$

Combinando essas fórmulas temos o dano efetivo ($\boldsymbol{D_{efetivo}}$*):*

$$D_{efetivo} = (0.01 - 0.00005ht^2) \times \left[1 - \left(\frac{R_m}{100 + R_m}\right)\right]$$

Segundo o jogador, esta é a função que mais se aproxima ao dano-sobre-tempo causado pelo Tormento de Liandry. Outros jogadores, que leram o que foi proposto nesta modelagem apresentada, não questionaram o modelo matemático elaborado. No entanto, o fato de integrar uma função chamou a atenção dos pesquisadores. Por que não trabalhar com o ganho percentual do mesmo modo que se utiliza as regras de juros simples ou juros compostos, que apresentam montantes em relação a porcentagens?

Decidimos continuar com as incógnitas apresentadas pelo usuário no fórum americano, onde ***h*** representa vida, ***t*** o tempo e $\boldsymbol{R_m}$ resistência mágica. O primeiro modelo utiliza juros simples, e é representado como

[5] Em itálico é exposta e traduzida a proposta de modelo apresentada no fórum.

$$D_{efetivo} = h.t.[1\%.h.(1 - \left(\frac{R_m}{100 + R_m}\right)]$$

A mesma situação pode ser representada utilizando juros compostos, onde

$$D_{efetivo} = h.[1 - 1\%.h.(1 - \left(\frac{R_m}{100 + R_m}\right)]^t$$

Com essa inquietação, partimos para uma análise detalhada, comparando os três modelos com situações reais de jogo, que foram filmadas e avaliadas. Usamos uma planilha Excel para simular os valores dos modelos.

Durante a elaboração dos modelos foi possível perceber que, na discussão original do fórum, não foi levado em consideração que o oponente possui recuperação de vida por segundo. Isto interfere no resultado final e foi considerado pelos pesquisadores, havendo alterações para que o ganho fosse incluído. Os três casos analisados e expostos nas tabelas 1, 2 e 3 são situações de jogo.

No primeiro caso (tabela 1) iniciamos análise com 2741 de vida, 154 de resistência mágica e 3,3 de recuperação de vida por segundo. No teste desenvolvido no jogo, após três segundos, o oponente estava com 2648 de vida.

A aplicação do juros simples resultou na vida final de 2647,068657. A aplicação da fórmula de juros compostos resultou na vida de 2648,803767. Já a fórmula dada pelo jogador SV (com a incorporação do ganho de vida por segundo), mostrou a vida final de 2650,750597.

			Juros Simples	Juros Compostos	Jogador SV
Vida	2741	Valor final	2647,068657	2648,803767	2650,750597
Redução de vida	0,02				
Resistência Mágica	49				
Ganho de vida/s	9,6				
Erro relativo			0,035183949	0,030344533	0,103766722

Tabela 1. Simulação 1.

Na segunda situação (tabela 2) iniciamos análise com 1320 de vida, 49 de resistência mágica e 9,6 de recuperação de vida por segundo. No teste desenvolvido no jogo, após três segundos, o oponente estava com 1297 de vida.

A aplicação do juros simples resultou na vida final de 1296,761925. A aplicação da fórmula de juros compostos resultou na vida de 1297,003649. Já a fórmula dada pelo jogador SV (com a incorporação do ganho de vida por segundo), mostrou a vida final de 1297,756067.

			Juros Simples	Juros Compostos	Jogador SV
Vida	1320	Valor final	1296,761925	1297,003649	1297,756067
Redução de vida	0,02				
Resistência Mágica	154				
Ganho de vida/s	3,3				
Erro relativo			0,018359215	0,000281338	0,058259558

Tabela 2. Simulação 2.

O terceiro caso (tabela 3) iniciamos análise com 858 de vida, 30 de resistência mágica e 2 de recuperação de vida por segundo. No teste desenvolvido no jogo, após três segundos, o oponente estava com 820 de vida.

A aplicação do juros simples resultou na vida final de 819,2347826. A aplicação da fórmula de juros compostos resultou na vida de 820,0677975. Já a fórmula dada pelo jogador SV (com a incorporação do ganho de vida por segundo), resultou na vida final de 820,5777391.

			Juros Simples	Juros Compostos	Jogador SV
Vida	858	Valor final	819,2347826	820,0677975	820,5777391
Redução de vida	0,02				
Resistência Mágica	30				
Ganho de vida/s	2				
Erro relativo			0,09340636	0,008267309	0,070406386

Tabela 3. Simulação 3.

Comparando os resultados, é possível observar que o modelo que melhor aproximou dos dados empíricos foi o modelo relacionado aos juros compostos, apresentando o menor erro relativo nos três casos analisados. Apesar disso, nos chama a atenção que o modelo apresentado pelo jogador SV, embora distinto do comumente usado, tem uma aproximação interessante e perfeitamente aplicável em termos empíricos, podendo servir como tomada de decisão.

Vemos, nesse caso, que a relação entre dos dados fornecidos pelo modelo se mostram como uma aproximação. Embasados em nosso referencial, podemos dizer que o modelo produzido por SV, apresenta uma determinação incompleta (Granger, 1994) em relação ao seu campo de atualização, que é o jogo, uma vez que, mesmo se aproximando do valor, em nenhum dos casos se mostrou igual. O mesmo ocorre com o modelo construído pelos autores que, embora tenha uma precisão melhor, não condiz exatamente com o resultado.

Consideramos interessante este aspecto, devido ao fato de s haver uma distinção considerável em termos de atualização do modelo quando se trata da realidade do mundo cibernético, que na especificidade desse artigo abrange o campo de atualização dos jogos eletrônicos. Segundo Dalla Vecchia (2012) e Dalla Vecchia e Maltempi (2013), o mundo cibernético apresenta distinções qualitativas com as quais é possível fazer uma distinção entre as ciências empíricas (física e química, por exemplo) e a informática. Segundo esses autores, embora as ciências empíricas se valham do aparato matemático que as sustentam, estas não assumem a mesma dimensão da matemática (virtual, uma vez que têm potência para se atualizar em aplicações) e operam também com a dimensão empírica. Já o mundo cibernético possibilitado pela informática trabalha com a matemática de modo diferente, operando sobre outra dimensão, que não se dá necessariamente no empírico, mas se ancora na comunicação, informação e construção de programas, e é sustentada por um terreno pré-dado pelo conhecimento matemático. Desse modo, ao lidar com a MM no campo do mundo cibernético, não há necessariamente uma relação ou referência ao empírico, como ocorre no caso de ciências como a física, abrindo assim espaço para considerar situações as quais tenham sua

referência também no âmbito do imaginado e que, devido à sustentação tecnológica desse mundo, encontram um espaço de atualização.

Embora em suas investigações, Dalla Vecchia (2012) e Dalla Vecchia e Maltempi (2013) destaquem que no âmbito da realidade do mundo cibernético as ideias de Granger (1994) podem ser quebradas, no sentido de poder haver uma relação direta entre o modelo e a realidade que ocorre de modo determinado e completo, o que enfatizamos, nesse artigo, é que, para o campo da Modelagem Matemática, é possível também considerar que em jogos, pode haver tanto uma multiplicidade de modelos quanto uma determinação incompleta, abarcando uma relação semelhante à relação entre ciências empíricas e matemática.

Considerações finais

No presente artigo, buscamos trazer algumas discussões envolvendo a relação entre modelo e realidade, no âmbito que envolve o jogo League of Legends. Nesse sentido, mostramos que as relações entre realidade e matemática podem ser dadas de modo semelhante ao que ocorre nas ciências empíricas, embasados na visão de Granger (1994). Embora focamos um aspecto específico, enfatizamos que o presente artigo se mostra como um recorte de uma pesquisa maior, que visa buscar potencialidades dos e-sports para os processos de ensino e aprendizagem da matemática, principalmente focando as comunidades relacionadas a estes jogos como ambientes naturais de emergência de discussões matemáticas. Embora em alguns casos empíricos, as discussões abranjam aspectos mais básicos, é possível encontrar discussões, como as apresentadas nesse artigo, que carregam interessantes ideias acerca da matemática. Desse modo, consideramos que investigar ambientes sociais como os Fóruns de discussão do LoL podem contribuir para encontrar alternativas à desmatematização propostas por Jablonka e Gellert (2007).

Nesse contexto, a tecnologia pode assumir a função de possibilitar a criação de ambientes onde o estudante seja chamado a resolver situações problemas a fim de, simultaneamente, desenvolver conteúdos, estratégias de ação e processos cognitivos proporcionados pelos ambientes virtuais. Com relação à Matemática, os ambientes tecnológicos podem provocar um "pensar matematicamente" próprio, que não ocorre do mesmo modo em outros ambientes (Lévy, 1993, 1996, 2010; Borba e Penteado, 2001; Borba E Villarreal, 2005). Entende-se aqui, concordando com estes autores, que não se trata apenas da inserção da tecnologia nos currículos escolares e na sala de aula, mas sim da alteração dos pressupostos do processo educativo de forma a possibilitar a construção e a elaboração de conhecimentos a partir das características específicas das tecnologias informáticas.

Referências

Anastacio, M. Q. (1990). *Considerações sobre Modelagem Matemática e Educação Matemática.* Rio Claro: UNESP.

Araújo, J. L. (2002). *Cálculo, tecnologias e modelagem matemática: as discussões dos alunos.* Rio Claro: UNESP.

Bicudo, M. A., & Rosa, M. (2010). *Realidade e Cibermundo: horizontes filosóficos e educacionais antevistos.* Canoas: ULBRA.

Borba, M. C., & Villarreal, M. E. (2005). *Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization.* New York: Springer.

Borba, M. C., Malheiros, A. P., & Zulatto, R. B. (2007). *Educação a Distância online* . Belo Horizonte: Autêntica.

Borba, M. D., & Penteado, M. G. (2010). *Informática e Educação Matemática.* Belo Horizonte: Autêntica.

Dalla Vecchia, R. (2012). *Modelagem Matemática e a Realidade do Mundo Cibernético.* Rio Claro: UNESP.

Dalla Vecchia, R., & Maltempi, M. V. (2009). Ensaio Sobre a Modelagem Matemática e o Virtual. *XIII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática* , pp. 1-15.

Dalla Vecchia, R., & Maltempi, M. V. (2010). Tecnologias Digitais e Percepção da Realidade: Contribuições para a Modelagem Matemática. *X Encontro Nacional de Educação Matemática.* , pp. 1-10.

Dalla Vecchia, R., & Maltempi, M. V. (2013). *The model in Mathematical Modeling in the reality of the cybernetic world.* Blumenau: ICTMA.

Granger, G. (1994). *A Ciência e as Ciências.* São Paulo: Editora da Universidade Estadual Paulista.

Jablonka, E., & Gellert, U. (2007). *Mathematisation—Demathematisation.* In U. Gellert & E. Jablonka (Eds.), *Mathematisation and demathematisation: Social, philosophical and educational ramifications* (pp. 1-18). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Lévy, P. (1993). *As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática.* (C. I. Traduzido por: Costa, Trad.) São Paulo: Editora 34.

Lévy, P. (1996). *O que é o virtual.* São Paulo: Editora 34.

Lévy, P. (2010). *Cibercultura.* (C. I. Costa, Trad.) São Paulo: 34.

Alguna herramientas de la web 2.0 mediadas por un LMS e incluidas en el análisis didáctico de las funciones trigonométricas

Nathalia **Valderrama** Ramírez
Universidad Nacional y Secretaria de educación
Colombia
nkvalderramar@unal.edu.co
Plinio del Carmen **Teheran** Sermeño
Universidad Nacional
Colombia
pcteheranserme@unal.edu.co
Rogelio Manuel **Alvarado** Martínez
Universidad Nacional
Colombia
rmalvaradom@unal.edu.co

Resumen

Este trabajo presenta la propuesta y los resultados de introducir TIC en la escuela, a partir de un LMS[1] por medio del cual se implementan diferentes herramientas de la web 2.0 tanto de comunicación como de acceso a la información; enmarcadas en el análisis didáctico para la estructura conceptual de las funciones trigonométricas. A partir del cual se diseña un curso en la plataforma Moodle, se implementa a un grupo experimental de estudiantes de grado decimo y se evalúa cualitativa y cuantitativamente la propuesta, contrastando los resultados evidenciados con los de un grupo control para el cual se implementó la propuesta de enseñanza sin la utilizaron TIC.

Palabras clave: análisis didáctico, funciones trigonométricas, Moodle, TIC.

Propuesta de enseñanza de las funciones trigonométricas Seno, Coseno y Tangente

Componente Legal

De los Lineamientos curriculares en matemáticas, entre los diferentes aspectos que considera el MEN (1999) establece *una visión del conocimiento matemático en la escuela* como una actividad social que debe tener en cuenta los intereses y la afectividad del estudiante, ofrecer respuestas a inquietudes surgen permanentemente en el mundo actual. En cuanto al impacto de las nuevas tecnologías en los procesos de enseñanza aprendizaje, se considera que el uso adecuado tecnologías permite ampliar el campo de indagación sobre el cual actúan las estructuras cognitivas, enriquecer el currículo y evolucionarlo sin embargo, para lograr un uso efectivo de estas tecnologías se requiere de investigación, desarrollo y formación de los docentes MEN (1999).

[1] Learning Management System LMS - sistema de gestión de aprendizajes: software instalado en un servidor que se emplea para administrar contenidos por medio de diferentes herramientas, entre estas los foros de discusión. También se conoce como plataforma para crear cursos en la web.

De los Estándares básicos de competencias en matemáticas, el desarrollo de los contenidos explícitos en el análisis del contenido que se realizara dentro del respectivo análisis didáctico, se basan en lo propuesto por los estándares básicos propuestos según MEN (2003) para grado décimo y undécimo sin embargo, se consideran algunos estándares de grado octavo noveno que son relevantes en el desarrollo del contenido y en la propuesta misma y se muestran en la tabla 1

Tabla 1
Estandares básicos de competencia incluidos en la propuesta

Pensamiento métrico y sistemas de medidas
Estándar 7: Diseño estrategias para abordar situaciones de medición que requieran grados de precisión específicos. **Estándar 8:** Describo tendencias que se observan en conjuntos de variables relacionadas.
Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos
Estándar 10: Utilizo las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos. **Estándar 11[2]:** Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómicas y racionales y de sus derivadas. **Estándar 12:** Modelo situaciones de variación periódica con funciones trigonométricas e interpreto y utilizo sus derivadas. **Estándar 13:** Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas. **Estándar 14:** Uso procesos inductivos y lenguaje algebraico para formular y poner a prueba conjeturas. **Estándar 15:** Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan. **Estándar 16[3]:** Analizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas, racionales, exponenciales y logarítmicas.

De las competencias en matemáticas, *el aprendizaje por competencias* basado en el desarrollo de competencias y definido por el MEN (2003) como un aprendizaje significativo y comprensivo que requiere de ambientes de aprendizaje enriquecidos por situaciones problema que permitan cada vez avanzar a niveles de competencia más complejo. Una noción ampliada de competencia determina la expresión "*ser matemáticamente competente*" la cual se relaciona con el saber qué, el saber qué hacer y el saber cómo, cuándo y por qué hacerlo atendiendo al desarrollo de los procesos matemáticos, lo cual a su vez permite precisar procesos generales presentes en la actividad matemática.
La propuesta de enseñanza tiene como objetivo que el aprendiz sea matemáticamente competente pero también, tecnológicamente competentes ya que los aprendizajes matemáticos serán mediados por TIC y de esta manera se pretende ampliar los conocimientos para el uso de estas herramientas en su cotidianidad.

[2] Se considera este estándar de manera parcial y para el análisis de las representaciones gráfica y simbólica de las funciones trigonométricas, aunque en el mismo no se incluyan.
[3] Los estándares 13, 14, 15 y 16 son estándares establecidos para grado octavo y noveno pero, considerados parcialmente para este trabajo, enfocados por supuesto a las funciones trigonométricas.

Componente Tecnológico

Implementación de TIC´S en procesos de enseñanza aprendizaje en la escuela: Según Fernández (2000) Las Nuevas Tecnologías de la Información y Comunicación, permiten estar en una sociedad de información, de conocimiento e informatizada. Su existencia y utilización obligan a cambiar conceptos básicos, de espacio y tiempo e incluso, la de realidad, presenta un sin número de ventajas pero más allá de estas se advierten algunos riesgos, pensando en la revolución tecnológica en términos del progreso y si éste es un progreso incluyente o excluyente se dice que la clave parece estar en la educación.

La plataforma Moodle: definida como material didáctico multimedia que puede guiar el proceso de aprendizaje y permite la interacción fácilmente entre diferentes individuos sin importar distancias actualmente es utilizada por campus virtuales de diferentes universidades. En Area (2009) se define como un software integrado por elearning, tambien conocido como LMS (learning Management System). Software libre, su diseño se basa en la pedagogía constructivista.

Redes sociales y comunidades virtuales: Cada día se crean y expande más redes sociales o comunidades virtuales para múltiples fines tales como recibir de manera continua información de noticias, comprar, vender, jugar, entre otros. Estas crecen de forma paralela al crecimiento y desarrollo de servicios y herramientas de la WEB 2.0[4] se pueden clasificar en dos tipos de redes aunque las diferencias entre una y otra suelan ser muy mínimas para ciertas redes sociales, en Area (2009) se habla de:

- Redes de propósito general o de masas o megacomunidades: en estas se detectan por ejemplo Facebook, Twitter, Myspace, Tuenti, entre otras.
- Redes temáticas o microcomunidades: estas redes se crean con intereses específicos por ejemplo Ning, Elgg, Google Groups.

Teniendo en cuenta el auge que tiene la red social de propósito general *Facebook* y *twitter* estas se involucran en la propuesta con la intensión de ser un canal efectivo de comunicación.

Componente Didáctico: El análisis didáctico

El trabajo se desarrolló a partir de la propuesta denominada análisis didáctico planteada por Gómez (2002), como un procedimiento cíclico que pretende que el profesor de matemáticas diseñe, lleve a la práctica y evalué las actividades de enseñanza aprendizaje considerando un nivel local del currículo como el mismo lo muestra en la siguiente figura.

[4] El concepto de WEB 2.0 hace referencia a los nuevos usos del ciberespacio que ha pasado en la última década de sitios web estáticos a ser toda una red social. Area (2009)

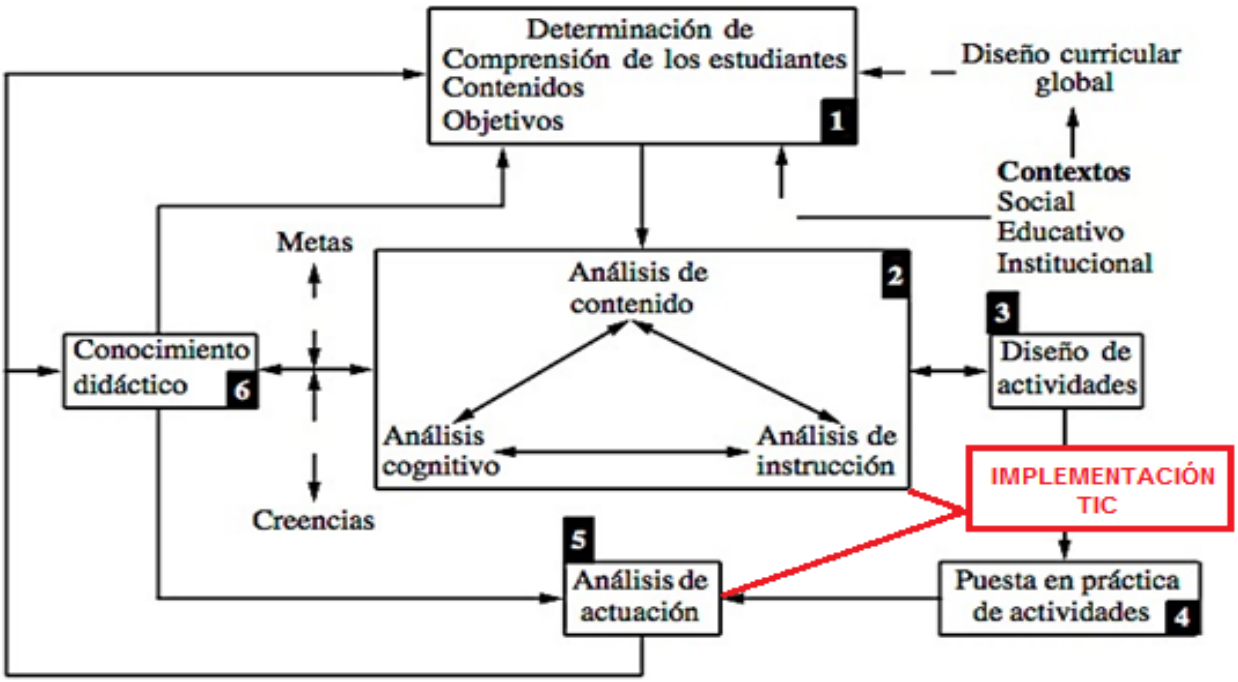


Figura 1. Ciclo del análisis didáctico. [Recuadro rojo añadido]

Desde la perspectiva de Gómez (2002) todo contenido matemático objeto de enseñanza se encuentra bajo una estructura matemática específica, para la cual el periodo de tiempo para la instrucción es limitado y la especificad del mismo permite profundizar a través de sus diferentes significados y representaciones. Dicho análisis se desarrolla en cuatro análisis que se describen a continuación:

Análisis de contenido[5]: este es el eje central del análisis didáctico, es el análisis matemático de la estructura matemática de las funciones trigonométricas, debe ser el punto de inicio y referencia en el ciclo, su propósito es la descripción de la estructura matemática desde la perspectiva de su enseñanza y aprendizaje en el aula de clases así como también pretende identificar y describir estructuradamente los diferentes significados matemáticos de la estructura. Este análisis prevalece por un lado la estructura conceptual que se muestra en la figura 2.

[5] En el análisis de contenido se establecerán hechos y conceptos que darán lugar a la estructura matemática en cuestión de acuerdo a lo propuesto por Rico (1997) los conceptos es con lo que pensamos y según su nivel de concreción podemos distinguir tres niveles dentro de un campo conceptual i)*los hechos*, son unidades de información y sirven como registro de ciertos acontecimientos, ii)*los conceptos*, los cuales describen una regularidad o relación entre un grupo de hechos, se pueden designar con un símbolo y admiten un modelo de representación y iii)*las estructuras conceptuales*, unen conceptos o sugieren relaciones entre estos logrando establecer un orden entre conceptos no inclusivos .

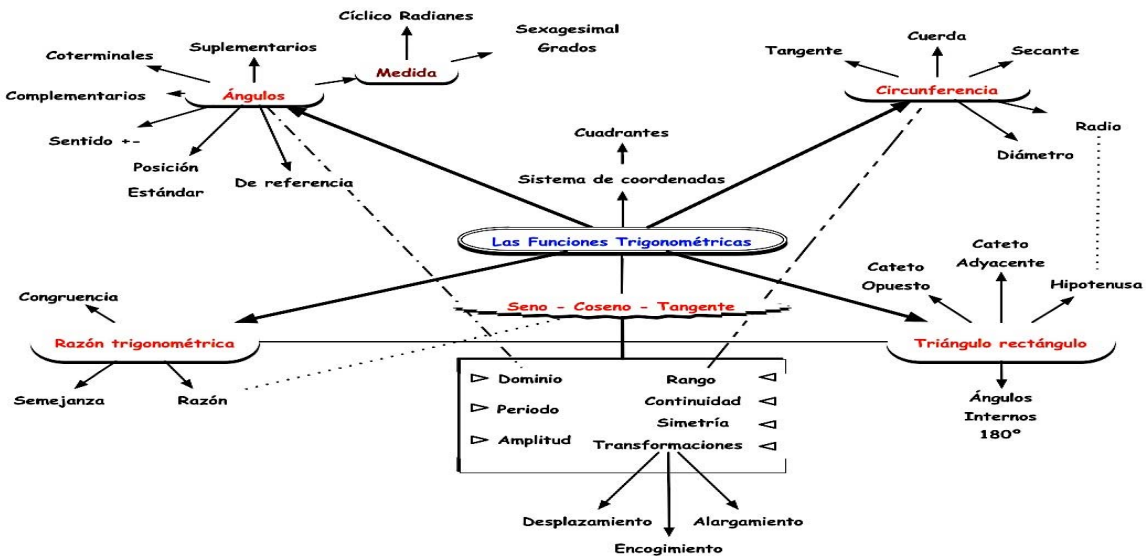


Figura 2. Estructura conceptual de las funciones trigonométricas.

Por otro lado el análisis de contenido establece los diferentes sistemas de representación, los cuales se muestran en la figura 3 y los fenómenos naturales, sociales y matemáticos.

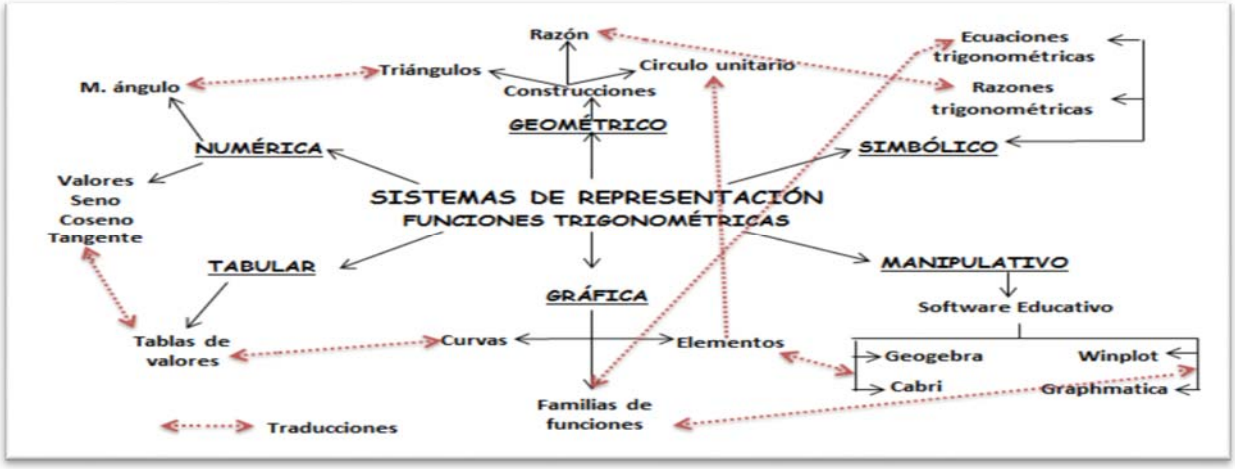


Figura 3. Sistemas de representación de las funciones trigonométricas

Análisis Cognitivo: Este se centra en el aprendizaje del estudiante, planteando hipótesis acerca del progreso de los estudiantes en la construcción de su propio conocimiento cuando se enfrentan a las actividades de enseñanza y aprendizaje para completar la estructura conceptual, en este análisis se pretende prever las actuaciones de los estudiantes. (Gómez, 2007). En este análisis se plantean:

- Los errores, obstáculos y dificultades que el docente a partir de su experiencia determina.
- Los objetivos generales de enseñanza, que serán el punto de partida para el diseño de las tareas de enseñanza.
- Las capacidades[6] que se pretenden desarrollar en los aprendices.

[6] Estas capacidades se relacionan con los niveles de conocimiento procedimental propuestos por Rico (1997) para quien los procedimientos son formas de actuación o ejecución de tareas matemáticas y se

Análisis de instrucción: El análisis de instrucción se centra en la enseñanza y específicamente en la identificación y descripción de las tareas diseñadas para completar las actividades[7] de enseñanza y aprendizaje que hacen parte de la instrucción. Dichas tareas tienen en cuenta: i) la comprensión de los escolares en ese momento, ii) generar su interés, iii) el abordaje de los estudiantes a partir de sus conocimientos previos y iv) poner en juego su conocimiento para generar conflictos cognitivos. (Gómez, 2002). Inicialmente se planean los contenidos basados en los estándares y las competencias y que se desarrollaran a partir de 6 tareas denominadas:

- Conjeturemos y analicemos acerca de los ángulos
- Iniciemos con el método de la manito, método utilizado para construir las funciones a partir de las manos de cada aprendiz
- Un acercamiento a las funciones trigonométricas seno y coseno
- Construyamos las funciones seno y coseno en un círculo unitario.
- Construyamos la función tangente a partir de la función seno y coseno.
- Transformemos las funciones seno y coseno.

Posteriormente se organizan los contenidos en actividades y se incluyen las tareas en la plataforma Moodle[8] completando el curso por medio del cual los aprendices se enfrentaran a las actividades de aprendizaje. Dicho curso contiene cinco (5) unidades de contenidos distribuidas así:

- Unidad 1. de presentación
- Unidad 2. Herramientas tecnológicas, contiene el acceso a las herramientas de la web 2.0 que serán el medio para realizar las actividades, algunas de estas son: : Facebook, Twitter,cuentas de Gmail (Youtube, Drive, Gmail, Houngout), Skype, Dropbox, Software graficador, software y applets propios de la matemática como Cabri y/o Geogebra, entre otras.
- Unidad 3. Ángulos y razones con las herramientas de Google Unidad
- Unidad 4: construcción de la función seno y coseno con Dropbox
- Unidad 5: **c**onstrucción de la función tangente con Dopbox
- Unidad 6: transformaciones de las funciones trigonométricas por medio de software graficador

---

distinguen tres niveles: i) las destrezas que consisten en transformar una expresión simbólica en otra expresión, ejecutando una secuencia de reglas; ii) los razonamientos: presentes en el procesamiento de relaciones entre conceptos, permitiendo establecer relaciones de inferencia entre los mismos; iii) las estrategias: se ejecutan sobre representaciones de conceptos y relaciones. En la tabla 3.9 se muestran los conceptos involucrados en la estructura conceptual y los procedimientos asociados a estos.

[7] Según Gómez (2002) se utiliza el término "actividades de enseñanza y aprendizaje" en un sentido amplio. Una actividad puede ser una presentación introductoria hecha por el profesor [actividad de enseñanza] o la resolución de una tarea por parte de los estudiantes [actividad de aprendizaje], entre otras. Las actividades se refieren al contenido descrito en la estructura conceptual y examinada en el análisis de contenido y deben tener como propósito lograr los objetivos descritos al comienzo del ciclo. Por lo tanto, deben abordar los errores, dificultades y obstáculos identificados en el análisis cognitivo. (p.277)

[8] Para acceder al curso en Moodle, ingrese al link http://168.176.60.22/moodle/
Regístrese con el usuario **trigonometría.10.001** e ingrese la contraseña **decimo01** y acceda al curso denominado taller TIC y enseñanza matemática
Si presenta alguna inquietud puede ponerse en contacto con alguno de los autores por medio de los correos electrónico

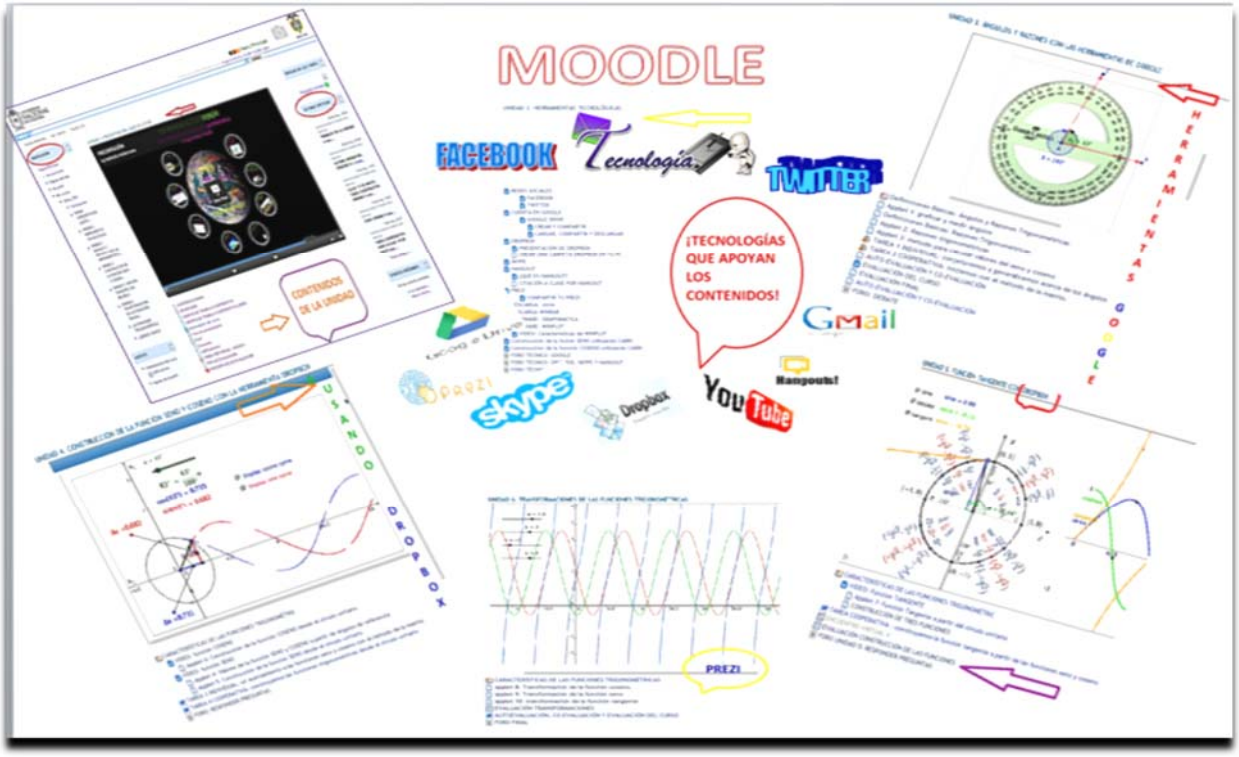


Figura 4. Diseño del curso en la plataforma Moodle

Análisis de actuación: Este por ser el último análisis del ciclo recoge los resultados de los análisis previamente desarrollados y relacionados entre sí para el desarrollo del ciclo según Gómez (2002) en este análisis, el profesor hace un seguimiento a la puesta en práctica de las actividades de enseñanza y recoge la información basándose en las actuaciones de los escolares, describe el seguimiento que hizo a la instrucción, las actitudes evidenciadas en los escolares y hace un análisis de los aprendizajes detectando los conocimientos adquiridos así como también las dificultades y obstáculos que se presentaron en el desarrollo de las tareas.

En este análisis primero se determina la forma como se concibe la evaluación, los instrumentos utilizados para estos definidos como Autoevaluación, Coevaluación, Evaluación del curso en Moodle, Pruebas, tareas y actitudes de los aprendices. Por ultimo, se presentan los resultados obtenidos en la propuesta a partir de la implementacion de la herramienta Moodle a los estudiantes del grupo experimental, en contraste con el grupo de control en el cual los estudiantes llevaron a cabo las actividades de enseñanza pero sin hacer uso de TIC

Se presentan en las tablas 2 y 3 los resultados en términos de fortalezas y debilidades detectados en la implementación para cada metodología a partir del seguimiento y análisis del docente a las actividades de enseñanza y desde la perspectiva de los estudiantes, recogidos en la evaluación al curso.

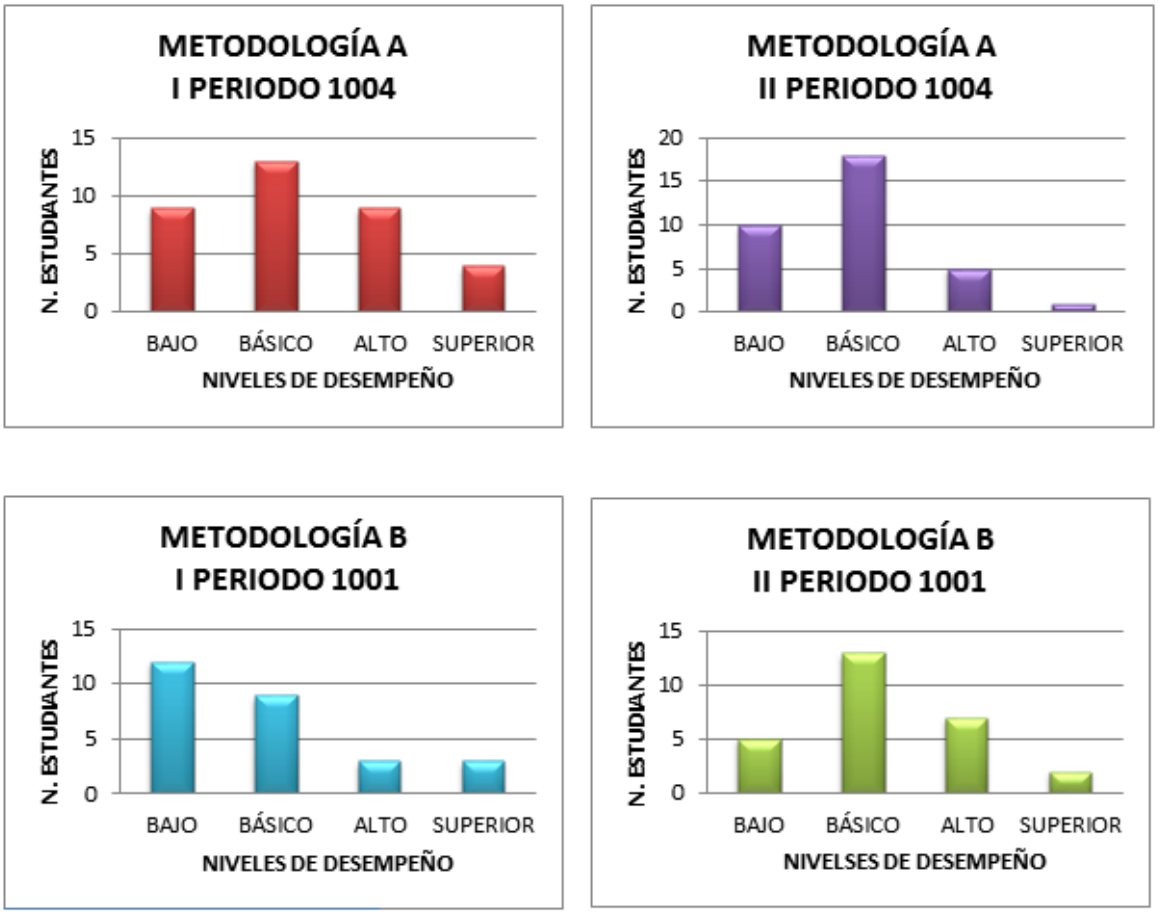
Tabla 2.
Fortalezas y debilidades detectadas con los estudiantes del grupo experimental

GRUPO DE CONTROL SIN TIC	
FORTALEZAS	**DEBILIDADES**
- Orientación docente permanente - Espacios de socialización en clase. - Utilización de instrumentos para graficar y medir elementos geométricos - Metodología conocida por los estudiantes - El docente dirige las socializaciones y debates dados en clase. - La asistencia a las clases es constante por parte de los estudiantes - Los estudiantes en su mayoría trabajan y presentan las tareas de enseñanza propuestas para cada clase. - La mayor parte del trabajo se realiza dentro de los horarios de clase	- usencia en utilización de herramientas tecnológicas. - Acceso ilimitado a fuentes de información. - Ausencia de estrategias en trabajo colaborativo - Las tareas de consulta no presentan profundidad alguna y los estudiantes no se preocupan por comprender dichas consultas - Se emplea mucho tiempo para realizar graficas manualmente y esto desvía el objetivo de encontrar patrones para generalizar propiedades. - Es difícil modificar horarios para la presentación de evaluaciones. - No se aprovecha en su totalidad los tiempos para trabajar dentro de la clase.

Tabla 3.
Fortalezas y debilidades detectadas con los estudiantes del grupo experimental.

GRUPO EXPERIMENTAL CON TIC	
FORTALEZAS	**DEBILIDADES**
- Motivación inicial por parte de los estudiantes por involucrar TICs - Las TICs posibilitan el trabajo en grupo de forma sincrónica y asincrónica - acceso al curso de trigonometría en cualquier momento sin ser limitado a las horas de clase - acceso a diversas fuentes de información - se genera la necesidad de consultar otras fuentes de información. - Las redes sociales presentan un canal de comunicación muy efectivo. - Se tienen diferentes medios de comunicación que permiten la comunicación sincrónica y asincrónica sin importar distancias ni tiempos. - Se fortalece la habilidad de argumentar sus planteamientos matemáticos. - Se fortalece la utilización de un lenguaje matemático - Se empiezan a generar estrategias de auto-aprendizaje. - La realización de tutorías virtuales orientan el proceso de enseñanza aprendizaje - Los foros permiten la socialización y el debate de manera asincrónica. - Se empieza a fortalecer la habilidad de argumentar sus aportes.	- analfabetizacion tecnológica - necesidad de orientación por parte del docente - Ausencia de hábitos de estudio y autonomía para construir su propio conocimiento. - El computador y la internet se convierten en un distractor a la hora de trabajar en la adquisición de su propio conocimiento - La ausencia de hábitos de lectura y atención afectan el seguimiento de instrucciones en el aula. - Se pierde motivación e interés fácilmente. - Tiempos limitados de conexión para algunos estudiantes - Falta participación en los foros. - Dificultades para establecer horas de encuentro extra-clase para las tutorías virtuales. - Incumplimiento en la entrega de tareas - Se requiere de planificación detallada y estratégica para evitar actos de copia en las tareas ya que los estudiantes utilizan Las herramientas tecnológicas para compartir tareas a manera de "copia". - Falta entrenamiento en el discurso argumentativo en los debates - problemas de conexión a internet en las salas de informática del colegio.

Las fortalezas y debilidades detectadas en cada grupo de estudiantes justifican también los resultados obtenidos en la calificación de la evaluación (de forma cuantitativa) de los estudiantes a partir de los diferentes instrumentos de evaluación y permiten generar estrategias, cambios y acciones para implementar en un nuevo ciclo. Se muestra en la figura 4 la comparación entre los dos momentos de la propuesta y los dos grupos de estudiantes (metodología A corresponde al grupo experimental y metodología B corresponde al grupo experimental).



.*Figura 5.* Resultados cuantitativos de los estudiantes.

Conclusiones

1) La incorporación de herramientas LMS en el aula, software educativos y en general de TICs debe ser un proceso planificado objetivamente, evaluado y reflexionado que requiere de análisis y estudio previo, tanto para su diseño como para la implementación adecuada que realmente apoye y facilite los aprendizajes dentro del proceso de enseñanza aprendizaje ya que la herramienta por sí sola no cumple la función de enseñar.
2) El análisis didáctico a una estructura matemática a enseñar permite al docente ser consciente de sus acciones bajo un rol analítico y reflexivo de su propia practica; tanto en la selección de contenidos, análisis y estimación de la cognición de los aprendices, propuesta de enseñanza como en la actuación en la práctica.
3) Platear una propuesta de enseñanza dentro de un ciclo de análisis didáctico le permite al docente tener herramientas necesarias para proponer determinadas acciones y estar seguro

tanto del el contenido a trabajar, como de lo que pretende alcanzar en los procesos cognitivos de los estudiantes.

4) Se detectó una analfabetización tecnológica en los estudiantes la cual puede ser causante de fracasos al incorporar estrategias apoyadas en la utilización de TICs, por lo que se espera que la escuela se siga preocupando por educar en tecnología desde las diferentes áreas del conocimiento.
5) La incorporación y utilización de herramientas de tecnología e información en el proceso de enseñanza aprendizaje de determinada estructura conceptual no solo apoyan la enseñanza y facilitan los aprendizajes, sino que permiten que los estudiantes adquieran herramientas útiles para su vida a la hora de enfrentarse al mundo laboral, universitario y en general al mundo tecnológico.
6) La metodología convencional aunque no se quedó en el paradigma de la enseñanza tradicional presenta dificultades para las cuales las TICs pueden aportar para superarlas sin embargo, el hecho de tener la presencia del docente orientando el proceso se mostró indispensable para los aprendices ya que la escuela actual no promueve estrategias eficientes que generen hábitos de estudio.
7) La metodología por medio de LMS e incorporando TICS en el aula presenta como mayor dificultad la ausencia del profesor para orientar el proceso sin embargo, mostro fortalezas para generar trabajo cooperativo o colaborativo así como para generar debates cognitivos por medio de los foros a partir de los cuales se desarrolla además la habilidad comunicativa y argumentativa para expresar los saberes matemáticos.
8) Para satisfacer las necesidades de la escuela actual es posible mezclar las dos metodologías implementadas en esta propuesta a partir de los resultados positivos de cada una y generar ambientes de aprendizaje más completos que involucren TICs de manera consciente y adecuada y que se caractericen por tener la orientación permanente del docente.

Referencias y bibliografía

Adell, J. (Noviembre de 1997). Tendencias en educación en la sociedad de las tecnologías de la información. Revista electrónica de tecnología educativa (7).

Area, M. (2009). Introducción a la tecnología Educativa . España.

Barkley, F. C. (2007). Técnicas de aprendizaje colaborativo. españa: Ediciones Morata.

Carulla, C. & Gómez, P. (1999). Sistemas de representación, mapas conceptuales y concepciones de los profesosres sobre la función cuadratica.

De Zubiría, J. (2001). Los retos de la educacion en el siglo XXI. Bogota, Colombia.

Duval, R. (2004). Semiosis y pensamiento humano. Registros semioticos y aprendizajes INTELECTUALES. Cali, Colombia.

Fernández, J. T. (2000). La educación en el marco de una sociedad global . Profesorado, revista de currículum y formación del profesorado.

Goméz, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en Matemáticas. Revista EMA, 251-292.

Gómez, P. (2007). Desarrollo didactico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. Granada.

MEN. (1999). Lineamientos Curriculares en Matemáticas. Bogotá.

MEN. (2003). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Bogota.

MEN. (2003). Lineamientos Curriculares en Ciencias.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el curriculo de matemáticas para Educación Secundaria . Granada.

Rodriguez, M. (2004). La teoría del aprendizaje significativo . Pamplona , España.

Sanchez, A. (2010). Estrategias Didáticas para el aprndizaje de los contenidos de trigonometría empleando TICS. EDUTEC. Revista electronica de tecnología educativa.

Santos, M. (1996). La evaluación: un proceso de dialogo, comprensión y mejora. Buenos aires, Argentina: Magisterio del Rio de la Plata.

Scagnoli, N. (2005). Estrategias para motivar el aprendizaje colaborativo en cursos a distancia . USA.

UNESCO. (2004). Las tecnologías de la información y la comunicación en la formación docente. Montevideo, Uruguay: Edicines TRILCE.

As possíveis inter-relações das redes sociais online com alguns conceitos de comunidades de prática no processo de formação de professores de Matemática

Maria Ângela de **Oliveira Oliveira**
Universidade Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho"
lem.prof.maria.angela@gmail.com
Rosana Giaretta Sguerra **Miskulin**
Universidade Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho
misk@rc.unesp.br

Resumo

Esta pesquisa aborda as potencialidades didático-pedagógicas do Blog, Twitter e Facebook em uma Comunidade de Prática Virtual. O primeiro cenário para investigação e constituição dos dados foi por meio do Curso de Extensão intitulado "A utilização dos Blogs como recurso pedagógico na Educação Matemática. O Curso foi a distância e teve como plataforma EaD o próprio Blog do Curso. O Curso abordou a inserção das TIC – Tecnologias da Informação e Comunicação – no contexto da Educação Matemática, a partir de reflexões teórico- metodológicas sobre teóricos e pesquisadores, que abordam as TIC na Educação. Apresentamos as possíveis inter-relações das Redes Sociais online e das Comunidades de Prática (CoP), que se constitui por "locais" de participação em que os membros compartilham experiências, valores e conhecimentos a respeito da prática docente.

Palavras chave: Redes Sociais, Blog, Twitter, Facebook, Comunidade de Prática, Formação de Professores, Educação Matemática, TIC

Abstract

This research addresses the didactic and pedagogical potential of the Blog, Twitter and Facebook in a Virtual Community of Practice. The first scenario for research and constitution of the data was through the Extension Course entitled "Use of Blogs as an educational resource in mathematics education. The course went the distance and had the platform DL Course Blog itself. The course addressed the integration of TIC - Information and Communication Technologies - in the context of mathematics education, from theoretical and methodological reflections on theoretical and researchers, addressing TIC in Education. Here the possible interrelationships of social networks and online communities of practice (CoP), which is a "local" participation in which members share experiences, values and knowledge about the teaching practice.

Key words: Social Networks, Blogs, Twitter, Facebook, Community of Practice, Teacher Education, Mathematics Education, TIC

Introdução

Sabemos que as TIC possibilitam o desenvolvimento de ambientes que propiciam o aumento da conectividade social e intelectual. Com a comunicação mediada por computador

(CMC) têm-se novas formas de interação social, diferentes das tradicionais formas de interação presencial ou interação face-a-face (Silva, 2007). Com isso, as possibilidades pedagógicas de uso da *Internet* estão se tornando cada vez maiores e, a cada dia, surgem novas maneiras de usar a rede como um espaço virtual, o qual proporciona novas formas de ensinar e novas formas de aprender, possibilitando novas formas de comunicação entre as pessoas. A quantidade de pessoas que buscam a *Internet* se torna maior a cada instante. Esse fato nos leva a refletir sobre a CMC. Miskulin et al (2011) destacam dois aspectos importantes proporcionados pela CMC: a *interação*, que propicia suporte a troca de informação e comunicação entre alunos e entre alunos e professores, mantendo viva uma conexão entre as pessoas e a *colaboração*, que apóia o desenvolvimento de projetos colaborativos, possibilitando a reflexão compartilhada e uma aprendizagem social.

Uma outra dimensão importante relaciona-se à presença social (Pallof e Pratt, 2005)- percepção do aluno como uma pessoa real em uma comunicação mediada pelas TIC, ou seja, um sentimento de comunidade e conexão entre os alunos, baseado nas dimensões do contexto social, comunicação *online* e interação, contribuindo positivamente nos processos de ensino e aprendizagem e na satisfação do aluno com o curso *online*. A colaboração contribui para melhores resultados na aprendizagem e reduz o potencial de isolamento do aluno que pode ocorrer em ambientes virtuais. Quanto ao professor, em ambientes *online*, Miskulin, Silva e Rosa (2006) apresentaram considerações sobre a cultura docente de professores de Matemática, sob uma perspectiva sócio-cultural (Pérez Gómez, 2001), ressaltando algumas dimensões implícitas na cultura docente desse professor, em uma comunidade virtual, e as possíveis influências e re-significações em sua prática pedagógica. As experiências compartilhadas advindas da comunidade virtual são carregadas de aspectos da diversidade cultural que permeiam a vida dos professores. Esses aspectos, provenientes da multiplicidade de culturas que se entrecruzam na constituição da cultura docente, interferem diretamente na constituição dessa comunidade virtual. Temos, dimensões como: a prática democrática, a dimensão social, dimensão política e a dimensão educacional: dimensão interativa e dimensão colaborativa da processos educativos, na rede social.

A Internet é um meio de comunicação que pode auxiliar ampliar e transformar as formas atuais de ensinar e de aprender. Tal afirmação pode ser corroborada pelas ideias de Kenski (1998), que propõe que as transformações tecnológicas da atualidade conferem novos ritmos e dimensões às tarefas de ensinar e aprender.

Nessa mesma perspectiva, Miskulin (1999, p. 99) pontua que "as possibilidades pedagógicas de uso da Internet como ferramenta educacional estão se tornando cada vez maiores, a cada dia surgem novas maneiras de usar a rede com novas formas de se conceber o processo educativo".

Essas novas formas de conceituar os processos educativos, não podem deixar de considerar as potencialidades didático-pedagógicas das redes sociais. As redes sociais de relacionamento, como Facebook, Blog, Twitter ocupam lugar de destaque na sociedade contemporânea, especialmente na vida dos chamados Nativos Digitais (Prensky, 2001).

Nesse sentido, Barker (1999) caracteriza as redes sociais como grupos conectados por algo em comum: a partilha de um estatuto social; a similaridade dos cargos que ocupam e a cultura ou proximidade geográfica. No contexto das "redes sociais online" importa referir características mais particulares deste tipo de redes. Segundo Barros (2011) "As redes

sociais na Web emergem das práticas de interação orientadas para a partilha e formação de grupos de interesse que estão na origem das narrativas digitais da Sociedade do Conhecimento".

Nas novas práticas de interação, destacamos as atividades didáticas decorrentes das diferentes ferramentas computacionais, que podem ser realizadas por meio da Internet – os Chats[1], os Fóruns de Discussão[2], os Blogs[3], o Twitter[4], o Facebook[5] que, com suas inúmeras formas de interação entre professores e alunos, podem permitir uma aprendizagem colaborativa. Atualmente, os Blogs, Twitter e o Facebook estão se consolidando como ambientes de aprendizagem, cenários de aprendizagens, comunidades virtuais, comunidades de prática virtual, entre outros.

Segundo Terra (2006), o *Blog* permite a interatividade e a formação de comunidades, pois cada texto, áudio ou vídeo postado admite que sejam inseridos comentários, possibilitando a comunicação entre os participantes. Os *Blogs* podem ser interligados entre si, entre o facebook e twitter, por meio de links, formando uma rede de comunidades similares ou de assuntos relacionados, em que os participantes, professores e alunos, comunicam-se e compartilham experiências.

O Twitter por caracterizar-se como uma via de comunicação rápida e eficaz por utilizar para a comunicação, em sua interface, um número consideravelmente pequeno de caracteres, o que obriga postagens objetivas por parte dos alunos; por poder ser acessada com facilidade, inclusive através de aparelhos celulares conectáveis à Rede. Permite a comunicação significativa e colaborativa entre professor e alunos formando uma comunidade de prática.

O Facebook, , adapta-se às necessidades de seus usuários e à demanda da sociedade atual por conhecimento, interação, colaboração. Esse ambiente em resposta a essa demanda tem assumido status de ambiente virtual de aprendizagem. O potencial pedagógico da rede nesse sentido pode ser explorado pela escola e professores sinalizando aos alunos os affordances[6] para a emergência de novas formas de aprendizagem. Souza (2011) citando Norman (2004) fala de affordances percebidas, que diz respeito à interpretação que o sujeito faz dos propiciamentos oferecidos pelo ambiente para sua ação. No Facebook as ações podem emergir de caminhos distintos, de acordo com as affordances percebidas pelos usuários e pelas adaptações e reapropriações promovidas pela dinâmica desse sistema complexo e proporcionar ao aluno a experiência de uma aprendizagem colaborativa, dinâmica e livre.

---

[1] O termo "chat" significa a possibilidade de "bater papo" com outros usuários da Internet, trata-se de uma comunicação síncrona, em tempo real.

[2] Fórum de Discussão é uma ferramenta destinada a promover debates por meio de mensagens publicadas abordando um tema de interesse, aglutinando várias pessoas. Trata-se de uma comunicação assíncrona, não em
tempo real.

[3] Blog é um espaço na web cuja estrutura permite, duma forma simples e direta, o registo cronológico, frequente e imediato das suas opiniões, emoções, imagens, fatos, ou qualquer outro tipo de conteúdo à sua escolha.

[4] Twitter é uma rede social e servidor para microblogging, que permite aos usuários enviar e receber atualizações pessoais de outros contatos, em textos de até 140 caracteres.

[5] Facebook é uma plataforma onde mantemos um perfil pessoal para nos relacionarmos com nossa rede de amigos, podemos postar fotos, vídeos.

[6] Affordances é a qualidade de um objeto, ou de um ambiente, que permite que um indivíduo realize uma ação.

Sendo assim, acredita-se que o trabalho em grupo, mediado pela pesquisa e pela utilização da Rede Social, tende a reforçar conceitos e ampliar conhecimento. Segundo Belloni (1999), as tecnologias podem contribuir para a aprendizagem. No entanto, adverte, tudo depende da mediação pedagógica que inspira e orienta esta atividade. A inovação deve ocorrer muito mais nas metodologias e estratégias de ensino feitas do que na utilização pura e simples de aparelhos tecnológicos potencializando ao máximo as possibilidades de aprendizagem autônoma.

Foi pensando nessas novas práticas que abordam as TIC que se deu a escolha da questão norteadora desta pesquisa: Quais são as possíveis potencialidades didático-pedagógicas das redes sociais em uma Comunidade de Prática Virtual? Investigar as potencialidades didático-pedagógicas dos Blogs, do Twitter, do Facebook em uma Comunidade de Prática Virtual significa, entre outros aspectos, compreender as possíveis inter-relações existentes entre essas redes sociais e os momentos formativos, os quais podem ser caracterizados como comunidades de prática, no processo de formação de professores de Matemática.

Formação de professores de Matemática e as tecnologias da informação e comunicação

Gostaríamos de mostrar como as Tecnologias da Informação e Comunicação – TIC – estão presentes no processo de formação de professores de Matemática, inter-relacionando aspectos característicos de alguns conceitos de comunidades de prática[7], com as Redes Sociais, no processo de formação continuada de professores.

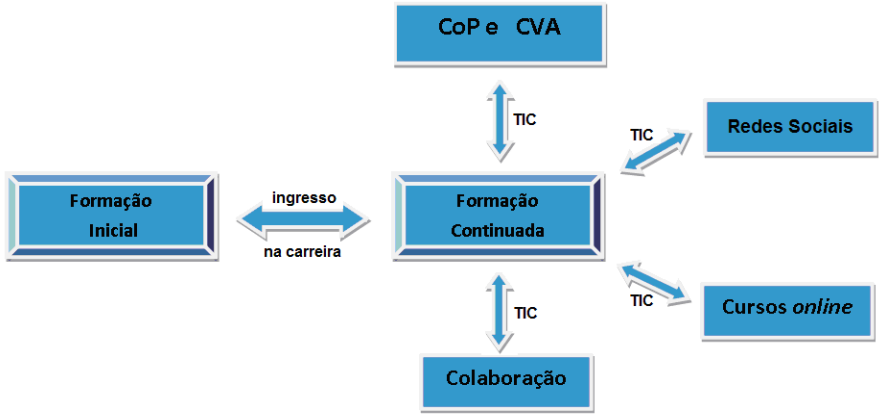


Figura 1. Diagrama – TIC na Formação de Professores de Matemática

A formação de professores vem sofrendo mudanças, devido às diversas transformações presentes na sociedade atual e às novas exigências sociais que se refletem nas práticas pedagógicas e na ação do professor no seu cotidiano, exigindo uma prática que atenda às novas necessidades profissionais, sociais, políticas e culturais.

Tardiff (2010), ao discorrer acerca da formação, destaca que as fontes da formação profissional dos professores não se limitam à formação inicial na universidade, mas trata-se de uma formação continuada que abrange toda a carreira docente. Freire (2011, p. 39) destaca que "na formação permanente dos professores, o momento fundamental é o da

[7] Comunidade de Prática- CoP – segundo Wenger (2001), CoP são grupos de pessoas que compartilham um objetivo comum e, através de uma interação constante, compartilham experiências e podem aprender colaborativamente.

reflexão crítica sobre a prática", pois, segundo o autor, é pensando criticamente a prática de hoje que se pode melhorar a próxima prática.

Portanto, percebe-se que a formação inicial é insuficiente para toda a tarefa de formar professores e, portanto, é preciso que a formação seja contínua. A questão da formação de professores, inicial e continuada, tem se constituído em foco de pesquisa em diversos campos científicos, incluindo a Educação Matemática.

D`Ambrosio (1993) destaca que o futuro professor de Matemática deve aprender novas ideias matemáticas de forma alternativa, envolvendo a investigação, a resolução de problemas e as aplicações. Essa formação inicial deve permitir ao professor ser crítico de sua própria prática e consciente de suas futuras responsabilidades na formação matemática dos alunos.

Após essa formação, o professor necessita constantemente de atualização, seja por meio de cursos de Extensão, seja por Especialização, Mestrado, Doutorado, Pós-Doutorado, entre outros. Essa atualização, também chamada de Formação Continuada, pode ocorrer no contato entre os pares, em reuniões ou em grupos de estudos.

Miskulin (2008) aponta a importância de o educador matemático utilizar as TIC na sua prática docente, pois o desenvolvimento tecnológico proporciona uma nova dimensão ao processo educacional, a qual transcende os paradigmas ultrapassados do ensino tradicional.

O uso criativo das TIC pode auxiliar os professores a desenvolverem metodologias diferenciadas de ensino e aprendizagem.

Partimos do pressuposto de que a utilização didática das Redes Sociais - *Blog,* Twitter, Facebook, pode ampliar o conhecimento para além do espaço físico da sala de aula, criando um ambiente interativo, podendo formar uma comunidade de prática virtual

Comunidades virtuais de aprendizagem (CVA) e comunidades de prática (CoP)

Comunidades virtuais

As comunidades virtuais são espaços formados por grupos de pessoas no ciberespaço. Seu funcionamento está relacionado, em um primeiro momento, às redes de conexões proporcionadas pelas TIC e, em um segundo momento, à possibilidade de, nesse espaço, pessoas com objetivos comuns se encontrarem, estabelecerem relações entre si e compartilharem experiências.

Rheingold (1996), um dos primeiros autores a utilizar o termo "comunidade virtual", define-a como: os agregados sociais surgidos na Rede, quando os intervenientes de um debate o levam por diante em número e sentimento suficientes para formarem teias de relações pessoais no ciberespaço" (Rheingold 1996, p. 18).

Miskulin, Silva e Rosa (2006) afirmam que essas experiências compartilhadas, em uma Comunidade Virtual, permitem a "multiplicidade de culturas que se entrecruzam na constituição da cultura docente e interferem diretamente na constituição de uma comunidade virtual".

As formas de comunicação disponíveis nas comunidades virtuais, como Bate-Papo (Chat), Fóruns, Correio Eletrônico, entre outros, são recursos fundamentais para serem utilizados na prática docente, pois contribuem significativamente para o desenvolvimento da aprendizagem colaborativa em uma comunidade (Preece, 2000, *apud* Silva, 2007, p. 24).

Segundo Miskulin, et al (2011), conceber comunidades virtuais como possíveis espaços formativos de professores que ensinam Matemática pressupõe abordagens teórico-

metodológicas diferenciadas, que consideram o espaço virtual como um possível contexto de aprendizagem compartilhada e colaboração, no qual professores desenvolvem, investigam, distintas práticas de sala de aula.

Comunidades de Prática

Conforme Wenger (2001), Comunidades de Prática (CoP) são grupos de pessoas que compartilham um objetivo comum e, através de uma interação constante, compartilham experiências e podem aprender colaborativamente. "Trabalhar com outros que compartilham os mesmos objetivos é definir um fator essencial para a instituição a qual participam. Colaborando com os demais ou opondo-se a eles, cooperando com a instituição e agindo contra ela, definem coletivamente, suas vidas profissionais e suas relações para desempenhar seus trabalhos e produzir coletivamente o que o processo de aplicação é na prática."(Wenger, 2001, p. 70).

Nas comunidades de prática (CoP) e nas comunidades virtuais de aprendizagem (CVA), o professor deixa de ser a única fonte de informação e conhecimento e passa a criar oportunidades para que o aluno participe ativamente no processo de aprendizagem.

De acordo com o exposto, nesta pesquisa vamos assumir que a comunidade online, criada, terá momentos em que poderá ser caracterizada por comunidade de prática virtual. Assim, com essas concepções, explorando as possíveis potencialidades didático-pedagógicas das redes comunicativas – Blogs – em uma Comunidade de Prática Virtual, continuamos a buscar caminhos para o desenvolvimento da pesquisa.

A seguir apresentamos a metodologia de pesquisa, descrevendo o processo de desenvolvimento da pesquisa.

Metodologia de Pesquisa

A metodologia adotada na presente pesquisa está pautada nos pressupostos da pesquisa qualitativa com abordagem etnográfica. Segundo Ludke.André (1986), " A etnografia como ciência da descrição cultural envolve pressupostos específicos sobre a realidade e formas particulares de coleta e apresentação de dados" (Ludke.André, 1986, p. 15).

Segundo Hine (2004), a etnografia consiste no estudo do pesquisador por um período. E a transposição dessa metodologia para o estudo de práticas comunicacionais mediadas por computador recebe o nome de Netnografia ou etnografia virtual e sua adoção é aceita no campo da comunicação, pelo fato de que muitos objetos de estudo localizam-se no ciberespaço.

Para Hine (2004), realizar uma investigação etnográfica através de uma comunidade virtual permite reflexões acerca do significado de estar na internet.

Baseados nas perspectivas acima descritas engajamo-nos em uma abordagem etnográfica do contexto prático desta pesquisa, pois o objetivo deste trabalho consiste em investigar e compreender as inter-relações existentes entre as redes sociais online e as comunidades de práticas no processo de formação de professores.

Assim, percorrendo os objetivos da pesquisa, oferecemos inicialmente um Curso de Extensão a Distância intitulado "A utilização de *Blogs* como recurso pedagógico na Educação Matemática".

O Curso de Extensão abordou a inserção das TIC no contexto da Educação Matemática, a partir de reflexões teórico-metodológicas sobre teóricos e pesquisadores, os quais estudam as TIC, na Educação Matemática.

O Curso contou com nove encontros síncronos (comunicação em tempo real), nos quais os participantes, juntamente com os professores responsáveis pelo Curso (incluindo esta pesquisadora e sua Orientadora), discutiram criticamente a temática: Tecnologias da Informação e Comunicação na educação e a utilização do *Blog, do Twitter,* como recurso pedagógico na Educação Matemática.

As inter-relações entre os participantes do Curso de Extensão ocorreram por meio do Chat, de maneira síncrona, e por meio do *Blog* e do Twitter de forma assíncrona.

Esse Curso de Extensão *online* nos possibilitou investigar e compreender etnograficamente os dados da pesquisa, conforme apresentamos a seguir.

Descrição e Análise dos Dados da Pesquisa

O Curso de Extensão gerou quatro contextos práticos diferentes, os quais vamos considerar como um banco de dados, para extrairmos a parte prática da presente pesquisa, organizados da seguinte forma: 1- Ficha de Inscrição, 2- Depoimentos dos Alunos-Professores, 3- Blogs e Twitter Construídos e 4- Processo de Avaliação do Curso.

A Ficha de Inscrição permitiu conhecer o perfil dos professores inscritos no Curso, permitindo a seleção dos participantes.

Com essas informações, trinta e três participantes foram selecionados por meio do seguinte critério: primeiramente verificamos os professores que tinham uma boa conexão de Internet, disponibilidade para participar dos encontros síncronos e disponibilidade de tempo para as leituras/reflexão dos textos. Em seguida, selecionamos vinte e três professores da Rede Pública que atuavam no Ensino Médio (nove professores), no Ensino Fundamental (nove professores), nos Ensinos Fundamental e Médio (quatro professores) e no Ensino Superior Público (um professor). Depois, selecionamos os professores que atuavam no Ensino Superior Particular (dois professores) e, por fim, cinco professores do Ensino Médio da Rede particular. As três vagas dos bolsistas ficaram para alunos de Licenciatura.

Após a seleção dos alunos-professores, iniciamos o Curso, descrito a seguir:

O Curso foi composto por encontros virtuais: síncronos (em tempo real - Chat) e assíncronos (em tempo não real - e-mails, Fóruns, comentários no Blog), nos quais foram discutidos aspectos teóricos atinentes ao uso dos blogs e twitter nas práticas de sala de aula e à criação de blog e twitter matemáticos. A dinâmica das aulas foi baseada em reflexão, análise, discussão e compartilhamento de ideias e concepções sobre as leituras realizadas.

A avaliação ocorreu em um processo contínuo, levando-se em consideração as atividades desenvolvidas pelos alunos no decorrer do Curso.

Perante o cenário acima delineado, apresentamos, no diagrama a seguir, as diferentes formas de comunicação online com a teoria e as características da Comunidade de Prática.

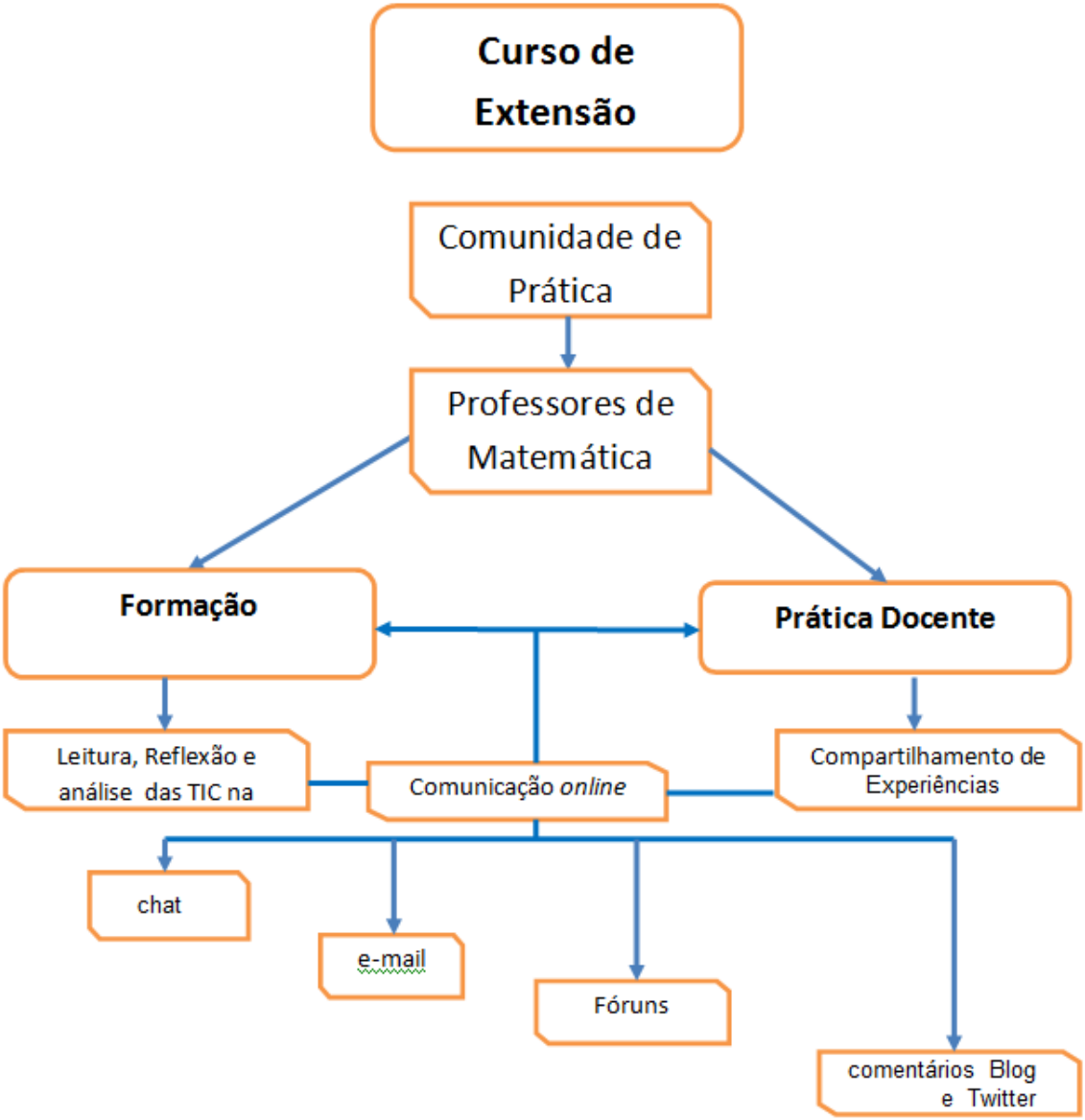


Figura 2. Diagrama - Formas de Comunicação no Curso

Desse diagrama, que expressa o cenário da pesquisa, podemos observar as três características que Wenger (2001) destaca em uma Comunidade de Prática:

O Domínio é a prática do professor que ensina Matemática, pois os alunos-professores – desse Curso compartilharam suas experiências e depoimentos sobre modos de fazer e ser na sala de aula.

A Comunidade são os Professores de Matemática

A Prática é o repertório de procedimentos que permite o desenvolvimento da comunidade, é o que mantém viva a comunidade: o Blog, a proposta pedagógica, os depoimentos dos alunos- professores, formas de comunicação que possibilitam a interação online (partes do Diagrama 3), enfim todo o cenário da pesquisa.

Blog do Curso

O Blog do Curso[8] foi criado antes do inicio do Curso, e foi tornando-se vivo pela prática compartilhada durante o seu próprio desenvolvimento.

O objetivo da utilização de um Blog como meio de comunicação entre os professores responsáveis e os alunos-professores consistiu em mostrar a dinâmica de um *Blog* e suas potencialidades didático-pedagógicas em uma Comunidade Virtual de Aprendizagem, a qual se caracterizou, em alguns momentos, como uma Comunidade de Prática. O Blog foi utilizado como plataforma EaD, disponibilizamos páginas com informações sobre o Curso, como "A utilização de Blogs como recurso pedagógico na Educação matemática" (Figura 3), a dinâmica metodológica do Curso, o conteúdo das aulas (Figura 4) , o tutorial de como criar um blog e inserir várias ferramentas, o perfil dos alunos-professores, Blogs Matemáticos em geral, vídeos, mural, Fórum. Disponibilizamos ainda um espaço formativo, um espaço de dúvidas, um espaço para conversas informais – Coffee – e, ainda, um espaço formativo, no qual professores e participantes desenvolveram possíveis aspectos da prática pedagógica, em uma comunidade online .

Figura 3 – Blog do Curso de Extensão - menu – Curso
Fonte: http://cursoblog2010unesp.blogspot.com.br/p/aulas.html

Figura 4 – Blog do Curso de Extensão - menu – Conteúdo aulas
Fonte: http://cursoblog2010unesp.blogspot.com.br/

Percebemos assim que o objeto de investigação (as inter-relações das redes comunicativas – Blog e Twiiter – e as Comunidades de Práticas no processo de formação de professores) pôde ser evidenciado nesta pesquisa, como pode ser percebido pela descrição a seguir.

Passamos agora a explicitar as Categorias de Análise desta pesquisa, que foram levantadas, considerando as inter-relações das redes comunicativas – Blog – e as **Comunidades de Prática**

[8] Blog do Curso - http://cursoblog2010unesp.blogspot.com.br/

Na Categoria 1 – Blog , como espaço formativo, ressaltamos as oportunidades de vivência dos professores em uma prática compartilhada sobre a docência, por meio dos encontros síncronos e assíncronos. O Blog do Curso apresentou em muitos momentos características de uma Comunidade de Prática, pois foi concebido como um espaço formativo, o qual permitiu aos alunos-professores explorar o novo, compartilhar as descobertas e desenvolver a criatividade. Segundo Wenger (2001), uma comunidade de prática é um contexto adequado para explorar visões radicalmente novas.

Na Categoria 2 – A prática do professor, analisamos os comentários dos alunos-professores relacionando-os com as características fundamentais de uma comunidade de prática, as quais, segundo Wenger (2001), podem ser mais bem desenvolvidas pelo uso das TIC.

No decorrer do Curso, por meio das discussões, percebemos nos comentários do chat e dos Fóruns, do Twitter, que os professores estão cientes dos desafios de inserir na prática docente as TIC, pois, segundo eles, há muito que problematizar, refletir e experimentar para que a informação se transforme em conhecimento.

Articular as formas de comunicação e as formas de interação que ocorreram no Curso, nos permite elencar momentos em que o Blog se caracterizou como uma comunidade de prática.

Na Categoria 3 -Aprendizagem socialmente compartilhada, salientamos que o Curso, por meio do Blog, se transformou em uma comunidade de prática virtual, a qual permitiu uma aprendizagem socialmente compartilhada, pois os alunos-professores tiveram a oportunidade de explorar as potencialidades didático-pedagógicas de um Blog matemático. Segundo Wenger (2001), é preciso pensar em formas criativas de engajar os alunos em práticas significativas para que a aprendizagem seja socialmente compartilhada.

Considerações

Por meio do *Blog* do Curso, observamos momentos que puderam ser caracterizados como uma Comunidade de Prática no contexto virtual dos *Blogs* e do Twitter e que o processo de formação é muito importante, para que os professores possam enfrentar as complexidades cotidianas referentes à sua prática no contexto das TIC.

Com base nessas observações, inferimos que as experiências ocorridas a cada aluno-professor, proporcionadas por meio do Curso de Extensão, propiciaram influências na prática do professor, pois eles se deixaram "tocar" pelas TIC, por meio dos Blogs. Segundo Larrosa (2002, p.21), "a experiência é o que nos passa, o que nos acontece, o que nos toca. Não o que passa não o que acontece, ou o que toca. A cada dia se passam muitas coisas, porém, ao mesmo tempo, quase nada nos acontece".

Assim, daremos continuidade a esta pesquisa oferecendo, este ano de 2015, o Curso de Extensão a Distância intitulado "A utilização do Facebook como recurso pedagógico na Educação Matemática"., onde mostraremos como utilizar os recursos do Facebook, como organizar grupos de estudos, como realizar projetos e trabalhos colaborativos. E encerraremos o Curso mostrando como utilizar sincronicamente as Redes Sociais - Facebook, Blog e o Twitter nas aulas de Matemática. E após a utilização dessas Redes Sociais, faremos uma nova análise.

Referências

Araujo, M.M.U. (2009). *Potencialidades do uso do blog em Educação*. Dissertação (Mestrado) . Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Centro de Ciências Sociais Aplicadas. Programa de Pós-Graduação em Educação, Natal, Orientador: Arnon Alberto Mascarenhas de Andrade.

Barker, R. L. (Ed.). (1999). *The social work dictionary* (4th Ed.). Washington, DC: NASW Press.

Barros, D., Neves, C., Seabra, F., Moreira, J. e Henriques, S. (2011). *Educação e tecnologias: reflexão, inovação e práticas*, Lisboa: [s.n.] ISBN: 978-989-20-2329-8.

Belloni, M. L. (1999). *Educação à distância*. Campinas, SP: Editora: Autores Associados. D´Ambrósio B. S. (1993). *Formação de Professores de Matemática para o século XXI: o grande desafio.* Pró-posição. Vol. 4–Nº1. Março - http://www.proposicoes.fe.unicamp.br/~proposicoes/textos/10-artigos-d%5C'ambrosiobs.pdf

Freire, P. (2011). *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa*. São Paulo: Paz e Terra.

Hine, C. (2004). *Etnografia Virtual.* Barcelona, Espana: UOC.

Kenski, V.M. (1998). *Novas Tecnologias – O redimensionamento do espaço e do tempo e os impactos no trabalho docente*, Mai/Jun/Jul/Ago Nº8, Revista Brasileira de Educação

Larrosa, J**.** (2002). *Notas Sobre a Experiência e o Saber de Experiência*. Tradução: João Wanderley Geraldi., jan abr, nº 019. S.P. , Brasil, Rev. Brás.de Educação. Ludke M. , Andre M.E.D., 1986, *Pesquisa em Educação: Abordagens qualitativas* (pp. 20-28). São Paulo: EPU.

Miskulin, R. G. S. (1999). *Concepções teórico-metodológicas sobre a introdução e a utilização de computadores no processo ensino/aprendizagem da geometria*. Campinas. Tese (Doutorado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Orientador: Sergio A. Lorenzato.

Miskulin,R. G. S., Silva, M. R. C., Rosa, M. (2006) *Comunidades de Prática Baseadas na Tecnologia Como Histórias Compartilhadas na Formação Continuada de Professores de Matemática.* VII Reunião de Didática da Matemática do Cone Sul, Águas de Lindóia: PUC-SP

Miskulin, R.G.S. (2008). *Resolução de Problemas potencializando processos formativos de professores que aprendem e ensinam em Comunidade.* I SERP, disponível em: http://www.rc.unesp.br/serp/trabalhos.html

Miskulin, R. G. S.; Penteado, M. G.; Richit, A.; Mariano, C. R. (2011). A Prática do Professor que Ensina Matemática e a Colaboração: uma reflexão a partir de processos formativos virtuais. *Bolema, Rio Claro, 25*(41), 173-186.

Pallof, R.M; Pratt, K. (2005). *Collaborating Online:learning together in community*. San Francisco, CA: Jossey-Bass Imprint.

Perez Gómez, A.I. (2001). *A cultura escolar na sociedade neoliberal*. Tradução de Ernani Rosa. Porto Alegre. Artmed Editora.

Prensky,M. (2001). Digital natives, digital immigrants Part 1. *On the horizon, 9*(5), 1-6. Rego, T. C. (1996). *Vygotsky: uma perspectiva histórico-cultural da educação*. 3ª Edição. Petrópolis, RJ: Vozes.

Rheingold, H. (1996). *A Comunidade Virtual*. Lisboa: Editora Gradiva.

Silva, M.R. (2007) *Formação e Gestão de Uma Comunidade Virtual de Prática: Criação e Validação de um Instrumento de Pesquisa.* Dissertação (Mestrado) - ,Orientador: Dirceu da Silva e Co-orientadora: Rosana Giaretta Sguerra Miskulin, UNICAMP – Faculdade de Educação.

Souza, V.V.S. (2011). *Dinamicidade e adaptabilidade em comunidades virtuais de aprendizagem: uma textografia à luz do Paradigma da Complexidade*.Tese (Doutorado em Linguística Aplicada) - Programa de Estudos Linguísticos - Faculdade de Letras da Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2011.

Tardif, M. (2010). *Saberes Docentes e Formação Profissional*. Petrópolis. Vozes.

Terra, C.F. (2006). *Comunicação Corporativa Digital: o futuro das Relações Públicas na rede –* Dissertação (Mestrado) Escola de Comunicação e Artes da Universidade de São Paulo SP, Orientador(a): Sidinéia Gomes Freitas.

Wenger, E. (2001). *Comunidades de Prática – Aprendizaje, Significado e Identidad – Cognicion e Desarrollo Humano*. Paidós – Barcelona – Espanha.

A utilização das tecnologias digitais na Licenciatura em Matemática a distância na América Latina: um mapa em construção

Marcelo de Carvalho **Borba**
Universidade Estadual Paulista
Brasil
mborba@rc.unesp.br
Helber Rangel Formiga Leite de **Almeida**
Universidade Federal de Campina Grande
Brasil
helber.rangel@gmail.com
Aparecida Santana de Sousa **Chiari**
Universidade Federal do Mato Grosso do Sul
Brasil
cidach@gmail.com

Resumo

Este artigo tem como objetivo apresentar diferentes formas de utilização das Tecnologias Digitais em cursos de formação de professores de Matemática a distância na Argentina, Brasil, Uruguai e Venezuela. O texto apresenta resultados parciais de um projeto de pesquisa, ainda em andamento, que busca a construção de um mapa que mostre as formas como a educação a distância online tem sido realizada na América Latina, no tocante ao uso de Tecnologias Digitais. No momento já se encontra em fase intermediária de análise a forma como as 37[1] licenciaturas em Matemática da UAB (Universidade Aberta do Brasil) se organizam. Os procedimentos metodológicos realizados são entrevistas com professores e coordenadores de alguns cursos desses países. Esperamos nesse evento ampliar ainda mais esse mapa, por meio de contatos com outros países, como o México, por exemplo.

Palavras chave: Educação a Distância, Licenciatura em Matemática, Interação, Universidade Aberta do Brasil.

Introdução

A utilização das tecnologias tem se tornado grande aliada no processo de ensino e aprendizagem, em particular da Matemática. Consequentemente, muitas pesquisas associadas a esse fato vêm sendo realizadas na busca de não apenas identificar esta utilização, mas também de compreender de que maneira essas mídias podem atuar, junto a um ator humano, de forma a produzir um conhecimento qualitativamente diferente daquele produzido ao se utilizar as mídias lápis e papel (Borba & Villarreal, 2005). O avanço no desenvolvimento dessas mídias tem reestruturado alguns modelos de educação, em particular da Educação a Distância (EaD). Peters já previa, há mais de dez anos, a importância do tema:

[1] Em atividade em 2012.

> O motivo principal para o interesse crescente na Educação a Distância são, obviamente, os avanços inacreditáveis na telecomunicação. Sua informatização confronta pessoas e escolas com promessas imprevistas, imprevisíveis e surpreendentes (Peters, 2003, p. 24).

A Educação a Distância (EaD) desenvolveu-se de forma mais rápida nos EUA e em alguns países da Europa, sendo que inicialmente eram oferecidos cursos por correspondência, em geral de pequeno valor acadêmico, por exemplo, cursos de taquigrafia (Rezek Neto, 2008). Um importante passo dado no caminho do oferecimento de cursos superiores a distância foi a criação da *Britsh Open University*, na Inglaterra, em 1969. Litwin (2001) afirma que esta instituição foi pioneira no que compreendemos hoje como ensino superior a distância. De acordo com o autor, a *Open University* "mostrou ao mundo uma proposta com um desenho complexo, a qual conseguiu utilizando meios impressos, televisão e cursos intensivos em períodos de recesso de outras universidades convencionais, produzir cursos acadêmicos de qualidade" (Litwin, 2001, p. 15).

Alguns países das Américas do Sul e Latina seguiram, na criação dos seus cursos superiores a distância, o modelo de implementação e produção da *Open University*, como os casos da Universidade Aberta da Venezuela e da Universidade Estatal a Distância da Costa Rica. Outros, entretanto, desenvolveram seus próprios modelos, como El Salvador, México, Chile, Argentina, Bolívia e Equador (Barros, 2003).

No Brasil, a EaD possui três fases bem definidas. A primeira, no início dos anos 1900, é marcada pelo ensino por correspondência, baseado fortemente na formação profissional técnica. A segunda, entre as décadas de 1970 e 1980, tem sua força dada pelo oferecimento de cursos supletivos, oferecidos via satélite, com os alunos recebendo material impresso para acompanhar as aulas (Vianney, Torres, & Silva, 2003).

A terceira fase, marcada pelo avanço da Internet, que no Brasil ocorreu a partir da segunda metade dos anos 1990, permitiu o desenvolvimento de uma nova etapa da EaD, a chamada EaD *online* (Borba, Malheiros, & Amaral, 2011). Essa modalidade atingiu seu momento mais importante, a nosso ver, a partir da criação do programa Universidade Aberta do Brasil (UAB), no ano de 2006, principalmente pela abrangência que ele tem. Esse programa é sustentado em três pilares: Governo Federal, responsável pelo financiamento, os Governos Estaduais e Municipais, responsáveis pelo suporte e a infraestrutura dos polos de apoio presencial e as Instituições de Ensino Superior, responsáveis pela oferta dos cursos. A grande maioria dos cursos que são oferecidos pelo sistema UAB são cursos de Licenciatura e isso está diretamente relacionado com a motivação maior de sua criação, já que anteriormente a ela, uma parte considerável de professores que atuavam em salas de aulas, no Brasil, não possuía uma formação específica para tal (Gatti & Barreto, 2009).

Assim como no ensino presencial, a forma de ensinar e aprender a distância não segue um modelo único. Dessa forma teremos, muito provavelmente, um número variado de estruturas didáticas fazendo com que cada instituição, cada profissional de ensino e cada aluno desenvolva uma maneira peculiar de se organizar, a fim de tornar o processo de ensino e de aprendizagem mais suscetível ao seu êxito particular (Nabel, 2006). No caso específico do uso das Tecnologias Digitais nesses processos, esse desenvolvimento peculiar pode nos apresentar um perfil do curso que está sendo realizado, justificando assim a tentativa pela construção de um mapa que represente esse uso.

Um dos cursos pioneiros a ser oferecido pela UAB foi o de Licenciatura em Matemática e a forma com que ocorre o uso de tecnologias nesse curso vem sendo tema de algumas pesquisas

no Brasil (Almeida, 2013; Chiari & Borba, 2013; Zampieri, 2013). Em particular, nosso grupo de pesquisa[2] vem desenvolvendo um projeto que tem como objetivo principal desenhar um mapa do uso de tecnologias nos cursos de Licenciatura em Matemática oferecidos no âmbito da UAB e uma primeira representação desse mapa foi apresentada em Borba (2013).

Embora o surgimento da Internet e o rápido desenvolvimento das Tecnologias Digitais tenham sido razões para que vários países tenham se voltado para a Educação a Distância, não resulta daí que de fato tais tecnologias sejam utilizadas, como demonstram os estudos de Rodrigues e Borba (2010), Santos (2013) e Viel (2011). Há cursos inteiros, ou disciplinas, que utilizam o telefone e o correio, por exemplo, como meios para interação. Às vezes, a única diferença para um curso presencial é a falta de professores, que são substituídos por tutores. Assim, a pesquisa tem como objetivo investigar como as Tecnologias Digitais estão sendo utilizadas no maior programa de educação a distância em atividade no momento no Brasil: a UAB.

O planejamento da pesquisa segue algumas etapas, tais como, uma extensa revisão de literatura acerca dos temas que a permeiam, como também o acompanhamento de alguns cursos pelos membros do projeto, diretamente do Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA), além de diversas entrevistas com coordenadores, professores, tutores e alunos desses cursos. No momento, a pesquisa encontra-se em fase final de análise e como parte dessa análise, estamos construindo um mapa que represente a forma como as Licenciaturas em Matemática a distância estão utilizando as Tecnologias Digitais. Neste artigo apresentamos uma síntese dos resultados do mapa confeccionado sobre o Brasil, integrando o mesmo em um mapa "sul americano", que inclui, até o momento, Argentina, Uruguai e Venezuela. Essa interlocução do modelo praticado no Brasil com os de outros países inicia a segunda etapa prevista no projeto, que visa a análise de similaridades e diferenças entre modelos de EaD da América Latina. Ao focarmos em nossa questão de pesquisa, vamos também mapear as políticas públicas realizadas pelos diferentes governos no âmbito da formação a distância online de professores.

É interessante mencionar aqui que a pesquisa aqui apresentada tem como foco principal os cursos de formação inicial de professores de Matemática na modalidade a distância do Brasil. No que diz respeito ao levantamento realizado nos três países da América do Sul, esse fator, no entanto, não foi preponderante. A ideia do texto é ampliar o escopo sobre a forma de compreender o uso das Tecnologias Digitais na formação de professores de Matemática nesses países, seja inicial ou continuada, além de buscar relacionar esse uso com o que ocorre no Brasil.

Durante a realização da XIV Conferência Interamericana de Educação Matemática pretendemos avançar cada vez mais nessa proposta de ampliarmos o mapa, fazendo com que outros países possam fazer parte do mapa por meio da análise de entrevistas com professores e pesquisadores envolvidos com Educação a Distância em seus respectivos países, como o México por exemplo.

O projeto de pesquisa e o início da construção do mapa

A partir do que mencionamos acerca de Educação a Distância e da Universidade Aberta do Brasil e com o intuito de ir mais além de um simples debate sobre vantagens e desvantagens da EaD, nosso grupo de pesquisa, coordenado pelo primeiro autor desse texto, elaborou um projeto

[2] Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática – GPIMEM. Mais informações em < http://www.rc.unesp.br/gpimem/index.php>. Acesso em Set. de 2014.

que buscava analisar um curso de Licenciatura em Matemática de uma Instituição que serviu de inspiração e modelo para a UAB e que depois foi incorporado a ela: o curso de Licenciatura em Matemática do CEDERJ (Centro de Educação Superior a Distância do Estado do Rio de Janeiro). Este projeto desenvolveu-se entre os anos de 2009 e 2012 e com ele conseguiu-se mostrar que seria possível estabelecer um diálogo profícuo entre pesquisadores e responsáveis por cursos a distância.

A partir daí, decidiu-se então ampliar o escopo do projeto, refinando suas interrogações de pesquisa, surgindo assim o segundo projeto. Neste novo projeto se pretende investigar, em diferentes Licenciaturas em Matemática da UAB, com suas distintas histórias de constituição, a forma como a Internet está sendo utilizada para possibilitar interações entre os participantes dos cursos: professores, tutores e alunos.

Este novo projeto não é sobre as licenciaturas em geral, no sentido amplo da síntese feita, por exemplo, por Gatti e Barreto (2009). É um projeto sobre TIC e Educação Matemática, em particular, sobre a forma como a Internet está sendo utilizada nos cursos de Licenciatura em Matemática a distância oferecidos pela UAB na última década. Para mais detalhes sobre o projeto e a metodologia utilizada pode-se consultar Chiari *et al*. (2013).

Em Borba (2013) foi dado um passo inicial na construção de um mapa de cores que pudesse representar o uso das Tecnologias Digitais nos cursos. No texto, o autor apresenta os diferentes usos das Tecnologias Digitais em EaD no Brasil, com foco nas licenciaturas em Matemática da UAB. Para isso, ele se baseia em entrevistas com coordenadores de alguns cursos de Licenciatura em Matemática oferecidos no âmbito da UAB, além de algumas observações participantes realizadas por alguns membros do projeto citado anteriormente.

Segundo Borba (2013), o uso das Tecnologias Digitais pelos cursos investigados podem ser representados pelas cores azul, verde e amarela, sendo que a identificação por uma dessas cores não significava que uma certa instituição pudesse ser representada por tal cor, mas sim o uso das Tecnologias Digitais percebido via análise das entrevistas concedidas. Entendemos que dentro de uma mesma instituição possa haver nuances entre as cores, por isso fazemos tal ressalva.

No texto, a cor azul representa

> [...] o uso intenso de Geogebra a distância. Este uso se caracteriza de diversas formas e envolve diferentes atores dependendo do objetivo com o qual é utilizado. Há casos em que o software é utilizado de maneira incorporada a uma screencast, por exemplo, para explicar um conteúdo específico (Borba, 2013, p. 10).

Além disso, nas licenciaturas da cor azul, as interações ocorrem essencialmente via Internet e de forma síncrona, via chat ou web conferências, por exemplo.

Nas licenciaturas da cor amarela, em geral, a conexão com a Internet é nenhuma ou, quando existe, a velocidade é muito baixa. O ambiente virtual do curso não tem sido utilizado, muito em virtude dessa falta de conexão. Dessa forma, são necessárias visitas periódicas (ou não) de professores aos polos de apoio presencial para atenuar essa dificuldade.

> No entanto, por vezes até estas visitas ficam inviabilizadas, seja por fortes chuvas em regiões com grande concentração de rios, o que impossibilita o deslocamento terrestre, seja por falta de verba ou outros motivos. Nesse sentido, o papel do tutor presencial fica em evidência, já que ele representa a única figura docente com a qual o aluno tem contato (Borba, 2013, p. 11).

Para as licenciaturas da cor verde, existe a tentativa pela implementação de web conferências, entretanto com algumas dificuldades geradas por problemas técnicos, quer seja pela inexistência de equipamentos ou pela falta de técnicos especializados. Esses problemas fazem ainda com que

> [...] as interações [...] [aconteçam] via internet de maneira assíncrona, principalmente via fórum. Os fóruns, em geral, contam com a presença do professor e dos tutores, mas na maioria das vezes é o tutor quem mais dialoga com o aluno, por diversos motivos, entre eles, a sobrecarga do docente responsável pela disciplina (Borba, 2013, p. 11).

Esse mapa de cores apresentado em Borba (2013) nos traz uma visão que, embora inicial, representa os diferentes usos das Tecnologias Digitais nos cursos de Licenciatura em Matemática da UAB.

Ampliando o escopo do mapa: a EaD na América do Sul

Entendemos que um avanço nos resultados do projeto seria estender um pouco mais o escopo desse mapa e, para isso, incluímos na pesquisa alguns países da América do Sul, no caso, Argentina, Uruguai e Venezuela, como inicialmente previsto no projeto.

O contato e posterior entrevista se deram com uma professora de cada um desses países durante o VII Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática[3], realizado na cidade de Montevideo, Uruguai, em setembro de 2013. Apesar da entrevista (não estruturada) girar em torno das experiências de cada uma, foi possível identificar alguns aspectos relacionados ao uso das Tecnologias Digitais nas Licenciaturas em Matemática desses países, fazendo, em alguns casos, um paralelo com o que já identificamos no Brasil.

As professoras entrevistadas foram: Rosa Cicala (Argentina), que começou a atuar na educação a distância em seu país no ano de 2000, sendo que desde 2008 está à frente da *División de Innovación Educativa y Campos Virtual* da *Universidad Tecnológica Nacional*; Alicia Buquet (Uruguai), que possui muita experiência em EaD e atualmente é integrante da equipe técnica na *Division Investigacion Evaluacion y Estadistica - Proyecto EVALUACION EN LINEA* no Uruguai; e Ana Duarte Castillo (Venezuela) da *Universidad Nacional Abierta* da Venezuela, na qual administra cursos a distância para professores de Matemática que irão atuar do 1º ao 5º anos.

As três professoras, no final da realização das entrevistas, concederam autorização para que utilizássemos as informações fornecidas por elas com fins de pesquisa e que seus nomes fossem utilizados sem o uso de nomes fictícios. Nas seções seguintes, apresentamos e analisamos algumas falas das professoras, no que diz respeito especificamente ao uso das Tecnologias Digitais, para posteriormente buscar alguma relação com o mencionado por Borba (2013) no Brasil.

Os Ambientes Virtuais de Aprendizagem

No Brasil, atualmente, o Moodle é o principal Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA) utilizado nos cursos a distância oferecidos pelo sistema UAB (Mattar, 2012), embora algumas instituições façam uso de ambientes próprios, desenvolvidos ou não por elas mesmas.

Segundo as professoras entrevistadas, em seus países o Moodle também é a plataforma

[3] O evento ocorreu em setembro de 2013. Para mais informações ver http://www.cibem7.semur.edu.uy/home.php. Acesso em jul. 2014.

mais utilizada nos cursos de graduação e pós-graduação a distância, entretanto, como podemos perceber a partir do que fora dito pela professora Alicia, outros ambientes foram sendo "testados" até a incorporação do Moodle.

> [...] al principio usábamos webcity, se había comprado el webcity...Es una plataforma, que fue creada en Canadá, fue una de las primeras palataformas, bueno pero luego se pasó para Moodle, obviamente. Ya en el 2005 estabamos usando Moodle (Alicia).

O termo "obviamente" nos chama a atenção na fala da professora Alicia. Percebemos que, no lugar de apenas afirmar que migraram para o Moodle, ela diz que **obviamente** migraram para o Moodle, como se o fato de migrar para este ambiente fosse algo muito claro, evidente, ou até mesmo previsível. Conjecturamos que o uso do termo se justifica pelas características do ambiente Moodle. Trata-se de um AVA com diversas ferramentas que dão suporte à comunicação síncrona e assíncrona, com ou sem compartilhamento de imagem e texto. Além disso, trata-se de um software livre, que é "melhorado" de tempos em tempos pela própria comunidade que o utiliza, desde que o usuário tenha conhecimentos computacionais. Este movimento de migração de outros ambientes para o ambiente Moodle é algo que também observamos no Brasil. Também sobre o Moodle, Rosa afirma que

> Y en esta experiencia que venimos trabajando desde el año 2008 [En la Universidad Tecnológica Nacional], eh… acá utilizamos Moodle, la plataforma Moodle. Y ahí asesoramos a los docentes para que utilicen la plataforma como complemento a la virtualidad en todas las asignaturas de las materias de grado. Entonces para eso dictamos cursos de capacitación (Rosa).

A fala da professora Rosa nos passa que, nos cursos em que atua na Argentina, o Ambiente Virtual é utilizado como complemento a momentos presenciais que ocorrem em alguns cursos, o que, segundo a professora Ana, não ocorre na Venezuela em virtude dos cursos serem totalmente a distância.

> Si son completamente a distancia. Se trabaja a través de la plataforma Moodle (Ana).

No entanto, mesmo o Moodle estando amplamente difundido, ainda há cursos de grande abrangência que utilizam outras plataformas. No Brasil podemos citar o programa RedeFor, que oferece especialização em diversas áreas para dezenas de milhares de professores do estado de São Paulo e que utiliza a plataforma Teleduc. Na Argentina, Rosa comenta de cursos de formação docente de abrangência nacional que utilizam o E-educativa

> Esta plataforma, la E-educativa, es una plataforma realizada por un grupo de Rosario, que es otra ciudad de Argentina [...] que lo que hace es alquilar los servicios de la plataforma de tal manera que le brindan el espacio del servidor y el mantenimiento técnico a las universidades, y el costo en general es muy bajo. Entonces las universidades que no quieren asumir esto de tener un grupo específico que se encargue de la plataforma… del servicio técnico, quizá utilizan estos servicios que venden (Rosa).

O que podemos perceber a partir do mencionado pelas professoras Rosa, Alicia e Ana é que, assim como no Brasil, existe uma certa diversidade de modelos de EaD. Percebe-se que alguns cursos ocorrem em sua totalidade a distancia, mas em outros casos são realizados de forma semipresencial. Além disso, embora o Moodle seja o AVA mais utilizado, estamos longe de poder generalizar ao afirmar que praticamente todos os grandes cursos são oferecidos via Moodle. Ainda há iniciativas de abrangência estadual e nacional que se utilizam de outras plataformas, e isso não ocorre apenas no Brasil, embora o exemplo citado neste texto não seja de

um curso de formação inicial, principal foco da pesquisa que realizamos. Essa pluralidade em EaD pede pesquisas que analisem formas e práticas pedagógicas que busquem potencializar a aprendizagem a distância, como sugeria Borba (2004).

As interações

No mapa apresentado por Borba (2013), é possível percebermos que as interações ocorrem de maneiras distintas nos cursos do Brasil. Essa diversidade ocorre, em parte, pela qualidade da Internet nas regiões em que os cursos são oferecidos (Almeida, Zampieri, & Borba, 2014), mas também pela maneira com que cada Instituição, ou em particular cada profesor, administra seus cursos e disciplinas.

Se analisarmos os trechos das entrevistas abaixo, podemos perceber que, assim como temos observado nos cursos investigados no Brasil, nesses países o fórum também tem sido a principal forma de comunicação entre os envolvidos.

> *Eh… y como espacios de comunicación se generaron foros, y también se utilizaron … chats, se utilizó el chat […] No se usó [teleconferencia] Tiene la posibilidad… la plataforma lo incorpora pero hasta ahora no se usó. (Rosa).*

> *El foro obviamente [é usado]. Muy poco mas[...] era a través del foro que el tutor le pedia trabajos, le mandaba los trabajos, pero como que todos los contenidos estaban ahí [em livros eletrônicos] […]Puede haber chat si, personalmente a mi no me gusta el chat y menos con varios porque es un caos. Chat de tres es un caos. E.... puede haber teleconferencia. Por eso te digo, depende del professor. (Alicia).*

> *[…] de la plataforma Moodle, se utiliza el foro, el chat [...] La Universidad como tal sí hace videoconferencia para los estudiantes, pero es como… porque en la universidad hay un servicio técnico que se llama SIUNA, y bueno ellos se encargan de toda la parte, vamos a decir así, logística de la plataforma y todo. Ellos han hecho videoconferencias colgados en la página de la Universidad, y uno las puede ver (Ana).*

Entendemos a comunicação profesor-aluno, tutor-aluno e aluno-aluno de fundamental importância para um bom andamento de um curso a distância, principalmente por permitirem aos alunos que residem em locais distantes ao polo de apoio presencial participem de maneira ativa e indistinta daqueles residentes em metrópoles. Na verdade, interação é tida como peça-chave de um curso a distância de qualidade (Valente, 2010).

O uso de softwares

Não é de hoje que se discute como os softwares educacionais podem participar do processo de produção do conhecimento matemático, entretanto essa temática parece não ter se esgotado ainda (Borba, 2010). Em geral, esse debate gira em torno da pergunta: como o *software* pode contribuir para que estudantes cheguem a uma justificativa matemática e façam a ligação entre a exploração indutiva e o raciocinio dedutivo? No caso específico da EaD, a exploração via softwares educacioais se torna ainda mais necessária, em virtude da ausência física do professor. Entretanto, é possível perceber que

> quando se decide utilizar um *software*, seja ele gráfico, geométrico ou algébrico, em um curso a distancia *online*, é importante que se reflita sobre como propor uma atividade considerando o contexto e visando contemplar os objetivos educacionais, sempre apoiado nas concepções teóricas acerca da temática (Borba, 2010, p. 6).

No Brasil, nossa pesquisa aponta para o Geogebra como sendo o *software* mais utilizado nos cursos investigados. No caso das professoras entrevistadas percebemos que isso também ocorre na Argentina, Uruguai e Venezuela.

> *[...] el Geogebra* podés también manejarlo dentro de la plataforma […] ahora, lo que estoy intentando hacer es que se arme en el Google Docs en forma colaborativa. Entonces se están armando grupos de 3 personas, donde en realidad hacen un análisis, o sea, hay un material que yo les doy, donde tienen que… ahí también tengo diversidad, porque tengo gente que ya maneja el programa, otros no… pero bueno, estoy probando a ver cómo funciona eso. (Rosa).

> Los profesores de matemáticas en general usan el geogebra ahora [...] no todos los profesores usan mucho el geogebra, ni todos los profesores que enseñan matemáticas tienen formación en didáctica, ni les preocupa eso [...]las actividades matemáticas que tiene que hacer con geogebra, le doy indicaciones de como debe hacer, que tipo de preguntas hacer, otra cosa es crear applets, y [...] ahí va directamente a aprender la matemática que está en el applet, y las preguntas van a ser sobre matemáticas. (Alicia)

> Se va al objeto matemático, se vuelve otra vez a la situación, se vuelve a los problemas, ejercicios referidos a la situación de las actividades que yo estoy proponiendo con Geogebra son actividades contextualizadas. Es decir, que tengan relación alguna con los libros de la colección para que haya alguna coherencia. (Ana)

Percebemos nas falas das professoras que o Geogebra é o software mais utilizado nos cursos em que atuam, pelo menos levando em consideração suas experiências pessoais, mas em alguns casos, como na Argentina, a familiaridade dos professores com ele ainda é pequena, talvez por não terem tido nenhum tipo de contato em sua formação inicial, assim como ocorre em alguns cursos no Brasil.

E quanto ao futuro?

No Brasil, a EaD *online* ainda dá seus primeiros passos, mas acreditamos que é uma modalidade de ensino que veio para ficar. Atualmente a UAB oferece diversos cursos de graduação espalhados por todo o país, sendo 40 de Licenciatura em Matemática, atualmente. Além disso, algumas instituições privadas também vêm oferecendo cursos de graduação (e especialização) a distância. Esse cenário nos parece semelhante ao que vem acontecendo na Venezuela, mas que difere do que podemos perceber na Argentina e no Uruguai.

> *[…] poderíamos decir que si la educación a distancia está creciendo demasiado mucho, en Venezuela sería al revés. Bueno, porque están abriendo universidades presenciales, y las personas se están saliendo. (Ana).*

> *[...] a nivel nacional yo diría que no hay una política clara de incentivación de educación a distancia, hay más bien sospechas que algunas… también hay que reconocer que pueden ser… que pueden llegar a tener cierto visto de verdad. (Rosa).*

Ou seja, o cenário Sul Americano não segue uma perspectiva linear a respeito do futuro da Educação a Distância. Essa perspectiva varia de acordo com cada país. Por exemplo, na Venezuela, apesar de percebermos fatores favoráveis ao desenvolvimento da EaD no país, a modalidade tende a diminuir sua abrangência devido à expansão do ensino presencial, diferentemente do que vem ocorrendo no Brasil. Na Argentina, percebemos que não há políticas públicas de incentivo à EaD e que, a princípio, caso a modalidade venha a se desenvolver de forma mais sólida, deverá ser, muito provavelmente, por meio de iniciativas de instituições privadas.

Na entrevista com a professora Alicia, o futuro da EaD no Uruguai não emergiu em suas palavras. Mas, segundo o site UNIVERSIA[4], o ensino a distância no país ainda gera certa relutância pela sociedade uruguaia, principalmente em virtude da imaturidade da modalidade, se comparada a outros países.

Considerações Finais

Em Borba (2013) o autor, a partir das entrevistas realizadas com professores e coordenadores de cursos de Licenciatura em Matemática a distância da UAB, buscou compreender o uso das TD nesses cursos, tendo associado estes usos a um mapa de cores que os identificasse.

Ao expandir esse mapa, podemos perceber que as falas das professoras da Argentina, do Uruguai e da Venezuela aproximam os cursos, mencionados por elas, das Licenciaturas da cor verde apresentada por Borba (2013) uma vez que as interações nesses cursos vêm ocorrendo basicamente de maneira assíncrona, via fóruns. A realização de *chat* e web conferências tem sido testada, mas muitas vezes esbarra em problemas técnicos, como a limitação do AVA do curso na Argentina, ou problemas de logística na Venezuela.

Claro que esse mapa segue ainda em fase de construção, assim como o inicialmente apresentado em 2013, principalmente pelo pequeno universo pesquisado referente à Argentina, ao Uruguai e à Venezuela. Entretanto, de acordo com os princípios da Teoria Enraizada (Lapèrriere, 2008), entendemos que a incorporação desses países ao mapa vem corroborando e ampliando a teoria inicialmente construída e que entrevistas com outros professores e pesquisadores desses países e de outros que se incorporem ao projeto poderão, cada vez mais, tornar o mapa mais completo, de leitura e interpretação mais clara e em direção à saturação teórica, ou seja, com propriedades e dimensões dos usos definidas e relacionadas com os aspectos que as influenciam (Strauss & Corbin, 2008).

Agradecimentos

Gostaríamos de agradecer aos membros do E-licm@t: Luana Oliveira, Maria Teresa Zampieri e Marília Zabel pelas contribuições em nossas reuniões de trabalho.

Referências Bibliográfica

Almeida, H. R. F. L., Zampieri, M. T., & Borba, M. C. (2014). Formação inicial de professores de matemática a distância: discussões acerca do acesso à internet. In *Fórum GT 06 - SBEM*. Rio de Janeiro.

Almeida, H. R. F. L. (2013). O Uso das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação na Aula de Cálculo 1 a Distância. In *XVII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática*. Vitória - ES.

Barros, D. M. . (2003). *Educação a Distância e o Universo do Trabalho*. Bauru - SP: EUDSC.

Borba, M. C. (2004). Dimensões da Educação Matemática a Distância. In M. A. V. Bicudo & M. C. Borba, *Educação Matemática: pesquisa em movimento*. São Paulo: Cortez.

[4] Disponível em < http://noticias.universia.edu.uy/en-portada/noticia/2013/06/11/1029551/ensenanza-distancia-uruguay-es-valorada.html>. Acesso em Set. de 2014.

Borba, M. C. (2010). Softwares e internet na sala de aula de matemática. In *Encontro Nacional de Educação Matemática*. Salvador.

Borba, M. C. (2013). Os diferentes usos de Tecnologias Digitais em EaD no Brasil. In *Anais* (pp. 1–8). Montevidéu: Semur.

Borba, M. C., Malheiros, A. P. S., & Amaral, R. B. (2011). *Educação a Distância Online*. Belo Horizonte: Autêntica.

Borba, M. C., & Villarreal, M. E. (2005). *Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization* (Vol. 39). New York: Springer.

Chiari, A. S. S., & Borba, M. C. (2013). A disciplina de Álgebra Linear em cursos a distância: possibilidades de uso de tecnologias digitais para o ensino. In *Anais* (pp. 1–8). Montevidéu: Semur.

Chiari, A. S. S., Borba, M. C., Almeida, H. R. F. L., Oliveira, L. P. ., & Zampieri, M. T. (2013). Mapa de uso de Tecnologias da Informação e Comunicação em Educação a Distância online no Brasil: procedimentos de análise. In *Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 1–8). Montevidéu: Semur.

Gatti, B. A., & Barreto, E. S. S. (2009). *Professores do Brasil: impasses e desafios*. Brasília: UNESCO.

Lapèrriere, A. (2008). A teorização enraizada (grounded theory): procedimento analítico e comparação com outras abordagens similares. In *A pesquisa qualitativa: enfoques epistemológicos e metodológicos* (1st ed.). Petrópolis: Vozes.

Litwin, E. (2001). *Educação a distância: temas para o debate de uma nova agenda educativa*. Porto Alegre: Artmed Editora.

Mattar, J. (2012). *Tutoria e interação em educação a distância*. São Paulo - SP: CENGAGE Learning.

Nabel, L. C. . (2006). La educación a distancia en México: ¿Quién y cómo la hace? *Neva Época*, *6*(4), 74–89.

Peters, O. (2003). *A educação a distância em transição*. São Leopoldo: Unisinos.

Rezek Neto, C. (2008). *Educação Superior a Distância: criação de um sistema avaliativo exclusivo de EaD para o avanço tecnológico e educacional do país* (Tese). Universidade Metodoista de Piracicaba, Piracicaba.

Rodrigues, S. R. V., & Borba, M. C. (2010). Um modelo de licenciatura a distância em matemática em ação. In *Encontro Paulista de Educação Matemática*. São Carlos.

Santos, S. C. (2013). *As perspectivas dos alunos ingressantes acerca de um curso de licenciatura em matemática a distância* (Tese). Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho," Rio Claro.

Strauss, A., & Corbin, J. (2008). *Pesquisa qualitativa: técnicas e procedimentos para o desenvolvimento de teoria fundamentada* (2nd ed.). Porto Alegre: Artmed.

Valente, J. A. (2010). O papel da interação e as diferentes abordagens pedagógicas de Educação a Distância. In D. Mill & N. M. Pimentel (Eds.), *Educação a distância: desafios contemporâneos* (pp. 25–42). São Carlos: EdUFSCar.

Vianney, J., Torres, P., & Silva, E. (2003). *A Universidade Virtual no Brasil: O ensino superior à distância no país*. Tubarão - RS: Unisul.

Viel, S. R. (2011). *Um olhar sobre a formação de professores a distância: o caso da CEDERJ/UAB* (Tese). Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho," Rio Claro.

Zampieri, M. T. (2013). *A comunicação em uma disciplina de Introdução a Estatística: um olhar sob a formação inicial de professores de matemática a distância* (Dissertação). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro.

Algebrator, su valoración en la enseñanza-aprendizaje de sistemas de ecuaciones

Damian Alejandro **Clemente** Olague.
Centro de Estudios Universitarios Vizcaya de las Américas
México.
damian.alex03@gmail.com
Edgar Samid **Limón** Villegas.
Universidad de Guadalajara; Instituto Tecnológico Superior de Tamazula de Gordiano
México.
limonsamid@gmail.com

Resumen

El docente es un factor clave en la generación de ambientes propicios de aprendizaje, donde las TIC's se han considerado herramientas que pretenden facilitar los procesos tanto de enseñanza como de aprendizaje, bajo una visión de mejorar los procesos de educativos que se desarrollan en las aulas de clases. Diferentes investigaciones demuestran los resultados positivos en el aprendizaje de los contenidos matemáticos por alumnos al utilizar las TIC's como parte de su proceso de aprendizaje, como es el caso del álgebra. En este estudio se presenta la valoración al *software Algebrator*, realizada por docentes de matemáticas, que la pauta para determinar la viabilidad de su uso como herramienta en los procesos tanto de instrucción como de aprendizaje o el reforzamiento de éste.

Palabras clave: Educación Matemática, Enseñanza, Aprendizaje, Tecnologías de la Información y la Comunicación, Tecnología Educativa, Formación de profesores.

Planteamiento del problema o tema objeto de estudio

El discurso escolar de la Secretaría de Educación Pública –SEP–, en México, define al docente como un factor clave en la generación de ambientes propicios para el aprendizaje donde se plantean situaciones didácticas e identifican motivos para despertar el interés de sus alumnos (SEP, 2011), siendo la aceptación o el rechazo de la asignatura la consecuencia de dicha acción por parte del docente. El caso de la matemática es muy particular, es fácil darse cuenta del 'temor' social a la asignatura, catalogando a ésta como difícil, confusa, dirigida para unos pocos, entre otras, lo que trasciende a un esfuerzo aún mayor para quienes la imparten.

La integración de la Tecnología Informática –TI– a las aulas escolares, después denominada Tecnología Educativa –TE– y Tecnologías de la Información y la Comunicación –TIC's–, por la integración de otros instrumentos electrónicos, se han considerado como herramientas que pretenden facilitar los procesos tanto de enseñanza como de aprendizaje, teniendo a bien una visión de mejora de los procesos educativos que se desarrollan en las aulas de clases. Lo que ha venido a revolucionar las prácticas docentes convencionales situando a quienes se dedican a la enseñanza en un campo que puede representar retos a alcanzar o algo totalmente desconocido. Sin embargo, es clara la necesidad de integrar la tecnología a los procesos educativos, ya que es un objeto de interés de los estudiantes de casi todos los niveles

educativos, una herramienta de uso frecuente y atractiva para la realización de actividades de cualquier índole.

El álgebra, es una rama de la matemática que ha sido estudiado desde diferentes perspectivas, una de éstas es la experimentación con la implementación de las TIC's para facilitar, a los estudiantes, el aprendizaje de los contenidos. Los resultados demuestran lo positivo del uso de la tecnología; sin embargo, la formación de grandes grupos de profesorado en el uso de este instrumento es mínima. Para obtener resultados positivos en el aprendizaje al utilizar nuevas estrategias de enseñanza es necesario el dominio de éstas por parte del docente. Lo que implica una formación inicial y continua en el uso de las TIC's como un instrumento mediador en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En el presente estudio se muestran los resultados obtenidos a partir de un curso de actualización docente desarrollado con profesores activos del nivel medio básico, pertenecientes al sector público en la ciudad de Colima, Colima, donde el objetivo fue enseñar a utilizar *Algebrator*, un software, como herramienta de apoyo para la enseñanza y el fortalecimiento del aprendizaje en la resolución de sistemas de ecuaciones, y así, propiciar el desarrollo de las competencias en el uso de las TIC's.

Antecedentes y fundamentación teórica

En México, la incorporación de la tecnología en el campo educativo data desde 1983 con el Proyecto Galileo, un proyecto que se desarrolló por la SEP en colaboración con la Fundación Arturo Rosenblueth, orientado a la alfabetización inicial, con un lenguaje computacional básico como BASIC y LOGO (Vaca, 2003).

Para el año 1985, se pone en marcha el programa COEBA –Computación Electrónica en la Educación Básica– con el propósito de introducir la computadora a las aulas como material didáctico y para la enseñanza del cómputo en los cursos de educación básica (Quintero, 1989). Además de servir de manera indirecta como escalón para el desarrollo del programa de Red Escolar.

En 1995, se integra la Red Satelital de Televisión Educativa –EDUSAT–, como herramienta para la transmisión digitalizada de los contenidos a más de los 35000 equipos receptores de las telesecundarias. Así mismo, a partir de 1996, se llevan a cabo proyectos y programas como Secundarias para el Siglo XXI –Sec 21–, Biblioteca Digital, Portal Sepiensa, La Enseñanza de las Matemáticas con Tecnología –EMAT–, Enseñanza de las Ciencias con Tecnología –ECIT–, Enseñanza de las Ciencias a través de Modelos Matemáticos –ECAMM–, El proyecto de Enseñanza de la Física con Tecnología –EFIT–, todos con el objetivo de mejorar y complementar los procesos de enseñanza de los contenidos, implementando el uso de la tecnología como un enriquecedor del proceso.

En 1997 el Instituto Latinoamericano de la Comunicación Educativa –ILCE–, en coordinación con la SEP, crean el programa Red Escolar, con el propósito específico de elevar la calidad de la educación básica implementando diversas actividades, para alumnos y docentes, en línea. Además de atender dos de los objetivos propuestos en el Programa Nacional de Educación: La Operación y Expansión de Red Escolar de Informática Educativa, y la actualización y capacitación para maestros de educación básica mediante las tecnologías de la información. El ILCE define a este programa como:

> Un espacio construido por docentes, alumnos, directivos y padres de familia que hoy ha trascendido de ser una red social para convertirse en una comunidad en donde se desarrollan las competencias requeridas por la Sociedad del conocimiento en la formación de los ciudadanos (Red ILCE, 2007:16).

Para el ciclo escolar 2004 - 2005 se incluye Enciclomedia en las aulas de quinto y sexto grado de la educación primaria*,* descrita como una estrategia educativa basada en un sistema articulador de recursos que, mediante la digitalización de los libros de texto, ha vinculado a sus lecciones diversos materiales multimedia orientados a promover procesos formativos de mayor calidad (SEP, 2010). Así mismo se integraron recursos ya desarrollados en programas anteriores como Red Escolar, Biblioteca Digital, Sec 21, entre otros, para que tanto los alumnos como los docentes tengan a la mano material didáctico que se pretende enriquezca el proceso E-A. Los contenidos de Enciclomedia se organizaron en 2 categorías, la de los alumnos con los contenidos digitalizados y actividades; y la del profesor, con los contenidos, actividades, guía de uso para optimizar la utilidad del programa y algunas propuestas para el trabajo en el aula.

Los objetivos de los distintos programas y proyectos aplicados en la educación están encaminados a la mejora de la enseñanza, el incremento de la calidad educativa, incorporar las TIC's en los procesos E-A como apoyo docente y la creación del pensamiento crítico y reflexivo en los educandos, además de propiciar una mayor interacción con los contenidos y el profesor, lo que se espera mejore la apropiación de la información; todo lo anterior teniendo el acompañamiento del docente para tener garantía en la calidad del proceso, además de estimular en él nuevas prácticas pedagógicas.

En el año 2008, el sistema educativo mexicano, incursionó en un nuevo proyecto de tecnología educativa para la mejora de la educación, el cual llevó por nombre "Mochila Digital Telmex", conocido originalmente como: One Laptop Per Child –OLPC–, desarrollada por la asociación OLPC y adoptada en México por Fundación TELMEX –Teléfonos de México–. Innovando con la posibilidad de establecer redes de comunicación entre los alumnos sin la necesidad de la conexión a internet; el uso del paquete informático office y, para el docente, la oportunidad para dirigir y monitorear su clase y coordinar las actividades que los alumnos realicen en sus equipos.

Para el año 2013 y el ciclo lectivo 2014 - 2015, la SEP, inicia un nuevo movimiento de digitalización en las escuelas, de seis entidades, dotando de tablets y computadoras a estudiantes, de quinto y sexto grado de educación primaria, y a los docentes, como parte del Programa de Inclusión y Alfabetización Digital, con la finalidad de que impulsen y acompañen los procesos tecnológicos asistidos por tecnología (SEP, 2014).

Capacitación docente para las TIC's

> La formación docente debe guardar relación con el contexto y la cultura" (UNESCO, 2004: 39).

Los ciclos de formación continua de los docentes permiten que éstos renueven y adapten sus prácticas pedagógicas a los nuevos modelos o programas escolares. La introducción de los medios tecnológicos permiten ofrecer un aprendizaje más eficaz, así como un medio atractivo para los alumnos en la adquisición de conocimientos (Delors, 1997), lo que permite un progreso individualizado, al ritmo de cada individuo. Provocando la modificación de la práctica docente, sin disminuir el rol del mismo. Donde además de docente, se convierte en participante en un saber colectivo y, en algunos de los casos, los estudiantes en los guías del proceso, aumentando de esta manera la autoestima, la motivación y el compromiso por su parte.

Los jóvenes que se forman para ser docentes tienen ventaja frente a aquellos que están en servicio, ya que suelen ser más flexibles ante la adquisición de hábitos de enseñanza; sin embargo, el éxito de la implementación de la tecnología en el ámbito educativo radica en centrarse en cómo las TIC's pueden mejorar los procesos educativos (UNESCO, 2004), es decir, el uso de las tecnologías en la instrucción no es el proceso de enseñanza y aprendizaje, sino parte de él.

Las TIC's y la enseñanza de las matemáticas

La matemática, es una ciencia constituida a partir de un cúmulo de conocimientos que se ha constituido desde hace siglos, con diversos niveles de complejidad y abstracción que, hasta cierto punto, dificultan su comprensión y aprendizaje. Las TIC's juegan un papel importante en la representación de estas abstracciones y la simplificación de dicha complejidad por medio del trinomio de interacción alumno-docente-TIC's. Los procesos resultantes de este trinomio se inmiscuyen en diferentes ambientes enriquecidos por la implementación de la tecnología, según Andee Rubín (2000, citado en López, 2003):

1) Conexiones dinámicas; que permiten la manipulación y simulación de objetos matemáticos para su interpretación y comprensión.
2) Herramientas avanzadas; *softwares* y aplicaciones para el procesamiento de información compleja o abstracta.
3) Comunidades ricas en recursos matemáticos; donde docentes y alumnos pueden enriquecer sus clases de matemáticas con diferentes paquetes interactivos.
4) Herramientas de diseño y construcción; que propician un ambiente activo para quien las manipula o construye, produciendo la movilización de diversas habilidades cognitivas e interdisciplinares.
5) Herramientas para explorar complejidad; con las que se favorece la interpretación e identificación de los componentes de diferentes fenómenos e incluso comportamientos gráficos de una función.

Estos esfuerzos por integrar las TIC's al proceso de E-A de la matemática se ha documentado, como lo menciona Miguel Villarraga y colaboradores (2012) donde lo más favorecido han sido procesos de pensamiento matemático tales como la formulación y comprobación de hipótesis, la modelación matemática de situaciones de la vida cotidiana, otras ciencias y la matemática misma, la experimentación con base en modelos matemáticos, uso y representación de información para plantear y resolver problemas, hallar patrones aritméticos, manipulación de variables, entre otros.

Considerando los alcances positivos que produce la implementación de estrategias apoyadas en el uso de las TIC's y la necesidad de reforzar las habilidades tecnológicas de los docentes de educación media básica se estructuró el siguiente taller, que se describe a continuación.

Diseño y metodología

El estudio se rige por un diseño exploratorio-descriptivo, con el propósito de evaluar la funcionalidad del *software*, desde la perspectiva de los docentes de matemáticas, con base en su implementación y método de ejecución. El taller se desarrolló en fases, cada una con objetivos particulares, las que guiaron el desarrollo de la intervención en su totalidad.

La primer fase se constituye por una breve contextualización, sobre la integración de las tecnologías al campo educativo, su uso, ventajas y evolución; así como la mención de los diversos tipos de recursos multimedia disponibles en la Red para apoyar el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas; en la segunda etapa se destinó un periodo de tiempo considerable para la exploración del *software*, y así, los docentes se familiarizaran con la interfaz que éste presenta.

La tercera fase se centra en la ejercitación, de aquello que los profesores recuerdan respecto a los sistemas de ecuaciones y sus métodos de resolución, propiciando el intercambio de opiniones y argumentos. Después, se implementa el *software* en la resolución de problemas matemáticos, del tipo ya mencionado, plasmados en un problemario electrónico. Por parte de los instructores, sólo se monitoreó el proceso desarrollado por los docentes (participantes) y se auxilió cuando fue necesario.

Una vez concluido el periodo de trabajo y socialización de procedimientos y resultados, se procedió a la valoración de la funcionalidad y viabilidad del uso de *Algebrator* en la solución de problemas que implican los sistemas de ecuaciones; para esta actividad, los participantes, respondieron una encuesta estructurada como un método de valoración tanto del taller en general como del software y los procedimientos desarrollados.

Las técnicas implementadas se resumen al tipo expositivas, lluvia de ideas, análisis situacional, trabajo en equipo y diversas técnicas de trabajo grupal; así como exposiciones generales por parte de los instructores, seguidas por reflexiones realizadas por los participantes.

Se contó con 29 participantes, todos ellos docentes de matemáticas activos del sector público de educación media básica.

Resultados y discusión de resultados

La evaluación del taller se realizó mediante una escala de linkert, en formato electrónico, de la que se obtuvieron los siguientes resultados con respecto al *software* implementado:

El 96.5% de los participantes, con o sin conocimiento de los alcances de las TIC's en los procesos de enseñanza-aprendizaje en matemáticas, se muestran satisfechos de la temática abordada en el taller; así mismo el mayor porcentaje de los participantes, 88%, concluyeron que el taller y, en general la tecnología, aporta al propio desarrollo docente, es decir, se promueve una mejora en sus prácticas docentes.

Esto comunica un avance en la mentalidad de los docentes con respecto a la migración hacia nuevas maneras de enseñar y el rol de los estudiantes y sus intereses.

El taller se desarrolló únicamente utilizando medios multimedia lo que cubrió las expectativas demandadas del 100% de los participantes referente al uso de las TIC's como único medio y recurso didáctico, lo que demuestra, en cierta forma, que los docentes están familiarizados con el uso de algunas herramientas tecnológicas.

En el gráfico 1, se presentan puntajes con que fue evaluado el taller, por parte de los profesores participantes en un intervalo de [0, 50], siendo 46.9 la media aritmética de dichos datos, esto, demuestra el la funcionalidad satisfactoria del *software.* Aplicando una prueba TStudent a las valoraciones obtenidas, por los participantes, con un nivel de significatividad de 0.01, se obtiene un valor de desviación estándar de ±2.9 con respecto a la media aritmética lo que permite decir que el taller fue benéfico para éstos. Entonces, los docentes que tuvieron un rol de

participantes, confirman el interés por aprender y mejorar sus procesos de instrucción con la integración de las TIC´s, así como la funcionalidad de éstas como herramientas de apoyo en los procesos de enseñanza y aprendizaje, particularmente, en lo relacionado con la actividad de dar solución a sistemas de ecuaciones.

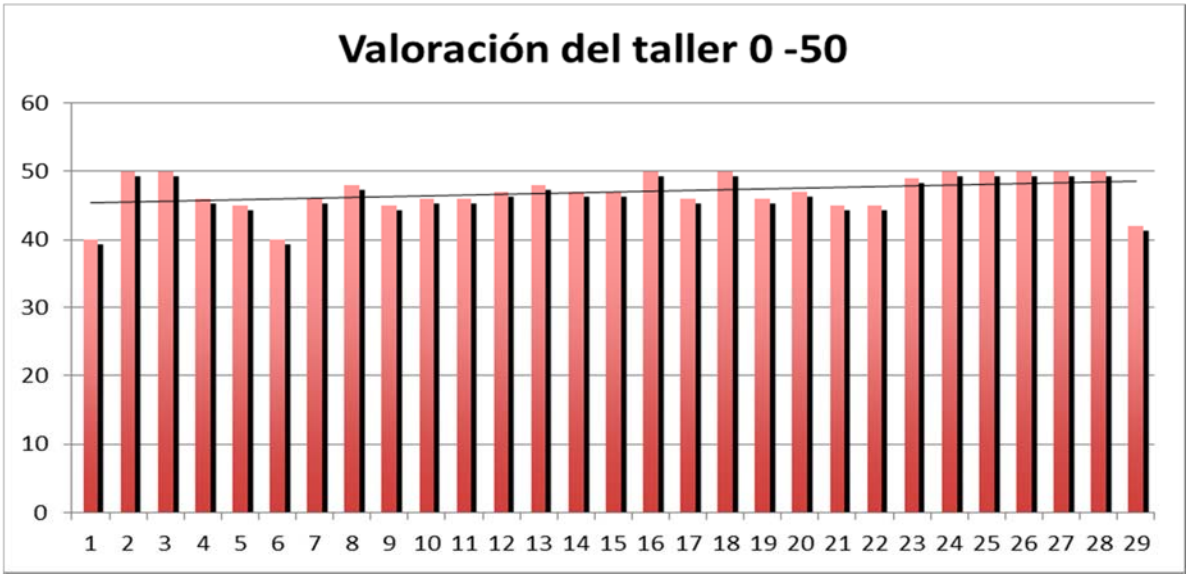


Figura 1. Valoración del taller por los participantes
Fuente: Elaboración propia, 2014.

Conclusiones

La implementación de las TIC´s en la educación surge como respuesta a las necesidades sociales y el rápido avance tecnológico, teniendo como principal propósito el desarrollo de competencias alusivas al correcto uso y manejo de las Tecnologías de la Información y la Comunicación en los estudiantes, de manera que el apropiamiento de estas nuevas habilidades y destrezas le permitan desenvolverse ampliamente en el entorno social en el que se encuentran.

Existen estudios que demuestran las bondades a consecuencia de la implementación de las TIC´s en los procesos escolares, como lo es el de enseñanza y aprendizaje, lo que remite a los docente a una época de evolución y readaptación de su labor docente.

La valoración del taller demuestra la aceptación por los docentes de matemáticas participantes hacia la incorporación de la tecnología a sus prácticas pedagógicas, dada la funcionalidad en el proceso de enseñanza, aceptación que también es confirmada de manera estadística. Así mismo, se acepta a *Algebrator* como una herramienta funcional en la solución de problemas que implican el uso de sistemas de ecuaciones.

Limitaciones del estudio

La carente proactividad y la dependencia de algunos docentes hacia la exploración de un nuevo entorno impidieron que el 100% de los docentes realizaran la totalidad de las actividades, sin embargo, permitió que se establecieran discusiones y argumentación para defender los diferentes puntos de vista.

Una de las carencias del *software* es que no resuelve, gráficamente, algunos sistemas de ecuaciones de tercer grado.

El tiempo destinado para el desarrollo del taller, desde el punto de vista de los participantes, fue insuficiente, lo que les impidió profundizar en el uso del programa informático.

Prospectiva

Una vez implementado el taller con este u otro grupo de docentes de matemáticas, es viable hacer la evaluación de la implementación de la estrategia informática en el salón de clases, así, se tendrán datos para contrastarse con las percepciones de funcionabilidad del *software*, según los profesores. Al tenerse ambas informaciones, en una muestra mayor, será posible validar la estrategia como funcional para el proceso de enseñanza y de aprendizaje del álgebra, particularmente de los sistemas de ecuaciones.

Bibliografía y referencias:

Delors, J. (1997). El personal docente en busca de nuevas perspectivas. *La educación encierra un tesoro*. 155- 171. México: Dower-UNESCO

López, J. (2003). La integración de las TICs en matemáticas. *Eduteka*. Recuperado el 29 de junio de 2014, de http://www.eduteka.org/Editorial18.php

Quintero, Manuel. (1989). La computadora como apoyo didáctico en la Educación especial [Versión electrónica]. *Revista Tecnología y Comunicación Educativas, 14*, 37-43. Recuperado el día 22 de julio de 2014, de http://investigacion.ilce.edu.mx/panel_control/doc/tecycomeduno14.pdf

Red ILCE. (2007). *Desarrollo e impacto del proyecto Red Escolar* (informe enero 2007): ILCE. Recuperado el 22 de julio de 2014, de http://redescolar.ilce.edu.mx/redescolar2008/pdfs/informe_enero_2007.pdf

Secretaría de Educación Pública. (2010). *La Mesa de Servicios y Control de Calidad Enciclomedia entrega resultados.* Recuperado el 22 de julio de 2014, de http://basica.sep.gob.mx/dgme/src/notapp136.php

_____. (2011). *Programa de estudios 2011. Guía para el maestro. Educación básica. Secundaria. Matemáticas.* México: SEP

_____. (2014). *Comunicado 237*. Dirección General de Comunicación Social. Recuperado el 22 de agosto de 2014, de http://www.comunicacion.sep.gob.mx/index.php/comunicados/agosto-2014/649-comunicado-237-entregara-sep-tabletas-a-alumnos-de-quinto-grado-de-primaria-en-6-entidades

UNESCO. (2004). *Las tecnologías de la información y la comunicación en la formación docente. Guía de planificación*. Uruguay: Trilce

Vaca Uribe, Jorge. (2003). La computación educativa: Notas retrospectivas y prospectivas [Versión electrónica]. *Revista Colección pedagógica universitaria, 25-26,* 23-29. Recuperado el día 22 de julio de 2014, de http://www.uv.mx/cpue/coleccion/N_2526/PUBLJOR3.htm

Villarraga, M.E., Saavedra, F., Espinosa, Y., Jiménez, C., Sánchez, L. y Sanguino, J. (2012). Acercando al profesorado de matemáticas a las TIC para la enseñanza y aprendizaje. *EDIMETIC, Revista de Educación Mediática y TIC, 1* (2), 65-87.

Alunos do ensino médio desenvolvendo atividades sobre transformações no plano no VMT

Andreia Carvalho Maciel **Barbosa**
Universidade do Estado do Rio de Janeiro e Colégio Pedro II
Brasil
andreiamaciel@gmail.com
Janete Bolite **Frant**
Universidade Anhanguera de São Paulo
Brasil
janetebf@gmail.com
Arthur B. **Powell**
Rutgers University
Estados Unidos da América
powellab@andromeda.rutgers.edu

Resumo

O uso das tecnologias digitais estão presentes nas pesquisas atuais em Educação Matemática, em particular, os estudos sobre ambientes virtuais de aprendizagem. Nessa perspectiva, apresentamos nesse estudo a visão dos alunos da segunda série do Ensino Médio sobre o trabalho em um ambiente online colaborativo, quando resolveram tarefas sobre Transformações no Plano. A metodologia adotada foi o Design Research Experiment. Essa escolha mostrou-se adequada ao nosso objetivo por permitir modificações nas tarefas durante o desenvolvimento da pesquisa. O ambiente escolhido foi o VMT – Virtual Math Team. Nossa conjectura é que através das explorações das tarefas, no que Skovsmose (2007) chama de cenário para investigação, os alunos participem interagindo com os colegas na resolução de problemas envolvendo Transformações no Plano.

Palavras chave: Transformações no Plano; Teoria da Cognição Corporificada; Ambiente Virtual Colaborativo.

Introdução

As tecnologias estão cada vez mais presentes na sociedade atual. Consequentemente, as pesquisas em Educação Matemática mostram reflexos dessa imersão tecnológica através de estudos sobre tecnologias digitais. Nessa perspectiva, nossa pesquisa trata especificamente do ensino de Transformações no Plano com alunos do Ensino Médio em um ambiente virtual de aprendizagem.

Essa investigação foi desenvolvida de 2010 a 2014. Nela buscamos analisar o discurso produzido pelos estudantes quando estudam Transformações no Plano no VMT – Virtual Math Team – um ambiente virtual colaborativo.

Nesse artigo, apresentamos um dos aspectos desenvolvidos em nossa pesquisa, a visão de quatro alunos do Ensino Médio sobre suas experiências na a realização de tarefas sobre Transformações no Plano no ambiente virtual colaborativo escolhido – o VMT.

A metodologia escolhida foi o Design Research Experiment. Essa escolha se justifica porque se mostra adequada, sob medida, permitindo modificações nos modelos da tarefas durante a pesquisa. De acordo com Cobb et al (2003), essa metodologia permite a compreensão de um sistema de aprendizagem complexo, o que denomina de "ecologia de aprendizagem", que pode ser vista como um sistema de múltiplos elementos de diferentes tipos e níveis. Os autores defendem que essa metodologia é bastante adequada para pesquisas onde se encoraja os alunos na resolução de tarefas e na produção de discurso. Além disso, favorece que os professores em sala de aula estabeleçam relações durante a realização da atividade, articulando o desenvolvimento da tarefa com as ferramentas e materiais disponíveis.

Discutindo o uso da tecnologia

Quando falamos em Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC), estamos entrando em um campo abrangente que inclui rádio, televisão, câmeras digitais, computadores, dentre outros; enfim, vários meios eletrônicos de comunicação. Utilizar esses recursos na escola implica construir um ambiente de aprendizagem, pressupondo o envolvimento do aluno em situações de ensino que o conduzam a ela, a partir desses recursos. Sobre isso, os PCN esclarecem:

> Utilizar recursos tecnológicos não significa utilizar técnicas simplesmente, e não é condição suficiente para garantir a aprendizagem dos conteúdos escolares. Por isso, é fundamental criar um ambiente de aprendizagem em que os alunos possam ter iniciativas, problemas a resolver, possibilidades para corrigir erros e criar soluções pessoais. (Brasil, 1998, p. 153)

O uso de tecnologia redimensiona as relações da sala de aula e a situação de aprendizagem que ocorre por meio da interação sujeito e tecnologia, ou seja, "o sujeito de aprendizagem pode ser, então, definido em termos de relacionamento interpessoal, bem como em termos de relações humano-tecnológicas" (Skovsmose, 2007, p. 229).

A implementação da tecnologia no contexto escolar tem sido analisada por diversos pesquisadores. Papert (1980) considera relevante questões relativas ao ensino, mas ressalta que questões relativas à aprendizagem são mais importantes. Ele discute a inserção da tecnologia nas práticas escolares buscando "encontrar maneiras em que a tecnologia permita que as crianças usem conhecimento, conhecimento matemático e outros conhecimentos, e não apenas os armazenem em suas cabeças" (Papert, 1980, p. 1, tradução nossa[1]).

As ideias de Seymour Papert sobre a inserção dos computadores nas práticas educacionais, apesar de propostas há mais de três décadas, ainda são muito pertinentes nos dias de hoje. Identificamo-nos com essas ideias que defendem que o aluno pode se engajar em uma atividade matemática "construindo e brincando com castelos de areia" (Papert, 1991 p. 1, tradução nossa2), sem o uso excessivo de roteiros ou de procedimentos.

Castro e Bolite Frant (2011) analisam o desenvolvimento tecnológico e apresentam três perspectivas para o uso da tecnologia: ferramenta; meio de expressão; e prótese. Na primeira perspectiva, a tecnologia desempenha um papel de ferramenta, atuando como facilitadora de

[1] Texto original: "find ways in which the technology enables children to use knowledge, mathematical knowledge and other knowledge, not just store it in their heads".
[2] Texto original: "building and playing with castles of sand".

ensino e aprendizagem. Na visão das autoras, essa abordagem não considera a complexidade do processo educacional e, muitas vezes, é inadequada, por lançar mão de um aparato muito complicado para desenvolver tarefas simples.

Para as autoras, a diferença fundamental entre meio de expressão e ferramenta está nas concepções de conhecimento inseridas no processo educacional ou na pesquisa. Com isso, a diferenciação entre as abordagens está mais na compreensão do contexto do que na atividade considerada isoladamente, embora, em ambas as perspectivas, a tecnologia é entendida como algo externo. Na tecnologia como meio de expressão, valorizam-se as interações e os diálogos entre os indivíduos, ou seja, há um compartilhamento de ideias e esse, por sua vez, depende do contexto. Por exemplo, a sala de aula tem normas que regem a língua falada nesse ambiente, isto é, no seu discurso, se modificarmos o ambiente para um chat, teremos outras regras e, consequentemente, outros discursos.

Já quando pensamos em prótese, num primeiro momento, pensamos num aparato que pode ser usado para reparar algo que não funciona bem. Entretanto, Castro e Bolite Frant (2011, p. 20) defendem a visão, de que "se faça de modo diferente o que se fazia antes sem ela" e, nesse sentido, elas funcionam como uma extensão do corpo para interagir em determinada situação. Sobre a tecnologia nessa visão as autoras declaram que

> Assim como uma pessoa com uma prótese dentária pode morder alimentos que sem ela não poderia, a tecnologia é uma prótese que permite pensar de um modo que sem ela não o faríamos. Observamos que cada prótese tem sua especificidade: uma prótese dentária difere em muito de uma de perna mecânica, a TV digital oferece possibilidades distintas de uma calculadora gráfica; mas todas elas permitem fazer algo que não se poderia sem elas. São estas possibilidades de fazer diferente que nos interessam investigar; pois outros tipos de conhecimento poderão ser construídos e compartilhados gerando novas possibilidades no e para o campo da Educação. (Castro e Bolite Frant, 2011, p. 22)

Nesta pesquisa, identificamos, como mais adequada, a visão da tecnologia que a entende como prótese, no sentido de Castro e Bolite Frant (2011), ou seja, aquela que ajuda a pensar de modo diferente.

O VMT – Ambiente virtual colaborativo escolhido

Em geral, percebemos que plataformas tipo Moodle são mais utilizadas como repositório de documentos e tarefas; além disso, os ambientes de interação (fórum e chat) não oferecem facilidades para grupos pequenos que trabalham colaborativamente. O VMT surgiu como opção após a revisão bibliográfica e técnica, uma vez que, em aplicativos educacionais do Google, tais como Google Docs e Draw, que permitem maior colaboração, é necessário mudar de tela para cada função. Nessa seção, mostraremos como o VMT veio ao encontro de nossas necessidades para o desenvolvimento desta pesquisa.

O VMT não é apenas uma plataforma; ele faz parte de um projeto que objetiva formar uma comunidade de discurso matemático. É gratuito e segue a proposta de software livre, podendo ser organizado pelo usuário de vários modos e em diversas salas. Cada sala é formada por um Chat e, por abas de quatro tipos diferentes: quadro branco (Whiteboard), GeoGebra (que disponibiliza o software GeoGebra e permite exploração síncrona), Web Browser e New Browser. Para criar uma sala, o usuário tem de possuir o papel de administrador, e esse papel pode lhe ser atribuído por qualquer outro usuário que já possua esse papel. No momento da criação da sala, o usuário decide sobre quais abas deseja disponibilizar e atribui a ela o nome que desejar. Ele não precisa

criar abas de todos os tipos e pode criar várias abas de um mesmo tipo, ou seja, o único recurso que é obrigatório e comum em uma sala do VMT é o Chat. Vale ainda destacar que não é só o criador da sala que pode disponibilizar abas, porque todos os participantes têm esse poder.

O Whiteboard, ou quadro branco, em português, faz o papel da lousa de uma sala de aula convencional, na qual se pode anotar, desenhar, ou esquematizar o que está sendo feito. Nesse sentido, o participante pode expressar suas ideias por textos e também por esquemas e desenhos que são compartilhados por todos os participantes na sua sala.

No Chat, os alunos podem se comunicar por mensagens de texto que funciona de modo similar ao que os estudantes estão acostumados a usar cotidianamente (whatsapp, mensagens nos celulares e troca de mensagens no facebook). Há um propósito no VMT no uso de Chats ao invés de outros recursos, como programas de comunicação por voz e vídeo. Apesar de esses recursos serem capazes de tornar a comunicação mais rápida, desenvolver o diálogo pela escrita tem outros objetivos, como diz Powell (2001) quando declara que

> Ao proporcionar aos alunos oportunidades de trabalhar com ideias matemáticas em sua própria língua e em seus próprios termos, a escrita ajuda os alunos a desenvolver a confiança em sua compreensão da matemática e a tornar-se mais profundamente envolvido com a matemática. (Powell, 2001, p. 5, tradução nossa)3

A evolução dos discursos pôde ser evidenciada a partir da coleta de dados e das nossas análises nas abas do VMT. Observamos que o Chat e o Whiteboard não possuem regras específicas de ordem de entrada dos alunos, de modo que os participantes podem expressar suas ideias ao mesmo tempo. Essa perspectiva modifica-se na aba GeoGebra. Na Figura 1, à esquerda, temos a situação de uma aba que não está sendo utilizada por nenhum participante. A manipulação dessa aba deve ser feita por um participante de cada vez. Quando um dos participantes pega o controle, selecionando o ícone Take Control, os botões do GeoGebra tornam-se ativos apenas para ele, permitindo que ele possa realizar construções, como indicado no lado direito da Figura 1.

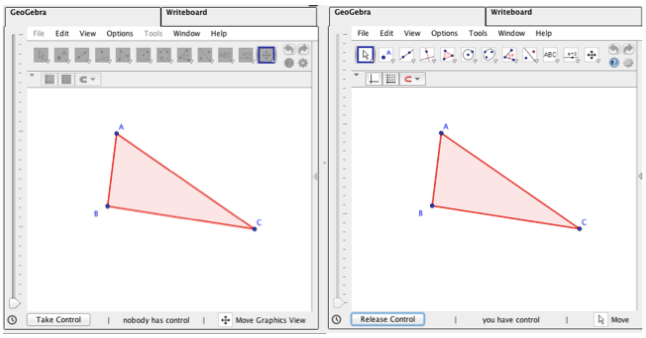


Figura 1. Interface da aba GeoGebra.

Na utilização dessa aba, o participante que está com o controle pode manipular o software da maneira usual, enquanto os outros participantes ficam observando e/ou aguardando sua vez de

[3] Texto original: "By providing students with opportunities to work with mathematical ideas in their own language and on their own terms, writing helps students develop confidence in their understanding of mathematics and become more thoroughly engaged with mathematics".

pegar o controle. Para que o outro possa manipulá-lo, é preciso que se libere o controle por meio do ícone Release Control.

As tarefas desta pesquisa realizadas no VMT foram organizadas de forma a promover interações, que ocorreram de três formas: as conversas no Chat; as interações na aba GeoGebra; e o registro de ideias no Whiteboard. Como afirmam Salles e Bairral (2012, p. 458), não houve "predominância nem mais importância de um tipo de interação em relação ao outro", ou seja, consideramos esses três tipos de espaços interativos igualmente importantes. É importante destacar que o VMT permitiu que os participantes movimentassem e construíssem figuras no GeoGebra, observassem como o colega fazia suas movimentações, bem como interagissem com o outro na busca de solucionar a tarefa proposta.

O VMT utiliza a abordagem de Sistema Computacional para apoiar a Aprendizagem Colaborativa (CSCL), que, de acordo com Stahl et. al. (2006), estuda como as pessoas aprendem em grupo com o auxílio da tecnologia. Num ambiente CSCL, a colaboração entre os participantes não significa responder e realizar tarefas de forma isolada utilizando o computador. A ideia é que a aprendizagem ocorra através de interações contínuas entre os participantes.

O VMT na fala dos participantes

O grupo de alunos que participaram dessa discussão eram estudantes da segunda série do Ensino Médio, com idade entre 15 e 16 anos. Esses alunos participaram da última implementação das tarefas sobre Transformações no Plano de forma voluntária. Os apelidos escolhidos por eles foram: Chief, Diva, Diforte e Dinorte. Os dados utilizados nesse artigo foram coletados nos registros do VMT e, principalmente, nas transcrições de vídeo realizados no encerramento da pesquisa de campo.

Diva destacou o quanto foi diferente esse trabalho de outros ambientes e reforçou o impacto que teve na sua aprendizagem.

Diva	Eu, primeiramente, quando a professora propôs o trabalho, *nem tinha ideia do que seria*. Não tinha a mínima ideia que seria *assim tão interativo e que fosse algo para se fazer em grupo, ao mesmo tempo. Não tinha a mínima ideia disso.*

Quadro 1: Impacto na realização de tarefas no VMT.

No diálogo subsequente, os participantes confrontam o projeto realizado no VMT com seus estudos em grupo realizados pelo Moodle, ressaltando a produtividade, a interatividade e o foco na execução das tarefas advindos da característica síncrona do ambiente.

Chief	*É bem mais prático do que usar o fórum que tem no limc[4], que tem na porta do limc hoje. É muito mais prático você usar as ferramentas todas integradas ali, você tem GeoGebra pra alguma coisa relacionada à Geometria, muito mais prático e muito mais intuitivo de entender.*
Diva	Isso!!! Na minha opinião, no nosso caso pelo menos, *foi muito mais produtivo a gente se reunir dentro do programa em si, do que se a gente fosse se reunir assim ao vivo.*
Diforte	Facebook
Diva	Não, ao vivo, assim... fosse se juntar para estudar aquilo. *Acho que foi muito mais produtivo pelo site, não só porque a gente se focou mais, mas também por causa da interação, a gente*

[4] Limc é o nome da hospedagem da plataforma MOODLE utilizada no Colégio Pedro II – campus Centro.

	pôde ver através do movimento dos planos, do Plano Cartesiano, foi modificando isso, foi muito mais produtivo.

Quadro 2. Diferença entre o VMT e os outros ambientes.

No quadro acima, na sua fala inicial, Diva disse que achou o VMT mais produtivo para sua aprendizagem. O trecho "se reunir dentro do programa em si" mostrou a imersão no ambiente que, por suas características, permitiu maior foco na produção da tarefa do que se a realizasse ao vivo. Enfatizou também que a interação com as tarefas auxiliou na evolução dos discursos, já que era possível trocar com os demais colegas no ambiente. Dinorte complementou que o fato de os participantes já se conhecerem contribuiu para que a comunicação entre eles ocorresse mais facilmente, sem cerimônia. Mas não descartou a possibilidade de ser com desconhecidos, realçando apenas a necessidade de estar mais atento à maneira na qual se colocaria.

Diforte	É, são algumas coisinhas assim, é... no início meu pai veio (faz gesto de aspas de que foi chamado à atenção pelo pai). Porque são coisas que acontecem e a gente não planeja e que acaba saindo do estipulado.... eu acho que acaba deixando a gente meio nervoso, porque assim, por exemplo, eu chegando tarde aí eu chego em casa às sete horas e eu tenho que fazer um monte de coisas pra às sete e meia entrar e começar a fazer as coisas lá, blá, blá, blá, o projeto. Então é meio difícil, só que, como eu tava falando com Diva, a partir do momento que, realmente, se tivesse aqui na escola nós não teríamos o mesmo acesso...
Diva	Desempenho!
Diforte	É o desempenho, porque assim, aqui a gente senta pra conversar e acaba extrapolando totalmente o assunto. Lá a gente tá focado pra fazer determinada coisa, pra que assim obtivéssemos um resultado satisfatório. Uma palavra que eu acho que define bem tudo isso é produtividade...

Quadro 3. Planejamento do trabalho e produtividade.

Diforte mencionou as dificuldades que teve para colocar o "projeto" em sua rotina, tanto no que diz respeito à sua família, como na articulação com outras atividades. O participante também citou o tempo gasto e a necessidade de planejamento constante. Os participantes ainda ressaltaram que, num encontro presencial, dificilmente manteriam a atenção em uma mesma tarefa por um longo tempo.

Dinorte	...pra definir o VMT seria "aumento", porque a gente pode definir algumas técnicas pra resolução de problemas, além do qual a interação entre a gente melhorou um pouco do que era antes porque a gente nunca tinha tido uma experiência como essa. O máximo foi o trabalho no Facebook.
Diforte	É a gente começou a escutar o outro.
Diva	Eu acho que, fazendo uma retrospectiva comparando com o que a gente evoluiu nesse... é... até na nossa relação...
Diforte	Até na nossa relação na matéria.
Diva	É... assim... na matemática e na relação entre a gente também... e... conseguir relacionar o nosso estudo junto foi um avanço muito grande, comparado ao primeiro encontro que teve um problema com o Diforte que ele não conseguia...
Diforte	Faliu a sociedade...
Diva	É, ele não conseguia...Explica, Dinorte!
Dinorte	O Diforte disse que não estava capacitado a fazer porque a gente era melhor do que ele e todo mundo sabia mexer na ferramenta e ele não. E não é verdade! Ninguém sabia mexer com a ferramenta. O máximo que a gente teve foi uma experiência ou outra, mas a gente sabia fazer o básico. Instinto!
Diva	Instinto, é!

Quadro 4. O contato com as ferramentas do VMT.

Dinorte afirmou também que eles aprenderam a interagir e que isso foi muito diferente do que faziam em trabalhos em grupo anteriormente, ao que Diforte complementou dizendo que "a gente começou a escutar o outro", mostrando que, para que a participação ocorra, é necessário ouvir o outro, caso contrário teríamos um monólogo. O diálogo mostra, inclusive, que as características das tarefas propostas no VMT provocaram a evolução do trabalho colaborativo.

Chief	A minha palavra... é interação.
Chief	Manipular a mesma coisa, ao mesmo tempo nessa sincronia do ambiente.
Dinorte	Isso!
Chief	Pode fazer aquilo dali, não dizer no facebook: Oh, muda tal ponto que é tal lugar.
Diforte	Exceto o controle, né?
Professora	Mais isso é um problema mais emocionante.
Chief	Mais sociável...
Diva	Exercício de poder...

Quadro 5: Percepção do ambiente síncrono e interativo.

A característica síncrona no VMT também foi destacada pelos participantes. Chief disse que não seria possível fazer manipulações na rede social. A questão do controle do GeoGebra foi retomada e, em um tom de brincadeira, os participantes associaram o uso desse controle como um "exercício de poder".

Diva	Hummm... Acho que uma palavra, é difícil definir em uma palavra, mas o que mais me impactou, nesse, na utilização desse ambiente foi... definição... uma palavra... questionamento. Você questionar aquilo que está proposto lá e você trabalhar a partir do que ele tá pedindo e você se questionar pra você conseguir responder às questões, você tem que se questionar e questionar aos outros, no caso, eles, pra tentar responder aquilo, tentar desenvolver, então seria questionamento mesmo.

Quadro 6. Questionamento.

Por fim, gostaríamos de enfatizar que a análise evidenciou os argumentos e mapeamentos utilizados, bem como a potencialidade do VMT, por exemplo, relacionada à diversidade de diálogos possíveis no ambiente, em geral, diferentes dos realizados presencialmente. Para concluir, citamos a fala de Chief, que, para nós, explicita como é importante que professores/pesquisadores proponham tarefas nas quais os participantes possam desenvolver a autonomia em seu aprendizado.

> *O diferencial e grande ponto positivo do VMT é a interação em tempo real entre usuários e a exibição síncrona das figuras no GeoGebra, textos, imagens etc. A melhor característica da plataforma, na minha opinião, é a capacidade de integrar ferramentas importantes no estudo da Matemática em um único ambiente, para todos, evitando que seja necessário utilizar mais de um software para realizar as atividades*. Outra característica positiva é a *liberdade e a facilidade em expressar ideias no quadro branco* (esta janela). É possível colocar imagens, formas geométricas, desenhos, linhas e até esquemas e mapas. Os pontos negativos da plataforma que mais chamam a atenção *são problemas típicos de grandes plataformas que recebem constantes acessos e crescente demanda do servidor: lentidão ou impossibilidade de utilizar a plataforma, imagens dissíncronas (não são atualizadas para todos os usuários) ou "desaparecimento" de algumas figuras. Como sugestão, ressalto a importância de incorporar uma calculadora à plataforma, em especial semelhante ao software Microsoft Mathematics. ... A resposta nesse tipo de ambiente é muito mais rápida e intuitiva que em outros ambientes, como fóruns, blogs, e-mails e sites. Este ambiente deveria ser aberto a alunos que queiram criar suas salas de estudo e monitoria.*

Figura 2. Avaliação do VMT feita por Chief.

O esquema argumentativo a seguir resume as falas dos participantes nos diálogos gravados no encontro presencial apresentados.

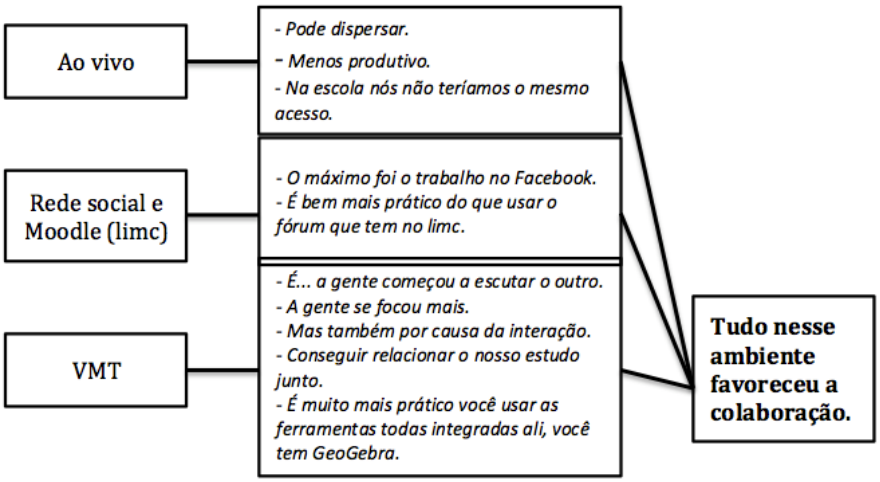


Figura 3. Esquema argumentativo da colaboração.

Considerações Finais

Durante o trabalho no VMT, os participantes criaram algo que era novo para eles. Essa proposta de trabalho mostrou que novas ideias matemáticas podem surgir sem que seja necessário que o professor restrinja as tarefas a um aparato meramente procedimental.

Para tanto, enxergar a tecnologia como prótese é indispensável, pois faz com que os alunos sejam levados a considerá-la como tal, o que implica uma mudança de postura. Essa mudança pode ser observada no relato de Chief, apresentado no item anterior, quando ele fala explicitamente da integração do VMT no cotidiano escolar.

Este trabalho se diferencia com a literatura de outras pesquisas sobre Transformações no Plano, por suas afiliações teóricas, em particular, na perspectiva sobre atividades familiares e não usuais e sobre colaboração. Karrer (2006) e Stormowski (2008), por exemplo, apresentam diversas tarefas sobre o tema usando tecnologia, entretanto essas tarefas são usuais e pretendem chegar a uma resposta única e padrão.

A responsabilidade e o envolvimento de Chief, Diforte, Dinorte e Diva devem ser destacados: os participantes sempre estiveram muito empolgados, valorizando o que estavam fazendo, sempre com muito bom humor, e o reflexo para construção do conhecimento matemático de cada um foi evidente.

Acreditamos que, a maior contribuição de nossa investigação resida no fato de nossa proposta sobre Transformações no Plano permitir a articulação de um arcabouço teórico que possibilitou enxergar o ensino e a pesquisa da experiência da participação e, consequentemente, do discurso. Essas articulações trouxeram muitas possibilidades não apenas para a sala de aula, como também para futuras pesquisas em Educação Matemática, nas quais se poderá discutir matemática a partir do ponto de vista dos próprios estudantes de Ensino Médio.

Referências e bibliografia

Brasil MEC (1998). *Parâmetros curriculares nacionais para o Ensino Fundamental*. Matemática. v 3. Brasília: MEC/SEB.

Castro, M. R. e Bolite Frant, J (2011). *O modelo da estratégia argumentativa: análise da fala e de outros registros em contextos interativos de aprendizagem*. Paraná: UFPR.

Cobb, P., Confrey, J., De Sessa, A., Lehrer, R., & Schauble, L. (2003). *Design Experiment in Educational Research*. Educational Researcher, v. 32, n. 1, p. 9-13.

Papert, S. *Constructionism vs. Instructionism*. Recuperado em 02 de dezembro de 2013 de http://www.papert.org/articles/const_inst/const_inst1.html.

Papert, S. e Harel, I. (1991) Situating Constructionism. *Constructionism*, Papert & I. Harel (Eds.). New York: Ablex Publishing.+

Powell, A. B. (2001). *Capturing, examining, and responding to mathematical thinking through writing*. Pythagoras, (55), p.3-8. Association for Mathematics Education of South Africa. Recuperado em 13 de outubro de 2012 de http://andromeda.rutgers.edu/~powellab/.

Salles, A. T., Bairral, M. A. (2012) *Interações docentes e aprendizagem matemática em um ambiente virtual*. Investigações em Ensino de Ciências (IENCI), 17(2), p. 453 - 466. Porto Alegre: UFRGS. Recuperado em 12 de outubro de 2013 de http://www.if.ufrgs.br/ienci/artigos/Artigo_ID300/v17_n2_a2012.pdf.

Shovsmose, O. (2007). *Educação Crítica: incerteza, matemática, responsabilidade.* Tradução: Bicudo, A. São Paulo: Cortez.

Stahl, G. (2006). *Virtual math teams project: An overview of VMT*. Nova Iorque, p. 1-8. Recuperado em 15 de agosto de 2011 de http://www.mathforum.org/vmt/TheVMTProject.pdf.

Stormowski V. (2008). *Estudando matrizes a partir de transformações Geométricas*. Dissertação de mestrado em Ensino de Matemática. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande so Sul.

Análisis de la motivación de logro al implementar la TI-Nspire CX CAS en el aprendizaje de la Matemática

Irma Patricia **Flores** Allier
Escuela Superior de Ingeniería Química e Industrias Extractivas, Instituto Politécnico Nacional
México
ipfallier@hotmail.com
Enrique **Arce** Medina
Escuela Superior de Ingeniería Química e Industrias Extractivas, Instituto Politécnico Nacional
México
earcem@yahoo.com.mx
Francisco **Lagunes** Moreno
Escuela Superior de Ingeniería Química e Industrias Extractivas, Instituto Politécnico Nacional
México
ferrolag@gmail.com

Resumen

El presente trabajo muestra el análisis de la escala atribucional de motivación de logro, al implementar la calculadora TI- Nspire CX CAS como herramienta tecnológica de trabajo guiada por la didáctica de la Matemática en Contexto de las Ciencias. Se analizaron 22 ítems de la escala atribucional de motivación al logro antes y después de implementada la tecnología Texas Instrument en la asignatura de ecuaciones diferenciales del tercer semestre de la carrera de Ingeniería Química Petrolera, para el grupo control constituido por una muestra de 30 alumnos. Los resultados muestran un cambio de apreciación respecto al logro de éxito en la evaluación hacia las ganas de estudiar, así como de las causas atribucionales percibidas por los alumnos por los exámenes y la suerte, hacia el interés y esfuerzo del alumno y la capacidad pedagógica del docente.

Palabras clave: Motivación al logro, Tecnología, Enseñanza de la Matemática, Matemáticas en Contexto de las Ciencias, Motivación

Planteamiento del problema

Desde finales del siglo pasado, diferentes especialistas del área de las ciencias sociales han dedicado sus estudios al tema de la incorporación de las tecnologías en la educación superior. La UNESCO, han enfatizado la necesidad de cambiar el paradigma de formación de este nivel educativo con el propósito de adecuarlo a las exigencias internas de los países, del fenómeno de la globalización, de la sociedad del conocimiento y el desarrollo científico-tecnológico. Al respecto, la UNESCO, reiteró la necesidad de: Producir transformaciones en los modelos educativos para abatir el rezago y el fracaso estudiantil, lo que obliga a formar un mayor número de profesores capaces de utilizar el conjunto de las modalidades didácticas presenciales o virtuales, implementar nuevas tecnologías adecuadas a las heterogéneas necesidades de los estudiantes y que, además, sepan desempeñarse eficazmente en espacios educativos donde

actúan personas de diferentes procedencias sociales y entornos culturales (UNESCO/CRES, 2008, p. 4).

Esto hace reflexionar acerca de la importancia e influencia de factores como la motivación al logro y el conocimiento previo sobre el aprendizaje y el rendimiento de los estudiantes, en tanto que las modalidades alternativas incluyen innovaciones en los métodos, las estrategias y las técnicas instruccionales como la implementación de nueva tecnología para el diseño de los materiales didácticos en función de alcanzar los objetivos de aprendizaje y formar las respectivas competencias en el profesional egresado de la universidad.

Fundamentos teóricos

La motivación al logro consiste en una red de conexiones cognitivo-afectivas relacionadas con el desarrollo personal e impulsa a las personas a exigirse más, a rendir más, a usar eficientemente las capacidades, las destrezas y los conocimientos adquiridos. Entonces, cuando se han establecido metas, tareas, creencias y actividades facilitadoras de logro, la acción o desempeño del estudiante aprendiz es un acto consciente con intencionalidad. Por ello se supone que el efecto de la motivación al logro se refleja en la elaboración de aquellas tareas que representan conflictos cognitivos generadores de nuevo conocimiento.

Existe un acuerdo entre teóricos e investigadores (Carrasco, 1993; Comisión Nacional para Definir el Perfil de Entrada del Estudiante Universitario, 2003; Good y Brophy, 1996; Pérez y Romero, 1992), en decir que la motivación es un factor interno de efecto catalítico que origina, mantiene y orienta la conducta hacia metas específicas, que es importante en el aprendizaje de estudiantes universitarios ya que matiza el proceso cognitivo. Es decir, la motivación mueve, imprime orientación y energiza a los deseos e intenciones del estudiante hasta el punto de hacerlo actuar en la dirección de logro y realización. Dicho efecto, según Ausubel, Novak y Hanesian (1983), debido a la persistencia, se refleja en el rendimiento académico y existe la tendencia a pensar que las razones intrínsecas son más determinantes que las extrínsecas (Dewick, 1983)

La teoría atribucional propuesta por Weiner (1986) establece que las atribuciones realizadas por el estudiante para explicar el resultado, son por lo general debido a las siguientes causas; capacidad (o falta de capacidad), el esfuerzo (o falta de esfuerzo), la suerte (o su falta) y el grado de dificultad de la tarea, aunque reconoce que puedan existir otras como el nivel pedagógico del docente. Para Weiner (1985), el tipo de atribuciones que realice el estudiante determinará tanto las expectativas como las metas, las cuales podrán considerarse como facilitadoras u obstaculizadoras del futuro éxito académico.

Por otro lado, algunos estudios demuestran que el alumno que utiliza tecnología en su proceso de enseñanza aprendizaje tiene más tiempo para explorar, descubrir, entender y aplicar conceptos y llegar a la resolución de problemas, elevando así el nivel de pensamiento del estudiante, (Martínez C., 1996; Ramírez B., 1996; De Faria, E. 2000). El National Council of Teachers of Matematics desde octubre de 1996 recomienda la incorporación de la calculadora en todos los niveles de la enseñanza de matemática para: explorar y experimentar nuevas formas de enseñar con ideas matemáticas tales como patrones, propiedades numéricas y algebraicas, y funciones, así como el construir modelos, resolver problemas con datos reales y elevar el nivel de abstracción y generalización.

Para que el estudiante pueda vivir nuevas experiencias matemáticas (difíciles de lograr en medios tradicionales como el lápiz y el papel) en las que se pueda manipular directamente los objetos matemáticos dentro de un ambiente de exploración, Gómez (1997) considera que es indispensable utilizar la tecnología para abrir espacios. Esto es posible ya que se puede manejar dinámicamente los objetos matemáticos en múltiples sistemas de representación dentro de esquemas interactivos, lo que es fundamental para el aprendizaje de los estudiantes.

Complementariamente Duval (1992) considera importante analizar las articulaciones que hay entre los diferentes sistemas de representación semiótica, ya que Selden (1994) asevera que las dificultades que tienen los estudiantes de ingeniería para resolver problemas matemáticos no rutinarios son frecuentes. Duval, Hitt y Kaput han discutido la pertinencia de la articulación de los sistemas semióticos de representación de los objetos matemáticos a través del uso de calculadoras e incluso software matemáticos (Duval, 1992; Hitt F., 1996; Kaput J., 1991).

Un punto importante a considerar al incorporar tecnología se refleja en la decisión de las metodologías o teorías de aprendizaje a utilizar en el proceso educativo, de manera que estas permitan a los estudiantes construir sus conocimientos, asumir la responsabilidad de su aprendizaje y el desarrollo del pensamiento crítico y creativo, porque la tecnología no es un fin en sí mismo sino un medio**.** Así, por la importancia de incorporar e implementar nueva tecnología al proceso de la enseñanza y del aprendizaje de la matemática en el nivel superior específicamente en ingeniería, se hace necesario desarrollar trabajo de investigación encaminado a la evaluación del impacto de esta.

El presente trabajo se fundamenta en la teoría de la *Matemática en el Contexto de las Ciencias,* la cual reflexiona acerca de la vinculación que debe existir entre la matemática y las ciencias, la articulación entre la matemática y la vida cotidiana, así como la relación entre la matemática con las actividades laborales y profesionales. La etapa de la didáctica de la Matemática en Contexto de las Ciencias es precisamente en la que se puede observar indicadores más tangibles para su seguimiento, en términos de conocimientos, habilidades, aptitudes, destrezas, valores y actitudes, con la finalidad de saber trabajar en equipo, tener conocimiento amplio de las TIC como herramientas de trabajo, reconocer y manipular objeto de estudio; estar capacitado para enfrentar y resolver cualquier problema del área profesional académicamente hablando, a pesar de que no se contempla el uso de calculadoras, ni software matemáticos o paquetes diseñados por los propios profesores (Camarena, 2001). En base a lo anterior, se considera pertinente complementar las estrategias de aprendizaje de la didáctica de la Matemática en contexto con el apoyo de nueva tecnología.

Objetivos de la investigación

Objetivo General

Estudiar el efecto de la motivación al logro sobre el aprendizaje en matemática específicamente en ecuaciones diferenciales para estudiantes del tercer semestre de la Escuela Superior de Ingeniería Química e Industrias Extractivas, cuando se implementa la calculadora TI- Nspire CX CAS como herramienta tecnológica de trabajo guiada por la didáctica de la Matemática en Contexto de las Ciencias

Objetivos Específicos

1. Evaluar el efecto de la motivación al logro sobre el aprendizaje de matemática en estudiantes del tercer semestre de la ESIQIE.
2. Evaluar el efecto de la motivación al logro en base a la implementación de la tecnología en actividades de retroalimentación y mediación cognitiva sobre el aprendizaje de matemática en estudiantes del tercer semestre de la ESIQIE.

Diseño y metodología

La presente investigación cuantitativa muestra la metodología de trabajo utilizada al implementar nueva tecnología a la didáctica de la enseñanza de la matemática donde se utiliza como herramienta de apoyo la calculadora TI – Nspire CX CAS en la asignatura de ecuaciones diferenciales. La metodológica basada en la didáctica de la Matemática en Contexto de las Ciencia, se aplicó en tres etapas. En la etapa primera de andamiaje el grupo control manipuló en un primer acercamiento la calculadora TI- Nspire CX CAS de tal manera que pudiesen realizar cálculos analíticos y la graficación correspondiente de los conceptos estudiados, como se observa en la figura 1. Cabe aclarar que cada uno de los alumnos contó con una calculadora para su uso personal la cual le fue facilitada en cada una de las sesiones de clase.

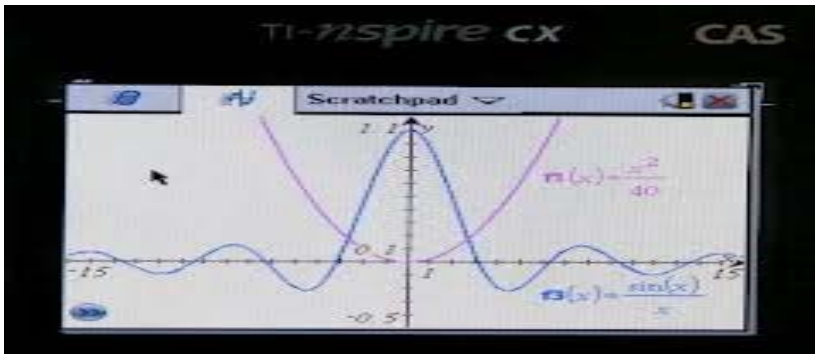


Figura 1. Representación gráfica en la calculadora TI –Nspire CX CAS

En la segunda etapa, se trabajó una secuencia didáctica para la asignatura de ecuaciones diferenciales aplicadas con actividades complementarias a manera de repaso y retroalimentación para lograr la visualización de conceptos matemáticos en diferentes representaciones semióticas. El propósito fue fomentar el atractivo intrínseco de las tareas de aprendizaje y lograr que éste fuese significativo. Se buscó activar la curiosidad y el interés del alumno en el contenido del tema a tratar al utilizar las herramientas aprendidas en la calculadora y visualizar diferentes formas del concepto.

Para ello, se presentó la nueva información de manera rutinaria a través de representaciones gráficas principalmente. En esta etapa se observó una reducción de tiempo de ejecución por un mayor tiempo de reflexión por parte del alumno.

Adicionalmente se realizó programación básica con la calculadora, para crear programas de resolución de la aplicación de las ecuaciones diferenciales a problemas de aplicación como mezclas y enfriamiento de Newton. La figura 2 muestra una aplicación de la calculadora TI-Nspire CAS a la resolución de las ecuaciones diferenciales utilizando el software de la misma, pudiéndose instalar éste tanto en un ordenador como una lapto para trabajar fácilmente en aplicaciones de Windows.

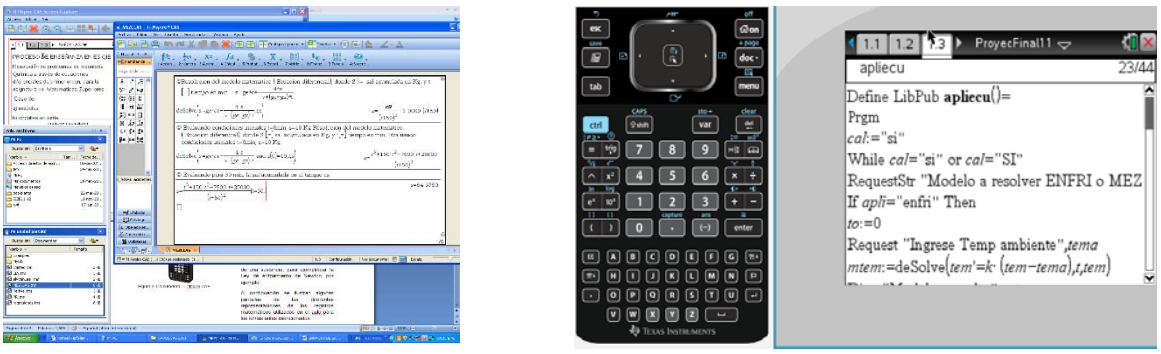


Figura 2. Utilización del software de programación dela calculadora TI- Nspire CX CAS para resolver problemas de mezclas.

Finalmente en la última etapa se realizaron demostraciones en tiempo real de las aplicaciones a las ecuaciones diferenciales a través del uso de los sensores (en este caso de temperatura, intensidad luminosa y pH), lo que permitió observar los fenómenos estudiados en clase. De esta manera, en el aula el alumno pudo apreciar un calentamiento y enfriamiento de una sustancia para ejemplificar la Ley de enfriamiento de Newton, las curvas de saturación de soluciones como ejemplo de mezclas y la disminución de la intensidad de luz de una fuente luminosa a través de un tubo), como se observa en la figura 3.

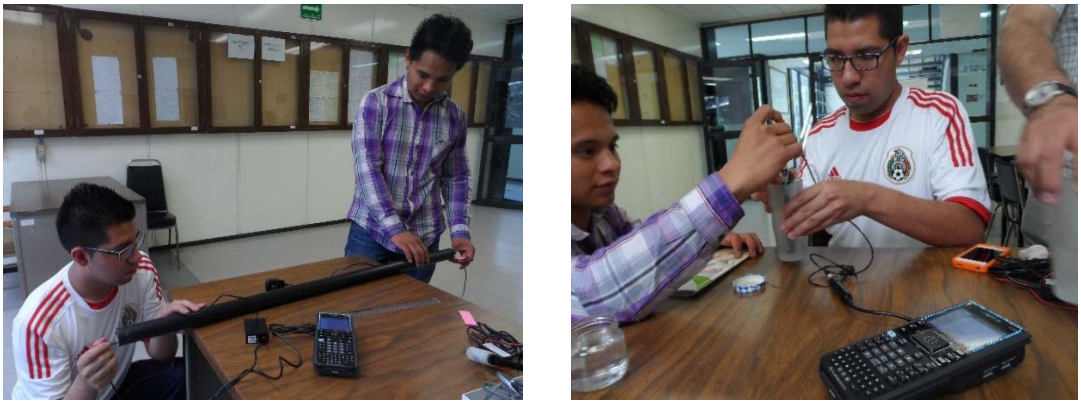


Figura 3. Alumnos realizando la experimentación en tiempo real de alcalinidad de una mezcla, registro de intensidad luminosa en un tubo y presentación de los datos registrado por los sensores en la Calculadora TI- Nspire CX CAS.

Instrumento

Se midió las atribuciones de logro con una adaptación de la escala atribucional de motivación de logro -EAML de Manassero y Vásquez (1998), conformada por 22 reactivos de diferencial semántico. Se aplicó el instrumento a 30 alumnos que se encontraban en el segundo año de su carrera universitaria que cursaron la asignatura de ecuaciones diferenciales aplicadas, a partir de su tercer período académico. Sus edades están entre 17 y 24 años, con una media de 20 años y una DT de 1,97. La escala de atribuciones se aplicó antes y después de implementada la metodología antes mencionada. Los ítems se clasificaron en cuatro categorías llamadas factores después de un análisis factorial realizado en estudios previos, es decir:

Atribución a la característica de la tarea (Factor 1): se refiere a considerar como causante del resultado, la dificultad o facilidad de las tareas impuestas en las asignaturas. Se asocia con la

persistencia ante una tarea, la frecuencia de terminarla con éxito y las exigencias ante la demanda. Las dimensiones asociadas a la tarea son externas, inestables e incontrolables.

Atribución al Esfuerzo (Factor 2): se concibe como el interés por obtener resultados favorables frente a situaciones que demandan mayor compromiso haciendo lo necesario para lograrlo, lo que no implica en todos los casos un interés por aprender. Este factor se asocia con dimensiones internas, inestables y controlables, las cuales otorgan mayor probabilidad de éxito a quien las posee.

Atribución a la Capacidad (Factor 3): se concibe como una actitud orientada a la motivación al logro por obtener buenas calificaciones en función de la capacidad que el estudiante considera que tiene para lograrlo y en función de su esfuerzo y satisfacción con la demanda académica. Expresa sentimientos respecto al logro (probabilidad de éxito, persistencia, aburrimiento, esfuerzo por buenas notas). Generalmente, puede ser interna, estable e incontrolable.

Atribución a la evaluación de los profesores (Factor 4): Se concibe como la actitud de conformidad o no con los resultados académicos en función de las expectativas del alumno y de lo que considera como una evaluación justa o no por parte del docente. Por sus características, esta atribución puede verse dentro de la dimensión externa, inestable e incontrolable, por lo tanto, tiene la capacidad de causar baja motivación si los resultados obtenidos difieren de los esperados o se consideran injustos. La tabla 1 muestra un ejemplo de las cuatro clasificaciones por factores del estudio adaptado para la universidad venezolana Simón Bolívar con valores de media, desviación estándar y varianza para 15 ítems.

Tabla 1.
Estructura Factorial de la EAML-G

Factores	Media	DT	Comunalidades	Reactivos
Factor 1 27,27% varianza común	4,82	,822	,515	21 ¿Con qué frecuencia terminas con éxito una tarea que has empezado?
	5,10	,953	,638	17 ¿Cómo describes tu persistencia al no haber podido hacer una tarea este trimestre?
	4,70	,921	,536	10 ¿Cómo valoras tu propia capacidad para estudiar las materias?
	4,71	1,05	,571	18 ¿Cómo calificas las exigencias que te impones a ti mismo respecto al estudio?
	5,20	,951	,601	19 ¿Cómo describes tu conducta cuando haces un problema difícil en alguna de tus asignaturas?
Factor 2 8,28 % varianza común	5,31	,989	,622	15 ¿Cuánto afán tienes de sacar buenas notas?
	5,63	,844	,569	11 ¿Cuán importantes son para ti las buenas notas en este trimestre?
	5,60	,793	,619	20 ¿Cuántas ganas tienes de aprender este trimestre?
	5,54	,821	,574	12 ¿Cuanto interés tienes por estudiar este trimestre?
Factor 3 6,25% varianza común	5,25	1,07	,547	7 ¿Cuánta confianza tienes de aprobar todas las materias en este trimestre?
	5,00	,86	,539	9 ¿Cuánta probabilidad de aprobar las materias crees que tienes este trimestre?
	4,14	1,10	,380	22 ¿Con qué frecuencia te aburres en las clases de las materias de este trimestre?
	4,91	1,10	,496	6 ¿Cuánto esfuerzo haces actualmente para sacar buenas notas en este trimestre?
	5,31	,98	,600	13¿Cuánta satisfacción te proporciona estudiar las materias de este trimestre?
Factor 4 5,54% varianza común	4,11	1,07	,687	1¿Cuál es el grado de satisfacción que tienes con relación a tus notas del trimestre anterior?
	4,15	1,06	,507	3 ¿Cómo valoras la relación existente entre la nota que obtuviste el trimestre anterior y la nota que esperabas obtener?
	3,73	1,38	,537	4¿Cómo valoras el grado de subjetividad en las calificaciones de evaluación de tus profesores?
	4,54	1,13	,366	5 ¿Cuan justas son tus notas del trimestre anterior con relación a lo que te merecías?

Fuente: Emilse Durán-Aponte y Lydia Pujol, 2011.

Resultados

Las tablas 2 y 3 muestran los resultados de las medias y desviaciones estándar de los 22 ítem aplicados a los 30 alumnos de la carrera de Ingeniería Química de la ESIQIE antes y después de implementada la calculador TI-Nspire a la didáctica de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales respectivamente.

Tabla 2.
Datos antes de usar tecnología

Media y desviación típica de las puntiaciones en los items de la escala atribucional de motivación			
ITEM	MEDIA ($\bar{S}$)	DESV. ESTA ($\bar{X}$)	ETIQUETA
M1	7.93	2.18	Satisfacción
M2	7.67	2.54	Suerte
M3	6.27	2.89	Nota Obtenida/Esperada
M4	2.97	3.06	Subjetividad
M5	8.37	1.35	Justicia
M6	7.50	1.85	Esfuerzo
M7	7.00	2.18	Confianza
M8	6.40	1.69	Facilidad/Dificultad
M9	8.00	1.20	Probabilidad
M10	7.13	1.81	Capacidad propia
M11	8.40	1.22	Importancia
M12	7.00	2.20	Interes
M13	8.07	1.89	Cantidad Satisfacciones
M14	6.37	2.37	Examenes
M15	8.33	1.32	Afán
M16	8.80	0.92	Capacidad Pedagógica
M17	7.90	1.24	Persistencia
M18	7.80	1.54	Exigencias
M19	7.90	1.45	Conducta
M20	8.30	1.66	Ganas Aprender
M21	7.97	1.38	Término con Éxito
M22	8.00	1.95	Aburrimiento

Tabla 3.
Datos después de usar tecnología

Media y desviación típica de las puntiaciones en los items de la escala atribucional de motivación			
M1	7.17	2.17	Satisfacción
M2	6	3.06	Suerte
M3	6.7	2.22	Nota Obtenida/Esperada
M4	5.43	2.67	Subjetividad
M5	7.07	2.32	Justicia
M6	7.8	1.88	Esfuerzo
M7	8.13	1.31	Confianza
M8	5.7	2.04	Facilidad/Dificultad
M9	7.7	1.37	Probabilidad
M10	7.73	1.31	Capacidad propia
M11	8.17	1.12	Importancia
M12	8.8	0.48	Interes
M13	8.3	1.21	Cantidad Satisfacciones
M14	7.07	1.84	Examenes
M15	8.4	1.25	Afán
M16	8.38	1.63	Capacidad Pedagógica
M17	8.03	1.3	Persistencia
M18	8	1.36	Exigencias
M19	8.37	1.07	Conducta
M20	8.63	0.81	Ganas Aprender
M21	8	1.2	Término con Éxitc
M22	7.1	1.75	Aburrimiento

En la tabla 2 se observa que la media de los mayores valores de atribución al éxito antes de aplicada la tecnología se encuentran en los ítems de capacidad pedagógica del profesor con 8.80, importancia a las notas 8.40 y justicia de la nota de calificación 8.37.Mientras que la tabla tres muestra que después de aplicada la tecnología, los alumnos atribuyen su éxito a los ítem de interés 8.8 , afán 8.4 y ganas de aprender 8.63, que se encuentran todos ellos involucrados en el factor dos de esfuerzo, donde los parámetros de percepción son intrínsecos.

Desde una visión general la tabla 4 y 5 muestran la incidencia de éxito y fracaso de las categorías de atribución de logro externada por los 30 alumnos de la ESIQIE antes y después de aplicada la tecnología en la didáctica de aprendizaje de las ecuaciones diferenciales.

Tabla 4
Incidencias antes de aplicada la tecnología

Incidencias de éxito y fracaso en la escala atribucional de motivación		
MOTIVACION	MEDIA	DESVIACIÓN
INTERES	8.00	0.44
TAREA-CAPACIDAD	7.30	0.38
ESFUERZO	7.77	0.25
EXAMEN	7.23	0.64
PROFESOR	8.40	0.72

Tabla 5
Incidencias después de aplicada la tecnología

Incidencias de éxito y fracaso en la escala atribucional de motivación		
MOTIVACION	MEDIA	DESVIACIÓN
INTERES	8.50	0.34
TAREA-CAPACIDAD	7.45	0.34
ESFUERZO	8.05	0.34
EXAMEN	7.00	0.21
PROFESOR	7.73	0.08

En la tabla 4 se observa la mayor media aritmética atribuida por los alumnos a la capacidad del profesor con un valor de 8.40, dejando con menor media aritmética la atribución a los exámenes 7.23, que corresponden a atribuciones de capacidad y evaluación del profesor respectivamente.

En la tabla 5 se puede observar que en lo general los alumnos después de aplicada la tecnología en su proceso de enseñanza aprendizaje su percepción del éxito se lo atribuyen al interés con una media de 8.50 y la percepción de menor valor se lo otorgan a los exámenes con un valor de 7.00, correspondientes a los factores de interés y capacidad respectivamente.

Discusión de resultados

Los datos obtenidos en las medias de los ítem de la tabla 2 antes de aplicada la tecnología en el proceso enseñanza aprendizaje indica, que la percepción de los alumnos es atribuir una gran motivación a los aspectos externos representados por los factores uno de la tarea y factor 4 de la evaluación del profesor.

Contrastantemente el análisis de los resultados de la tabla 3 indican que después de aplicada la tecnología en el proceso enseñanza aprendizaje, la motivación de los alumnos al logro por obtener el éxito esta atribuido a tres ítems que tiene que ver con el esfuerzo personal como lo es el interés, el afán y las ganas por aprender. Este cambio de atribución se observa de un enfoque de aspectos externos hacia uno de aspectos internos, lo que confirma lo expresado por Elliot y Dweck (1983) en relación a la motivación intrínseca.

Lo anterior se confirma con lo reportado en la tabla 4 y 5 donde las medias por factores indican que la motivación de los alumnos muda de lo externo, donde requieren de mayor motivación de la ayuda del profesor a lo interno, el interés personal por lograr el éxito a través de los logros personales. Los resultados anteriores apoyan parcialmente lo encontrado por Manassero y Vázquez (1998, 2000) acerca de que los predictores más significativos para las calificaciones de los estudiantes son motivación de esfuerzo, de tarea/capacidad y de examen, mencionando que estas causas son determinantes fundamentales de la motivación con el rendimiento académico.

Conclusiones

Después de aplicada la implementación de la calculadora TI- Nspire CX CAS en alumnos de la carrera de Ingeniería Química en la asignatura de ecuaciones diferenciales, se observa una mayor Motivación de Interés, lo que indica que los resultados académicos que obtienen los estudiantes en sus evaluaciones, están mediados a partir del esfuerzo que ellos realizan para sus

evaluaciones; a partir de considerar la importancia que ellos otorgan a sus calificaciones, valorar el interés que tienen para estudiar, tomar en cuenta la satisfacción que les generan sus estudios, reconocer el deseo que los impulsa a sacar buenas calificaciones y el empeño por estudiar. Situación que no se presentó antes de utilizada la nueva tecnología, ya que su percepción de éxito estaba basado en acciones externas como los exámenes, la suerte o incluso la facilidad o dificultad de la tarea.

Los resultados muestran que estas atribuciones están mediadas por motivaciones internas, que desde el punto de vista de Dweck y Elliot (1983), es lo ideal al desarrollar la motivación intrínseca del alumno.

El uso de la calculadora TI- Nspire CAS permite crear ambientes de trabajo en el aula con una gran variedad de posibilidades en relación al manejo representaciones semiótica, gráficas, tratamiento de tablas y datos, manejo analítico de funciones, programación de procesos, librerías e incluso la posibilidad de imprimir y transferir información a PC´s, laptops y calculadoras similares, así como contar con un software en ambiente Windows; y sobre todo de contar con sensores para representar en tiempo real fenómenos termodinámicos, físicos y químicos; ello abre una gama de posibilidades de favorecer el interés del alumno por aprender y promover su esfuerzo dentro del proceso de aprendizaje de las ecuaciones diferenciales.

Limitaciones del estudio

Se considera que la implementación de la nueva tecnología de cálculo dentro del proceso de enseñanza aprendizaje de las ecuaciones diferenciales promueve una nueva forma de aprendizaje dentro del aula, en tiempo real y con eventos contextualizados, lográndose virar la perspectiva que los alumnos dan a su rendimiento académico de una atribución de éxito basada en la capacidad y el profesor a una basada en el esfuerzo personal.

Sin embargo, es necesario realizar estudios complementarios y adaptaciones a la escala atribucional de motivación al logro, para analizar casos donde participen alumnos de otras carreras universitarias y se amplié la visión atribucional que tienen los alumno de nivel superior ante el éxito y el fracaso en su rendimiento académico.

Bibliografía

Brousseau, G. 1983. "Les obstacles epistèmologiques et les problemes en mathématiques". RDM, vol. 4, no. 2. Grenoble.

Camarena, P. G., (2001). *Reporte del proyecto de investigación titulado:* La matemática en el contexto de las ciencias, la resolución de problemas. ESIME-IPN.

Carrasco, C. (1993). Motivaciones sociales y desempeño. Material elaborado para el seminario cultura organizacional, calidad total y desempeño. Departamento de Investigación y Postgrado. UNEXPO, Barquisimeto.

Dweck, C.S. y Elliot, E. S.(1983), Achievement motivation. En E.M. Hetherington (ed.) Socialization, personality and social development. Wiley y Sons, Nueva York-USA

De Faria, E. 2000. "La tecnología como herramienta de apoyo a la generación de conocimiento". Revista Innovaciones Educativas. San José: Editorial EUNED, año VII, número 12, 79-85.

Duval, R. 1992. "Registres de representation sémiotique et fonctionnement cognitive de la pensée". Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. IREM Strasbourg.

Gómez, P. 1997. "Tecnología y Educación Matemática". Página Web http://www.uniandes.edu.co

Good, T. y Brophy, J. (1996). Psicología educative contemporánea. (5ta. ed.). Mexico: McGraw Hill.

Hitt F. (1996), "Sistemas Semióticos de Representación del concepto función y su relación con problemas epistemológicos", Investigación en matemática educativa, CINVESTAV, p.245-264.

Hogan, T. (2004). *Pruebas psicológicas. Una introducción práctica.* Argentina: Manual Moderno

Kaput J. (1991), Notations and representations", ed. Radical Constructivism in Mathematics Education, Kluwer Academic Publishers, p. 33-37.

Kerlinger, F. y Lee, H. (2001). *Investigación del comportamiento: Métodos de investigación en ciencias sociales* (4ª ed.). México: McGraw-Hill.

Manassero, M. y Vásquez, A. (1998). Validación de una escala de motivación de logro. *Psicothema, vol.10, n.2,* 333-351.

Martínez C. 1996. "Explorando transformaciones de funciones con una calculadora gráfica". Memoria Décima Reunión Centroamericana y Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. Puerto Rico.

National Council of Teachers of Mathematics Professional Standards for Teaching Mathematics, , Octubre 1996.

Pérez, I Y Romero, O. (1992). Motivaciones sociales y estrés en el trabajo. Memorias EVEMO 4. 195-200.

Ramirez B., K. Wayland 1996. "La calculadora TI-92 y su impacto en la enseñanza de ciencias y matemáticas". Memoria Décima Reunión Centroamericana y Caribe sobre Formación de Profesores e Investigación en Matemática Educativa. Puerto Rico.

UNESCO/CRES. (2008). Declaration de la Conferencia Regional de Educación Superior en América Latina y El Caribe: Cartagena de Indias (Colombia)

Weiner, B. (1985). An attributional theory of achievement motivation an emotion. *Psychological Review, vol.92, n.4,* 548-573.

Weiner, B. (1986). *An Attributional Theory of Motivation and Emotion.* New York: Springer-Verlag.

Aplicação de recursos computacionais ao ensino de Matemática: propostas metodológicas e a sala de aula do futuro

Chrisley Bruno Ribeiro **Camargos**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais-Campus Formiga
Brasil
chrisley.camargos@ifmg.edu.br
Rosilane Maria da **Silva**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais-Campus Formiga
Brasil
rosilanemds@gmail.com

Resumo

A crescente informatização da sociedade exige que se lide com novas tecnologias, inclusive, nas escolas. Entretanto, laboratórios de informática se encontram ociosos em escolas públicas e há professores que precisam de suporte para sair de sua zona de conforto a fim de melhor ensinar e contribuir para a formação social de seus alunos. A pesquisa descrita neste artigo analisou laboratórios de informática de duas escolas públicas do município de Formiga/MG/Brasil, capacitou docentes e graduandos em Licenciatura em Matemática através de minicursos, envolvendo atividades investigativas e *softwares* educativos livres, principalmente o GeoGebra, e desenvolveu um protótipo denominado "Sala de aula do futuro", com efetivação de aulas de Matemática, utilizando *tablets* como ferramenta de ensino. Tais aulas foram analisadas qualitativamente por meio da transcrição da gravação de áudio das mesmas, sob uma perspectiva da Educação Matemática Crítica.

Palavras-chave: Informática, Educação Matemática, formação de professores, *tablets*, GeoGebra.

Introdução

Atualmente, computadores são disponibilizados pelo governo às escolas da rede pública de ensino, porém muitos laboratórios de informática dessas escolas não são utilizados por falta de assistência técnica e de docentes qualificados para trabalhar com esse tipo de equipamento. Pensando nisso, foi criado o projeto de pesquisa: "Aplicação de recursos computacionais ao ensino de Matemática: Propostas metodológicas e a sala de aula do futuro".

Esta pesquisa foi realizada com apoio do Instituto Federal de Minas Gerais (IFMG/*Campus* Formiga) e com fomento do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). As verbas recebidas foram empregadas na aquisição de materiais para a execução do projeto de pesquisa, os quais foram doados à instituição de origem, ao término da investigação.

Por ser uma das metas do projeto inicial, foi criado um grupo de pesquisa (Núcleo Institucional de Novas Tecnologias Aplicadas ao Ensino / NINTAE) formado por professores e alunos do IFMG, *Campus* Formiga, visando colocar em funcionamento os laboratórios de informática de duas escolas da rede pública desse município e, em seguida, implementar

minicursos de Informática e Educação Matemática para capacitar os professores da região a fim de melhor utilizarem as ferramentas computacionais no ensino de Matemática. Por último, em uma etapa do projeto que será descrita neste artigo, foi desenvolvida a "Sala de aula do futuro", localizada no c*ampus* e equipada com *notebook e tablets,* onde os alunos do curso de Licenciatura em Matemática do IFMG, *Campus* Formiga, testariam esses equipamentos e analisariam possíveis formas de levar tais recursos à sala de aula.

Assim, os professores em formação inicial estariam diante de novas mídias nas quais "a experimentação se torna algo fundamental, invertendo a ordem de exposição oral da teoria, exemplos e exercícios bastante usuais no ensino tradicional, e permitindo uma nova ordem: investigação e, então, a teorização" (Borba & Penteado, 2007, p. 41). Tais palavras lembram as ideias sobre simulação para o ensino de Matemática:

> Tendo em vista os resultados de numerosas experiências da psicologia cognitiva, vários cientistas, entre os quais Philip Johnson-Laird, criaram a hipótese de que o raciocínio humano cotidiano tem muito pouca relação com a aplicação de regras da lógica formal. Parece mais plausível que as pessoas construam modelos mentais das situações ou dos objetos sobre os quais estão raciocinando, e depois explorem as diferentes possibilidades dentro destas construções imaginárias. A simulação, que podemos considerar como uma imaginação auxiliada por computador, é, portanto, ao mesmo tempo uma ferramenta de ajuda ao raciocínio muito mais potente que a velha lógica formal que se baseava no alfabeto (Lévy, 1993, p. 124).

Serão analisadas, neste artigo, algumas implicações levantadas sobre vantagens e/ou empecilhos de se utilizar o *software* GeoGebra em *tablets* para fins educacionais, usando argumentos de Lévy (1993) e da Educação Matemática Crítica.

O projeto: metodologia, etapas e caminhos para pesquisa

A pesquisa foi desenvolvida com professores de escolas públicas do município de Formiga/MG e alunos do curso de Licenciatura em Matemática do IFMG (*Campus* Formiga). Trata-se de uma pesquisa de campo e com pesquisador participante. Os dados, conjecturas e hipóteses levantados no decorrer desta análise foram tratados de modo qualitativo, sendo resguardada a identidade dos alunos e professores participantes.

Inicialmente, esta pesquisa teve caráter bibliográfico, pois foram feitas diversas leituras com o objetivo de suscitar um referencial teórico consistente e relevante para análise das atividades desenvolvidas no decorrer da investigação. Entre as referências analisadas, podem-se destacar conceitos como "zona de conforto e de risco" e discussões sobre questões de cidadania, realizadas, respectivamente, nas obras de Borba e Penteado (2007) e Skovsmose (2001, 2008).

Na primeira etapa do projeto, foi efetuada uma sondagem de campo, na qual alunos e professor do Curso de Ciência da Computação do grupo de pesquisa analisaram, tecnicamente, a situação dos laboratórios de informática de escolas públicas do município de Formiga/MG. Procuraram-se verificar os aspectos físicos desses ambientes, observando-se questões como dimensões dos laboratórios, números de máquinas que estavam à disposição, sistema operacional dos equipamentos e possibilidade de instalação dos *softwares* a serem utilizados. Foram escolhidas duas escolas com maior disposição da diretoria e, então, *softwares* livres relacionados ao ensino de Matemática foram instalados nos computadores das mesmas.

Em uma segunda etapa, foram elaborados e implementados minicursos semanais de capacitação aos professores das escolas da região e alunos do Curso de Licenciatura em

Matemática (IFMG/*Campus* Formiga) para utilização dos laboratórios como ferramenta de ensino de Matemática, descritos na tabela a seguir:

Tabela 1
Minicursos ofertados.

	Título	Carga Horária	Conteúdo
1º Minicurso	Robótica Educacional	4 h	Apresentação do Kit Lego NXT 9797; Peças, engrenagens, sensores e motores: como são articulados; A programação dos robôs através do *software* NXT *Programming*.
2º Minicurso	Introdução ao Linux e LibreOffice (antigo OpenOffice, também conhecido como BR-Office)	12 h	GNU Linux; Conceito de Sistemas operacionais; O que é GNU/Linux; *Software* livre e gratuito; Dicas de segurança; Utilizando o Ubuntu Linux; Instalar programas e como obter ajuda; Onde obter e como instalar o Ubuntu; Writer; Calc; Impress.
3º Minicurso	Utilização do *software* GeoGebra como ferramenta de auxílio ao ensino de Matemática	25 h: 16 h no Campus e 9 h de trabalhos orientados nas escolas	Ferramentas básicas; Atividades investigativas utilizando o *software* GeoGebra.
4º Minicurso	*Software* Scilab	16 h	Apresentação; Comandos básicos; Polinômios; Vetores e matrizes; Gráficos.

Com o intuito de avaliar novas tecnologias aplicadas ao ensino, foi implementado, no Instituto Federal, um projeto experimental denominado "Sala de aula do futuro", que contava com uma sala de aula equipada com *tablets* para os alunos e *notebook* e projetor multimídia para o professor, na qual foram aplicadas atividades pedagógicas a fim se analisar o uso dos equipamentos como ferramentas para o ensino de Matemática.

A sala de aula do futuro

A configuração e instalação do GeoGebra nos *tablets* adquiridos ocorreram nos dias 18 e 19 de novembro de 2013. A versão do aplicativo GeoGebra instalada nos mesmos foi a de número 4.3.58.

Uma primeira aula com atividades usando o GeoGebra em *tablets*, para verificar a adaptação dos alunos com o equipamento, ocorreu no dia 20 de novembro de 2013. A mesma foi ministrada para uma turma de alunos do 6º período do curso de Licenciatura em Matemática do IFMG, *Campus* Formiga, durante uma aula da disciplina "Prática de Ensino II" e teve duração de 100 minutos.

Foi dada continuidade às atividades, implementando a parte do projeto denominada "Sala de aula do futuro". A turma inicial foi mantida, no entanto os alunos passaram a cursar o 7º período do curso citado. As ações aplicadas foram testadas em computadores pelos mesmos alunos durante aulas da disciplina "Informática e Educação Matemática", ministrada anteriormente por um dos autores deste artigo. Tais práticas, do tipo investigativas e com as adaptações necessárias para serem realizadas em *tablets*, foram refeitas durante 8 aulas, com duração de 50 minutos cada, da disciplina "Prática de Ensino III". Inicialmente, os *tablets* foram distribuídos de maneira aleatória entre os alunos. Em meio às aulas, passou-se a numerá-los e

distribuí-los de acordo com a numeração da lista de presença; assim, cada aluno adotou seu próprio material, de uso pessoal. Abaixo se encontram imagens da realização das aulas:

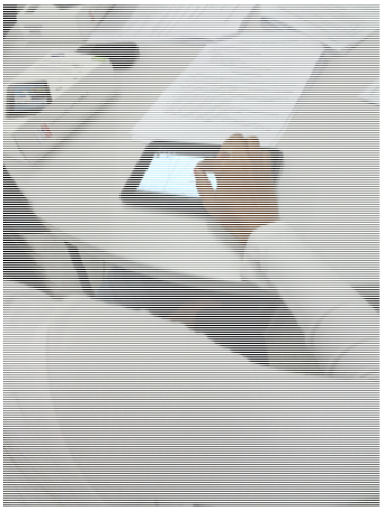


Figura 1. Registro das aulas utilizando *tablets* I.

Figura 2. Registro das aulas utilizando *tablets* II.

Para que se pudessem analisar qualitativamente os resultados, foram gravadas as oito aulas de implementação das atividades com *tablets*. Essas aulas foram transcritas e analisadas sob um olhar da Educação Matemática Crítica, conforme se descreverá a seguir.

No dia 30 de maio de 2014, foi realizada uma reunião com os alunos bolsistas do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) a fim de divulgar o projeto e convidá-los a executarem as atividades, envolvendo o GeoGebra com professores de Matemática das escolas nas quais atuam, dando continuidade às contribuições do projeto para as escolas da região.

Problemas x Possibilidades: Quais as dificuldades e vantagens de se utilizar "*tablets*" como ferramentas de ensino da Matemática?

As transcrições das discussões ou comentários de alunos e professor feitas neste artigo manterão a sigilosidade das identidades dos participantes e a linguagem popular estabelecida nos diálogos. Cada uma das cinco escolas e dos 16 alunos envolvidos no projeto foi identificada, no texto, através de um número, evitando, assim, expô-los.

Para alguns alunos, evidenciou-se a hipótese de que o aplicativo do GeoGebra para dispositivos móveis ofereceria as mesmas possibilidades do *software* GeoGebra utilizado em computadores. Isso pode ser observado em um dos excertos selecionados da fala do Aluno 13:

> Quanto à funcionalidade, eu acho que não […] acho que ele te dá todas as condições da mesma forma que o computador.

É importante esclarecer que nem todas as funções do GeoGebra para computadores se encontram disponíveis no aplicativo para dispositivos móveis (mudança da unidade dos eixos e opção "Habilitar Rastro") e há ferramentas que não possuem a mesma função (ferramenta "Distância, Comprimento ou Perímetro" que, no *tablet,* não fornecem o perímetro da figura quando se seleciona a ferramenta a mesma e se toca no interior da figura) ou capacidade (o trabalho com o GeoGebra no *tablet* está limitado a apenas duas casas decimais, enquanto em um computador é possível usar de 0 a 15 casas decimais ou 3, 5, 10 ou 15 algarismos significativos no GeoGebra). Durante as aulas, inclusive, foi percebido que não há uma maneira de se ter acesso às propriedades de um "Controle Deslizante" criado.

O uso do GeoGebra facilitou a construção de figuras e a variação de parâmetros de funções, o que possibilitou a realização de atividades que seriam cansativas ou impossíveis em aulas tradicionais, ou seja, a disponibilidade de uma nova mídia influenciou no desenvolvimento do conhecimento, como pensado por Borba e Penteado (2007), que afirmam sempre haver uma mídia envolvida na produção de conhecimento. Sobre a predominância de uma visão algébrica sobre uma visão geométrica das funções, por exemplo, eles apontam que "Tal destaque muitas vezes está ligado à própria mídia utilizada. Sabemos que é difícil a geração de diversos gráficos num ambiente em que predomina o uso de lápis e papel e, então, faz sentido que não se dê muita ênfase a esse tipo de representação" (Borba & Penteado, 2007, p. 31-32). Este trecho de uma fala do professor exemplifica isso:

> *Então aqui é... bem bacana assim, é uma função, é... função modular, talvez assim, seja difícil fazer o gráfico dela na mão, não é? Eu lembro que os alunos tinham dificuldade porque geralmente a gente fazia aquele esquema de tabelinha e acabava às vezes errando.*

Da mesma forma, o diálogo transcrito abaixo lembra as facilidades de construção de figuras e de realização de testes:

> Aluno 14: Ah! eu acho que é bem mais fácil que você mandar o menino levar aqueles materiais para desenhar no papel, não é?
>
> Aluno 2: E o legal é que pode medir, concordam? Eles percebem o valor, não é?
>
> Aluno 6: Parece que para comparar...
>
> Aluno 14: Eles percebem valores, exatamente.
>
> Professor: É, justamente.
>
> Aluno 2: Que é o dobro, ele...
>
> Aluno 14: É.
>
> Professor: Tem essa possibilidade, você inserir valores, aí comparar valores também.[...]
>
> Aluno 2: Convence muito mais o aluno.
>
> Professor: Sim, justamente.

O conhecimento obtido por meio do procedimento explicitado acima enquadra-se na definição de conhecimento por simulação, dada por Lévy (1993), que possibilitaria, ao aluno, praticar uma "Matemática empírica", mais próxima da maneira natural de raciocinar do homem, antes de formalizar os conhecimentos adquiridos em uma "Matemática lógica".

Pôde-se constatar que dois alunos, Aluno 7 e Aluno 16, apresentaram maiores dificuldades no uso do *tablet,* devido ao *touch screen*. Sobre o assunto, o Aluno 16 disse frases como:

> Meu dedo é muito grande, as minhas mão são muito grandes.
>
> Eu não estou acostumado com esse negócio de touch não! [risos]. Eu sou da época da máquina de escrever [risos].

Tablets com telas maiores (10 polegadas) do que os adquiridos e utilizados na pesquisa (7 polegadas), provavelmente, facilitariam o manuseio e, talvez, em turmas de alunos do Ensino Fundamental, as dificuldades de uso sejam reduzidas já que os dedos das crianças são menores.

Uma das hipóteses levantadas pelos alunos para justificar as dificuldades de manuseio do equipamento foi não estarem habituados a usarem um *tablet*. O Aluno 13 chegou a fazer uma analogia com o uso de um computador, dizendo:

É que nem quando você pega um mouse pela primeira vez. A pessoa quando pega um mouse pela primeira vez também fica ali… [gestos].

A função do *mouse* para o computador é igual à do *touch screen* para o *tablet*. Ambos permitem que o indivíduo comunique ao sistema o que deseja e, se não há segurança sobre como transmitir as informações necessárias, problemas surgirão. A evolução dos alunos ao longo das aulas foi observada e uma melhora significativa foi notada. Ou seja, o uso constante de um *tablet* talvez leve à melhoria da coordenação motora e/ou da precisão dos movimentos realizados pela mão de uma pessoa, o que pode ser benéfico para crianças e/ou pessoas que apresentem esse tipo de dificuldade ou até mesmo possuam alguma deficiência relacionada a isso.

Por outro lado, alguns alunos não tiveram problemas com o uso do *touch screen*, chegando a ter preferência por tal tecnologia. Para justificar esse fato, pode-se citar a atual valorização dada pela sociedade aos *tablets*, lembrando que se trata de uma tecnologia recente e em alta no mercado de vendas, como pode ser identificado na opinião do Aluno 9:

> Eu acho que é até, até mais, é melhor visto assim oh, chegar num lugar e mexer com o tablet.

E, da mesma forma, no seguinte trecho da transcrição do áudio das aulas:

> Aluno 8: E o negócio é o seguinte, a tecnologia hoje, no Brasil, a sociedade é o seguinte, eu até tava vendo um post no [nome de uma rede social], é o brasileiro com uma televisão desse tamanho e a casa caindo aos pedaços. Então, é isso, deixa de ter alguma coisa, de comer alguma coisa, de fazer alguma coisa pra ter as coisas (tecnológicas)...
>
> Aluno 10: De tecnologia.
>
> Aluno 8: ... de tecnologia.
>
> Aluno 1: Verdade.
>
> Aluno 16: Mas isso é fato. […] as casas é, não tem infraestrutura nenhuma, mas tem...
>
> Aluno 8: Tudo.

Aluno 16: ... cada um tem um computador, um tablet e os celulares e televisões e é isso mesmo.

Outra vantagem de se utilizar *tablets* no lugar de computadores durante as aulas seria o fato de não ter que se locomover com os estudantes até o laboratório de informática. Esta hipótese foi apontada e analisada criticamente pelos alunos e pelo profesor:

Aluno 12: E bom que é mais acessível, você não precisa deslocar os alunos pra o laboratório de informática. Já dentro da sala eles vão trabalhar com o tablet.

Aluno 16: E liga mais rápido, não é?

Professor: É, isso aí é uma observação bacana, porque se você tivesse um tablet para cada aluno, você não precisava dessa, desse deslocamento e de ter problema, por exemplo, de ter laboratório trancado, eles tem medo também, de repente, de estragar alguma coisa. Se o tablet for de uso pessoal, não é? Se... tem alguns projetos do governo que... [...] que doaram tablets para escolas inteiras praticamente. É, isso lá em São Paulo, Rio de Janeiro, não sei aqui em Minas Gerais, mas eu acho que talvez seria uma solução também para esse problema de infraestrutura, concordam? [...] Acho que realmente se a gente tivesse um para cada, de uso pessoal, seria mais fácil a gente fazer atividades assim, não é?

Aluno 8: Até para... um para cada dois, trabalhar em dupla dentro de sala de aula é... normal.

Aluno 9: Ah, mas eu acho que não.

Aluno 13: Nesse caso...

Aluno 9: Nesse caso não dá não.

Aluno 13: Acho que trabalhar em dupla é mais difícil, porque a tela dele é menorzinha, não é? Do que o computador, o monitor é maior, trabalhar de dois ali...

Professor: O ideal, o ideal seria um para cada, se não tiver que seja um para dois, não é?

Aluno 8: Vai revezando na atividade...

Aluno 9: Só o fato de não ter que levar o aluno para sala, isso não quer dizer que a aula seja mais rápido não, não é? Porque, talvez ele não tem costume com o tablet. Pode ser mais difícil também, pode demorar um pouco mais… do que no computador.

Aluno 12: Mas isso é só no início, por exemplo, se esse tablet fosse de uso pessoal desde... a sexta série sei lá! A medida que fosse passando o ano, eles já iriam estar acostumados com isso aqui, seria normal, não seria uma coisa que iria acontecer uma vez.

Outro ponto não citado pelos alunos é que, caso os alunos possuam seus próprios *tablets* ou a escola possua um número elevado dos mesmos, vários professores podem trabalhar com o equipamento, simultáneamente, em turmas distintas. No caso dos laboratórios de informática, o número de turmas realizando atividades é limitado pelo número de laboratórios.

Uma discussão sobre a influência que o trabalho com *tablets* em sala de aula pode ter para a vida de um aluno pode ser lida abaixo:

Pesquisadora: [...] tem a questão dos computadores, acho que todo mundo aqui fez Informática junto, e uma das ideias que o [nome do Professor] trouxe era de que tem aluno que talvez só tem contato com o computador na escola, então isso seria uma chance, uma oportunidade única praquele aluno e é importante pra vida dele saber mexer no computador. Alguém consegue ver algo do tipo no uso de tablets? Se é importante ou não, se isso traz alguma vantagem pra vida do aluno ele saber utilizar algo do tipo?

> Aluno 16: Acho que qualquer tipo de tecnologia ele tem que aprender. Se por exemplo ele vai trabalhar numa lotérica...
>
> Aluno 14: O mercado exige isso.
>
> Aluno 16: ... vai trabalhar numa lotérica, operador da lotérica. O, a, a tela do "tréim" lá é touch screen. É touch screen que fala? Ele bate lá, então... para trabalhar numa lotérica. Entendeu? Que que eu tô falando? Então qualquer tipo de tecnologia que você por na mão dessa pessoa para dar um empurrão nela, eu acho que é válido.
>
> Aluno 10: É a tendência agora...
>
> Aluno 16: É isso.
>
> Aluno 10: É daqui pra frente. Então, assim, é daqui pra frente, é tablet. Eu acho que vai cair em desuso o computador daqui algum tempo.

Há um entendimento dos envolvidos de que o conhecimento sobre o uso de *tablets* pode contribuir para a atuação profissional dos alunos. Além disso, poderia favorecer o desenvolvimento da competência democrática nos estudantes que, para Skovsmose (2001), é a competência necessária a um indivíduo para que ele seja capaz de "julgar se os resultados e as consequências de governar são aceitáveis" (p. 54) e "uma condição para a participação e a re-ação" (p. 73) que, ainda de acordo com as ideias de Skovsmose (2001), estariam, em uma sociedade altamente tecnológica, relacionadas ao conhecimento tecnológico. Ou seja, a competência democrática envolve o conhecimento necessário para que uma pessoa seja capaz de atuar como cidadão. Pensando que essa técnica possa ser adquirida, é desejável que se busque desenvolvê-la no ambiente escolar, formando indivíduos verdadeiramente inseridos na vida em sociedade, a qual, atualmente, é altamente tecnológica. Skovsmose (2001) lista, como uma das declarações do argumento pedagógico de democratização, que

> a educação matemática tem seu "currículo oculto". [...] Presta-se, igualmente, a uma função, ao introduzir a nova força de trabalho em várias rotinas da sociedade tecnológica. A educação, e em particular a educação matemática, implementa uma atitude em relação à tecnologia. Os estudantes aprendem que algumas pessoas são capazes de gerenciar problemas tecnológicos, e que algumas pessoas não são. Consequentemente, os estudantes "incapazes" aprendem a se tornar servis em relação às questões tecnológicas e tornam-se servis em relação àqueles que podem lidar com elas. (Skovsmose, 2001, p. 45-46)

Desta forma, o ensino da Matemática no ambiente escolar pode acabar sendo um momento de caracterização ou até de discriminação de pessoas. Devemos, enquanto educadores, mudar esse contexto que estaria determinando qual a importância ou a função de cada um dos alunos na sociedade. Concordamos com Borba e Penteado (2007, p. 17) que o acesso à informática, na educação, deva ser visto como um direito e também como "parte de um projeto coletivo que prevê a democratização de acessos a tecnologias desenvolvidas por essa mesma sociedade". Sendo assim, é imprescindível que a informática na educação seja justificada de duas formas: "alfabetização tecnológica e direito ao acesso".

Foi relatado, aos alunos, o interesse de se trabalhar com os *tablets* em uma escola pública, em parceria com os bolsistas do PIBID; no entanto, foi iniciada uma discussão, transcrita a seguir, sobre possíveis furtos dos *tablets*, danos aos equipamentos e motivações que o aluno poderiam ter.

Aluno 1: Você não acha meio perigoso levar esses tablets para escola, não?

Professor: É, eu acho que o pessoal do PIBID...

Aluno 11: [risos]. Eu não tenho coragem não.

Aluno 13: Eu acho, oh [nome do Aluno 1], eu acho menos perigoso você trabalhar com o tablet do que com o computador. Questão tipo assim, de... de manter. Porque o computador é um negócio grande, então se ele estragou uma coisinha ali, você nem vê.

Aluno 1: Eu tô falando de levar mesmo.

Aluno 13: É! De levar. De levar não, de...

Aluno 1: De levar embora.

Aluno 13: Não, mas não vai. Porque se ele (professor) entregou o tablet pro menino, ele não vai sair da sala sem recolher o tablet.

Aluno 11: Leva, leva...

Aluno 14: Você n... você não conhece o [nome da Escola 5] não.

Aluno 11: É, você não conhece o [nome da Escola 5].

Aluno 13: Ah, gente! Eu acho...

Aluno 12: Ô gente! Credo!!!

Aluno 13: Eu acho que não é assim não.

Aluno 16: Ô gente, mas eu acho que não é assim também não.

Aluno 1: Não.

Aluno 13: Eu acho que não tem nenhum lugar assim não.

Aluno 1: Não.

Aluno 8: Eu também acho que não, porque a ordem, vai ser recolher dentro da sala de aula.

Aluno 1: Por isso que eu estou falando, […] sinceridade, não vamos falar aqui que... não é só do [nome da Escola 5], em qualquer escola, até menino rico, você não sabe…

Aluno 12: Não, porque ninguém rouba nada no [nome da Escola 5] não.

Aluno 1: Você não sabe... você não sabe se isso aconteceu. [...]

Aluno 13: ... mouse, você pega uma tecla do teclado ali, ninguém vê. Eu acho que o mouse... menos perigoso... é mais rápido.

Aluno 12: Isso, isso, não, isso, isso é igual libro, gente! Você entrega, só sai da sala quando tiver os 35 livros em cima da mesa.

Aluno 16: É "uai", é "uai".

Aluno 12: O computador passa despercebido. É mouse, lá, lá na [nome da Escola 2] é mouse que os meninos carregavam.

Aluno 10: Mouse, foninho...

Aluno 12: [...] na câmera...

Aluno 10: teclado...

Aluno 12: [...] foi atrás dos alunos e cada um teve que trazer um mouse. Cada um, todos os dois que pegaram tiveram que trazer o mouse para trás. Acho que seria muito menos perigoso.

Aluno 13: Pode ser até que nem o [nome do Professor] fez, ele marcou, cada tablet é de uma pessoa.

Aluno 12: Pronto.

Aluno 13: Aí você coloca no tablet isso e entrega pro aluno, oh seu tablet é tal. No final se ele não está aqui, "uai" ele é seu se você... o que que você fez dele eu não sei, eu quero ele!

Professor: A gente chegou a discutir isso já, no PIBID. Essa... medo de... não é? De acontecer algumas [...] intempéries. Então, o que a gente resolveu lá foi que cada tablet é numerado e aí o aluno é... primeiro aluno vai ficar com o Tablet 1, segundo aluno... na ordem de chamada, igual é feito aqui mesmo. Então, aí dá pra você controlar, se saiu aluno da sala e está faltando o Tablet 3, então está com quem?

Aluno 13: Está com o aluno 3.

Aluno 16: Eu acho que... não é assim. Eu sei que existe escolas e escolas, mas não é assim também. Eu acho que a partir do momento que você fala assim olha a ferramenta está aqui, é para gente usar. Então, acho que aí, é a conquista do professor...

Professor: Isso…

Aluno 16: ... com a sala e a segurança que o professor passa para sala. Porque entregou e fala assim, oh gente ninguém vai roubar o "tréim" não, aí o que que o cara vai falar?

Aluno 1: Não, não vai falar isso. Tá chamando de ladrão.

Aluno 16: Não, mas nas entrelinhas eles entendem.

Aluno 12: Não, eu tenho mais medo de estragar do que de roubar, roubar não, não sai daqui enquanto...

Aluno 13: Eu também acho que é mais fácil você estragar ele do que [...].

Professor: É, assim, isso é igual a [nome do Aluno 16] falou também. Tudo tem um problema, não é? Assim, realmente, todos tem razão mas... é... eu acho que também, o que a [nome do Aluno 16] falou é certo também, depende muito do professor. Concordam? É... conscientizar. Falar assim, oh gente, isso aqui é algo de aprendizado, nós vamos usar isso para aprender, aí... é algo diferente e você levar um tablet aí, começar a trabalhar matemática com o tablet, e aí, não, nós vamos voltar, vamos fazer de novo. Então, às vezes, aquilo ali pra eles é uma motivação: "Nunca mexi num tablet na vida, na escola eu mexi".

Aluno 1: Até, você vai estar mostrando confiança pro aluno, não é?

Professor: Imagina a motivação que eles vão ter com isso?

Aluno 16: Um meio dele ir pra escola, não é?

Aluno 1: Ah, lá no, no [nome da Escola 5] com certeza, assim, a maioria vai ter o primeiro contato com o tablet.

Aluno 11: É. Eles não tem contato nem com computador, vai ter com tablet?

Aluno 1: É bem difícil.

Aluno 14: A maioria, gente, é muito carente. Não tem condição de saber isso não.

Aluno 11: É muito difícil.

No livro "Desafios da Reflexão em Educação Matemática Crítica" (2008), Skovsmose utiliza as noções de "Quarto Mundo" e de "sociedade em rede":

> [...] usaremos as noções de *Quarto Mundo* e *sociedade em rede*, termos que foram cunhados por Manuel Castells (1996, 1997, 1998).
>
> Quarto Mundo e sociedade em rede estão fortemente relacionados, visto que o Quarto Mundo representa a parcela da sociedade que está fora da sociedade em rede. Castells enfatiza que o Quarto Mundo se espalha por várias partes do planeta. Seus limites geográficos não são tão bem definidos quanto costumam ser os do Terceiro Mundo. O Quarto Mundo é feito de regiões que representam os excluídos da sociedade em rede. Parcelas consideráveis de grandes metrópoles do Ocidente – Nova York, Londres e Paris, por exemplo – também fazem parte do Quarto Mundo. Nesse mundo estão inclusas as favelas, bem como as regiões cujas tradições e trocas comerciais não se encaixam no mundo globalizado. (Skovsmose, 2008, p. 41-42).

Ele define o termo "escola de fronteira" da seguinte maneira: "Por escolas de fronteira entendemos aqueles estabelecimentos de ensino no quais tanto a sociedade em rede quanto o Quarto Mundo estão presentes, face a face" (Skovsmose, 2008, p. 43). E afirma, ainda, que "Uma escola de fronteira traz oportunidades de inclusão social significativas para os alunos" (Skovsmose, 2008, p. 47). A escola citada pelos alunos poderia ser classificada como uma escola de fronteira. Lembrando que Skovsmose (2001, p. 46) afirmou, ao reforçar a necessidade de diálogo em sala de aula, que: "Se queremos desenvolver uma atitude democrática pela educação matemática, os rituais dessa educação não podem conter aspectos fundamentalmente não-democráticos". Pensando no uso dos *tablets*, negar o acesso de alunos aos mesmos, devido a preconceitos e receios, no lugar de aproveitar a oportunidade para realizar um trabalho de conscientização sobre a importância da conservação do equipamento, remete ao autoritarismo. Um trabalho como esse em uma escola de fronteira tem enorme potencial para gerar um impacto social de grande proporção e é altamente benéfico.

Finalmente, sobre o comportamento dos alunos durante as aulas ao receberem os *tablets,* os discentes mostraram vontade de utilizá-los a fim de entretenimento. Situações do gênero também podem ocorrer no caso de uso de computadores. Tal situação foi registrada somente nesse instante e em um momento no qual alunos de um grupo estavam se divertindo com fotografias capturadas por um deles através da câmera de um *tablet* em um momento de ócio. A falta de aplicativos de entretenimento instalados nos equipamentos utilizados e a falta de conhecimento de alguns alunos sobre o uso dos mesmos podem ter colaborado para tal. Por outro lado, também é possível imaginar que os alunos possuíam um nível de maturidade para distinguir o que se deve ou não fazer durante uma aula. O fato de cursarem Licenciatura em Matemática pode ter colaborado para o interesse dos mesmos, afinal, estavam realizando atividades que poderiam, futuramente, aplicar em sala de aula e tendo a oportunidade de contato com um aplicativo e um equipamento que possivelmente farão fazer parte de suas vidas profissionais.

Conclusões

A proposta da "Sala de Aula do Futuro" foi implementada, sendo possível perceber certa dificuldade dos alunos em se adaptarem ao uso do equipamento, apesar do interesse dos mesmos em descobrir como utilizar as ferramentas do GeoGebra nessa nova plataforma. Conjectura-se que o fato de já conhecerem o *software* no computador possa contribuir para que os estudantes reconheçam mais facilmente essas ferramentas e saibam como manipulá-las ao trabalharem com *tablets*. Além disso, refletiu-se sobre a importância de um trabalho, usando esse tipo de

tecnologia para a melhoria do interesse dos alunos pelas aulas e sua preparação para a vida profissional e como cidadão.

Além de possíveis falhas detectadas, devemos destacar, também, as conjecturas ou hipóteses constatadas e descritas no decorrer da pesquisa, sobre as vantagens de se utilizar o *tablet* como ferramenta de ensino e aprendizagem, por apresentar possibilidades distintas das oferecidas pelo uso do computador no laboratório de informática e pela sua portabilidade, sendo favorável para se trabalhar na própria sala de aula. Apesar dos riscos levantados nas discussões, devemos lembrar e assumir que a escola é um local para educar, e isso também envolve a educação moral, recordando Skovsmose e Penteado (2008) ao apontarem que "Riscos trazem possibilidades".

Referências Bibliográficas

Borba, M. C., & Penteado, M. G. (2007). *Informática e educação matemática.* Belo Horizonte: Autêntica.

Lévy, P. (1993). *As tecnologias da inteligência: O futuro do pensamento na era da informática* (C. I. Costa, Trad.). (34a ed.). Rio de Janeiro: Editora 34.

Skovsmose, O. Educação matemática e democracia. (2001). In O. Skovsmose (2001), *Educação matemática crítica: A questão da democracia* (A. Lins, Trad.) (pp. 37-63). Campinas: Papirus.

Skovsmose, O. (2008). *Desafios da reflexão em educação matemática crítica* (O. A. Figueiredo (caps. 2, 3, 4, 5), & J. C. Barbosa (cap. 1),(Trads). Campinas: Papirus.

Skovsmose, O; Penteado, M. G. (2008). *Desafios da Reflexão: Em Educação Matemática Crítica.* (pp. 41-50). Campinas: Papirus.

Área de figuras planas com o Apprenti Géomètre: análise de uma atividade

Anderson Douglas Pereira **Rodrigues** da Silva
Universidade Federal de Pernambuco
Brasil
anderdouglasprs@gmail.com

Resumo

O presente artigo discute a análise teórica de uma atividade aplicada com um grupo de estudo composto por professores de matemática e pesquisadores da Educação Matemática, em uma oficina, sobre comparação de área de figuras planas. O objetivo desta oficina foi apresentar o Apprenti Géomètre 2, um software de Geometria Dinâmica desenvolvido pelo CREM (Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques), que possibilita a composição e decomposição de figuras planas, elementos importantes para a construção do conceito de área enquanto grandeza geométrica. Neste artigo abordaremos a análise teórica da questão de número três de uma sequência de atividades que continham onze questões por apresentar segundo os participantes da oficina um grau de dificuldade maior de resolver em uma ambiente papel lápis, sendo mais fácil a resolução por meio do Apprenti Géomètre 2.

Palavras-chave: Análise Teórica, Geometria Dinâmica, Apprenti Géomètre 2.

Introdução

Nos últimos anos, muitas pesquisas a respeito do ensino e aprendizagem da matemática têm sido desenvolvidas utilizando softwares de Geometria Dinâmica como ferramenta na construção do conhecimento de área de figuras planas como Gobbi (2012), Refatti e Bisognin (2013), entre outros.

As grandezas geométricas têm sido estudadas por diversos grupos de pesquisa. Douady (1989) no Jogo de Quadros modeliza o conhecimento de área enquanto grandeza geométrica tomando três quadros: O Quadro dos Objetos, o Quadro dos Números e o Quadro das Grandezas. Relatam que as figuras pertencem ao domínio geométrico; a área é elemento do domínio das grandezas; e as medidas de área são números reais positivos, elementos do domínio numérico. Esse modelo pode ser representado pelo seguinte esquema:

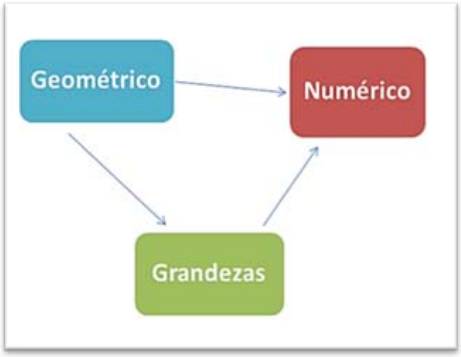


Figura 1. Jogo dos Quadros Fonte: Adaptado de Lima e Bellemain (2002).

A partir desse modelo, considerar área enquanto grandeza trata-se de distinguir área e figura (pois figuras diferentes podem possuir a mesma área) e área e número (pois se medirmos a área de uma figura com diferentes unidades, obteremos números diferentes para expressar a medida de área que obviamente não se altera).

Observamos nos estudos de Douady e Perrin-Glorian (1989, p. 387) que "O conceito de área enquanto grandeza permite aos alunos estabelecerem relações necessárias entre os domínios geométricos e numéricos", abordam também que algumas dificuldades estão ligadas ao tratamento feito pelos alunos na concepção-forma ligada ao quadro geométrico, ou na concepção número ligada ao campo numérico, ou nas duas simultaneamente, mas sem estabelecer relações entre as mesmas.

O trabalho com composição e decomposição permite ao aluno elaborar os primeiros significados do termo área como o "tanto" de superfície ocupado pelas figuras. Carvalho e Franchi (1992, p. 24).

É nesse sentido, que buscamos investigar, em uma pesquisa de mestrado, a construção do conceito de área, como grandeza autônoma, por estudantes do 6º ano do ensino fundamental quando interagem com atividades de comparação de área de figuras planas tendo o Apprenti Géomètre 2 (CREM, 2014), como principal instrumento de investigação por apresentar em seus menus ferramentas de composição, decomposição, translação, rotação e reflexão de figuras, elementos importantes para a construção do conceito de área.

Como um estudo preliminar da dissertação, fizemos um levantamento das atividades que explorassem o conceito de área de figuras planas com o uso desse software. Uma oficina foi montada com 11 atividades, para vivência e discussão em um grupo de estudo. Várias das atividades propostas na oficina foram desenvolvidas pelo Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques - CREM (2006-2007) e adaptadas pelo pesquisador. Uma delas, em especial, foi aqui analisada.

A atividade foi escolhida por apresentar um nível maior de dificuldade e mobilizar os principais menus do AG 2, tomou-se também por base, a opinião dos participantes da oficina, que consideraram à atividade em que o uso do software seria relevante para a resolução do que estava sendo proposto.

A referida atividade foi respondida por 5 duplas e um trio de participantes, faremos uma comparação do que havíamos previsto com os resultados de cada participante, contrastando duas etapas de Engenharia Didática, a análise a priori (Teórica) com uma análise a posteriori.

Embasamento Teórico

A Engenharia Didática (Artigue, 1996) apresenta-se como uma teoria metodológica destinada aos estudos de fenómenos da sala de aula, especialmente o estudo sequências didáticas ou situações didáticas. Neste artigo, utilizaremos etapas da Engenharia Didática para uma análise de uma atividade.

Entendemos aqui Análise Teórica ou Análise a priori segunda fase da Engenharia Didática, como o levantamento das variáveis de comando, que supõe serem variáveis pertinentes para o problema estudado (Artigue, 1996, p.202), ou seja, as variáveis de controle estabelecidas para a construção da sequência didática de forma que possibilite ao aluno desenvolver as atividades de maneira mais satisfatória para obtenção de melhores resultados.

Gobbi (2012) utilizou a análise a priori em sua pesquisa com o objetivo de reduzir as dificuldades encontradas por seus alunos da 6ª Série/7º Ano, quanto ao conteúdo de área e perímetro de figuras planas em uma sequência de atividades, com o auxílio do software geogebra, de cada atividade. Segundo ela, essa fase da Engenharia Didática possibilita: (a) descrever as escolhas feitas a partir da análise preliminar, (b) analisar o desafio que o aluno terá diante da ação da escolha, da decisão, do controle e da validação durante a experimentação da sequência a ser desenvolvida e (c) prever comportamentos possíveis dos alunos. Para isto ela fez um levantamento de como os livros didáticos apresentam os conteúdos área e perímetro e em seguida aplicar um diagnóstico com alunos, a partir desse contexto, mapear toda a sequência e desenvolver a mesma de forma mais sistematizada.

Apesar de nosso foco ser na aprendizagem do estudante e não na atividade didática em si, sabemos que o desenvolvimento do conhecimento do estudante, não depende unicamente do software e sim dos conhecimentos, que são mobilizados e contrastados com os seus conhecimentos prévios, em uma situação de ensino. Essa situação norteia o desenvolvimento do estudante e é nesse sentido, que mesmo com o foco na aprendizagem do estudante optamos por trazer à tona a técnica de análise a priori da Engenharia Didática, com o objetivo de compreender melhor e poder refinar a atividade, contrastando os resultados obtidos quando a atividade é experienciada.

Nos trabalhos desenvolvidos pelo CREM, e organizados no volume 3 (CREM, 2007), encontramos uma análise a priori de diversas questões voltadas a construção de área e perímetros de figuras planas por meio do Apprenti Géomètre 2, esse experimento foi realizado com alunos de 10 a 12 anos do Colégio Saint-Marie, Bélgica.

Nesses trabalhos desenvolvidos, os resultados quanto à construção do conhecimento do aluno também foram discutidos. Eles desenvolveram as atividades separando dois grupos um experimental, que utilizou o software, e um grupo controle com as mesmas atividades em um ambiente papel e lápis, relatando que houve um impacto no grupo que utilizou o software para responder as atividades propostas e que as crianças haviam desenvolvido certos reflexos que não possuíam antes em particular o de corte e sobreposição. No entanto, eles enfatizam que o uso de instrumentos e técnicas tradicionais não devem ser extintos, pois, a passagem da forma tradicional para o trabalho com o software pode ser mais bem aproveitada uma vez que os alunos compreenderam como se deu o processo em um ambiente papel e lápis (CREM, 2005-2007).

Atividade e Análise Teórica

Apresentamos aqui uma Análise Teórica da terceira questão da sequência de atividades aplicada com os integrantes do grupo de estudo composto por professores de matemática e pesquisadores da Educação Matemática em uma oficina com o uso do Apprenti Géomètre 2. Essa questão foi desenvolvida pelo CREM e adaptada pelo pesquisador.

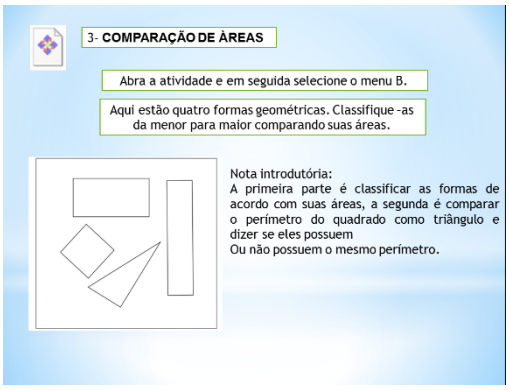


Figura 2. Comparação de áreas. Fonte: elaborada pelo autor.

Essa atividade apresentava-se da seguinte maneira na tela do computador, após o participante escolher a opção B do menu e inserir seu nome. Na figura 2, inserimos os rótulos em cada figura, a fim de facilitar a discussão nesse artigo. Isto não estava presente no arquivo do software durante a atividade.

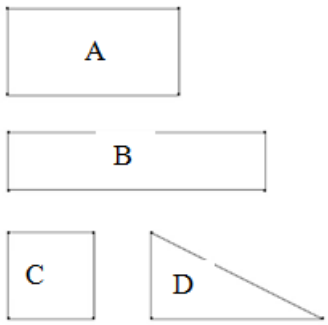


Figura 3. Apresentação na interface do AG 2. Fonte- Atividade 3 do Impact du logiciel Apprenti Géomètre sur certains apprentissages (Tome3).

Procedimentos Metodológicos da Oficina

A oficina foi desenvolvida em quatro momentos, com a participação de treze integrantes, que tiveram duas horas para responderam as atividades propostas.

Primeiro momento

Entregamos aos 13 participantes a sequência didática adaptada dos estudos do CREM (2007) contendo onze atividades de comparação de área.

Encontrava-se também na referida sequência algumas perguntas para refletir e responder sobre área e perímetro de figuras planas.

Foi entregue também a cada participante um DVD contendo as atividades da sequência pré-definida, assim como, o instalador do Apprenti Géomètre 2 na versão 2.3.9 e três softwares para gravar a interface do computador no momento da realização das atividades.

Desses três escolhemos o a tube catcher por apresentar maior facilidade de instalação e por gravar ao mesmo tempo o áudio e a interface do computador e não travar durante a realização das atividades. Esse software foi testado pelo pesquisador anteriormente em diversas atividades.

Vale salientar que todas as instruções haviam sido dadas a cada participante anteriormente a oficina via e-mail, porém, muitos não tinham conseguido instalar o AG 2 nem o a tube catcher, e tivemos que instalar em cada um computador. Como o Apprenti Géomètre 2 só apresenta duas opções de idiomas, o inglês e o francês, foi entregue um menu do software traduzido para português, para facilitar a compreensão de cada ferramenta presente no software.

Segundo momento

Foi apresentados aos participantes da oficina o Apprenti Géomètre 2, seus principais menus e o que caracteriza como um software de Geometria Dinâmica, sua origem e os trabalhos desenvolvidos pelo CREM.

Expusemos também a sequência de atividades e orientamos como deveria ser desenvolvida, respeitando cada procedimento e cada instrução apresentadas no enunciado de cada atividade.

Terceiro momento

Sugerimos que os integrantes se organizassem em duplas, como tínhamos 13 ficamos com cinco duplas e um trio, organizamos dessa forma para que houvesse uma cooperação entre os mesmos na resolução das atividades, pois alguns apresentavam dificuldades com o uso do computador.

Quarto momento

Recolhemos as atividades desenvolvidas de cada participante e os vídeos gravados por meio do a tube catcher, numa pen driver para serem analisados posteriormente pelo pesquisador, após esse momento pedimos para que todos discutissem a contribuição do AG 2 para a resolução das atividades propostas.

Análise conceitual

Apresentamos aqui uma análise da atividade três desenvolvida pelo CREM (2007) e que trás algumas análises teóricas que serão ampliadas e discutidas aqui.

Um dos primeiros conhecimentos que os estudantes podem utilizar para comparar duas grandezas geométricas sem medir é a sobreposição, em particular, no caso da área. O Apprenti Géomètre valoriza a geometria das transformações e inclui um comando para cada uma das transformações isométricas que permitem o movimento das figuras, mantendo-as congruentes, a fim de sobrepô-las umas às outras: *Glisser* (translação), *Tourner* (rotação) e *Retourner* (reflexão).

No caso da figura da atividade três, escolhida por apresentar um grau de dificuldade maior em ser resolvida em um ambiente papel lápis, segundo os participantes da oficina, a sobreposição por translação resolve facilmente a comparação do retângulo A com o quadrado C. O quadrado se encaixa no interior do retângulo A. O mesmo ocorre ao sobrepor por translação o retângulo A e o triângulo D. De fato, ao sobrepor o estudante verifica que a hipotenusa do triângulo D é a Diagonal do retângulo A. Esta pode ser uma maneira do estudante chegar a decidir que as figuras C e D têm a mesma área. A transitividade do fato da área do quadrado ser metada da área do retângulo A e a área do triângulo ser metade da área do retângulo A, pode favorecer que o estudante chegue ao resultado por dedução.

Outra maneira que pode ser usada para comparar as área das figuras C e D é: copiar, colar e duplicar para obter uma cópia das figuras e então tentar sobrepor às duas figuras por translação. Ao fazer isto, o estudante pode observar que a hipotenusa do triângulo se cruzará com um dos lados do quadrado ao meio. Ele poderá então utilizar a divisão da hipotenusa em duas partes iguais para poder decompor o triângulo em duas figuras. No software, é necessário criar os pontos nas figuras para então decompô-las ou utilizar pontos já demarcados.

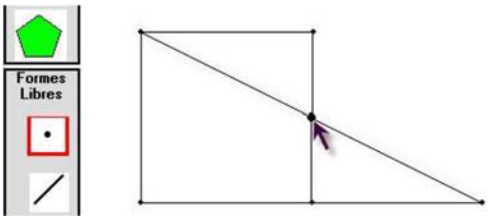


Figura 4. Criação de pontos. Fonte: (CREM, 2007).

Assim, em alguns casos é necessária a criação de pontos de corte em diferentes vértices ou no centro da figura. Para fazer isso, duas abordagens são possíveis:

Criar pontos de divisão na funcionalidade diviser;

Os pontos do formulário de formas livres e usá-lo como um ponto de corte.

Observa-se aqui uma distinção conceitual da geometria do Aprenti Géomètre com a Geometria Plana. Um segmento para o software não é formado de pontos. Os pontos são entidades distintas que podem ser colocadas como pertencentes aos segmentos. Esta mesma diferença conceitual aparece em alguns softwares de Geometria Dinâmica, em que se tem que criar um ponto em um segmento para ele passar a existir como ente pertencente ao segmento. Trazemos nas figuras a seguir, alguns casos encontrados na pesquisa do CREM (2007c)

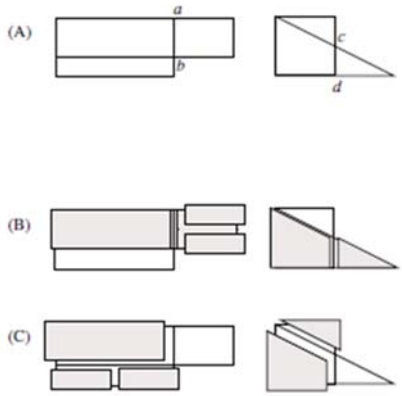


Figura 5. Procedimento de resolução da questão. Fonte: (CREM, 2007c)

Outra possibilidade de comparação entre o quadrado e o triângulo é a decomposição e recomposição das duas partes obtidas com o corte do triângulo, compondo o quadrado (a). Nessa estratégia, além da divisão, decomposição, para recompor o estudante utiliza as isometrias de rotação e de translação. Ele pode também fazer uma dupla reflexão do triângulo menor. (b) Os estudantes podem ainda escolher pela decomposição quadrado em vez da do triângulo.

A sobreposição deixa claras as partes das duas figuras que são comuns e as partes que não os são e que precisarão de outras estratégias para ser comparadas.

A comparação da área dos dois retângulos A e B envolvem uma estratégia ainda mais sofisticada, dado que as partes que sobram não são congruentes entre si. Envolvem novas decomposições para então serem compostas em uma figura congruente à outra.

Para a mobilização da rotação em ângulos diferentes de 90º, 180º, 270º graus, seria necessário que as figuras aparecessem no arquivo na mesma posição que aparecem no papel.

Em relação ao perímetro, os estudantes poderiam duplicar as figuras e sobrepor os lados de uma em relação à outra como mostra a figura 6 que relaciona o quadrado com o triângulo.

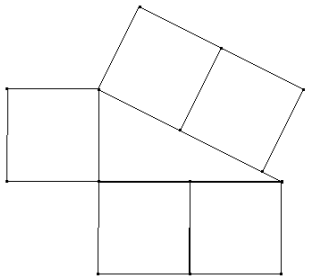


Figura 6. Comparando o perímetro. Fonte: elaborada pelo autor.

Concluiriam nesse caso que eles não teriam o mesmo perímetro, apesar de ter a mesma área. No entanto, os estudantes poderiam concluir, erroneamente, que os perímetros eram iguais, pois, as áreas também os eram.

Análise dos Resultados com as duplas

Analisamos aqui alguns procedimentos utilizados pelas duplas para solucionar a atividade. Para solucionar a questão as duplas A e B e D iniciaram sobrepondo o triângulo retângulo sobre o quadrado, utilizando a barra de ferramentas *Glisser* – translação do triângulo.

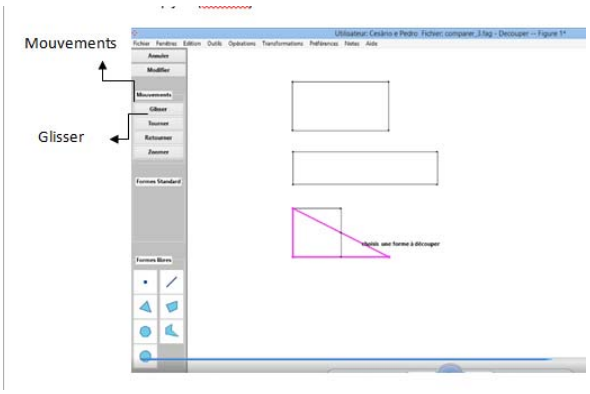


Figura 7. Procedimento utilizado pelas duplas A, B e D.

Em seguida, dividiram (*divisier)* a hipotenusa do triângulo para o decompor com a ferramente (*découper*) para poder separará-las e torná-las em duas figuras distintas.

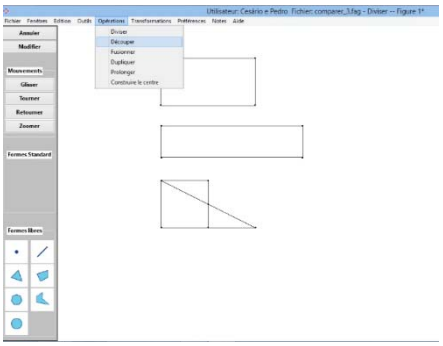


Figura 8. Processo de comparação das duplas A, B e D.

Nesse caso, foi necessário a criação de pontos de corte com a ferramenta diviser.

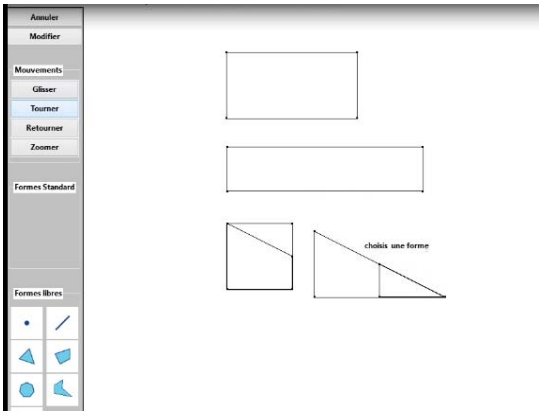


Figura 9: Processo de decomposição e comparação das figuras.

Como resultado os alunos obtiveram a seguinte concepção: Ambas formas têm a mesma área.

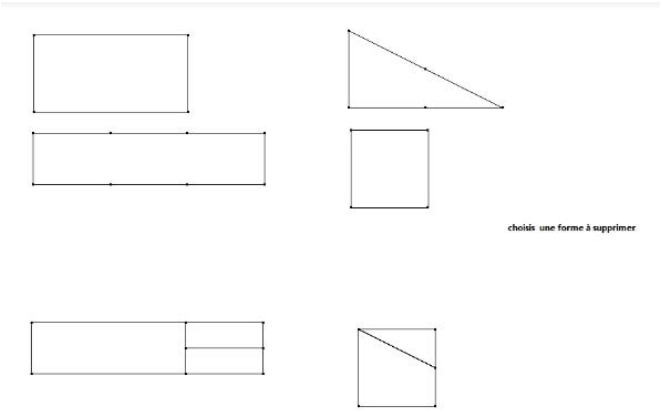


Figura 10. Resultado final das duplas A, B e D.

A dupla C utilizou a ferramente *Glisser*. Em seguida clicaram nas imagens e escolheram a opção (colourer found-Colorir fundo) para colori-las, com a intenção de realçar as figuras com que estavam trabalhando, para depois tentar sobrepô-las várias vezes e posicioná-las de várias maneiras, mas não obtiveram êxito. Concepção final da dupla: Indefinida, não souberam identificar e compreender o que foi pedido na questão, a dupla não teve êxito.

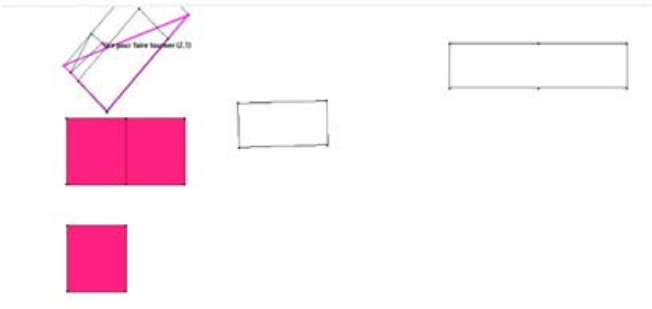


Figura 11. Resolução da dupla C.

O trio apresentou alguns procedimentos diferentes para comparar às áreas do triângulo e do quadrado, sobrepuseram o triângulo ao quadrado, escolheram a opção menu forma livres e contornaram um dos triângulos retângulos formado a partir da sobreposição das duas figuras anteriores.

Em seguida utilizaram o menu *duplique*, depois utilizaram os menus *Glisser*, *tourner* e *retourner* para completar o processo de comparação sobrepondo a parte que estaba faltando. Identificando que o quadrado tem a mesma área que o triângulo.

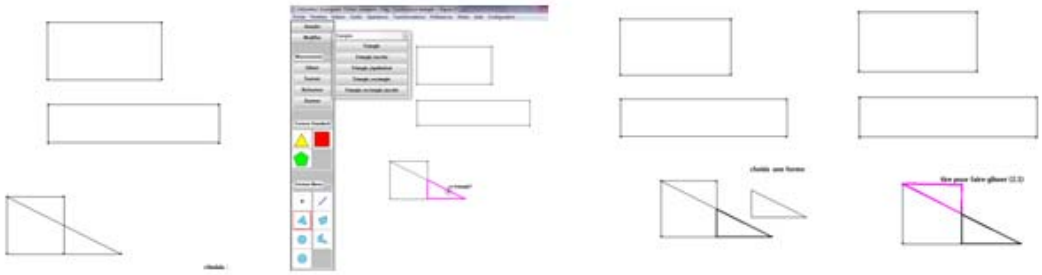


Figura 12. Processo de comparação das área do triângulo com o quadrado.

A maioria das duplas utilizaram os procedimentos que havíamos previsto e que estavam presentes nos estudos desenvolvidos pelo CREM (2007).

Considerações Finais

partir da ánalise dos procedimentos de cada dupla e do trio, chegamos a conclusão que a maioria das formas utilizadas foram previstas nas análises teóricas realizadas pelo CREM (2007) e aprimoradas neste testo, com exceção dos primeiros procedimentos do trio e da dupla C. Como havíamos previsto a maioria dos participantes conseguiram resolver a questão proposta com o uso do software, relatando após a entrega da sequência de atividades respondida por meio do Apprenti Géomètre 2 contribuiu significativamente com a resolução das atividades, principalmente segundo eles por apresentar em seu menu ferramentas de composição e decomposição, entre outras, que outros softwares que implementam a Geometria Dinâmica não apresentam.

Referências Bibliográficas

Artigue, M. (1996). *Engenharia Didática* (Trad. L. Maria). Lisboa: Instituto Piaget.

Bellemain, P. M. C, & Lima, P.F. (2002). *Um estudo da noção de grandeza e implicações no Ensino Fundamental*. Natal: SBH Mata.

Crem. (2003). *Apprenti Géomètre. Grandeurs, fractions et mesures*. Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, Bélgica.

Crem. (2004). *Rapport de recherche 2003-2004. Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques*, Nivelles, Bélgica.

Crem. (2005). *Apprenti Géomètre. Un outil de différenciation des apprentissages en mathématique.* Centre de Recherche sur l'Enseignement des Mathématiques, Nivelles, Bélgica.

Crem. (2007a). *Apprenti Géomètre. Impact du logicel Apprenti Géomètre sur certains apprentissages* (Vol. 1). Nivelles, Bélgica.

Douady, R., & Perrin-Glorian, M. J. (1989). Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane. Educational Studies in Mathematics, *20*(4), 387-424.

Franchi, Anna et al. (1992). *Geometria no 1º Grau: da composição e da decomposição de figuras as fórmulas de área* (Vol. 7). São Paulo: CLR Balieiro.

Gobbi, J.A. (2012). *Do livro didático ao software geogebra: a engenharia didática no estudo de figuras planas na 6ª série/7º ano do ensino fundamental* (Dissertação de mestrado). Centro Universitário Franciscano (UNIFRA), Santa Maria, RS, Brasil.

Lima, P.; Bellemain, P. (2010). Grandezas e Medidas. (2010). João Bosco Pitombeira de Carvalho. Coleção Explorando o Ensino – Matemática. Brasília: DF.

Nöel, G., & Pliez, G. (Fevereiro, 2014). *Apprenti Géomètre*. Copyright CREM.

Refatti, L., & Bisognin, E. (2013). Estudo de transformações geométricas com o auxílio do Cabri 3D. *Anais do Encontro Nacional de Educação Matemática,* Curitiba, PR, Brasil, 11.

Silva, J., & Bellemain, P. (2011). Comprimento, Perímetro e área em Livros didáticos brasileiros de 6º ano. *Anais do Conferência interamericana de educação matemática*, Recife, PE, Brasil,13.

As concepções de professores quanto ao uso do computador como ferramenta pedagógica para o ensino da Geometria

Cleia Alves **Nogueira**
Universidade de Brasília
Brasil
cleianog@gmail.com
Antônio **Villar** Marques de Sá
Universidade de Brasília
Brasil
villar@unb.br

Resumo

Este texto apresenta um recorte da pesquisa de mestrado, de natureza qualitativa, sobre a formação continuada de 14 professores de Matemática, dos anos finais do ensino fundamental e dos três anos do ensino médio, da rede pública do Distrito Federal, Brasil. Estudo realizado em 2013, durante o curso "Aprendendo Matemática com o *Software* Geogebra" e ofertado por dois Núcleos de Tecnologia Educacional, com suporte do ambiente virtual *Moodle*. Utilizamos no curso o *software* livre Geogebra, que permitiu a realização de várias construções geométricas pelos professores cursistas. Este recorte buscou identificar as concepções dos professores cursistas, quanto ao ensino da geometria com o suporte do computador como ferramenta pedagógica. Concluímos que os professores pesquisados reconheceram que o computador é um importante aliado para o processo de ensino e de aprendizagem da geometria plana e que a formação continuada é um caminho imprescindível para apropriação do docente quanto ao uso desta ferramenta.

Palavras chave: Formação continuada, geometria, computador, *software* livre.

Introdução

É sabido que o ensino da geometria ainda se encontra colocado de lado por muitas escolas brasileiras e este descaso é justificado pela falta de tempo, má formação dos docentes ou até mesmo pela inexistência de material adequado para o estudo deste conteúdo. Por este motivo, se faz necessário encontrar caminhos que motivem os docentes a ensinarem este conteúdo em suas salas de aula, de maneira a oportunizar aos alunos o conhecimento da geometria que faz parte de seu dia a dia de maneira criativa, desafiadora e contextualizada com os dias atuais.

Para tanto, o uso do computador como uma ferramenta pedagógica, aliado ao *software* Geogebra, pode ser um caminho viável para o processo de ensino e de aprendizagem da geometria plana em nossas escolas, uma vez que no Brasil, temos atualmente o Proinfo, que é um programa de governo que distribui para as escolas públicas brasileiras laboratórios de informática, dentre outros equipamentos tecnológicos, bem como a formação dos docentes para o uso didático-pedagógico das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) disponíveis na escola.

Sabemos que o uso do computador pelo professor ainda é visto com certa resistência, mas acreditamos que os resultados obtidos neste estudo podem enriquecer sobremaneira a visão destes profissionais quanto ao uso deste recurso no processo de ensino e aprendizagem da

geometria, pois "[...] há um longo caminho a percorrer para o aprimoramento da prática docente quanto ao uso do computador e dos *software*s livres com recursos pedagógicos" (Silva & Nunes, 2013, p. 35).

Neste contexto, o objetivo da presente pesquisa consistiu em identificar as influências do curso "Aprendendo Matemática com o *Software* Geogebra (AMSG)" nas concepções dos professores cursistas pesquisados, sobre o ensino da Geometria com o auxílio do computador como ferramenta pedagógica.

Referencial Teórico

O abandono do ensino da geometria em nossas escolas

Sabemos que o ensino da geometria está cada vez mais distante dos currículos escolares e que a causa para que isso ocorra são inúmeras, impossibilitando que nossos alunos aprendam de fato, sobre a geometria que nos cerca. Segundo Pavanello (1989), nas escolas públicas brasileiras este abandono ficou mais evidenciado após a promulgação da lei 5.692/71, que permitia aos professores excluir a geometria de sua programação ou planejamento escolar. Isso acontecia quando se sentiam inseguros para trabalhar com este conteúdo e, na maioria das vezes, deixavam para trabalhar este assunto no final do ano, o que dificilmente era realizado.

Diante disso, Muniz (2004, p. 20), destacou que nosso currículo escolar não privilegia o ensino da geometria de maneira contextualizada com o dia a dia do aluno:

> Acontece que no currículo escolar observa-se uma forte priorização da Geometria formal, com significativo abandono da Geometria como ferramenta de resolução de problemas da vida concreta. Na escola com excessiva valorização dos aspectos formais da Geometria, constata-se um distanciamento entre o seu ensino e as situações de vida que dão origem e sentido aos conceitos e procedimentos geométricos.

Acontece que apesar de sua reconhecida importância, alguns pesquisadores brasileiros como Passos (2000) e Pereira (2001) apontaram que a geometria continua sendo pouco estudada nas escolas ou é ensinada de maneira isolada dos demais conteúdos ou não é estudada por falta de tempo e até de material adequado para realização das aulas.

Alguns professores sentem-se despreparados para trabalharem com a geometria e isto impede que este conteúdo seja abordado em sala de aula com a qualidade e com a atenção que necessita e, consequentemente, encontramos alunos que apresentam grandes dificuldades para resolverem problemas que envolvam conceitos geométricos.

Segundo Pavanello (2004, p.135)

> As dificuldades dos professores no reconhecimento de figuras geométricas planas, de seus elementos e propriedades, e, portanto, em atividades de classificação, indicam que o trabalho pedagógico realizado com eles em diferentes instâncias de sua formação não lhes permitiu elaborar devidamente seus conceitos sobre figuras geométricas planas [...] as dificuldades dos professores devem estar se refletindo na concepção das crianças, uma vez que elas limitam suas possibilidades de abordagem do tema com seus alunos e, consequentemente, a aprendizagem destes.

Sabendo da importância deste conteúdo para a formação do ser humano, precisamos buscar caminhos que possibilitem aos professores da área compreenderem o processo de ensino e de aprendizagem da geometria na vida de nossos alunos, de modo a interpretarem com qualidade o mundo "geometrizado" que os cerca.

O uso do computador como uma ferramenta pedagógica aliado ao *software* livre Geogebra

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), (Brasil, 1997, p. 35) assinalam que o computador "[...] é apontado como um instrumento que traz versáteis possibilidades ao processo de ensino e aprendizagem de Matemática [...]" e diante disso, destacamos a abordagem construcionista de Papert (1985) para o uso do computador no ensino da geometria, de modo a tornar o aluno o protagonista na construção de seu próprio conhecimento, mas para Borba & Penteado (2007, p. 15) "O computador, portanto, pode ser um problema a mais na vida atribulada do professor, mas pode também desencadear o surgimento de novas possibilidades para o seu desenvolvimento como um profissional da educação". Por este motivo é necessário que o professor participe de uma formação continuada que lhe permita conhecer esta ferramenta e aprender a utilizá-la de forma segura e eficiente.

Para Kenski (2007, p. 43) é preciso muito mais do que apenas levar o professor a colocar "a mão na massa":

> Não basta adquirir a máquina, é preciso aprender a utilizá-la, a descobrir as melhores maneiras de obter da máquina auxílio nas necessidades de seu usuário. É preciso buscar informações, realizar cursos, pedir ajuda aos mais experientes, enfim, utilizar os mais diferentes meios para aprender a se relacionar com a inovação e ir além, começar a criar novas formas de uso e daí, gerar outras utilizações. Essas novas aprendizagens, quando colocadas em prática, reorientam todos os nossos processos de descobertas, relações, valores e comportamentos.

Segundo Almeida (2000, p. 25), "O professor construcionista procura identificar as dúvidas e o grau de compreensão dos aprendizes sobre os conceitos em estudo, propõe alterações nas ações inadequadas, cria situações mais propícias para o nível de seus aprendizes de modo a desafiá-los a atingir um novo patamar de desenvolvimento". Diante disso, é preciso pensarmos na formação continuada deste profissional que vivencia uma sociedade em constante transformação, com o uso das tecnologias de informação e comunicação como um de seus principais recursos pedagógicos, de modo a levá-lo a trabalhar a geometria com segurança, tendo o computador como mais uma ferramenta a sua disposição no ambiente escolar.

Aliado a esta abordagem, destacamos que o Geogebra é um *software* de matemática dinâmico, criado por Markus Hohenwater, em 2001, na Universidade de Salzburg, na Áustria. Este *software* está disponibilizado em português e também em outros idiomas, no endereço eletrônico <http://www.Geogebra.at/> e tem recebido vários prêmios na Europa e EUA, por ser de fácil manuseio e compreensão. Com o auxílio deste *software*, professores e alunos podem realizar construções geométricas simulando o uso da régua e do compasso, de maneira dinâmica e prazerosa. Segundo Van de Walle (2009, p. 134-137), "ser parecido com um manipulativo físico, por si só, não ensina. Porém, o usuário de um pacote bem-projetado de *software* de ferramentas terá um 'brinquedo para pensar eletrônico com o qual explorar ideias matemáticas" e "os *software* educativos são, até certo ponto, projetados para interação do estudante de modo semelhante ao livro didático ou a um tutor. É projetado para ensinar".

Ainda sobre os *softwares* Albuquerque & Santos (2009, p. 3) afirmam que os mesmos "permite que os alunos construam e realizem investigações sobre propriedades e conceitos matemáticos manipulando o objeto e seus elementos dinamicamente, na tela do computador, e identifiquem especialmente as características das figuras geométricas"

A formação do professor de matemática para o uso do computador como ferramenta pedagógica no ensino da geometria

Dentre os vários programas brasileiros para a formação continuada de professores, destacamos o Programa Nacional de Tecnologia Educacional (Proinfo), que tem como objetivo promover nas escolas públicas do país o uso pedagógico das tecnologias disponibilizadas naqueles espaços. Por meio deste programa, as escolas recebem equipamentos tecnológicos, como computadores, projetores, lousas digitais, além do acesso à internet e outros, bem como, a formação da equipe escolar para usá-los de acordo com as orientações do programa.

Para realizar a formação continuada da equipe escolar, o Proinfo conta com os Núcleos de Tecnologia Educacional (NTE), que são equipes formadas por professores especialistas na área de tecnologia e técnicos, que têm como principal atribuição a formação continuada dos profissionais para o uso pedagógico destes equipamentos. No Distrito Federal, Brasil, desde 2010, contamos com 14 núcleos de tecnologias para realização deste trabalho.

Estes núcleos fazem a oferta dos cursos produzidos pelo programa e possuem, também, autonomia para criarem seus cursos ou oficinas, de acordo com a demanda da área de sua localização.

O NTE onde este estudo foi realizado localiza-se em uma das cidades do Distrito Federal, Brasil. Este núcleo coordena o trabalho com cerca de 100 escolas públicas desta área, com acompanhamento pedagógico e técnico dos laboratórios de informática, contando atualmente com uma equipe de quatro professores especialistas e um técnico de informática. Ministra o curso Proinfo Integrado que atende, em maior parte, os professores dos anos iniciais e, por conta própria, realiza nas escolas oficinas para o uso dos computadores, com temas diversos sugeridos pelo núcleo ou a pedido da instituição beneficiada.

Diante da demanda de formação dos professores de matemática percebida pelos professores do núcleo, criamos o curso “Aprendemos Matemática com o *Software* Geogebra (AMSG)”, com o objetivo de capacitar estes profissionais para o ensino da geometria plana com o auxílio do computador, aliado ao *software* livre Geogebra.

Metodologia

A presente investigação de cunho qualitativo trata-se de um recorte da pesquisa de mestrado em desenvolvimento em uma universidade federal brasileira. Tendo em vista o caráter investigativo e a busca de compreensão das questões evidenciadas pelos sujeitos da pesquisa, o estudo é participante, por se caracterizar o “envolvimento dos pesquisadores e dos pesquisados no processo de pesquisa” (Gil, 2011, p. 31).

Os dados empíricos foram obtidos a partir da formação continuada dos professores inscritos no curso "Aprendendo Matemática com *software* Geogebra (AMSG)", ofertado pelo NTE Ceilândia, em parceria com o NTE Taguatinga, por necessidade de outro laboratório no turno contrário. O curso em questão foi realizado no segundo semestre do ano de 2013 na modalidade semipresencial com 90 horas à distância no ambiente virtual de aprendizagem (AVA) *Moodle*, 12 horas presenciais e 18 horas de projetos desenvolvidos na escola pelos professores cursistas, totalizando 120 horas.

Inscreveram-se 50 professores, dos quais 49 concluíram o curso com aprovação. Dentre os concluintes, participaram deste estudo, apenas os licenciados em Matemática e atuantes nos anos finais do ensino fundamental e nos três anos do ensino médio da rede pública de Brasília, Brasil.

Todos responderam a dois questionários, sendo um no início e outro no final do curso e participaram de todas as atividades propostas no curso. Estes questionários foram aplicados com o objetivo de identificar as concepções destes cursistas sobre o ensino da Geometria e do uso do computador como ferramenta pedagógica para o ensino deste conteúdo, bem como também, suas impressões sobre as atividades *online* do curso e a modalidade semipresencial para cursos de formações continuada. Ressaltamos que neste recorte destacaremos apenas as concepções dos professores quanto ao ensino da geometria com o auxílio do computador.

O curso foi organizado com quatro encontros presenciais, sendo dois encontros no início e dois ao final do curso. Durante as semanas *online* os professores cursistas ingressavam na plataforma virtual e tinham acesso ao material do curso, como roteiros e videoaulas, e realizavam as atividades, compreendidas em tarefas e participações nos fóruns de discussão. Alguns conteúdos abordados foram construções geométricas de variados polígonos, Teorema de Pitágoras, trigonometria no triângulo retângulo, relações métricas na circunferência, pontos notáveis no triângulo, razão áurea e outros.

Para realização do curso, cada professor acessava o AVA, lia o roteiro da semana e realizava as atividades solicitadas que foram, basicamente, assistir a videoaula disponibilizada pela professora formadora, fazer a construção geométrica com o auxílio do *software* Geogebra, disponibilizando-a no recurso "tarefa", no *Moodle*, e participar do fórum de discussão, relatando suas impressões sobre a construção e seu contato com o *software*.

O Curso AMSG foi ministrado seguindo a modalidade construtivista de Papert (1985), tendo o computador como uma ferramenta pedagógica, capaz de permitir ao professor cursista a construção de seu próprio conhecimento. Nesta situação, o professor cursista participa ativamente de sua formação continuada, sendo agente de sua própria aprendizagem.

Finalizando as nove semanas *online*, o professor cursista escolheu um conteúdo trabalhado no curso e o aplicou, como atividades, em sua escola. As impressões sobre esta aplicação com os alunos foram compartilhadas e discutidas com os demais colegas da turma nos dois encontros presenciais finais.

Análise de dados

Para compreender os dados coletados nesta pesquisa, utilizamos a análise categorial de Bardin (2011), realizando a princípio o desmembramento dos dados obtidos em unidades e logo depois o reagrupamento dos mesmos em categorias que nos auxiliaram a atingir os objetivos propostos inicialmente, identificando nas falas dos pesquisados suas concepções iniciais quanto ao ensino da geometria com utilização do computador como ferramenta pedagógica.

Categorizando as respostas dos professores pesquisados, quanto ao uso do computador como ferramenta pedagógica

O computador como ferramenta de auxílio para o ensino da geometria

Todos os professores cursistas, participantes da pesquisa, responderam considerar o computador como uma ferramenta viável para o ensino da geometria. Segundo suas respostas, acreditam que as tecnologias precisam ser inseridas em suas aulas de modo a melhorar, de maneira significativa, o processo de ensino e aprendizagem de seus alunos. Observam-se estas concepções nos excertos descritos abaixo:

> Na geometria, quanto mais ferramentas concretas para facilitar a visualização do aluno, melhor para o aluno compreender tais conceitos geométricos (P6).

> Vivemos em um mundo muito atrativo fora da escola. Temos que competir diariamente com esse mundo e quase sempre estamos perdendo. Por isso, é mais do que necessário se apoderar desses recursos educacionais e tornar mais atrativo o seu fazer pedagógico (P14).

Desvelamos as concepções dos professores pesquisados que compreenderam o computador como uma importante ferramenta de auxílio ao processo educacional, enfatizando que o computador contribui para a expressão do que o aluno pensa e, também, executa o que ele pensa com resultados claros e objetivos. Por meio desta representação, o aluno pode expressar seu conhecimento sobre determinado assunto, depurá-lo, se necessário, e construir novos conhecimentos.

Infraestrutura adequada (laboratório de informática) nas escolas

Ao serem questionados sobre a existência de infraestrutura (ambientes informatizados) adequada nas escolas dos pesquisados para o ensino da Geometria, 10 pesquisados responderam que SIM e três responderam que NÃO. Dentre as respostas sobre as condições destes espaços destacamos algumas falas organizadas nas seguintes subcategorias:

Laboratórios com estruturas adequadas, mas sem coordenador para este espaço

Alguns laboratórios apresentam estrutura de laboratório bem montada, com máquinas funcionando e acesso à internet. Ressaltaram que a falta de coordenador para este espaço é uma das principais dificuldades, uma vez que levam, na maioria das vezes, a turma toda e, este profissional com certeza, ajudaria muito no desenvolvimento destas aulas. Destacamos abaixo algumas falas destes pesquisados:

> A escola possui um laboratório maravilhoso, <u>mas precisa de uma pessoa pra nos auxiliar</u> (P3).

> Possui a infraestrutura, vale ressaltar que os computadores são insuficientes para todos os alunos e <u>a carência de um responsável pelas máquinas</u> (P7).

Laboratórios com estruturas adequadas ou em condições mínimas para utilização

Dentre as respostas dadas pelos pesquisados, encontramos laboratórios em funcionamento, com professores utilizando estes espaços e, inclusive, com dificuldades de vaga disponível para agendamento de aulas em alguns casos. Ressaltamos que a utilização ocorre, também, com o uso destes laboratórios em condições mínimas de uso. Alguns excertos que evidenciaram o uso destes espaços nas escolas de alguns pesquisados:

> O laboratório da minha escola está bem equipado, com muitos computadores funcionando. O fato do NTE funcionar na nossa escola, nos ajuda muito. Podemos sempre contar com eles, quando acontece algum problema (P10).

> Dispomos de um laboratório. Claro que não é como desejaríamos (P14).

Ao serem questionados sobre a utilização de alguns *softwares* de Geometria em seu fazer pedagógico, a totalidade respondeu que nunca utilizou o computador como ferramenta de ensino, mas que já tiveram curiosidade em conhecer algum programa de computador e aprender como utilizá-lo. Dentre suas respostas destacamos duas subcategorias que surgiram, sendo elas:

Curiosidade em aprender, com o objetivo de melhorar as aulas para o ensino a alunos portadores de necessidades especiais

Alguns pesquisados relatam em suas falas que se tornaram curiosos em buscar alternativas para o ensino da Matemática para alunos portadores de necessidades especiais. Como estes alunos necessitam muito do visual o computador pode ser uma importante ferramenta de auxílio a estes profissionais. Vejamos abaixo alguns excertos que afirmaram estes fatos:

> Porque queria adequar o ensino da Geometria para os alunos surdos com a melhor visualização possível dos conteúdos abordados (P9).

> Porque atualmente trabalho em Sala de Recursos com alunos com necessidade educacionais especiais. E as disciplinas que exigem cálculo, raciocínio lógico e construções geométricas que necessitam coordenação motora e boa visualização, que são um dilema para esses alunos (P10).

Curiosidade em aprender com o objetivo de sua auto-formação

Dentre os pesquisados, alguns relataram terem curiosidade em fazer um curso para aprender a utilizar o computador como ferramenta pedagógica, para sua formação continuada e consequente aplicação em seu fazer pedagógico, uma vez que é uma tecnologia disponível tanto nas escolas, como nas casas de seus alunos. Excertos que indicaram este fato:

> Tenho muito interesse em aprender algo novo, por sentir a necessidade de trazer algo interessante e atrativo para o ensino da Matemática, algo que fosse inovador e motivador (P2).

> A curiosidade vem justamente porque acho que a visualização das formas geométricas é algo imprescindível para o aprendizado da Geometria (P1)!

> Sempre busquei recursos pra melhorar as aulas, e a internet e os programas de informática sempre são um atrativo a mais pras aulas se tornarem mais dinâmicas, fáceis e compreensíveis (P3).

Quando questionados sobre suas participações, em outros cursos de formação para o uso do computador como ferramenta pedagógica para o ensino da Geometria, 13 professores responderam que nunca tiveram conhecimento de oferta deste tipo de curso e apenas um respondeu ter tido contato com alguns *softwares* de Geometria no curso de mestrado, conhecido como PROFMAT[1]. Alguns excertos confirmaram o fato a respeito da falta de oferta deste tipo de curso como formação continuada:

> Nunca participei e nunca soube de oferta (P7).

> O Mestrado PROFMAT, onde conheci várias ferramentas computacionais (P8).

> Que eu me lembre, não foi ofertada (P9).

> Não foi ofertado. Não tive a oportunidade de fazer durante a graduação e também não fiz ao longo desses anos de magistério (P10).

Finalizando o questionário para coleta das concepções iniciais dos professores cursistas, deixamos em aberto para que comentassem sobre suas concepções sobre o ensino da geometria nos dias atuais e o seu papel, enquanto professor, como protagonista do ensino deste conteúdo.

[1] "Pós-graduação *stricto sensu* para aprimoramento da formação profissional de professores da educação básica". Acesso em: <http://www.profmat-sbm.org.br/s>.

Nas respostas, foi possível identificar que os professores acreditam na importância e necessidade do ensino da geometria nos dias atuais, mas ao mesmo tempo sentem falta de cursos de formação continuada para trabalhar de maneira prática e contextualizada, uma vez que em sua graduação aprenderam mais a geometria formal e pouco contextualizada. O uso do computador como ferramenta pedagógica para o seu ensino foi muito bem visto e desejável, uma vez que usos das TIC fazem parte do dia a dia dos alunos inseridos nesta era digital e também dos professores. Acreditam que o ensino da geometria vem sendo visto com maior preocupação pelos estudiosos em educação e que a relação deste ensino com o uso das tecnologias digitais disponíveis tem muito a enriquecer o processo de ensino e de aprendizagem deste conteúdo em nossas escolas.

Conclusão

Considerando as respostas de alguns pesquisados no questionário inicial do curso AMSG, percebemos que o uso do computador como ferramenta pedagógica no processo de ensino e aprendizagem da matemática foi bem visto pelos professores desta área e que a formação continuada destes profissionais é um caminho viável para que o ensino da geometria possa ser ministrado nas escolas públicas brasileiras com qualidade.

Diante disto, podemos afirmar que, em se tratando de uso do computador nas escolas brasileiras, é necessário pensarmos em iniciativas de formação que atendam esta demanda e que servirão de base para a oferta de novos cursos e, com certeza, possibilitarão aos nossos professores, maior segurança para ministrar este conteúdo de maneira mais contextualizada, ou seja, dentro da realidade vivenciada por alunos e professores em seus ambientes escolares, já que vivemos hoje em um mundo cercado de tecnologias e o computador é, sem dúvida nenhuma, a tecnologia de maior acesso neste contexto.

Ressaltamos que esta pesquisa se encontra hoje em fase de finalização e análise dos dados coletados, e que, desde já, podemos afirmar que a formação continuada para o uso do computador como ferramenta pedagógica para o ensino da geometria tem muito a enriquecer o processo de ensino e de aprendizagem, e que cabe ao governo, juntamente com suas secretarias de educação, incentivar e investir nestas iniciativas, de maneira a motivar os professores de matemática a buscarem a sua formação continuada, para a utilização das tecnologias disponíveis em suas escolas, em especial o computador, para o ensino da geometria.

Referências

Albuquerque, L. & Santos, C. H. (2009). *O programa GeoGebra: relato de experiência no ensino de geometria plana de 5ª a 8ª séries e na socialização com professores da rede de ensino estadual*. Disponível em < http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/>. Acessado em 26/11/2014.

Almeida, M.E.B. (2000). *Informática e formação de professores*. v. 2. Brasília: Ministério da Educação.

Bardin, L. (2011). *Análise de conteúdo.* (L. A. Reto, & A. Pinheiro, Trads.) São Paulo: Edições 70.

Borba, M. C.; & Penteado M. G.(2007). *Informática e educação matemática*. Belo Horizonte: Autêntica

Brasil (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*, v. 2. Brasília: MEC / SEF.

Gil, A. C. (2011). *Métodos e técnicas de pesquisa social.* (6th. ed.). São Paulo: Atlas.

Kenski, V.M. (2007) *Educação e Tecnologias: O Novo Ritmo da Informação*. Campinas-SP: Papirus

Muniz, C. A. (2004). *Explorando a geometria da orientação e do deslocamento*. Brasília: Gestar II, TP6, 80-102.

Papert, S. (1985). *Logo: Computadores e educação*. São Paulo: Brasiliense (edição original EUA 1980).

Passos, C. L. (2000). *Representações, interpretações e prática edagógica: A geometria na sala de aula.* Campinas: Universidade Estadual de Campinas.

Pavanello, R.M. (1989) *O abandono do ensino de geometria: Uma visão histórica*. Campinas: Universidade Estadual de Campinas. Dissertação de Mestrado.

Pavanello, R. M. (2004) A geometria nas séries iniciais do ensino fundamental: contribuições da pesquisa para o trabalho escolar. In: PAVANELLO, R. M. (ORG) *Matemática nas séries iniciais do ensino fundamental:* a pesquisa e a sala de aula. Biblioteca do Educador Matemático. São Paulo: SBEM, 129-143.

Pereira, M. R. (2001). *A geometria escolar: uma análise dos estudos sobre o abandono de seu ensino.* São Paulo, Universidade Católica de São Paulo. Dissertação de Mestrado.

Silva, A. D., & Nunes, J. B. (2013). Formação e prática docente em *software* livre na rede municipal de Fortaleza. In: J. B. Nunes, & L. X. Oliveira, *Formação de professores para as tecnologias digitais: Software livre e educação a distância*. Brasília: Liber Livro, 23-37.

Van de Walle, J.A. (2009). *Matemática no ensino fundamental: formação de profesores e aplicação em sala de aula.* (6. ed.). Porto Alegre: Artmed.

Base de un espacio vectorial de $\Re^n$ y tecnología

José **Guzmán** Hernández
Cinvestav, Instituto Politécnico Nacional
México
jguzman@cinvestav.mx
José **Zambrano** Ayala
Cinvestav, Instituto Politécnico Nacional
México
jzambrano@cinvestav.mx

Resumen

En este artículo reportamos una investigación, cuyo propósito es mostrar cómo el uso de papel-y-lápiz y tecnología (e.g., Geogebra), contribuyen en el aprendizaje de conceptos relacionados con el de Base de un espacio vectorial. En el estudio participaron 13 estudiantes de nivel superior (de 20 a 28 años de edad). La investigación se apoyó en dos teorías: Cambio de atención de Mason (2008) y Representaciones de Duval (1999, 2003, 2006)[1]. La metodología consistió en el diseño de Actividades[2] que los estudiantes llevaron a cabo por equipos usando Geogebra, papel-y-lápiz, mediante entrevista. Nuestros resultados indican que el uso de la tecnología favorece el aprendizaje de conceptos relacionados con el de base de espacios vectoriales; en particular $\Re^2$ y $\Re^3$.

Palabras clave: Geogebra, Vector, Espacio vectorial, Base.

Introducción

Investigadores como Dorier, Robert, Robinet y Rogalski (2000), Sierpinska (2000), entre otros, mostraron que los estudiantes tienen dificultades en el aprendizaje de conceptos de Álgebra lineal. Los autores antes mencionados detectaron que tales dificultades están relacionadas con el *obstáculo del formalismo*, el cual está íntimamente vinculado con el aprendizaje de conceptos de Álgebra lineal, en ambiente de papel-y-lápiz.

En la actualidad, el uso de la tecnología en los salones de clase ha promovido la idea de que por medio de ésta es posible sobrepasar el *obstáculo del formalismo*. Esta afirmación está basada en diversos artículos de investigación publicados en revistas especializadas y en memorias de congresos internacionales. Por ejemplo, Gol y Sinclair (2010) reportan los resultados de un estudiante que ya había cursado Álgebra lineal, con quien discutieron los conceptos de *Valores* y *Vectores propios* asociados con una matriz de entradas reales. Los resultados de estas investigadoras sugieren que el ambiente dinámico, en el que se desarrolló la investigación, favoreció el aprendizaje de esos conceptos abstractos. Por su parte, Soto y Romero (2011) usaron ambientes dinámicos para analizar la problemática relacionada con el aprendizaje del concepto de

[1] Para una descripción breve de estas dos teorías y cómo las usamos en el análisis de los datos de esta investigación, véase Guzmán y Zambrano (2014).
[2] La Actividad o Actividades (con mayúscula) en este artículo, se refiere a aquellas que llevó a cabo el estudiante para que lo conduzca al concepto o conceptos de Álgebra lineal, mientras que la Tarea o las Tareas (con mayúsculas), se refiere al trabajo específico que efectuaron los estudiantes en las Actividades.

Transformaciones lineales, y cuya población fue seleccionada de una facultad de ingeniería. Sus resultados indican que el ambiente dinámico, en el que se efectuó la investigación, ayuda en el aprendizaje de propiedades y características de las *Transformaciones lineales* al transitar de un registro a otro.

En este artículo estudiamos cómo el *obstáculo del formalismo* puede ser "sobrepasado" utilizando software dinámico (e.g., Geogebra) en el aprendizaje de conceptos relacionados con el de base de un espacio vectorial (e.g., Conjunto generador de vectores y Dependencia e independencia lineal de vectores). En esta investigación incluimos dos ambientes: el tecnológico y el de papel-y-lápiz. La pregunta que guió la presente investigación es: ¿Cómo influyen las representaciones gráficas de conceptos de Álgebra lineal que minimizan las dificultades de su aprendizaje, haciendo uso de software dinámico? Por limitaciones de espacio, en este artículo, sólo son discutidos los datos provenientes de un equipo (tres estudiantes), correspondiente a cuatro Actividades.

Marco conceptual

El trabajo de investigación está respaldado por dos teorías cognitivas: la de *Cambio de atención* (Mason, 2008) y la de *Representaciones* (Duval, 1999, 2003, 2006). La primera teoría está basada en tres conceptos básicos: *Atención*, como medio en el cual se efectúa la observación –del estudiante–, ésta permite *sustentar*, *discernir*, *relacionar*, *percibir* y *razonar* los objetos matemáticos en estudio, y sin ella es imposible dar sentido a lo que el estudiante aprende; *Estar consciente de…*, consiste en verificar si el estudiante le da sentido a lo que quiere conocer, y precisa los sentidos sobre lo que el estudiante ya conoce, y la *Actitud*, como medio de disposición del estudiante de querer aprender. La segunda teoría está basada en dos conceptos: *Semiosis*, como aprehensión o producción de una representación semiótica (medio que usa el individuo para exteriorizar sus representaciones mentales –imágenes sobre un objeto– construidas por el uso de signos: lenguaje natural, fórmulas algebraicas, figuras geométricas, entre otros), y *Noesis*, actos cognitivos como el aprendizaje de un objeto.

Analizamos los datos tomando en cuenta los puntos donde confluyen las dos teorías, estos son: (1) *Asociación de objetos*, el cual contempla el hecho de que el aprendizaje de conceptos (en matemáticas) puede ser mostrado en varias representaciones; (2) *Posición cognitiva*, el cambio de conciencia *implícita* a *explícita* (Mason, 2008) ocurre cuando el estudiante puede "ver" (Duval, 2003) y manejar conscientemente los objetos de estudio como un todo; (3) *El estudiante le da sentido a lo que quiere conocer*, se presenta cuando un estudiante muestra dominio de los conceptos *Atención*, *Estar consciente de…* y *Actitud* (Mason, 2008), y puede evidenciar –con relativa facilidad– el paso de un registro semiótico a otro (Duval, 2003), del objeto matemático en estudio.

Metodología

Participantes

Los estudiantes que intervinieron en la investigación fueron elegidos por el profesor con quien habían estudiado Álgebra lineal. El criterio usado por el profesor para seleccionar a estos estudiantes se basó en el buen desempeño y disposición (*Actitud*) que ellos habían tenido en su curso de Álgebra lineal, en ambiente de papel-y-lápiz, en un instituto tecnológico de la ciudad de México. El trabajo se implementó con 13 estudiantes de nivel superior distribuidos en cinco equipos; cada uno de dos o tres integrantes. Ninguno de ellos había tenido experiencia previa con

el uso de Geogebra para resolver Tareas de Álgebra lineal; por lo que se les dio entrenamiento en el uso del software, antes de iniciar la toma de datos.

Diseño e implementación de los instrumentos usados en el acopio de datos

Como parte de la metodología adoptada fueron diseñados: un *Pre-test*, cuatro Actividades y un *Post-test*. Las cuatro Actividades fueron abordadas por los estudiantes mediante entrevistas, no así el *Pre* y *Post-test*, que fueron contestados por ellos en forma individual. Previo al entrenamiento del software, a los estudiantes se les aplicó un *Pre-test*, con la finalidad de indagar el nivel de conocimientos que tenían respecto a los conceptos relacionados con el de Base de un espacio vectorial. Después de la aplicación del *Pre-test*, abordaron las Actividades mediante entrevistas y, al término de éstas se les aplicó un *Post-test.* El contenido temático de las cuatro Actividades son: Actividad I Conjunto generador de vectores en $\Re^2$ y $\Re^3$, Actividad II Combinación lineal de vectores en $\Re^2$ y $\Re^3$, Actividad III Dependencia e independencia lineal de vectores en $\Re^2$ y $\Re^3$ y Actividad IV Base de un espacio vectorial. La implementación de las Actividades se efectuó en el salón de clases de los estudiantes. Las sesiones de trabajo tuvieron una duración aproximada de entre tres y cuatro horas, las cuales fueron video-grabadas.

Las Actividades

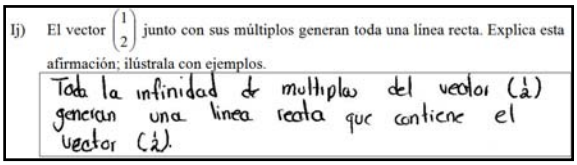
El diseño de las Actividades estuvo a cargo por los autores del presente artículo, y fueron implementadas por el Investigador-Entrevistador (en adelante Inv-Ent) mediante entrevistas a los estudiantes. En esas entrevistas se propiciaba el análisis y la reflexión de sus afirmaciones mediante discusiones tendientes al aprendizaje de conceptos. Se permitió que preguntaran dudas respecto a la comprensión de los ítems de la Tarea. Los estudiantes escribían las definiciones de los conceptos tal y como ellos las entendían, en los espacios que aparecen en las Actividades diseñados con esa finalidad. Al término de cada sesión de trabajo, y al inicio de la próxima, se analizaba y discutía con ellos su trabajo previo.

Análisis de datos y discusión de resultados

En este artículo discutimos sólo los datos surgidos del trabajo de un equipo de estudiantes (Equipo 3). En adelante, los integrantes del equipo se denominan como E1, E2 y E3.

Análisis y discusión de resultados: Actividad I Conjunto generador de vectores en $\Re^2$ y $\Re^3$

La Actividad inició con la discusión del concepto Múltiplo de un vector. Los estudiantes no tuvieron dificultades al multiplicar un escalar por un vector y determinar así un vector múltiplo del primero. De una lista de vectores en $\Re^2$, el Inv-Ent les preguntó qué vectores, de esa lista, eran múltiplos entre ellos. He aquí la respuesta de E2:


Ij) El vector $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ junto con sus múltiplos generan toda una línea recta. Explica esta afirmación; ilústrala con ejemplos.

Toda la infinidad de multiplos del vector $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ generan una linea recta que contiene el vector $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

Figura 1. Solución de la Tarea Ij) dada por el Equipo 3.

1 E2: $(1,2)$ y $(-2,-4)$.

2 E3: Pero, ¡No son múltiplos! [*E3 no justifica su respuesta.*]

3 Inv-Ent: ¿Por qué dice que sí son múltiplos? [*Dirigiéndose a E2.*]

4 E2: Porque se multiplica el primer vector por –2 y nos da el segundo vector [*E3 con un movimiento de cabeza, da razón a E2.*]

5 Inv-Ent: La Tarea Ij) (Figura 1) dice que "El vector $(1,2)$ junto con sus múltiplos generan toda una línea recta", ¿cuál línea recta?

6 E3: La recta que contiene al vector [contestación que surgió una vez que observaron los estudiantes la recta que contiene un vector en la pantalla de la computadora.]

7 Inv-Ent "A partir de un vector, se puede 'generar' otro vector que se encuentra sobre la recta que lo contiene". ¿Es verdadera esta afirmación?

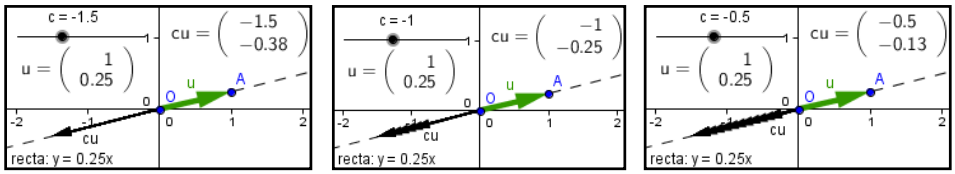
8 E3: ¡Yo creo que no! [*Interrumpe E2.*]

9 E2 ¡Yo creo que sí! Porque se está multiplicando por una constante y nos está dando otro vector que está en la misma recta, entonces hay un escalar que multiplicado por el vector inicial nos da el vector final [*con un movimiento afirmativo de cabeza, E3 acepta la respuesta de E2.*]

10 Inv-Ent: Si se localizan puntos en la recta que se "generan" a partir del vector inicial, ¿existen múltiplos del vector $(1,2)$ que "generen" a estos "nuevos vectores"? [*Los estudiantes interrumpen y contestan con un categórico ¡Sí!*] Ahora, si el punto se encuentra en la recta, pero fuera de la pantalla, y dado que "no se ve", ¿significa que no exista un vector múltiplo de ese vector?

11 E3: Aunque "no se vea" el múltiplo existe [el estudiante está discerniendo (Mason, 2008) y visualizando (Duval, 2003) el comportamiento del objeto matemático en estudio]. Porque la n es infinita [E2 hace un gesto de aceptación. en estos momentos los estudiantes han evidenciado la relación (Mason, 2008) de "infinito" entre "n" y "c".]

A continuación, el Inv-Ent solicitó a los estudiantes activar el comando *Animación* de Geogebra para ser aplicado en los múltiplos del vector $(1,2)$. Esta acción permitió que los estudiantes visualizaran (Duval, 2003) el significado de Conjunto generador de vectores de $\Re^2$. La Figura 2 presenta tres imágenes de vectores múltiplos del vector $u = (1,0.25)$ para los valores $c = -1.5$, $c = -1$ y $c = -0.5$; los estudiantes observaron que en la medida en que varía el escalar c, los vectores múltiplos cubrían la recta $y = 0.25x$.



$c = -1.5$ $c = -1$ $c = -0.5$

Figura 2. Vectores múltiplos de $u = (1,1.25)$ y la recta que genera, dados por el Equipo 3.

Al continuar con la entrevista, el Inv-Ent motivó a los estudiantes con la idea de que extrapolaran el concepto de Conjunto generador de vectores, para espacios vectoriales distintos de $\Re^2$. El siguiente extracto de la entrevista evidencia lo ocurrido en esta parte del episodio:

12 Inv-Ent: Si tomas en cuenta un vector de $\Re^3$, y determinas sus múltiplos, ¿qué "generan" esos vectores?

13 E3: También una recta.

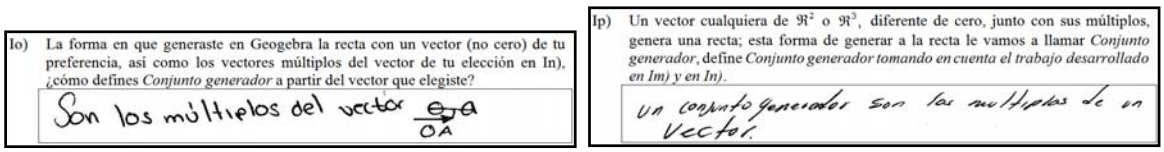
14 Inv-Ent: Pero en $\Re^3$ también se puede trazar una recta a partir de un vector en este *Espacio vectorial*, ¿qué pasa si se trata de un vector de $\Re^4$? Porque un vector de $\Re^4$, ya no se puede trazar, ¿significa que ese vector de $\Re^4$ no "genera" una recta?

15 E3: ¡Yo creo que sí! Aunque no se tenga una percepción [*representación*] con una gráfica, no quiere decir que no exista. Se supone que con la forma algebraica si se puede. [*La respuesta de E3 evidencia claridad en la percepción –posición cognitiva (Mason, 2008; Duval, 2003)– de lo que sucede en espacios vectoriales euclidianos $\Re^n$, con $n \geq 4$, en cuanto al sub-espacio generado por los múltiplos de un vector en ese espacio, cuya gráfica no existe.*]

Durante la entrevista, los tres estudiantes mostraban diferentes *Actitudes* (Mason, 2008): E3 era activo, pero sus afirmaciones carecían de contundencia; E2, acertado en sus comentarios, pero no mostraba autoridad para que sus compañeros aprendieran el concepto en discusión, y E1 estaba callado y parecía confundido por las opiniones de sus compañeros.

El consenso entre los integrantes del equipo –respecto del conocimiento aceptable del concepto Múltiplo de un vector– se dio cuando observaron en la pantalla de la computadora el movimiento dinámico del vector múltiplo cu de la Figura 2 trazado en Geogebra, a partir del vector $u = (1, 0.25)$. Los estudiantes observaron cómo cambió (de magnitud y dirección) el vector cu, cada vez que el escalar c lo hacía.

La visualización de vectores y sus múltiplos, en la pantalla de la computadora (como se describió en el párrafo precedente) y sus distintas *representaciones dinámicas*, *promovió* en los integrantes del Equipo 3 un *Cambio de atención* (Mason, 2008) de la forma en cómo entendían el concepto Múltiplo de un vector, ya que éste, no era sólo aquel generado por los números enteros, como ellos –los estudiantes– lo pensaban inicialmente, sino que observaron que se trataba de una *infinidad* de múltiplos de ese vector. Esta acción (mediada por el software) los llevó a definir el concepto de Conjunto generador de vectores, a partir de los múltiplos de un vector (véase las Tareas Io) y Ip) de la Figura 3). Acción con la que concluyó la Actividad I.


Io) La forma en que generaste en Geogebra la recta con un vector (no cero) de tu preferencia, así como los vectores múltiplos del vector de tu elección en In), ¿cómo defines *Conjunto generador* a partir del vector que elegiste?

Son los múltiplos del vector $\overrightarrow{OA}$

Ip) Un vector cualquiera de $\Re^2$ o $\Re^3$, diferente de cero, junto con sus múltiplos, genera una recta; esta forma de generar a la recta le vamos a llamar *Conjunto generador*, define *Conjunto generador tomando en cuenta el trabajo desarrollado en Im) y en In)*.

Un conjunto generador son los multiplos de un vector.

Figura 3. Solución de los estudiantes del Equipo 3, a las Tareas Io) y Ip).

Análisis y discusión de resultados: Actividad II Combinación lineal de vectores en $\Re^2$ y $\Re^3$

En la Actividad II, los estudiantes trabajaron en las Tareas que los conducirían a definir el concepto de Combinación lineal de vectores. Para lograr este propósito, se necesitó que los estudiantes contaran con un aprendizaje eficiente del concepto Conjunto generador de vectores, que ellos trabajaron en la Actividad I. Los estudiantes iniciaron la Actividad concerniente a las Tareas de la Actividad II. El Inv-Ent les pidió que identificaran en la ventana de gráficos de Geogebra, las características que presentan dos vectores iguales. La Figura 4 muestra cómo interpretan los estudiantes el concepto de igualdad de vectores.

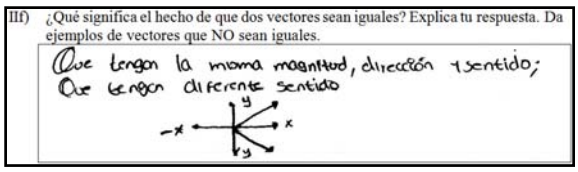


Figura 4. Solución de los estudiantes del Equipo 3, a las Tareas IIf).

En la siguiente Tarea, a los estudiantes se les preguntó si la operación $2(3,-1)-(3,2)$ es el vector $(-5,2)$. Al hacer las operaciones, respondieron "no son iguales", y se les propuso que calcularan las constantes c y d, tales que $c(3,-1)+d(3,2)=(-5,2)$, Tarea que quedó resuelta como se muestra en la Figura 5.

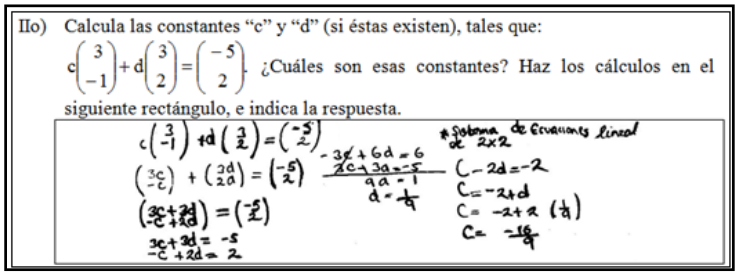


Figura 5. Cálculo de las constantes c y d que satisfacen la igualdad $c(3,-1)+d(3,2)=(-5,2)$.

Cuando los estudiantes manipularon en Geogebra los múltiplos de los vectores $u=(3,-1)$ y $v=(3,2)$, observaron[3] que $-1.78(3,-1)+0.11(3,2)=(-5,2)$ (véase Figura 6), así comprobaron el cálculo de la Figura 5, y se dieron cuenta de que al manipular la suma de múltiplos (vector denotado como cumdv –notación en Geogebra– en la Figura 6) podía "alcanzar" cualquier punto en el plano y, por tanto, el correspondiente vector de posición. De esta forma, se vio favorecido el aprendizaje del concepto suma de múltiplos de vectores de los estudiantes. En esas acciones, ellos usaron dos representaciones: la algebraica y la geométrica (Duval, 1999, 2003, 2006).

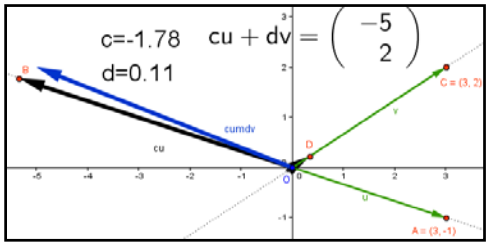


Figura 6. Cálculo las constantes c y d que satisfacen $c(3,-1)+d(3,2)=(-5,2)$.

La duda de los estudiantes era si la suma de múltiplos de los vectores u y v, como los indicados en la Figura 6, "alcanzan" vectores que no se muestran en la pantalla. El siguiente extracto de la entrevista evidencia lo sucedido en esta parte del trabajo.

16 Inv-Ent: ¿El vector $cu+dv$ [*en la Figura 6*] puede ser cualquier punto final

[3] El software aproxima las constantes $c=-\frac{16}{9}$ y $d=\frac{1}{9}$, calculado por los estudiantes en la Tarea IIo), respectivamente como $c=-1.78$ y $d=0.11$.

de un vector del plano, aun cuando "no se vea" en pantalla?

17 E3: ¡Sí!, porque haciendo un *zoom* ya podemos ver el punto que deseamos y entonces localizamos el vector $cu + dv$ que llega a ese punto.

Con el comentario de E3, el Equipo 3 había determinado que cualquier vector en $\Re^2$ de la forma (a,b) se podía escribir como la suma de los múltiplos de los vectores $u = (3,-1)$ y $v = (3,2)$. En seguida, el Inv-Ent les preguntó sobre qué características tienen los vectores para que un par de estos "alcance" cualquier punto del plano; E2 contestó:

18 E2 Puede ser que sea porque los vectores no son múltiplos. [E2 había visualizado (Duval, 2003) que la suma de los múltiplos de los vectores dados, podía alcanzar cualquier punto en el plano.]

Con el comentario de E2 en la línea 20, el Equipo 3 había determinado que cualquier vector en $\Re^2$ de la forma (a,b) se podía escribir como la suma de los múltiplos de los vectores $u = (3,-1)$ y $v = (3,2)$; especificación que los estudiantes lograron generalizar para cualquier otro par de vectores [no múltiplos entre ellos] en el plano.

A continuación, se siguió con un procedimiento similar –como cuando calcularon las constantes c y d que satisfacen $cu + dv = w$, donde w es un vector cualquiera de $\Re^2$ –. Los estudiantes trabajaron con papel-y-lápiz para calcular constates c, d y e que satisfacen $c(3,-1) + d(3,2) + e(-5,2) = (0,0)$; Tarea que también hicieron con un archivo de Geogebra –que ellos diseñaron– y que al manejarlo, pudieron *percibir* (Mason, 2008) que había una infinidad de constantes c, d y e que satisfacen $cu + dv + ew = o$, donde u, v y w son vectores de $\Re^2$.

Al proseguir con la entrevista, los estudiantes E2 y E3 se equivocaron al responder las preguntas: ¿Cuántos escalares distintos de cero satisfacen $c_1u_1 + c_2u_2 + dv = w$, donde los vectores u_1 y u_2 son múltiplos? ¿Cuántos escalares distintos de cero satisfacen $c_1u_1 + c_2u_2 + d_1v_1 + d_2v_2 = w$ donde u_1 y u_2, v_1 y v_2 son múltiplos entre ellos? No obstante, los estudiantes corrigieron sus respuestas cuando se les facilitó un archivo de Geogebra que les permitió la interpretación correcta de las respuestas de estas preguntas. La entrevista se reanudó, y tras la precedente reflexión de los estudiantes, ellos contestaron los cuestionamientos del investigador y trabajaron en el siguiente ejemplo:

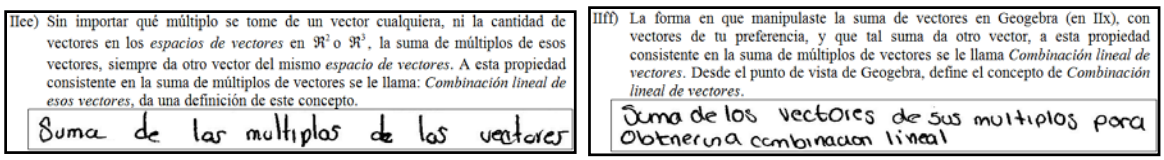
19 Inv-Ent: ¿Cuántos escalares distintos de cero satisfacen $cu + dv + ew = 0$? Donde los vectores u, v y w no son múltiplos entre ellos. [*En el pizarrón fueron trazados los vectores* u*,* v *y* w *no múltiplos entre sí.*]

20 E2 y E3: ¡Infinidad! [*Respuesta categórica.*].

21 Inv-Ent: ¿Cuántos vectores de $\Re^2$ como mínimo se necesitan para que sólo exista un par de escalares c y d que satisfagan $w = c_1u_1 + +c_2u_2 + ... + d_1v_1 + d_2v_2...$?

22 E3: ¡Dos! [Respuesta categórica, que E2 acepta con un movimiento de cabeza; posición de los estudiantes que se puede interpretar que ellos estaban percibiendo propiedades (Mason, 2008) de suma de vectores.]

La contundencia de las respuestas de los estudiantes E2 y E3: líneas 20 y 21, es consecuencia de haber efectuado las Tareas con papel-y-lápiz y con Geogebra.


IIee) Sin importar qué múltiplo se tome de un vector cualquiera, ni la cantidad de vectores en los *espacios de vectores* en $\Re^2$ o $\Re^3$, la suma de múltiplos de esos vectores, siempre da otro vector del mismo *espacio de vectores*. A esta propiedad consistente en la suma de múltiplos de vectores se le llama: *Combinación lineal de esos vectores*, da una definición de este concepto.

Suma de las multiplos de los vectores

IIff) La forma en que manipulaste la suma de vectores en Geogebra (en IIx), con vectores de tu preferencia, y que tal suma da otro vector, a esta propiedad consistente en la suma de múltiplos de vectores se le llama *Combinación lineal de vectores*. Desde el punto de vista de Geogebra, define el concepto de *Combinación lineal de vectores*.

Suma de los vectores de sus multiplos para obtner una combinacion lineal

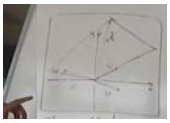
Figura 7. Definición del concepto Combinación lineal de vectores.

Para los estudiantes no resultó sencillo definir el concepto de Combinación lineal de vectores; así lo muestra la solución de la Tarea IIee) en la Figura 7; sin embargo, en la Tarea IIff), el Equipo 3 definió este concepto, a partir del trabajo efectuado en Geogebra, durante la resolución de la Actividad II. En su trabajo, los estudiantes mostraron un acercamiento favorable en la definición del concepto, comparado con la solución de la Tarea IIee).

Con la terminación de las Tareas de la Actividad II, aunado al estudio llevado a cabo en la Actividad I, los estudiantes estaban preparados para trabajar el concepto de Dependencia e independencia lineal de vectores.

Análisis y discusión de resultados: Actividad III Dependencia e independencia lineal de vectores en $\Re^2$ y $\Re^3$

En un contexto similar que en las Actividades I y II precedentes, en la Actividad III el estudiante trabajó en Tareas que lo condujeron a la definición de los conceptos Conjunto de vectores linealmente dependientes y Conjunto de vectores linealmente independientes en $\Re^2$ y $\Re^3$. La entrevista inició cuando el investigador preguntó: ¿Cuántas *combinaciones lineales* determinan dos vectores no múltiplos de $\Re^2$? La respuesta de E3 fue la siguiente:

23 E3: Es única, porque los vectores decíamos que en este ejemplo:  [*señala con el dedo de su mano izquierda el dibujo trazado en el pizarrón*], son dos vectores que no son múltiplos [*se refiere a los vectoes* v *y* w], si fueran múltiplos sería en esta forma: , y generarían una recta; pero como no son múltiplos, se encuentra una constante multiplicada por v y otra multiplicada por w, esas constantes son únicas que generarían otro vector [*de* $\Re^2$.]

24 Inv-Ent: En la Actividad II vimos que la Combinación lineal: $c(1,2)+d(3,-1)=(0,0)$ es única; es decir, $c=0$ y $d=0$; pero en $c(1,4,3)+d(-2,-3,3)+$ $+e(-4,10,1)=(0,0,0)$, ¿la terna $c=0$, $d=0$ y $e=0$ es única, o habrá otras ternas que resuelvan [satisfagan] esta ecuación vectorial?

25 E3 ¡Sí hay más ternas! [*No convencido.*]

26 Inv-Ent: ¿Cómo podrían argumentar que no exista otra alternativa además de la terna $c=0$, $d=0$ y $e=0$?

Una vez que el Equipo 3 construyó los vectores, usando Geogebra (véase Figura 8), el investigador les preguntó si los vectores u, v y w son múltiplos uno del otro. He aquí sus respuestas:

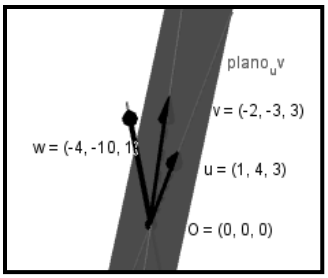


Figura 8. Vectores u, v y w de $\Re^3$ no múltiplos entre ellos.

27 E2: ¡No! Ningún vector se encuentra en el Espacio generado de [por] los otros dos. Los vectores no son múltiplos.

28 Inv-Ent: Entonces, ¿cuál es su respuesta? [*Se refiere a la pregunta hecha en la línea 26.*]

El investigador se dio cuenta de que a los alumnos se les dificultaba contestar la pregunta de la línea 26 (con tres vectores no múltiplos entre sí de $\Re^3$), por lo que decidió trabajar con ellos, usando vectores de $\Re^2$. El investigador solicitó a los estudiantes que abrieran el archivo de Geogebra donde aparecen los vectores u, v y w de manera que manipularan sus múltiplos cu, dv y ew, con la intención de que la Combinación lineal $cu + dv + ew$ fuera el vector cero de $\Re^2$ (véase Figura 9); después, les preguntó: ¿cómo identificas geométricamente que dicha Combinación lineal es el vector cero? E3 contestó:

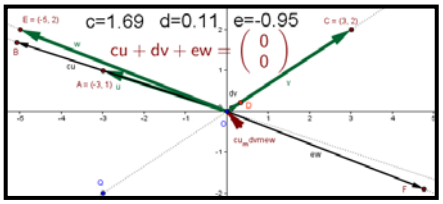
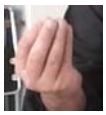


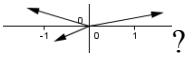
Figura 9. Manipulación de los múltiplos de los vectores u, v y w de $\Re^2$.

29 E3: Su resultante [*se refiere al vector* $cu_m dvmew$ –notación en Geogebra– *de la Figura 9*] disminuye hasta el punto $(0,0)$ [*el estudiante hace un gesto, uniendo los dedos de su mano*:  .]

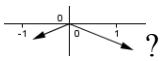
El investigador continuó con la entrevista; con la intención de que los estudiantes profundizaran la idea en torno a que tres vectores no múltiplos de $\Re^2$ tienen una infinidad de combinaciones lineales, que dan como resultado el vector cero; además, que dos vectores no múltiplos de $\Re^2$ tienen sólo una Combinación lineal que da como resultado el vector cero. En seguida, se muestra un extracto de la entrevista sobre lo antes comentado:

30 Inv-Ent: ¿Cuántas combinaciones lineales existen en este ejemplo: ?

31 E1: ¡Una infinidad!

32 Inv-Ent: Y, ¿en este ejemplo:  ?

33 E1, E2 y E3: ¡Una infinidad!

34 Inv-Ent: Y, ¿en este ejemplo:  ?

35 E2 y E3: ¡Una combinación!

El Equipo 3 hizo un comparativo (desde el punto de vista geométrico), de cómo es el número de combinaciones lineales, de tres vectores no múltiplos de $\Re^2$, respecto de dos vectores no múltiplos de $\Re^2$; dejando ver en el primero que existe una infinidad de combinaciones lineales iguales al vector cero, y en el segundo que, sólo hay una Combinación lineal, cuyo resultado es el vector cero (véase el trabajo en Geogebra y la conclusión de los estudiantes en la Tarea IIIj) de la Figura 10).

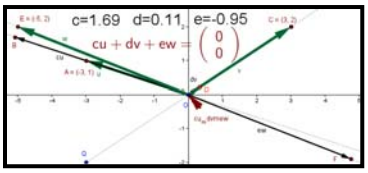
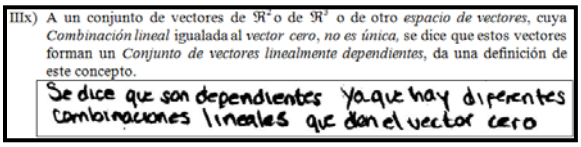
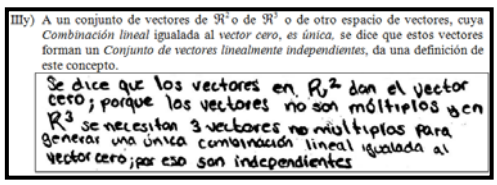


Figura 10. Combinación lineal única.

Un procedimiento similar al precedente, pero ahora analizando conjunto de vectores de $\Re^3$, condujo a los estudiantes a conclusiones semejantes; es decir, ellos –los estudiantes– lograron "descubrir" que tres es el número máximo de vectores no múltiplos de $\Re^3$ (de forma que uno de ellos no se encuentra en el plano que contiene a los otros dos) tales que estos vectores cuentan con sólo una Combinación lineal igual al vector cero. Al final de esta parte de la entrevista, los estudiantes definieron los conceptos: Conjunto de vectores linealmente dependientes, así como el concepto de Conjunto de vectores linealmente independientes, en términos del número de combinaciones lineales de los vectores que den el vector cero en espacios vectoriales euclidianos de cualquier dimensión. Al respecto, los estudiantes escribieron en la Tarea IIIx) y en IIIy) (véase Figura 11), la forma como aprendieron estos conceptos.


IIIx) A un conjunto de vectores de $\Re^2$ o de $\Re^3$ o de otro *espacio de vectores*, cuya *Combinación lineal* igualada al *vector cero*, *no es única*, se dice que estos vectores forman un *Conjunto de vectores linealmente dependientes*, da una definición de este concepto.

Se dice que son dependientes ya que hay diferentes combinaciones lineales que dan el vector cero


IIIy) A un conjunto de vectores de $\Re^2$ o de $\Re^3$ o de otro espacio de vectores, cuya *Combinación lineal* igualada al *vector cero*, *es única*, se dice que estos vectores forman un *Conjunto de vectores linealmente independientes*, da una definición de este concepto.

Se dice que los vectores en R^2 dan el vector cero; porque los vectores no son múltiplos y en R^3 se necesitan 3 vectores no múltiplos para generar una única combinación lineal igualada al vector cero; por eso son independientes

Figura 11. Definición de Conjunto de vectores linealmente dependientes (Tarea IIIx) y Conjunto de vectores linealmente independientes (Tarea IIIy).

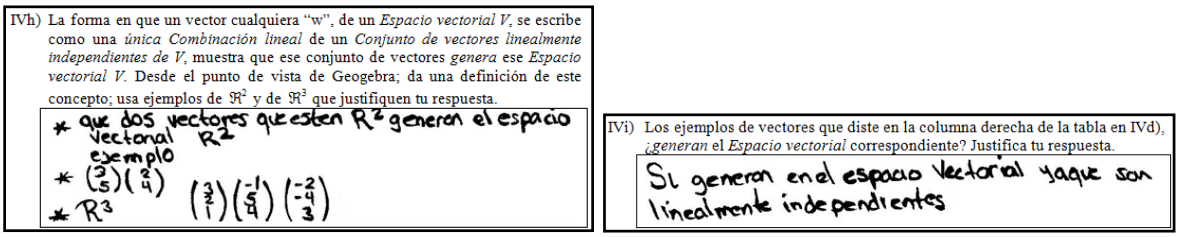
En los comentarios de los estudiantes correspondientes a las Tareas IIIx) y IIIy) de la Figura 11, podemos observar que no son precisos al definir Conjunto de vectores linealmente dependientes y Conjunto de vectores linealmente independientes; sin embargo, en estas declaraciones, los estudiantes dejan ver un acercamiento a la definición de los conceptos antes mencionados.

Análisis y discusión de resultados de la Actividad IV: Base de un espacio vectorial

El propósito de esta Actividad es que los estudiantes logren el aprendizaje del concepto de Base de un espacio vectorial. A partir de los datos disponibles, podemos afirmar que los estudiantes lograron llegar a la definición del concepto de Espacio vectorial, aunque ésta no es del

todo formal –para cualquier Espacio vectorial– tal como es dada en la mayoría de los libros de Álgebra lineal utilizados con frecuencia como textos de enseñanza de tales conceptos.

Es pertinente aclarar que en esta Actividad IV, por problemas técnicos no fue posible rescatar las evidencias de audio de la entrevista (por parte del investigador), sin embargo, a continuación mostramos las evidencias escritas de cómo los estudiantes resolvieron las Tareas de esta Actividad. Antes de dar la definición del concepto de Base de un espacio vectorial, los estudiantes definieron el concepto de Espacio generado de un Espacio vectorial. En la Tarea IVh) se observa que los alumnos tuvieron dificultades para describir el concepto de Conjunto generador de vectores de un Espacio vectorial, pero acertaron en los ejemplos (véase Figura 12).


IVh) La forma en que un vector cualquiera "w", de un *Espacio vectorial V*, se escribe como una *única Combinación lineal* de un *Conjunto de vectores linealmente independientes de V*, muestra que ese conjunto de vectores *genera* ese *Espacio vectorial V*. Desde el punto de vista de Geogebra; da una definición de este concepto; usa ejemplos de $\Re^2$ y de $\Re^3$ que justifiquen tu respuesta.

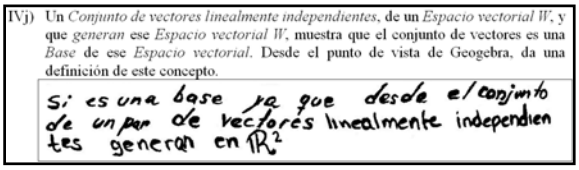
* que dos vectores que esten R^2 generen el espacio vectorial R^2
ejemplo
* $\binom{2}{5}\binom{3}{4}$
* R^3 $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\5\\4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-2\\-4\\3\end{pmatrix}$

IVi) Los ejemplos de vectores que diste en la columna derecha de la tabla en IVd), *¿generan* el *Espacio vectorial* correspondiente? Justifica tu respuesta.

Si generan en el espacio vectorial yaque son linealmente independientes

Figura 12. Definición de Espacio generador proporcionada por los estudiantes.

Una vez que los estudiantes llevaron a cabo las Tareas IVh) y IVi) (véase Figura 12), se esperaba que estuvieran preparados para definir el concepto de Base de un espacio vectorial. En la Tarea IVj), los estudiantes pudieron "asimilar" esta idea, y a su manera entender el concepto. En la Figura 13 ellos dan la definición del concepto antes mencionado, apoyados en Geogebra, aunque su definición está restringida al Espacio vectorial $\Re^2$.


IVj) Un *Conjunto de vectores linealmente independientes*, de un *Espacio vectorial W*, y que *generan* ese *Espacio vectorial W*, muestra que el conjunto de vectores es una *Base* de ese *Espacio vectorial*. Desde el punto de vista de Geogebra, da una definición de este concepto.

Si es una base ya que desde el conjunto de un par de vectores linealmente independientes generan en $\Re^2$

Figura 13. Definición del concepto Base de un espacio vectorial dado por el Equipo 3.

Conclusiones

Los datos disponibles, junto con su análisis, nos permiten dar respuesta parcial a la pregunta: ¿Cómo influyen las representaciones gráficas de conceptos de Álgebra lineal, que minimizan las dificultades de su aprendizaje, haciendo uso de software dinámico, y de papel-y-lápiz? Aunque en este artículo documentamos el trabajo de un solo equipo de estudiantes, es evidente que ellos lograron mejorar su aprendizaje [volver a aprender de forma reflexiva] cuando hicieron uso de Geogebra para abordar las Tareas propuestas. Fue evidente que la forma dinámica de las representaciones gráficas de vectores, y de sus combinaciones lineales produjo en ellos reflexiones en torno al aprendizaje de conceptos (previamente adquiridos en ambiente de papel-y-lápiz). Aun cuando carecían de un buen manejo sintáctico que les permitiera resolver los sistemas de ecuaciones asociados con esas Combinaciones lineales de vectores, ellos fueron capaces de conjeturar el significado de los conceptos en discusión apoyados en las representaciones de los vectores usando Geogebra. Sin embargo, los estudiantes tuvieron dificultades para *extrapolar* las definiciones de conceptos asociados con el de Base de un especio vectorial cualquiera [y el de Base mismo] para espacios vectoriales euclidianos, cuya dimensión es mayor o igual que 4. En ambiente tecnológico puede servir de *puente* para que los alumnos

logren aprender conceptos abstractos de álgebra lineal, siempre que no sea olvidado el de papel-y-lápiz.

Referencias y bibliografía

Dorier, J-L., Robert, A., Robinet, J. & Rogalski, M. (2000). The obstacle of formalism in linear algebra. En J. L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 85-124). Holanda: Kluwer Academic Publishers. ISBN: 978-0-7923-6539-6

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales* [Trad. Vega, M., del Francés al Español]. Cali, Colombia: Universidad del Valle. ISBN: 9-5880-3023-4

Duval, R. (2003). «Voir» en mathématiques. En E. Filloy (Coord.), *Matemática Educativa: aspectos de la investigación actual* (pp. 41-76). México: Fondo de Cultura Económica. ISBN: 9681670280

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *61*, 103–131. doi: 10.1007/s10649-006-0400-z

Gol, T. S. & Sinclair, N. (2010). Shifts of attention in DGE to learn eigen theory. En M. F. Pinto & T. F. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 33-40). Belo Horizonte, Brazil: PME. ISSN: 0771-100X

Guzmán & Zambrano (2014). Influencia de dos ambientes: el tecnológico y el de papel-y-lápiz en el aprendizaje de conceptos de álgebra lineal. *VI Seminario Nacional de Tecnología Computacional en la Enseñanza y el Aprendizaje de la Matemática*, Memoria del SNTCEAM, 2012, Capítulo 22 libro electrónico "Tecnología Computacional en la Enseñanza de las Matemáticas" ISNB: 978-607-27-0301-8, Monterrey, N.L.

Mason, J. (2008). Being mathematical with and in front of learners: attention, awareness and attitude as sources of differences between teacher educators, teachers and learners. En T. Wood & B. Jaworski (Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education: Vol. 4. The mathematics teacher educator as a developing professional* (pp. 31–56). Rotterdam, Holanda: Sense Publisher. ISBN: 978-90-8790-550-7

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. En J. L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra in question* (pp. 209-246). Holanda: Kluwer Academic Publisher. ISBN: 978-0-7923-6539-6

Soto, J. L. & Romero, F. C. (2011). El concepto de transformación lineal: una aproximación basada en la conversión gráfico-algebraica, con apoyo de GeoGebra. En F. Hitt & C. Cortés (Eds.), *Formation à la recherche en didactique des mathématiques* (pp. 38-49). Canadá: Loze-Dion. ISBN: 978-2-9235-6554-5

Caracterização em uma trajetória de aprendizagem com funções trigonométricas

Sonner Arfux de **Figueiredo**
Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
Brasil
sarfux@uems.br
Nielce Meneguelo **Lobo da Costa**
Universidade Anhanguera de São Paulo
nielce.lobo@gmail.com
Salvador **Llinares**
Universidad de Alicante
España.
sllinares@ua.es
Julia **Valls** González
Universidad de Alicante
España
juliavalls@ua.es

Resumo

Esta comunicação aborda informações sobre como um experimento de ensino em um entorno tecnológico usando o *Software* GeoGebra ajudou acadêmicos de um Curso de Licenciatura em Matemática a caracterizar a construção do significado de funções trigonométricas. Fundamentado no processo de equilibração de Piaget (1977) procura explicar a aprendizagem profissional pelo mecanismo *hypothetical learning trajectory*. Embasado nas discussões sobre HLT de Simon, Tzur, Heinz e Kinzel (2004) apresentamos a discussão de um episódio sobre o uso de HLT. Os resultados apresentam distintas ideias usando argumentos variados para associar ao gráfico e definição de uma função trigonométrica. Um destes argumentos foi em relação à alteração da posição dos parâmetros na representação da função. Os resultados indicam que as interações dinâmicas com o sistema tecnológico na HLT podem favorecer a generalização necessária para o desenvolvimento de processos de abstração reflexiva que incidem na elaboração do conceito de funções trigonométricas

Palavras chave: funções trigonométricas, processo de generalização, recurso tecnológico, experimento de ensino, trajetória hipotética de aprendizagem.

Introdução

O ensino e aprendizagem de trigonometria tem sido objeto de debate e investigação nas últimas décadas e constitui uma parte importante nos cursos de Licenciatura de Matemática, servindo como um dos conteúdos de transição da matemática da educação básica para o ensino universitário. Com aplicação incontestável nas diversas áreas das ciências exatas, seu estudo deve: atender a compreensão das ideias e conceitos básicos, a sua aplicação na resolução de problemas e na manipulação nas regras e algoritmos e a sua aplicação no estudo de cálculo, entre outras disciplinas.

Contudo, estudos de Brito e Morey (2004) evidenciam que a trigonometria, quando abordada no Ensino Médio, não explora competências e habilidades para o desenvolvimento da mesma. Em suas pesquisas, os autores evidenciaram que, quando esse estudo é realizado, sua abordagem é superficial, deixando de incluir itens importantes do conteúdo de trigonometria como, por exemplo, no que implica a alteração da posição dos parâmetros na representação de funções trigonométricas, como, $f(x)=2 + \sin(x)$; $f(x) = 2.\sin(x)$ e $f(x) = \sin(2.x)$, ou ainda, como o aluno entende o significado da tangente de x percebendo o x como argumento da tangente e não como um produto de duas variáveis, e a correspondência deste como a medida de arco do círculo trigonométrico tomada em radianos.

Distintas investigações (Lindegger, 2000; Briguenti, 1998; Almeida, 2000; Valente, 2001; Brito e Morey, 2004 e Lobo da Costa, 2004) recomendam a abordagem dos conceitos de trigonometria a partir de (a) situações-problema relacionadas ao cotidiano; (b) trabalho em equipe de modo a permitir a troca de pontos de vista; (c) o uso de instrumentos necessários para visualização e compreensão das funções trigonométricas. Estas pesquisas evidenciam como questão importante estabelecer o domínio, a imagem e as múltiplas representações semióticas de uma função trigonométrica. A trigonometria é um dos conteúdos cujo conceito se inicia no ensino médio e retorna na pauta do curso de Licenciatura em Matemática servindo como base de sustentação para as demais disciplinas do curso como o cálculo, a física, a geometria, a geometria analítica, entre outras.

Alguns estudos didáticos sobre o uso das tecnologias da informação na educação têm se apresentado de forma constante na literatura. Pesquisas assinalam as contribuições do uso desse recurso na aprendizagem de conceitos matemáticos evidenciando que o uso das tecnologias, possibilita o aluno a identificar representações equivalentes na definição de um mesmo conceito, além de favorecer a interação e dinamismo. Entre esses estudos, podemos citar os desenvolvidos por (Borba e Penteado, 2007; Borba e Villareal, 2005; Mira, Valls, Llinares, 2013; Zulatto, 2007 e Barbosa, 2009).

Nosso trabalho se enquadra nas investigações que se preocupam em compreender como o acadêmico constrói os significados em uma situação de aprendizagem com o *Software* GeoGebra em um estudo exploratório do conteúdo de funções trigonométricas e, em particular, de modo a analisar como este ajuda a relacionar a compreensão do argumento de funções trigonométricas no ensino superior.

As investigações a que nos propomos tem a finalidade de explorar a construção do significado do conceito de funções trigonométricas a partir de diferentes registros (compreensão). Neste aspecto, seguimos Duval (1998) para o qual a compreensão de um conceito requer a coordenação de diferentes registros de representação, pois somente com um registro não se explora toda a complexidade do conceito.

A investigação que apresentamos tem como objetivo identificar:

- Características do processo de construção do significado do conceito de funções trigonométricas;
- Como influencia na construção do significado quando relaciona o gráfico de uma função trigonométrica a partir do deslocamento vertical, sua amplitude, seu domínio e do período dado.

Marco Teórico

Perspectivas construtivistas de aprendizagem têm sido centrais para grande parte do recente trabalho teórico empírico em Educação Matemática de Steffe e Gale, (1995), Von Glasersfeld (1991), e Coll e Solé (2009). Estes autores defendem a concepção construtivista como um instrumento para análise de situações educativas que também pode ser utilizado para a tomada de decisões referentes ao planejamento, aplicação e avaliação do ensino. Para os autores, o Construtivismo favorece o desenvolvimento de situações de aprendizagem ao analisar e buscar recursos que ajudam a compreender por que o aluno não aprende e como o professor deve desenvolver estratégias para tentar ensiná-lo. Simon (1995) destaca que o construtivismo provê preciosas contribuições acerca de como deve ser levado a cabo o processo de aprendizagem para promover mudanças na Pedagogia da Matemática. O autor enfatiza que o construtivismo traz contribuições que vão além do trabalho do professor e aborda temas como currículo na práxis construído em sala de aula, o desenvolvimento de materiais didáticos e a elaboração de pesquisas na área educacional.

Trajetória hipotética de aprendizagem-HLT.

Nesse aspecto nos apoiamos em estudos de Simon, Tzur, Heinz, Kinzel (2004) para explicar o processo de uma HLT. A trajetória se refere aos caminhos que os alunos devem seguir para a construção dos conhecimentos pretendidos pelo professor. Para os autores, o termo "hipotético" compreende duas perspectivas: a que entende que o professor tem acesso apenas às hipóteses dos conhecimentos dos alunos, isto é, não consegue acessar diretamente o conhecimento dos aprendizes e a outra perspectiva, para fazer referência ao prognóstico, à expectativa do professor, a respeito de como a aprendizagem será processada pelos alunos.

O Mecanismo sobre a atividade-efeito é uma reflexão sobre a trajetória hipotética de aprendizagem (*Hypothetical Learning Trajectory*) proposta por Simon, Tzur, Heinz, Kinzel (2004), elaborada a partir das ideias de Piaget (1997, p. 315) sobre abstração reflexiva. Para Piaget (2001), a abstração reflexiva é uma característica do mecanismo de equilibração e é "construtiva, e não meramente indutiva ou extensional". A equilibração é o processo pelo qual os alunos constroem novas concepções via assimilação e acomodação das concepções anteriores.

Esse mecanismo identifica as fases de elaboração de um novo conceito - a participação no processo no qual o aluno abstrai uma regularidade na relação entre a atividade realizada e o efeito produzido enquanto antecipadamente se refere ao uso da regularidade abstraída em situações distintas da que levou a cabo da abstração. Assim, a base teórica de Simon *et al* (2004), foi construída a partir de dois conceitos-chave da teoria piagetiana, quais sejam: o de equilibração (assimilação e acomodação) e o de abstração reflexiva.

Assim, Simon *et al* (2004) buscaram aspectos da teoria de Piaget (2001) para construírem uma teoria da aprendizagem matemática e elaborarem em detalhes um mecanismo para explicar a aprendizagem conceitual que fosse suficiente para subsidiar o ensino da matemática. Simon (1995) desenvolveu o Ciclo de Ensino (Figura 1) para apresentar um modelo esquemático cíclico de inter-relação dos aspectos que representam as relações entre os conhecimentos do professor, pensamento e reflexões e tomada de atitudes. No ciclo em questão, Simon (1995) mostra que quando um determinado tema é desenvolvido em sala de aula, as atividades elaboradas anteriormente podem sofrer ajustes em consequência das observações do professor em relação às atitudes dos alunos. Com isso, a elaboração da HLT pode ser usada na concepção do currículo, podendo fornecer um quadro para conceituar a criação de conjuntos de aulas destinadas a desenvolver um novo conceito.

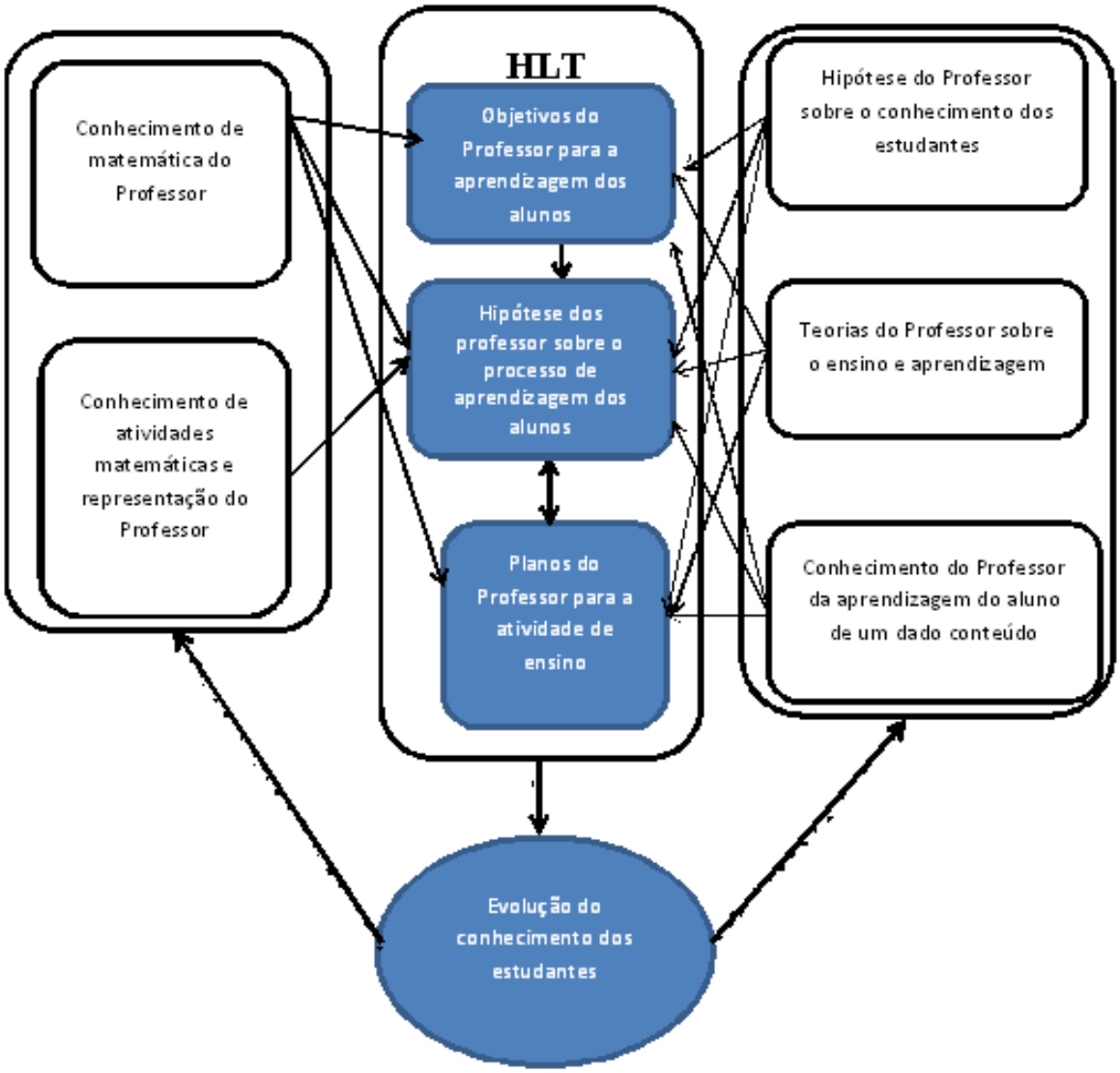


Figura 1. Ciclo de ensino de Matemática. Adaptado (SIMON, 1995, p, 137)

Segundo Simon (1995), os domínios de conhecimento dos professores também podem informar diretamente a avaliação do conhecimento dos alunos; contudo, esta não foi a ênfase do modelo e, a fim de simplificar o diagrama, as flechas não estão incluídas. O ciclo é uma proposta de formulação dos modelos de ensino o qual se parte de um objetivo inicial podendo este muitas vezes ser alterado para melhor se adaptar ao grupo de aprendizes. Segundo Simon (1995), o professor continua envolvido no ajuste a HLT; às vezes, a ordem se encontra em sintonia, enquanto em outras vezes toda a pressão da lição deve ser descartada em favor de uma ou mais adequadação, contudo, o grau de modificação nas alterações realizadas pode ser em qualquer um ou em todos os três componentes da HLT: o objetivo, as atividades, ou o hipotético processo de aprendizagem.

O termo Ciclo de Aprendizagem assim se justifica pois quando o professor tece observações a respeito do uso da atividade e demanda esforços para elaborar novas, o ciclo se inicia, caracterizando assim as relações cíclicas. A noção de uma trajetória hipotética de

aprendizagem não se destina a sugerir que o professor sempre persegue um objetivo de cada vez ou que só uma trajetória é considerada, pelo contrário, ela serve para sublinhar a importância de ter um objetivo e justificativa para as decisões de ensino e a natureza hipotética de tal pensamento. Esse mecanismo identifica as fases de elaboração de um novo conceito - a participação no processo no qual o aluno abstrai uma regularidade na relação entre a atividade realizada e o efeito produzido enquanto antecipadamente se refere ao uso da regularidade abstraída em situações distintas da que levou a cabo da abstração.

Na HLT entra em cena a maneira em que se caracteriza o mecanismo de reflexão sobre a relação atividade-efeito, ou seja, a relação atividade-efeito começa quando o estudante resolve uma determinada tarefa (objetivo do estudante) que determina uma série de ações mentais que dependem de seu conhecimento prévio. *"É na ação mental, se há ou não atividade física envolvida, que é a base para a aprendizagem conceitual."* (Simon *et al*, 2004, p. 94). Para alcançar seu objetivo, o estudante realiza uma determinada tarefa (atividade dirigida por um objetivo) proporcionando a possibilidade de prestar atenção nos efeitos da atividade realizada (efeito das atividades), este processo de observação dos efeitos na atividade o estudante cria registros mentais (registro da relação atividade-efeitos).

Assim para entender o desenvolvimento das estruturas mentais por parte dos estudantes, ou seja, estabelecer explicitamente as relações entre as características da HLT de estudantes e características de sequências de ensino (identificar os objetivos de aprendizagem, definir fluxos de trabalho e contribuir para uma avaliação detalhada dos entendimentos de matemática do estudante), Simon e Tzur (2004) identificaram três tipos de tarefas com potencial para auxiliar os alunos na construção de um novo conceito para a compreensão, na perspetiva da reflexão sobre a relação atividade-efeito.

- ✓ **Tarefas iniciais:** pode ser realizada por estudantes que usam seu conhecimento prévio.
- ✓ **Tarefas reflexão:** o objetivo é que os alunos reflitam sobre esse relacionamento para gerar abstração de regularidades na relação atividade-efeito.
- ✓ **As tarefas de antecipação:** Para realizar é necessário que se tenha produzido a abstração e regularidade na relação atividade-efeito.

As tarefas iniciais são usadas para a criação e o reconhecimento de certas experiências; as tarefas reflexivas são para direcionar a atenção dos alunos para a relação atividade-efeito e as tarefas de antecipação têm o intuito de levar os estudantes a identificar e analisar regularidades. O conceito é considerado como uma relação dinâmica mental entre uma atividade e seus efeitos. Segundo Simon e Tzur (2004), as metas de aprendizagem que os alunos podem alcançar estão relacionadas com suas concepções correntes e com as tarefas que lhes são disponibilizadas. Assim sendo, para o professor, entra em cena o mecanismo de reflexão sobre a relação atividade-efeito quando consideramos sua necessidade de selecionar, entre as atividades disponíveis, tarefas que possam impulsionar o processo de aprendizagem dos alunos.

Considerando a problemática de investigação inicialmente descrita, os objetivos e a perspectiva teórica adotada, a pergunta de investigação proposta foi: Que papel desenpenha o Sofware em apoiar a fase de participação, no conhecimento do significado de funções trigonométricas?

Participantes e desenho do experimento de ensino

Esta investigação se desenvolveu em um processo de formação inicial e aborda informações sobre um experimento de ensino de funções trigonométricas usando o *Software* GeoGebra, cujo objetivo foi compreender a integração da Prática como Componente Curricular (PCC) na Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul-UEMS, no Curso de Licenciatura em Matemática da Unidade Universitária de Nova Andradina.

Dezesseis acadêmicos de uma turma ingressante na Universidade participaram do experimento de ensino onde se trabalhou o conteúdo de funções trigonométricas. O experimento teve duração de 12 seções de 50 minutos divididos em quatro módulos, sendo que os módulos I e III com duas seções cada e os módulos II e IV com quatro sessões cada.

O contexto foi um experimento de ensino organizado considerando uma trajetória hipotética de aprendizagem (HLT) no conceito de funções trigonométricas. O experimento foi desenhado usando tarefas envolvendo recursos tecnológicos e considerando a concepção de uso da informática no ensino de matemática na formação de Professores integrado à prática pedagógica (Lobo da Costa, 2004). As tarefas destes módulos se articularam a partir dos seguintes pontos:

- Conceito de funções trigonométricas e sua relação com o ciclo trigonométrico;
- Exploração e conjecturas na validação entre o argumento de função trigonométrica e sua definição com o uso da tecnologia;
- Exploração gráfica com o *Software* das propriedades.

O módulo I teve como objetivo definir e conceituar funções trigonométricas, sua notação algébrica, a construção gráfica da função seno e reconhecimento da curva senoidal (e possível ressignificação). No laboratório de informática, os estudantes utilizaram o *Software* GeoGebra para explorar as características de uma função trigonométrica (módulo II), formulação de conjecturas, validação de respostas e desenvolvimento do significado de argumento de funções trigonométricas com o *software* (módulo III), e módulo IV, por tarefas, como os estudantes consolidam os conceitos trigonométricos explorando a amplitude, o deslocamento vertical o domínio e período dado a partir do *Software* GeoGebra.

No módulo IV o objetivo foi identificar nas respostas dos acadêmicos a compreensão do argumento de uma função trigonométrica na fase de apropriação em uma HLT. Para isto, os acadêmicos receberam 12 funções trigonométricas com 4 tarefas relacionadas ao seno, cosseno e tangente e optamos pelos mesmos arcos para as funções com o objetivo de o estudante observar as regularidades nesta atividade e refletir sobre a HLT.

- Função seno: $f(x)=\sin x$; $g(x)=\sin (x+\frac{\pi}{2})$; $h(x)=\sin (3.x)$; $k(x)=-2.\sin x$.
- Função cosseno: $f(x)=\cos x$; $g(x)$; $\cos (x+\frac{\pi}{2})$;$h(x)=\cos (3.x)$; $k(x)=-2.\cos x$.
- Função tangente: $f(x)=tg\ x$; $g(x)=tg\ (x+\frac{\pi}{2})$;$h(x)=tg(3.x)$; $k(x)=-2.tg$.

Tarefa 1: Construção de gráficos das funções utilizando o GeoGebra e, a partir de suas observações, responder seu domínio, imagem, amplitude e período.

OBS: Para melhor encaminhamento da atividade, construa a função *f* e outra (por exemplo, a função *g*) na mesma tela, observe e faça suas considerações; siga assim, sempre a função f e

uma das outras. Para cada uma dessas funções apresente o domínio, o conjunto imagem, a amplitude e o período.

Tarefa 2: Observando a tarefa 1 é possível detectar que dentre as funções temos caso(s) de mudança(s) no conjunto imagem, na amplitude e/ou no período em relação à função *f(x)=sin x.*

Tarefa 3: Faça o mesmo para as funções cosseno e tangente em seguida faça observações sobre as mudanças de comportamento nos gráficos das funções, destacando as mudanças das leis dessas funções em relação à lei da função *f*.

Tarefa 4: Considerando as observações feitas no item 1 e a função *f(x)=sin x*, apresente a lei da função *M* sabendo que seu gráfico da função é uma curva que está deslocada verticalmente 3 unidades para cima em relação ao gráfico da função f, possui domínio $\Re$, amplitude 1 e período 2π.

As tarefas acima teve o objetivo de introduzir a generalização do conceito de funções trigonométricas estabelecendo relações entre a função dada e seu argumento; por último, neste módulo, as tarefas tiverem como objetivo apoiar os acadêmicos na translação desde a fase de participação nos módulos anteriores até a fase de antecipação na construção do conceito de funções trigonométricas representado na tarefa 4.

Na tabela 1 descrevemos os objetivos observados em cada tarefa nas atividades elaboradas para o desenvolvimento da HLT.

Tabela1
Objetivo pretendido em cada tarefa.

	Exemplo	Objetivo
Tarefa 1: Definição de Funções	*f(x)=sin x:* esboçar os gráficos na mesma tela do GeoGebra.	Analisar como os acadêmicos relacionam o domínio e imagem da função trigonométrica.
Tarefa 2 e tarefa 3: Refletir sobre a tarefa gerando regularidade na abstração	Explicitar a Função F, G, H, K, e L para seno, cosseno e tangente associando à representações gráficas, caracterizá-las.	Analisar como os estudantes são capazes de observar o comportamento das funções e relacionar o domínio recorrendo a uma função formal.
Tarefa 4: A partir da regularidade nas tarefas anteriores explicitar a Função M.	Definir e conceituar a função M, explicitá-la no comando do *Software* GeoGebra.	Analisar se os acadêmicos são capazes de observar a relação da variável com relação à amplitude, período e deslocamento vertical no gráfico. Analisar como os acadêmicos são capazes de coordenar diferentes informações e para esboçar o gráfico de uma função trigonométrica.

Os acadêmicos realizaram as tarefas individualmente no laboratório de informática com todo o material utilizado no experimento de HLT. Para recolher as interações durante a resolução das tarefas no módulo 4 e nos demais módulos, usamos gravações de áudio e vídeo, gravando tanto as discussões durante o experimento como captação de imagens das telas e anotações realizadas por parte dos acadêmicos.

As tarefas definidas para esta atividade trataram de estabelecer como os acadêmicos empregam o uso dos conceitos envolvidos na função trigonométrica ao responderem

corretamente a atividade 4 onde se pede para construir uma função apenas evidenciando o período, a amplitude e seu deslocamento no eixo da ordenada(y).

Coleta de Dados

Os dados desta investigação foram as transcrições das gravações orais e das telas dos computadores de cada um dos acadêmicos que foram codificados com as iniciais Ac seguido da numeração de 1 a 16. Na resolução da tarefa 1 os acadêmicos não encontraram dificuldades já que tinham vindo de uma sequência de atividades com o GeoGebra; também na resolução da tarefa 2 não apresentaram problemas, todos os acadêmicos afirmaram sim para a questão e explicitaram corretamente suas observações sobre as mudanças ocorridas na função, pois todos tinham anotações dos comportamentos fornecido a eles nos módulos I e II quando definimos e conceituamos funções trigonométricas; dessa forma, a visualização ficou mais fácil, segundo eles. Na tarefa 3 logo observaram a regularidade e resolveram facilmente; cabe observar o registro da fala de um dos acadêmicos, "*com este software ficou mais fácil, a gente digita a função aqui* < se referindo ao comando> *e já sai pronto né, ai é só copiar e anotar os pontos aqui olha*"< se referindo a anotação no caderno>.

Na resolução da tarefa 4 algumas dificuldades surgiram, principalmente por que mudou a forma de abordar a função. Ativamos a função "janela algébrica" no GeoGebra para registrar as "tentativas e movimentos" dos acadêmicos nesta atividade pois, como estavam trabalhando com o *software*, já prevíamos esta ação por parte do acadêmico. Ressalta-se que os mesmos estavam com os materiais didáticos e seus respectivos cadernos para anotações utilizados durante as seções. Contudo dos dezesseis acadêmicos quatro foram obter êxito na atividade em mais de 5 tentativas registradas na janela algébrica.

Análise dos dados

Na análise das respostas dos acadêmicos identificamos os conceitos e ideias utilizados nas tarefas no decorrer da HLT:

Nos módulos I e II: os acadêmicos utilizaram seus conhecimentos prévios oriundos da educação básica para ressignificação de seus conceitos sobre o conteúdo abordado. Neste, o objetivo foi identificar e evidenciar as relações entre a atividade-efeito em contexto de funções trigonométricas e sua relação com o ciclo trigonométrico. Assim, evidenciamos diferentes manifestações de como os acadêmiocs coordenam as informações em diferentes situações e como, por vezes, eles mudaram o foco de atenção. Identificamos que os acadêmicos se encontravam na fase participativa nas tarefas iniciais, faziam usos de conhecimentos prévios de estudos na educação básica contruindo um conjunto de registros, convertendo em uma reflexão e abstração de regularidade na relação atividade-efeito.

No módulo III: Nesta etapa se tratou de caracterizar a fase de participação dos acadêmicos objetivando uma reflexão sobre as tarefas propostas neste módulo generalizando a abstração de regularidades na relação atividade-efeito ficando evidente nas transcrições realizadas e verbalizadas por parte do acadêmico. Neste módulo foi possível ampliar e complementar caracterizações anteriores do processo de coordenação de informações que apoiou o processo de abstração.

No módulo IV: Com o objetivo de levar o acadêmico a fazer o uso do processo de antecipação onde, a partir de dados sobre o comportamento de uma função trigonométrica, o

acadêmico possa generalizar a partir de uma abstração de regularidades na relação atividade-efeito.

Resultados

Os resultados mostram que os acadêmicos responderam majoritariamente usando o processo de construção cognitiva que se refere ao estágio participativo caracterizado por ações cognitivas como classificação dos registros da atividade-efeito ou elementos que combinam estruturas mentais para atingir um determinado objetivo e a coordenação de informações por meio de uma comparação, ou argumentos para gerar uma nova estrutura. Nessa perspectiva, o processo de consolidação de conceitos matemáticos é outra manifestação de abstração reflexiva, que leva a um novo estado cognitivo.

Neste novo estado cognitivo do aluno foi capaz de reconhecer a estrutura matemática na definição de funções trigonométricas (objeto, propriedade, relação, etc (figura 2)) como antecipação na situação, o que mostra certa semelhança com alguma situação de experiência anterior (estudos oriundos da educação básica e módulos iniciais) permitindo seu uso do estágio antecipatório. Este processo cognitivo repetido em situações diferentes leva à possibilidade de consolidação de concepções matemáticas. (Roig, Llinares & Penalva, 2012).

Como exemplo, nesta anotação do acadêmico Ac15, as propriedades, antes de plotar no GeoGebra, destacou-se na anotação o conjunto imagem, informação não fornecida no enunciado.

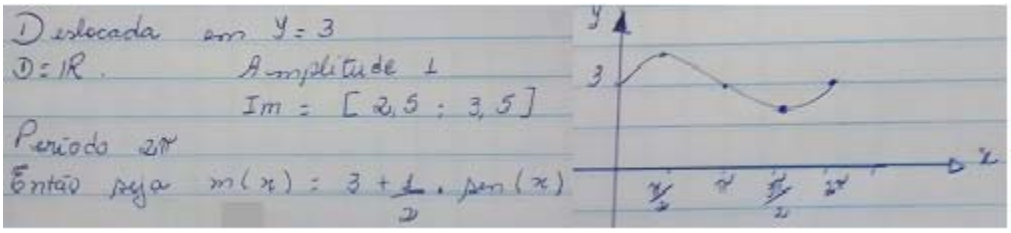


Figura 2: Esboço do acadêmico Ac15, das informações do enunciado da tarefa 4.

Nos protocolos de respostas as telas dos acadêmicos Ac2, Ac7, Ac9 e Ac15, caracterizaram e evidenciaram a construção do significado do argumento de funções trigonométricas e o desempenho do *software* na HLT; também desconsideramos nas respostas como parâmetro à função seno, pois todos os acadêmicos construíram no GeoGebra esta função; assim, não consideramos na análise esta como uma das tentativas de solução da tarefa 4.

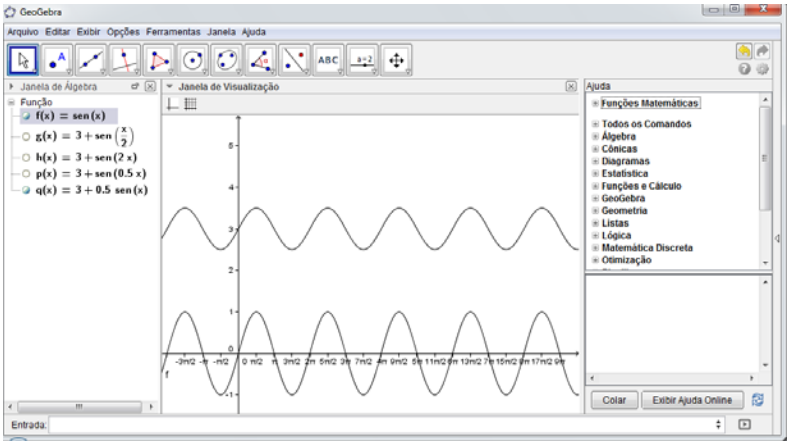


Figura 3. Resposta do acadêmico Ac2 para obter a Função M.

Na figura 3, observando a janela algébrica, notamos que os acadêmicos obteveram sucesso da questão na quarta tentativa e ativou a janela "ajuda" para esboçar a função seno; verificamos que outros três acadêmicos dos 16 analisados também realizaram o mesmo número de tentativas e dois deles com a janela "ajuda" ativados.

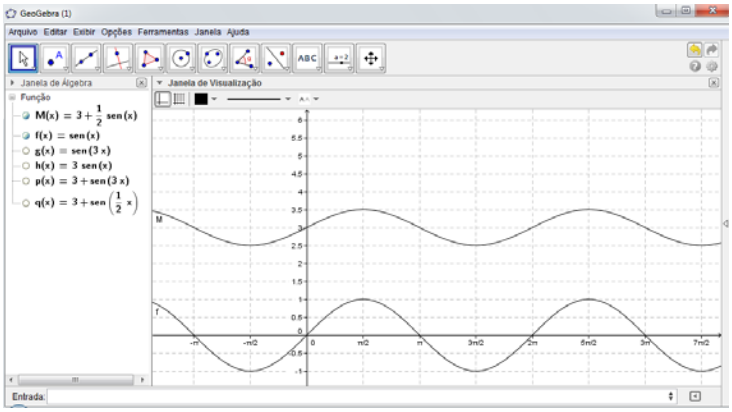


Figura 4. Resposta do acadêmico Ac7 para obter a Função M.

Na figura 4, observa-se na janela algébrica que o acadêmico realizou cinco tentativas, e dois outros acadêmicos também usaram a mesma quantidade de tentativas.

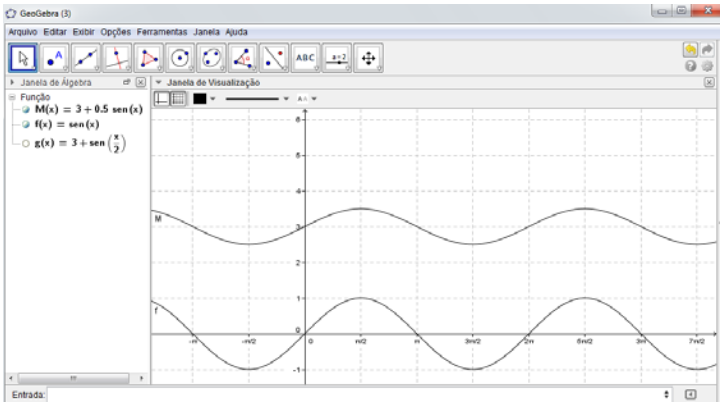


Figura 5. Resposta do acadêmico Ac9 para obter a Função M.

Na figura 5, observa-se na janela algébrica que o acadêmico acertou a questão em duas vezes e mais três acadêmicos também obtiveram o mesmo êxito.

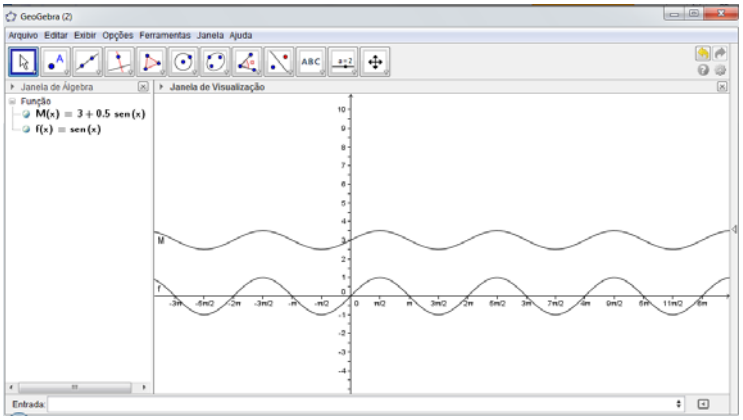


Figura 6. Resposta do acadêmico Ac15 para obter a Função M.

Na figura 6, observamos na janela algébrica que o acadêmico obteve êxito na primeira digitação no *software*.

No experimento, evidenciamos que o contexto tecnológico desenhado, onde se integram diferentes tipos de representações inter-relacionadas, ajudam na evolução da construção do conceito de funções trigonométricas.

A sua interação e dinamismo nas ações com relação a buscar e estender facilitaram aos acadêmicos o entendimento das informações e registros nas relações entre a atividade-efeito na HLT com o *Software* GeoGebra como, por exemplo, na tarefa 4, cinco dos dezesseis acadêmicos compreenderam o comportamento da Função M , e todos realizaram os esboços do gráfico no *Software*, definiram o seu comportamento de forma algébrica sem dificuldade em consequência das funções propostas anteriormente nas tarefas dois e três

Em particular, ressaltamos a ênfase na possibilidade de introduzir assistentes digitais no desenvolvimento de sequências de ensino que tangem as características de um processo de construção dos significados por parte dos estudantes (Lobo Da Costa, 2004).

Concordamos com Coll e Solé (2009) quando afirmam que as intervenções do professor são também responsáveis pelo resultado, ficando para uma posterior análise deste experimento os fatores na sequência de ensino que parecem influenciar no processo de construção do conceito de funções trigonométricas na HLT deste experimento. Neste sentido, nos momentos em que os módulos foram se desenvolvendo com a abordagem construtivista, observamos uma maior autonomia dos acadêmicos, pois quando a quantidade de auxílio é excessiva ou o professor não orientava adequadamente condicionava o acadêmico a aguardar resposta, ou seja, acadêmico sem autonomia.

Neste sentido, Simon *et al* (2004), enfatizam que apenas com o conhecimento matemático não é possível interpretar a linguagem, as dúvidas, as conjecturas e as ações dos alunos. O professor deve conhecer os objetivos de aprendizagem que espera alcançar para que possa modificar a HLT quando perceber que os alunos se distanciaram de suas metas ou quando uma determinada atividade não for adequada aos seus acadêmicos.

Agradecimentos

Agradecemos à CAPES que, por meio de bolsa do Programa PSDE (Proc. nº 0956-14-7), subsidiou parte dos estudos de doutoramento e desta pesquisa.

Referências Bibliográficas

Almeida, M. E. B. *(*2000). *O Computador na Escola:* Contextualizando a Formação de Professores Para a Mudança. 257f . Tese de Doutorado em Educação: Currículo. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Barbosa, S. M. (2009). *Tecnologias da informação e comunicação, função composta e regra da cadeia.* 199 f. Tese de doutorado. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, SP.

Borba, M. C., & Penteado. M. G.(2007). *Informática e educação matemática.* Belo Horizonte: Autêntica.

Borba, M. C., & Villarreal, M. E. (2005). Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization. *New York: Springer.*

Briguenti, M. J. L.(1998). *Alterando o ensino da trigonometria em escolas públicas de nível médio, a representação de algumas professoras.* Tese de Doutorado em Educação. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Marília.

Brito, A. J.; Morey, B. B. (2004). Trigonometria: dificuldades dos professores de matemática do ensino fundamental. *Horizontes,* Bragança Paulista, v. 22, n. 1, p. 65-70, jan./jun.

Coll, C.; Solé, I.(2009). Os professores e a concepção construtivista.In *O construtivismo na sala de aula.* Trad. Claudia Schilling São Paulo: Ática, 2009.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. En C. Mammana and .Villani (eds.) *Perspective on the Teaching of the Geometry for the 21st Century* (37-51). Dordrecht, Netherland: Kluwer Academic Publishers.

Lindegger, L. R. M. (2000). Construindo os conceitos básicos da trigonometria no triângulo, uma proposta a partir da manipulação de modelos. Dissertação mestrado em Educação Matemática. PUC/São Paulo.

Lobo da Costa, N. M.(2004). *Formação de Professores para o ensino da Matemática com a informática Integrada à prática Pedagógica:* exploração e análise de dados em bancos computacionais. Tese de Doutorado em Educação. Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

Mira, M.; Valls, J.; Llinares, S. (2013). Un experimento de enseñanza sobre el limite de una función. Factores determinantes en una trayectoria de aprendizaje. *UNION. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, nº 36*, 89-107.

Piaget, J. (1977). *Studies in Reflecting Abstraction.* Sussex: Psychology Press.

_____.(2001). *Studies in reflecting abstraction.* Sussex, England: Psychology Press.

Piaget, J., García, R. (1982). *Psicogénesis e historia de la ciencia*. Siglo XXI editores. México.

Roig, A. Llinares, S.; Penalva, M. C. (2012). Different Moments in the Participatory Stage of the Secondary Students' Abstraction Mathematical Conceptions. *Bolema*, Rio Claro (SP), v. 26, n. 44, p. 1345-1366, dez. 2012.

Simon, M. A. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education.* Vol. 26, No. 2, 114-145.

Simon, M. A., Tzur R. (2004). Explicating the Role of Mathematical Tasks in conceptual Learning: An Elaboration of the Hypothetical Learning Trajectory. Mathematical Thinking and Learning, 6(2), 91-104.

Simon, M. A., Tzur, R., Heinz, K. and Kinzel, M. (2004). Explicating a mechanism for conceptual learning: elaborating the construct of reflective Abstraction. J*ournal for Research in Mathematics Education,* 35(5), 305-329.

Steffe. L. & Gale. J. (Eds.) (1995). *Constructivism in education*. Hillsdale. NJ: Lawrence Erlbaum.

Tzur, R. (1999). An Integrated study of children's construction of improper fractions and the teacher's role in promoting that learning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 30 (4), 390-416.

Valente, J. A. (2001). Criando oportunidades de aprendizagem continuada ao longo da vida. *PÁTIO – Revista Pedagógica.* Porto Alegre: Editora Artes Médicas Sul, Ano IV, nº.15 , nov.2000 – jan. 01.

von Glasersfeld. E. (1991). Radical constructivism in mathematics education. *Dordrecht, The Netherlands*: KJu wer.

Zulatto, R. B. A.(2007). *A natureza da aprendizagem matemática em um ambiente online de formação continuada de professores.* 173 f. Tese de doutorado. Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro, SP, 2007.

Construcción de conceptos matemáticos mediante la visualización geométrica

César **Briseño** Miranda
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
México
cbriseno@cinvestav.mx
José **Guzmán** Hernández
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
México
jguzman@cinvestav.mx

Resumen

En este estudio se reportan los resultados obtenidos al trabajar con estudiantes de tercer semestre de bachillerato dos problemas relacionados con la visualización de representaciones geométricas en ambientes de papel-y-lápiz y tecnológico. Esta investigación pretende identificar de qué forma el uso de la tecnología contribuye en la construcción de conceptos matemáticos mediante el estudio de figuras geométricas. Se trata de un estudio de tipo cualitativo, cuyo marco conceptual está basado en la teoría de representaciones de Duval y en la visualización de objetos matemáticos con ayuda tecnológica. En este trabajo se diseñaron e implementaron Actividades relacionadas con la visualización de figuras geométricas del tipo estático y dinámico. Los resultados muestran que la herramienta tecnológica potencia la visualización de representaciones geométricas, pero el papel-y-lápiz como herramienta de trabajo se vuelve necesario para conjeturar conceptos abstractos surgidos de tales representaciones.

Palabras clave: visualización, representaciones, geometría, ambientes, tecnología.

Introducción y planteamiento del problema

La visualización como herramienta de enseñanza y de aprendizaje de conceptos matemáticos (especialmente de geometría) ha sido foco principal de investigación desde hace varios años. Diversos autores (e.g., Arcavi, 2003; Duval, 1999; Presmeg, 2006; Phillips, L.M., Norris, S.P., & Macnab, J.S., 2010, entre otros) han reconocido la importancia de la visualización para lograr la construcción (en los estudiantes) de conceptos matemáticos. De acuerdo con Presmeg (2006), la investigación sobre la visualización en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas comenzó en las décadas de los 70 y 80, basándose en la psicología teórica. En la década de los 90, cuando la importancia de este campo de investigación fue reconocida en educación matemática, se convirtió en centro de temas diversos entre los que destacan el desarrollo curricular y la eficacia de la visualización en el aprendizaje de las matemáticas. A partir del año 2000 se ha observado un aumento en las investigaciones sobre la visualización de figuras desde el punto de vista semiótico, dando prioridad a la comprensión de los conceptos de imagen y de representación. En la actualidad, se tiene una gran cantidad de materiales educativos relacionados con matemáticas. En ellos, la visualización juega un papel

trascendental debido a que existen libros de texto matemáticos llenos de imágenes, diagramas y gráficos, así como diversos programas informáticos que permiten a los estudiantes interaccionar con ellos. Debido a las numerosas representaciones geométricas que se encuentran en diferentes medios –papel-y-lápiz y tecnológico–, surge la necesidad de identificar (por parte del alumno) características y propiedades que éstas presentan. Varios autores (e.g., Arcavi, 2003; Hitt, 1995; Haciomeroglu, 2011, entre otros) afirman que las herramientas tecnológicas reducen la *distancia* entre la representación física, la representación de las imágenes mentales y el objeto matemático mismo, lo cual permite la comprensión (por parte de los estudiantes) de dichos objetos. En este artículo se pretende identificar de qué forma la visualización promueve la construcción de conceptos matemáticos apoyados en el uso de los ambientes de papel-y-lápiz y tecnológico.

Antecedentes y fundamentación teórica

La revisión de artículos de investigación relacionados con la visualización (e.g., Arcavi, 2003; Duval, 2003; Presmeg, 2006, entre otros) en educación matemática nos permitió hallar dos problemáticas centrales: la primera se relaciona con las dificultades teóricas que se tienen para poder explicar la función de la visualización de objetos matemáticos, y la segunda trata sobre el rol que juega la visualización en el aprendizaje de las matemáticas. Estas dos problemáticas se superponen y se intercalan entre ellas debido a que no es posible estudiar a una de ellas sin la presencia de la otra. Las ideas surgidas de la visualización en matemáticas enriquecen los contenidos visuales, cuya utilización resulta provechosa, tanto en las tareas de representación como en el manejo de conceptos de esta disciplina. La visualización en ocasiones se emplea para describir representaciones visuales; en otras, se usa para determinar el uso de cierta representación específica, o bien, para definir la actividad cognitiva del sujeto cuando hace uso de representaciones visuales. La representación de un objeto matemático involucra su análisis. Si el objeto es una figura geométrica, se deben identificar características de ella y hacerse un tratamiento del objeto empleando el sentido de la vista.

Arcavi (2003) se refiere a la visualización como la capacidad, el proceso y el producto de la creación, interpretación, uso y reflexión sobre figuras, imágenes, diagramas, en nuestra mente o sobre el papel con el propósito de representar y comunicar información, pensar y desarrollar ideas y avanzar en la comprensión. De acuerdo con Phillips et al. (2010, p. 26) es recomendable realizar distinciones explícitas mediante la adopción de tres términos: (a) objeto de visualización relacionados con objetos físicos vistos e interpretados por una persona con el propósito de entender algo más que el objeto mismo; (b) visualización introspectiva es una construcción imaginativa de una posible experiencia visual en ausencia de un objeto de visualización. Se centra en objetos capturados en la mente, y (c) visualización interpretativa, la cual involucra la interpretación del significado de los objetos de visualización o visualizaciones introspectivas, en función de la red existente en la persona de creencias, experiencias y entendimientos. En la visualización se distinguen: objetos físicos (e.g., ilustraciones, animaciones, pantallas generadas por la computadora, etc.), así como, "objetos mentales" almacenados y procesados en la mente en forma de esquemas mentales, imágenes mentales, construcciones y representaciones mentales; o bien, mediante funciones cognitivas manifestadas en la percepción visual, la manipulación y transformación de las representaciones visuales de la mente; éstas concretan los modos abstractos de pensamiento. Phillips et al. (2010) enfatizan que estas distinciones son importantes para entender el contexto de las visualizaciones y poder establecer aplicaciones eficaces de visualización en el aula de matemáticas.

Unidades constitutivas de una figura geométrica

La representación de un objeto matemático involucra su análisis, sin embargo, independientemente de las concepciones de la naturaleza y de la existencia de los conceptos matemáticos por parte de quienes aprenden o enseñan, muchos matemáticos consideran ese modo de conocimiento consistente en "ver", tal visualización debe realizarse ya sea por los sentidos, por la imaginación o por la inteligencia. La pureza de la visión permite una aprehensión simultánea de los objetos. Para Duval (2003), la aprehensión visual es inmediata; ésta permite discriminar e identificar en menos de una décima de segundo los diversos elementos del campo de visión y sus relaciones. Así, "ver" es siempre reconocer alguna cosa a primera vista. Sin embargo, los objetos vistos no tienen únicamente un solo aspecto. De manera que, si la visión es aprehensión simultánea con valor global entonces nunca es completa (Duval, 1999), debido a que la visualización desencadena procesos automáticos no conscientes del sujeto –que dependen de todo eso que ha podido ser guardado en su memoria–, el aprendizaje visual es directo. Un objeto geométrico requiere dos tipos de aprehensión: (a) la perceptiva, en la cual se reconocen las unidades figurales de la representación geométrica; (b) operatoria, en la cual se efectúan las modificaciones posibles de las relaciones que constituyen las partes de la representación (Duval, 2003).

La visualización a diferencia de la percepción no se desarrolla dentro del espacio real en tercera dimensión (3D), sino que se proyecta sobre una superficie en segunda dimensión (2D). Esta reducción de dimensión (de 3D a 2D) constituye una primera ruptura entre la visión real y la visualización (Duval, 2003). Duval (1999) afirma que la implantación de una mancha visible en la figura es el primer indicio de toda representación visual, y es susceptible de variaciones visuales; éstas pueden agruparse en dos categorías: (a) Variación dimensional, ligada con el número de dimensiones: 0 (punto), 1 (línea) o 2 (área); (b)Variación cualitativa, ligada con la forma (línea recta o curva; contorno abierto o cerrado de un área), tamaño, orientación, granulación, color, etcétera. Distinguir estas dos categorías de representación permite definir las características de una figura; debido a que en todas ellas aparece como la combinación de valores para cada una de las variaciones visuales de los tipos dimensional y cualitativo, los cuales forman las unidades figurales elementales. Por ejemplo, una circunferencia está formada por la unidad punto y la forma curva cerrada. Incluso, al hablar de un cuadrado, figura aparentemente reducida a una sola unidad figural de dimensión 2, puede ser considerada como configuración de cuatro unidades figurales de dimensión 1 (segmentos que forman los lados), debido a que son las relaciones (paralelismo, simetría, tangente…) entre las unidades figurales elementales las que constituyen el contenido pertinente de una figura geométrica. Es común que las figuras geométricas estén compuestas por numerosas unidades figurales elementales con valores diferentes (e.g., triángulos, cuadriláteros, puntos, etcétera).

Herramientas tecnológicas en el aula

En la actualidad es común encontrar imágenes, dibujos, gráficos y diagramas en textos matemáticos. También se les encuentra en programas informáticos enfocados en la enseñanza de las matemáticas. Diversos software, por ejemplo: Cabri-Geometry, Cinderella, Geometer's Sketchpad, C.a.R. (Compass and Ruler), Geogebra, entre otros, se denominan Software de Geometría Dinámica (SGD). Estos tipos de software permiten construir objetos geométricos. Una vez construidos, trasladarlos, girarlos, se puede estudiar, con estos objetos, conceptos como los de simetría, reflexión, homotecia, etc. Además, con ellos también es posible medir los lados de las figuras, representar las ecuaciones que les corresponden, comprobar sus propiedades

geométricas y realizar cálculos vinculados con sus propiedades. El uso de algún SGD facilita la incorporación de la visualización en la enseñanza de conceptos geométricos, pues se cuenta con imágenes dinámicas e incluso con visualizaciones interactivas. Con las herramientas propias de los SGD se puede medir, o bien agregar trazos auxiliares o simplemente explorar la figura. Otra ventaja que tiene el uso de representaciones dinámicas es permitir la creación y manipulación de construcciones geométricas cuyo trazado o construcción es modificable en forma dinámica (si algún objeto B depende de otro A, al modificar A, B puede ajustarse y actualizarse y así mantener las relaciones correspondientes con A). Un atributo importante del SGD es su versatilidad de uso, el cual estimula el interés y la participación de los estudiantes cuando resuelven problemas geométricos. Haciomeroglu (2011) menciona que la visualización empleando modelos dinámicos permite a los estudiantes entender los conceptos o significados que pueden ser extraídos de las representaciones y por lo tanto juega un papel importante en el desarrollo de su pensamiento analítico, y que no sucede en ambiente de papel-y-lápiz.

Diseño y metodología

Se trata de un estudio de tipo cualitativo, cuyo marco conceptual está basado en la teoría de representaciones y en la visualización de objetos matemáticos con ayuda tecnológica. La recopilación de datos se realizó con un grupo de 12 alumnos (de 15 a 16 años de edad) de quinto año de bachillerato (tercer semestre), a través del registro escrito de las Actividades y de videograbaciones. Los alumnos trabajaron en parejas; se formaron seis equipos con dos alumnos cada uno. Las Actividades implementadas fueron diseñadas o adaptadas de otros estudios de forma que los alumnos requirieran para su análisis, formulación y resolución, el descubrimiento de invariantes, tareas de construcción, establecimiento de conjeturas, así como descripción y explicación de los objetos matemáticos visualizados, considerando los ambientes papel-y-lápiz y tecnológico. En la investigación, se consideraron los siguientes puntos para el diseño de las Actividades: (a) Nivel académico. El propósito fue diseñar o adaptar tareas significativas, accesibles e interesantes y que no resultaran triviales ni imposibles de resolver. (b) Uso de la herramienta tecnológica. Se buscó que las Actividades pudieran ser llevadas a cabo en el ambiente tecnológico, con el fin de que el alumno, utilizando SGD y mediante sus herramientas propias del software, visualizara los objetos matemáticos en estudio. (c) Contenidos matemáticos. Cada Actividad se relacionó con los contenidos temáticos abordados en cursos previos de geometría euclidiana.

Experimentación

En este artículo reportamos los resultados surgidos de la implementación de dos actividades; en ellas se busca analizar la influencia de la visualización de figuras geométricas tanto estáticas como dinámicas en los ambientes de papel-y-lápiz y tecnológico. Una de las Actividades fue tomada del articulo "*A cognitive analysis of problems of comprehension in learning of mathematics*" (Duval, 2006, p.117). En ésta el autor propone a los estudiantes que a partir del esbozo de la gráfica (véase Figura 1) hallen la longitud del segmento $\overline{ED}$, tomando como datos fijos la longitud de los segmentos $\overline{AB} = \overline{DC} = 4\ cm$ y $\overline{BC} = 7\,cm$.

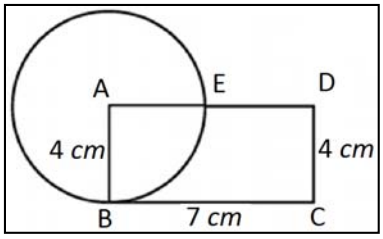


Figura 1. Primera actividad. Los alumnos visualizan la figura geométrica y de acuerdo con sus propiedades calculan la longitud $\overline{ED}$.

La segunda Actividad propuesta a los alumnos participantes en este estudio fue con la intención de analizar la forma en que ellos exteriorizan la idea de una representación relacionada con los triángulos acutángulos (Santos, 1996). La Actividad consistió en que los alumnos formaran diferentes triángulos, conectando un punto cualquiera en el interior de un cuadrado dado, con los vértices de la base del cuadrado y, posteriormente, remarcaran los puntos donde los triángulos formados en el interior del cuadrado fueran acutángulos (véase Figura 2). Una vez identificados diferentes triángulos acutángulos en el interior del cuadrado, se les pidió que sombrearan la región dentro del cuadrado donde los triángulos formados con el punto cualquiera y la base del cuadrado fueran acutángulos. Posteriormente, con apoyo de Geogebra y con las condiciones de la actividad, se pidió a los estudiantes que identificaran si existía alguna figura geométrica que permitiera determinar en qué parte de la región –del interior al cuadrado– se cumple la condición dada.

Forma diferentes triángulos que conecten un punto P cualquiera (como el mostrado en la figura) en el interior del cuadrado con los vértices de la base del cuadrado (puntos A y B). Remarca con color, los puntos P donde los triángulos formados en el interior del cuadrado sean acutángulos.

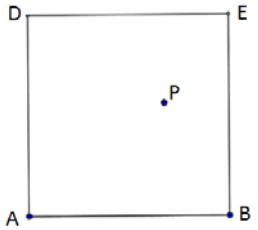


Figura 2. Segunda actividad. Los alumnos forman diferentes triángulos que conecten un punto cualquiera en el interior de un cuadrado dado, con los vértices (A y B) de la base del cuadrado.

La figura geométrica de la primera Actividad es estática, ya que de acuerdo con las condiciones de su composición no presenta ninguna variación (su estructura no cambia). La segunda Actividad involucraba la exteriorización de la idea de triángulo acutángulo, con la variante de que a partir de un punto que podía colocarse en cualquier parte, en el interior de un cuadrado (punto dinámico, ya que podía variar) se formaran triángulos acutángulos. Una vez identificados estos tipos de triángulos, se pedía al estudiante que infiriera la zona o región dentro del cuadrado donde el punto cumplía dicha condición. En las Actividades propuestas se les solicitó a los estudiantes que validaran sus resultados, contrastándolos en el ambiente de tecnológico (Geogebra) respecto al ambiente de papel-y-lápiz.

Análisis de datos y resultados

El análisis de los datos recabados se basó en la interpretación y en el número de incidencias comunes, por parte de los alumnos, de sus soluciones en ambos ambientes, tomando en cuenta video-grabaciones –de las discusiones (alumno-alumno y alumno-profesor) durante la experimentación– y los registros escritos, una vez solucionado el problema. Los resultados muestran que los estudiantes (a través del SGD) lograron identificar las dificultades provocadas al realizar Actividades de visualización empleando el ambiente de papel-y-lápiz; de manera que

descubrían si la visualización realizada en una primera instancia era correcta o parcialmente correcta. De la primera Actividad, los resultados obtenidos –durante el trabajo en ambiente de papel-y-lápiz– son los siguientes: cinco equipos percibieron que el valor del segmento $\overline{ED}$ es 3.5 *cm* y sólo un equipo consideró las propiedades de la circunferencia, al darse cuenta de que el valor real del segmento $\overline{ED}$ es de 3 *cm*. Algunas observaciones realizadas durante la visualización de la primera Actividad muestran que la dificultad de interpretar correctamente la representación geométrica radica en la manera de articular la información implícita y explícitamente dada. Los resultados obtenidos en esta Actividad confirman que la aprehensión visual es inmediata (Duval, 2003), lo cual permitió a los estudiantes identificar elementos existentes en la figura. Además, durante la visualización de esta figura la mayoría de los alumnos no realizó una adecuada visualización introspectiva e interpretativa (Phillips et al., 2010), las cuales permiten dar significado al alumno y reflexionar sobre el objeto matemático (e.g., figura geométrica). En consecuencia, la visualización realizada, por parte de los alumnos a esta figura geométrica, tiende a adquirir la forma de mayor simpleza (Duval, 1999); ésta provoca que los alumnos perciban los segmentos $\overline{AE}$ y $\overline{ED}$ iguales; la manera de *ver* la figura, por parte de los alumnos, generó una primera impresión a simple vista, al identificar que el punto E (intersección de la circunferencia con la segmento $\overline{AB}$) se localizaba en el punto medio del segmento $\overline{AB}$. La forma de *ver* la figura impidió a los alumnos lograr la visualización correcta del objeto matemático, ya que la mayoría optó por la percepción y la aprehensión simultanea descrita por Duval (1999). Se observa en los datos –surgidos en ambiente de papel-y-lápiz– que la mayoría de los equipos se inclinó por una percepción visual de la figura y no consideraron sus propiedades. Un ejemplo es la visualización reportada por los estudiantes del Equipo 2 (Alumnos 2A y 2B), quienes afirmaron que "el punto E es la mitad del segmento $\overline{AD}$ y éste a su vez es igual que la base $\overline{BC}$ que mide 7 *cm*; como la mitad es 3.5 *cm*, por lo tanto, este es el valor del segmento". La Figura 3 muestra la visualización del Equipo 1 (Alumnos 1A y 1B)), quienes optaron por la percepción de la figura.

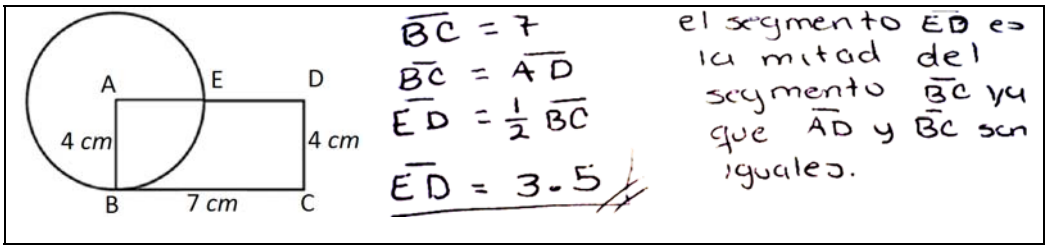


Figura 3. Primera actividad ambiente de papel-y-lápiz. Ejemplo de cómo los alumnos se inclinaron por la percepción visual de la figura al calcular la longitud del segmento $\overline{ED}$.

Sólo un equipo notó las propiedades implícitas en la figura. En el registro escrito, el equipo 5 expone textualmente que "la distancia de $\overline{ED}$ es de 3 *cm*. El círculo con centro A tiene un radio de 4 *cm* (ubicaron el segmento $\overline{AB}$), por lo tanto, la circunferencia en cualquier punto tiene 4 *cm* de radio, restamos los segmentos $\overline{BC} - \overline{AB} = 3$ *cm*". Este equipo logró la transición de la Figura 1 al objeto geométrico; el equipo logró visualizar, a través de la representación las propiedades de dicho objeto matemático, sin importar su apariencia perceptiva. De acuerdo con Arcavi (2003) este equipo interpretó la figura a partir de la reflexión ejercida desde el ambiente de papel-y-lápiz hasta la construcción mental por parte de los alumnos, lo cual permitió la adecuada visualización del objeto matemático mostrado. En la segunda parte de esta Actividad, los alumnos reprodujeron la Figura 1, empleando Geogebra y mediante sus herramientas calcularon la longitud del segmento $\overline{ED}$. Además, compararon el resultado obtenido con el software respecto

del obtenido con papel-y-lápiz. Al hacer uso del software Geogebra, el total de los equipos concluyó que la longitud del segmento $\overline{ED}$ es de 3 *cm* debido a que el punto E no se encuentra en el punto medio del segmento $\overline{AD}$ (véase Figura 4). El siguiente extracto corresponde a los argumentos del Equipo 4 (Alumnos 4A y 4B) cuando contrastaron los resultados obtenidos en papel-y-lápiz, con los surgidos del ambiente tecnológico:

Profesor: De acuerdo con la figura ¿cuál es la longitud del segmento $\overline{ED}$?

Alumno 4A: El segmento $\overline{BC}$ y el segmento $\overline{AD}$ son iguales. Entonces, si éste [*punto E*] está al centro [*punto medio*] vale la mitad [3.5].

Profesor: Usando el software ¿el resultado cambió o es el mismo?

Alumno 4A: Me doy cuenta de que el radio de la circunferencia es 4 y el radio en todas las partes de la circunferencia siempre es el mismo, entonces mide 4 aunque [*visualmente en la figura en papel-y-lápiz*] sea la mitad de $\overline{AD}$.

Profesor: Finalmente, ¿cuál sería el valor [*la longitud*] de $\overline{ED}$?

Alumno 4A: Tres, ya que la distancia de $\overline{AE}$ es 4 y el segmento $\overline{AD}$ es 7.

Profesor: ¿De qué forma les ayudó el software en la visualización de la figura?

Alumno 4A: A la vista se ve como si fuera la mitad [*ambiente de papel-y-lápiz*] y al ponerlo en la computadora [Geogebra] se ven bien definidas las unidades de la figura [*se dan cuenta de las propiedades del objeto matemático*].

Profesor: ¿Que pueden decir de la figura impresa [*papel-y-lápiz*]?

Alumno 4A: Se tiene una figura que no es proporcional [*según sus características*].

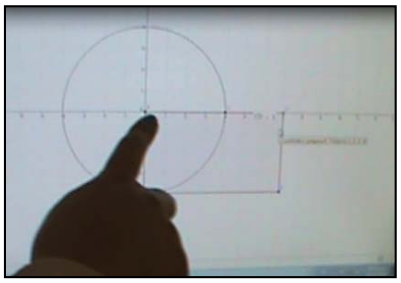


Figura 4. Primera Actividad en ambiente tecnológico. Los alumnos se dan cuenta de que el punto E no se encuentra en el punto medio del segmento $\overline{AD}$.

Acerca de la pregunta, expuesta en la Actividad, ¿cómo influye la forma de calcular la longitud del segmento $\overline{ED}$ con el software comparado con papel-y-lápiz? Los integrantes del Equipo 6 (Alumnos 6A y 6B) indicaron que "en lápiz y papel da la percepción que la circunferencia pasa por la mitad [del segmento] $\overline{AD}$ y en el software comprobamos que no [el punto E no está a la mitad del segmento $\overline{AD}$]". Todos los equipos coincidieron en que al emplear el software pueden observar la medida de los segmentos, de esta manera, logran visualizar las propiedades de la figura; ya que en el ambiente de papel-y-lápiz se inclinaron por elegir la primera impresión (percepción visual) de la figura. Los resultados obtenidos muestran que al trabajar en ambiente de papel-y-lápiz, los alumnos, en su mayoría, visualizaron la figura de acuerdo con su percepción sin hacer uso de las propiedades o descomposición de la figura en partes más simples de ella (Duval, 1999). Además, aunque las representaciones deberían comunicar ideas de manera inequívoca, los alumnos interpretaron que no necesariamente coincide con las propiedades y características de la figura. Al hacer uso de la tecnología, el total de los equipos notó que la representación gráfica en ambiente de papel-y-lápiz no cumplía con las características y propiedades que debería presentar la figura, lo cual provocó una inadecuada visualización de esta representación.

La segunda Actividad consistió en analizar cómo los estudiantes externaban propiedades de figuras geométricas explorando la condición del problema. Tal condición está relacionada con el hecho de conectar un punto P (cualquiera) en el interior del cuadrado, con los vértices de la base del cuadrado; ésta debe satisfacerse para que sea posible relacionarla con los triángulos acutángulos. Los estudiantes debían identificar la zona o región donde los triángulos formados con el punto P son acutángulos (segunda condición). En el análisis de los datos surgidos de esta Actividad se consideran las similitudes de sus respuestas, de acuerdo con las regiones denominadas: *rectangular*, *triangular* y *especial* (véase Figura 5).

- *Región rectangular*: dos de los equipos identificaron la región solución del problema como una región de forma rectangular. Se observa en los datos recabados que los alumnos dividen el cuadrado en dos partes iguales (rectángulos horizontales), y consideran que en el interior del rectángulo superior se forman triángulos acutángulos.
- *Región triangular*: tres de los equipos identificaron la región solución del problema en forma triangular; ésta es una aproximación cercana de la solución correcta. Los alumnos no consideraron regiones cercanas de la base del cuadrado, pues en ellas se perciben triángulos acutángulos por debajo de la mitad del cuadrado.
- *Región especial*: sólo un equipo identificó una región cercana de la semicircunferencia; fuera de la cual, a su criterio, cumple la condición relacionada con los triángulos acutángulos.

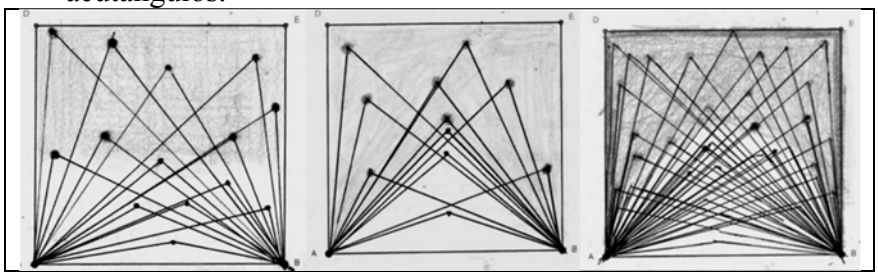


Figura 5. Segunda Actividad en ambiente de papel-y-lápiz. Regiones identificadas por los alumnos; denominadas: rectangular, triangular y especial, respectivamente.

En geometría euclidiana cuando se trata de representar el cambio de una figura (manteniendo sus características geométricas), por ejemplo, al cambiar el punto P, se generan nuevas representaciones relacionadas con un triángulo de base igual a la del cuadrado. En este proceso de transformación se busca comprender la idea de generar el movimiento mediante imágenes mentales del registro figural. Cuando los alumnos exteriorizaron las representaciones mentales existió una falta de dependencia con lo que se deseaba representar y con la misma forma de representarlo. Este hecho coincide con lo afirmado por Duval (1999), acerca de la gran diferencia entre las representaciones mentales de los alumnos y las representaciones semióticas que producen para expresar sus representaciones mentales (debido a la independencia de las funciones). Estas imágenes mentales corresponden a la visualización introspectiva expuesta por Phillips et al., 2010, sin embargo, para representar la idea de movimiento se debe generar más de una modificación en la imagen mental del registro figural. El tratamiento de figuras es un proceso demostrativo, que requiere control tanto cognitivo como semiótico; representado por la imagen mental en movimiento (Duval, 1999). En la segunda parte de esta Actividad, los alumnos formaron un cuadrado empleando Geogebra. Mediante sus herramientas ubicaron un punto cualquiera dentro del cuadrado y unieron dicho punto con los vértices de la base del cuadrado. En seguida, utilizaron la herramienta de medida de ángulo para obtener los valores de los

ángulos interiores del triángulo. A través de la herramienta de Geogebra "Elige y Mueve", los alumnos manipulaban el punto ubicado en el interior del cuadrado, y generaron una gran cantidad de representaciones y conservaron las características del objeto matemático. El total de los equipos logró determinar, con ayuda del software, la región que cumple la condición del problema, y que ésta [la región] presenta una relación en su forma con la de una semicircunferencia. En el interior de esta región es identificable un triángulo formado con el punto P y los extremos del diámetro de la semicircunferencia. Con esta información, ellos infirieron que la región que cumple la condición del problema es aquella que se encuentra dentro del cuadrado, pero fuera de la semicircunferencia (véase Figura 6D). El siguiente extracto evidencia el trabajo logrado por los miembros del Equipo 5 (alumnos 5A y 5B) en la segunda Actividad:

Profesor: De acuerdo con su análisis [en papel-y-lápiz] ¿creen que si colocamos el punto P fuera del triángulo que observan [*región triangular*] (véase Figura 6A), se cumple la condición de que los triángulos formados [triángulos APB] son acutángulos?

Alumno 5A: Al parecer no [*dudan de su respuesta*].

Profesor: Usando el software, ¿qué sucede si colocan el punto P próximo al triangulo [*región triangular*] pero fuera de él?, ¿los triángulos son acutángulos o no?

Alumno 5A: ¡Vamos a ver! Si, colocamos el punto por aquí (véase Figura 6B). ¡Tampoco se cumple!

Alumno 5B: Muévelo [*refiriéndose al punto P*] más a la derecha.

Alumno 5A: ¡Ahí! [*en ese lugar*], ¡ya no se cumple!

Alumno 5B: Hace rato habíamos visto lo que pasaba a este punto de aquí [*se refiere al punto P señalado con la pluma en la Figura 6C*] y por lo tanto no puede ser un triángulo. Creo que se va formando la mitad de un círculo, ya que si movemos el punto por aquí [*con la pluma, el alumno índica un movimiento semicircular en el monitor a partir del punto A*] se va acercando a 90°.

Profesor: Mencionaste un círculo. Usando las herramientas del software ¿podrían verificar su propuesta [*conjetura*]? ¿Qué sucede si colocan una circunferencia con centro en el punto medio del segmento $\overline{AB}$?

Alumno 5B: Este es el círculo (véase Figura 6D), ahora muévelo [*le indica a su compañero que mueva el punto P*].

Alumno 5A: Cuando está [*refiriéndose al punto P*] adentro del círculo este ángulo siempre es mayor [mayor que 90°] y cuando está afuera el ángulo es menor que 90°. Entonces ¡sí es el círculo!

Profesor: ¿Qué sucede si el punto P está sobre la circunferencia? Es decir, sobre su perímetro.

Alumno 5A: ¡A ver! Es casi de 90°. Muévelo acá [*el alumno indica a su compañero que desplace el punto P a un lugar sobre la circunferencia*].

Alumno 5B: ¡Es de 90°! Es un ángulo recto.

Alumno 5A: Entonces, si el punto [punto P] está sobre el círculo, el ángulo es de 90°. Significa que es [la circunferencia] el límite donde la región cumple la condición.

Mediante el uso del software, los alumnos comprendieron la idea de movimiento (representación dinámica). Cuando los estudiantes arrastraron un objeto geométrico empleando el SGD lograron visualizar el paso de un objeto estático a uno dinámico, lo cual [el arrastre] les permitió verificar la conjetura propuesta por ellos. El uso del SGD permitió a los estudiantes conjeturar propiedades del objeto geométrico surgidas de la representación dinámica. Esta interacción, entre el alumno y el software, favoreció el paso de lo concreto a lo abstracto. Al hacer uso del SGD los alumnos notaron que sus conjeturas propuestas en el ambiente de papel-y-

lápiz eran erróneas, y con ayuda del software hallaron la región que cumplía con la condición del problema. Los alumnos lograron generalizar el comportamiento de los triángulos formados por la base del cuadrado y el punto P, lo cual permitió inferir a los estudiantes que pueden resolver problemas a partir de diversas situaciones concretas, las cuales permiten generalizar la solución de dicha problemática. Los estudiantes lograron una visualización introspectiva e interpretativa adecuada del objeto matemático (Phillips et al., 2010). La representación gráfica de un objeto dinámico vuelve evidente los límites tradicionales de las representaciones típicas posibles de registros figurales. De esta manera, se reduce la distancia cognitiva entre la representación física y la representación de las imágenes mentales (Phillips et al., 2010).

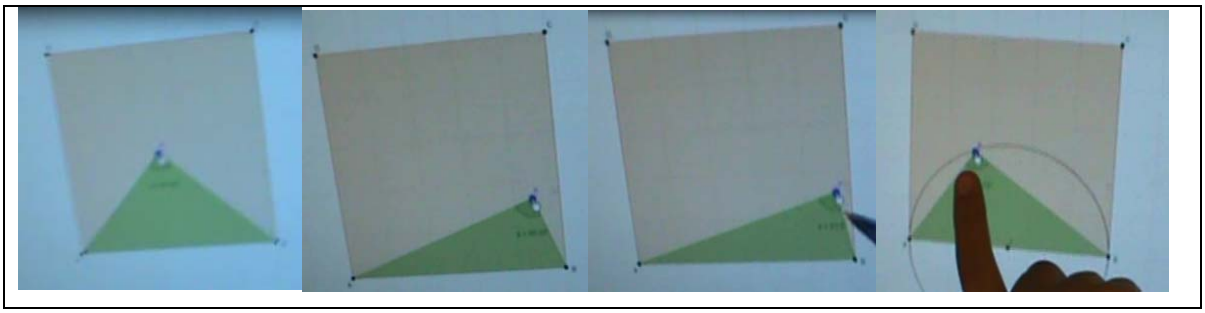


Figura 6(A, B, C y D, respectivamente). Segunda Actividad en ambiente tecnológico. Secuencia realizada por el Equipo 5 para hallar la región que satisface la condición del problema.

Al finalizar la Actividad se les preguntó a los estudiantes: el software ¿simplificó o dificultó la realización de la Actividad? En relación con esta pregunta, todos los alumnos respondieron que el uso del software simplificó la Actividad. Los integrantes de dos equipos dijeron que la manipulación del punto P, empleando el software, les permitió hacer visible diversos casos (particulares) que no lograron en la primera parte de la Actividad (ambiente de papel-y-lápiz). De acuerdo con los resultados obtenidos en el ambiente de tecnológico podemos afirmar que el uso de la tecnología permite establecer representaciones exactas de configuraciones geométricas que pueden ayudar a los estudiantes en la visualización de relaciones matemáticas. Con el uso de las herramientas tecnológicas los estudiantes tienen la oportunidad de mover partes de configuraciones geométricas y observar cambios o invariantes de ellas (Santos, 2007).

Conclusiones

Con el reconocimiento de propiedades vinculadas con las representaciones, los estudiantes pudieron inferir conjeturas que, finalmente, les dieron pautas para definir conceptos ligados con la representación visual. Para dar respuesta a la pregunta ¿de qué forma la visualización promueve la construcción de significados matemáticos apoyados por el uso de los ambientes de papel-y-lápiz y tecnológico?, se parte de que la interpretación por parte del alumno de la representación de un objeto geométrico, ya sea en el ambiente de papel-y-lápiz o en el tecnológico, depende de sus conocimientos previos y del contexto, así como de la interpretación misma del objeto. Cuando se emplean representaciones geométricas, su visualización involucra siempre dos operaciones visuales que tienden a asimilarse dentro de un mismo acto por parte del sujeto: por una parte, distinguir varias formas dentro de una figura; por otra, identificar estas formas o su configuración representada, usando información previa plenamente reconocida por quien lleva a cabo el proceso de visualización. Como lo plantea Duval (2003), "ver" en matemáticas es una actividad cognitiva del sujeto; que puede ser más compleja o más diversificada de lo requerido fuera de esta disciplina. De acuerdo con los resultados obtenidos en

esta investigación, podemos afirmar que las figuras geométricas como cuadrados, rectángulos o triángulos no fueron percibidas por ellos como configuraciones de tres o cuatro unidades figurales 1D (tres o cuatro segmentos), sino como unidades figurales simples 2D que de cierta manera no pueden descomponerse en unidades 1D. La dificultad de identificación de la representación de objetos matemáticos no solamente es imputable a los alumnos, sino a los factores internos del proceso de identificación y del tratamiento visual de las formas 2D. Tomando en cuenta estas dificultades, podemos afirmar que el manejo del registro visual no es fácil ni natural.

Durante las Actividades visuales no se puede dejar sobreentendido que los estudiantes requieran instrucción explícita sobre el uso e interpretación de objetos matemáticos, ya sean estáticos o dinámicos. Tomando como cierta esta aseveración, podemos afirmar que quienes usan tecnología como herramienta de enseñanza pueden ser demasiado optimistas, y creer que los estudiantes aprenden a visualizar de forma profesional simplemente mediante su uso. La visualización de figuras provenientes de ambientes dinámicos potencia el entendimiento de ideas matemáticas abstractas. Sin embargo, la visualización puede ser confusa para los estudiantes, ya que los objetos, accesibles a nuestros sentidos no son fiables y, por lo tanto, la visualización o percepción podría ser engañosa. El dilema se centra en lo que se busca obtener: la visualización es una simplificación de las matemáticas, o bien, una falsificación de ellas. La visualización de representaciones de objetos matemáticos requiere reflexión tanto de los profesores como de los estudiantes. Durante este estudio se destaca la reacción de los estudiantes sobre lo que es visual, utilizando instintivamente la percepción e interpretación de los objetos matemáticos de acuerdo con lo que la representación gráfica permite evocar en ellos. Los resultados concuerdan con lo expuesto por Duval (2003), quien afirma que las personas no especialistas en visualización, simplemente pasan por alto características de la representación, aunque también pueden inventar representaciones de contenidos con significado personal, aun si no se está convencido de la certeza de las ideas que se asimilan y que no se parecen en lo absoluto a las representaciones matemáticas convencionales.

Al emplear la tecnología (SGD) como herramienta de exploración y de reflexión de conceptos matemáticos, los estudiantes lograron vincular los objetos geométricos con sus propiedades, y generar conceptos del objeto geométrico. Cuando se trabaja con papel-y-lápiz, la representación geométrica le da al estudiante poca visión sobre el objeto, pues no lo puede manipular. En cambio, al utilizar algún software (SGD) el estudiante adquiere recursos de apoyo. Estos recursos permiten al estudiante establecer *puentes* entre la representación del objeto matemático y sus propiedades. La representación geométrica mostrada en el medio tecnológico, permite interaccionar con el objeto geométrico; además de poder manipularlo sin modificar sus propiedades estructurales. Al hacer uso de la herramienta tecnológica, los estudiantes notaron que durante el trabajo con papel-y-lápiz sólo les permitía percibir e interpretar el objeto geométrico, lo cual les impedía percibir aquellas propiedades con las que cuenta ese objeto. En el ambiente tecnológico, los estudiantes lograron, además conjeturar en torno a las propiedades y condiciones necesarias de una familia de figuras (como parte de la solución del segundo problema). Esta interacción favoreció el paso de lo concreto a lo abstracto. Tomando como verdadera esta aseveración, se puede inferir que los estudiantes luego de aplicar matemáticas para resolver problemas pueden conjeturar implicaciones para la situación concreta (problema). El SGD permite incorporar visualizaciones de figuras geométricas no sólo estáticas de dos dimensiones, sino también dinámicas con la finalidad de contribuir a una mejor comprensión de conceptos matemáticos partiendo desde operaciones concretas hasta lograr articular conceptos

abstractos de esta disciplina. Como resultado de la interacción con el software los estudiantes descubrieron propiedades y lograron formular conjeturas de acuerdo con sus observaciones mediante la manipulación de las representaciones figurales de los objetos geométricos. Es cierto que el SGD potencia el aprendizaje de conceptos geométricos, pero no es sólo este ambiente que debemos tomar en cuenta como herramienta de enseñanza, sino que es crucial también el uso de papel-y-lápiz, pues ellos se complementan con la finalidad de lograr éxito (parcial) en la visualización de objetos matemáticos, además de que favorece el planteamiento de conjeturas de conceptos abstractos surgidos de tales representaciones.

Referencias y bibliografía

Arcavi, A. (2003). The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics: Springer 52, 215–24.*

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. Grupo de Educación Matemática, Colombia.

Duval, R. (2003) "Voir" en Mathématiques. En E. Filloy (Ed.), *Matemática educativa: aspectos de la investigación actual* (pp. 41-76). México: Fondo de Cultura Económica. ISBN: 968-16-7028-0

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in learning of mathematics, *Educational Studies in Mathematics,* 62, 103-131. doi: 10.1007/s1649-006-0400-z

Haciomeroglu, E. S. (2011). Visualization through dynamic GeoGebra illustrations. En L. Bu & R. Schoen (Eds.), *Model-Centered Learning: Pathways to mathematical understanding using GeoGebra* (pp. 133-144). Rotterdam: Sense Publishers. ISBN: 978-94-6091-618-2

Hitt, F. (1995). Intuición primera versus pensamiento analítico: Dificultades en el paso de una representación gráfica a un contexto real y viceversa. *Revista de Educación Matemática*, 7(1), 63-75. ISSN: 0187-82988

Presmeg, N. C. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future* (pp. 205-235). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers. ISBN: 90-77874-19-4

Phillips, L.M., Norris, S.P., & Macnab, J.S. (2010). *Visualization in mathematics, reading and science education.* New York: Springer. 5, 19-34. ISBN 978-90-481-8816-1

Santos, L. (1996). *Principios y métodos de la resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas.* (pp. 190-194). México: Grupo Editorial Iberoamérica. ISBN: 978-97-065-154-1

Construcción de los conceptos partición y sumas de Riemann con Geogebra

Gonzalo **Espinoza** Vásquez.
Instituto de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
Chile.
gonzalo.espinoza.v@gmail.com

Resumen

Esta experiencia utiliza GeoGebra con el objetivo de que los estudiantes construyan y definan las sumas de Riemann como aproximación del área bajo una curva, además de establecer la relación entre ellas como sucesiones convergentes. La actividad dura 90 minutos, organizándose en preguntas e instrucciones que conducen a la construcción de conceptos, utilizando computadoras para las experimentaciones y deducir las relaciones mencionadas. Como resultado se tiene el aprendizaje de *partición* y *suma de Riemann* junto con su definición. Los estudiantes conjeturan la relación entre las sucesiones generadas por las sumas y la integral de la función. Las siguientes sesiones se afectan positivamente gracias al trabajo con estos elementos basales del cálculo integral. Definitivamente, el uso de tecnologías para manipulación gráfica ha facilitado la adquisición de conocimientos significativos en los estudiantes y la gestión de clases o sus planificaciones, aprovechando los tiempos disponibles para ello.

Palabras clave: NTIC, particiones, sumas de Riemann, Geogebra, Cálculo integral.

Introducción

El uso de las nuevas tecnologías de información y comunicación (NTIC), que permiten la manipulación gráfica, algebraica y numérica de objetos abstractos, es un recurso que no se debe desaprovechar pues ha posibilitado la adquisición de conocimientos significativos en los estudiantes, así como también influyen en la planificación y gestión de clases. Los recursos utilizados (computadores y software de manipulación gráfica, algebraica y numérica) le dan dinamismo a las sesiones y se tornan importantes para motivar a los estudiantes a participar de la clase. Sin embargo no basta con la motivación, más bien deben participar en la construcción de su propio conocimiento.

La exposición tradicional[1] del cálculo integral comienza con las definiciones de partición, suma superior, suma inferior, refinamientos, etc. como elementos primarios que permiten la definición, por ejemplo, de la integral de Riemann. Nuestra experiencia como docentes en estos cursos nos ha permitido evidenciar dificultades en el aprendizaje de los conceptos asociados a la noción del infinito, en parte por el lugar que se da a los estudiantes en el desarrollo de los temas y por la complejidad propia de los mismos. Estas situaciones nos motivan a re-pensar la forma en la que comienza el proceso de enseñanza-aprendizaje de estas ideas basales.

[1] La que se encuentra en la mayoría de la literatura matemática sobre el cálculo integral.

Como afirma Duval (1999): "*No hay comprensión en matemáticas si no se distingue el objeto de su representación*" (p.14). La comprensión de objetos estará ligada estrechamente a la forma de representarlos, a la accesibilidad y coordinación de estas representaciones. Números, funciones, rectas, funciones son objetos matemáticos que se trabajan mediante sus representaciones y que muchas veces su enseñanza queda condicionada al trabajo con la representación de ellos. El profesor debe estar conciente de que la comprensión del objeto puede quedar limitada al entendimiento de la representación del objeto. No distinguir entre objeto y su representación generará un obstáculo didáctico (Duval, 1999) que puede no evidenciarse en el momento en que se esté intentando aprehender el objeto. De acuerdo con Duval (1999): "*Toda confusión entre objeto y representación provoca en un plazo mas o menos amplio una pérdida en la comprensión"* (p.13).

Nuestro tema consiste en el diseño e implementación de una secuencia de actividades que permita a los estudiantes representar, construir y manipular los conceptos de partición y sumas de Riemann, basales en el cálculo integral, asignando a los estudiantes un rol protagónico en esta construcción para lograr la comprensión de estos objetos.

Moreria (2003) menciona que la implementación de las tecnologías para producir el aprendizaje requiere de la implementación de una *nueva pedagogía* donde el estudiante se involucre y motive a expresar sus opiniones, a responder preguntas de manera libre y establecer colaborativamente estrategias de resolución para los problemas planteados. Es este punto el que nos da pie para plantear nuestra propuesta: generar una instancia donde los estudiantes logren construir los conceptos basales del cálculo integral en lo referente al cálculo de áreas, con un carácter participativo y apoyado de la experimentación usando recursos tecnológicos.

Basados en la teoría de Ausubel, Novak, y Hanesian (1976), respecto al aprendizaje significativo, buscamos lograr un aprendizaje significativo en los estudiantes respecto a estos conceptos, considerando los conocimientos previos y las actitudes que el grupo al cual se aplicará la actividad ha mostrado hacia la matemática. El diseño de la actividad es conciente que los estudiantes *saben* lo necesario para poder relacionar los elementos que emergen de nuestra actividad, pudiendo considerarlos como base para la construcción de los nuevos conceptos. Nos orientamos a una actividad de aprendizaje por descubrimiento.

Contexto

La actividad se enmarca en dos proyectos, titulados "*Un diseño de enseñanza - aprendizaje para estudiantes de primer año de la carrera de Pedagogía en Matemáticas"* y "*Mejoramiento e Innovación de la Docencia Universitaria" (2014.FCS.IMA.02)*. El primer proyecto es una reformulación de la implementación de los cursos habituales de primer año donde se reúnen los cursos de Álgebra y Cálculo en una cátedra a cargo de 6 profesores para 2 grupos o secciones de estudiantes. Este proyecto organiza el día de los estudiantes en base a actividades como: clases de cátedras, talleres de prácticas, laboratorio de softwares académicos y educativos, todos a cargo del grupo de profesores del proyecto, y ayudantías temáticas guiadas por estudiantes de curso superior de la misma carrera. Los profesores participantes se coordinan semanalmente con los objetivos y temas diarios, las especificaciones del tipo de actividad a realizar en cada una de las sesiones de la semana, además de analizar en conjunto las evaluaciones propuestas. La planificación del semestre contempla el desarrollo de 4 módulos, cada uno con un título temático y considerando a *las funciones* como columna vertebral del primer semestre académico. El

segundo semestre tiene la misma modalidad con los ejes temáticos de derivadas, integrales, matrices y espacios vectoriales como nociones centrales.

El segundo proyecto sigue el lineamiento del primero aportando con la implementación de recursos tecnológicos para la enseñanza, aprendizaje y evaluación formativa de los estudiantes. Se habilita una plataforma virtual en *moodle,* donde los estudiantes cuentan con material de estudio y la posibilidad de realizar evaluaciones y autoevaluaciones sobre los temas que se están estudiando. Las evaluaciones son diseñadas por el grupo de profesores y ayudantes, quienes programan cada pregunta con parámetros de modo de aleatorizar los datos de la pregunta pero no el tipo de pregunta.

Nuestra secuencia de actividades se aplica a los estudiantes de primer año en un módulo de cálculo integral de la carrera de Pedagogía en Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso de Chile, que se encuentran cursando el segundo semestre de la carrera. El grupo está formado por las dos secciones, de 32 y 27 estudiantes respectivamente, reunidos en un mismo espacio físico para la implementación de esta actividad. Todos los estudiantes se encuentran con la totalidad de cursos del primer semestre aprobados (álgebra I, cálculo I, laboratorio de matemáticas), donde estudiaron los conceptos de números reales y su construcción axiomática, funciones, intervalos reales, funciones reales y sus propiedades, límite y continuidad. Sobre el manejo de NTIC, los estudiantes trabajaron con el software Geogebra y en la producción de textos en LaTex.

Diseño de la Actividad

El diseño la actividad contempla 90 minutos para su aplicación, dentro de los cuales se destinan tiempos y espacios de reflexión de los estudiantes para obtener sus conclusiones. Se estructura en tres etapas: la primera es de acercamiento al problema del cálculo de áreas cuando hay fórmula para determinarlo y para cuando no hay una fórmula explícita, la segunda parte es en base a la manipulación de Geogebra, experimentando con los valores de ciertos parámetros definidos para una función específica como: cantidad de sub-intervalos de la partición, tipo de función graficada, dominio para esta función, etc. Esta etapa permite la obtención de conclusiones sobre las particiones y la convergencia de las sucesiones generadas. La tercera parte requiere que los estudiantes escriban simbólicamente las expresiones que surgieron en las etapas anteriores: particiones, suma inferior, convergencia de las sucesiones generadas.

Si bien la actividad se inspira en la propuesta de Ares, Gatíca & Olguín (2010), nuestra propuesta aborda el trabajo previo a este trabajo partiendo por la construcción de los elementos que sustentarán a las siguientes sesiones de *cálculo de integrales* hasta *sólidos de revolución, longitud de curvas y superficies*.

El enfoque constructivista de la actividad nos lleva a plantear una serie de preguntas para las secciones de la actividad que, por una parte tengan relación con lo que los estudiantes tienen ya interiorizado, como por ejemplo las fórmulas de área y perímetro para figuras planas simples: cuadrado, triángulo rectángulo, circunferencia y sector circular, y por otro lado que conduzcan a la construcción de nuevos objetos como: partición de un intervalo, aproximación del área, entre otros.

En el encabezado de la actividad se plantea un objetivo que sirve de motivación para los estudiantes y les indica lo que se realizará durante la actividad, sin embargo el objetivo final es otro, pues como hemos escrito más arriba nuestro objetivo es que los estudiantes construyan

conceptos y deduzcan expresiones que determinan a las sumas superiores e inferiores. Este objetivo no es comunicado a los estudiantes para evitar que los estudiantes más curiosos se adelanten y busque información en otras fuentes información para resolver los problemas propuestos.

Las primeras dos preguntas corresponden al planteamiento de un ejercicio rutinario de cálculo de área utilizando fórmulas conocidas para el triángulo y circunferencia. Se evocan los conocimientos previos sobre el cálculo de áreas para conducir a los estudiantes a una búsqueda de fórmulas explícitas para las áreas de las siguientes figuras.

El siguiente par de preguntas (ver Apéndice A, Parte I, preguntas 3 y 4) producen el desequilibrio- siguiendo las ideas de Piaget- según los conocimientos previos de los estudiantes. Se cuenta ahora con dos figuras donde no existe fórmula para determinar el área y se vuelve necesario el análisis de la situación. En el caso de la pregunta 3, Parte I, exige naturalmente la descomposición de la figura para dar alguna respuesta. Lo mismo ocurre para la preguntado sobre la función raíz.

Luego de esto, y para cerrar la primera etapa, se espera que surjan diferentes estrategias para particionar el área y dar una respuesta aproximada. Entre las estrategias de partición del área, el uso de rectángulos aparecerá bajo la noción de que a menor ancho del rectángulo, menor será la aproximación del área. Si no aparecía esta estrategia, se plantean preguntas para dirigir la actividad a la construcción de rectángulos.

En la segunda parte de la actividad (Uso de Geogebra), los estudiantes utilizarán el software para visualizar lo que entrega el comando ***sumainferior[f,a,b,n]***. Pondrán a prueba sus resultados con otra función y contrastan con el resultado entregado por el software. Se les consulta sobre el valor que entrega este comando y el cómo se determina este valor. En este momento se espera que puedan deducir que el valor resultante corresponde a la suma de las áreas de los rectángulos cuyas la alturas son las imágenes de los extremos de los sub-intervalos. Se les pide explícitamente una expresión algebraica que determine este valor. Lo mismo ocurre al analizar el comando ***sumasuperior[f,a,b,n].***

Para cerrarla actividad, se evaluará la funcionalidad de las expresiones propuestas mediante discusión colectiva de los resultados. Esperamos que este bloque de preguntas concluya la actividad mediante la construcción de la definición de suma superior para el caso de funciones positivas definidas en un compacto y la conjetura sobre la convergencia de dichas sumas. Para ello se les pide definir dos puntos: (3, Sumin) y (3,Sumsup), en base a las sumas superior e inferior, y con ello activar el "rastro" de los puntos. Esto permitirá observar la convergencia de los puntos, mediante la incorporación del *deslizador* en el parámetro *n* (número de sub-intervalos) para deducir que el área buscada será el límite de estas sucesiones de puntos.

Modalidad de trabajo

Debido a que la actividad se basa en la experimentación con Geogebra, los recursos necesarios para la implementación son computadores, en este caso portátiles, con el software cargado y listo para su ejecución. Se solicita adicionalmente algunas hojas de papel y lápices para realizar las representaciones, cálculos simples o anotar sus resultados y conclusiones.

Antes de dar inicio a la sesión los estudiantes tienen la posibilidad de conseguir algún computador portátil, disponibles en la universidad, o bien a aquellos que no consiguen alguno pueden trabajar en pareja junto a alguien que tenga acceso a uno. La actividad se pensó para ser

trabajada de manera individual, sin embargo no hay inconvenientes en realizarla en parejas o grupos pequeños.

La organización y diseño de la actividad considera el trabajo personal por parte de los estudiantes para construir en conjunto con la clase las definiciones de los conceptos en juego mediante los aportes de cada uno de ellos y las orientaciones sobre sus procedimientos.

El desarrollo de la sesión se basará principalmente en el planteamiento de pequeños problemas y desafíos de manera progresiva para los estudiantes, planteando preguntas que utilicen sus conocimientos previos para generar los nuevos conceptos.

Los resultados obtenidos por los estudiantes serán expuestos como aproximaciones a las respuestas de las preguntas y la validación será por el resto de los estudiantes quienes, en conjunto con el profesor, pondrán a prueba el resultado y propondrán las nuevas preguntas-respuestas que conduzcan al desarrollo del concepto en juego.

Resultados y discusión

Lo primero que nos llama la atención, y es en lo que nos debemos detener por unos minutos, es que los estudiantes no logran relacionar a la función $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ con la circunferencia unitaria centrada en el origen (ver Apéndice A, Parte I, pregunta 2). Este hecho nos obliga a detener la actividad para aclarar la conexión existente, junto con el análisis del dominio de esta función. Surgen algunos comentarios por parte de los estudiantes que muestran esta desarticulación. Ellos comentan que "la función raíz de la pregunta no puede ser una circunferencia porque es una raíz". Se recuerda lo que es una *semi-circunferencia* en el plano.

Con la implementación de esta actividad, los estudiantes lograron dividir el área bajo la curva en regiones poligonales como estrategia de simplificación y discretización del problema continuo. Formularon particiones del área total en triángulos, rectángulos, sectores circulares que dependían de cierto ángulo y combinaciones de las anteriores para intentar "cubrir" la mayor cantidad de área bajo la curva. En el desarrollo de estrategias surgieron algunas que incluían sectores circulares, donde la única dificultad estaba en la determinación del ángulo que determinaba el sector circular, sin embargo con trigonometría era posible resolver la situación.

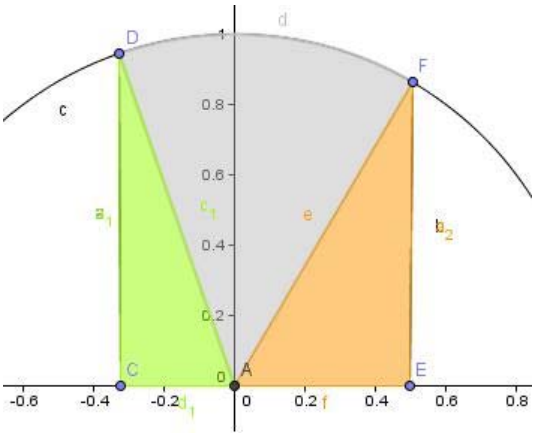


Figura 1. Ejemplo de partición en dos triángulos rectángulos y un sector circular

No se invalidó ninguna estrategia, sin embargo se comentaron las dificultades que a las que conduciría el uso de alguna partición poco adecuada, a la vez que se privilegiaron las estrategias

útiles para lograr la definición de sumas superiores e inferiores, basadas en rectángulos. Otra de las estrategias que surgieron fue, por ejemplo, la división del área mediante un cuadrilátero y otros triángulos.

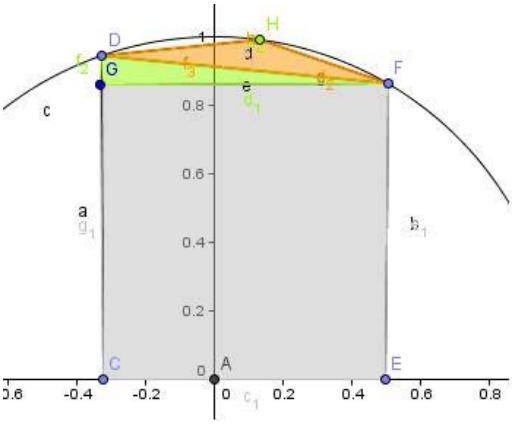


Figura 2. Ejemplo de partición en cuadrilátero y triángulos.

Las descomposiciones rectangulares fueron fundamentales para conjeturar las fórmulas que aproximaban el área buscada.

Surge un desarrollo de expresiones algebraicas que explicaban la suma de las áreas de los rectángulos formados bajo la curva, como suma inferior. Estas expresiones fueron específicas para el tipo de función trabajada (creciente o decreciente). Se alcanzó la noción de incremento fijo en la variable, según la partición, para definir las bases de los rectángulos, la noción de partición y sub-intervalos. La concepción de altura variable, según *f(x)*, para las alturas de los rectángulos formados también fue un concepto que surgió naturalmente.

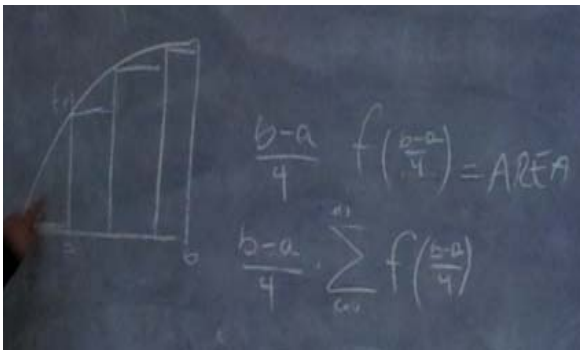


Figura 3. Fotografía de una conjetura para la suma de Riemann, n=4.

La expresión construida fue expuesta por algunos estudiantes, mejorada por las ideas de otros y aprobada por el resto de la clase. Destacamos que la expresión posee relaciones entre elementos que no eran parte de la sesión y que van más allá de los objetivos planteados, relacionando los conocimientos previos de los estudiantes con el conocimiento nuevo que están construyendo.

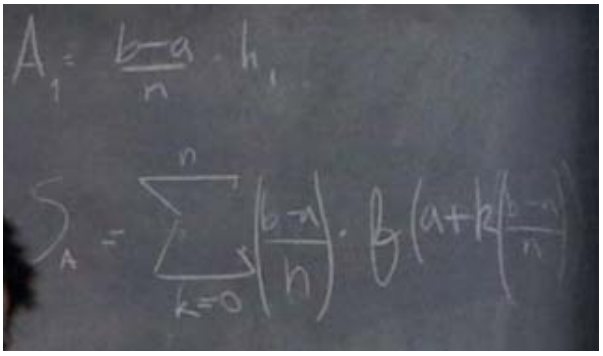


Figura 4. Fotografía para la conjetura de suma de Riemann, n arbitrario.

Por otro lado, los estudiantes logran conjeturar, gracias a la experimentación y visualización del "rastro" de los puntos generados, que la suma superior y la suma inferior determinan sucesiones convergentes para el caso de las funciones trabajadas en el software. Concluyen además que el límite de estas sucesiones será el valor del área buscada y que cualquier suma parcial será una aproximación del área buscada. Con ello comprenden que a medida que se agregan sub-intervalos, se obtiene una mejor aproximación al área, lo que ayuda en la comprensión sobre la relación existente entre una partición y un refinamiento de la misma con las sumas superior e inferior.

En la sesión siguiente a esta actividad los estudiantes concluyen que es posible determinar el área bajo una curva aún cuando la función no es continua en una cantidad finita de puntos usando la idea original de dividir el área total justo en aquellos puntos donde se producía la discontinuidad de la función y tomando cada tramo con un problema individual que ayuda a dar la solución al problema completo. Ejemplifican con la función parte entera.

El impacto de esta actividad va más allá del cumplimiento del objetivo, alcanza a las sesiones posteriores donde el trabajo con particiones y refinamientos se facilita por la evocación a los experimentos realizados y el recuerdo de las imágenes proporcionadas por el software. Con esto se ve afectada la planificación de las sesiones futuras en la disminución del tiempo destinado, por ejemplo, para el tratamiento de las demostraciones de los teoremas asociados a estos refinamientos (varias demostraciones surgen de manera natural mediante el recuerdo de los resultados de la actividad). Más aún, el estudio de los sólidos de revolución, longitud de curvas y superficies de revolución también se facilita debido a las sumas de Riemann que dan origen a las expresiones que permiten estos cálculos.

Algunas consideraciones para una nueva implementación de esta actividad se basan en que la estrategia de particionar en triángulos y sector circular (Figura 1) podría analizarse con mayor profundidad, pues constituye una aproximación a la integración en coordenadas polares. Insistimos en que durante la actividad no se descartó esa posibilidad, sino que se tomó como una idea referente sobre la estrategia de particionar en figuras de área conocida para aproximar el área pedida.

También surgen conceptos como el de *selección de puntos medios de los sub-intervalos* como otra forma de determinar aproximaciones del área bajo la curva usando el argumento de que la imagen de un elemento en un intervalo estará siempre entre el mínimo y máximo de la función en dicho intervalo. Esta idea recibe poco apoyo por parte de los estudiantes al considerar *más simple* trabajar con la imagen de uno de los extremos de los sub-intervalos que con la imagen de un punto arbitrario al interior del mismo.

Conclusiones

La secuencia de preguntas de la actividad compromete y motiva a los estudiantes a construir respuestas con argumentos fundamentados en los resultados de la experimentación usando el software Geogebra. La utilización de las NTIC, como recursos para el aprendizaje, es fundamental dentro de la formación de los nuevos profesores, pues ellos se enfrentarán directamente con las nuevas generaciones cada vez más cercanas o inmersas en la tecnología. El uso de tecnología en el aula ya no es una característica de la innovación, sino que se ha transformado en un recurso que no se puede desperdiciar, por eso la formación de los nuevos profesores debe contemplar el uso y aplicación de las NTIC en el diseño de actividades de aprendizaje en todo nivel escolar.

Si bien la actividad se pensó para ser desarrollada por cada estudiante de manera individual, fue inevitable el diálogo entre ellos -y esperábamos que así ocurriera- frente a las dificultades del uso del software o para comentar los resultados obtenidos después de cada pregunta que se les planteaba. Este diálogo enriqueció las conclusiones que los estudiantes pudieron obtener. En este sentido, los estudiantes que trabajaron en parejas se vieron apoyados en todo momento por sus respectivos compañeros, por tanto en una nueva oportunidad de aplicar esta actividad se considerará privilegiar el trabajo en parejas sobre el individual.

El desarrollo y construcción de los conceptos basales en una temática en particular desde una perspectiva participativa por parte de los estudiantes, apoyados en la manipulación algebraica, gráfica y numérica de los elementos mejora la planificación de las sesiones de clases permitiendo organizar el tiempo disponible para el aprendizaje. Claro está que este tipo de actividades lleva consigo una dedicación especial en el diseño y estructuración de la gama de preguntas pertinentes para cada momento de la actividad y que conduzcan a lograr los objetivos propuestos.

Referencias y bibliografía

Ares, O., Gatica, S. & Olguin, R. (2010). Una propuesta didáctica utilizando las nuevas tecnologías para la enseñanza de la integral como límite de sucesiones. *REPEM*, *III,* 387-395.

Ausubel, D. P., Novak, J. D., & Hanesian, H. (1976). *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo* (Vol. 3). México: Trillas.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* (Myriam Vega Restrepo, trad.). Colombia: Universidad del Valle. (Obra original publicada en 1995).

Moreira, V. (2003). Aprendizagem mediada pela tecnología. *Revista Diálogo Educacional* [en línea], *4*(10), 47-56. Recuperado de: **<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=189118047005>** ISSN 1518-3483

Apéndice A
Secuencia de la Actividad

Objetivo: Determinar el área de la región delimitada por el eje X y la función positiva f en un intervalo [a, b].

Parte I) Acercamiento

1.- Considere la función $f(x) = -x + 2$. Determine el área de la región limitada entre la función y el eje X en [0,2]

2.- Considere la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Determine el área de la región limitada entre la función y el eje X en [0,1]

Intenta ahora con las siguientes funciones:

3.- Considere la función $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Determine el área de la región limitada entre la función y el eje X en $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$.

4.- Considere la función $f(x) = \sqrt{x}$. Determine el área de la región limitada entre la función y el eje X en [0,1.5].

5.- ¿De qué forma puedes aproximar estas áreas? Propone alguna estrategia para realizar esto.

Parte II) Uso de Geogebra.

1.- Con el uso del software Geogebra, representar la función $f(x) = \sqrt{x}$, con x en el intervalo [0,1.5]. Insertar los parámetros: a=0; b=1.5; n= 4. Con ellos, definir el valor s*umin= sumainferior [f, a, b, n]*.

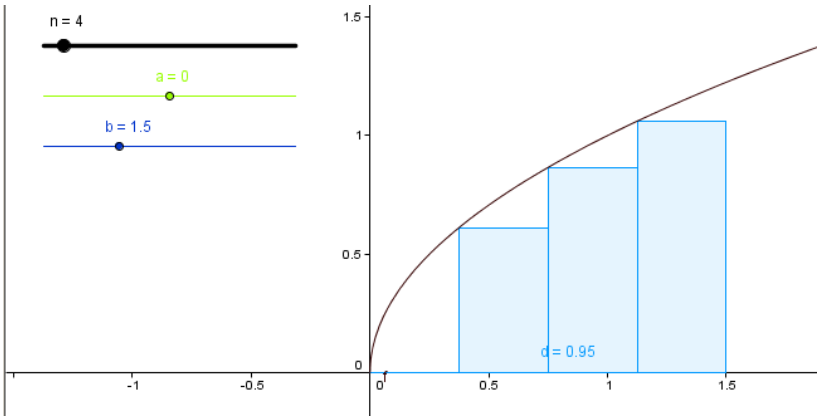


Figura 5. Función sumainferior[sqrt(x),a,b,n] para n=4 visualizada en Geogebra.

2.- El resultado de esta función entrega un valor numérico asociado a los rectángulos que se ven. ¿Cómo se determina este valor?, ¿Cómo definirías el área de cada rectángulo en términos de la función *f?*. Comprueba si lo recién definido se aplica para la función $f(x) = x - x^2$ en el intervalo [0,1].

3.- Comprueba ahora si se aplica para el intervalo [1,3], con la misma función.

4.- Ahora inserte el comando sumsup = sumasuperior[f,a,b,n]. ¿Qué muestra esta función?.

5.- El resultado de esta función entrega un valor numérico asociado a los rectángulos que se ven. ¿Cómo se determina este valor? ¿Cómo definirías el área de cada rectángulo en términos de la función *f?*

Parte III) Cierre

La suma superior y la suma inferior, que son conceptos matemáticos trabajados en el cálculo de áreas. ¿Cómo definirías formalmente y en términos de la función *f(x)* lo que determinan las funciones sumasuperior [f,a,b,n] y sumainferior[f,a,b,n]?.

2.- ¿Cuál de las dos aplicaciones anteriores representa mejor al área de la región?

3.- ¿Qué relación se puede establecer entre las dos sumas representadas?

4.- Defina los puntos (3, Sumin) y (3,Sumsup). Experimente variando el parámetro n observando las fluctuaciones de estos puntos. Si lo desea "active el rastro" de estos puntos. ¿Qué puedes concluir?

5.- Redacte sus conclusiones de esta actividad en términos de las definiciones que ustedes han propuesto.

Contribuições dos recursos didáticos do Portal Dia a Dia Educação

Natália Hidalgo dos Reis **Pacheco**
Universidade Tecnologica do Paraná
Brasil
naty_1702@hotmail.com
João Henrique **Berssanette**
Universidade Tecnologica do Paraná
Brasil
joao.berssanette@ifpr.edu.br
Rafaela Gonçalves de **Oliveira**
Universidade Tecnologica do Paraná
Brasil
rafa_g_oliveira@hotmail.com
Guataçara dos Santos **Junior**
Universidade Tecnologica do Paraná
Brasil
guata39@gmail.com
Amanda Drzewinski de **Miranda**
Universidade Tecnologica do Paraná
Brasil
amanda.miranda@pop.com.br

Resumo

Devido aos avanços tecnológicos, percebe-se o quão importante são os recursos tecnológicos como ferramenta de apoio ao processo de ensino-aprendizagem. Mediante a esta situação, a Secretaria Estadual de Educação do Paraná (SEED/PR) - por meio do Portal Dia a Dia Educação - disponibiliza diversos serviços, informações e recursos didáticos que visam contribuir com educadores e estudantes. A proposta deste trabalho é apresentar alguns dos recursos didáticos disponibilizados pelo Portal Dia a Dia Educação para a prática docente. Para isso, realizou-se uma pesquisa bibliográfica referente a alguns recursos disponibilizados pelo Portal. A apresentação desses recursos visa sua promoção e divulgação junto aos educadores, buscando colaborar para a prática docente tornando-a mais dinâmica e atrativa. Este estudo constitui-se ainda em um convite à reflexão sobre as responsabilidades implícitas na inserção destes recursos à prática didática pedagógica.

Palavras chave: Objeto de Aprendizagem Colaborativa, Condigital, Infográficos, O Tema É, Problemas em Quadrinhos.

Explicitação do tema

As tecnologias, quando utilizadas como ferramenta didático pedagógica na educação funcionam como instrumento de mudanças no processo de ensino/ aprendizagem. Considerando a evolução tecnológica, o espaço escolar deve ser visto como um espaço de constantes mudanças, onde o aluno, de forma participativa, interage na construção do conhecimento. Dentre

os recursos tecnológicos disponíveis, está o computador e o uso da internet, uma fonte diversificada de pesquisa de conteúdo, de atividades variadas.

O uso de Tecnologias de informação e Comunicação (TICs) nas práticas de ensino não é novidade. Há algum tempo, assistimos à implementação de programas e políticas públicas que têm por objetivo a adoção e a integração de ferramentas computacionais.

A Secretaria Estadual de Educação do Paraná (SEED/PR) por meio do Portal Dia a Dia Educação disponibiliza serviços, informações e recursos didáticos que visam contribuir com educadores, estudantes, gestores e toda a comunidade escolar.

A proposta deste trabalho é apresentar alguns recursos didáticos disponibilizados pelo Portal Dia a Dia Educação para a prática docente, para isso, realizou-se uma pesquisa bibliográfica referente aos recursos disponibilizados pelo Portal.

A necessidade da apresentação e divulgação destes recursos didáticos torna-se evidente quando se leva em consideração o baixo número de publicações referentes ao assunto e como estes recursos podem contribuir com a prática docente. Portanto, a apresentação desses recursos visa sua promoção e divulgação junto aos educadores, como contribuição para uma prática docente mais dinâmica e atrativa.

Revisão e Fundamentação Teórica

A atividade docente é ao mesmo tempo prática e ação, onde a prática é tida como uma atividade sistemática constituída por uma cultura organizacional da escola e tem o objetivo de garantir o conhecimento, por meio de projetos pedagógicos e metodologias desenvolvidas pela Escola e pelo Professor.

Libâneo (2004) aponta atitudes docentes que visam um novo professor frente às contemporaneidades, dentre elas: assumir o ensino como mediação; reconhecer o impacto das novas tecnologias da comunicação e informação na sala de aula; investir na atualização científica, técnica e cultural; conhecer as estratégias do ensinar a pensar e do ensinar a aprender; persistir no empenho de auxiliar o aluno a buscar uma perspectiva crítica; assumir o trabalho de sala de aula como um processo de comunicação e desenvolvimento da capacidade comunicativa; investir na atualização científica, técnica e cultural, como ingredientes do processo de formação continuada; desenvolver comportamento ético e saber orientar os alunos em valores e atitudes em relação a vida, ao ambiente, às relações humanas e a si próprios.

As atitudes apontadas por Libâneo, caracterizam uma prática docente inovadora e integrada com a educação contemporânea, ainda que esta seja observada por muitos educadores com receio, mas que precisa ser confrontada de maneira corajosa e ousada.

Todavia, um ponto a ser destacado consiste no fato de ser necessário que o professor compreenda que não se trata mais de ser o único detentor do saber, mas um parceiro do aluno diante das possibilidades de se obter conhecimento.

Sendo assim, em sala de aula, o processo de ensino-aprendizagem exige cada vez mais dedicação do docente para que os conteúdos ministrados, sejam tratados de forma dinâmica e prazerosa. Por isso, pode-se afirmar que professores assumem um papel fundamental na mediação do conhecimento, e uma boa didática é essencial para o sucesso deste processo. Portanto, é função do docente orientar o processo de ensino, visando estimular e suscitar a atividade própria do aluno para aprendizagem.

Neste sentido, o uso de materiais didáticos atrativos, pode estar apenas reforçando o ensino tradicional, e para que isto não ocorra, faz-se necessário que o docente escolha o material didático pelo seu efeito esperado no aprendiz. Evidentemente, recursos que exijam do aluno uma situação passiva, diante de um conteúdo a ser apreendido, não podem ser considerados adequados ao contexto de ensino-aprendizagem que prioriza a construção do saber.

Recursos didáticos podem ser definidos como ferramentas utilizadas pelo professor para auxiliar o processo de ensino/ aprendizagem, estes recursos podem ser mais simples como o giz e apagador, ou mais sofisticados como computador, projetor e outros. Segundo Cerqueira e Ferreira (2000), os recursos didáticos devem auxiliar o educando em seu processo de aprendizagem, constituindo-se em um incentivador do processo.

Portanto, os recursos didáticos podem ser utilizados como apoio na organização do processo de ensino-aprendizagem, envolvendo uma série de elementos. O docente que faz uso desses elementos do contexto social dos alunos pode obter resultados mais significativos, conforme salientam Policarpo; Steinle (2008) ao apontar comportamentos declarados pelos professores como resultados do uso de recursos alternativos em suas aulas:

> 1) os alunos avançaram com mais propriedade em relação aos conteúdos; 2) as aulas passaram a ser mais dialogadas; 3) melhorou a relação interpessoal entre professor e aluno; 4) mediou conhecimentos em suas aulas tornando-se uma atividade mais prazerosa para os professores; 5) aumentou o interesse dos alunos, que passaram a participar mais.

Assim, pode-se afirmar que os recursos didáticos possuem a capacidade de despertar e de estimular os mecanismos sensoriais dos participantes, fazendo com que o aluno desenvolva sua criatividade, tornando-se participante ativo de suas construções cognitivas.

É possível classificar os recursos didáticos quando ao seu uso em quatro classes propostas por Cerqueira; Ferreira (2000). A primeira classe são os naturais, tidos como elementos de existência real na natureza como pedras, animais, árvores, lagos, etc. A classe seguinte representa os chamados pedagógicos, que são aqueles materiais idealizados com a finalidade de ensinar, como exemplo: quadro de giz, flanelógrafos, cartazes, slides e outros. Na terceira classe encontram-se os tecnológicos, que são os materiais usados como auxiliares e que possuem alguma outra utilidade por exemplo rádios, gravadores, televisores, computadores e outros. A última classe apresentada representa os recursos culturais, que consistem nos instrumentos utilizados para mostrar alguma característica que revela algo sobre algum povo ou época, como museus e bibliotecas.

Assim, cabe ao professor a função de escolher o recurso que melhor se adeque a fim de que este possa de alguma forma contribuir para aprendizagem de seus alunos. Dentre os recursos tecnológicos disponíveis, o que mais se destaca atualmente é a internet, neste vasto universo de informação, existem alguns locais onde são disponibilizados recursos específicos para uso em sala de aula. Um destes locais é o Portal Dia a Dia Educação da Secretaria Estadual de Educação do Paraná (SEED/PR), alvo desta comunicação.

Método

A presente pesquisa possui caráter exploratório teórico. Realizou-se uma busca sobre os recursos didáticos tecnológicos que poderiam ser utilizados pelos professores da rede pública estadual de ensino do Paraná e demais interessados, visto que o Portal é aberto a todos. Ao nos

depararmos com o Portal Dia a Dia Educação, optou-se pela escolha de alguns dos recursos disponíveis para pesquisar sobre seus diversos usos, aspectos positivos e negativos.

Resultados

O Portal Dia a Dia Educação foi desenvolvido no ano de 2004 e consiste em um ambiente virtual institucionalizado da Secretaria Estadual de Educação do Paraná, de conteúdo educacional e acesso livre a toda comunidade educacional, o intuito de seus criados era de diversificar o processo de ensino-aprendizagem além de promover a troca de informações e experiências entre os envolvidos.

A missão do Portal consiste em promover uma reforma profunda e ampla da sociabilização do saber, sendo implantado um modelo de aprendizagem colaborativa, que reconhece e valoriza os saberes acumulados em toda Rede de Educação Pública Estadual, tornando-se assim, um veículo de informação e de expressão cultural e acadêmica de educadores, atendendo a toda a comunidade escolar, estabelecendo um processo aberto, interativo, constante e dinâmico, visando alcançar um salto cultural e social no estado do Paraná.

Figura 1- página inicial no acesso ao Portal Dia a Dia Educação.

O endereço eletrônico para acesso do Portal é o http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/. Este *Site* foi concebido com uma estrutura de navegação em camadas de acesso por público alvo que visa facilitar a navegação em ambientes personalizados a seus usuários. Ao acessar a página do Portal, depara-se com o mostrado na Figura 1. Nesta página é possível verificar que há quatro áreas específicas para o público alvo, sendo: alunos, educadores, gestão escolar e comunidade. Em cada uma dessas categorias, há conteúdos direcionados para cada público específico.

Além, das opções principais citadas acima, o portal disponibiliza links de acesso rápido, abaixo do menu principal para que o acesso seja facilitado aos usuários que já possuem familiaridade com o portal.

Este artigo concentra seu interesse na área Educadores, e ao clicar nesta aba, o usuário é encaminhado para outra página de conteúdo específico, onde são exibidas notícias recentes, ao lado esquerdo da página é exibido um menu com uma série de opções. Dentre estas opções está o foco deste estudo: o item Recursos Didáticos. A figura 2 exibe o conteúdo da página destinada a Educadores, dando ênfase ao item citado.

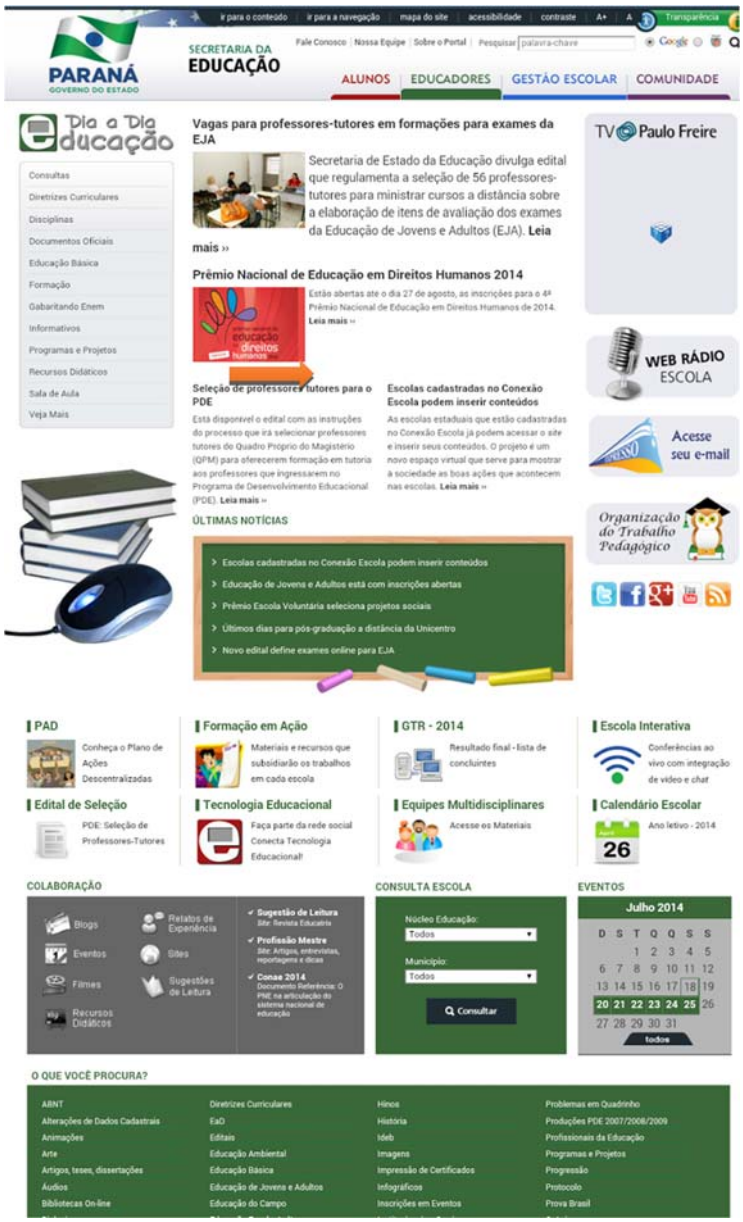


Figura 2 - página referente a área de Educadores, com destaque aos Recursos Didáticos.

No portal Dia a Dia Educação, na área destinada aos Educadores, encontram-se diversos recursos didáticos. Estes buscam oferecer aos docentes conteúdos midiatizados que têm como objetivo subsidiá-los nas ações dentro da sala de aula.

Ao clicar na opção Recursos didáticos, o usuário é direcionado para um ambiente onde é possível visualizar os recursos disponibilizados pelo Portal, conforme mostra a Figura 3.

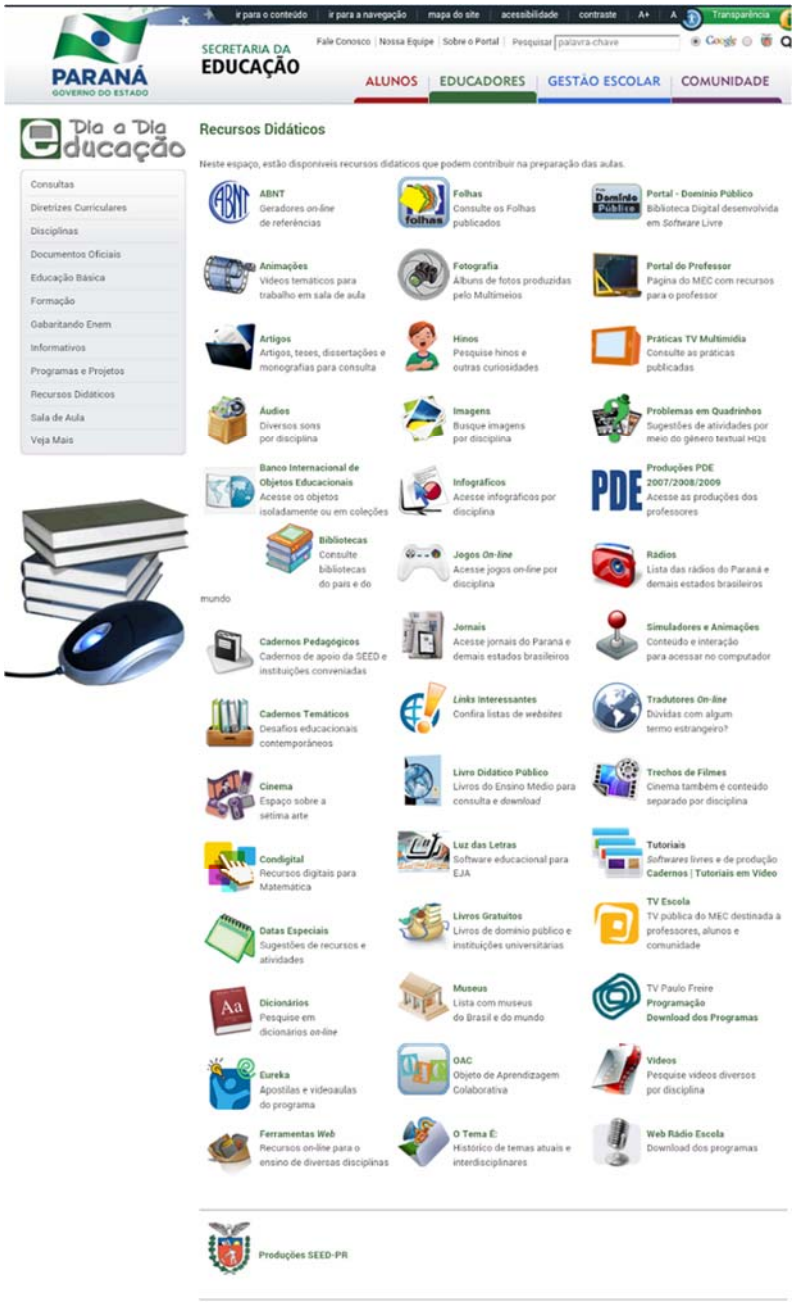


Figura 3- Recursos didáticos disponibilizados pelo Portal Dia a Dia Educação.

Dentre os diversos recursos didáticos disponibilizados pelo portal podemos destacar: Animações, Fotografia, Portal do Professor, Artigos, Hinos, Práticas TV Multimídia, Áudios, Imagens, Problemas em Quadrinhos, Bannco Internacional de Objetos Educacionais, Infográficos, Bibliotecas, Jogos On-line, Rádios, Cadernos Pedagógicos, Jornais, Simuladores e Animações, Cadernos Temáticos, Links Interessantes, Tradutores On-line, Cinema, Livro Didático Público, Trechos de Filmes, Condigital, Luz das Letras, Tutoriais, Livros Gratuitos, TV Escola, Dicionários, Museus, Eureka, OAC, Vídeos, Ferramentas Web, O Tema É:, Web Rádio Escola e outros. Para aprofundamento do funcionamento e de aspectos positivos e negativos serão abordados os seguintes recursos: Infográficos; OAC; O Tema É; Problemas em Quadrinhos; Condigital.

Discussão dos resultados

Para cada um dos recursos realizou-se uma pesquisa bibliográfica sobre o assunto para se verificar as possibilidades de trabalho com cada recurso.

Com relação ao Recurso Infográficos, no Portal apresentam-se divididos de acordo com a matéria a ser lecionada, como mostrado na figura 4a. Ao clicar sobre a matéria Matemática depara-se com os infográficos que podem ser utilizados ao se lecionar essa matéria, conforme apresentado na figura 4b.

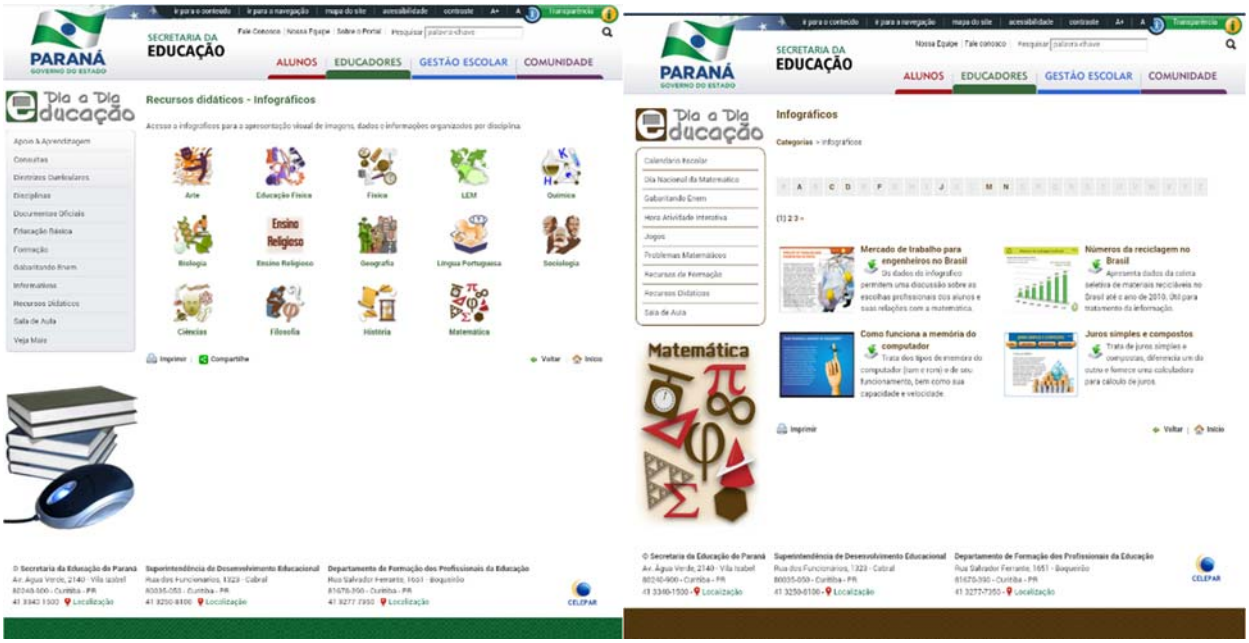


Figura 4a e 4b. Infográficos apresentados por matéria, infográficos matemáticos.

Alguns autores consideram este recurso com um gênero jornalístico, outros defendem a ideia de que infográfico é uma técnica específica de representação, ou uma linguagem. Schmitt (2006) conceitua o termo infografia como um sistema hibrido de comunicação, porém ao invés de empregar imagens, palavras e números, utiliza os sistemas de comunicação verbal e de comunicação visual.

Caixeta (2005) descreve infográfico como uma maneira representativa de informações, que devem ser atrativas e transmitidas rapidamente ao leitor. Portanto, podemos observar que a característica a ser destacada na utilização de infográficos, consiste na interação entre imagem e texto, visando tornar a informação mais clara e objetiva para o usuário. Já Ribas (2004), destaca que infográficos podem ser utilizados principalmente para: fazer analogias, descrever processos, esclarecer acontecimentos, destacar detalhes, comparar dimensões entre outros. O uso de infográficos deve agregar ao conteúdo da aula, este deve capacitar o aluno a responder questionamentos como: o quê, quem, quando, como e por quê.

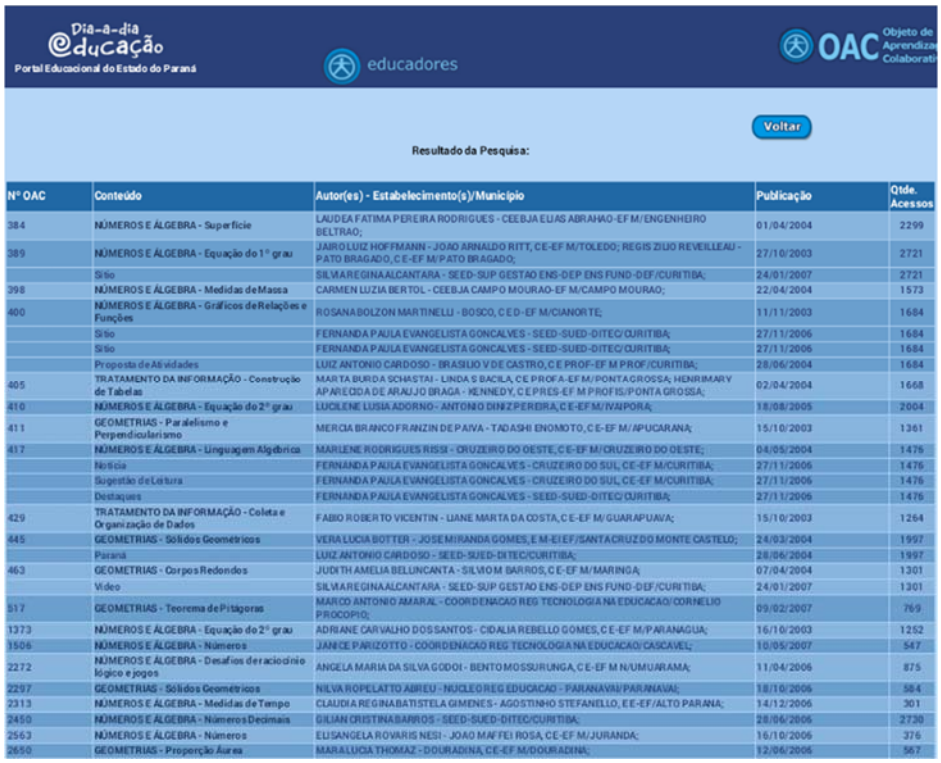
Outro recurso interessante disponibilizado pelo Portal é o OAC, ou seja, Objeto de Aprendizagem Colaborativa. Uma definição de OAC, é apresentada por Wiley (2003): “qualquer recurso digital que pode ser reusado para apoiar a aprendizagem”. Objeto de aprendizagem colaborativa pode ser considerado como atividades que formam uma unidade de ensino ou tecnologias que podem ser utilizadas e reutilizadas no processo de ensino-aprendizagem.

Gallotta e Nunes (2012) defendem que os objetos de aprendizagem permitem a construção de contextos digitais para os conteúdos que serão explorados em sala de aula, esses contextos fazem uso de uma série de ferramentas midiáticas, tais como música, desenho, gráficos, simulações, jogos entre outros. Normalmente os objetos de aprendizagem colaborativa são produzidos por professores ou demais participantes do processo de ensino-aprendizagem.

No Portal, ao clicar sob o ícone do OAC aparece a página mostrada na figura 5 mostrada a seguir, onde é possível observar que é necessário que se insira o nível de ensino desejado, bem como a disciplina e o conteúdo desejado.

Figura 5. Objeto de Aprendizagem Colaborativa.

Os professores da rede ou interessados podem compartilhar seus Objetos na plataforma, para tanto, devem enviar a proposta do objeto que será analisado e então, se aceito, disponibilizado para que outros professores possam fazer uso desse material. A figura 6 apresentada a seguir, mostra exemplos de objetos na área de Matemática para Anos Finais do Ensino Fundamental.



Nº OAC	Conteúdo	Autor(es) - Estabelecimento(s)/Município	Publicação	Qtde. Acessos
384	NÚMEROS E ÁLGEBRA - Superfície	LAUDEA FATIMA PEREIRA RODRIGUES - CEEBJA ELIAS ABRAHAO-EF M/ENGENHEIRO BELTRAO;	01/04/2004	2299
389	NÚMEROS E ÁLGEBRA - Equação do 1º grau	JAIRO LUIZ HOFFMANN - JOAO ARNALDO RITT, CE-EF M/TOLEDO; REGIS ZILIO REVEILLEAU - PATO BRAGADO, CE-EF M/PATO BRAGADO;	27/10/2003	2721
	Sítio	SILVIA REGINA ALCANTARA - SEED-SUP GESTAO ENS-DEP ENS FUND-DEF/CURITIBA;	24/01/2007	2721
398	NÚMEROS E ÁLGEBRA - Medidas de Massa	CARMEN LUZIA BERTOL - CEEBJA CAMPO MOURAO-EF M/CAMPO MOURAO;	22/04/2004	1573
400	NÚMEROS E ÁLGEBRA - Gráficos de Relações e Funções	ROSANA BOLZON MARTINELLI - BOSCO, CED-EF M/CIANORTE;	11/11/2003	1684
	Sítio	FERNANDA PAULA EVANGELISTA GONCALVES - SEED-SUED-DITEC/CURITIBA;	27/11/2006	1684
	Sítio	FERNANDA PAULA EVANGELISTA GONCALVES - SEED-SUED-DITEC/CURITIBA;	27/11/2006	1684
	Proposta de Atividades	LUIZ ANTONIO CARDOSO - BRASILIO V DE CASTRO, CE PROF-EF M PROF/CURITIBA;	28/06/2004	1684
405	TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO - Construção de Tabelas	MARTA BURDA SCHASTAI - LINDA S BACILA, CE PROFA-EF M/PONTA GROSSA; HENRIMARY APARECIDA DE ARAUJO BRAGA - KENNEDY, CE PRES-EF M PROFIS/PONTA GROSSA;	02/04/2004	1668
410	NÚMEROS E ÁLGEBRA - Equação do 2º grau	LUCILENE LUSIA ADORNO - ANTONIO DINIZ PEREIRA, CE-EF M/IVAIPORA;	18/08/2005	2004
411	GEOMETRIAS - Paralelismo e Perpendicularismo	MERCIA BRANCO FRANZIN DE PAIVA - TADASHI ENOMOTO, CE-EF M/APUCARANA;	15/10/2003	1361
417	NÚMEROS E ÁLGEBRA - Linguagem Algébrica	MARLENE RODRIGUES RISSI - CRUZEIRO DO OESTE, CE-EF M/CRUZEIRO DO OESTE;	04/05/2004	1476
	Notícia	FERNANDA PAULA EVANGELISTA GONCALVES - CRUZEIRO DO SUL, CE-EF M/CURITIBA;	27/11/2006	1476
	Sugestão de Leitura	FERNANDA PAULA EVANGELISTA GONCALVES - CRUZEIRO DO SUL, CE-EF M/CURITIBA;	27/11/2006	1476
	Destaques	FERNANDA PAULA EVANGELISTA GONCALVES - SEED-SUED-DITEC/CURITIBA;	27/11/2006	1476
429	TRATAMENTO DA INFORMAÇÃO - Coleta e Organização de Dados	FABIO ROBERTO VICENTIN - LIANE MARTA DA COSTA, CE-EF M/GUARAPUAVA;	15/10/2003	1264
445	GEOMETRIAS - Sólidos Geométricos	VERA LUCIA BOTTER - JOSE MIRANDA GOMES, E M-E I EF/SANTA CRUZ DO MONTE CASTELO;	24/03/2004	1997
	Paraná	LUIZ ANTONIO CARDOSO - SEED-SUED-DITEC/CURITIBA;	28/06/2004	1997
463	GEOMETRIAS - Corpos Redondos	JUDITH AMELIA BELLUNCANTA - SILVIO M BARROS, CE-EF M/MARINGA;	07/04/2004	1301
	Vídeo	SILVIA REGINA ALCANTARA - SEED-SUP GESTAO ENS-DEP ENS FUND-DEF/CURITIBA;	24/01/2007	1301
517	GEOMETRIAS - Teorema de Pitágoras	MARCO ANTONIO AMARAL - COORDENACAO REG TECNOLOGIA NA EDUCACAO/CORNELIO PROCOPIO;	09/02/2007	769
1373	NÚMEROS E ÁLGEBRA - Equação do 2º grau	ADRIANE CARVALHO DOS SANTOS - CIDALIA REBELLO GOMES, CE-EF M/PARANAGUA;	16/10/2003	1252
1506	NÚMEROS E ÁLGEBRA - Números	JANICE PARIZOTTO - COORDENACAO REG TECNOLOGIA NA EDUCACAO/CASCAVEL;	10/05/2007	547
2272	NÚMEROS E ÁLGEBRA - Desafios de raciocínio lógico e jogos	ANGELA MARIA DA SILVA GODOI - BENTO MOSSURUNGA, CE-EF M N/UMUARAMA;	11/04/2006	875
2297	GEOMETRIAS - Sólidos Geométricos	NILVA ROPELATTO ABREU - NUCLEO REG EDUCACAO - PARANAVAI/PARANAVAI;	18/10/2006	584
2313	NÚMEROS E ÁLGEBRA - Medidas de Tempo	CLAUDIA REGINA BATISTELA GIMENES - AGOSTINHO STEFANELLO, EE-EF/ALTO PARANA;	14/12/2006	301
2450	NÚMEROS E ÁLGEBRA - Números Decimais	GILIAN CRISTINA BARROS - SEED-SUED-DITEC/CURITIBA;	28/06/2006	2730
2563	NÚMEROS E ÁLGEBRA - Números	ELISANGELA ROVARIS NESI - JOAO MAFFEI ROSA, CE-EF M/JURANDA;	16/10/2006	376
2650	GEOMETRIAS - Proporção Áurea	MARA LUCIA THOMAZ - DOURADINA, CE-EF M/DOURADINA;	12/06/2006	567

Figura 6. Objetos de Aprendizagem Colaborativa de Matemática para Anos Finais do Ensino Fundamental.

Outro recurso apresentado pelo Portal denominado “O Tema É”, trabalha com diversos assuntos que podem ser utilizados em sala de aula fazendo-se uso da interdisciplinaridade através de temas atuais e chamativos aos alunos. A figura 7 mostra exemplos desse recurso.

Figura 7. O Tema É, recurso apresentado pelo Portal.

A interdisciplinaridade é importante pois faz com que as diferentes matérias escolares criem vínculo umas com as outras, fazendo com que os conteúdos sejam significativos para o aluno. Além de ampliar sua visão de mundo e interligar conhecimentos.

Figura 8. Problemas em Quadrinhos disponibilizados pelo Portal.

Problemas em Quadrinhos é mais um dos recursos que apresenta-se subdivido por disciplina, em cada problema é colocada uma situação contextualizada em que algo que deve ser solucionado. O interessante no uso desse tipo de recurso é que faz parte do lazer dos alunos, chamando a atenção positivamente para a atividade a ser realizada. A figura 8 apresenta alguns dos problemas disponibilizados pelo Portal.

Condigital é um dos recursos didáticos disponíveis que apresenta apenas conteúdos matemáticos. Esse recurso faz parte de uma parceria feita entre diversos órgãos do governo e universidades públicas para que sejam desenvolvidos objetos de aprendizagem úteis em sala de aula para o processo de ensino-aprendizagem. Atualmente estão disponíveis mídias para três eixos da matemática: Álgebra, Números e Funções; Geometria e Medidas; e Tratamento da Informação. Todas as mídias trazem experimentos da área e explicação dos conteúdos matemáticos envolvidos. A mídia Tratamento da Informação, por exemplo, traz um experimento sobre o vírus da gripe H1N1, além de explicações sobre Análise Combinatória, Medidas de Tendência Central, Estatística e Probabilidade, além de vídeos explicativos e ilustrativos. A figura 9 mostrada a seguir, mostra a página em que se encontram as mídias disponíveis como recursos didáticos Condigital.

Figura 9. Condigital, recurso disponibilizado pelo Portal.

Assim, o portal Dia a Dia Educação da Secretaria Estadual de Educação do Paraná (SEED/PR) oferece a educadores uma vasta coleção de recursos didáticos. Hoje, a interação dos recursos didáticos e equipamentos tecnológicos está diretamente ligada as mudanças que ocorrem na escola. Contudo, essas mudanças exigem inovações na prática pedagógica com o objetivo de instigar o aluno a participar de maneira crítica das aulas.

O papel do professor atualmente é mediador e incentivador do conhecimento não existe mais a figura do professor como detentor de todo o conhecimento, e este fator torna imprescindível a busca do professor por inovações pedagógicas que o auxiliem no processo de ensino-aprendizagem. Entretanto, deve-se lembrar que nenhuma tecnologia substitui o professor e o seu papel, porém se estes recursos forem bem empregados, poderão servir de estimulo e apoio ao processo de aprendizagem. Karling (1991) faz uma análise interessante com relação aos

recursos, afirmando que estes "garantem um ensino sistematizado dinamizado e eficaz. Os recursos de ensino devem ser usados para facilitar, acelerar e intensificar a aprendizagem e não para poupar o trabalho do professor e simplificar o trabalho do aluno."

A disposição dos recursos didáticos no Portal permite acesso às informações sobre novas tecnologias, novos saberes e principalmente a autonomia do educador na formação do seu aluno. Essas exigências educacionais estabelecem que o professor deve reformular sua prática perante a realidade, pois hoje os alunos são constantemente estimulados e fazem parte de um mundo onde as informações estão acessíveis permitindo o acesso ao conhecimento.

Conclusões

Nesta pesquisa, buscou-se apresentar alguns recursos didáticos disponibilizados pelo portal Dia a Dia Educação da Secretaria Estadual de Educação do Paraná (SEED/PR), esta divulgação visa contribuir para a prática docente tornando-a mais dinâmica e atrativa. O Portal Dia a Dia Educação disponibiliza recursos que podem agregar valor aos conteúdos trabalhados em sala de aula. Neste Portal, na seção Educadores, no item Recursos Didáticos, são disponibilizados diversos recursos que atendem as mais variadas disciplinas. Cabe ao docente inovar, experimentar e levar até seus alunos os recursos cabíveis.

Os recursos didáticos criam possibilidades para o professor atuar em sala de aula, evitando que o cotidiano escolar seja engolido pela mesmice. No entanto, educadores precisam compreender que o uso de recursos didáticos só será viável e significativo em sua prática pedagógica quando ele se constituir como um elemento de apoio na construção do conhecimento.

Diante do exposto, é mister que o docente enfrente as barreiras na execução de sua prática, utilizando-se da reflexão como um instrumento que irá nortear seu trabalho, ajudando na aquisição de uma nova postura frente aos recursos didáticos disponíveis e sua utilização.

Por fim, percebe-se a importância dos recursos didáticos para o processo de ensino-aprendizagem, entretanto estes recursos devem ser utilizados dotados de um propósito e o professor deve dominar a sua utilização, caso contrário o efeito que poderia ser benéfico ao processo pode tornar-se prejudicial.

Referências e bibliográficas

Caixeta, R. (2005). A arte de informar. *Jornal ABI–Associação Brasileira de Imprensa*, 2005. Disponível em: <http://scholar.google.com.br/scholar?q=Caixeta%2C+R.+2005.+A+arte+de+informar.&btnG=&hl=pt-BR&as_sdt=0%2C5#0>. Acesso em: 30/8/2014.

Cerqueira, J. & Ferreira, E. (2000). Recursos didáticos na educação especial. *Benjamim Constant*, 2000. Disponível em: <http://200.156.28.7/Nucleus/media/common/Nossos_Meios_RBC_RevAbr2000_ARTIGO3.RTF>. Acesso em: 30/8/2014.

Gallotta, A. & Nunes, C. (2004). Objetos de aprendizagem a serviço do professor. Acesso em, 2012. Disponível em: <http://scholar.google.com.br/scholar?q=Objetos+de+aprendizagem+a+servi%C3%A7o+do+professor%2C+2004&btnG=&hl=pt-BR&as_sdt=0%2C5#1>. Acesso em: 31/8/2014.

Karling, A. (1991). A didática necessária. Disponível em: <http://scholar.google.com.br/scholar?hl=pt-BR&q=a+did%C3%A1tica+necess%C3%A1ria&btnG=&lr=#0>. Acesso em: 31/8/2014.

Libâneo, J. C. (2004). Pedagogia e pedagogos, para que? Cortez.

Policarpo, I. & Steinle, M. (2008). As contribuições dos recursos alternativos na prática pedagógica. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2008_uenp_ped_md_ivani_policarpo.pdf>. Acesso em: 30/8/2014.

Ribas, B. (2004). Infografia Multimídia: um modelo narrativo para o webjornalismo. *Anais do II SBPJor* (CD-ROM). Salvador-BA/Brasil. Disponível em: <http://www.facom.ufba.br/jol/pdf/2004_5iberoamericano_salvador_infografia.pdf>. Acesso em: 30/8/2014.

Schmitt, V. (2006). A infografia jornalística na ciência e tecnologia: um experimento com estudantes de jornalismo da Universidade Federal de Santa Catarina. Disponível em: <http://scholar.google.com.br/scholar?hl=pt-BR&q=+A+Infografia+Jornal%C3%ADstica+na+Ci%C3%AAncia+e+Tecnologia+um+Experimento+com++Estudantes+de+Jornalismo+da+Universidade+Federal+de+Santa+Catarina.&btnG=&lr=#0>. Acesso em: 30/8/2014.

Wiley, D. (2003). Connecting learning objects to instructional design theory: A definition, a metaphor, and a taxonomy. Disponível em: <http://scholar.google.com.br/scholar?hl=pt-BR&as_sdt=0,5&q=Connecting+learning+objects+to+instructional+design+theory%3A+A+definition,+a+metaphor,+and+a+taxonomy#0>. Acesso em: 31/8/2014.

Diseño de tareas alrededor de las cónicas en Geometría Analítica desde lo puntual y lo global usando Geometríagdinámica

Edinsson **Fernández** Mosquera
Departamento de Matemáticas y Estadística, Universidad de Nariño
Colombia
edinsson.fernandez@gmail.com
María Fernanda **Mejía** Palomino
Escuela Normal Superior Farallones de Cali
Colombia
mafanda1216@gmail.com

Resumen

En esta experiencia (Fernández, 2011) se diseñaron y analizaron ocho tareas en un curso de Geometría Analítica con 25 futuros docentes de matemáticas, de una universidad del suroccidente colombiano. Estas tareas tuvieron la intencionalidad de construir geométricamente las cónicas (parábola, elipse e hipérbola) vistas como lugares geométricos y mediados con el Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) Cabri, desde la dialéctica puntual – global. Así mismo, se abordaron los aspectos metodológicos de la micro-ingeniería didáctica (Artigue, 1995). Para el marco teórico, se utilizó la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) de Brousseau (2007) y la tipología de tareas en AGD (Laborde, 2008). Una conclusión fue que lo puntual en este trabajo remitió a lo local, en considerar puntos de la gráfica que tenían las propiedades de ser una cónica, lo que conllevó a que permanecieran en un nivel perceptual, en tanto que lo global de la gráfica les permitió aproximarse al mundo teórico.

Palabras clave: cónicas, lugar geométrico, construcciones geométricas, geometría dinámica, Cabri, puntual, global, situaciones didácticas, diseño de tareas, visualización, micro-ingeniería didáctica.

Introducción

Esta investigación se llevó a cabo con 25 futuros docentes de matemáticas de un curso de Geometría Analítica de una Institución de Educación Superior del **suroccidente Colombiano**. Se realizó en un aula de informática, dotada con acceso a la plataforma virtual de aprendizaje Moodle. Las situaciones problemas fueron desarrolladas en parejas, usando Cabri. Los **participantes de este curso** accedieron a las indicaciones de las situaciones problemas y enviaron sus elaboraciones a la plataforma virtual del curso. El profesor actuó como investigador simultáneamente. Uno de los resultados fue el diseño de ocho situaciones desde la dialéctica puntual – global, tres de **estas estuvieron** relacionadas con parábolas, tres con elipses y dos con hipérbolas. En cada una de estas tareas se plantearon construcciones puntuales y globales, siempre iniciándose el estudio de una cónica desde las construcciones puntuales. (Ver **Apéndices A y B**).

En esta ponencia, se hará énfasis en algunas consideraciones que emergieron como resultado de los análisis preliminares y que a la postre sirvieron como fundamento al proceso del diseño del dispositivo experimental y de las tareas planteadas.

Antecedentes

Para este estudio, se identificaron siete categorías a partir de los documentos revisados, que en la Figura 1, aparece en un mapa conceptual, alrededor de la problemática. De esta elaboración del estado del arte, surgieron los objetivos, la pregunta de investigación, las hipótesis del diseño y se configuró el marco teórico.

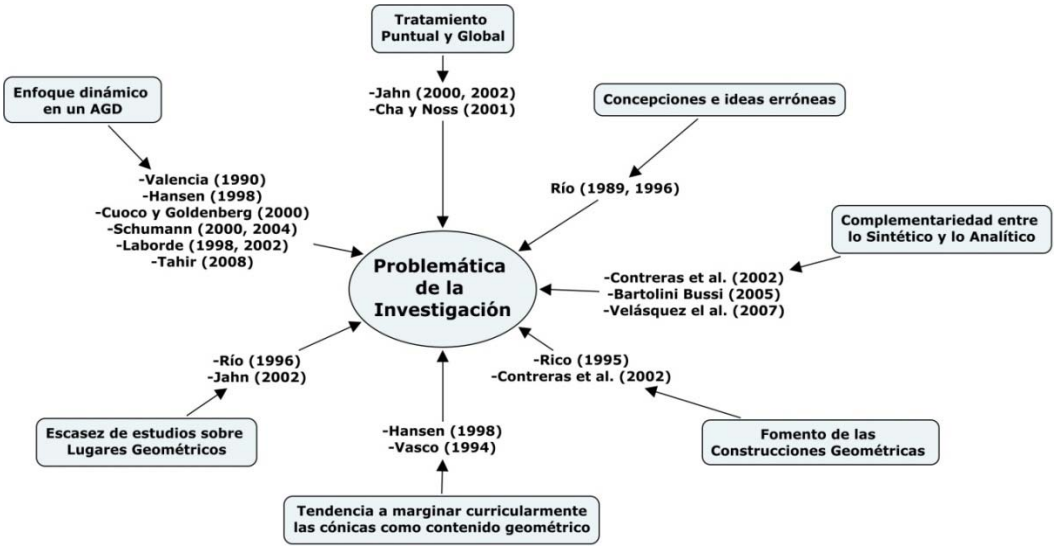


Figura 1. Organización de los antecedentes según siete categorías identificadas.

Planteamiento del problema

Se presentará algunas de las partes importantes de esta investigación tales como la pregunta de investigación: ¿Qué fenómenos didácticos genera la mediación del AGD, en la actividad matemática de los estudiantes que se inician en un curso de geometría analítica, en el marco de construcciones geométricas de las cónicas como lugares geométricos desde lo puntual y lo global?. Para dar respuesta a la cuestión principal, se presentarán los objetivos que persiguió esta investigación: 1. Diseñar desde los referentes de la Teoría de las Situaciones Didácticas y desde la micro-ingeniería didáctica una secuencia de situaciones didácticas para el estudio de las cónicas como lugares geométricos en el AGD; 2. Analizar la actividad matemática de los estudiantes de un curso universitario de geometría analítica cuando se aborda la construcción geométrica de las cónicas a partir de una caracterización puntual y global mediado por el AGD.

Fundamentación teórica

Para el marco teórico, se tuvo en cuenta tres dimensiones: la Histórica – Epistemológica, la Cognitiva y la Didáctica

Con la primera dimensión se encontró los diversos significados, naturaleza y características de las cónicas desde la perspectiva de lugar geométrico, en tres períodos de tiempo. Con la cognitiva, lo global y puntual de los objetos matemáticos. Así mismo, las concepciones, dificultades y obstáculos de los estudiantes acerca de la noción de lugar geométrico en el aprendizaje de las cónicas. También se revisó la visualización matemática en un AGD, el papel

de las representaciones matemáticas ejecutables y dinámicas para la comprensión de las cónicas y las construcciones geométricas como entrada necesaria en los AGD que actuó como mediador (Moreno & Hegedus, 2009). Y con la didáctica, se tuvo en cuenta un análisis de libros de texto (Fernández & Mejía, 2010) sobre las cónicas en la Educación Superior, la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) (Brousseau, 2007), los AGD como medio organizador de la interacción con el saber matemático. Así mismo, se tuvo en cuenta la tipología de tareas en AGD (Laborde, 2008) para gestionar las clases de Geometría Analítica.

Diseño y metodología

En esta investigación, se abordó los aspectos metodológicos siguiendo las directrices de la Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995). El diseño del dispositivo experimental puso en funcionamiento las relaciones entre: las hipótesis de investigación (HI, donde HI 1 fue: La transición de lo puntual a lo global y viceversa en las construcciones geométricas estáticas de las cónicas como lugares geométricos puede dar lugar a través de la mediación del AGD Cabri a la emergencia de construcciones geométricas globales dinámicas de las cónicas como lugares geométricos e HI 2 fue: El aprendizaje de las propiedades matemáticas de las cónicas puede iniciarse desde el enfoque sintético, gracias a la puesta en acto de situaciones didácticas relativas a las construcciones de lugares geométricos en AGD y a partir de éstas abordarse el análisis algebraico de sus propiedades.), los análisis preliminares (dimensión epistemológica, cognitiva y didáctica) y el problema de investigación (Ver Figura 2).

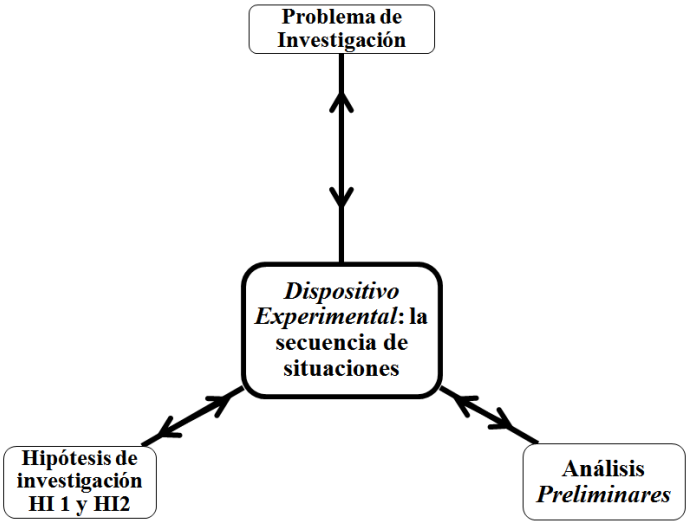


Figura 2. Factores que incidieron en el dispositivo experimental.

Resultados

A continuación se presentarán una serie de consideraciones que emergieron como resultado de los análisis preliminares. Estos elementos sirvieron de fundamento al proceso del diseño del dispositivo experimental.

Desde lo histórico – epistemológico

Puede señalarse que la tensión histórica que se manifiesta en la dialéctica puntual – global permitió que a nivel del diseño de las situaciones se reconociera la importancia de plantear problemas geométricos que requirieran transitar por ambos enfoques, a partir de situaciones

problemas relativas a la construcción de las cónicas. Por esta razón, en el dispositivo experimental se alternó entre situaciones que empezaban por lo puntual y terminaban en lo global al ser representadas algebraicamente y otras situaciones en las que empezaban por lo global pero debían considerar el carácter puntual de algunas de sus propiedades intrínsecas, tal y como lo efectuó Apolonio.

Por otra parte, los problemas abiertos propuestos en estas situaciones diseñadas, cumplieron la función de ser detonadores de acciones y estrategias matemáticas para encontrar soluciones. Esta es la entrada a lo sintético para llegar a lo analítico, de tal forma que se pueda llegar a concebir las cónicas como Descartes lo hizo, como un conjunto de puntos. Con esto se busca diferentes formas de construir un punto móvil de tal forma que "el movimiento regular" de dicho punto permitiera contener a la nube de puntos (es decir, una construcción global), y que luego deban encontrar la expresión algebraica. Con esto se intentó plasmar la naturaleza compleja de las cónicas, al hacer pasar, la mirada holística, a la mirada puntual, pero substituyéndola luego por parejas ordenadas relacionadas entre sí en una ecuación y que permitiese resolver el problema.

Otra tensión de orden epistemológica fue que se reconoció la necesidad de involucrar en el diseño, un trabajo sistemático de situaciones problema relativo al lugar geométrico de las cónicas. En consonancia con esta revisión teórica, se consideró, en el diseño didáctico, problemas geométricos que permitan hacer el tránsito de la geometría al álgebra tal como lo realizó Descartes. Este criterio se corresponde con la idea de trabajar con la geometría sintética para arribar a la geometría analítica cuando se resuelven problemas de geometría. De esta manera, se puede dar el paso a la representación algebraica. Hay un cambio de lo perceptual en los problemas geométricos a lo abstracto que existe en el trasfondo de los mismos, cuando se va pasando por las diferentes las fases propuestas de las situaciones. Algunos problemas geométricos que se retomaron en la situaciones, son variaciones de problemas clásicos como el de las Tangencias de Apolonio (Rabu-Boyé, 2009).

Desde lo cognitivo

Se partió de considerar global y lo puntual en la representación gráfica del objeto matemático en cuestión y llegó a ser fundamental en el dispositivo experimental.

Dado que la prueba diagnóstica dio a conocer una serie de concepciones que tenían los estudiantes sobre las cónicas, el dispositivo intentó configurar una estrategia didáctica que permitiera superar las ideas erróneas.

Los cambios de representación matemática propuestos fueron necesarios para la transición de lo sintético a lo analítico y de lo puntual a lo global. Por otra parte, la visualización matemática jugó un papel fundamental en la elaboración de conjeturas solicitadas en las segundas fases de cada situación.

En el proceso de construir lugares geométricos, permitió que se abordara una dimensión instrumental para el tratamiento de las curvas algebraicas. En primera instancia, las situaciones podían ser construidas tan solo usando regla y compás; pero se quedarían en la fase de construir la nube de puntos planteada, y lo que se pretendía al usar el AGD era que se pensará en construir la forma y la posición de la curva de tal manera que ésta adquiriera el carácter ejecutable al ser arrastrados puntos de la construcción que la determinarían revelando su propiedades invariantes. Esta posibilidad es reforzada en libros de texto que reconoce la importancia de la utilización de

las calculadoras y el lápiz y papel, en lo concerniente a las técnicas para elaborar gráficas de curvas.

Se tomó en cuenta que al graficar las cónicas y esbozar sus propiedades, basados construcciones geométricas sería una condición necesaria para formar y desarrollar el concepto de lugar geométrico de estas curvas.

En relación con lo anterior es claro que a través de la mediación del AGD se pueden ilustrar la generación punto por punto usando la herramienta "Traza", el cual apoya la interpretación de la definición de la cónica como lugar geométrico. Este tipo de tareas se corresponde con la idea de las variaciones dinámicas de los valores de los parámetros (por ejemplo, para investigar varios casos y para generar familias de curvas). Lo que se requiere es que el usuario, al trabajar en el AGD, sea capaz de generarlas como objetos gráficos referenciables, es decir, la traza surge como producto de una construcción que involucra una definición de lugar geométrico.

Desde lo didáctico y desde AGD Cabri como medio.

Lo didáctico se concentró en la organización de la clase, a partir de las situaciones de acción, que luego se tornaban de formulación, validación y de institucionalización.

En el análisis realizado a los libros de texto, la definición de cónicas muestra que son tratadas como lugar geométrico y algunas otras veces como "secciones de un cono", estas variadas acepciones también juegan un papel central en el diseño de las situaciones dado que es evidente que estas cambian en un AGD, y la manera de producir un lugar geométrico también es diferente.

Las estrategias de usar el método de los lugares geométricos al ser involucrados en la actividad intelectual de los estudiantes pueden llevar a que el saber matemático puesto en juego sea tratado desde la dialéctica herramienta – objeto (Douady, 1993).

Uno de los aspectos centrales de la mediación del AGD, es que permite que los estudiantes puedan explorar los lugares geométricos como medio de transición entre la definición de una figura, en el sentido euclidiano, operando de manera global a una noción de lugar geométrico, que utiliza un conjunto de puntos, es decir, se convierte en una definición puntual. Llegando a considerar que a partir de un solo punto y por medio de una construcción geométrica, se pueda construir un punto que produzca la traza y por ende se pueda arribar a una generalidad en la situación. Con esta estrategia, se podría dar la idea de un lugar geométrico "hecho" de puntos y no como algo compacto o global. De fondo se empieza a considerar el lugar geométrico visto como una función matemática.

En este dispositivo, se contempló la posibilidad de que los estudiantes experimentaran matemáticamente al realizar las construcciones geométricas, usando las herramientas de medida del AGD para que buscaran relaciones cuantitativas entre las distancias entre los puntos dados pero que luego debían de prescindir de lo figural para tratar de caracterizar la curva globalmente desde lo algebraico. En este caso el AGD funcionaria como puente entre el nivel espacio – gráfico y el nivel teórico cuando se estudian los lugares geométricos.

Además se tuvo en cuenta la importancia de presentar a las cónicas para estudiar el comportamiento de fenómenos de cambio continuo. En tal sentido se propusieron situaciones en el AGD relativas a lugares geométricos de las cónicas que exploraban la traza de un punto sujeto a algunas restricciones y en particular que remitían a la función de esos puntos y de manera más

específica a modelos computacionales de las funciones. Igualmente algunas de las situaciones propuestas se refieren a curvas algebraicas que al ser exploradas en un AGD pueden contribuir a cerrar la brecha entre la geometría sintética y la algebraica. El sentido de estas situaciones se apoya en la idea de que en los AGD, ofrecen una variedad de problemas, de estrategias de solución y de relaciones de interés matemático que apoyan las actividades de modelación matemática.

La transición entre los diferentes tipos de tareas geométricas del AGD, permitió el uso de diferentes representaciones matemáticas ejecutables y dinámicas propias del ambiente.

En este orden de ideas, el diseño de las situaciones contempla la obtención de ecuaciones algebraicas a partir de la construcción sintética de una curva y de esta manera se promueve la el aprendizaje matemático y la argumentación para las ecuaciones algebraicas producidas por el AGD. Las situaciones dieron la posibilidad de usar la herramienta "Coordenadas o ecuación" del ambiente informático al finalizar la actividad de construcción, permitiendo extender las acciones de los estudiantes de una forma explicativa, interpretativa y verificadora de los fenómenos visuales producidos en la pantalla.

Discusión de resultados.

En esta ponencia, se expondrán los análisis *a priori* y *a posteriori* del diseño y gestión de la puesta en acto de las situaciones a-didácticas que se preparó para esta investigación. Uno de los resultados es el diseño de ocho situaciones desde la caracterización puntual – global integrando Cabri en relación a la TSD y la tipología de tareas en AGD (Laborde, 2001 y 2006). Así mismo, se presentarán las ideas erróneas que tuvieron los estudiantes acerca de las cónicas como lugar geométrico así como las concepciones previas sobre qué significa para ellos un lugar geométrico. En particular, uno de los grandes resultados es que el tratamiento de los lugares geométricos en la Geometría en general, es que la comprensión global del lugar geométrico impera en los estudiantes, al ver la figura (cónica) completa en contraste a la comprensión local o puntual que no es muy bien recibida (Jahn, 2002), en la que se estudian las propiedades intrínsecas de puntos individuales del lugar geométrico.

Conclusiones

En la ponencia se presentarán algunas de las siguientes conclusiones de esta investigación, tales como:

El análisis la información recolectada evidenció que las situaciones didácticas planteadas desde las construcciones geométricas puntuales permitió emerger construcciones geométricas globales en el AGD, a la vez que en este ambiente se dieron retroalimentaciones que posibilitaron caracterizar algunas de las propiedades geométricas de las cónicas, pero a partir de construcciones globales los estudiantes no tuvieron en cuenta la naturaleza geométrica de las curvas como lugares geométricos: lo puntual de ellas.

Lo puntual en este trabajo remitió a lo local, en considerar puntos de la gráfica que tenían las propiedades de ser una cónica, lo que conllevó a que permanecieran en un nivel perceptual, en tanto que lo global de la gráfica les permitió aproximarse al mundo teórico, aunque lo global no fue aprovechado al máximo pues las estrategias efectuadas por los estudiantes persistieron en lo figural. Así mismo, con este diseño, se pudo descubrir que de lo global, existe la posibilidad que surja la consideración de lo puntual cuando los estudiantes han pasado por una primera caracterización.

Además, el diseño de las situaciones, produjo un ambiente educativo, a manera de puente, para pasar de lo puntual a lo global. La vuelta, de ir de lo global a lo puntual, es algo que el profesor debe procurar cuando se busca encontrar invariantes o propiedades geométricas aludiendo a puntos de la curva que son claves para determinar la naturaleza de la curva tales como el vértice o el foco.

Para comprender el significado de las cónicas por medio de la articulación entre las representaciones estáticas, las dinámicas y ejecutables y las algebraicas, la noción de lugar geométrico jugó un papel importante para el estudio de estas curvas, en un AGD como el Cabri. Sin embargo, en los estudiantes hizo falta que esta noción alcanzará el estatus de noción paramatemática, en el sentido de Chevallard (1997), puesto que se observó que el lugar geométrico fue reconocido como herramienta útil para resolver los problemas, pero no fue tratado como objeto de estudio, a pesar de que el profesor orientó aspectos como centrales de esta noción al principio del curso de geometría analítica al abordar los dos problemas fundamentales, sin embargo el estatus logrado por parte de los estudiantes fue el de noción protomatemática, dado que la movilización de esa noción en las situaciones fue de manera implícita cuando ellos la generaron usando las herramientas del AGD.

Desde la organización curricular no se siguió con un programa de geometría analítica al estilo tradicional, pues se le dio un giro a éste con una mirada renovada a las cónicas desde lo sintético, y que si bien los contenidos permanecieron no se dio el tratamiento convencional de las cónicas, basado en representaciones algebraicas que desligan lo geométrico. Lo que se rescató fue el dinamismo que se le imprimió a los problemas de cónicas como lugares geométricos al usar el Cabri, resaltando las definiciones dinámicas, apropiadas, que aluden al movimiento, cristalizándose en la pantalla del AGD, así como los fenómenos de visualización que aportan para el surgimiento de estrategias de solución.

Con esta conjugación del ambiente informático a través de construcciones geométricas, así como la complementariedad de lo sintético y lo analítico, se pudo ampliar el horizonte de intervención didáctica en el curso universitario de geometría analítica, en la medida que permitió la integración tanto de nuevas temáticas como de estrategias metodológicas, y tuvo en cuenta la complejidad conceptual que encierran las cónicas así como su naturaleza geométrica. Sin embargo, se notó que los estudiantes no estuvieron acostumbrados hacer conversiones entre representaciones. A lo sumo, conocen los procedimientos de pasar de las representaciones simbólicas a las gráficas, pero no están familiarizados con procedimientos en la vía contraría.

Existe un problema representacional en los libros de texto universitarios de geometría analítica. Es la manera en que aluden a los dibujos de las cónicas, sin tener en cuenta la diferencia conceptual con lo de figura. Una manera de concientizar a los estudiantes de este problema es que el dibujo es una representación visual, frente al objeto matemático que es no es simplemente lo representado.

El tratamiento en la caracterización puntual y global enmarcado en una construcción geométrica fue pieza clave para que los estudiantes despertaran sus ideas, percepciones, imágenes mentales, y fortalecieran el proceso de visualizar matemáticamente al tratar de resolver el problema; pero al mismo tiempo se les ayudó a involucrarse en un proceso de actividad matemática gracias a las acciones y retroacciones que el medio ejecutable les proporcionó y así pudiesen tener presente la riqueza de ideas geométricas interconectadas.

El AGD Cabri jugó el papel de instrumento mediador en todo el proceso: cuando los estudiantes trataron de encontrar un punto móvil que fuese recorriendo un camino (un conjunto de puntos estáticos y colocados de manera discreta) en el plano sin ejes de coordenadas, por medio de una construcción geométrica, que les permitió un acercamiento visual mostrándoles la dinámica que subyace a las situaciones, y gracias a este instrumento se gestaron estrategias para encontrar una construcción geométrica dinámica.

Desde la perspectiva didáctica de la dialéctica herramienta – objeto de Douady (1993), el uso de la noción de lugar geométrico en el estudio de las cónicas es un ejemplo de este punto de vista, debido a que la secuencia estuvo organizada alrededor de problemas geométricos cargados de una intencionalidad didáctica que les permitió a los estudiantes darle un sentido y significado a las cónicas implicadas. Desde esta dialéctica, se pudo observar que el lugar geométrico jugo el papel de herramienta. Sin embargo, el paso a estudiar las cónicas en tanto objeto matemático fue sutil que el profesor en la fase de institucionalización lo presentó de manera ostensible.

En efecto, en el análisis de la secuencia, se observó que el profesor permitió a los estudiantes apropiarse del conocimiento matemático en cuestión, gracias a que se pudo usar el método de los lugares geométricos –estrategia ganadora–, y cuando se efectuó la devolución del problema, ellos entraron en interacción directa con cada uno de los problemas de la secuencia. No obstante, se pudo apreciar que algunos estudiantes aprendieron la estrategia ganadora, al utilizar el lugar geométrico en el estatus de herramienta y así encontrar el foco de la parábola (el punto clave, según Fernández, 2011) para resolver el problema.

Desde este punto de vista dialéctico, se pudo conjugar con la caracterización puntual y global en la secuencia diseñada. Y en consecuencia el encuadre didáctico fue funcional pero al mismo tiempo llegó a convertirse en un fenómeno didáctico denominado uso abusivo de la analogía (Brousseau, 2007), al mostrar el profesor de manera ostensiva dicho método.

Por lo tanto, el método de los lugares geométricos se reveló como una estrategia ganadora y se vio ampliada al usar el AGD Cabri, el cual pudo haberse integrado a las técnicas habituales de los estudiantes si se hubiese dado una complementariedad entre ambientes como el del lápiz y el papel. No obstante, según Schumann y Green (1997), la selección del ambiente para generar lugares geométricos depende de los objetivos didácticos que persiga el profesor. El problema fue que se diseñó para que surgiera una estrategia ganadora (cualquier solución que empleará la noción de lugar geométrico) que solucionara el problema usando conocimientos geométricos (es decir, con una construcción geométrica robusta) y que fuesen la más eficiente entre las estrategias perceptivas y empíricas (una construcción blanda que se aproximaba). Como algunos estudiantes encontraron la estrategia, entonces se manifestó como una herramienta para resolverlo y no como una forma de cumplir con las expectativas del profesor de que lo entendieran como objeto y no sólo como herramienta.

Referencias y bibliografía

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno & P. Gómez (Eds.). *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (pp. 33-59). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamericana.

Bartolini Bussi, M. G. (2005). The meaning of conics: historical and didactical dimensions. En C. Hoyles, J. Kilpatrick & O. Skovsmose (Eds.), *The meaning of Mathematics Education* (Vol. 37, pp. 39 – 60). Nueva York, EE.UU.: Springer Verlag.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la Teoría de las Situaciones Didácticas* (1era Ed.). (D. Fregona, Trad.) Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Chevallard, Y. (1997). La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado. Buenos Aires: Aique.

Douady, R. (1993). Juego de Marcos y la Dialéctica Herramienta-Objeto. En A. Ernesto Sánchez S. & Gonzalo Zubieta B (Eds.). *Lecturas en Didáctica de las Matemáticas* (pp. 68-87). México: CINVESTAV.

Fernández, E. y Mejía, M. F. (2010). Análisis de textos escolares para el diseño de situaciones de enseñanza. En: Memorias del 11mo. *Encuentro Colombiano Matemática Educativa* (7 al 9 de Octubre de 2010). (pp. 61-68). Bogotá, Colombia. Consultado el 1 enero de 2011. Disponible en: http://funes.uniandes.edu.co/1162/1/61_Anlisis_de_textos_escolares_para_el_diseo_de_situaciones_de_Asocolme2010.pdf

Fernández, E. (2011). Situaciones para la enseñanza de las cónicas como lugar geométrico desde lo puntual y lo global integrando Cabri Géomètre II plus. (Tesis de Maestría no publicada). Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Jahn, A. P. (2002): "Locus" and "Trace" in Cabri-Géomètre: relationships between geometric and functional aspects in a study of transformations. *The International Journal on Mathematical Education, ZDM Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34 (3), 78 – 84.

Laborde, C. (2001). Dynamic geometry environments as a source of rich learning contexts for the complex activity of proving. *Educational Studies in Mathematics*. 44, 151 – 161.

Laborde, C. (2006). La dialéctica entre cambio e invarianza en la enseñanza y el aprendizaje con Cabri. Ejemplos en geometría 2D y 3D. En *Memorias del III Congreso Iberoamericano de Cabri IberoCabri 2006.* Bogotá: Universidad de la Sabana. Recuperado de: http://www.iberocabri.org/iberocabri2008/MEMORIAS_2006/memorias.htm

Laborde, C. (2008). Multiple dimensions involved in the design of tasks taking full advantage of dynamic interactive geometry. En *Memorias XVII Encontro de Investigação em Educação Matemática*. Vieria de Leiria, Portugal.

Moreno, L. y Hegedus, S. (2009). Co-action with digital technologies. The International Journal on Mathematical Education, ZDM, Zentralblatt für Didaktik der Mathematik: Transforming Mathematics Education through the Use of Dynamic Mathematics Technologies, 41 (4), 505-519.

Rabu-Boyé, A. (2009). *El Apollonius Gallus y el problema de los tres círculos como defensa e ilustración de la geometría sintética.* (M. Acosta Trad.). Bucaramanga: Ediciones Universidad Industrial de Santander. (Trabajo original publicado en 1998).

Río-Sánchez, J. del. (1996). *Lugares geométricos. Cónicas*. Madrid: Síntesis.

Schumann, H. & Green, D. (1997). Producing and using Loci with Dynamic Geometry Software. En J. King & D. Schattschneider. (Eds.). G*eometry Turned On! Dynamic Software in Learning, Teaching, and Research* (pp. 79-87). Washington D.C., E.U.: Mathematical Association of America Service Center.

Apéndice A
Situación Didáctica No. 1

Cónicas desde una construcción Punto por Punto
Lugares Geométricos en un AGD

Título desde el enfoque

Fase 1 de la Situación Problema No. 1a: *Construya Geométricamente*.

Abra tanto el archivo ***rectangulo.fig*** como el conjunto de herramientas denominado ***Herramientas para esta Situación Problema1a.men*** en el programa Cabri Géomètre. Observe que dos de los lados están divididos en 10 partes, cada uno de los puntos ha sido nombrado con un número. Desde el punto C se han trazado segmentos hasta cada uno de los puntos divisorios de la altura del rectángulo. Ver Figura 1.[1]

Ahora, por cada uno de los puntos de la base superior, nombrados de izquierda a derecha en orden numérico, trace rectas perpendiculares a dicha base. Ver Figura 2.

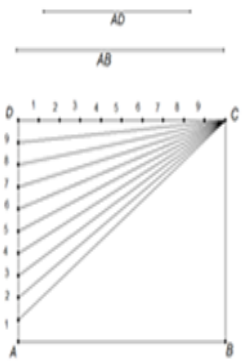


Figura 1

Un tipo de tarea en AGD, construya una cónica pero usando ciertas herramientas del Cabri.

Aquí construye la nube de puntos.

Fase de acción.

Aquí debe dar una conjetura
Fase de Formulación.

Fase 2 de la Situación Problema No. 1a: *Reflexione, Escriba y Valide en el AGD*.

a) ***Escriba*** a mano, en las hojas de papel, una conjetura acerca de cuál cree Ud. qué es el *Lugar Geométrico* que se forma cuando se unen esos puntos de intersección de las rectas correspondientes a los puntos igualmente numerados. Es decir, la intersección del segmento que pasa por 1 con la recta que pasa por 1, la intersección del segmento que pasa por 2 con la recta que pasa por 2, y así sucesivamente.

b) Luego ***valide*** su conjetura usando el AGD con alguna construcción geométrica dinámica de tal manera que al arrastrar un punto de su construcción, vaya recorriendo dichos puntos de intersección.

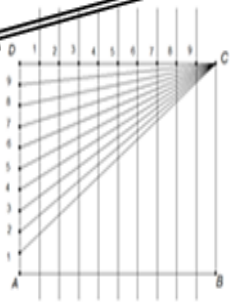


Figura 2

Aquí se le pide una Construcción Robusta
Fase de Validación.

Fase 3 de la Situación Problema No. 1a: *Represente Algebraicamente*.

Encuentre una demostración para este problema usando el plano cartesiano y los elementos algebraicos disponibles de la Geometría Analítica. Preséntela por escrito en formato Word con su respectivo archivo de Cabri. Cuando realice la construcción geométrica dinámica en el AGD, muestre el plano cartesiano y las ecuaciones que arroja el AGD.

Preparado por: Edinson Fernández M.[2]
Prof. Área Educación Matemática
Dpto. de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño

Esta SP ataca el Segundo Problema Fund. de la Geométrica Analítica: Dada una fig., o la condic. que debe cumplir los puntos de la misma, determine su ecuación

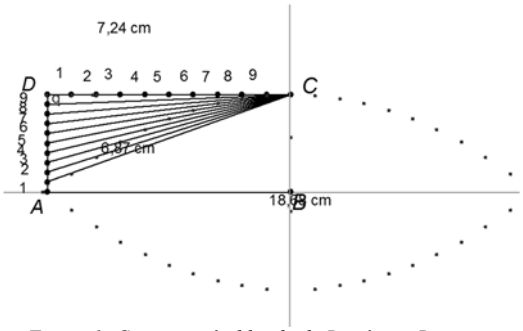
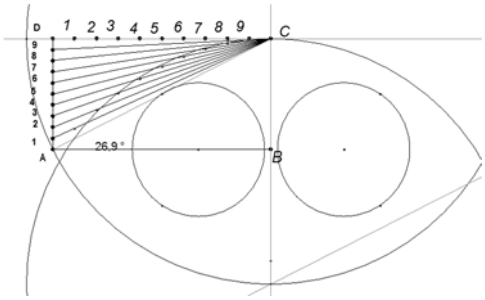
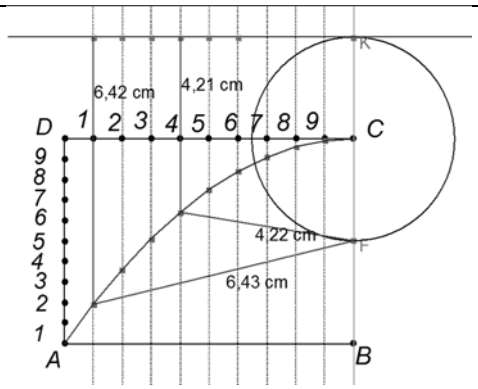
Fase de validación

31

Situación problema No. 1a

Nomenclatura para el investigador.

Apéndice B
Análisis de las respuestas a la Situación Didáctica No. 1.

Apellidos de los Estudiantes	DESCRIPCIÓN DE LAS CONSTRUCCIONES	FIGURA
CONSTRUCCIONES CUYA CONJETURA DIJERON QUE UNA ELIPSE		
Ramírez y Restrepo	Hallan los puntos de la nube de puntos solicitadas y luego trazan circunferencias concéntricas al punto $\boldsymbol{A}$ cuyo radio va hasta cada uno de los puntos de la nube. Luego hallan otros puntos a partir de la intersección de estas circunferencias y rectas perpendiculares al lado $\boldsymbol{AB}$. Con simetría axial encuentran los puntos del lado derecho de la supuesta elipse. En la construcción se observan algunas distancias. En sus intentos por mostrar que es una elipse realizan la construcción, tratando de ubicar los puntos de la nube de puntos sobre el lugar geométrico.	 *Figura 1: Construcción blanda de Ramírez y Restrepo.*
Saavedra y Machado	Luego de hallar la nube de puntos, efectúan diferentes construcciones como rectas y circunferencias. La intencionalidad de las primeras construcciones no es definible, al parecer intentan mostrar que los puntos pertenecen a un arco de circunferencia. Posteriormente, determinan como foco de una parábola el punto $\boldsymbol{B}$ y junto con la directriz, la construyen. Sin embargo, con el arrastre descubren que los puntos no pasan por la parábola. Borran la construcción y realizan la construcción de una parábola, por fuera de estos puntos para recordar el procedimiento y aplicarlo.	 *Figura 2: Construcción blanda de Saavedra y Machado.*
Fajardo	Halla la nube de puntos y los une con segmentos. Luego supone que $\boldsymbol{B}$ es el foco de una parábola, traza dos segmentos uno perpendicular a la directriz desde el punto de la nube y otro desde ese punto al foco, pero los resultados no son equidistantes. Ahora toma como foco, un punto sobre segmento $\boldsymbol{BC}$ y toma nuevamente la distancia de un punto de la nube a la directriz y al foco, en este caso los resultados se aproximan. Mueve el foco, fijándose que las dos distancias sean iguales. Como los resultados no concuerdan, le agrega más cifras decimales a las distancias.	 *Figura 3: Construcción blanda de Fajardo.*

El aula virtual como organizador del currículo: caso Fundamentos de Matemáticas para los programas de Ingeniería y Matemáticas

Francisco Alejandro **Sánchez** Acero
Fundación Universitaria Konrad Lorenz
Colombia
alejandroupn@gmail.com
Oscar Leonardo **Pantano** Mogollón
Fundación Universitaria Konrad Lorenz
Colombia
oscarl.pantanom@konradlorenz.edu.co

Resumen

En este trabajo se presenta una experiencia relacionada con la modificación curricular de la asignatura *Fundamentos de Matemáticas* enmarcada en los programas de Ingenierías y Matemáticas de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz mediante el uso de Moodle como un sistema de gestión de la información, el cual permite organizar curricularmente los procesos de aprendizaje en la asignatura. Dentro de la experiencia se observa el uso de Moodle como un medio que permite organizar las fases de enseñanza-aprendizaje generadas al interior del plan analítico propuesto para la asignatura. Además, se presentan algunos ejemplos de objetos virtuales de aprendizaje (OVA) que intervienen como elementos facilitadores del aprendizaje. Se destaca el uso de la plataforma como un mediador que posibilita una gestión sistemática y controlada del conocimiento. Esta experiencia está enmarcada dentro de la propuesta de generación del modelo pedagógico del programa de matemáticas.

Palabras clave: sistema de gestión de aprendizaje, Moodle, currículo, OVA.

Descripción

Dentro de los procesos de acreditación de alta calidad del programa de matemáticas de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz (Bogotá, Colombia), se han diseñado diversas estrategias que permiten organizar, verificar y validar los planes analíticos de cada una de sus asignaturas. Una de estas estrategias que se ha propuesto es la de utilizar el aula virtual como elemento organizador del currículo. Ya que, es el aula virtual según Polanco (2002, p.56) "… un espacio de comunicación que permite el intercambio de información y que haría posible, según su utilización, la creación de un contexto de enseñanza y aprendizaje en el que se facilitará la cooperación de profesor y estudiantes, en un marco de interacción dinámica, a través de unos contenidos culturalmente seleccionados…".

Además, Duarte (2003) señala el currículo como un elemento esencial en un ambiente de aprendizaje acompañado tanto por del sistema de gestión de aprendizaje y por los individuos que lo componen tales como los profesores y los estudiantes. Dentro de este sistema de gestión de aprendizaje se puede determinar las formas como se presentan los contenidos y las diversas

actividades que se proponen para desarrollar un currículo determinado. Para ello la Fundación Universitaria Konrad Lorenz desde el departamento de educación virtual generó unos lineamientos que permiten al docente guiarse en la utilización y creación de un aula virtual. Entendiendo el aula virtual como "Un entorno de aprendizaje personalizado que está estructurado pensando inicialmente en la falta de contacto cara a cara con el docente; lo cual debe ser sustituido por una presentación concisa de los recursos y actividades a desarrollar". Fundación Universitaria Konrad Lorenz (2010).

Frente a este tipo de retos el aula virtual de cada una de las asignaturas debe contar con recursos y actividades quedeben estar en correspondenciacon los contenidos planteados en el currículo, más precisamente en los planes analíticos. Por ello en esta experiencia se proponeestructurar el aula virtual de una asignatura para que sea ésta una herramienta donde el docente organice y propongatodos los elementos necesarios para el aprendizaje de sus estudiantes. De este modose rediseñó un aula virtual, en la cual se presenta y organiza los elementos expuestos en el plan analítico de la asignatura, esto con el fin de realizar un adecuado sistema de gestión del aprendizaje. Tomando como referencia los planteamientos expuestos por Rayón, Ledesma & Escalera (2002) los cuales enuncianla presencia de 5 entornosque debe tener un ambiente virtual, a saber:entorno de conocimiento, colaboración, asesoría, gestión y experimentación.

Inicialmente las aulas virtuales están puestas a disposición de los docentes, ellos mediante su experiencia seleccionan los recursos y las actividades pertinentes para un buen desarrollo de la clase presencial, el objeto de esta propuesta es estructurar estos recursos y actividades para que estén correlacionadas con una estructura curricular propuesta por la dirección del programa. Esto indica entonces, que anterior a esta experiencia no existían dentro del programa de Matemáticaslineamientos específicos de organización de los contenidos y actividades en el aula virtual.Para ello se dispuso, con ayuda del modelo pedagógico del programa una estructura la cualformula las formas de presentación de cada una de las asignaturas en este ambiente virtual de aprendizaje.

En esta experiencia, se dispuso la implementación de asignaturas piloto para la formación de esta estructura, dentro de ellas se encuentra la asignatura Fundamentos de Matemáticas, ofrecida para los estudiantes de primer semestre de los programas de Ingeniería Industrial, Ingeniería de Sistemas y Matemáticas.

A continuación se presenta una descripción más detallada del proceso desarrollado en esta experiencia.

La experiencia se desarrolló en 3 fases:

1 Fase: Desarrollo de la estructura de las materias del programa de Matemáticas.
2 Fase: Identificación de la materia a diseñar.
3 Fase: Diseño de la estructura de la materia Fundamentos de Matemáticas en el aula virtual.

Fase 1: Desarrollo de la estructura de las materias del programa de Matemáticas

Dentro del programa de acreditación de alta calidad, la dirección del programa de Matemáticas ha decidido identificar y determinar los posibles lineamientos didácticos que permitan una estructura unificada de los aprendizajes,dentro de esta labor se encuentra la declaración de los lineamientos para el aprendizaje de los estudiantes del programa de

Matemáticas. Siendo éste el fin se propone una estructura o prototipo mediante el cual los docentes puedan orientar la planeación, elaboración y evaluación de sus asignaturas.

En el currículo del programa de Matemáticas se pueden identificar 6 tipos de asignaturas las cuales hacen al egresado un profesional competente en cada una de las áreas posiblesen las que se pueda desempeñar. Esta clasificación se realiza en el marco del modelo pedagógico del programa de Matemáticas, y está avalada por el comité de currículo de la facultad de Matemáticas e Ingenierías de la Fundación Universitaria Konrad Lorenz en el documento Modelo Pedagógico del Programa de Matemáticas (Díez & Sánchez, 2013).

Clasificación de asignaturas según el tipo de enseñanzas: Asignaturas de formación básica, Asignaturas profesionales demostrativas, Asignaturas profesionales aplicativas, Asignaturas profesionales teóricas, Asignaturas para laInvestigación y Asignaturas del eje de Humanidades.

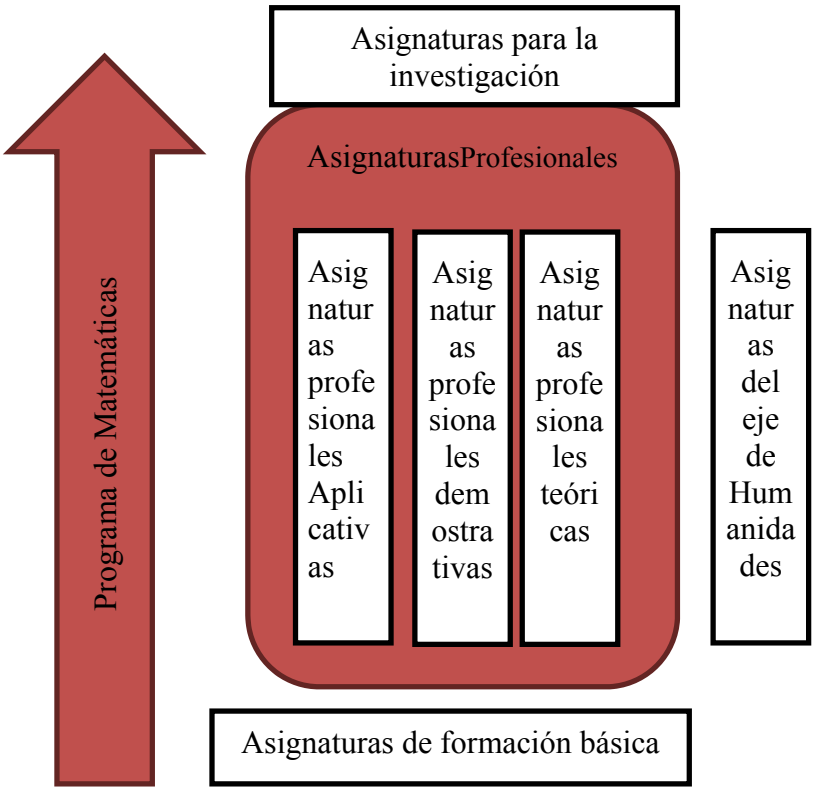


Figura 1. Estructura del programa de Matemáticas.

2 Fase: Identificación de la materia a diseñar.

Para la socialización de esta experiencia se ha tomado como referencia la asignatura Fundamentos de Matemáticas, curricularmente está ubicada en el primer semestre y cuyo objetivo general consiste en dotar a los estudiantes de conocimientos sustentados en diversos grados de justificación que van de acuerdo al tema específico considerando desde argumentos intuitivos hasta demostraciones rigurosas en las áreas de aritmética, álgebra, trigonometría y geometría.

Esta asignatura fue seleccionada, puesto que se pretende subsanar la carencia de conceptualización y rigor matemático con la que vienen los estudiantes luego de su formación

matemática en el colegio. En este sentido, se pretende construir las bases conceptuales y procedimentales necesarias para que puedan afrontar sin mayor inconveniente asignaturas como cálculo diferencial, geometría analítica,álgebra lineal, cálculo integral, entre otras.

Por otro lado, Fundamentos de Matemáticas se encuentra organizada en tres módulos asociados a aritmética, álgebra y trigonometría. Para el caso del módulo de aritmética se pretende que los estudiantes adquieran las habilidades procedimentales y conceptuales necesarias para realizar operaciones básicas entre elementos de los diferentes conjuntos numéricos, reconociendo así propiedades fundamentales de las operaciones y características notables y particulares de los conjuntos. A través delas enseñanzas del módulo de álgebra se busca que los estudiantes adquieran destreza simplificando expresiones algebraicas y resolviendo proposiciones algebraicas (ecuaciones, sistemas de ecuaciones y desigualdades),ysu relación con la geometría, estableciendo así un referente geométrico a lo realizado en el contexto de lo algebraico.El propósito del tercer módulo concerniente a trigonometría pretende que los estudiantes resuelvan triángulos, reconozcan algunas aplicaciones de la trigonometría y resuelvan situaciones problemas que implican el uso de la geometría y la trigonometría. Además, se busca que adquieran destreza y comprensión en la resolución de ecuaciones trigonométricas y la verificación de identidades trigonométricas.

Tomando como referencia los tres módulos y sus respectivos propósitos, se han establecido para la asignatura de Fundamentos de Matemáticas tres tipos de competencias, a saber: las específicas de la asignatura, las institucionales y las genéricas. En relación con las competencias específicas, se han definido particularmente tres asociadas a la modelación de problemas, a la construcción de entes matemáticos y la pericia argumentativa.Para la primera competencia específica de la asignatura, se espera que los estudiantes adquieran la capacidad para extraer lo relevante de un problema y expresarlo en lenguaje matemático. Por otra parte para la construcción de entes, los estudiantes deben tener la capacidad para caracterizar los entes matemáticos según su constitución y operatividad. Finalmente, para la última competencia, se espera que estén en la capacidad de argumentar los procedimientos realizados y las herramientas empleadas. Este tipo de competencias se desarrollan en el transcurso de todo el semestre y se espera que los estudiantes adquieran estas destrezas mediante la resolución de ejercicios y actividades propuestas.

Con el propósito de organizar curricularmente la asignatura y desarrollar las competencias de ésta, se ha diseñado un plan analítico *(figura 3)*, en el cual se presentan aspectos generales como: clasificación de la asignaturas según el tipo de enseñanzas, la cantidad de créditos, horas presenciales e independientes asignadas para ésta. Además, se describe con más detalle la distribución del contenido temático, en el cual se establece una relación entre cada módulo, el número de semanas destinado para cada uno de éstos, el contenido matemático a trabajar, la metodología de enseñanza-aprendizaje y, finalmente, los criterios establecidos para la evaluación. En cuanto a la evaluación de la asignatura, y en general de todas las asignaturas de cada una de las carreras que oferta la Fundación Universitaria Konrad Lorenz, se divide en dos cortes. El primero de ellos corresponde al 40% y el segundo al 60%. En el caso de Fundamentos de Matemáticas, la distribución de las notas en cada uno de los cortes se realiza como se muestra en la siguiente imagen.

DISTRIBUCIÓN PORCENTUAL DE LA EVALUACIÓN	
CORTE DEL 40%	CORTE DEL 60%
Quices (15%)	Quices (15%)
Trabajo en equipos (10%)	Parcial 2 (10%)
Parcial 1 (15%)	Trabajo en equipos (10%)
	Parcial 3 (10%)
	Final (15%)

Figura 2. Distribución de porcentajes de la evaluación.

KONRAD LORENZ FUNDACIÓN UNIVERSITARIA	FORMATO PLAN ANALÍTICO DE LAS ASIGNATURAS	FR-AI-A-005 VERSION 1

ASIGNATURA	CÓDIGO ASIGNATURA	CRÉDITOS	SEMESTRE
Fundamentos de matemáticas	11010	4	1

PRE-REQUISITO	AREA/ CAMPO EN QUE ESTÁ UBICADA LA ASIGNATURA
No tiene	Formación básica

FECHA DE DISEÑO DEL PROGRAMA	FECHA ACTUALIZACIÓN	RESPONSABLE
Junio de 2013	jul-14	Carlos Alberto Díez - Óscar Leonardo Pantano

HORAS PRESENCIALES:	64	HORAS INDEPENDIENTES:	128	TOTAL HORAS:	192

JUSTIFICACIÓN:	Con independencia del nivel de calidad con que se imparta, el contenido matemático de la primaria y el bachillerato es de propósito general, siendo esencialmente algorítmico y no conceptual y, por tanto, no es del todo adecuado como base para la formación matemática de ingenieros y matemáticos. El curso de Fundamentos de matemáticas subsanará esta carencia de conceptualización y rigor matemático. También aportará herramientas que faciliten el ejercicio de la intuición y la creatividad.

PARCELADO DEL CONTENIDO TEMÁTICO DE LA ASIGNATURA

MODULO (Nombre)	SEMANA	CONTENIDO	METODOLOGIA DE ENSEÑANZA / APRENDIZAJE	BIBLIOGRAFIA BÁSICA Y COMPLEMENTARIA
1. Aritmética	1	Conjuntos numéricos: Necesidad de creación Los números naturales: -Propiedades usuales -Prioridad en operaciones, signos de agrupación -División por cero -Teorema fundamental de la aritmética -Propiedades de potencias -Obtención de raíces	Clase magistral. Taller en clase. Taller extra-clase. Quiz	Allendoerfer, C. y Oakley, C. Fundamentos de matemáticas universitarias. McGraw-Hill. Tercera edición. Fleming, W. Varberg, D. Álgebra y trigonometría con geometría analítica. Prentice hall. Tercera
	2	Los números enteros: -Orden -Operaciones -Justificación de las reglas de signos Los números racionales -Orden y densidad -Operaciones	Clase magistral. Taller en clase. Taller extra-clase. Quiz	

Página 1

Figura 3. Plan analítico de la asignatura de Fundamentos de Matemáticas.

3 Fase: Diseño de la estructura de la materia Fundamentos de Matemáticas en el aula virtual.

El diseño de una estructura curricular presupone tener claro cuáles son los organizadores curriculares a tener en cuenta para la formulación de la propuesta o plan analítico de cada asignatura. Rico (1997) realiza una propuesta sobre cuáles son los componentes convencionales del currículo y enuncia cuatro de ellos: objetivos, la metodología, contenidos y evaluación. Además, hace mención acerca de que los docentes generalmente sólo toman en cuenta el componente que aborda el contenido. Es decir, se encargan de comprender el objeto matemático a abordar pero dejan de lado los demás componentes.

> el análisis de las cuatro componentes se reduce al análisis de los contenidos y a consideraciones genéricas sobre las otras tres componentes. El grado de generalidad con la que aparecen tres de las componentes: objetivos, metodología y evaluación, resulta dispar con la mayor precisión con la que aparecen detallados los contenidos (Rico, 1997, p. 40).

Teniendo en cuenta este tipo de reflexión se ha pensado diseñar un currículo basándonos no sólo en los contenidos programáticos a desarrollar, sino en elementos tales como: la metodología, la evaluación y los objetivos. Es aquí donde el aula virtual actúa como un recurso que permite vincular cada uno de los componentes y ponerlos a disposición tanto del docente como del estudiante.

> Los recursos proporcionan situaciones, o ayudas para trabajar en una situación, en la que el concepto estudiado se emplea significativamente y permite desarrollar algunos procedimientos. La noción de recurso es más amplia e imprecisa, ayuda a evocar el concepto y a trabajar sobre él empleándolo en situaciones prácticas. Dentro de los recursos actuales encontramos los materiales derivados de las nuevas tecnologías de los que conviene hacer mención explícita cada vez que resulte adecuada (Rico, 1997, p. 47).

El aula virtual entra a jugar un papel muy importante como un sistema de gestión del aprendizaje para el desarrollo óptimo de la asignatura, donde mediante los diversos recursos y actividades se hace la organización curricular de cada una de las asignaturas y, en este caso específico, de Fundamentos de Matemáticas nos centramos en el aula virtual como una herramienta que le permite al docente organizar y mediar los procesos de aprendizaje dados en el aula física. Cabe aclarar que en la Fundación Universitaria Konrad Lorenz existe la política de uso del aula virtual donde se enuncia que: *el aula virtual es una herramienta de apoyo a los estudiantes para la clase presencial*. Esto indica que no se tiene el aula virtual como el único medio de aprendizaje, sino como un complemento a las acciones que realiza el docente frente a frente con sus estudiantes en el espacio físico asignado (Fundación Universitaria Konrad Lorenz, 2010).

Vale la pena resaltar que a pesar de que la universidad ofrece un diplomado en educación virtual para todos los docentes, este diplomado se encarga del aprendizaje del manejo del sistema Moodle, teniendo como base el diseño de los diferentes elementos como OVAs, foros, tareas, wikis, entre otros. Sin embargo, los lineamientos de tipo didáctico son funciones directas de cada una de las facultades, por ello en la realización del marco del modelo pedagógico del programa se quiso vincular el aula virtual como una herramienta organizadora del currículo. Cabe mencionar que antes no se contaba con una organización estructural del aula virtual, sólo existían elementos como recursos y actividades aleatorias dentro del aula, las cuales no permiten establecer una ruta de aprendizaje ni por parte del docente, ni del estudiante. Mediante este ejercicio se quiso fundamentar una estructura completa que permita una secuencia organizada y estructurada de las formas de aprendizaje y enseñanza para el desarrollo de la asignatura.

Estructura en el aula virtual de la asignatura del área básica

La asignatura Fundamentos de Matemáticas se encuentra ubicada, como se mencionó anteriormente, en las asignaturas del área básica, que tienen la siguiente estructura didáctica.

- Formulación de una necesidad de contextualización; es un ejercicio que se pueda resolver con las enseñanzas del módulo: se debe proponer en el aula virtual como un recurso.
- Explicación de las enseñanzas: son de dos tipos: conceptuales y algorítmicas; ambas deben estar en el aula virtual como recursos, en diagramas explicados, propios de cada tipo de enseñanza.
- Ejercitación de las enseñanzas: se debe proponer un taller para clase (secuenciado por nivel de complejidad) y uno o varios talleres extra-clase (secuenciados por nivel de dificultad y con ejercitación abundante); pueden ser calificados o no.

- Verificación de los aprendizajes: se puede hacer mediante quizes en aula virtual o en clase; pueden ser calificados o no.
- Evaluación de los aprendizajes por módulo: se debe hacer mediante un parcial, en el que los estudiantes no deben usar recursos bibliográficos.
- Evaluación acumulativa de los aprendizajes: se debe hacer un examen final al culminar la asignatura.

En este tipo de asignaturas se debe hacer una diferenciación entre los estudiantes de Matemáticas y los de Ingeniería, tanto en enseñanzas, ejercitación, evaluación y bibliografía. Esta diferenciación implica que los estudiantes de Matemáticas deben aprender los conceptos subyacentes a las enseñanzas impartidas en cada módulo, con una inclinación hacia la justificación de los hechos matemáticos. Esta diferenciación debe promover las siguientes competencias en los estudiantes de Matemáticas: capacidad de lectura de textos matemáticos, orientación a la investigación, capacidad de aprendizaje autónomo.

Teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente, el aula virtual de Fundamentos de Matemáticas se ha organizado atendiendo a cada uno de estos criterios. Dentro de esta organización se pueden encontrar OVAs que permiten una interacción directa y atemporal para que el estudiante pueda acceder a la información en el momento en que lo desee. A continuación se presentan algunas imágenes de los OVAs que han sido diseñadas para la asignatura.

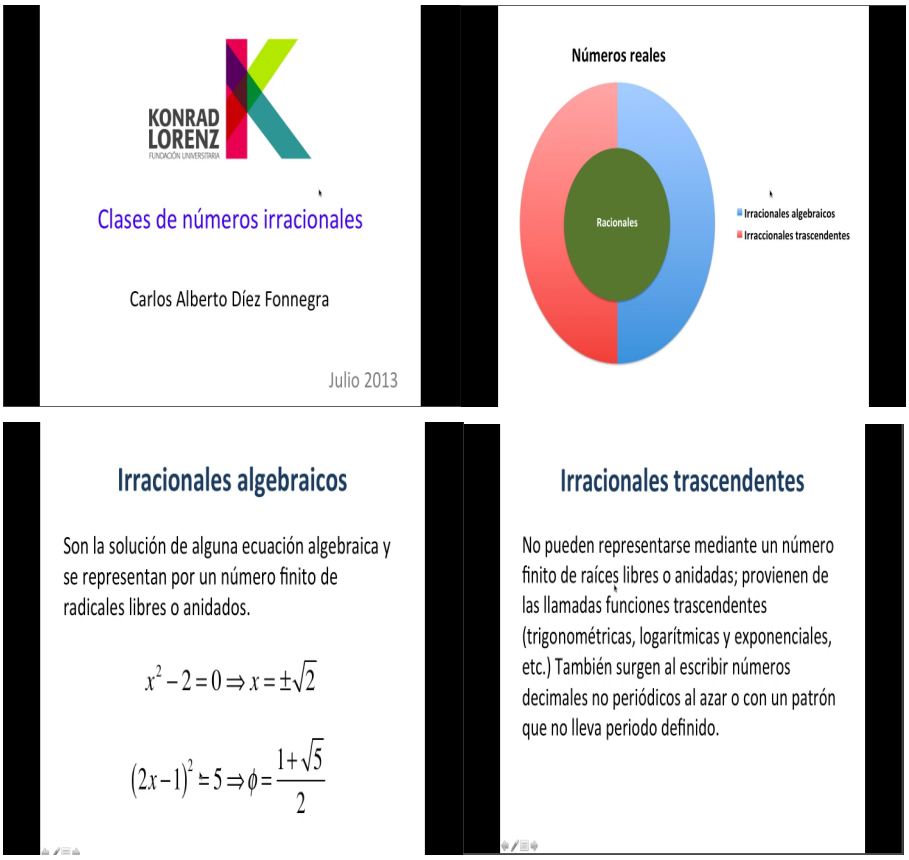


Figura 4. Ejemplo del OVA relacionado con la clasificación de los números irracionales.

En relación con el módulo asociado a la aritmética, el aula virtual se encuentra estructurada como se muestra a continuación:

Figura 5. Ejemplo de la estructura del aula para el módulo de aritmética.

Cada módulo en el aula virtual está dividido en semanas, cada semana contiene una imagen o diagrama que refiere o sintetiza alguno de los conceptos que serán enseñados en el transcurso de esta. Luego de esta imagen aparecen los diferentes objetos virtuales de aprendizaje (OVAs) que complementan las enseñanzas realizadas por los docentes. Los estudiantes pueden acceder a estos las veces que lo requieran. Seguido, en el aula virtual aparece uno de los quices virtuales diseñado con el propósito de que los estudiantes, por un lado tomen conciencia de la comprensión conceptual y la destreza procedimental que han adquirido hasta el momento y por otro de los principales errores procedimentales que puedan cometer. Posterior a los quices aparece en el aula los talleres, tanto para los ingenieros como para los matemáticos. En el caso del módulo dos asociado al álgebra, una de las semanas destinadas para este se encuentra estructurada de la siguiente manera:

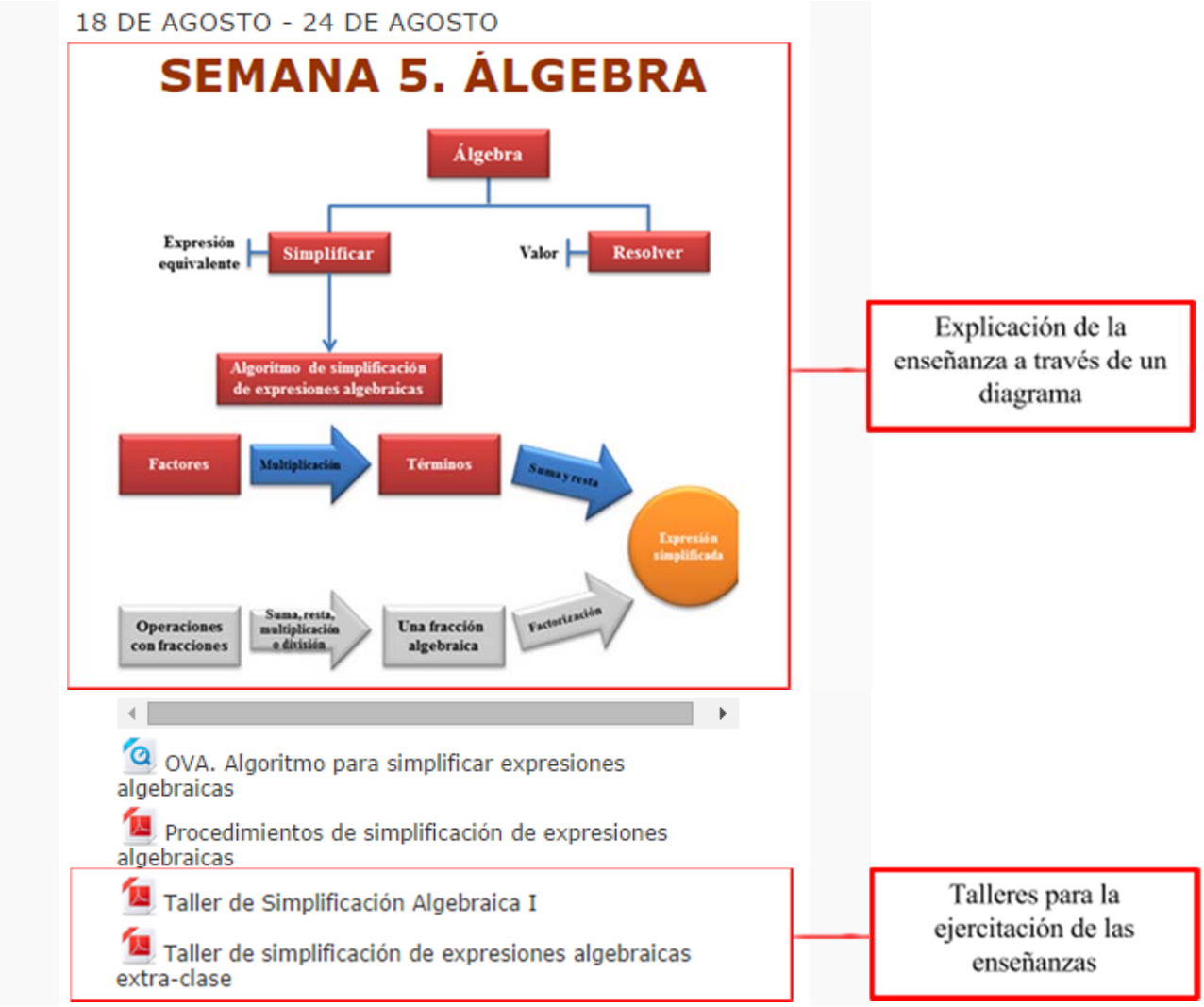


Figura 6. Ejemplo de la estructura del aula para el módulo de álgebra.

En este ejemplo, el aula para la semana cinco está organizada inicialmente con un diagrama que sintetiza la manera cómo se deben simplificar expresiones algebraicas, dependiendo de la manera como éstas sean presentadas (factores, términos, operaciones entre fracciones algebraicas o una fracción algebraica). Luego, aparece un objeto virtual el cual realiza la modelación de la simplificación de cada una de las maneras, en las que pueden presentarse una expresión algebraica. Así mismo, allí aparece un documento donde se especifica detalladamente cada uno de los pasos que se deben realizar, y que está en estrecha relación con el OVA. Al final, en la organización del aula virtual, se disponen tanto el taller que será utilizado en las sesiones de clase como el que deben resolver por fuera de ésta, con el propósito de que los estudiantes adquieran destreza en la simplificación de expresiones algebraicas.

El aula virtual juega un papel importante dentro de esta organización, ya que permite establecer de forma sistemática, las actividades que conllevan a un aprendizaje efectivo de los objetos matemáticos señalados. Además, distribuye los tiempos y permite de esa manera que el estudiante tenga a-temporalidad de acceso al conocimiento y pueda fortalecer su autonomía frente a su proceso de aprendizaje.

En relación con el módulo de trigonometría, se presenta un ejemplo de la manera como está organizada la semana, en la cual se pretende enseñar elementos conceptuales y procedimentales asociados a los ángulos entre paralelas, el teorema de Thales y el teorema de Pitágoras.

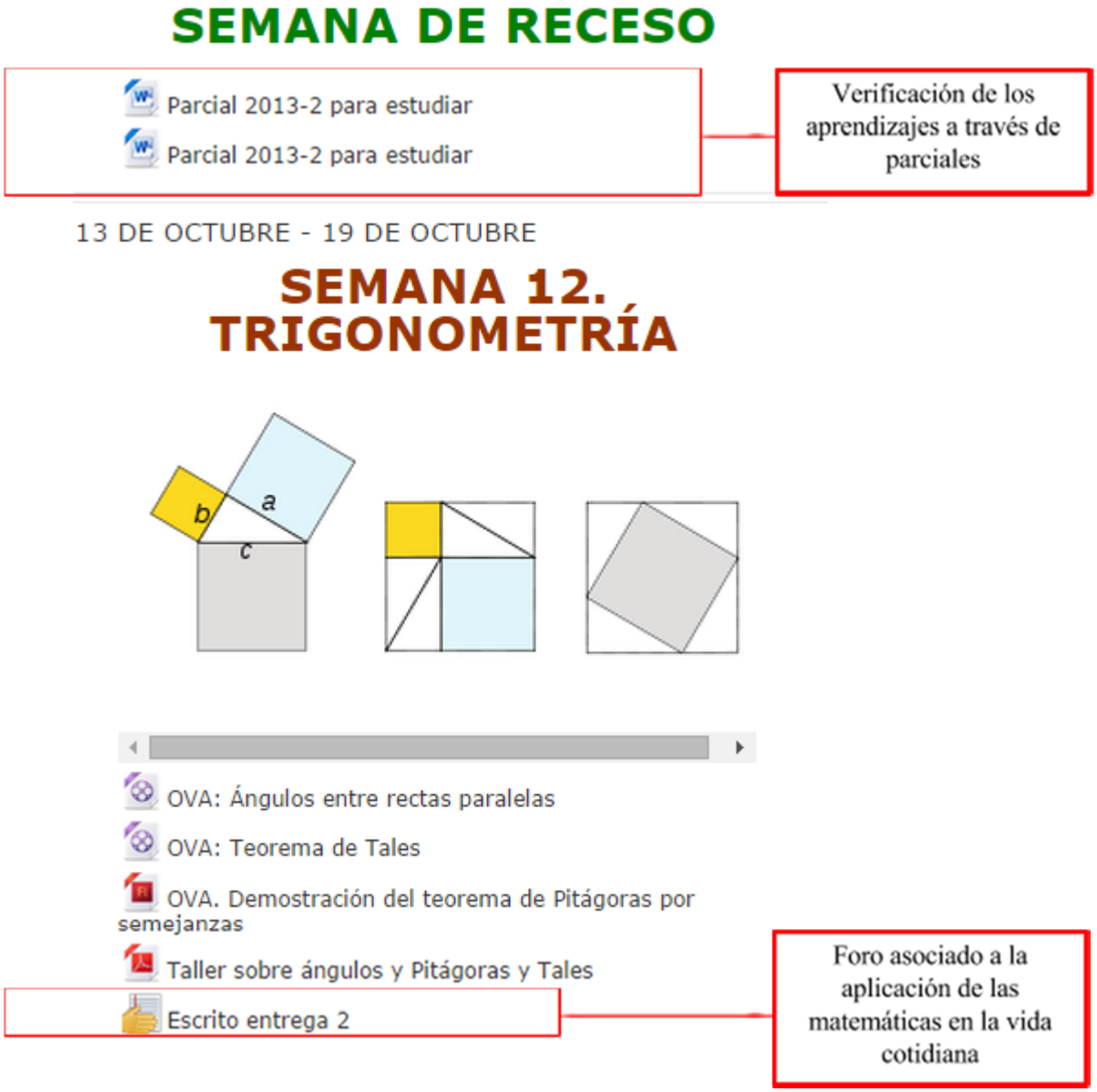


Figura 7. Ejemplo de la estructura del aula para el módulo de trigonometría.

A medida que se finalizan las respectivas enseñanzas de cada módulo en el aula virtual emergenexámenes parciales de cohortes anteriores o talleres de repaso para que los estudiantes se ejerciten. Para este ejemplo, la imagen con la que se inicia la semana 12, está relacionada con una de las demostraciones del teorema de Pitágoras. Seguido aparecen algunas OVAs relacionadas con la demostración de los ángulos entre paralelas y las diferentes relaciones de congruencia que se pueden establecer entre éstos, la demostración del teorema de Tales y además una demostración del teorema de Pitágoras.

En este módulo como en todos los demás también aparece el taller que será utilizado en el transcurso de las clases. Sin embargo, a diferencia de los demás ejemplos, en este aparece un nuevo recurso: un foro en el que los estudiantes deben realizar un documento escrito con base a un artículo de investigación en el cual se presenta una aplicación de las matemáticas. De este modo, los estudiantes deben, a través del documento escrito, describir la aplicación y relacionarla con la apropiación de su formación, ya sea como matemático o como ingeniero.

Como se puede observar durante toda el aula virtual emergen los entornos virtuales citados por Rayón et al (2002), por ejemplo: el entorno de conocimiento esta dado mediante los recursos y los OVAs. El entorno de colaboración a través de las retroalimentaciones de las actividades, en los forosy en la parte de evaluación individual de moodle. El entorno de asesoría mediante los foros de novedades y el inbox. El entorno de gestión mediante la organización dada por semanas y los tiempos dados en el plan analítico, además las herramientas como el calendario y los anuncios. Por último el entorno de experimentación mediante las actividades propuestas al interior de los talleres.

Conclusiones

El aula virtual permite observar los contenidos de una asignatura dada, pero sobre todo cumple con la función de organizador en donde se gestiona el conocimiento que se pretende enseñar y permite observar con mayor detenimiento las metodologías utilizadas para la acción del aprendizaje, la evaluación y la preparación de los contenidos.

El currículo se puede traslapar en escenarios como las aulas virtuales y no sólo se observa como un elemento tecnológico de ayuda para el aprendizaje, además permite evidenciar otra representación de las formas de organización y los elementos que lo puedan componer.

El currículo se puede observar mediante diversos mecanismos tecnológicos como lo son las aulas virtuales, mediante una organización clara y evidente para el estudiante que contenga todos los elementos dados al interior del aula física,permitiéndole reconocer y apropiarse de una ruta de aprendizaje.

El aula virtual permite al estudiante tener una organización clara de los elementos como contenidos, metodología, evaluación y recursos, además permite una interacción entre todos los individuos de la clase.

El aula virtual permite que el estudiante pueda retroceder o avanzar en los aprendizajes dados, es decir abre el currículo para que no sea solo potestad del docente, además genera interacciones, en las cuales el sistema de gestión de la información es organizado y controlado mediante los diferentes elementos como actividades y recursos.

Referencias y bibliografía

Díez. C., & Sánchez, F. (2013). Modelo Pedagógico del Programa de Matemáticas. *Acta comité de currículo, Facultad de Matemáticas e Ingeniería.* Bogotá, Colombia.

Duarte J. (2003).Ambientes de aprendizaje. *Un enfoque conceptual*. Recuperado de: http://slideshare.net/anelguadalupe/jakeline-duarte-ambientes-de-aprendizaje

Fundación Universitaria Konrad Lorenz, (2010). *Políticas de Uso del Aula Virtual*. Bogotá. Colombia.

Polanco,H. (2002). Entornos virtuales de enseñanza y aprendizaje en la educación a distancia. *IV Congreso de Educación a distancia*. Universidad de Tarapacá. Arica. Chile

Rayón, Ledesma & Escalera. (2002*). Ambientes virtuales de aprendizaje*. México, Secretaria de Apoyo Académico. Dirección de Tecnología Educativa. Instituto Politécnico Nacional IPN. Recuperado de: http://investigación.ilice.edu.mx/panelcontrol/doc/Rayon_Parra.pdf

Rico, Luis (1997). Los organizadores del currículo de matemáticas. En Rico, L.; Castro, E.; Castro, E.; Coriat, M.; Marín, A.; Puig, L.; Sierra, M.; Socas, M. M. (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-59). Madrid: Ice - Horsori.

O uso de *Vodcasts* na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral: o ponto de vista dos alunos

Daise Lago Pereira **Souto**
Universidade do Estado de Mato Grosso
Brasil
daise@unemat.br

Resumo

O objetivo desta comunicação é investigar, com base nos argumentos de alunos, o modo como os *vodcasts* podem contribuir para a produção de conhecimento na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. O termo *vodcasts* deve ser entendido como uma forma de publicação de vídeos na internet, cuja captura de imagens é feita com uma câmera. Os dados foram coleados por meio de entrevistas realizadas com alunos que frequentam o curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade Pública Brasileira. A base teórica para a análise desses dados está alicerçada na visão epistemológica associada à ideia de sistemas de atividade seres-humanos-com-mídias, que considera a união entre atores humanos e não humanos como uma célula básica que se relaciona dialéticamente durante o processo de produção de conhecimento. Os resultados indicaram que os vídeos compartilham com o professor papéis importantes no processo de produção do conhecimento da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral.

Palavras chave: Internet, Vídeos, Aprendizagem da Matemática, Teoria da Atividade, Seres-humanos-com-mídias.

Introdução

A presença de disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) nos cursos de Matemática, sendo eles de Licenciatura ou Bacharelado é considerada fundamental para a formação de profissionais nestes campos. Autoras como Franchi (1995) e Soares (2012) entendem que os conceitos estudados nestas disciplinas são relevantes tanto como um fundamento teórico, como também uma base para o diálogo com outras áreas por meio, principalmente da elaboração de modelos matemáticos que representem fenômenos.

No entanto, alguns estudos apontam que essas disciplinas apresentam historicamente baixos índices de aprovação, não apenas em cursos de Matemática, mas também em outras áreas como as Engenharias, Administração, Geologia, Ecologia, Biologia, etc. (Lopes, 1999; Mâsih; Gomes, 2007; Murta; Máximo, 2004). Tais índices podem, muitas vezes, influenciar no processo de evasão desses alunos da universidade. Talvez por isso, muitas vezes os estudantes apresentem traços de insegurança e medo antes mesmo de cursá-las. Esse comportamento também pode ser justificado pela falta de compreensão dos estudantes sobre a relevância da disciplina para a sua formação.

Esta problemática tem sido discutida em algumas pesquisas que sugerem, como uma forma de superação dessas "crises" no ensino de CDI, a adoção de abordagens pedagógicas inovadoras. Um exemplo é o trabalho de Soares (2012) que propôs a estudantes de um curso de graduação

em Biologia, uma abordagem pedagógica que contemplava o uso de um *software.* Outro estudo que apresenta novas formas de se abordar os conteúdos de CDI é o de Almeida (2011), que relata uma experiência com o uso de *applets* e de fóruns de discussão em um ambiente virtual de aprendizagem para interações assíncronas com a finalidade de sanar possíveis dúvidas dos acadêmicos. Além dessas, destaca-se a pesquisa de Domingues (2014) que direciona o olhar para o papel dos vídeos nas aulas multimodais de Matemática Aplicada.

Em comum esses estudos sugerem que as tecnologias digitais estão cada vez mais presentes nas aulas de Cálculo. No entanto, é importante que se questione: elas contribuem efetivamente para o processo de produção de conhecimento? Como? Apoiado nestas questões está o objetivo desta comunicação: investigar, com base nos argumentos de alunos, o modo como o uso de *vodcasts* (vídeos publicados na internet, cuja captura de imagens é feita com uma câmera) podem contribuir para a produção de conhecimento na disciplina de CDI.

Para tanto, foram entrevistados alunos de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública brasileira que cursaram ou cursam disciplinas de CDI. Por não se ter a preocupação com uma representatividade numérica empregou-se uma a abordagem qualitativa para a análise dos dados, que foi pautada na visão epistemológica associada à ideia de sistemas de atividade seres-humanos-com-mídias a qual é discutida a seguir.

Sistemas de atividade seres-humanos-com-*vodcasts*

O título dessa seção "sistemas de atividade seres-humanos-com-*vodcasts*" é uma variação utilizada para especificar esse estudo, que toma como base para análise dos dados a perspectiva teórico-metodológica "sistemas de atividade seres-humanos-com-mídias". Ela vem sendo proposta e discutida por Souto (2010, 2012, 2013, 2013a), Souto e Araújo (2013); Souto e Borba (2013, 2013a), com base na intersecção das ideias do construto teórico seres-humanos-com-mídias - S-H-C-M - (Borba, 1999; Borba; Villarreal, 2005) e da vertente da teoria da atividade - T.A - proposta por Engeström (1987). O termo *vodcasts* particulariza a mídia que está em análise, ele deriva da palavra *podcast* que se refere a publicações de arquivos de mídias digitais – áudios, vídeos, imagens, textos, etc – que são publicados na internet (Rocha; Coutinho, 2009). O prefixo *VOD* é uma abreviação da expressão *Vídeo On Demand* que implica na captura de vídeos com o uso de uma câmera.

De acordo com o construto seres-humanos-com-mídias, existem diferentes mídias ou tecnologias que têm, ao longo da história, condicionado (sem determinar) a produção de distintos tipos de conhecimentos. Os seres humanos, ao interagirem com uma dada mídia, reorganizam o pensamento de acordo com as múltiplas possibilidades e restrições que ela oferece (BORBA; Villarreal, 2005). Nessas distintas organizações e/ou reorganizações do pensamento que é coletivo, pois reúne atores humanos e não humanos, é que o processo de produção de conhecimento ocorre. Nas palavras de Borba e Villarreal (Ibidem) essa produção deve ser entendida como um *"pensar com"* mídias. Isso porque elas desempenham um papel mais abrangente do que simplesmente um suporte ou veículo de mensagem que *"através de"* se produz conhecimento, ou seja, elas são parte constitutiva desse processo.

O processo de reorganização do pensamento está inter-relacionado a outro processo, o da moldagem recíproca. De acordo com (Borba, 1993, 1999), os *feedbacks* dados por uma determinada mídia influenciam no raciocínio de quem interage com elas, em outras palavras, a mídia molda o ser humano. Por outro lado, os seres humanos também a moldam na medida em que a utilizam. Desse modo, elas são elementos centrais no processo de produção de

conhecimento. Assim, se assume neste estudo que o coletivo formado durante o pensar-com-*Vodcasts* influenciará no conhecimento que será produzido. Em vista disso, pode-se conjecturar que os vídeos, a oralidade e a escrita poderão modificar a forma como os alunos estudam e produzem conhecimento sobre os conteúdos das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral do curso de Licenciatura em Matemática.

Essas ideias que fundamentam o construto seres-humanos-com-mídias são baseadas nos estudos de Tikhomirov (1981) e de Lévy (1993). Em particular, Tikhomirov considera da teoria da atividade a ideia de mediação, que está implícita no conceito de reorganização do pensamento presente nos processos de interação dos seres humanos com o ambiente. Em Souto (2013), Souto e Araújo (2013) e Souto e Borba (2013) proporcionou-se ao construto seres-humanos-com-mídias uma volta a suas raízes da teoria da atividade, cujo fruto dessa reaproximação resultou em uma expansão das ideias do próprio construto. Da T.A. buscou-se a ideia de sistemas de atividade proposta por Engeström (1987), que é considerado como a unidade mínima de análise (figura 01).

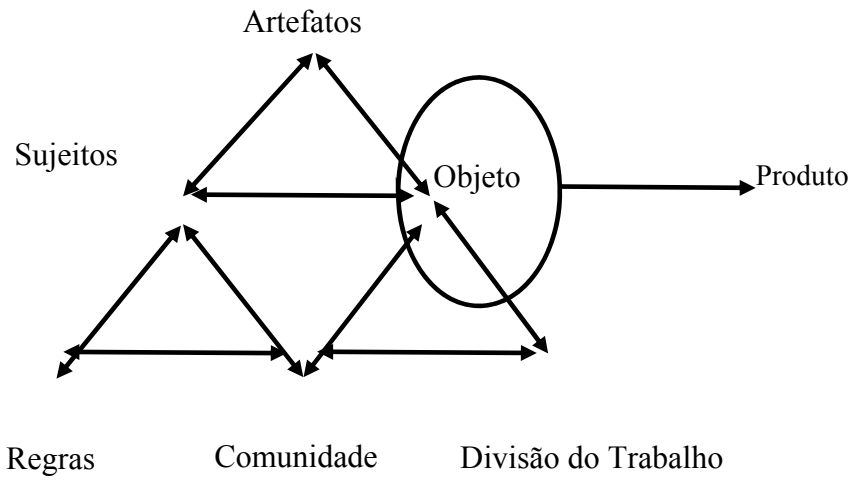


Figura 1. Representação do sistema de atividade humana (Souto, 2013).

Na representação do sistema de atividade humana (fig. 01) os sujeitos são os indivíduos cujo poder de agir é tomado como ponto de vista na análise. Os artefatos são meios mediacionais e referem-se às máquinas, à escrita, à fala, aos gestos, etc. O objeto é a "matéria-prima" ou "espaço problema" para o qual a atividade é direcionada e que é transformado em produto. A comunidade abrange todos que compartilham o mesmo objeto. A divisão do trabalho refere-se à distribuição de tarefas e as regras são os regulamentos, as normas e convenções que regulam o sistema (Engeström, 1987).

Em Souto (2013) há uma discussão em torno do papel das mídias no sistema proposto por Engeström. Com as lentes da T.A. elas ocupariam apenas a posição de artefatos, atuando como mediadoras da relação dos sujeitos com o objeto da atividade. No entanto, ao analisar esse mesmo sistema com base no construto seres-humanos-com-mídias, apoiada particularmente na noção moldagem recíproca se concluiu que as mídias podem ser transformadas pelos seres humanos e, ao mesmo tempo, elas podem transforma-los. Isso significa que uma dada mídia pode desempenhar também o papel de objeto no sistema de atividade, tendo, desse modo, como resultado mudanças no processo de produção de conhecimento.

Além desses dois papéis as mídias podem desempenhar papéis na comunidade, nas regras, na organização do trabalho[1] e, até mesmo nas funções dos sujeitos. Isso significa que um sistema S-H-C-M, qualquer que seja, não deve ser tomado como uma estrutura rígida, mas antes como algo fundamentalmente dinâmico, fluido e sensível aos movimentos que ocorrem tanto no seu interior como no seu exterior. De forma resumida foi assim que se desenvolveu a ideia de sistemas de atividade seres-humanos-com-mídias que entrelaça os conceitos da T.A e do S-H-C-M, mas que também possui características próprias (fig. 02).

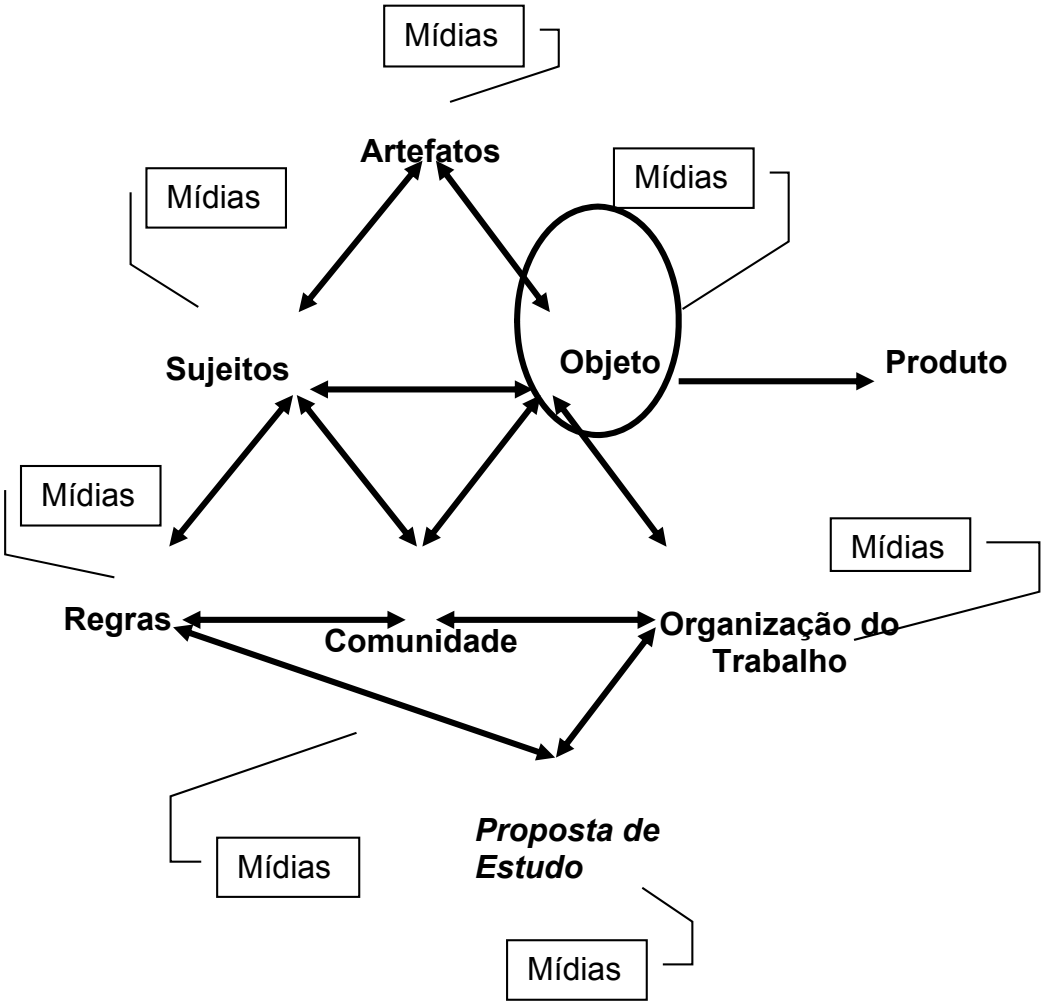


Figura 2. Representação do sistema de atividade seres-humanos-com-mídias (Souto, 2013).

Nele, a proposta de estudo ou pedagógica ganha espaço e visibilidade no momento da análise do desenvolvimento da atividade. Apesar de ela, na representação da figura 02, ser destacada como mediadora da relação entre as regras e a organização do trabalho é preciso

[1] Em sistemas de atividade seres-humanos-com-mídias é adotado o termo *organização* ao invés de *divisão* do trabalho como tem sido usualmente empregado na teoria da atividade. Segundo Souto (2013), a palavra divisão poderia remeter a ideia de algo fragmentado, e com isso, gerar incompreensões sobre o sistema que também se fundamenta nos pressupostos do trabalho colaborativo.

considerar que esse sistema de atividade se desenvolve por meio de mediações dialéticas e deve ser visto como uma unidade. Assim, em sistemas seres-humanos-com-mídias, a proposta pedagógica também colaborará para a transformação do objeto em produto. Além disso, outra característica desse tipo de sistema é a mobilidade das mídias, que as possibilita desempenhar múltiplos papéis. Desse modo, um dado coletivo pensante de atores humanos e não humanos seria não apenas a unidade básica de produção de conhecimento, mas também uma parte da atividade que se metamorfoseia de acordo com os movimentos do sistema, ou seja, uma célula que se relaciona dialeticamente transformando-se e sendo transformada.

O contexto e aspectos metodológicos do estudo

Esta pesquisa pode ser considerada um estudo de caso, pois de acordo com André (2008) a finalidade desse tipo de estudo pode ser ilustrar o uso de procedimentos, com vistas à geração de estímulos para o enriquecimento do debate de um dado tema. Sendo que sua aplicação é adequada para investigar problemas práticos, questões que emergem no dia-a-dia, como é o caso da problemática apresentada, de forma resumida, na introdução desta comunicação, a qual indica algumas dificuldades no ensino e na aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral.

O contexto da coleta de dados foi um curso de Licenciatura em Matemática noturno que é ofertado em um dos campi de uma universidade pública brasileira que se localiza no interior do estado de Mato Grosso (figura 03).

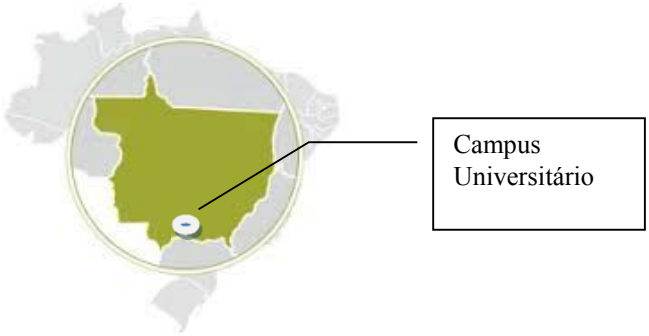


Figura 3. Mapa de Mato Grosso, Brasil.

A cidade de Barra do Bugres onde se situa o campus está localizada entre os biomas do Pantanal, Cerrado e Amazônia Legal e de acordo com o censo de 2010 do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística – IBGE, ela possui 31.793 habitantes.

O curso de Licenciatura em Matemática visa à formação de professores nesta área e possui uma carga horária total de 3110 horas. Na grade curricular estão contempladas três disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral que juntas perfazem uma carga-horária de 270 horas.

Vários acadêmicos (as) que frequentam ou frequentaram aulas das disciplinas de CDI foram convidados a participar da pesquisa. Sendo que a entrevista foi realizada com aqueles (as) que se dispuseram a colaborar e que tiveram em pelo menos uma dessas disciplinas alguma experiência com o uso de vídeos. Para esta comunicação foram selecionados alguns excertos das entrevistas que se mostraram pertinentes para o alcance do objetivo aqui proposto.

A entrevista é um procedimento usual em Ciências Sociais (Poupart, 2008) e é considerada uma técnica particularmente apropriada para a coleta de dados em estudos de caso (Andrè, 2008). Na entrevista o sujeito tem a oportunidade de dizer o que pensa, a descrever o que

vivenciou. Assim, ela pode abrir possibilidades para se conhecer e compreender dilemas enfrentados pelos atores sociais.

Entretanto, quando se realiza uma pesquisa qualitativa como essa é necessário que o pesquisador considere que seus conceitos prévios a respeito do tema podem influenciar nos resultados (Goldemberg, 2007; Souto, 2013). Para se evitar ou pelo menos se reduzir esses possíveis "vieses" optou-se pela realização dos seguintes procedimentos descritos: após realização da transcrição e das análises iniciais das entrevistas foi realizado o *"Member Cheking"*, em que se discutiu com os entrevistados os resultados obtidos. O propósito era identificar possíveis interpretações que não estivessem de acordo com que os sujeitos almejavam transmitir no momento da realização da entrevista. Outro procedimento que foi adotado é chamado por Lincoln e Guba (1985) de *"peer review"* ou revisão pelos pares, em que alguns pesquisadores de outras instituições em conjunto com a autora desta comunicação auditaram as análises dos dados. Com a adoção desses dois procedimentos acredita-se que a subjetividade das interpretações pessoais da pesquisadora sobre estudo tenha sido minimizada.

Análise dos dados

O perfil dos acadêmicos (as) que frequentam o curso é de trabalhadores, muitos deles pais ou mães de família que em sua maioria não tiveram acesso à Educação básica na idade certa. Sendo que para concluírem o ensino médio em geral fazem duas, três ou mais vezes o chamado "provão"[2] até obterem aprovação em todas as disciplinas. Desse modo, eles obtêm a certificação que os torna aptos a prestar o vestibular e, se aprovados ingressarem na universidade. O comentário a seguir indica essa realidade.

> **Aluno 1 –** Eu terminei meu ensino fundamental em 1999 e entrei no primeiro ano três vezes. Eu não conseguia concluir. Eu estudava até o meio do ano e largava. Então decidi sair e fiquei mais de dez anos sem estudar. Quando apareceu esse provão..., eu fiz duas vezes para eliminar todas as disciplinas. Depois eu fiz o vestibular e passei "graças a Deus". Mas, entrei na faculdade sem saber nada!

No excerto anterior o aluno 1 atribui às dificuldades que possui em relação aos conteúdos específicos à sua "não" formação na Educação Básica. No entanto, é preciso ter-se em mente que existem outros fatores que podem influenciar essa situação conforme mencionado anteriormente. Portanto, esta situação colocada pelo aluno 1, apesar de ser importante, não deve ser considerada como a única responsável pelos insucessos que ocorrem no processo de produção de conhecimento da disciplina de CDI.

Entretanto, independentemente das causas dessas "lacunas" na produção de conhecimento a preocupação de alguns professores e pesquisadores, ao que parece, está cada vez mais se distanciando da ideia de identificar-se "culpados". O que se percebe é que há buscas por metodologias que contribuam para se equacionar esta situação. De acordo com Domingues (2014), uma delas é a proposta de aulas multimodais, que consiste no uso combinado de diferentes formas de comunicar ideias, conceitos, concepções, etc. São exemplos de multimodalidade os textos escritos, as imagens, os áudios e os vídeos (*podcasts*). Segundo Borba e Scucuglia (2014) a multimodalidade em contextos educacionais traz contribuições importantes

[2] No Brasil os jovens e adultos (maiores de 18 anos) que não concluíram os estudos na idade apropriada têm a oportunidade de realizar um exame nacional (provão) para obter a certificação de conclusão do ensino médio.

para o processo de produção de significados, em particular na Educação Matemática ela pode contribuir para a mudança da visão que os estudantes têm da Matemática.

Especificamente no caso que estamos estudando a metodologia adotada pelo professor de CDI – I possui traços desse caráter multimodal. Isso porque ela contempla o uso de alguns vídeos que estão postados na internet, cujas imagens foram capturadas por uma câmera, os chamados *Vodcasts* que são o foco deste estudo. Com base nesta informação iniciamos a entrevista.

> **Pesquisadora –** Você pode falar sobre sua experiência com o uso de vídeos nas aulas de Cálculo.
>
> **Aluna 2 –** Então, os vídeos me ajudaram muito. Porque o professor na sala de aula [...] eu tinha dificuldade de entender o que ele dizia. [Os vídeos] eram de resolução de exercícios. Eu aprendi com eles.
>
> **Aluno 1 –** O professor falou assim: as pessoas que têm dificuldade em limites, o procedimento tem lá no *youtube,* pode clicar lá [www...] que vocês irão achar todos os vídeos que estão precisando. [...] Eu vou falar uma coisa para senhora [...] se você ficou com dúvida... o vídeo é tão bem feito que ele já fala assim: então gente por isso que é isso, isso e isso...ele já te responde.

No excerto anterior a aluna 2 explica que os vídeos apresentam técnicas de resolução de exercícios, e que compreendê-las é importante para a sua aprendizagem. Em outra entrevista o aluno 1 elogiou o grau de detalhamento do processo de resolução dos exercícios, e deixou indicativos de que o professor ao sugerir os vídeos estava prevendo algumas dificuldades dos alunos.

Com essa iniciativa o professor da disciplina de cálculo, mesmo sem ter consciência disso, colocou os vídeos disponíveis na internet, em um papel central em suas aulas. Pode-se considerar que nesse ambiente formou-se um sistema de atividade professor-alunos-com-*vodcasts*, em que a função "ensinar", vista até então como típica dos seres humanos, se tornou uma ação compartilhada com um ator não humano: o vídeo. De acordo com Souto (2013), em sistemas seres-humanos-com-mídias como esse, uma mídia pode desempenhar mais de um papel ou coparticipar de um mesmo papel no sistema. No caso do sistema constituído, o vídeo poderia realizar a função de artefato, mediando as relações entre os sujeitos (professor e alunos) e o objeto da atividade (resolver os exercícios de cálculo). No entanto, há uma transformação dessa função, o vídeo assume momentaneamente o papel do professor. Isso se verifica nas duas entrevistas: em uma delas quando a aluna 2 afirma que tinha dificuldades de compreender os conceitos que o professor explicava em sala, mas que com os vídeos ela aprendeu. Na outra entrevista, quando o aluno 1 diz que suas dúvidas são previstas nos vídeos, porque quando ele pensa em perguntar algo o vídeo responde detalhadamente.

Além disso, verifica-se que as regras que usualmente regulam a atividade e consequentemente a organização do trabalho em sala de aula também são modificadas. Isso porque o incentivo ao acesso à internet para baixar os vídeos fez com que os limites da sala de aula ultrapassassem o espaço de interação que até então era restrito ao sistema professor-alunos-com-lousa-giz-lápis-e-papel.

Nesses vídeos (figura 04) a ideia de Borba e Villarreal (2005) de que uma mídia não substitui outra é verificada. Pois neles, há uma combinação entre diferentes mídias, as ditas

"novas" tecnologias (vídeos, internet) não ocuparam o lugar da "velha" tecnologia (lápis-e-papel), ao contrário, houve uma união que trouxe contribuições para o processo de produção de conhecimento de CDI.

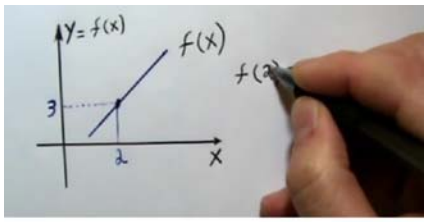


Figura 4. Imagem ilustrativa (estática) de um dos vídeos.

O papel desses vídeos é central nesse processo. Um indicativo dessa afirmação são as declarações dos alunos atribuindo os insucessos na disciplina de cálculo também à falta de dedicação aos estudos com os vídeos.

> **Aluno 1 –** Eu reprovei uma vez em Cálculo I, porque eu estava pegando aquela "base" do ensino médio ainda. Mas, depois que eu comecei a estudar com esses vídeos ai, as dúvidas que eu tinha... já foram... hoje eu estou em Cálculo III e não tenho tantas dificuldades. Mas, sempre que eu preciso recorro a esses vídeos. Porque eles tiram todas as dúvidas!

> **Aluna 2 –** Eu já reprovei em cálculo uma vez. Depois disso comecei a estudar com os vídeos. Nas minhas férias já assistia aos vídeos. [...] Se não fossem os vídeos eu não teria passado! Tenho colegas que estão repetindo Cálculo I pela quarta vez, porque eles não têm tempo para assistir os vídeos. Tenho certeza que se eles assistissem conseguiriam passar.

Inicialmente os acadêmicos tiveram uma experiência não exitosa na disciplina de Cálculo que culminou em reprovações na disciplina. Nos excertos anteriores eles atribuíram esse fato à falta de dedicação deles e, que a partir dessa vivência eles passaram a estudar com os vídeos. A esse novo comportamento eles atribuem o sucesso, a aprovação em CDI.

Com base na perspectiva teórico-metodológica que está fundamentando esta análise é possível interpretar que o sistema de atividade que se constituiu nas aulas de cálculo se mobilizou a partir de uma necessidade, qual seja: obter a aprovação na disciplina. Os alunos agiram de acordo com os objetivos daquele instante da atividade e com as condições materiais de operacionalização que estavam ao alcance deles. Em outras palavras, eles buscaram os vídeos para compreender alguns procedimentos e solucionar os problemas propostos. Assim, conseguiram superar as limitações que os impediam de avançar no curso. Essa movimentação no sistema deixa indicativos que de o pensar-com-*vodcasts* influenciou o conhecimento que foi produzido. Isso porque, segundo as declarações dos próprios alunos, foi a ação de estudar-com-os-vídeos que os levou a obtenção de êxito na disciplina. Portanto, a conjectura apontada na fundamentação teórica de que os vídeos, a oralidade e a escrita influenciariam na forma como os alunos produziriam conhecimento sobre cálculo se confirmou.

> **Pesquisadora –** Como você faz para estudar com os vídeos?

> **Aluna 2 –** Eu preciso assistir e fazer... Assisto um pedacinho dou pausa e tento fazer o exercício. Se eu não conseguir eu volto. Acho que ninguém aprende só olhando. [...] Mas, tem que ter tempo, isso é difícil.

Aluno 1 – Primeiro eu assistia tudinho, depois eu começava: pegava lápis e papel e resolvia, quando ele começava a explicar aí eu parava e tentava fazer sozinho, se eu não conseguia, eu "clicava" um pouquinho só para lembrar. Ai eu fui aprendendo!

Nos excertos acima os alunos sugerem que na produção do conhecimento sobre cálculo o pensar-com-*vodcasts* é expandido e inclui lápis-e-papel. Mais uma vez se verifica que as mídias não são substituídas umas pelas outras. Ao contrário, juntas contribuem cada uma a sua maneira para o processo de reorganização do pensamento. A ação dos alunos de assistirem os vídeos em pequenas partes indica que a oralidade e visualização são aspectos importantes nesse processo e que a possibilidade de rever várias vezes a explicação de um dado problema é algo que favorece o processo de produção do conhecimento. Por outro lado, o fato deles procurarem concomitantemente resolver os problemas também indica que a escrita é uma parte fundamental nesse processo.

Essa primeira experiência com os *vodcasts,* ao que parece, transformou esse e transformará outros sistemas dos quais esses alunos fazem ou farão parte. Os trechos a seguir ajudam a compreender essa conjectura.

Pesquisadora – Essa sua experiência de usar vídeos nas aulas de cálculo lhe despertou outros interesses?

Aluna 2 – Sim, hoje em dia eu busco vídeos na internet. Quando eu entrei na faculdade eu não sabia nem ligar o computador. Tive que aprender! [...] Esses dias eu falei [pela internet] com um professor que eu nem conheço. Entrei no site dele e ele estava *online*, ai ele pediu para eu ligar a câmera. Ele foi tão legal, me ajudou a tirar dúvidas de meus exercícios.

Aluno 1 – Em Cálculo II eu baixei alguns vídeos e comecei a estudar nas férias, e agora eu até já baixei os vídeos de GAV [Geometria Analítica e Vetorial]. Não sei se me acostumei com o jeito desse professor [da internet] explicar... Achei bacana, não tem professor melhor!

Os *vodcasts* além de influenciarem o sistema de atividade que se constituiu nas aulas de cálculo, também trouxeram novos horizontes para sistemas futuros que incluem cada vez mais o uso de vídeos e outros *podcasts*. Isso porque, nos excertos da entrevista os alunos enfatizam que essa prática do uso de vídeos e outros materiais e/ou recursos da internet como interações síncronas passaram a fazer parte da metodologia de estudo deles.

Desse modo, o uso de *vodcasts* ou de qualquer tipo de *podcasts* estará "presente" na sala de aula presencial, não é mais uma questão dos professores sugerirem ou não. Os alunos transmitiram, nas entrevistas, segurança e autonomia em relação a esse uso. A ideia de polidocência de Mill (2014) utilizada na Educação a distância *online*, para caracterizar o trabalho docente virtual que é extremamente fragmentado e atribuído a vários trabalhadores se organizam de forma coletiva e cooperativa, de certa forma pode ser utilizado nesta situação. A diferença é que neste caso o professor compartilhou o seu papel, a docência, com um ator não humano: os *vodcasts*.

Assim, esta análise converge para as ideias defendidas por Souto e Borba (2013, p. 55): "A *internet* transforma uma atividade, mas transforma também o próprio papel do que é ser humano. *Internet*, celular e a mobilidade associada a elas transformam noção do que significa ser humano". Verificamos que os *vodcasts* transformaram a atividade quando passaram a

compartilhar o papel que até então era apenas do professor. No entanto, é importante notar que o significado do que é ser humano, neste caso, também se transformou. Isso porque os próprios *vodcasts* foram produzidos por seres humanos. Neste caso, pode-se parafrasear Borba e Villarreal (2005) e argumentar que humanos e *vodcasts* estão tão impregnados que não há uma separação possível. Em outras palavras, sujeitos e objeto ou sujeitos e artefatos do conhecimento não são dissociáveis, uma vez que se relacionam de modo recíproco, um dependente do outro, formando um polo único que se constitui pelo processo histórico-social (Souto; Borba, 2013, p. 45).

> **Aluna 2 –** Eu queria dizer uma coisa: os vídeos completam o trabalho do professor na sala de aula. Mas, um não supre a necessidade do outro. Outra coisa, este semestre, em Cálculo III o professor disse que vai criar um blog com vários materiais: vídeos, listas de exercícios e outros materiais para nós acessarmos. Isso vai nos ajudar na disciplina. Eu prefiro assim!

A última colocação da aluna pode ser um chamado para nós professores refletirmos sobre a ideia de compartilharmos nosso papel com os *podcast*s. Mas, este é uma discussão que foge ao escopo desta comunicação, por isso a sugerimos como um trabalho futuro. No entanto, é preciso reconhecer que esses textos, imagens, áudios, vídeos que estão postados na internet vêm ganhando espaço e transformando nossas salas de aula, sendo que muitas vezes não nos atentamos a essa fato. Nossos alunos querem, preferem usar essa tecnologia que está disponível e ao alcance deles porque conseguem produzir conhecimento com ela, exatamente como disse a aluna no excerto acima.

Considerações Finais

O fechamento de um trabalho científico ou conclusão é, de acordo com Bogdan e Biklen (1994, p. 244)**,** "uma arrumação final, como a sobremesa ou o café após a refeição". Assim, é plausível iniciar os apontamentos desse espaço reservado as considerações finais retomando o objetivo desta comunicação: investigar, com base nos argumentos de alunos, o modo como os *vodcasts* podem contribuir para a produção de conhecimento na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. A análise dos dados permitiu verificar que eles contribuíram na medida em que influenciaram o processo de reorganização do pensamento dos alunos. Também se identificou que um dos principais modos de contribuição foi com a transformação da produção do conhecimento, em que essa mídia desempenhou o papel de um agente mobilizador do sistema de atividade impulsionando os alunos para que se tornassem mais ativos nesse processo. Além disso, observou-se que os *vodcasts*, dentro do sistema de atividade seres-humanos-com-mídias que se constituiu durante o "fazer" Cálculo Diferencial e Integral, não devem ser vistos de forma dissociada dos atores humanos. Isso porque essa mídia desempenhou de forma compartilhada papéis não periféricos no processo de produção de conhecimento.

Por outro lado, tomando como base o diagrama que representa um sistema seres-humanos-com-mídias é possível de uma forma didática apresentar uma síntese das análises. O sistema de atividade representado na figura 5 começou a se constituir e se desenvolver a partir do momento em que o professor incluiu o uso de *vodcasts* na proposta de estudo da disciplina. Nesse espaço dentro do sistema eles exerciam a função de mediadores da relação entre as regras e a organização do trabalho, que por sua vez foram transformadas: as regras usuais da sala de aula que sugerem que o professor, em um dado momento, deve explicar o conteúdo e o aluno deve prestar atenção foram transformadas, porque, no caso dos *vodcasts*, os alunos tinham a possibilidade de ver e rever as explicações quantas vezes julgaram necessário. Com isso, a

organização do trabalho também mudou estudar não se limitou apenas ao período letivo, aproveitar as férias para estudar se tornou parte da atividade desses alunos. No entanto, a participação dessa mídia não é única. Embora não seja possível, neste texto, observar o aspecto visual da dinamicidade dos movimentos que ela provoca no sistema é possível verificar na figura 5 que ela exercer distintas funções e/ou influencia de algum modo todos os elementos do sistema. No papel de artefatos, tal como pressupõe a teoria da atividade, ela medeia a relação entre os sujeitos e o objeto. Além disso, a mídia *vodcast* também aparece no papel da comunidade. Isso porque, com ela há uma ampliação das vozes do sistema. A produção de um *vodcast* é impregnada de diferentes valores, convenções, posicionamentos de seus idealizadores, na medida em que é fonte de consulta, transmite todos esses aspectos ao sistema.

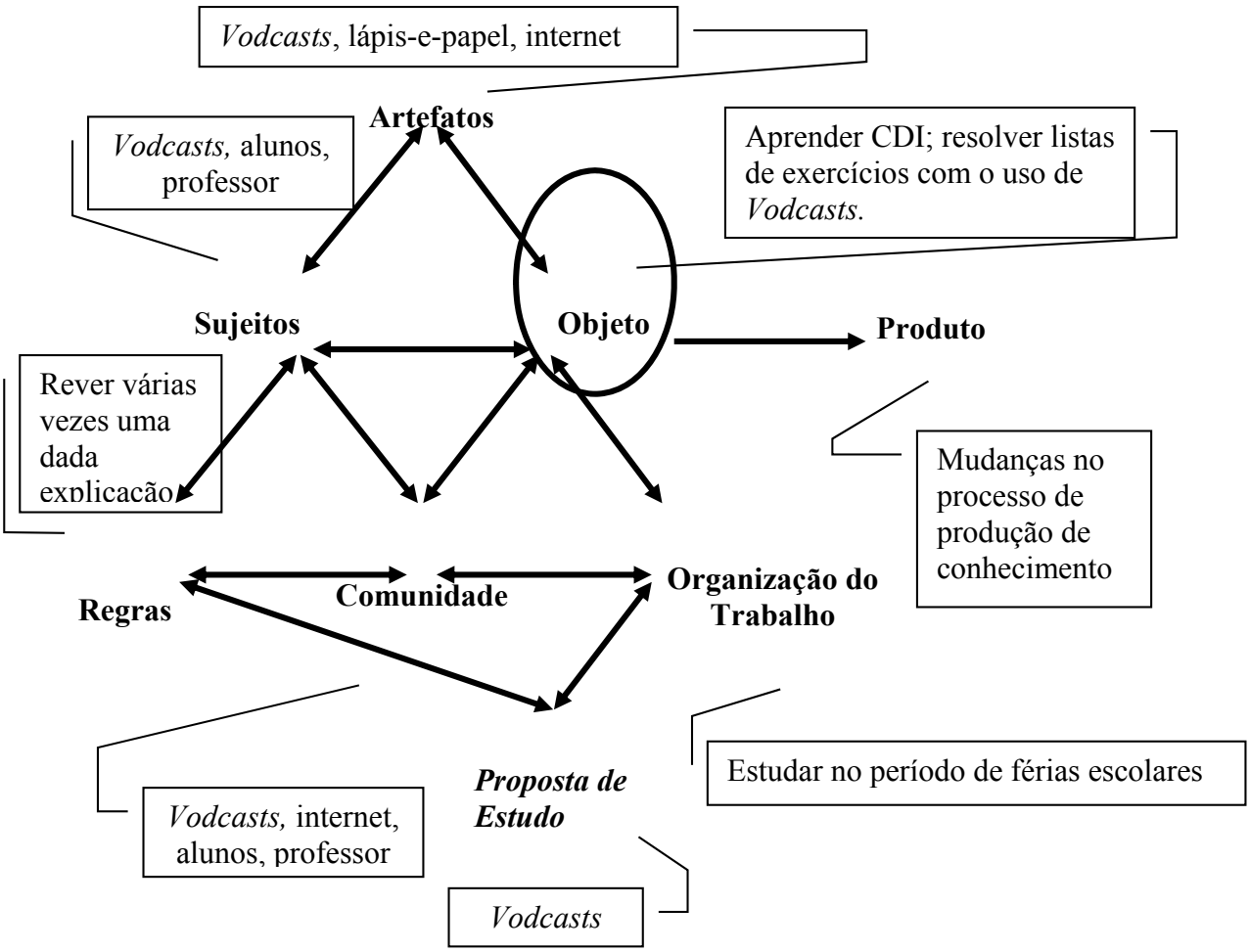


Figura 5. Diagrama do sistema de atividade seres-humanos-com-*vodcasts*.

Por outro ângulo, quando se relaciona a imagem do diagrama da figura 5 com a análise dos dados verifica-se que o fato de os *vodcasts* terem sido idealizados e produzidos por seres humanos e, durante o desenvolvimento do sistema de atividade compartilharem a função de "ensinar" com o professor, sugere que humanos-com-mídias formaram uma unidade que protagonizou funções no polo sujeito. Essa unidade é dialética e por isso colabora para transformação do objeto em produto. O objeto da atividade é polimotivacional, sendo que um

dos motivos é a obtenção do título de Licenciado em Matemática. De acordo com Souto (2013) o objeto de uma atividade é constituído por objetivos, que no caso em análise podem ser: aprender, CDI e resolver listas de exercícios com *vodcasts*. Por fim, o produto ou resultado do sistema que são as mudanças que ocorreram no processo de produção de conhecimento.

Embora nesta comunicação não se almeje fazer juízo de valor sobre os problemas propostos pelo professor ou àqueles apresentados nos *vodcasts,* até mesmo porque neste estudo não se deu voz a todos os atores do sistema, não se pode ignorar o surgimento de uma luz amarela como se fosse um farol de alerta que pisca insistentemente. Esta metáfora é para fazer referência à imagem da Matemática que esses problemas transmitiram ao sistema, como algo rígido e abstrato, símbolo de certeza única e inquestionável. Isso porque, tanto os problemas solicitados pelo professor como apresentados nos *vodcasts* se resumem à aplicação de técnicas e procedimentos que não exigem um pensar crítico. Essa luz intermitente encontra reflexos nas ideias de Borba (2009, 2012) e de Souto e Borba (2013) quando esses autores indicam que a internet gera a necessidade de se repensar os problemas matemáticos.

Referencias bibliográficas

Almeida, H. R. F. L. (2011). A Utilização de Novas Formas de Aprendizagem nas Aulas de Cálculo Diferencial e Integral I. *II Congresso Nacional de Educação Matemática,* Ijuí – RS.

André, M. E. D. A. (2008). *Estudo de caso em pesquisa e avaliação educacional*. Brasília: líder.

Bogdan, R., Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto, Portugal: Porto Editora.

Borba, M. C. (1999). Tecnologias Informáticas na Educação Matemática e Reorganização do Pensamento. In: Bicudo, M. A. V., *Pesquisa em Educação Matemática: Concepções e Perspectivas*. São Paulo: Editora UNESP.

Borba, M. C., Villarreal, M. E. (2005). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization*. New York: Springer.

Domingues, N. S. (2014). *O papel do vídeo nas aulas multimodais de Matemática aplicada: uma análise do ponto de vista dos alunos***.** 125f. Dissertação em educação matemática - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – UNESP.

Engeström, Y. (1987). *Learning by expanding: an activity-theoretical approach to developmental research.* (Helsinki, Orienta-Konsultit). Versão online, disponível em: <http://lchc.ucsd.edu/MCA/Paper/Engestrom/expanding/toc.htm.> Acessado em 04/03/2011.

Franchi, R. H. De O. L. (1995). Cursos de Cálculo: uma proposta alternativa. *Temas & Debates, Sociedade Brasileira de Educação Matemática, ano VIII*, 6, 39-43.

Goldenberg, M.(2007). *A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais.* Rio de Janeiro: Record.

Holbig, C. A., Trentin, M. A. S., Claudio, D. M. *Ambientes de apoio ao ensino na Web.* Disponível em <lsm.dei.uc.pt/ribie/docfiles/pdf> Acessado em 02/05/2007.

Lévy, P. (1993). *As tecnologias da inteligência: o futuro do pensamento na era da informática*. Rio de Janeiro: Editora 34.

Lopes, A, (1999). Algumas reflexões sobre a questão do alto índice de reprovação nos cursos de Cálculo da UFRGS. *Sociedade Brasileira de Matemática. Rio de Janeiro, 26/27*, 123-146, jun./dez.

Lincoln, Y. S., Guba, E. G. (1985). *Naturalistic Inquiry*. Newbury Park: Sage Publications.

Murta, J. L.B, Máximo, G. C. (2004). Cálculo diferencial e integral nos cursos de engenharia da ufop: estratégias e desafios no ensino aprendizagem. *Congresso brasileiro de ensino de engenharia,* Brasilia.

Mâsih, Mill, D., Ribeiro, L. R. C., Oliveira M. R. G. (2014). *Polidocência na educação a distância: múltiplos enfoques* - 2ª ed. EDUSCAR.

Poupart, J. (2008). *A pesquisa qualitativa: enfoques epistemológicos e metodológicos.* Petrópolis: Vozes.

Rocha, A. M. M, Coutinho, C.P. (2009). Geomcasting: uma experiência no ensino secundário. *Revisa de Educação - Eduser – V. 1*.

Soares, D. S. (2012). *Uma Abordagem Pedagógica baseada na Análise de Modelos para Alunos de Biologia: qual o papel do software?* 341f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

Souto, D. L. P. (2010). Atividades Mediadas pelas Internet. In: *Anais – XIV Ebrapem. Campo Grande.*

Souto, D. L. P. (2012). Matemática online e pensamento coletivo: uma abordagem expansiva para análise de dados. In: *Anais – XIV Ebrapem*. Canoas.

Souto, D. L. P. (2013). *Transformações Expansivas em um Curso de Educação Matemática a Distância Online*. 279f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

Souto, D. L. P. (2013a). Mídias: artefatos e/ou objetos? In: *Anais – XVI conferência GPIMEM:20 anos de tecnologias digitais em Educação Matemática*. Rio Claro.

Souto, D. L. P., Araújo, J. L. (2013). Possibilidades expansivas do sistema Seres-humanos-com-mídias: um encontro com a Teoria da Atividade. In: Borba, M. C., Chiari, A. (Eds.) *Tecnologias Digitais e Educação Matemática* (pp. 71-90). São Paulo: Editora Livraria da Física.

Souto, D.L. P, Borba, M.C. (2013). Transformações expansivas em Sistemas de Atividade: o caso da produção matemática com a Internet. *Revista Perspectivas em Educação Matemática*, Campo Grande: A universidade, v.6.

Souto, D.L. P, Borba, M.C. (2013a). Miniciclo de aprendizagem expansiva em sistema seres-humanos-com-mídias e o fazer matemática online. In: *XI ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática.* Curitiba.

Tikhomirov, O. K. (1981). The psychological consequences of computerization. In: Wertscsh, J. V. (Ed.) *The Concept of Activity in Soviet Psychology* (pp. 256-278). New York: M. E. Sharpe Inc.

Formação de professores sob a perspectiva da inclusão digital

Adriana **Richit**
Universidade Federal da Fronteira Sul-Campus Erechim.
Brasil
adrianarichit@gmail.com
Luciane Ferreira **Mocrosky**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná-Campus Curitiba.
Brasil
mocrosky@gmail.com
Andriceli **Richit**
Instituto Federal Catarinense-Campus Concórdia.
Brasil
andricelirichit@gmail.com

Resumo

O artigo discute a formação continuada de professores da educação básica, olhada no contexto do Programa Um Computador por Aluno (Programa UCA), recentemente implementado na rede municipal de ensino de Erechim/RS/Brasil. Tais considerações baseiam-se na análise dos dados constituídos por meio de entrevistas com professores e de observações realizadas em escolas municipais. A análise dos dados revela que a Secretaria Municipal de Educação de Erechim tem realizado importantes ações e investimentos no sentido de qualificar a educação ofertada, tais como a reestruturação física e pedagógica das escolas, a instalação de laboratórios de informática, distribuição de computadores portáteis aos docentes e estudantes, implementação de programas e ações de educação integral, assim como na realização de formação continuada aos professores. Em face dessas iniciativas, resultados positivos se anunciam, entre eles a elevação dos índices de desenvolvimento da educação e mudanças nas práticas pedagógicas de sala de aula a partir do uso de tecnologias.

Palavras chave: Formação Continuada de Professores. Educação Básica. Inclusão Digital.

Abstract

Paper discuss the continuing education of teachers of basic education, look at the context of the One Laptop per Child Program (Programa UCA), recently implemented in municipal schools Erechim / RS / Brazil. Such statements are based on analysis of data seized through interviews with teachers and observations in municipal schools. Data analysis reveals that the Municipal Education Erechim have made significant investments and actions in order to qualify the education offered, such as restructuring the physical and pedagogical schools, installing computer labs, distribution of laptops to teachers and students, implementing programs and activities of integral education, as well as in conducting continuing education for teachers. Given these initiatives, positive results have been announced, including rising rates of development of education and changes in teaching practices of the classroom through the use of technology.

Keywords: Continuing Teacher Education. Basic Education. Digital Inclusion.

Introdução

Em face do movimento de mudanças sociais, culturais, políticas e econômicas, a sociedade brasileira de modo geral e a educação, em particular, encontram-se diante de importantes desafios. Esses desafios comparecem a começar por compreender as mudanças provocadas pelo desenvolvimento e uso das tecnologias[1] e, por conseguinte, devido à reestruturação da sociedade em função do alargamento das possibilidades de produzir conhecimento e transmitir informações com as tecnologias de informação e comunicação.

Na obra "Tecnologias e Ensino Presencial e a Distância" Vani Kenski (2003) pontua que pedagogicamente as tecnologias influenciam os diversos setores da estrutura educacional, deflagrando mudanças na cultura das instituições educacionais, as quais, por sua vez, levam à constituição de uma nova cultura, que ela denomina "cultura informática educacional". Complementando, a autora diz que a cultura informática educacional requer

> uma reestruturação sensível não apenas das teorias educacionais, mas da própria percepção e ação educativa. O desenvolvimento de uma cultura informática é essencial na reestruturação da gestão da educação, na reformulação dos programas pedagógicos, na flexibilização das estruturas de ensino, na interdisciplinaridade dos conteúdos, no relacionamento dessas instituições com outras esferas sociais e com a comunidade de forma geral (Kenski, 2003, p.85-86).

Sob esse viés, o ensino na educação básica tem solicitado diversificados modos de conduzir a ação pedagógica com vistas a tratar os assuntos de modo que o aluno produza conhecimento, contemplando distintos percursos formativos. Para tanto, é preciso haver mudanças nas demais dimensões imanentes às práticas escolares, sobretudo na formação contínua dos professores que ensinam matemática em qualquer uma das etapas escolares.

Nesse sentido, a universidade depara-se com importantes desafios, entre eles o de assumir seu papel social. Para tanto, precisa propor ações que contribuam com a inclusão das pessoas na vida em sociedade, das quais inclusão digital faz parte. Os reflexos da presença e uso das tecnologias nos diversos setores da sociedade impõe à universidade o desafio de entender as possibilidades advindas das tecnologias para a compreensão do mundo e nele, a produção de conhecimento pelas pessoas.

Olhando para a realidade da escola pública brasileira e entendendo que faz parte dessa realidade as complexidades de promover uma prática educativa refletida, pois é assim que entendemos o sentido de pedagógico nas escolas (Bicudo, Mocrosky & Baumann, 2011), constatamos que um dos pontos nevrálgicos encontra-se no isolamento das instituições escolares, quer geograficamente ou no que se refere à participação intelectual com núcleos de formação continuada. Muitas universidades encontram-se nesse isolamento. Algumas pela localização que as afasta dos centros universitários e da escola de educação básica, outras pela pouca participação no movimento que tende aproximar formadores para os distintos níveis em que a escolarização brasileira está organizada.

Com isso, encontra-se de um lado a ação da escola e do outro a universidade como provedora de desenvolvimento intelectual. Entre elas, muitas vezes os encontros são furtivos,

[1] Tecnologias referem-se aos diversos recursos tecnológicos, como celulares, computadores, calculadoras etc.

haja vista a visível desarticulação do cotidiano das instituições que ofertam a educação básica e daquelas que ofertam curso de formação inicial e continuada de professores.

Por consequência, as ações formativas ofertadas e as práticas pedagógicas promovidas solicitam o enfrentamento decorrente da distância entre escola pública e universidade de modo a eleger e por em prática propostas que "visem os valores de formação da pessoa, do cidadão e do profissional." Entende-se, ainda, que os valores mencionados "[...] valem no bojo da cultura em que essa ação é esperada e estão entrelaçados com as expectativas da sociedade [...]" (Bicudo, Mocrosky, Baumann, 2011, p.124).

Esse entendimento nos coloca frente à interrogação: a prática promovida permite a universidade ampliar suas ações como instituição formadora, intervindo na realidade educacional da região em que está inserida? Ou seja, essa prática contempla as possibilidades e desafios manifestos nessa realidade, concretizando, portanto, seu papel social de instituição formadora?

No sentido exposto, o contexto abrangido pela Universidade Federal da Fronteira Sul (UFFS), Campus de Erechim, apresenta-se ávido por desenvolvimento social, econômico e cultural, solicitando dessa instituição ações interventivas no sentido de deflagrar movimentos de mudança nos diversos setores sociais, favorecendo seu desenvolvimento e, ainda, a qualificação dos processos pedagógicos da educação básica da região. Além disso, o referido contexto suscita a realização de estudos diversos, a partir dos quais pode-se compreender, sob diferentes perspectivas, os processos que atravessam as práticas sociais, profissionais, culturais e a produção de conhecimento na contemporaneidade.

Em face das considerações expostas desenvolvemos um estudo, conduzido na perspectiva qualitativa de pesquisa sistematizada em Bicudo e Espósito (1994), com o objetivo de compreender o modo como a formação de professores vem sendo concebida e promovida no âmbito do Programa Um Computador por Aluno (Programa UCA), recentemente implementado na rede pública municipal de ensino de Erechim, RS. E a partir desse estudo, explicitado em termos metodológicos na próxima seção, propomos algumas considerações sobre o processo de formação continuada de professores da educação básica, olhado no contexto do respectivo Programa.

Detalhamento do Estudo

A investigação realizada situa-se na perspectiva qualitativa, baseada em um conjunto de práticas interpretativas que permitem a produção de novas compreensões sobre o tema estudado (Bicudo, Espósito, 1994). Pautadas nesses pressupostos, realizamos entrevistas e apresentamos questionários a alguns professores contemplados com computadores portáteis no Programa UCA, visando saber como se percebem face ao processo de inclusão digital almejado na escola pública, e sobre o modo como a formação de professores vem sendo concebida e promovida. Além disso, foram realizadas observações nas escolas dos professores entrevistados, olhando à estrutura física e pedagógica dessas instituições no que diz respeito à implementação de ações voltadas a educação tecnológica e inclusão digital. Esse foi o modo de produção dos dados do estudo.

As entrevistas realizadas, de natureza semiestruturada segundo o entendimento de Goldenberg (2003), foram gravadas em áudio e transcritas para posterior análise. As observações consistiram de registros textuais produzidos a partir das visitas realizadas em algumas escolas

municipais. Tais registros sistematizam, em detalhes, aspectos referentes à organização/estruturação física e pedagógica das escolas visitadas.

Por meio dos delineamentos metodológicos descritos nessa seção, buscamos compreensões sobre o modo como a formação continuada docente vem sendo concebida e implementada no contexto do Programa UCA/Erechim. Secundariamente, a análise busca evidenciar as implicações das ações de formação continuada, voltadas ao uso pedagógico das tecnologias, ao processo de inclusão digital na escola pública.

Formação Continuada de Professores e Inclusão digital: alguns entendimentos

A formação continuada docente, por sua natureza e especificidade, constitui-se em objeto de estudo de pesquisas acadêmicas frequentemente visitadas por educadores matemáticos. Entretanto, o conhecimento produzido sobre os processos de formação de professores na dimensão tecnológica e na perspectiva da inclusão digital ainda é escasso (Richit & Maltempi, 2013), ao tempo que há muitas questões a serem investigadas sobre o modo como a formação docente, na dimensão continuada, é concebida. A esse respeito Kenski (1998, p.69), destaca que

> Não é possível pensar na prática docente sem pensar, antecipadamente, na *pessoa* do docente que está em pauta e em sua formação que, como vimos, não se dá apenas durante o seu percurso nos cursos de formação de professores, mas, permanentemente, durante todo o seu caminho profissional, dentro e fora da sala de aula.

Analogamente, a formação pedagógico-tecnológica de professores, processo de apropriação de conhecimentos de uso pedagógico das tecnologias, tornou-se tema de pesquisas, visto que, segundo Richit (2010), pode sinalizar caminhos à concretização das políticas de informatização da educação e inclusão digital na escola pública.

Juan de Pablos considera que a formação pedagógica docente em tecnologias constitui-se na via principal para o uso desses recursos em educação. E esse uso qualificado pressupõe uma nova pedagogia, que "possibilite e integre o local com o global; que contemple as diferentes opções multidisciplinares, interdisciplinares e transdisciplinares, mesmo que em diferentes graus de integração" (Pablos, 2006, p.73).

Além disso, em face das reflexões propostas por pesquisadores e especialistas sobre o papel da escola e da educação na realidade atual, bem como das mudanças que se verificam nas diversas culturas e contextos sociais, modificações curriculares e na prática docente têm se tornado necessárias (Lévy, 1993, 1998; Kenski, 2007). Por conseguinte, as estratégias pedagógicas de sala de aula e os processos de formação profissional docente constituem-se dinâmicos e complexos.

Diante desse contexto, as discussões acerca da formação profissional docente têm se tornado ainda mais urgentes e necessárias, permeando os debates e reflexões em eventos educacionais, os discursos oficiais, entre outros. Por consequência esse movimento tem fomentado a criação de políticas públicas específicas, dentre elas as políticas de alfabetização e inclusão digital.

No palco desse movimento, o estudo de Richit (2010) sinaliza fragilidades nos processos de formação continuada docente, sobretudo no que se refere à formação para uso das tecnologias na formação e prática pedagógica. Sinaliza, ainda, que em geral não há nos projetos pedagógicos das escolas públicas, diretrizes à incorporação desses recursos nas práticas de sala de aula. Em contraponto, o referido estudo preconiza que a formação continuada, voltada ao uso pedagógico

das tecnologias, pode propiciar ao docente embasamento teórico-prático que lhe permita refletir sobre a necessidade de modificar sua prática, promover dinâmicas de aprendizagem usando tecnologias, bem como vislumbrar modos diferentes de abordar conteúdos curriculares com esses recursos. Sob o viés desse entendimento, a formação continuada constitui-se na via principal do desenvolvimento profissional docente e da educação como um todo, ao tempo que contribui para a valorização do professor em sua prática social no âmbito da escola e da comunidade.

Contudo, alguns questionamentos tornam-se iminentes. Embora a exigência por formação continuada predomine nos mais diversos contextos educativos, por que o impacto das ações de formação docente promovidas, em geral, é pouco significativo na escola? Tais questões têm mobilizado estudos e sinalizado novas políticas e direcionamentos para as propostas e programas de formação continuada docente. Em contrapartida outros questionamentos emergem, a exemplo: como o professor pode favorecer seu desenvolvimento profissional e qualificar a educação por meio do uso de tecnologias? Quais dimensões políticas da educação interferem na formação e prática do professor? Como a incorporação das tecnologias na prática docente pode contribuir no processo de inclusão digital na escola pública?

A emergência dessas questões sinaliza que há muito a se pesquisar em formação de professores, ao tempo que há muitos aspectos relacionados a esse processo que precisam ser compreendidos, para além do próprio processo formativo. Dentre esses aspectos a apropriação das tecnologias pelo professor, tendências essa crescentemente investigada na década de noventa, constitui-se uma importante dimensão do desenvolvimento profissional do professor, uma vez que propicia-lhe novos modos de interagir com o conhecimento, bem como pode contribuir para com o processo de concretização da inclusão digital em educação, numa perspectiva de emancipação do estudante.

De acordo com Richit (2010) há outros aspectos relacionados à formação docente para uso de tecnologias que sinalizam fragilidades nesse processo e potencializam a resistência manifestada pelos docentes em apropriar-se do uso das mesmas. Tais aspectos dizem respeito ao modo como as ações formativas são planejadas e implementadas, geralmente verticalizadas e desconexas das necessidades dos professores, e a descontinuidade das políticas públicas de informatização da educação e formação tecnológica de professores. Além disso, na década atual o uso de tecnologias na formação inicial ainda é restrito, quando não negligenciado, aspecto esse que contribui para reforçar a resistência das escolas em promover o uso desses recursos na prática de sala de aula.

Teorizando sobre os modos pelos quais a tecnologias podem ser articuladas às práticas sociais humanas, Lemos e Levy (2010, p.45) pontuam que as elas “alteram os processos de comunicação, de produção, de criação e de circulação de bens e serviços nesse início de século XXI, trazendo uma nova configuração social, cultural, comunicacional e, consequentemente, política”, contribuindo com os processos de “desenvolvimento cultural” contemporâneos.

Nessa perspectiva consideramos pertinente produzir novas compreensões sobre o modo como a formação docente tem sido concebida e promovida no contexto das recentes políticas de alfabetização e inclusão digital. Para isso, tomamos por cenário a rede pública de ensino do município de Erechim, recentemente contemplada com o Programa UCA.

O contexto social olhado: explicitando algumas especificidades

Sobre a realidade da rede municipal de Erechim, ressaltamos que as escolas da referida rede apresentam necessidades específicas em relação ao uso pedagógico das tecnologias digitais, uma vez que as políticas de formação tecnológica para professores e de inclusão digital na escola pública são escassas e recentes. Em contrapartida, essas mesmas escolas apresentam potencial de desenvolvimento social e cultural devido à possibilidade de acesso às tecnologias.

Olhando sob outro viés, de acordo com Richit (2010), devido à carência e/ou ausência de ações voltadas ao uso pedagógico das tecnologias nos projetos político-pedagógicos das escolas públicas estaduais e municipais, deficiência essa fortalecida pelos aspectos destacados no início da presente seção, os modos de utilização desses recursos pelos docentes são, ainda, muito modestos, ao tempo que os estudantes apresentam deficiências em relação ao uso das tecnologias nos processos de ensino e aprendizagem.

Por outro lado, crescentemente as atividades educativas na educação básica e na universidade são permeadas por esses recursos. É nessa perspectiva que consideramos pertinente e necessário promover a inclusão digital dos estudantes das escolas públicas, visto que precisam apropriar-se desses recursos ao prosseguir os estudos e nas suas práticas sociais cotidianas. Para tanto, é necessário compreender como se dá o processo de apropriação de conhecimentos pedagógico-tecnológicos na formação e prática docente.

Diante do exposto, ressaltamos a pertinência de estudos e reflexões acerca desse assunto, como uma forma de contribuir, numa dimensão científica ampla, com as reflexões e debates acerca da formação pedagógico-tecnológica de professores da educação básica, sinalizando diretrizes para a concretização das políticas de informatização da educação e de inclusão digital na escola pública.

Programa UCA/Erechim e a Formação Continuada Docente: crenças, entraves e perspectivas

Analisando os depoimentos dos professores entrevistados verificamos que, no âmbito do Programa UCA/Erechim, a formação docente constitui-se na via principal para a qualificação da educação ofertada nas escolas públicas municipais, assim como para fomentar mudanças na prática docente e para a concretização da inclusão digital. O recorte abaixo ilustra esse aspecto.

> Desde que iniciaram o Programa UCA no município, a Secretaria Municipal de Educação, por meio do Núcleo Tecnológico Municipal (NTM), tem feito vários cursos de formação para os professores, porque para a Secretaria, sem formação não é possível oferecer uma educação de qualidade, nem fazer aulas diferentes, nem mesmo usar as tecnologias para auxiliar a aprendizagem (Profª A, agosto de 2012).

De acordo com Melo (1999, p.47), a formação continuada propicia o enfrentamento dos desafios da escola e dos avanços tecnológicos da contemporaneidade, pois a profissão docente requer que esse profissional busque formação continuada. Ademais, "transformar essa necessidade em direito é fundamental para o alcance da sua valorização profissional e desempenho em patamares de competência exigidos pela sua própria função social".

Em relação à formação de professores, os depoimentos mostram que há iniciativas no sentido de preparar os docentes para utilizar as tecnologias, contemplando atividades de alfabetização tecnológica, bem como ações de fomento ao uso pedagógico desses recursos nas práticas escolares. Em entrevista uma docente comenta que inicialmente "a gente teve um

treinamento de quarenta horas, um treinamento de base com mesmo. Então a gente começou fazer a chamada com o notebook, a organizar aulas...” (Profª. A, agosto de 2012).

Contudo, essa professora acrescenta que a formação recebida deveria ser contínua, pois “o restante que seria o mais interessante, como procurar na internet, montar alguma aula... isso a gente teve que buscar sozinha. Até hoje quando a gente aprende alguma coisa nova, uma passa pra outra porque o treinamento que recebemos, foi muito válido, mas é pouco”, porque quando o professor procura utilizar as tecnologias em sala de aula ele enfrenta muitos desafios (Profª. B, setembro de 2012).

Compreendemos, a partir das reflexões e depoimentos dos professores entrevistados, que o conhecimento dos recursos e das possiblidades pedagógicas das tecnologias por parte do professor

> pode garantir-lhe segurança para, com conhecimento de causa, sobreporem-se às imposições dos programas e projetos tecnológicos que não tenham a necessária qualidade educativa. Criticamente, os professores vão poder aceitá-las ou rejeitá-las em suas práticas docentes, tirando o melhor proveito dessas ferramentas para auxiliar o ensino no momento adequado (Kenski, 2003, p.50).

Nessa perspectiva, entendemos que a formação do professor é essencial no processo de promover uma educação tecnológica, uma vez que compreendemos que as tecnologias “may change collaboration and teaching approaches in continuing education, as it allows for greater integration of online learning with teachers’ classroom activities in schools” (Borba, 2012, p.01).

Do mesmo modo, os depoimentos constituídos por meio dos questionários e entrevistas evidenciam desafios diversos que são enfrentados pelos professores nas práticas de sala de aula, conforme destacado por Richit (2010) e Kenski (2007). Segundo o depoimento de um professor entrevistado, ao promover práticas pautadas no uso de tecnologias os professores procuram trabalhar em duplas, porque “a gente corre a tarde inteira quando a gente pega o computador, pois os pequenos querem aprender, eles querem saber, então eles querem saber escrever, abrir o joguinho sozinhos...” e o professor precisar dar suporte. Com os estudantes maiores “é a mesma coisa. Você usa para fazer uma tabela, mas eles nem sabem o caminho que tem que ir, então é a mesma coisa, que daí que nem eu fico sozinha na sala então é bem puxado” (Profº C, agosto 2012).

Em síntese, de acordo com Richit (2010), no âmbito das escolas públicas da região verifica-se que importantes iniciativas estão sendo implementadas, revelando um quadro positivo acerca do acesso dos alunos e professores a esses recursos, contudo, pouco se avançou em relação à formação docente para a promoção da inclusão digital, desenvolvimento profissional do professor e constituição de uma cultura de uso das tecnologias em educação. Ou seja, as ações formativas ainda não têm contribuído para que mudanças qualitativas nos processos ensino e aprendizagem.

De maneira análoga, Bonilla (2010, p.58), considera que as políticas de inclusão digital na escola precisam

> estar articuladas, não só na origem, mas, especialmente, na implementação, bem como envolver todo o processo que leva à formação da cultura digital da comunidade escolar, urbana e rural, desde a conexão à internet, passando pela infraestrutura, pela disponibilidade dos equipamentos, pela formação dos professores, até a reorganização dos espaços-tempos escolares.

Outro depoimento ressalta as possibilidades de diversificação das atividades de sala de aula, por meio das quais pode-se favorecer a aprendizagem dos alunos. Para essa docente, quando a gente pega "para trabalhar com o notebook a aula é bem proveitosa, só que tu sempre tem que voltar para trás porque tem aquele que anda e aquele que não sabe nada, é bem complicado, mas ajuda vários alunos" (Profª. C, agosto de 2012).

A referida professora complementa que ao usar computador com os estudantes em sala de aula, "tem parte que é bem válida porque se eles [sabem] que eles vão adquirir conhecimento de informática aqui, porque a realidade deles é difícil, eles não têm contato em casa com computador, com informática, enfim, por esse ponto de vista é bem válido".

Além disso, por meio das entrevistas e observações realizadas identificamos vários aspectos que se constituem em entraves para a promoção de uma educação tecnológica na rede municipal de ensino e, por conseguinte, para a concretização da inclusão digital, meta essa almejada no âmbito do Programa UCA. Dentre esses aspectos ressaltamos as limitações de acesso à internet. De acordo com os depoimentos dos professores entrevistados, "para o ano de 2013 outras atividades educativas poderão ser desenvolvidas com os alunos, pois as escolas do município terão acesso à internet, e isso vai facilitar muito" (Profª A, agosto de 2012). Outra professora acrescenta que

> Na minha perspectiva eu vejo o seguinte, que a gente tem um computador que não tem um acesso à internet dentro da sala, então ele não funciona, entende. Alguns [computadores] na sala tu consegue acessar, outros não, por que a internet é muito lenta. Se tu quer assistir alguma coisa, aí não carrega. Além disso, tem o fato de que tu tem que bloquear certos sites... é que no caso deles foi bloqueado além do que a secretária consegue ver, foi bloqueado mais. Então quando eles acessam a turma inteira acessa vinte alunos com o net ligado demora muito, a internet é muito lenta. Então, eu sempre procuro me deter em outras, eu procuro trazer aula pronta e passar em data show e eles acompanham e depois eles trabalham com o net em outras atividades educativas (Profª B, setembro de 2012).

A esse respeito Bonilla (2010, p.44) comenta que no Brasil há muito que se avançar "para que a escola se transforme num espaço de formação, dos professores, dos alunos e da comunidade escolar, para a vivência plena da cultura digital, como parte integrante de sua proposta pedagógica". Essa autora acrescenta, também, que esse entendimento acerca do uso das tecnologias parece estar distante das atuais formulações políticas nacionais.

A partir das observações realizadas durante as visitas, verificamos que as escolas dispõem de laboratório de informática com acesso a internet para uso dos professores e estudantes. Os computadores são munidos com o sistema operacional Linux. Além disso, a partir da implementação do Programa UCA, todos os professores da rede municipal foram contemplados com computadores portáteis, os quais estão equipados com o sistema Linux Educacional, que dispõe de um pacote de recursos (programas, aplicativos) destinados as atividades nas diversas áreas do conhecimento. Conforme avaliação dos professores, o fato dos computadores serem equipados com Linux tem gerado uma certa resistência em usá-los, devido as dificuldades em operar com esse.

De acordo com o depoimento de uma professora que participou do Curso "ainda não conseguimos explorar todas as potencialidades das tecnologias para fazer aulas diferentes para nossos alunos e nem para o nosso crescimento profissional" (Profª E, novembro de 2011).

Em face dessas constatações, compreendemos que a concretização da inclusão digital na escola pública pressupõe, a priori, processos de formação continuada que sejam desenvolvidos na perspectiva da inclusão digital do professor. Ou seja, o professor precisa, primeiramente, ser incluído nesse processo, assim como precisa apropriar-se desses recursos de tal maneira que processos de ressignificação dos conhecimentos, das práticas pedagógicas de sala de aula e desenvolvimento profissional docente sejam deflagrados, conforme sugerem os estudos de Richit et al. (2012), Richit (2010), Maltempi (2008) e Ponte (1997; 1998; 2000).

Considerações Finais

A análise realizada sobre a formação de professores no contexto das tecnologias da informação e comunicação na região de Erechim evidencia que mudanças significativas no que diz respeito às práticas pedagógicas de sala de aula vêm sendo vislumbradas pelos professores, sobretudo a partir da implementação do Programa UCA. Tais mudanças são motivadas a partir do desenvolvimento de ações formativas, as quais são pautadas no entendimento de que o processo de formação continuada docente constitui-se na base principal para a qualificação da educação. Na perspectiva desse entendimento, a formação docente é um processo dinâmico e complexo em que o professor constitui-se professor e modifica seu modo de compreender o ensino, as ciências em sua organização disciplinar e suas práticas tendo no horizonte a formação de si e do outro, no caso, o aluno.

Outro aspecto evidenciado no contexto da rede pública de ensino de Erechim, RS é a elevação dos índices de qualidade da educação, como é o caso do Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB). De acordo com os dados divulgados pelo Ministério da Educação do Brasil, o IDEB das séries iniciais (1º ao 5º ano) do ensino fundamental das escolas municipais de Erechim em 2013 alcançou a nota 6, colocando-se acima da média nacional. Da mesma forma, o IDEB das séries finais (6º ao 9º ano) do ensino fundamental chegou em 2013 à nota 4,7, ultrapassando a média nacional que é 4,2. Segundo a Secretaria Municipal de Educação, a elevação desses índices deve-se, sobretudo, aos investimentos em formação de professores no âmbito do Programa UCA e a valorização do profissional professor.

Além disso, segundo Richit et al. (2012), a análise desse contexto revela um panorama positivo no que se refere ao acesso às tecnologias, assim como mostra avanços em relação à formação continuada para uso de tecnologias na prática pedagógica e no desenvolvimento profissional do professor. Em face dessas constatações, compreendemos que a concretização da inclusão digital na escola pública pressupõe, a priori, processos de formação continuada que sejam desenvolvidos na perspectiva na escola, com o professor em seu contexto profissional. Contexto esse que convida a universidade e formadores de professores a se movimentarem no solo da educação básica, com as inquietações e perplexidades que emergem no cotidiano da escola para, assim, dirigir-se a intelectualidade. Ou seja, o professor precisa estabelecer uma relação mais íntima com a tecnologia articulada à matemática, seu ensino e prioritariamente aos aspectos formativos que anunciam educação das pessoas pela tecnologia e, do mesmo modo, pela matemática. Ou seja, educação matemática tecnológica alimentando e nutrindo o projeto de vida das pessoas. Essa perspectiva convida a universidade, provedora de formação continuada a qualificar matemática e a tecnologia não apenas como conteúdo escolar, mas pelos significados de ambas para a produção de conhecimento na atualidade, que contribui com o enfrentamento das complexidades da vida em sociedade.

O encontro com os professores participantes do Programa UCA nos esclarecem, mas também é um chamamento para se pensar mais demoradamente sobre modos de aproximar universidade e educação básica e, assim avançar nas compreensões sobre inclusão digital no ensino da matemática pela experiências vividas por professores indo em direção ao possibilidades de se ter centros de formação na própria escola.

Referências

Bassanezzi, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática* [Teaching and learning with mathematical modeling]. São Paulo, SP: Contexto.

Bicudo, M.A.V.; Mocrosky, L.F.; Baumann, A.P.P. (2011). Análise qualitativo-fenomenológica de Projeto Pedagógico. En: Bicudo, M.A.V. *Pesquisa qualitativa segundo a visão fenomenológica*. Cortez: São Paulo.

Bicudo, M.A.V.; Espósito, V.H.C. (1994). *Pesquisa Qualitativa em Educação: um enfoque fenomenológico*. Piracicaba: Editora da UNIMEP.

Biembengut, M. S.; Hein, N. (2000). *Modelagem matemática no ensino* [Mathematical modeling in teaching]. São Paulo, SP: Contexto, 2000.

Bonilla, M.H.S. (2010). Políticas Públicas para Inclusão Digital nas escolas. *Motrivivência*, *22* (34), 40-60, Jun/2010.

Borba, M.C. (2012). Humans-with-media and continuing education for mathematics teachers in online environments. *ZDM Mathematics Education. Springe*r.

Goldenberg, M. (2003). *A Arte de Pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais.* 7. ed. Rio de Janeiro: Record.

Kenski, V.M. (2007). *Educação e tecnologias: O novo ritmo da informação.* Campinas: Papirus.

Kenski, V.M. (2003). *Tecnologias e Ensino Presencial e a Distância*. 3.ed., Campinas: Papirus.

Kenski, V.M. (1998). Novas tecnologias: o redimensionamento do espaço e do tempo e os impactos no trabalho docente. *Revista Brasileira de Educação, 1*(08)*,* 58-71, Mai./Ago.

Lemos, A.; Lévy, P. (2010). *O Futuro da Internet: em direção a uma ciberdemocracia planetária*. São Paulo: Paulus.

Maltempi, M.V. (2008). Educação matemática e tecnologias digitais: reflexões sobre prática e formação docente. *Acta Scientiae* (ULBRA), *10,* 59-67.

Melo, M.T.L. (1999). Programas Oficiais para Formação dos Professores da Educação básica. *Educação & Sociedade, ano XX, 68*, Dezembro/99.

Pablos, J. (2006). A visão disciplinar no espaço das tecnologias de informação e comunicação. In: Sancho, J.M.; Hernández, F. *Tecnologias para transformar a educação.* Porto Alegre: ArtMed.

Ponte, J.P. (2000). Tecnologias da Informação e Comunicação na Formação de Professores: que desafios? *Revista Ibero Americana de Educação, 24,* 62-90, Lisboa, Set/Dez.

Ponte, J.P. (1998). Da Formação ao Desenvolvimento Profissional. *Actas do ProfMat*, 27-44, Lisboa: APM.

Ponte, J.P. (1997). *O Conhecimento Profissional dos Professores de Matemática*. Relatório final do Projecto: O saber dos Professores: concepções e práticas. Lisboa: DEFCUL.

Richit, A. (2010). *Apropriação do Conhecimento Pedagógico-tecnológico em Matemática e a Formação Continuada de Professores*. 279 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

Richit, A.; Maltempi, M.V. (2013). Pesquisas em Formação Inicial e Continuada de Professores: percursos e concepções emergentes. En: Borba, M.C.; Chiari, A. (Orgs.). *Tecnologias Digitais e Educação Matemática* (pp. 221-250). São Paulo: Livraria da Física.

Richit, A.; Pasa, B.C.; Lessa, V.E.; Tomkelski, M.L.; Schaeffer, A.G.; Rossi, A. (2012). Implicações da Formação continuada docente para a inclusão digital na escola pública. *Congresso Internacional TIC e Educação – TICEDUCA, 2., Lisboa, Portugal. Anais*.

Impactos das tecnologias digitais nas de aulas Matemática: microanálise nas aplicações em México, Estados Unidos, Portugal e Brasil

Eimard Gomes Antunes do **Nascimento**
Universidade de Aveiro
Portugal
prof.eimard@gmail.com
Jascqueson Alves de **Oliveira**
Universidade de Aveiro
Portugal
jascqueson@gmail.com
Miguel Jocélio Alves da **Silva**
Universidade Federal de São Carlos
Brasil
migel.silva@gmail.com
Joserlene Lima **Pinheiro**
Universidade Estadual do Ceará
Brasil
lenofortal01@gmail.com

Resumo

Nas últimas décadas, com o advento das tecnologias, a sociedade tem passado por uma reestruturação social e cultural, denominada de cibercultura. O uso das Tecnologias Digitais (TD) nas escolas tem crescido muito rápido. Neste contexto, o computador torna-se uma ferramenta cada vez mais presente no ensino. A finalidade deste trabalho é apresentar uma microanálise sobre os impactos das TD, aplicadas nas aulas a partir das reflexões das experiências de pesquisadores do México, Estados Unidos, Portugal e Brasil. Neste trabalho foram realizadas várias pesquisas das literaturas de uso das TD nas aulas de Matemática, em que o período escolhido foi os ultimos 15 anos, além disso, realizou-se análises sobre a escolha dos elementos e objetos de estudos e a relação do tema do objeto da pesquisa. Como resultado, verificou-se que a utilização das TD, tornou-se uma importante aliada na educação, evidenciando-se vantagens, para alunos e professores, aprimorando e aplicando em suas atividades profissionais, revelando motivação, competência e habilidade.

Palavras chaves: Tecnologias para educação. Educação Matemática e Tecnológica. TD na Educação. Matemática.

Introdução

De acordo com Nascimento (2012), vivemos numa sociedade cada vez mais automatizada. As máquinas já fazem parte do nosso dia a dia, onde fica difícil imaginar uma atividade da vida moderna que não seja, de alguma forma, mediada por um computador. A escola, como instituição social responsável pelo processo formal de aprendizagem e da construção de

conhecimentos, não poderia assumir um papel neutro neste contexto chamado sóciotecnológico em que vivemos.

O uso de recursos Tcnológicos Digitais (TD) no contexto escolar, constitui uma linha de trabalho que necessita se fortalecer na medida em que há uma considerável distância entre os avanços tecnológicos na produção de *softwares* educacionais livres ou pagos (proprietários) e a aceitação, a compreensão e a utilização desses recursos nas aulas pelos professores.

Nascimento (2013) afirma que é preciso desenvolver o conhecimento tecnológico mediante a utilização de novas tecnologias e as TD, como lousa digital, *Tablet*, computadores (*hardware* e *software*), redes de computadores (*internet*), programas (comerciais e educacionais), dentre uma infinidade de opções capazes de favorecer a educação para hipermídias. A escola se vê, então, diante da necessidade de redescobrir o seu papel social e pedagógico como unidade significativa no processo de crescimento e desenvolvimento da concepção de competência para a formação dos alunos.

Observa-se nos estudos como os de Albuquerque e Costa (2013), Guerrero e Kalman (2010), Machín (2008), Nascimetno (2012), Sant'Ana, Amaral e Borba (2012), indicam que o uso de tecnologias digitais para auxiliar o processo de ensino e aprendizagem em sala de aula, podem contribuirem para a compreensão dos conceitos e para sua colocação em prática, além do desenvolvimento de competências, como raciocínio lógico, dedução, e outros aspectos. A característica multimidiática, o acesso facilitado e a interação entre os sujeitos, oportunizada por ferramentas disponíveis na internet, desvelam novas possibilidades pedagógicas e novas formas de ensinar.

E para finalizar o raciocineo, Machín (2008) fala que,

> ... la importancia de la Tecnología como un medio para facilitar el aprendizaje de los estudiantes, haciendo énfasis en algunas de las potencialidades de las TIC para promover un aprendizaje más activo así como el trabajo cooperativo, motivar las explicaciones, indagar sobre los procesos de pensamiento de los estudiantes, etc. (Machín, 2008, p. 47).

O presente artigo vem mostrar uma microanálise e a socialização de práticas com o uso das TD para auxiliar o ensino e aprendizagem em sala de aula, mas considerando que é imperiosa a formação de professores para a apropriação e uso desses recursos.

Tecnologias e Educação

De acordo com Nascimento (2013), Machín (2008), Coutinho e Chaves (2002) existe uma discussão muito grande sobre o que seria Informática Educativa (IE) ou Tecnologia Educativa (TE) e qual o papel do computador nas escolas. O objetivo da IE ou TE é utilizar o computador como recurso didático para as práticas pedagógicas nos diversos componentes curriculares, incentivando a descoberta tanto do aluno quanto do professor e preocupando-se com "quando", "por quê" e "como" usar a informática para que a mesma contribua efetivamente para a construção do conhecimento.

De acordo com Machín (2008), Coutinho e Chaves (2002) existe uma discussão muito grande sobre o que seria Informática Educativa (IE) e qual o papel do computador nas escolas. O objetivo da IE é utilizar o computador como recurso didático para as práticas pedagógicas nos diversos componentes curriculares, incentivando a descoberta tanto do aluno quanto do professor e preocupando-se com "quando", "por quê" e "como" usar a informática para que a mesma contribua efetivamente para a construção do conhecimento.

Assim, a Informática na Educação, vai muito além de ensinar o aluno sobre competências necessárias para utilizar o computador. Utiliza-se o computador como um recurso transformador no ambiente de aprendizagem, fazendo com que os alunos explorem caminhos de resolução de forma rápida, integrada e motivante, rompendo barreiras entre os diferentes conteúdos do currículo escolar.

A utilização da Informática no contexto escolar significa desenvolver o conteúdo das disciplinas curriculares por intermédio do computador, de uma forma interdisciplinar. Este processo não depende somente dos recursos físicos, mas sim da conscientização por parte de toda a escola, principalmente do professor, para que se obtenha uma aprendizagem significativa e com qualidade.

Utilização das TDI em sala de aula e suas análises.

A utilização das TDI no contexto escola significa desenvolver vários sentidos nos estudantes, fazendo com que criem novas formas de visualização, de aprimoramento dos conteúdos das disciplinas curriculares e de partilha dos conhecimentos por intermédio do computador, de uma forma interdisciplinar e dinâmica. Nesse artigo será mostrado algumas aplicabilidades destas utilizações compartilhando as experiências dos pesquisadores/professores e suas análises.

Fitas e Costa (2008) efetuaram uma síntese sobre investigações realizadas nos Estados Unidos da América, no Reino Unido, na Austrália e na França sobre Quadros Interativos (QI) e o seu contributo para o ensino e aprendizagem da Matemática. O QI é um dispositivo de apresentação, no qual as imagens de um computador são projetadas através de um projetor digital podendo ser vistas e manipuladas. Os utilizadores podem interagir com o software no próprio quadro, usando uma caneta, mouse ou o dedo. Na educação, os professores podem preparar, previamente, os conteúdos das suas aulas, inserindo textos, imagens, vídeos, digitalizando documentos, etc... . Podem também utilizar no QI uma vasta gama de programas de apoio ao ensino, como por exemplo: folha de cálculo, software de geometria dinâmica, estatística e educativos baseados em aplicações matemáticas.

As mesmas autoras destacaram os resultados positivos comuns, no que respeita à motivação de alunos e professores, à modificação das metodologias utilizadas e à consecução de aprendizagens. Verificaram no final do estudo que a maioria prende-se com questões de motivação e de aproveitamento e não propriamente com questões específicas da Matemática. Consideraram que esta é uma área na qual ainda há muito a investigar, no sentido de dar uma maior garantia aos professores sobre as vantagens da utilização do QI na sala de aula. Apresentamos alguns depoimentos dos professores sobre o QI: permitem rever conceitos, os materias utilizados podem ser gravados, impressos e/ou colocados na internet, é um meio fácil e eficaz de usar os softwares de Matemática, aumenta a motivação e a atenção dos alunos.

Sampaio e Coutinho (2008) também investigaram a aplicação do QI numa aula de Matemática do 7º ano de escolaridade. Realizaram um estudo de caso com o objetivo de verificar a importancia da integração dos QI na escola e, deste modo, contribuir para melhorar a futura aplicação desta tecnologia em contexto educativo. Questionaram-se quais as potencialidades desta ferramenta no processo de ensino e aprendizagem e como a integrar numa aula de Matemática de modo a gerar aprendizagens significativas nos alunos. As autoras desenvolveram a investigação em duas turmas da Escola EB 2,3/S Padre Martins Capela em Portugal. O tema abordado foi as equações.

No total participaram 36 alunos, 50% de cada sexo, maioritariamente 81% com 12 anos de idade e 19% com 13 anos. A escala de Likert foi usada para a análise dos dados que variava entre excelente, bom e razoável sendo, distribuidos em sete questões fechadas e três questões abertas para uma análise mais profunda sobre as vantagens e desvantagens desta ferramenta. Os alunos consideraram que "a aula com o QI" era em uma das respostas excelente (50%) ou boa (50%) e maioritariamente que a "interação com o QI" foi excelente (69%). Sobre a interatividade proporcionada pelas atividades propostas, esta foi considerada excelente ou boa pela maioria dos alunos (92%), e consideraram ainda que o aprendizado foi bom ou excelente (100%) e que seria excelente a sua inclusão nas aulas de Matemática. As autores relataram ainda, que a utilização do QI reduz a ansiedade, aumenta os níveis de concentração e de flexibilidade no pensamento dos alunos.

Outras vantagens referidas pelos alunos:

- Facilidade de aprendizagem (67%);
- A possibilidade de efetuar jogos (38%);
- Incentivo à aprendizagem (38%);
- A não utilização do giz (31%), evitando alergias e sujar as mãos;
- A maior atenção que é exigida (31%);
- A possibilidade de trabalhar com imagens, jogos, aceder à Internet e realizar atividades variadas em simultâneo e dinâmico (25%).

As desvantagens apontadas pelos alunos foram:

- As falhas técnicas (67%);
- Aumento do consumo de energia (17%);
- Elevado preço de um QI (8%);
- A escrita com a caneta, por vezes, ser um pouco lenta (8%) e
- A possibilidade de distração dos alunos (8%).

As autoras concluiram que a utilização do QI no processo de ensino e aprendizagem mostrou-se, nesta experiência, uma grande ferramenta de aplicabilidade na Matemática, evidenciando-se vantagens quer para os alunos quer para os professores.

Albuquerque e Costa (2013) avaliaram e discutiram o uso das TDI no espaço escolar, analisando suas possibilidades e implicações na forma de aprender e ensinar. Apresentaram a análise e sistematização dos dados, pontuando o uso do Laboratório de Informática (LI) na escola e sua relação com o currículo escolar. Em algumas atividades no LI, os aplicativos foram utilizados como recursos motivadores e acessórios para ilustrar as aulas. Consideraram que não se pode desprezar o potencial desses aplicativos, tornando as atividades mais interessantes e atrativas para os estudantes e tiveram como considerações finais relatando que:

> O uso das tecnologías de informações e comunicações é uma prática que vem sendo implementada e incorporada à rotina da escola. Presenciamos diferentes formas de uso, por meio de utilização do LI. No entanto, apesar da tentativa dos professores inserirem práticas mais inovadoras, a escola ainda é presa a uma abordagem tradicional, resultado de um

> planejamento funcional e um currículo, que ainda organiza seus conteúdos por disciplinas, que, na maioria das vezes, caminham isoladamente presa a tempos e espaços. (Albuquerque & Costa, 2013, p. 310).

Pinkwart, Hoppe, Milrad e Perez (2003), com base na experiência e na orquestração de cenários de aprendizagens colaborativas usando tecnologia de computação *ubíqua*, usou-se três abordagens para estender os ambientes de modelagens e discussões co-construtivas. Os Personal Digital Assistants (PDAs) conectados aos computadores e ao QI, através de uma rede sem fio, foram utilizados para aplicação da experiência. A idéia de uma "sala de aula integrada por computador" foi praticamente elaborada e colocada em prática em conjunto com o projeto NIMIS Europeia (Hoppe *et al.,* 2000), onde os autores relataram que,

> The most evident and concrete result of NIMIS is a classroom installation at a primary school which features special hardware such as an interactive whiteboard and pen based tablets embedded in the pupils desks in a networked environment with educationally designed groupware functions. (Pinkwart et al., 2003, p. 383).

O primeiro passo do experimento foi uma aplicação que é uma ferramenta digital de anotação, o segundo replica um sistema de modelação no PDA e o terceiro faz uso de um leitor óptico sem fios para além do PDA. Todos eles fornecem mecanismos de sincronização "leves" em ambientes baseados em computadores pessoais (PC). O projeto geral e as estratégias de implementação para essas extensões são discutidos em termos de modelagem, vista (exibição) e controlador (modificação). O apoio colaborativo, aplicados em sala de aula e fora da sala (ao ar livre), teve parte integrante no processo educativo, permitindo aos alunos trocar ideias e hipóteses *peer-to-peer* (acesso compartilhado) entre as aplicações móveis e para projetar os conteúdos usou-se o QI, a fim de iniciar em sala de aula a discussão sobre soluções e modificações específicas.

Nascimento e Trompieri Filho (2012) avaliaram o uso do *software* livre Geogebra na aplicabilidade no ensino de geometria. Mostraram o dinamismo do programa e categorizaram-no como Geometria Dinâmica e Interativa (GDI), que permitiu a implementação computacional da "geometria tradicional", substituindo as tecnologias régua, compasso e esquadro. Nessa pesquisa usou-se a apresentação do tema "triângulos e suas classificações". Os pesquisadores destacaram a importância do referencial teórico adotado e da utilização do *software* como um laboratório de simulação para a aplicação do assunto na prática. De maneira geral, os alunos consideraram a utilização do Geogebra como sendo de fácil compreensão e assimilação do conteúdo. Os autores relataram na conclusão da pesquisa que,

> O Resultado foi uma surpresa agradável, pois a maioria dos alunos relatou a grande facilidade do programa, de sua usabilidade e eficiência, alguns acharam mais fácil de entender pelo software do que na sala de aula, pois não necessitaria de cálculos, lhe mostra uma resposta rápida e correta, o que facilita na criação e solução através de poucos cliques do mouse. (Nascimento & Trompieri Filho, 2012, p. 6).

Guerrero e Kalman (2010) pesquisaram sobre a inserção das tecnologias em sala de aula. Realizaram uma avaliação de campo, acompanhando os professores de quatros escolas secundárias, sendo duas na cidade do México e duas em Mérida, Yucatán. Os autores relataram que em uma primeira abordagem para os usos da tecnologias, em algumas escolas visitadas, documentaram cenários que podem parecer "equivocado" e um pouco "sugestivo" quanto à utilização das TD em atividades de aprendizagem ou na interação entre alunos e professor. Citaram como exemplo a situação dos alunos que muitas vezes tinham a obrigatoridade de ler e copiar as informações da tela do computador ao caderno, rotina pedagógica normalmente feito

com o livro ou com materiais que obtiveram informações. Ou, em outra situação em que o professor projetava uma apresentação (confeccionada em MS-*Power Point* ou no formato PDF) e os alunos liam em voz alta ou em silêncio, cada um em um computador, enquanto poderia realizar a leitura num livro didático ou em grupo. A atividade/participação do aluno neste contexto era limitado e parecendo a ser reduzida para um receptor e um copiador de informações.

Os mesmos autores verificaram que a intenção dos professores em muitos dos casos observados, é incorporar a tecnologia às suas práticas de ensino já existente, e parece ter pouca ou nenhuma reflexão sobre a utilização da tecnologia tornar um meio para alcançar a transformação das práticas e rotinas que vem sendo adotadas a anos. Para os alunos, pequenas alterações foram observadas nas possibilidades de usar o potencial das tecnologias, embora essas mudanças sejam pequenas, mostraram que os alunos compreenderam os benefícios e a potencialidade que as tecnologias oferecem na melhoria da qualidade das aulas.

Sant'ana, Amaral, e Borba (2012) apresentaram uma pesquisa que é o resultado de cursos online de formação continuada de professores, concebidos a partir de uma parceria entre a UNESP e uma rede nacional de escolas de ensino básico. Os cursos buscavam familiarizar os professores de Matemática com os recursos das TD, especificamente dois softwares, o Geometricks e o Winplot, na utilização em sala de aula.

Neste contexto, os cursos foram desenvolvidos por meio de encontros virtuais síncronos realizados aos sábados com duração de duas horas por videoconferência. Para desenvolver um trabalho com conteúdos de geometria, os cursos foram distribuídas em três edições do "Geometria com Geometricks" e, posteriormente, um curso de estrutura semelhante foi realizado em quatro edições, com foco no estudo de Funções: "Funções com Winplot". Para contemplar todos os interessados, os cursos foram realizados de 2004 até 2008, e envolveram mais de cem docentes, sendo que vários fizeram os dois cursos. O trabalho apresentado foi desenvolvido segundo a abordagem qualitativa de pesquisa, no qual os dados foram obtidos, em um primeiro momento, a partir dos relatórios finais dos cursos e de questionário encaminhado via e-mail aos docentes que cursaram, pelo menos, um dos cursos.

Os autores observaram que nos dois anos inicias em que aplicaram os cursos em 3 turmas, com o total de 77 inscritos, obtiveram cerca de 13% de evasão, enquanto nos últimos 3 anos (2005-2008), formaram 4 turmas, com o total de 99 inscritos e com 9% de evasão. De modo geral, o índice de evasão dos cursos pode ser considerado baixo, quando comparado com outras experiências online que ocorreram com outros pesquisadores no país. Esse fato levou a avaliar o curso considerando a inserção das TDI de forma positiva na prática profissional dos professores. Por outro lado, todos sabemos do "efeito novidade", em que uma inovação pode ser utilizada em um primeiro momento e não ser utilizada posteriormente. Os autores concluíram que, a maioria dos professores que terminaram os cursos conseguiram inserir o uso do computador em suas atividades profissionais diárias.

Considerações Finais

A Tecnologia digital nas aulas de Matemática é uma atividade que os estudantes realizam de uma forma dinâmica e orientada pelos professores, cujos sentimentos de auto-eficácia influenciam fortemente o seu rendimento. Para isso, a utilização das TD, descritas nas experiências aplicadas, no processo de ensino e aprendizagem, mostrou-se nesta microanálise, uma grande aliada na educação, evidenciando-se vantagens, quer para os alunos quer para os professores, tais como a possibilidade de registro e posterior envio dos materiais por e-mail,

promovendo o interesse para a realização de atividades que sejam: desafiadoras, motivadoras, interessantes, dinâmicas e interativas.

Com auxílio dos computadores e QI que se utiliza a escrita livre, a partir da utilização de uma caneta sem a necessidade do teclado, que possibilita elaboração de trabalhos com imagens, hipertextos, jogos, acesso à Internet e a realização de atividades variadas simultaneamente. Assim, tanto os professores como os alunos podem aprender e partilhar os conhecimentos e as práticas adquiridas.

No entanto, é importante salientar que o uso do software em si, não prova nenhum teorema matemático, soluciona conceitos e resolve problemas, pois, a matemática, enquanto linguagem utiliza–se do método dedutivo. Tal prática é de grande valia quando bem utilizada, pois facilita a internalização do conhecimento exposto aos alunos.

Diante disso, verificou-se que a utilização das TD se constitui um caminho promissor para alunos e professores aprimorarem suas habilidades e competências com uso das novas tecnologias digitais, implementadas para o desenvolvimento científico, tecnológico, social e cultural na sociedade.

Referências

Albuquerque A. M. C. & Costa R. R. R. (2013). Experienciando práticas educativas no laboratório de informática. In *Encontro da Linha de Educação Currículo e Ensino da Universidade Federal do Ceará* (1), 307-311. Brasil: Imprece.

Fitas, E. S. & Costa C. (2008). Quadros Interactivos: Relato de Investigações Realizadas no âmbito do Ensino e Aprendizagem da Matemática. *Revista Tecnologia e Educação Matemática, 15*, 221-243.

Guerrero, I. & Kalman, J. (2010). La inserción de la tecnología en el aula:estabilidad y procesos instituyentes en la práctica docente. *Revista Brasileira de Educação, 15*(44), 213-229.

Heckler, V., Sariava, M..F. O. & Oliveira Filho, K. de S. (2007). Uso de simuladores, imagens e animações como ferramentas auxiliares no ensino/aprendizagem de óptica. In *Revista Brasileira de Física, 29*(2), 267-273.

Machín, M. C. (2008). CAS (Computer Algebra System) En La Enseñanza Y Aprendizage del Cálculo. Algunos Resultados de Investigación. In *Revista Caderno de Pesquisa, 111*, 47-71.

Nascimento, E. G. A. & Trompieri Filho, N. (2012). Avaliação do uso do Software Geogebra no ensino de Geometria: Reflexão da Prática na Escola. In *XII Encontro de Pós-Graduação e Pesquisa da Unifor(12)*,1-6, Brasil: Unifor.

Nascimento, E. G. A (2013). A importância da informática educativa nas séries iniciais. *Encontro da Linha de Educação Currículo e Ensino da Universidade Federal do Ceará* (1), 295-300. Brasil: Imprece.

Pinkwart, N., Hoppe, H.U., Milrad, M. & Perez, J. (2003). Educational scenarios for cooperative use of Personal Digital Assistants. *Journal of Computer Assisted Learning 19*, 383-391.

Sampaio, P. A. S. R. & Coutinho, C. P. (2008). Aplicação do Quadro Interactivo na Aprendizagem de Equações. In XVII Encontro de Investigação em Educação, 344-356.

Sant'ana, C. C., Amaral, R. B. & Borba, M. de C. (2012). O Uso de Softwares na Prática Profissional do Professor de Matemática. *Revista Ciência & Educação, 18*(3), 527-542.

Instrumentalización de la elipse utilizando Geogebra

José Carlos **León** Ríos
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú
a19801146@pucp.edu.pe
Jesús V. **Flores** Salazar
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú
jvflores@pucp.pe

Resumen

Este artículo forma parte de la tesis del primer autor, acerca de los procesos de instrumentalización de la elipse haciendo uso del Geogebra. La experiencia estuvo dirigida a los alumnos del primer ciclo del curso de Matemática I de una universidad privada de la ciudad de Lima. El proceso de instrumentalización se basó fundamentalmente en el enriquecimiento de las propiedades de la elipse durante una secuencia de actividades, las cuales permitieron correlativamente el surgimiento de la elipse como instrumento. Como referencial teórico, usamos el enfoque instrumental de Rabardel , con el que logramos analizar las acciones de los alumnos, mediante la identificación de esquemas pre existentes y otros posibles esquemas de utilización que los alumnos construyeron o movilizaron cuando interactuaron con la elipse, como la condición geométrica de la elipse, la relación entre sus parámetros, la excentricidad, la ubicación de los vértices, focos, vinculando, la representación gráfica a la expresión algebraica correspondiente.

Palabras clave: Geogebra, enfoque instrumentalización, instrumentación, génesis instrumental, esquemas de uso, esquema de acción instrumentada

Introducción

Nuestro trabajo de investigación es una propuesta paralela al proceso de enseñanza y aprendizaje de la elipse y que incluye construcciones y representaciones geométricas, que como tal, puede ser integrado al enfoque tradicional de la geometría analítica.

En ese sentido, algunas investigaciones como la de Fernández (2011), reconoce distintas categorías de problematización, como la tendencia a marginar curricularmente las cónicas del contenido geométrico, la omisión de las construcciones geométricas y la escasez de estudios sobre lugares geométricos. En dicha investigación el autor sugirió la necesidad de fomentar las construcciones geométricas de dichas curvas e intégralas al enfoque analítico actual. De igual forma, el trabajo de Santa (2011), la cual busca una complementariedad de la enseñanza tradicional de la geometría analítica, ya que analiza la comprensión de la elipse como lugar geométrico a través de un objeto concreto, el doblado del papel. Además, con el objetivo de obtener la condición geométrica de la elipse, la investigadora realizó construcciones previas de los lugares geométricos de las mediatrices y circunferencias.

A partir de nuestra experiencia como docentes, hemos detectado que dicho problema también es percibido en los alumnos de la escuela de Arquitectura donde realizamos el estudio. Es así que hemos observado, una desatención en las construcciones y lugares geométricos en los programas curriculares, lo cual ocasiona la restricción del uso de las construcciones geométricas que los alumnos traen consigo, como el trazo de la mediatriz, la determinación del punto medio de un segmento, que en otro caso, permitirían el reforzamiento y la reutilización de estos constructos geométricos. Pensamos también que la permanente vinculación entre las secciones cónicas y el sistema de coordenadas cartesiano, contribuye a que el alumno considere a la elipse como una curva dependiente de dicho sistema, y que en otros contextos de referencia, o incluso prescindiendo de éstos, el alumno no considere las propiedades de dicha curva como propiedades invariantes Finalmente, debido a la permanente predominancia algebraica en los primeros contactos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la elipse, reconocemos la necesidad de promover el fomento de las construcciones geométricas en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Es necesario mencionar el uso del Geogebra, como ambiente de la geometría dinámica (AGD), el cual tuvo un rol protagónico en nuestra investigación, por tratarse de una fuente de apoyo en la enseñanza y aprendizaje de la elipse. En relación al uso paulatino de dicho AGD, Laborde, Kynigos, Hollebrands y Strasser (2006) señalan que en las últimas décadas, se observa involucrada a toda la comunidad educativa y en la que estamos inmersos los docentes como protagonistas del cambio. Precisamente, los autores indican, que existe una carencia de representaciones gráficas vinculadas a sus significados geométricos y que dichos problemas con los que la enseñanza se ha enfrentado en las pasadas décadas, está ligada a la dualidad de los procesos axiomáticos deductivos y el de las representaciones gráficas – geométricas, empíricas. En ese sentido, dichos investigadores, mencionan que algunos intentos en la enseñanza y aprendizaje de la geometría han llevado a otros investigadores a centrarse en el rol que juegan las representaciones gráficas proporcionadas por los ambientes de geometría dinámica.

Aspectos metodológicos

La metodología seleccionada para nuestra investigación fue la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), la cual nos permitió mostrar las conclusiones de nuestras actividades, y confrontar nuestros supuestos elaborados en la fase de concepción y análisis *a priori*, con los datos recolectados en la fase de experimentación, con lo cual pudimos elaborar un análisis *a posteriori* y una validación interna. En esta investigación, realizamos un análisis preliminar en la que describimos: el desarrollo histórico de la elipse, los conocimientos previos requeridos por el alumno y los textos que la institución consigna para el desarrollo del curso.

Precisamente, en la aproximación histórica, consideramos a Boyer (1987) como referencial histórico, e incluimos las primeras manifestaciones griegas hasta sus aplicaciones en el campo de la astronomía, en el siglo XVII aproximadamente. En la parte cognitiva, elaboramos una prueba de diagnóstico en la que consideramos como conocimiento preexistente: el lugar geométrico de la circunferencia, parábola, mediatriz de un segmento y propiedades de un triángulo isósceles. Finalmente, en la secuencia didáctica, elaboramos una revisión a los textos referidos al capítulo de elipse, los cuales mostraron cómo se continúa privilegiando el enfoque tradicional de la geometría analítica.

Marco teórico

Con el fin de analizar en este artículo, el enriquecimiento de la condición geométrica de la elipse por parte de los alumnos, hemos considerado presentar el enfoque instrumental de Rabardel (1995). En ese sentido, describimos algunos términos que hicimos uso en el presente artículo, y que consideramos nos permitirán analizar cómo los alumnos interactúan con la elipse.

Señala Rabardel (1995), indica que toda situación de actividad o de utilización de artefactos, instrumentos, existe siempre una tríada de elementos relacionados de manera explícita o implícita, formada por el sujeto, el instrumento y el objeto, siendo el instrumento un intermediario entre el sujeto y el objeto.

El sujeto, indica el autor, puede entenderse como un usuario, alumno, operario, trabajador, agente, individuo, grupo de individuos o estudiantes que desarrollan una determinada acción con un instrumento. El instrumento puede ser una herramienta, máquina, incluso una propiedad, que sirve como mediador entre el sujeto y el objeto a donde va dirigida la acción con ayuda del instrumento. El artefacto en cambio, no especifica un tipo de relación particular con el objeto al cual se dirige. El autor señala que el artefacto es elaborado para inscribirse en actividades intencionales, siendo la intencionalidad la causa de su existencia. Es decir, que el artefacto, material o no, puede transformar a los objetos y concreta una solución a un problema o a una clase de problemas sociales. Entonces, el artefacto solamente pasará al estado de instrumento, cuando el sujeto le asigne los esquemas de utilización correspondientes, es decir esquemas relacionados con la utilización de un artefacto. Por lo tanto dichos esquemas tendrán una relación dual: por un lado, se relaciona con los artefactos pues los convierten en medios; y por otra parte, con los objetos sobre los cuales estos artefactos permiten actuar. Por lo tanto, el instrumento no existe en sí, es el resultado de asociar el artefacto a la acción del sujeto, cuya característica principal sea la de adaptarse al sujeto y al objeto. El autor, señala que el término instrumento designa el artefacto en situación, inscrito en su uso, en una relación instrumental entre dos entidades que son el sujeto, y el objeto sobre el cual se actúa.

Así, de acuerdo con Salazar (2009), con relación a la investigación de Rabardel, dichos esquemas comprenden diferentes variantes. La primera, referida a las acciones que se focalizan en las características, propiedades y actividades específicas del artefacto, llamadas esquemas de uso (EU) y la segunda, que son las acciones orientadas hacia el objeto de la actividad, hacia la tarea principal del sujeto, llamadas esquemas de acción instrumentada (EAI). Además, la investigadora indica que un mismo esquema puede, dependiendo de la situación, ser un esquema de uso y en otra circunstancia un esquema de acción instrumentada. En ese sentido, León (2014), muestra un ejemplo en su investigación de la elipse, indica que si se desea hallar la longitud del lado recto en términos de sus semiejes, la condición geométrica de la elipse, podría ser un esquema de uso o podría tratarse también de un esquema de acción instrumentada para un alumno que inicia el estudio de la elipse.

De igual forma, Rabardel (1995) señala que es necesario considerar un esquema adicional a los mencionados, y describe al esquema de actividad colectiva instrumentada (EACI) que corresponde a la utilización de un instrumento en un contexto de actividades compartidas con otros usuarios, ya que como individuos no estamos solos, sociabilizamos constantemente, interactuando con otros individuos incluso con los creadores del artefacto los cuales implícitamente forman parte del surgimiento de nuestros esquemas.

En ese sentido, el investigador indica que las dos dimensiones que componen el instrumento, artefacto y esquema, están relacionadas pero mantienen independencia, es decir un esquema puede aplicarse a otros esquemas de la misma clase, clases vecinas o diferentes. Por ejemplo, según León (2014) los esquemas de utilización de una elipse pueden ser llevados también a un esquema de clase vecina como el de la hipérbola. De manera correlativa, un artefacto puede ser insertado en otros esquemas de utilización como la elipse insertada en la construcción de elipsoides.

Finalmente, Rabardel (1995) define la Génesis Instrumental como la elaboración o construcción de un instrumento, que permite la continuidad de las acciones en los distintos artefactos, materiales o simbólicos, por parte de los sujetos. Existen dos procesos que contribuyen de manera solidaria, según el autor, al surgimiento y a la evolución del instrumento, y los cuales se distinguen por la orientación de la actividad: las acciones que se dirigen a la componente artefactual o aquellas que se orientan hacia el sujeto mismo.

Acerca del proceso de instrumentalización, compuesto por las funciones constitutivas del artefacto (definidas por el diseñador), las funciones constituidas (elaboradas por el usuario) y las nuevas funciones inscritas en una nueva clase de artefactos a partir de estas funciones constituidas por el usuario. El usuario elabora dichas funciones porque sus acciones están volcadas hacia la componente artefactual, de tal forma que surgen nuevas características, producen e instituyen funciones y le atribuyen propiedades al artefacto.

De manera similar, el proceso de instrumentación, se caracteriza cuando la actividad está orientada hacia el mismo sujeto. Corresponde a la emergencia y evolución de los esquemas de utilización y de acción instrumentada. Se inicia cuando paralelamente al descubrimiento progresivo de las propiedades, nuevos esquemas se van constituyendo, los cuales se acomodan, se coordinan y se asimilan con otros esquemas ya constituidos, dichos esquemas evolucionan y luego son movilizados en otras situaciones. En este ciclo participan los modos operatorios (previstos por los diseñadores), los esquemas de utilización (elaboradas por los usuarios) y sus nuevos modos de operar, elaborados por los esquemas que movilizaron o elaboraron los usuarios.

Análisis de la experiencia desarrollada

La experiencia que presentamos en este artículo, trata de la condición geométrica de la elipse y fue desarrollada en las dos primeras actividades de nuestro experimento. En esta experiencia participaron seis alumnos del curso de Matemática I, los cuales conformaron tres equipos integrados por dos alumnos. Hicimos un análisis *a priori* y *a posteriori* de dos de los tres equipos.

Nuestro experimento fue canalizado en tres encuentros, cada uno de noventa minutos. El primer encuentro, el cual no fue foco de nuestra investigación, fue dirigida a explorarlas herramientas del Geogebra; en el segundo encuentro, los alumnos hicieron surgir la condición geométrica de la elipse y enriquecieron las propiedades de sus otras componentes, en el tercer encuentro, se vinculó la elipse a los ejes coordenados, se le identificó con una expresión algebraica y se elaboró una aplicación animada de la elipse para movilizarla como instrumento.

La condición geométrica de la elipse, razón de la experiencia de este artículo, indica que *dado un punto de la elipse, la suma de sus distancias a otros dos puntos fijos es una constante*, *igual a la longitud del eje mayor.* Dicha componente artefactual, fue desarrollada en dos

actividades y luego construida como un posible esquema de acción instrumentada (EAI), que evolucionó como instrumento para determinar la relación entre los parámetros de la elipse. Para constituir el EAI de la condición geométrica, los alumnos movilizaron sus esquemas de uso (EU): mediatriz de un segmento, circunferencia, triángulo, entre otros, los cuales fueron consignados en el análisis cognitivo como saberes previos al tema de la elipse.

Además verificamos que los alumnos estaban instrumentados en relación a la mediatriz de un segmento, pues movilizaron la propiedad que indica que *si un punto pertenece a una mediatriz de un segmento entonces equidista de los extremos del segmento.*

Respecto a la primera actividad, los alumnos que ya estaban instrumentados con la circunferencia como lugar geométrico, continuaron instrumentalizándola, debido a que la enriquecieron con una nueva propiedad, que fue construida movilizando esquemas de uso como la mediatriz de un segmento, circunferencia y triángulo isósceles. A continuación se detalla una breve descripción al respecto.

En la figura 1, se muestra una circunferencia con centro en C, *que contiene al punto interior fijo* Q. Se les pide determinar un *punto* A *sobre el radio* $\overline{CP}$, *de tal forma que dicho punto equidiste de P y Q.*

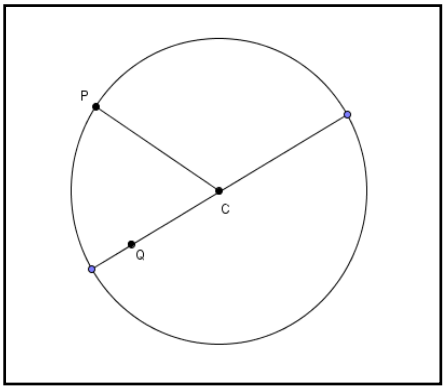


Figura 1. Actividad 1

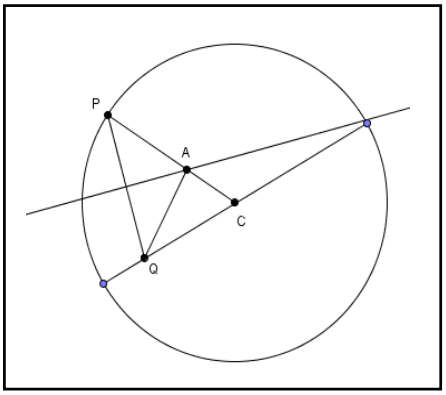


Figura 2. El punto A

Ambos equipos, no tuvieron dificultades en movilizar sus esquemas previos. De acuerdo al análisis *a priori,* movilizaron la propiedad de la mediatriz del segmento $\overline{PQ}$, como un *conjunto de puntos que equidistan de los extremos de dicho segmento*, la noción de segmento, el uso de algunas herramientas del Geogebra, como la intersección de objetos, el trazo de segmentos, y de la recta mediatriz, de acuerdo a lo previsto en el análisis *a priori* de la Ingeniería Didáctica.

En la figura 2, los alumnos de ambos equipos determinaron el punto *A* correspondiente. Luego movilizaron sus esquemas de uso pre existentes de triángulo y clasificaron al triangulo APQ como triángulo isósceles.

En las figuras 3 y 4, los alumnos desplazaron el punto P sobre la circunferencia de tal forma que el triángulo APQ mantuvo sus característica invariantes, es decir los lados $\overline{AP}$ y $\overline{AQ}$ permanecieron iguales, por lo que señalaron que resulta lo mismo *sumar las medidas de los segmentos* $\overline{CA}$ y $\overline{AP}$ *que las medidas de los segmentos* $\overline{CA}$ y $\overline{AQ}$, *siendo además esa suma una constante.*

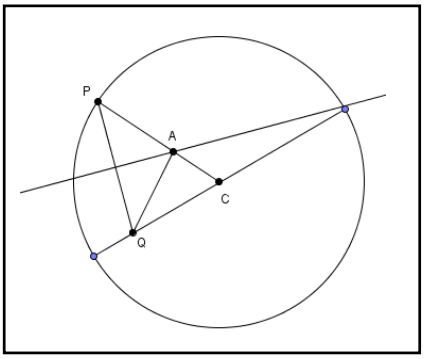


Figura 3. 1° Desplazamiento de P

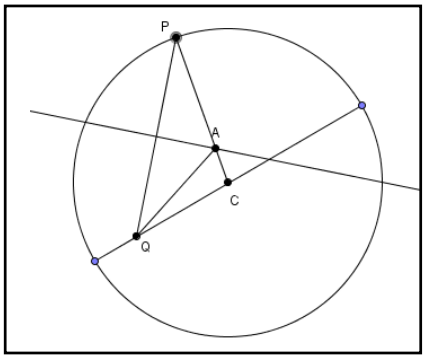


Figura 4. 2° Desplazamiento de

De acuerdo al análisis *a priori*, ambos equipos construyeron un posible esquema de acción instrumentada, específicamente la existencia de un punto A perteneciente al radio CP de la circunferencia con centro en C y un punto interior Q, de tal forma que resulta lo mismo sumar la medida de los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{AP}$ que la medida de los segmentos $\overline{CA}$ y $\overline{AQ}$.

La figura 5, representa la segunda actividad, en la que creemos hubo indicios para suponer que la circunferencia continúo instrumentalizándose porque vincularon el punto A a la trayectoria de una elipse haciendo uso de la herramienta rastro del Geoegebra,,

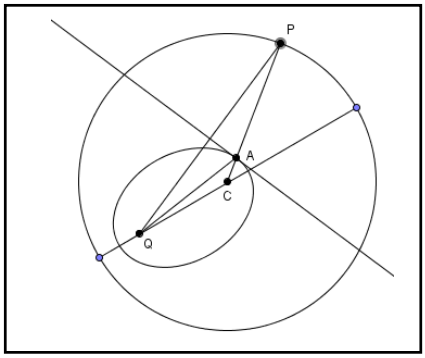


Figura 5. Trayectoria de la elipse

Pero además pensamos que el artefacto elipse dejó de ser un artefacto abstracto para los alumnos pues creemos que hay reconocimiento que *la suma de las distancias de los segmentos* $\overline{CA}$ y $\overline{AQ}$ *es una constante,* iniciando así la elipse el proceso de instrumentalización. Los esquemas que movilizaron fueron los de noción de circunferencia, de triángulo isósceles y mediatriz de un segmento. La herramienta "Activa Rastro¨ del Geogebra permitió la interacción con la elipse, de acuerdo al análisis *a priori*

Destacamos que los esquemas de acción colectiva instrumentada, fueron producto de la emergencia que detectamos del trabajo colectivo de los alumnos y que fueron ejemplificadas en muchos pasajes de nuestra secuencia de actividades cuando los integrantes de cada equipo intercambiaron esquemas de utilización y ejemplificaron en la redacción de sus textos.

Posteriormente, en la tercera actividad, los alumnos continuaron instrumentalizando la elipse, enriqueciéndola con las propiedades referidas al eje focal, eje mayor, eje normal y eje menor. De este modo, dicha condición geométrica de la elipse continuó instrumentalizándose, ya

que la enriquecieron con otra característica, y los alumnos indicaron que *la suma de las medidas de los segmentos* $\overline{PF_1}$ y $\overline{PF_2}$ *corresponde a la longitud del eje mayor de la elipse*.

Habría que agregar, que este nuevo instrumento permitió expresar la condición geométrica de la elipse omitiendo el radio de la circunferencia. Además, la condición geométrica de la elipse evolucionó de EAI a EU, ya que permitió construir otro nuevo esquema en términos de los parámetros de una elipse, cuya *relación geométrica se expresa como* $a^2 = b^2 + c^2$. Este descubrimiento progresivo de las propiedades de la elipse le va dando cierto significado al instrumento elipse.

Conclusiones

Por medio de las acciones de los alumnos en las actividades que fueron orientadas a determinar la condición geométrica de la elipse, logramos identificar los posibles esquemas de utilización que construyeron o movilizaron cuando trabajaron dicha secuencia de aprendizaje. Por tal motivo, creímos conveniente hacer uso del Enfoque Instrumental como referente para la orientación de nuestra investigación.

Detallamos que en la actividad 1 los alumnos continuaron instrumentalizando la circunferencia al enriquecerla con una propiedad adicional, es decir *dada circunferencia con centro* C*, que contiene al punto interior fijo* Q*, es posible encontrar un punto* A *en el radio* $\overline{CP}$*, de tal forma que la suma de las medidas de los segmentos* $\overline{CA}$ y $\overline{AQ}$ sea *una constante,* movilizando para ello esquemas de uso pre existentes como la mediatriz de un segmento, circunferencia y triángulo isósceles.

En la actividad 2, dicha propiedad de la circunferencia evolucionó de esquema de acción instrumentada a esquema de uso ya que la movilización del punto *A* favoreció la identificación del lugar geométrico de la elipse, iniciándose así el proceso de instrumentalización de dicha curva.

Pensamos que el proceso de la Génesis Instrumental sucedió cuando la propiedad descrita en la actividad 1 se movilizó como instrumento para favorecer la identificación del lugar geométrico de la elipse. Este descubrimiento progresivo de las propiedades de la elipse le va dando cierto significado al instrumento elipse.

La elipse dejó de ser un artefacto abstracto porque los alumnos señalaron que *la suma de sus distancias desde un punto de la elipse, a otros dos puntos fijos en el interior de dicha curva, es una constante igual al radio de la circunferencia.* Debemos resaltar que la movilización de los esquemas por parte de los alumnos de cada equipo, fueron coordinadas y adaptadas como esquemas de acción colectiva instrumentada.

Mencionamos además que el Geogebra fue un programa integrador en la enseñanza y aprendizaje de la elipse. El conocimiento progresivo de las herramientas y comandos, en cuanto a sus potencialidades, permitieron que los alumnos interactuaran con la elipse. Por ejemplo, el rastro que traza un conjunto de puntos que cumplen determinada propiedad y que fue usada para marcar el lugar geométrico de los puntos que conformaron la elipse.

Finalmente, queremos acotar que aunque algunas de las funciones señaladas en la elipse, fueron conservadas de manera durable para cierta clase de acciones, dichas funciones deben ser observadas nuevamente en actividades posteriores para comprobar dicho nivel de instrumentalización.

Reconocimiento

La presente investigación se realizó en el marco del proyecto internacional: *Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática em Ambientes Tecnológicos entre los grupos de investigación Didáctica de las Matemáticas- DIMAT/PUCP e Processos de Ensino e Aprendizagem de Matemática - PEAMAT/PUC-SP.*

Referencias y bibliografía

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L. & Gómez, P. (1995*). Ingeniería didáctica en Educación matemática.Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemática,* 38, 97-140. México, DF. Grupo Editorial Iberoamérica.

Boyer, C. (1987). *Historia de la matemática.* Versión española de Mariano Martínez Pérez. Alianza Editorial, Madrid, España

Fernández, E. (2011). *Situaciones para la enseñanza de las cónicas como lugar geométrico desde lo puntual y lo global. Integrando Cabri Géometre II Plus,* (Tesis de Maestría en Educación Matemática). Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Santiago de Cali, Colombia.

Laborde, C., Kynigos, C., Hollebrands, K. and Strasser, R. (2006). *Teaching and Learning Geometry with Technology.* Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education A. Gutiérrez, P. Boero (eds.), 275–304, Sense Publishers. Recuperado de https://www.sensepublishers.com/media/457-handbook-of-research-on-the-psychology-pdf.

León, José (2014). *Estudio de los procesos de instrumentalización de la elipse mediado por el Geogebra en alumnos de arquitectura y administración de proyectos.* (Tesis de Maestría en Educación Matemática). Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima, Perú.

Rabardel (1995). *Los hombres y las tecnologías. Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos*. Traducido por M. Acosta. Colombia: Universidad Nacional de Santander. Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas.

Salazar, J. V. F. (2009). *Gênese instrumental na interação com Cabri 3D: um estudo das transformações geométricas no espaço.* (Tesis de doctorado en Educación Matemática). Programa de Estudos Pós Graduados em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, Brasil.

Santa, Z. (2011). *La elipse como lugar geométrico a través de la geometría del doblado de papel en el contexto de Van Hiele.* (Tesis de Maestría en Educación Matemática). Universidad de Antioquía, Facultad de Educación, Departamento de Educación Avanzada. Medellín, Colombia.

Interpretación de fenómenos de crecimiento. Sus representaciones y el uso de herramientas digitales.

Carolina **Guerrero-Ortiz**
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso
Chile
c_cguerrero@yahoo.com.mx
Hugo **Mejía** Velasco
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
México
hmejia@cinvestav.mx
Matías **Camacho-Machín**
Universidad de la Laguna
España
mcamacho@ull.es

Resumen

Presentamos algunos resultados de la puesta en escena de una secuencia de enseñanza, cuyo objetivo se centró en el desarrollo de habilidades en los estudiantes para interpretar fenómenos que pueden ser descritos por medio de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO). Los resultados muestran cómo a través del estudio de la representación matemática de algunos fenómenos es posible que los estudiantes desarrollen diferentes estrategias de análisis, las cuales les ayudan a comprender el comportamiento del fenómeno y las conexiones entre las representaciones asociadas. Se observó una amplia presencia de los registros de representación como medio de interpretación y establecimiento de conexiones entre el modelo matemático, dado por la ecuación diferencial ordinaria y el contexto correspondiente.

Palabras clave: Interpretación, representaciones, ecuaciones diferenciales ordinarias, herramientas digitales.

Introducción

Diferentes investigaciones señalan la problemática existente relacionada con el aprendizaje de las Ecuaciones Diferenciales (Arslan, 2010a; 2010b; Rasmussen, 2002; Guerrero, et. al., 2010; Hernández, 1995), en ellas se hace referencia a los obstáculos en el aprendizaje, generados por el privilegio de la enseñanza de estrategias algorítmicas sobre el desarrollo de estrategias de razonamiento conceptual. De manera que, el aprendizaje y las habilidades adquiridas por los estudiantes se determinan por la naturaleza de la actividad matemática en el aula de clase.

Considerando lo anterior, en esta investigación estructuramos un conjunto de actividades de enseñanza dirigidas al desarrollo de habilidades en los estudiantes para interpretar los elementos contenidos en la expresión algebraica de una Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO), en especial nos centramos en ecuaciones que modelan el crecimiento poblacional. En este contexto, nos preguntamos *¿Cómo asocian los estudiantes el contexto de un fenómeno de*

crecimiento con las representaciones que emergen en la construcción y exploración de modelos matemáticos asociados a él?

Mostraremos algunas estrategias utilizadas por los estudiantes cuando construyen y exploran modelos matemáticos originados en el estudio de fenómenos de crecimiento, donde destaca la presencia de diferentes representaciones del modelo de la situación como un medio de análisis y desarrollo de significados respecto a los elementos que constituyen una EDO.

Marco conceptual

El estudio de las ecuaciones diferenciales (ED) puede ser abordado desde diferentes perspectivas que inexorablemente traen a la luz la presencia de distintas representaciones, tanto de la ecuación como de sus soluciones. Al estudiar el comportamiento de algunos fenómenos, la representación algebraica se hace presente en la expresión de la ecuación como un modelo matemático y en las funciones algebraicas como soluciones. La representación gráfica adquiere importancia al representar a la ED a través del campo de direcciones y al analizar la gráfica de las soluciones, ya sean éstas obtenidas algebraicamente o bosquejadas cualitativamente en el campo de direcciones. Y la representación numérica es de gran importancia, en cuanto que sólo una pequeña cantidad de ecuaciones diferenciales puede ser resuelta utilizando métodos algebraicos. Así, la naturaleza del estudio de las Ecuaciones Diferenciales y los Sistemas de Ecuaciones sugiere la conveniencia de analizar el papel que juegan las diferentes representaciones en la conceptualización de los estudiantes cuando se inician en el estudio de estos temas.

Tal como Duval (1993) menciona, los objetos matemáticos no son directamente accesibles a la percepción, lo cual genera la necesidad de contar con diferentes representantes del objeto; siendo así, los tratamientos realizados dependerán del registro de representación utilizado. Una propiedad de las representaciones semióticas es la transformabilidad de una representación en otra, la cual puede representar completamente el contenido de la representación inicial o sólo una parte. Cuando la transformación tiene lugar dentro del mismo registro Duval lo llama tratamiento, al cambiar de registro se refiere a conversión. Para representar un objeto en un registro de representación es necesaria la selección de las características que constituyen lo que se quiere representar. Duval señala, que la aprehensión de los objetos matemáticos es conceptual y que sólo por medio de las representaciones en posible realizar alguna acción sobre los objetos.

Duval (1993, 1995), considera que las representaciones semióticas no sólo son un medio de exteriorización, sino que también juegan un papel importante en el desarrollo o modificación de las representaciones mentales. En otras palabras, el desarrollo de las representaciones mentales depende de la interiorización de las representaciones del objeto. Duval no pone atención en las representaciones mentales como prioritarias, sino en la construcción de conceptos por medio de la manipulación de las representaciones semióticas y los procesos de conversión entre éstas.

Como ya se ha puesto de manifiesto en diferentes investigaciones (Moreno-Armella & Sriraman, 2005; Sacristán et. al., 2010), el trabajo de los estudiantes se modifica dependiendo de las herramientas utilizadas. Un ejemplo frecuentemente recurrido es la actividad matemática con herramientas de lápiz y papel en comparación con el trabajo desarrollado con la mediación de herramientas digitales. En el primer caso, la acción del individuo sobre el objeto matemático tiene un carácter estático, mientras que en el segundo caso el individuo actúa de manera dinámica sobre el objeto matemático y sobre las representaciones de él. En otras palabras, las herramientas digitales amplifican las acciones que podemos realizar sobre un objeto matemático.

Moreno-Armella & Sriraman (2005), ejemplifican lo anterior para el acto de trazar la gráfica de una función. Con herramientas de lápiz y papel el individuo tiene que manipular algebraicamente la expresión matemática que la define, poniendo en juego sus habilidades algebraicas. Con la mediación de las herramientas digitales, la acción del individuo se dirige hacia la interpretación de la gráfica, poniendo en juego el desarrollo de la comprensión de las relaciones de la gráfica con la expresión algebraica. La actividad cognitiva es diferente en cada contexto. Moreno-Armella & Santos-trigo (2014) subrayan lo anterior:

> …no artifact is epistemologically neutral and consequently, there is a disruption in the taken for granted aspects of what it means to think mathematically in the digital context. In this view, an instrument, that is, the internalized artifact is a template for action (pp. 35).

Las representaciones de las Ecuaciones Diferenciales y las herramientas digitales son aspectos que constituyen la base de nuestra investigación.

Metodología

Los participantes

Participaron 9 estudiantes de una Maestría en Matemática Educativa, todos ellos procedentes de diferentes instituciones y distintas carreras universitarias, entre estas, ingeniería, informática y licenciatura en matemáticas. Todos los participantes habían sido profesores de bachillerato. Al momento de la investigación, cursaban una asignatura orientada a la programación y una asignatura relacionada con tópicos de análisis matemático, donde el dominio de diferentes herramientas digitales era necesario, por lo cual eran hábiles en el manejo algunos ambientes de cómputo. En este documento sólo mostraremos el trabajo más representativo de dos parejas participantes: Alice – Homer y Lander – Athan. Alice había estudiado matemáticas, Homer y Lander ingeniería, y Athan informática.

Material utilizado e Instrumentos de recogida de información

El material que se utilizó está constituido por el planteamiento de once situaciones diferentes que los estudiantes resolvieron con el apoyo de algunas herramientas digitales. Estas tareas o situaciones fueron agrupadas y presentadas en un orden gradual de profundidad según el análisis requerido.

Clasificación de las tareas

Primer Grupo: las tareas requieren analizar y resolver numéricamente diversas situaciones. A partir del estudio de valores concretos se obtiene una EDO del tipo $\frac{dU(t)}{dt} = kU(t)$ que describe la evolución de una población en condiciones ideales. Cuatro tareas más pertenecen a este grupo.

Segundo Grupo: constituido por tareas donde los estudiantes tenían que identificar cómo se integran a la ecuación diferencial anterior algunos factores que condicionan el crecimiento de una población, dando lugar a la construcción de una EDO como $\frac{dN}{dt} = aN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{C}\right) - P$; y

Tercer Grupo: se propusieron tareas relacionadas con la interpretación de fenómenos que se describen mediante sistemas de ecuaciones diferenciales (SED). Las tareas correspondientes a este grupo no se abordan en este documento.

Para responder a las tareas, los estudiantes tuvieron a su disposición software como: Excel, Derive, Wolfram-Alpha y Geogebra. En particular, para el estudio del campo de direcciones se utilizó el ambiente computacional GeomED, diseñado ad- hoc para esta investigación. Este ambiente permite introducir una ecuación diferencial con parámetros arbitrarios y modificar estos parámetros usando barras de desplazamiento para visualizar en tiempo real los efectos que la variación de los parámetros produce sobre el campo de direcciones. También muestra las soluciones numéricas de la EDO para una condición inicial dada.

Se utilizaron tres *instrumentos para recoger la información*: 1) Registros escritos de las tareas propuestas. (Anexo). 2) Grabaciones del trabajo en el ordenador. Para ello se utilizó CamStudio que es un software de captura de imágenes. Se video-grabó el trabajo que realizaron los estudiantes en: GeomED, Excel, Derive, Wolfram-Alpha y Geogebra. 3) Grabaciones del audio de las discusiones sostenidas por los equipos de trabajo y videograbaciones de la discusión grupal. Las grabaciones de audio y el video fueron transcritas para analizar el trabajo de los estudiantes.

Análisis de la información

Tal como se mencionó en líneas anteriores las tareas de enseñanza se dividen en tres grupos. Analizamos el trabajo de los estudiantes al resolver una tarea perteneciente al primer y segundo grupo, centrando la atención en la presencia de las diferentes representaciones y el uso que hacen de estas representaciones como medio de exploración, interpretación y presentación de resultados, así como en el papel del software como mediador en el desarrollo de estrategias de solución.

Para el análisis de la información hemos establecido los siguientes elementos de identificación, los cuales se enfocan en la observación y análisis de las herramientas que utilizan los estudiantes para resolver las tareas que se les plantean: **ID1**- Estrategias utilizadas al pasar de un registro de representación a otro, **ID2-** Significado asociado a los elementos en la EDO en relación con la situación planteada, **ID3**- Elementos gráficos significativos para establecer nexos entre el contexto de un problema y su representación analítica, **ID4**- Uso del software para establecer relaciones entre una situación y un modelo matemático.

El análisis de información se realizó en tres pasos, primero se localizaron los identificadores, en el trabajo escrito de los estudiantes. Después se buscó localizar los identificadores mediante análisis de la videograbación en el trabajo con las herramientas digitales. Y finalmente se establecieron algunas relaciones de correspondencia entre los resultados obtenidos en el primer y segundo paso. En cada paso los resultados localizados fueron verificados con la opinión de un investigador externo.

Análisis y discusión de resultados

El análisis se presenta en dos etapas: en la primera discutimos la presencia de diferentes representaciones que emergen en un proceso de modelización. En la segunda etapa se comenta la interpretación que realizan los estudiantes derivada del estudio del fenómeno por medio de sus representantes.

Primera etapa

La tarea que se analiza en esta etapa es la situación 1, correspondiente al primer grupo de tareas (ver Anexo). En esta tarea el estudiante deberá mostrar algunas estrategias de solución para determinar la cantidad y variación de la sustancia conforme pasa el tiempo, un aspecto

importante es la identificación de las variables presentes y las condiciones que relacionan estas variables, entre ellas la cantidad de sustancia en el organismo, la tasa de cambio y el tiempo. Los estudiantes deberán construir algunos modelos matemáticos (expresiones, gráficas, tablas) para determinar la cantidad de nicotina, su variación y el comportamiento a lo largo del tiempo. Presentamos a continuación, el proceso de solución mostrado por dos de los equipos participantes y las estrategias relacionadas con los identificadores descritos en la metodología.

Caso Alice-Homer

Enfocándose en la representación algebraica. En el trabajo de Alice y Homer destaca el uso de la representación numérica y la consideración de casos discretos. El esquema siguiente muestra la trayectoria de solución que siguieron, donde se observa que el proceso desarrollado para concluir la actividad tiene lugar a partir de la representación en forma discreta de la cantidad de nicotina:

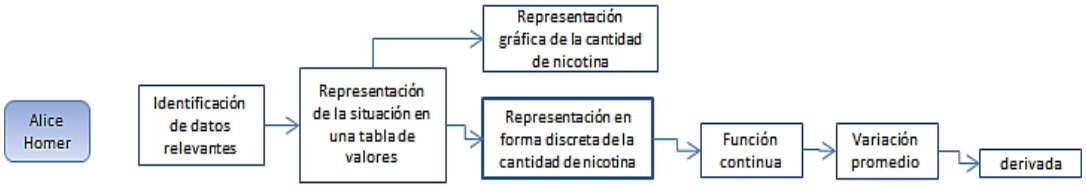


Figura 1. Trayectoria de solución desarrollada por Alice y Homer

Alice y Homer utilizan dos representaciones (gráfica y numérica) de la cantidad de nicotina, sin embargo no se observa que hayan extraído algún tipo de información de estas representaciones. Es decir, las conclusiones que obtuvieron se derivan del estudio cualitativo de la función obtenida para la cantidad de nicotina (ID2) y no de la representación gráfica o numérica (ID1). La representación numérica fue utilizada para determinar un patrón de comportamiento con el cual encontraron una expresión (discreta) para la cantidad de nicotina en el tiempo N, esto es $0.9\left(2/3\right)^{N}$ y tomando como base esta expresión determinaron $f(t)=\left(\frac{2}{3}\right)^{t}(0.9)$ para representar la cantidad de nicotina en todo tiempo. Los participantes, no dan evidencia que demuestre si en la función, el tiempo t es entendido como continuo. En este sentido, el discurso que desarrollan en el trabajo escrito no demuestra la comprensión de las diferencias entre el uso de la representación discreta y la representación continua para la cantidad de nicotina (ID1).

Destaca una relativa facilidad en el tránsito del contexto a una representación matemática (numérica) y posteriormente un tratamiento en la representación numérica que da paso a la obtención de una expresión algebraica. Se observa que la información obtenida de la representación numérica y gráfica no constituye una fuente de evidencia para los estudiantes, debido a que se enfocan en el estudio de la expresión algebraica.

Caso Lander-Athan

Enfocándose en la representación gráfica. Lander y Athan, recurrieron en todo momento al apoyo de las herramientas computacionales. Construyeron una tabla de valores en una hoja de cálculo para representar el comportamiento de la situación y utilizaron estos valores para obtener una gráfica que describe la cantidad de nicotina presente en el organismo y otra gráfica para la cantidad que se elimina conforme pasa el tiempo. Posteriormente, encontraron por medio de un ajuste de curvas una función $y=1.35\ e^{-0.40x}$ para la cantidad de nicotina y derivaron esta función

usando Geogebra y wolfram, de donde obtuvieron $y' = -0.54e^{-0.4x}$ para representar la variación. Finalmente graficaron en Geogebra la curva para la tasa instantánea de variación. Esto se muestra en el siguiente esquema (Fig.2).

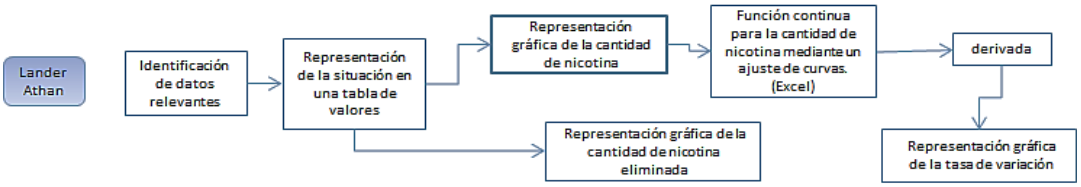


Figura 2. Trayectoria de solución desarrollada por Lander y Athan

La discusión de esta pareja evidencia cómo el proceso de comprensión de la situación y la organización de la información en una tabla de valores está fuertemente relacionado (ID1), similarmente a lo evidenciado en el trabajo de Alice y Homer. La facilidad que ofrece la hoja de cálculo en el manejo de la información les permitió observar la importancia y las implicaciones de las condiciones iniciales del problema (ID3). Al contrastar la tabla de valores con la gráfica correspondiente, las condiciones iniciales adquieren sentido para los estudiantes cuando buscan establecer un criterio de congruencia entre las dos representaciones (ID3), es decir las condiciones iniciales constituyen una unidad significativa (Duval, 1995) al contrastar dos representaciones. En el caso de estos participantes, el uso de la herramienta favorece el paso de manera inmediata a la representación algebraica de la cantidad de nicotina, promoviendo la aparición de conexiones robustas entre el planteamiento del modelo algebraico y su relación con el contexto que le da lugar (ID4). El trabajo de este equipo muestra que muchas de sus conclusiones surgieron a partir del trabajo con la representación gráfica y numérica de la cantidad de nicotina y de la derivada, dejando de lado el análisis del modelo algebraico (ID3).

Analizar el papel del profesor no fue un elemento constitutivo de nuestra investigación. A efecto de aclarar el desarrollo de la secuencia de enseñanza, mencionamos que al finalizar la resolución de esta tarea, se dio paso a una discusión colectiva sobre los aspectos que están involucrados en la construcción de un modelo matemático para describir un fenómeno, tales como idealización, simplificación, ecuación diferencial, condiciones iniciales, estabilidad, etc. En el sentido que con la tarea anterior no se llega a una EDO propiamente dicho, pero si da lugar a la discusión sobre lo que es una Ecuación Diferencial Ordinaria en una de sus formas más sencillas como una relación de proporcionalidad entre el cambio y la misma función $\frac{dN}{dt} = kN$ y su solución dada por la función de tipo exponencial cuya derivada es ella misma multiplicada por una constante $N = e^{kt}$.

Segunda Etapa

En esta etapa analizamos el proceso de solución que siguieron nuestros participantes al resolver la situación 6 (ver anexo), correspondiente al segundo grupo de tareas.

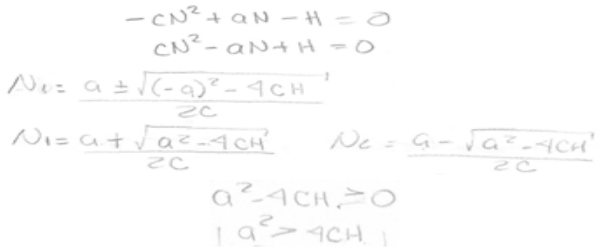
Uno de los objetivos principales se dirigió a la observación del análisis que los estudiantes realizan de los parámetros (*a,c,H*) comprendidos en la EDO $\frac{dN}{dt} = aN(t) - cN^2(t) - H$. De tal forma que, conociendo el comportamiento de una población, se examinen los valores que los

parámetros deben tomar para que la EDO represente la variación de dicha población[1]. La importancia de la actividad radica en el análisis de los valores que los parámetros deben tomar y las relaciones entre ellos para que la EDO resultante describa el comportamiento de una población como la que se describe en el pie de página (relacionado con ID2, ID4), donde c, a y H representan el factor de sobrepoblación, la tasa de natalidad y la pesca. Esta situación se puede estudiar de manera cualitativa, analizando el comportamiento del campo de direcciones y los signos de la EDO, o con el uso de herramientas algebraicas analizando el signo del discriminante $\sqrt{a^2 - 4cH}$, y la relación dada por $a^2 > 4cH$.

Los estudiantes en general, utilizaron aproximaciones algebraicas y gráficas para resolver el problema. Aunque el trabajo con el registro gráfico fue más enriquecedor y favoreció la discusión en el aula, resulta que ambas aproximaciones se complementaron. Todos los equipos siguieron un procedimiento más o menos similar para determinar las soluciones de equilibrio: exploraron con el software el campo de direcciones para diferentes valores de los parámetros, identificaron gráficamente las soluciones de equilibrio de la EDO lo cual les condujo a plantear la igualdad a cero, así propusieron una ecuación de segundo grado que resolvieron para hallar los valores de las soluciones constantes. Algunos equipos intentaron resolver la EDO. En seguida se comenta el trabajo desarrollado por las parejas elegidas.

Enfocándose en la representación algebraica. Alice y Homer iniciaron determinando las soluciones de equilibrio, para ello igualaron el lado derecho de la EDO $\frac{dN}{dt} = aN(t) - cN^2(t) - H$ con cero y encontraron las soluciones, de ahí intentaron obtener algunas conclusiones (Fig. 3.a). Al no obtener más información, resolvieron la EDO apoyándose en derive para realizar operaciones algebraicas (ID4), donde encontraron una expresión parecida la que se muestra en la figura 6. Pero, al encontrarse con una expresión donde la presencia de parámetros desconocidos predomina, no continuaron por esta ruta de solución y decidieron explorar la EDO utilizando la herramienta (GeomED) para graficar campos de direcciones. Así, obtuvieron como conclusión que la EDO describiría el comportamiento de una población con las características señaladas (pie de página previo) para valores de los parámetros en los intervalos que se muestran en la imagen (Fig. 3.b), es decir resolvieron para algunos casos particulares

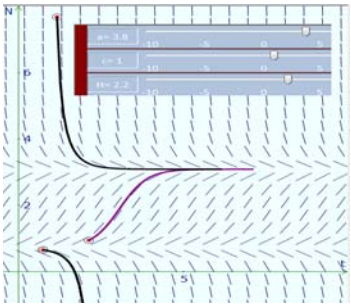
[1] Se trata de un modelo de crecimiento de población, en donde se consideran dos límites de crecimiento uno inferior L1 y otro superior L2. Para una población inferior a L1, la población total se extingue, para poblaciones entre L1 y L2 la población crece teniendo como límite de crecimiento L2 y para poblaciones superiores a L2 la población total decrece por los límites impuestos de manera natural: espacio y competencia por el alimento.



Las raíces deben ser positivas y reales…

La raíz N_1 es positiva siempre puesto que el discriminante es positivo. Para asegurar que N_2 sea positiva, el discriminante deberá ser mayor que cero, pero menor que a.

Figura 3.a. Alice y Homer plantean una ecuación y explican que las raíces deben ser positivas



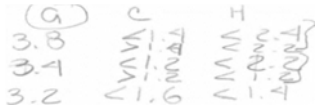


Figura 3.b . Alice y Homer resuelven para casos particulares

La trayectoria de solución de este equipo, muestra cómo al no encontrar más información con el dominio que tienen de las herramientas algebraicas, recurren a la representación gráfica. Destacamos aquí cómo la herramienta digital favorece la búsqueda de estrategias alternativas de solución y exploración de la situación (ID4), permitiendo así que los estudiantes avancen en el proceso de solución de acuerdo a sus capacidades. Aunque no logran resolver la situación general, creemos que lo importante aquí es el proceso de exploración que desarrollan. Por otra parte, este trabajo representa un ejemplo de cómo la representación de las soluciones constantes de una EDO adquiere un carácter dinámico al establecer relaciones entre dos de sus representaciones.

Por otro lado, como se puede observar en el trabajo de Alice y Homer, la determinación de las soluciones constantes y su asociación con los segmentos de pendiente igual a cero en el campo de tangentes se transforma en una herramienta "pivote", para la obtención de información respecto a los valores de los parámetros y comportamiento del fenómeno. Estos elementos de ambas representaciones se convierten en una herramienta de anclaje para el trabajo de nuestros participantes en ambos registros de representación, este es un aspecto que también destaca en el trabajo de Lander y Athan.

Enfocándose en la representación gráfica. Lander y Athan probaron con diferentes valores para los parámetros a manera de visualizar las variaciones en el campo de direcciones hasta encontrar un comportamiento similar a la evolución de las situaciones de población que se revisaron en las sesiones previas (comportamiento similar al descrito en el pie de página 2). Comenzaron analizando casos particulares, por ejemplo cuando sólo existe natalidad y pesca. Después de introducir diferentes valores concluyeron que el límite de crecimiento de población está asociado con la sobrepoblación. La exploración con el software les permitió ir estableciendo conclusiones parciales (ID4) y plantear conjeturas sobre el comportamiento de la población de acuerdo a diferentes valores de los parámetros. Para ello consideraron como referencia a los segmentos de línea que tienen pendiente cero.

Las transcripciones muestran, que en un inicio Lander y Athan utilizaron el software como un medio para explorar el efecto que produce la modificación de los parámetros de la EDO sobre el campo de direcciones (ID4), centrando la atención en el desplazamiento de las soluciones de equilibrio. Al parecer tenían presente la existencia de un límite de crecimiento, así al hacer variar

los parámetros lograron asociar ese límite con los términos relacionados a la sobrepoblación y la pesca (H y c) (ID3). Después de explorar el comportamiento del campo de direcciones con diferentes valores, finalmente notaron la existencia de una infinidad de valores para los parámetros con los cuáles podrían obtener un comportamiento de crecimiento de población como el que se pedía. Y asociaron esos límites (asíntotas como ellos los llaman) con las raíces de $kN(t) - cN^2(t) - H = 0$. Como podemos ver el trabajo de esta pareja está fuertemente vinculado al uso del software.

Articulando representaciones. Ante la pregunta del profesor sobre las relaciones existentes entre los parámetros, los estudiantes hicieron varias conjeturas que con la visualización y discusión grupal se irían apoyando o desechando. Lander y Athan explicaron ante sus compañeros, la estrategia desarrollada para obtener conclusiones sobre los valores de los parámetros. Iniciaron con la presentación de un caso particular que habían estudiado previamente $\frac{dN}{dt} = 7N - 3N^2 - 2$ y lo trasladaron al caso general, que es el que nos ocupa en esta discusión. La transcripción y figuras siguientes ilustran el trabajo de Lander y Athan.

Athan- *más o menos, está sería la parábola para el caso de* $7N - 3N^2 - 2$,
Inv*: qué estás graficando, el lado derecho de la ecuación?*
Athan*: sí, aquí la solución uno está en 1/3 y la solución dos está en 2 y esto corresponde a las asíntotas… entonces nosotros al jugar con los deslizadores siempre podemos tener los 3 casos, el caso en el que no tocan el eje de las x, o sea el caso donde no hubiera solución real, el caso donde hubiera una solución real cuando el vértice tocara el eje de las x, y el caso donde habría dos soluciones reales cuando se intersectan.*

Figura 4. Athan relaciona la información representada en la gráfica de $7N - 3N^2 - 2$ y las soluciones de equilibrio en el campo de direcciones

Lander y Athan analizaron el signo de la EDO graficando el lado derecho de la ecuación y generalizando a través de la variación de los parámetros. Esta es una ventaja que ofrece la construcción en Geogebra, al mismo tiempo que modifican los valores de los parámetros pueden observar la influencia que éstos tienen sobre las raíces de la función cuadrática, lo cual se puede trasladar como ellos lo hicieron al estudio de la EDO centrando la atención en las soluciones de equilibrio y regiones de crecimiento y decrecimiento. Además, el hecho de poder asignar valores arbitrarios a los parámetros, motivó la discusión sobre los valores que éstos deberían tomar y su impacto sobre la situación que se estaba analizando, por ejemplo para el caso en que *H* toma valores negativos.

La aproximación que realizaron los estudiantes al análisis cualitativo de la EDO favoreció la comprensión de la expresión algebraica de las soluciones de equilibrio $N_{1,2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 - 4cH}}{2c}$, así como de la relación $a^2 > 4CH$ (ID3). La facilidad que otorga el software para graficar campos de

direcciones y modificar los parámetros en tiempo real, permitió que, al no poder encontrar rápidamente los valores de los parámetros buscados, los estudiantes introdujeran el estudio cualitativo del crecimiento o decrecimiento de la población a través del análisis de la función cuadrática $f(N) = kN(t) - cN^2(t) - H$, el software toma aquí el papel de mediador para la generalización de conocimiento.

Por otro lado, se observó que para algunos estudiantes no era claro por qué se analizaba función *f(N)*, así fue necesaria la intervención del profesor para discutir y aclarar dudas. Con apoyo del software se comentaron algunos casos particulares, por ejemplo la relación entre los ceros de la EDO y las soluciones de equilibrio, y la relación de los intervalos donde la función de segundo grado es positiva o negativa con las regiones del campo de direcciones donde las soluciones son crecientes o decrecientes, esto se muestra en la siguiente imagen.

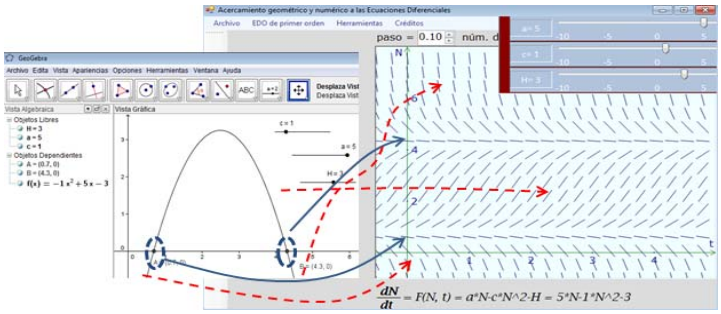


Figura 5. Se analiza la variación de la población mediante el estudio del cambio de signo de $f(N)$ en $\frac{dN}{dt} = f(N)$

Es claro que la relación mostrada en la figura anterior es rica en la cantidad de información que puede ofrecer, sin embargo encierra también una complejidad asociada a la comprensión conceptual, en tanto que la información sobre la evolución de un fenómeno representado algebraicamente mediante una EDO, ha de ser interpretado por medio de dos representaciones gráficas una situada en el plano cartesiano y la otra en el campo de direcciones. Notamos que las soluciones de equilibrio (estable e inestable) continúan siendo unidades significativas para la coordinación parcial de estas dos representaciones y obtención de información. Tal como evidenciamos, el dominio de las herramientas digitales mostrada por Lander y Athan abrió las puertas para el empleo de manera conjunta de diferentes representaciones para el estudio del comportamiento del fenómeno representado por la EDO. Su trabajo mostró cómo las relaciones entre el contexto del problema y su representación mediante un modelo matemático, ya sea éste gráfico o algebraico adquieren un carácter dinámico, tanto en la conexión de las unidades significativas de cada representación (soluciones de equilibrio), como en la interpretación de la evolución del fenómeno dada por la lectura de los gráficos utilizados.

Por otra parte, se encontró que algunos participantes no lograron obtener la solución algebraica de la EDO, los errores se debieron principalmente a una manipulación algebraica descuidada. Así, fue necesario explicar el método algebraico de separación de variables, para ello se utilizó Derive como una herramienta auxiliar en las operaciones algebraicas, llegando con ello a la solución general de la ecuación dada por la función que se muestra abajo. Se determinó también el comportamiento al infinito el cual corresponde a las soluciones de equilibrio.

$$n = \frac{e^{k\cdot\sqrt{(a^2 - 4\cdot c\cdot h)}/c}\cdot\left(\sqrt{(a^2 - 4\cdot c\cdot h)} - a\right) + e^{-t\cdot\sqrt{(a^2 - 4\cdot c\cdot h)}/c}\cdot\left(\sqrt{(a^2 - 4\cdot c\cdot h)} + a\right)}{2\cdot c\cdot e^{-t\cdot\sqrt{(a^2 - 4\cdot c\cdot h)}/c} - 2\cdot c\cdot e^{k\cdot\sqrt{(a^2 - 4\cdot c\cdot h)}/c}}$$

Figura 6. Solución de $\frac{dN}{dt} = kN(t) - cN^2(t) - H$ obtenida con Derive

Si bien el contenido abordado en la tarea, es sólo una parte muy pequeña de lo que se puede profundizar en el estudio de la situación, consideramos que las estrategias de solución que se presentaron favorecieron la reflexión sobre las relaciones entre los parámetros en una EDO, su representación gráfica y el vínculo con el contexto (ID2, ID3, ID4).

Conclusiones

Las estrategias de solución mostradas por los estudiantes les permitieron obtener información del comportamiento de la situación sin necesidad de resolver inicialmente la EDO, esto favoreció el desarrollo de significados contextuales asociados a los objetos matemáticos estudiados. En los procesos de solución se observa que surge, de manera casi natural, un estudio cualitativo de la representación gráfica asociada a la ecuación diferencial que con un poco más de profundidad, se podría llegar a concretar en la construcción y análisis de diagramas de bifurcación. Por otra parte, observamos que los estudiantes usan en el análisis del comportamiento de los fenómenos, al menos dos representaciones de la situación, lo que podría revelar algunos indicios de reflexión sobre el concepto de variación desde el estudio de las ecuaciones diferenciales, lo cual nos ofrece la oportunidad de reconsiderar en el diseño de estrategias de enseñanza las ideas que subyacen a una ED de manera que podamos apoyar a los estudiantes en la construcción de un conocimiento conceptual más robusto estructurado mediante una red de conocimientos relacionados con las Ecuaciones Diferenciales.

Con respecto al proceso de solución que muestran nuestros participantes, podemos concluir que el tipo de tarea favorece un determinado estilo de pensamiento, en el caso de la situación 1 se trata de un estilo de pensamiento orientado a lo numérico, aunque posteriormente Alice y Homer se enfocan en lo algebraico, mientras que Lander y Athan centran su atención en la representación gráfica y el análisis matemático se enriquece por los diferentes caminos que ofrece la hoja de cálculo para determinar el modelo matemático (ID4).

En el caso de la situación 6, al inicio el proceso de solución es diferente, Alice y Homer se enfocan en la representación algebraica, pero al tratarse de un modelo que demanda de muchas operaciones algebraicas recurren a la visualización del campo de direcciones. Mientras que Lander y Athan se concentran de inicio en la exploración de los parámetros con el campo de direcciones y posteriormente en la exploración del cambio de signo del diferencial con apoyo de Geogebra. Los procesos mostrados ofrecen indicios sobre cómo junto con el dominio de las herramientas digitales logran utilizar las representaciones gráfica y numérica de las EDO como una herramienta para la obtención de información. El dominio de las herramientas digitales no sólo introduce una nueva manera de estudiar las Ecuaciones Diferenciales, sino que es acompañado del desarrollo de habilidades para explorar y conjeturar el comportamiento de algunos fenómenos.

Referencias

Arslan, S. (2010a). Do students really understand what an ordinary differential equation is? International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, Vol.41 (7), pp.873- 888.

Arslan, S. (2010b). Traditional instruction of differential equations and conceptual learning. Teaching Mathematics and Its Applications, Vol. 29, pp. 94-107.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, Annales de Didactique et de Science Cognitives, 5, 37-65.

Duval, R. (1995). Sémiosis et pensée humaine: Registres sémiotiques et apprentissage intellectuels. Peter Lang, Suisse.

Hernández Ramírez A. (1995)."Obstáculos en la Articulación de los Marcos Numérico, Gráfico y Algebraico en relación con las Ecuaciones Diferenciales". Cinvestav, México.

Guerrero, C., Camacho, M. & Mejía, H. (2010). Dificultades de los estudiantes en la interpretación de las soluciones de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias que modelan un problema. Enseñanza de las Ciencias, 28(3), pp.341–352.

Moreno-Armella, L. & Sriraman, B. (2005). The articulation of symbol and mediation in mathematics education. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 37(6), pp. 476-486.

Moreno-Armella, L. & Santos-Trigo, M. (2014). The use of digital tools in Mathematical Practices: Reconciling Traditional and Emerging Approaches. In English, L. & Kirshner, D. (Eds.), Handbook of International Research in Mathematical Education (3ed.).

Rasmussen, C. (2002). New directions in differential equations: A framework for interpreting students' understandings and difficulties. Journal of Mathematical Behavior, 20, 55-87.

Sacristán, A., Calder, N., Rojano, T., Santos-Trigo, M., Friedlander, A., and Meissner, H. (2010). The influence and shaping of digital Technologies on the learning –and learning trajectories- of mathematical concepts, in Mathematics education and technologyrethinking the terrain. The 17th ICMI Study, C. Hoyles and J.-B. Lagrange, eds., Springer, New York, 2010, pp.179–226.

Anexo

Situación 1

Un cigarro americano contiene 11mg de nicotina. De esto, 0.9 mg son asimilados por un fumador promedio. Si un tercio de la nicotina presente en el cuerpo de un humano sano es eliminada del cuerpo en una hora.

¿Cómo podemos usar este hecho para predecir cuál será la cantidad de nicotina presente en el cuerpo a lo largo del tiempo, después de haber fumado un cigarrillo?

¿Cómo varía la cantidad de nicotina presente en el cuerpo a lo largo del tiempo?

Encuentra una función que determine la cantidad de nicotina en cualquier momento.

Determina el modelo matemático que describe cómo cambia la cantidad de nicotina en el cuerpo.

De acuerdo al modelo, ¿Qué sucede con la cantidad de nicotina conforme transcurre el tiempo?

Situación 6

Considera el caso general de una situación descrita por la ecuación $\frac{dN}{dt} = aN - cN^2 - H$, donde a, c y H son mayores de cero. Analiza para qué valores de los parámetros se obtiene una ecuación diferencial que modele una situación de población similar a la anterior.

Investigação de Padrões Fractais no GeoGebra

Rejane Waiandt Schuwartz de Carvalho **Faria**
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Brasil
rejanefaria1@hotmail.com
Marcus Vinicius **Maltempi**
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho
Brasil
maltempi@hr.ac.br

Resumo

Este trabalho discute o "uso de tecnologias para o ensino e aprendizagem da matemática", pois objetiva apresentar as inferências e resultados de uma pesquisa qualitativa, realizada no GeoGebra, com alunos do primeiro ano do Ensino Médio. A pesquisa investigou quais contribuições a exploração de Padrões Fractais em um software de geometria dinâmica traz ao processo de generalização de conteúdos matemáticos. A análise dos dados foi realizada com base nas Fases da Investigação de um Padrão, propostas por Herbert e Brown (2000). Os resultados obtidos indicam que o trabalho com Padrões Fractais contribui com o processo de generalização de conteúdos matemáticos por possuírem características que possibilitam a exploração de diversos desses conteúdos. Além disso, o GeoGebra possibilitou a visualização, construção e manipulação dos Padrões Fractais em seus diversos níveis, permitindo assim a percepção das particularidades que fazem com que se repita infinitamente, ao longo das iterações, sua estrutura inicial.

Palavras chave: Fases da Investigação de um Padrão, Ensino de Matemática, Ensino Médio, Generalização Matemática, Metodologia Qualitativa.

Introdução

Este artigo aborda a temática uso de tecnologias para o ensino e aprendizagem da matemática do XIV CIAEM. Sua finalidade é apresentar inferências e resultados de uma pesquisa de mestrado de cunho qualitativo intitulada: "PADRÕES FRACTAIS: contribuições ao processo de Generalização de Conteúdos Matemáticos".

A referida pesquisa, por sua vez, teve por objetivo investigar quais contribuições a exploração de Padrões Fractais em um software de geometria dinâmica traz ao processo de generalização de conteúdos matemáticos.

A investigação foi desenvolvida com base na metodologia qualitativa por entender que esta permite uma análise coerente dos dados e uma relação intensa com o objetivo e os procedimentos de coleta de dados. As fontes dos dados foram: entrevistas, questionários, registros escritos em folhas de atividades, caderno de campo, fotografias, filmagens, gravações de áudio e gravações da interação dos alunos com o computador ao longo dos encontros do curso.

Para alcançar o objetivo geral da pesquisa, um curso com alunos do primeiro ano do Ensino Médio, foi idealizado, elaborado e desenvolvido. Durante o curso foram realizadas seis atividades de manipulação e análise dos Padrões Fractais Árvore Pitagórica, Triângulo de Sierpinski, Curva de Koch, Tetra Círculo, Lunda-Design e Hexagonal tipo Dürer. Na seção seguinte apresentaremos o termo Padrão Fractal e os Padrões Fractais que exploramos na pesquisa.

Padrões Fractais

Segundo Vale *et. al.* (2005), o termo "padrão" refere-se à disposição ou aos arranjos de números, formas, cores ou sons onde se detectam regularidades. Barbosa (2000) destaca que toda a Matemática está relacionada aos padrões:

> [...] propriedades, regras e algoritmos, podem ser consideradas como padrões; aliás, a Matemática, talvez exagerando um pouco, pode ser pensada como um conjunto de padrões: numéricos, geométricos, algébricos, etc. (Barbosa, 2000, p. 9).

Vale e Pimentel (2005) propõem algumas tarefas de reconhecimento de padrões e generalização em diferentes representações, como pictórica ou geométrica, numérica e mista. Além disso, recomendam que o trabalho com os diversos tipos de padrões seja simultâneo, pois:

> Os alunos que trabalham na forma exclusivamente numérica manifestaram insuficiências na resolução, não conseguindo obter uma generalização completa ou obtendo uma lei de formação errada. De modo geral os alunos que têm mais sucesso nas tarefas são os que recorrem a uma abordagem exclusivamente geométrica ou mista. Neste sentido devemos incentivar os nossos alunos a olhar para os problemas propostos de vários modos, e a mobilizar todos os seus conhecimentos sejam eles de natureza numérica ou geométrica (Vale & Pimentel, 2005, p. 19).

Nesse sentido, entendemos que Vale e Pimentel (2005) recomendam o trabalho concomitante das propriedades numéricas e geométricas dos padrões. Uma alternativa para essa múltipla abordagem de padrões está nos Padrões Fractais, pois eles proporcionam a exploração não somente das características numéricas e geométricas, mas também de propriedades algébricas. Nesse sentido, explicitamos que o termo "Padrões Fractais" está relacionado ao modelo pelo qual os fractais estão condicionados numérica, algébrica e geometricamente. Neste modelo é repetida, periodicamente, uma determinada estrutura invariante, para a feitura dos próximos níveis em uma ou mais direções. Ressaltamos ainda nossa concordância de que "[...] ao conceito de padrão estão associados termos tais como: regularidade, sequência, motivo, regra e ordem." (Vale *et. al.*, 2005, p. 3).

Todos os Padrões Fractais possuem as propriedades autossimilaridade e complexidade infinita, que são visuais. A autossimilaridade pode ser visualizada nas semelhanças identificadas através das escalas, de modo que partes menores dos objetos que vão compondo os níveis de um fractal se assemelham com todo ele. Assim, as pequenas partes da curva representam totalmente a forma da curva, de modo que ao ampliar uma parte, encontramos uma réplica do fractal todo (Eberson, 2004).

Assim como a autossimilaridade, a complexidade infinita, pode ser observada por meio da visualização da iteração dos níveis do fractal, pois está relacionada ao padrão que repete sua estrutura própria por uma quantidade ilimitada de vezes. Essas propriedades proporcionam a sensação de surpresa e a contemplação da estética nas regularidades presentes na aparente irregularidade desses padrões. Esse efeito causado na observação está relacionado ao fato de

cada propriedade ser composta de harmonia e simetria, oriundas da atividade humana para construção desses objetos, com rigor e criatividade (Barbosa, 2002; Faria, 2012).

Desse modo, quando observamos um Padrão Fractal podemos prever o que ocorrerá ao longo das iterações. Assim, a cada iteração o padrão chega a um nível sucessor que será a base para a iteração seguinte. Na figura 1, estão representados os Padrões Fractais explorados em Faria (2012).

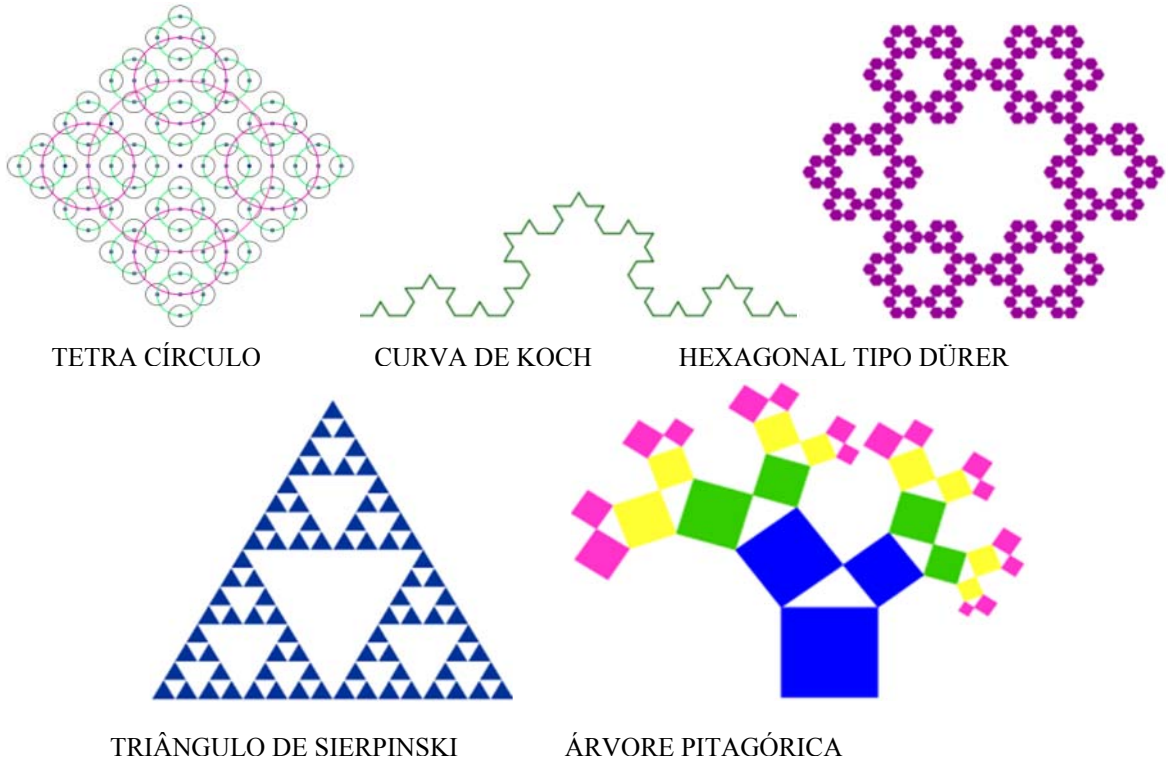


Figura 1. Padrões Fractais construídos no GeoGebra (Faria, 2012).

Além dos Padrões Fractais expostos na figura 1, o Padrão Fractal Lunda-design também fez parte de Faria (2012) e foi o tema de uma das seis atividades realizadas. Nele podemos observar oito quadrados iguais, dispostos como no nível 0, da Figura 2. O processo de iteração consiste em reproduzir a figura inicial no interior de cada um dos quadrados do nível anterior. Nesse processo de iteração, novos níveis vão sendo formados.

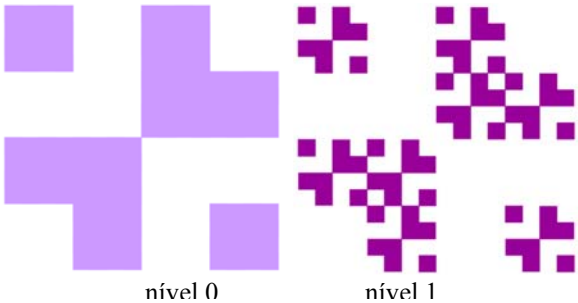


Figura 2. Padrão Fractal Lunda-design representado em dois níveis (Faria, 2012).

As atividades com Padrões Fractais foram pensadas para que os alunos se dedicassem à manipulação e análise destes padrões, buscando identificar aspectos comuns, visando a alcançar a generalização de conteúdos matemáticos, que identificamos por meio das três Fases da Investigação de um Padrão enumeradas por Herbert e Brown (2000), as quais apresentamos na seção seguinte.

Fases da Investigação de um Padrão

A análise das atividades realizadas foi feita com base nas três Fases da Investigação de um Padrão enumeradas por Herbert e Brown (2000), a saber, Procura do Padrão, Reconhecimento do Padrão e Generalização. As autoras afirmam que o empenho dos alunos para resolver uma situação envolvendo padrões passa por estas três etapas.

Primeiramente eles buscam o padrão na história, no sentido de extrair a informação daquelas circunstâncias. Os alunos utilizam vários métodos para extrair o padrão, como desenhos para esboçar as informações que leram ou viram.

A segunda etapa consiste em reconhecer o padrão e descrevê-lo usando diferentes métodos. Para isso, os alunos buscam representar a informação matematicamente, dispondo de palavras, diagramas, tabelas, gráficos e equações. Nessa etapa, os alunos se deparam com novas situações, ao serem convidados a pensar em casos semelhantes, mas envolvendo outros exemplos com padrões.

A terceira e última etapa, consiste em generalizar o padrão e relatar isso na história. Esta etapa pode ser identificada quando os alunos estão buscando interpretar e aplicar a descoberta matemática, resolvendo novas situações, testando novas conjecturas, relatando as situações e identificando relações funcionais para a mesma situação e para novas.

Herbert e Brown (2000) representam as três etapas supracitadas em uma estrutura, que reproduzimos na figura 3. Nossa interpretação desta estrutura é de que o processo de investigação é não-linear, pois é iniciado com uma determinada situação, da qual são extraídas informações que permitem a representação matemática do padrão. Concomitantemente, análises matemáticas vão sendo realizadas, as quais permitem que surjam descobertas de caráter matemático e que elas sejam também representadas matematicamente. Por sua vez, a busca por representar matematicamente conduz a novas descobertas. Essas descobertas matemáticas vão sendo interpretadas e empregadas de forma a retornar a situação inicial com um novo olhar que engloba reconhecer a situação analisada e pensar em outras semelhantes.

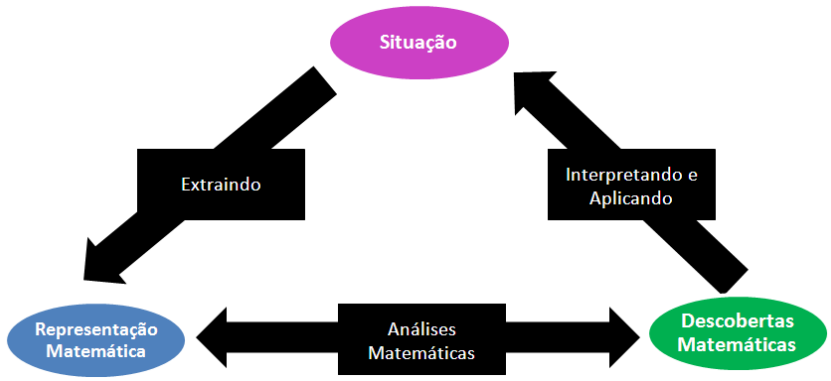


Figura 3. Estrutura do Pensamento Algébrico de Herbert e Brown (2000) (Faria, 2012).

Segundo Herbert e Brown (2000), quando a terceira fase é atingida, nota-se um efeito positivo sobre a percepção do aluno de sua capacidade de generalizar uma regra a partir de uma situação concreta, isto é, a pensar algebricamente. Ao acompanhar o processo, os alunos são capazes de encontrar um padrão e expressá-lo por meio de uma regra geral. Essa percepção da própria capacidade de generalizar foi identificada, por exemplo, na afirmação que um dos alunos ligados a uma pesquisa realizada por Herbert e Brown (2000). Este aluno disse que, para ele, descobrir fórmulas é tão excitante quanto encontrar artefatos é para um arqueólogo. É nesse sentido que generalizar padrões faz com que os alunos se sintam bem sucedidos.

Como já relatado, os Padrões Fractais são entendidos como o modelo pelo qual os fractais estão condicionados numérica, algébrica e geometricamente. Além disso, generalizar um conteúdo matemático por meio da exploração de Padrões Fractais está relacionado com a descoberta de uma representação capaz de expressar o conteúdo matemático específico que está sendo explorado para qualquer nível do padrão.

Herbert e Brown (2000) relatam que primeiramente os alunos buscam o padrão na situação dada. Esta fase é a Procura do Padrão. No caso da pesquisa com Padrões Fractais, a fase de Procura do Padrão consistiu na etapa em que os alunos se dedicaram a compreender o padrão que faz com que o fractal repita, no decorrer dos níveis, sua estrutura inicial.

Na segunda fase de Herbert e Brown (2000), os alunos reconhecem o padrão por meio de diferentes métodos. Para isso, os alunos representam matematicamente o que identificam durante a compreensão da situação dada inicialmente. No caso das atividades com os Padrões Fractais, os alunos podem passar por essa fase quando reconhecem o padrão para um nível específico e descrevem os demais níveis usando tabelas e representando os valores encontrados por meio de frações, potências, e outras formas de representações matemáticas. Além disso, descrevem uma fórmula capaz de expressar um conteúdo matemático (que está sendo abordado em um Padrão Fractal) para um nível qualquer.

Por fim, segundo Herbert e Brown (2000), os alunos atingem a terceira fase, quando generalizam o padrão e relatam isso retomando a situação inicial. Nas atividades com Padrões Fractais, essa fase pode ser atingida quando os alunos conseguem escrever para um "nível posterior ao nível qualquer" (nível n+1), uma fórmula geral que expresse o conteúdo matemático explorado naquela situação. Na exploração de alguns Padrões Fractais, durante a fase de generalização, os alunos descrevem ainda o que ocorreria em um nível anterior ao nível zero.

O Referencial Teórico apresentado nesta seção subsidiou a análise das atividades de exploração de Padrões Fractais realizadas por alunos do primeiro ano do Ensino Médio. Na seção seguinte, apresentamos o contexto em que as atividades foram realizadas.

Realização das Atividades

Um dos procedimentos de investigação para a coleta de dados foram as seis atividades elaboradas com o intuito de analisar quais contribuições a investigação de atividades com Padrões Fractais no SGD GeoGebra pode trazer ao processo de generalização de conteúdos matemáticos. Os conteúdos abordados ao longo das atividades foram áreas de quadrados, comparação entre raios de circunferências e entre segmentos, criação de expressões gerais, frações, uso de tabelas, perímetros, potências, progressões aritméticas e geométricas, sequências e Teorema de Pitágoras. As atividades foram desenvolvidas em um curso, realizado em contra turno, composto de seis encontros, com dezenove alunos voluntários em uma escola pública.

Antecedendo a realização das atividades de manipulação e análise dos Padrões Fractais no software GeoGebra, foi realizada uma atividade de reconhecimento das funções deste software que seriam utilizadas durante as atividades. Essa atividade almejou familiarizar os alunos com o software, colaborando assim, para um melhor andamento do trabalho ao longo da realização das atividades de exploração dos Padrões Fractais.

As atividades foram desenvolvidas em duplas, para que os estudantes pudessem trocar ideias, discutir e estabelecer um diálogo sobre aquilo que se investigava. De acordo com Alrø e Skovsmose (2006) para que ocorra o diálogo são necessárias duas pessoas ou mais em uma relação de igualdade, pois a produção é favorecida no trabalho em dupla, de modo que dialogar engloba investigação, sujeitar-se a riscos e promover a igualdade.

Para Ponte *et. al.* (2003), investigar não significa resolver problemas difíceis, mas sim lidar com questões abertas para as quais não se têm ainda uma resposta ou quando há possibilidade de se encontrar outras possíveis respostas. Este autor acrescenta, ainda, que investigar em matemática

> [...] assume características muito próprias, conduzindo rapidamente à formulação de conjecturas que se procuram testar e provar, se for o caso. As investigações matemáticas envolvem, naturalmente, conceitos, procedimentos e representações matemáticas [...] (Ponte et al., 2003, p. 10).

Nesse sentido, Santos (2008) discute que um processo investigativo pode ser entendido como o ato de explorar de diferentes formas e experimentar, por exemplo, diferentes variações de uma construção geométrica, além de questionar a intuição, de modo a instigar a busca de argumentos para validar determinadas conjecturas formuladas nesse processo.

Nessa perspectiva, a investigação do processo de iteração de um Padrão Fractal, bem como de conteúdos específicos que podem ser explorados por meio da manipulação e análise desses padrões, fazem com que as conjecturas validadas desta maneira, passem a fazer mais sentido aos estudantes, aumentando assim a possibilidade de outros conceitos matemáticos serem produzidos e da generalização de conteúdos matemáticos ser alcançada.

Posto isto, passamos a discutir na próxima seção uma das atividades realizadas e analisadas em Faria (2012).

Análise da Atividade com o Padrão Fractal Lunda-Design

Embora todos os alunos participantes do curso tenham realizado as atividades, iremos expor, nesta seção, apenas a análise da atividade de investigação do Padrão Fractal Lunda-Design realizada por duas alunas em dupla, as quais atribuímos o nome de Mariana e Gisele. Em alguns momentos, onde há uma troca de ideias proposta pela pesquisadora, os nomes de outros alunos também aparecem na análise.

Iniciando a atividade, as alunas foram convidadas a manipular, no GeoGebra, a construção do Padrão Fractal e leram na primeira questão que os níveis do fractal poderiam ser identificados pelas cores verde (nível 0) e roxo (nível 1), conforme mostra a figura 4.

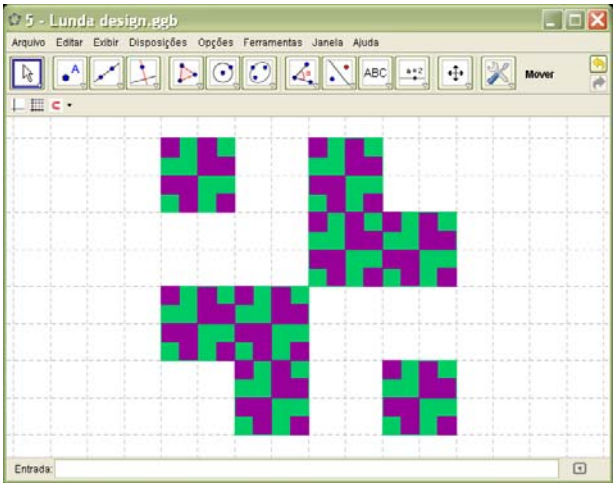
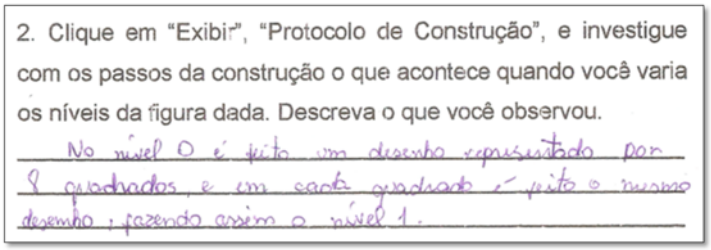


Figura 4. Padrão Fractal Lunda-Design no GeoGebra (Faria, 2012).

As alunas iniciaram a investigação do Lunda-Design, com o intuito de identificar regularidades no processo de construção. Por meio da ferramenta protocolo de construção, as alunas reviram por três vezes os passos da construção e Gisele afirmou "*Em cada quadrado é feito o mesmo desenho dentro dele, que foi feito no nível 0. Foi feito o mesmo desenho do nível 0"*. Depois disso, as alunas registraram suas observações (Figura 5).


2. Clique em "Exibir", "Protocolo de Construção", e investigue com os passos da construção o que acontece quando você varia os níveis da figura dada. Descreva o que você observou.

No nível 0 é feito um desenho representado por 8 quadrados, e em cada quadrado é feito o mesmo desenho, fazendo assim o nível 1.

Figura 5. Questão 2 realizada pela dupla de alunas (Faria, 2012).

Já nessa parte inicial de exploração do Lunda-Design, ficou evidente a relevância dos recursos do GeoGebra na visualização de peculiaridades nas construções dos Padrões Fractais. Desde as primeiras manipulações foram utilizadas as ferramentas *ampliar* e *reduzir,* que permitem que as figuras sejam analisadas em diferentes tamanhos, e a ferramenta *protocolo de construção* que permite que os passos da construção finalizada sejam revistos.

Nas primeiras manipulações do Padrão Fractal no GeoGebra já haviam indícios de que a dupla estava buscando o padrão do fractal, pois reviram por vezes o processo de construção, observando o que acontecia quando os níveis eram variados.

A questão 3, solicitava que as observações fossem compartilhadas, e o diálogo foi iniciado:

<u>Gisele:</u> *No nível 0 foi feito um desenho com 8 quadradinhos. Dentro de cada um desses é feito o mesmo desenho do nível zero, mas de cor diferente.*

<u>Rejane:</u> *E a cor representa o nível.*

<u>Diogo:</u> *O desenho do roxo é o mesmo desenho do verde, mas em menor proporção.*

<u>Rejane:</u> *E vocês sabem me dizer que proporção é essa?*

<u>Mariana:</u> *Tamanho.*

Rejane: Certo, mas quantas vezes menor?

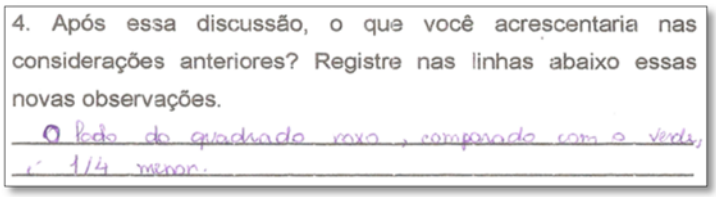
Mariana: Um quarto (1/4).

Rejane: O quadrado roxo é ¼ menor (que o quadrado verde)?

Mariana: É.

Em trechos dos diálogos ocorrido ao longo da atividade, como na fala acima de Diogo, fica claro que ao se dedicarem à compreensão do Padrão Fractal, a visualização ganhou destaque e permitiu que as propriedades geométricas de autossimilaridade e complexidade infinita fossem observadas ainda que não formalizadas.

Depois desse diálogo, as alunas registraram as observações da questão 4 (Figura 6).


4. Após essa discussão, o que você acrescentaria nas considerações anteriores? Registre nas linhas abaixo essas novas observações.

O lado do quadrado roxo, comparado com o verde, é 1/4 menor.

Figura 6. Questão 4 realizada pela dupla Mariana e Gisele (Faria, 2012).

Ao compartilhar suas observações com os demais colegas, a dupla registrou o que ainda não haviam observado. Este momento de compartilhamento foi necessário para que o maior número possível de informações daquele Padrão Fractal fosse extraída.

Na quinta questão (Figura 7), Mariana lê o enunciado e afirma para Gisele que no nível 0 haverá 8 quadrados.

5. De quantos quadrados o nível 0 do fractal Lunda-design é composto?

8 quadrados.

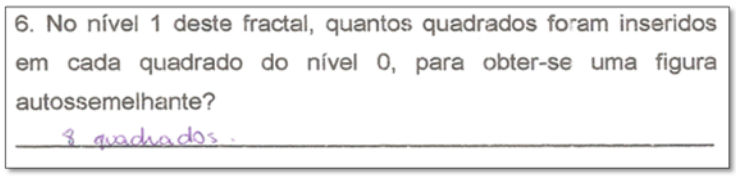
Figura 7. Questão 5 realizada pela dupla de alunas (Faria, 2012).

Na sexta questão (Figura 8), as alunas conversam:

Mariana: No nível 1, quantos quadrados serão inseridos em cada quadrado do nível zero... Oito! Quantos foram inseridos em cada quadrado?

Gisele: É pra somar tudo (todos os quadrados do nível 1) ou é em cada?

Mariana: Em cada quadrado. São oito.


6. No nível 1 deste fractal, quantos quadrados foram inseridos em cada quadrado do nível 0, para obter-se uma figura autossemelhante?

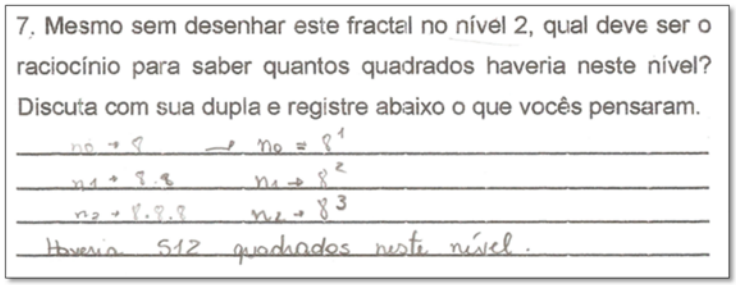
8 quadrados.

Figura 8. Questão 6 realizada pela dupla de alunas (Faria, 2012).

O diálogo prossegue sobre a questão 7:

<u>Mariana:</u> Agora na 7 ela quer saber no nível 2. Vai ser oito vezes oito vezes oito (8x8x8). Você entendeu por quê? No nível zero tem oito quadrados. Já no nível 1, são oito em um, então são oito vezes oito (8x8). E no (nível) 3 vai ser oito vezes oito vezes oito (8x8x8). Entendeu?

Após essa conversa, as alunas fazem as contas na computador, e registram que no nível 2 haveria 512 quadrados (Figura 9).


7. Mesmo sem desenhar este fractal no nível 2, qual deve ser o raciocínio para saber quantos quadrados haveria neste nível? Discuta com sua dupla e registre abaixo o que vocês pensaram.

$n_0 \to 8 \to n_0 = 8^1$

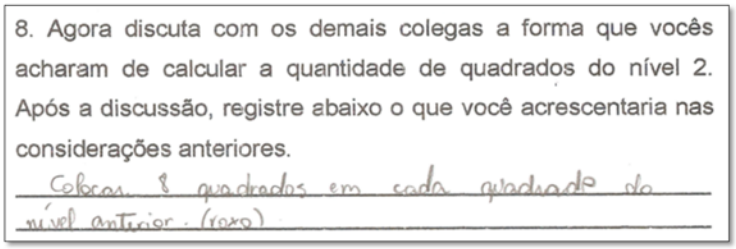
$n_1 \to 8.8 \quad n_1 \to 8^2$

$n_2 \to 8.8.8 \quad n_2 \to 8^3$

Haveria 512 quadrados neste nível.

Figura 9. Questão 7 realizada pela dupla de alunas (Faria, 2012).

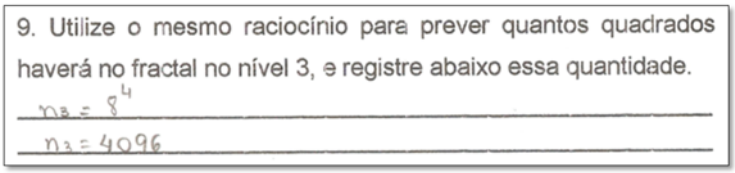
Na oitava questão, os alunos comentaram que para formar o nível 2, bastava inserir oito quadrados no nível 1 (Figura 10).


8. Agora discuta com os demais colegas a forma que vocês acharam de calcular a quantidade de quadrados do nível 2. Após a discussão, registre abaixo o que você acrescentaria nas considerações anteriores.

Colocar 8 quadrados em cada quadrado do nível anterior. (roxo)

Figura 10. Questão 8 realizada pela dupla de alunas (Faria, 2012).

Em seguida, as alunas fizeram a questão 9, que pedia que calculassem quantos quadrados teria o fractal no nível 3, e registraram que haveria 8^4 quadrados nesse nível, e com a caluladora do computador, calcularam essa potência e viram que o resultado era 4096 (Figura 11).


9. Utilize o mesmo raciocínio para prever quantos quadrados haverá no fractal no nível 3, e registre abaixo essa quantidade.

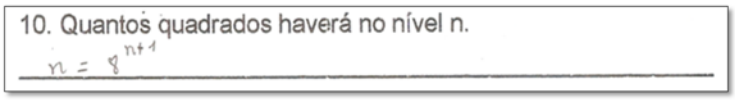
$n_3 = 8^4$

$n_3 = 4096$

Figura 11. Questão 9 realizada pela dupla de alunas (Faria, 2012)

Até a nona questão Mariana e Gisele estavam empenhadas na Procura do Padrão. As alunas procuraram identificar quantos quadrados compunham o fractal nos quatro níveis iniciais, mesmo tendo representado geometricamente apenas os níveis 0 e 1. Analisando o protocolo da construção elas buscaram extrair informações dos dois níveis iniciais e, por meio deles, pensar nos níveis seguintes. Assim, por meio da manipulação e análise, os alunos procuraram o padrão do Lunda-Design.

Na questão seguinte que questionava quantos quadrados haveria no nível n, a dupla registrou que haveria 8^{n+1} (Figura 12).


10. Quantos quadrados haverá no nível n.

$n = 8^{n+1}$

Figura 12. Questão 10 realizada pela dupla de alunas (Faria, 2012)

Nessa décima questão, as alunas passaram pela fase de Reconhecimento do Padrão. Dizemos isso com base em Herbert e Brown (2000), que afirmam que é nesta fase que os alunos buscam representações matemáticas que expressem as observações realizadas com a exploração do padrão. Nessa questão, após diálogos e investigações, a dupla registrou que para saber quantos quadrados haveria em um nível qualquer, bastava elevar o 8 (que é o número que estava sendo multiplicado de nível para nível) a n+1, ou seja, a um número a mais do que o nível que está sendo procurado.

Na questão seguinte (Figura 13) as alunas registraram que para calcular quantos quadrados haveria no nível n+1, bastava fazer 8^{n+2}, como podemos observar na fala de Mariana para Gisele:

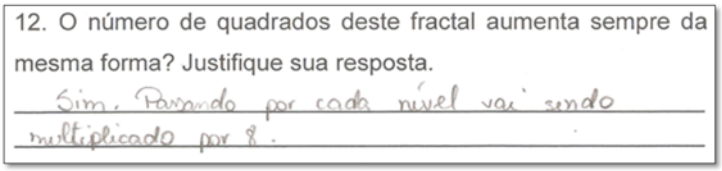
<u>Mariana:</u> No nível n+1 é só fazer oito elevado a n+1+1, que é oito elevado a n+2 ($8^{n+1+1}=8^{n+2}$).

11. E no nível n+1?

$n = 8^{n+2}$

Figura 13. Questão 11 realizada pela dupla de alunas (Faria, 2012)

Encerrando a atividade, as alunas registraram que ao longo dos níveis o número de quadrados do fractal aumenta multiplicando-se o número de quadrados do nível anterior por 8, como podemos ver na figura 14.


12. O número de quadrados deste fractal aumenta sempre da mesma forma? Justifique sua resposta.

Sim. Passando por cada nível vai sendo multiplicado por 8.

Figura 14. Questão 12 realizada pela dupla de alunas (Faria, 2012)

Assim, nas questões 11 e 12 a dupla atingiu a Generalização segundo Herbert e Brown (2000), pois encontrou uma expressão geral para um nível posterior a um nível qualquer (nível n+1), e fez isso retomado a situação inicial, que consistia em inserir oito quadrados dispostos como na figura inicial, dentro de cada quadrado gerado.

A atividade apresentada nesta seção é um exemplo das realizadas em Faria (2012). Nessa atividade, especificamente, os conteúdos matemáticos explorados foram a criação de sequências e de expressões gerais. Por meio dela foi exposta uma reflexão sobre a utilização de Padrões Fractais, por meio de um SGD, ao processo de generalização de conteúdos matemáticos. Finalizando este trabalho, trazemos a próxima seção sintetizando as contribuições ao processo de generalização de conteúdos matemáticos propiciadas pela exploração e construção de Padrões Fractais no GeoGebra.

Algumas Considerações

Buscamos, neste artigo, apresentar as inferências e resultados obtidos na análise de dados de Faria (2012). Além do que já foi apresentado ao longo deste trabalho, destacamos alguns pontos que consideramos relevantes nesta última seção.

Primeiramente, destacamos que uma das contribuições de Faria (2012) para a Educação Matemática está relacionada ao estudo dos Padrões Fractais. Este trabalho propôs um olhar específico sobre fractais e padrões, ao considerá-los como Padrões Fractais, um tipo particular de padrão, e também por entender que cada fractal é composto de características correspondentes as que encontramos nos padrões numéricos, geométricos e algébricos.

De forma geral, os Padrões Fractais contribuíram ao processo de generalização de conteúdos matemáticos por possuírem características que possibilitam a exploração de diversos conteúdos matemáticos e nesse processo, de maneira intrínseca, tomam parte propriedades dos fractais que constituem um padrão, entre as quais destacamos a autossimilaridade, que faz com que cada nível de um fractal seja semelhante aos demais, e a complexidade infinita, que diz respeito a infinitude dos processos de iteração. Sendo assim, nos fractais sempre há um padrão, envolvendo um ou mais conceitos matemáticos, a ser buscado, reconhecido e generalizado.

Além disso, os Padrões Fractais possuem a particularidade, se comparado a outros tipos de padrões, de proporcionarem a exploração concomitante não somente das características numéricas e geométricas, mas também de propriedades algébricas.

Cabe destacar que o GeoGebra contribuiu significativamente ao processo de generalização de conteúdos matemáticos, pois atuou durante as três Fases de Investigação de um Padrão. A riqueza do GeoGebra quanto à visualização, construção e manipulação dos fractais em seus diversos níveis, que envolve o dinamismo desse software, permitiu a interação dos alunos com as particularidades que fazem com que o fractal repita infinitamente, ao longo das iterações, sua estrutura inicial. Além disso, este software permitiu a exploração das características de um nível específico e sua comparação com níveis posteriores e anteriores, possibilitando que os demais níveis fossem representados matematicamente.

Especificamente sobre o GeoGebra, a aluna Mariana afirmou: "*Fazer no software, além de não ser trabalhoso, chama atenção do aluno, atrai. Porque mexer no computador é uma coisa atual".* Ainda sobre o GeoGebra, o aluno Higor afirmou que o GeoGebra o ajudou *"A ter noção das formas, a ter conhecimento. É mais fácil manusear no programa um objeto (como compasso), do que manualmente. E na mão, se errar o cara tem que desmanchar, e no GeoGebra tem a opção de voltar".* As palavras dos alunos destacam como o GeoGebra atuou durante o processo de exploração dos Padrões Fractais.

Ao longo das atividades, vários conteúdos matemáticos foram abordados, como área de quadrados, comparação entre raios de circunferências e entre segmentos, criação de expressões gerais, frações, uso de tabelas, perímetros, potências, progressões aritméticas e geométricas, sequências e o teorema de Pitágoras. Destacamos que embora os conteúdos matemáticos explorados tenham sido os citados, outros como noção de limite, área de outras figuras geométricas e logaritmos, podem ser explorados nos Padrões Fractais apresentados e em outros também. Além disso, outros tipos de padrões podem ser estudados por meio do GeoGebra, assim como os Padrões Fractais podem ser estudados em outros softwares. Especificamente na construção de Padrões Fractais, muitas são as possibilidades de criação no GeoGebra, com ousadia e criatividade, é possível formar diversos Padrões Fractais.

Finalizando, registramos que este trabalho apresentou um olhar ao processo de generalização de conteúdos matemáticos da perspectiva de um curso baseado em Padrões Fractais. É certo que outros Padrões Fractais, referencial teórico e abordagens podem ser empregados e, portanto, novas pesquisas sobre o processo de generalização de conteúdos matemáticos e sobre os Padrões Fractais podem ser desenvolvidas.

Bibliografia e Referências

Alrø, H., & Skovsmose, O. (2006). *Diálogo e Aprendizagem em Educação Matemática.* Belo Horizonte: Autêntica.

Barbosa, R. M. (2002). *Descobrindo a Geometria Fractal – Para a sala de aula.* Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Barbosa, R. M. (2000). *Aprendendo com Padrões Mágicos*. Araraquara: Publicações da SBEM – SP, número 1.

Eberson, R. R. (2004). Um Estudo sobre a construção de Fractais em ambientes computacionais e suas relações com transformações geométricas no plano. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Faria, R. W. S. (2012). *Padrões Fractais: Contribuições ao processo de Generalização de Conteúdos Matemáticos* (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

Herbert, K. E., & Brown, R. (2000). Patterns as tools for algebraic reasoning. Reimpresso por Barbara Moses, ed., Algebraic Thinking, Grades K-12: Readings from NCTM's School – Based Journals and Other Publications. Reston, Va.: National Council of Teachers of Mathematics.

Ponte, J. P., Brocardo, J. & Oliveira, H. (2003). *Investigações Matemáticas na Sala de Aula.* Belo Horizonte: Autêntica.

Santos, J. G. (2008). *Observação e Generalização de Padrões: um tema para a investigação de professores sobre sua própria prática* (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática). São Paulo: Pontifícia Universidade Católica.

Vale, I., Palhares, P., Cabrita, I., & Borralho, A. (2005). *Os Padrões no ensino e aprendizagem de Álgebra.* Actas do XIV Encontro de Investigação em Educação Matemática da SPCE.

Vale, I., & Pimentel, T. (2005). Padrões: um tema transversal no currículo. *Revista Educação e Matemática, 85*, nov/dez, 14-20. Portugal.

La construcción del plano cartesiano apoyada en software didáctico

Carlos **Espinosa** Marchán
Escuela Secundaria Técnica No. 213 "Bandera Nacional" de Iguala de la Independencia
México
carlanguix@hotmail.com
Jaime **Arrieta** Vera
Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero
México
jaime.arrieta@gmail.com
Celma **Espinosa** Marchán
Centro de Bachillerato Tecnológico Industrial y de Servicios No. 56
México
celmaem@hotmail.com
Rolando **Roa** Vásquez
Escuela Secundaria Técnica No. 213 "Bandera Nacional" de Iguala de la Independencia
México
roles.r@hotmail.com

Resumen

El presente trabajo es parte de una investigación en curso que pretende dar cuenta de las primeras construcciones de gráficas cartesianas en niños de 12 y 13 años, así como elaborar materiales multimedia y diseño de aprendizaje para ello. Se desarrolla en el marco del proyecto de Laboratorios Virtuales de Ciencias que tiene la intención de incorporar las prácticas de modelación al sistema escolar, particularmente en las escuelas Secundarias y de Nivel Medio Superior del Estado de Guerrero, México. Se reporta la experiencia de un grupo de estudiantes que participan en un diseño de aprendizaje con la intención de construir el plano y la gráfica cartesiana utilizando software didáctico elaborado por nosotros.

Palabras clave: software didáctico, plano cartesiano, geogebra, primeras construcciones.

Introducción

El proyecto de Laboratorios Virtuales de Ciencias tiene la intención de incorporar las prácticas de modelación al sistema escolar, particularmente en las escuelas Secundarias y de Nivel Medio Superior del Estado de Guerrero, México. Una de las características específicas de este proyecto es que los estudiantes regularmente participan en puestas en escena de diseños de aprendizaje basados en prácticas de modelación, los estudiantes experimentan con diversos fenómenos y construyen modelos para predecirlos, comprenderlos, modificarlos, en suma, para intervenir en ellos.

En puestas en escena con estudiantes de 12 y 13 años de hace diez años, de 2002 (Méndez, 2008; Arrieta, 2003), grafican los datos con gráficas cartesianas, ahora los estudiantes lo hacen con gráfica de barras. Es decir, en menos de diez años la gráfica cartesiana ha sido desplazada por la gráfica de barras.

Una hipótesis es que este cambio en el procedimiento de los estudiantes para graficar se debe a los cambios propuestos en el currículo de la escuela secundaria (Educación Básica. Secundaria. Plan de estudios, 2006) donde proponen abordar la estadística de forma relevante.

Reportamos la experiencia con un grupo de estudiantes de primer año de la escuela secundaria mexicana que participa en la puesta en escena del diseño de aprendizaje. Antes de iniciar la puesta en escena se pide a los alumnos que localicen puntos en el plano cartesiano cuando se les proporciona sus coordenadas, las respuestas son muy variadas y se percibe la influencia de las gráficas de barras.

Figura 1. Resultados de alumnos de primer grado de secundaria al graficar en el plano cartesiano.

Cuando participan en la puesta en escena del diseño e interactúan con el software los actores juegan y compiten entre ellos. Después de la interacción se les pide, de nuevo, localícenlos puntos en el plano y su respuesta es exitosa. En este reporte se muestran evidencia de ello.

Marco teórico

La perspectiva teórica que sostenemos es la Socioepistemología y la línea de investigación a la cual se adscribe el presente trabajo es la que discurre acerca de las prácticas sociales en relación a la construcción de los conocimientos matemáticos.

Metodología

La ingeniería didáctica se constituye como una metodología de investigación que se aplica tanto a los productos de enseñanza basados o derivados de ella, pero también como una metodología de investigación para guiar las experimentaciones en clase. Su sustento teórico proviene de la Teoría de situaciones didácticas (Brousseau, 1997) y la teoría de la transposición didáctica (Chevallard, 1991), que tienen una visión sistémica al considerar a la didáctica de la matemáticas como el estudio de las interacciones entre un saber, un sistema educativo y los alumnos, con objeto de optimizar los modos de apropiación de este saber por el sujeto (Brousseau, 1997).

El proceso experimental de la ingeniería didáctica consta de cuatro fases: Análisis preliminares, análisis a priori, experimentación y análisis a posteriori.

Resultados

Para elaborar tal diseño, es necesario distinguir los diferentes juegos de gráficas y las prácticas que los sustentan. Se ha reportado como se presenta confusión entre las trayectorias de un móvil y la gráfica cartesiana distancia-tiempo (Arrieta, 2003), de la misma manera se presentan confusiones entre la gráfica de barras y las gráficas cartesianas. Esta confusión solo es

posible esclarecerla en el terreno de las prácticas que sustentan cada gráfica. Así es que las gráficas de barras están sustentadas por la práctica de "levantar columnas de fichas", es decir de "hacer columnas de datos", la trayectoria en "el desplazamiento de un móvil en el plano", la gráfica de pastel "en el reparto de un solo pastel entre varios comensales" y la gráfica cartesiana en la co-variación, es decir, en la relación de dos variables.

Esta distinción es crucial para la elaboración del diseño, pues el diseño estaría basado en la práctica de relacionar dos variables en el plano. Una característica propia de este diseño es que utilizaría para su interacción aplicaciones multimedia apoyadas en juegos tradicionales que hagan del aprendizaje una actividad lúdica para los estudiantes.

Se ha elaborado un software atendiendo los requerimientos del diseño de aprendizaje, basado en prácticas de co-variación en el plano. Estas aplicaciones multimedia son "El Plano Cartesiano", "En busca del tesoro", "Buscando la Salida" y "Serpientes y Escaleras" diseñadas en Geogebra.

El primer software didáctico que presentamos es el del El Plano cartesiano el cual consiste en mover el punto rojo de la mosca por el plano cartesiano, nos va indicando la posición y en donde se encuentra ubicada, primero, segundo, tercero, cuarto cuadrante, en el eje de las x o el eje de las y o si se encuentra ubicada en el origen.

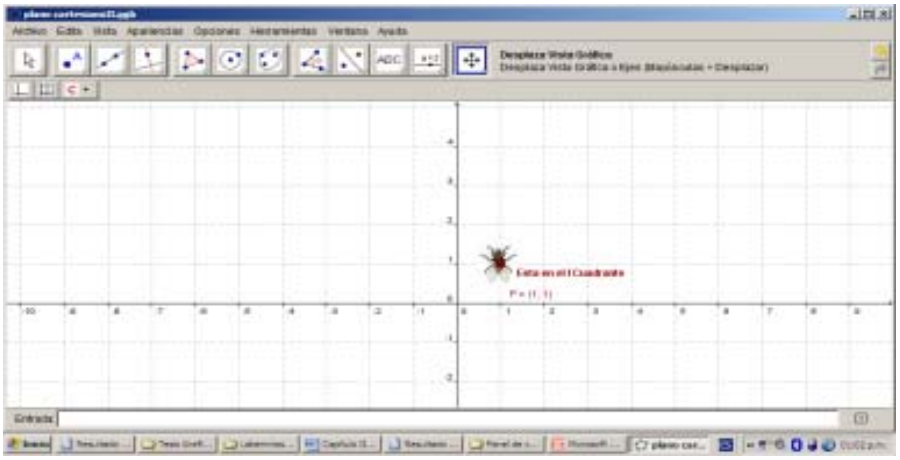
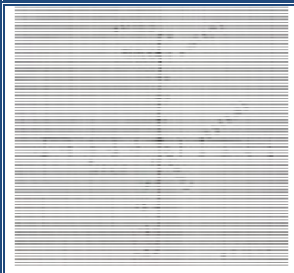
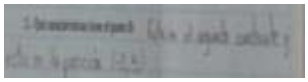


Figura 2. Simulador del plano cartesiano.

Al usar el primer simulador del plano cartesiano los alumnos exploran y aprenden como está formado el plano cartesiano, al terminar la exploración se les pide que en una hoja milimétrica construyan el plano cartesiano y ubiquen los puntos que se les dan, obteniendo los siguientes resultados.

Tabla 1
Validación de la puesta en escena del plano cartesiano.

Actividades Propuestas	*Análisis A priori*	*Análisis A posteriori*	*Validación*
	Se espera que los alumnos no tengan ninguna dificultad al crear el plano cartesiano en el papel milimétrico y ubicar los puntos ya que al explorar el simulador observaron cómo está formado el plano cartesiano.		Como podemos observar coincide el análisis a priori con él a posteriori los alumnos contestan correctamente las preguntas de la primera puesta en escena.
	Se encuentra ubicado en el segundo cuadrante. El número de las abscisas es negativo y el de las ordenadas es positivo.		
	Se encuentra ubicado en el tercer cuadrante. Ambos números son negativos.		

En esta puesta en escena se puede rescatar que los alumnos en educación primaria el plano cartesiano lo veían en un solo cuadrante y ubicando cuadras como se muestra en la figura 3. Argumentando cual era la ruta más corta para llegar de la casa de Juanito a la casa de Pepe, ellos comentaron que tenían que caminar una cuadra al este y dos cuadras al norte.

Figura 3. Plano cartesiano en educación primaria.

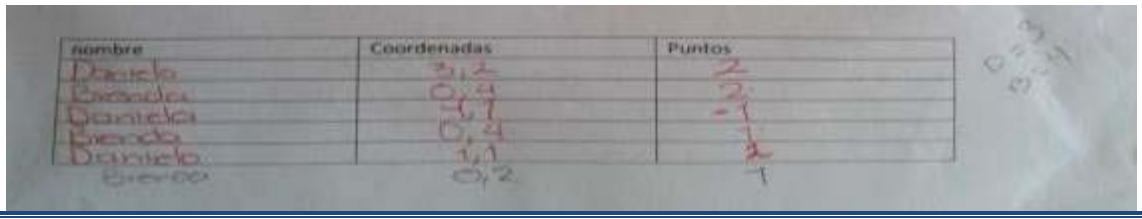
Puesta en escena en busca del tesoro

Figura 4. Pantalla inicial del software “En Busca del Tesoro”.

La figura 4, corresponde al software en busca del tesoro, el cual consiste en mover el punto azul que tiene el pirata la coordenada que marca, se encuentran escondidos un tesoro, un mapa, y un pirata con el tesoro, si mueves el punto a una coordenada incorrecta te perderás medio punto, si encuentras el tesoro te ganarás dos puntos, si encuentras un mapa ganarás un punto y si encuentras el pirata con tesoro perderás un puntos menos.

Consideraciones previas: se puede dejar a los alumnos que ellos mismos exploren el software, si el maestro observa que los alumnos no establece sus reglas puede considerar los siguientes aspectos:

En este enlace puedes descargar el software del tesoro https://www.dropbox.com/s/h8bvnxzml28yr5i/El_tesoro.html. El juego está diseñado para dos jugadores. Cada jugador anota sus puntos que va obteniendo. Gana el jugador que obtenga más puntos.

Actividades Propuestas
Consiste en ubicar los piratas en la coordenada que le indica, dando clic con el botón derecho en el punto azul que tiene el pirata y arrastrarlo a la coordenada que le indica, si lo ubica mal se le descuenta medio punto, si encuentra un pirata se le descuenta un punto, si aparece un mapa se le da un punto extra y si sale el tesoro se le dan dos puntos extras.
Análisis a priori
Se espera que los alumnos logren llevar al pirata a la coordenada que le corresponde y construyan su tabla para registrar cada uno de sus movimientos.
Análisis a posteriori

Validación
Los alumnos juegan, se divierten y logran ubicar los piratas en el lugar que les corresponde, construyen su tabla de datos suman sus puntos y para esta puesta en escena resulta ganadora Brenda. Al confrontar el análisis a priori con el análisis a posteriori coinciden y por lo tanto es válido este diseño de aprendizaje Buscando el Tesoro.

nombre	Coordenadas	Puntos
Daniela	3,2	2
Brenda	0,4	2
Daniela	-1,1	-1
Brenda	0,4	1
Daniela	1,1	2
Brenda	0,2	1

Nota: Cada vez que se abre el simulador las coordenadas de los piratas se generan aleatoriamente por lo tanto al aplicarlo en dos computadoras al mismo tiempo los puntos son diferentes y no pueden copiar los alumnos la ubicación de los piratas.

Puesta en escena Buscando la salida

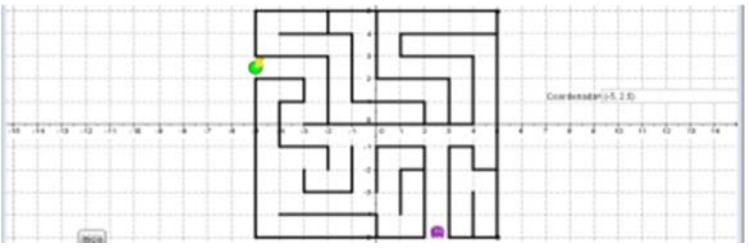
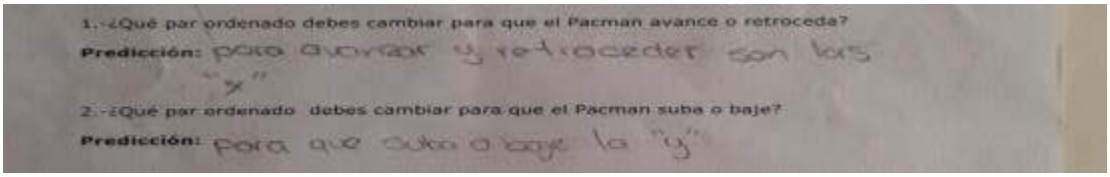
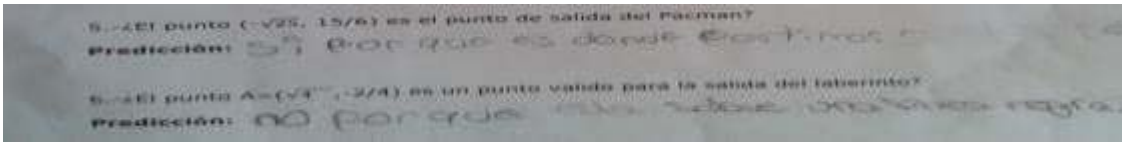


Figura 5. Pantalla inicial del software "Buscando la salida".

Consideraciones previas: Pueden jugar 2 o 3 jugadores, su nivel de complejidad va aumentando, aquí debemos escribir la coordenada (-5,2.5) que corresponde para que el pacman pueda avanzar, retroceder, subir o bajar, si los actores no establecen reglas del juego se puede sugerir lo siguiente:

El software se puede conseguir en el siguiente enlace: https://www.dropbox.com/s/e55s2334z9fzaqk/laberinto.html . Pierde turno el jugador que ubica una coordenada mal. Se puede encontrar la solución y al final gana el que tenga menos puntos rojos. Si cae un punto rojo pierde turno y regresa al inicio.

Actividades Propuestas
Consiste en llevar el pacman a donde se encuentra el fantasma, los alumnos aprenden a ubicar puntos en el plano cartesiano teniendo un mayor grado de dificultad, pueden colocar decimales, fracciones, raíces e identifican que deben mover para el pacman suba o baje, camine o retroceda.
Análisis a priori
1.-Predicción: *los actores escribirán que tienen que mover las abscisas o el eje x para que se mueva hacia adelante o hacia atrás.* ***2.-Predicción:*** *se espera que los actores escriban que para que suba o baje necesitan mover las ordenadas o el eje y.*
Análisis a posteriori
 1.-¿Qué par ordenado debes cambiar para que el Pacman avance o retroceda? **Predicción:** para avanzar y retroceder son los "x" 2.-¿Qué par ordenado debes cambiar para que el Pacman suba o baje? **Predicción:** para que suba o baje la "y"
Análisis a priori
5.- Predicción: *Se espera que los actores realicen cálculos para determinar la raíz cuadrada de 25 y den como resultado 5, y convierta a decimal la fracción dando como resultado 2.5. y determinen que el punto es igual a(-5,2.5)* ***6.- Predicción:*** *Se espera que los actores realicen cálculos para determinar la raíz cuadrada de 4 y den como resultado 2, y convierta a decimal la fracción dando como resultado -0.5 que si es un punto valido en la resolución del laberinto.*

Análisis a posteriori

Validación
Cumple el análisis a priori con él a posteriori, pero presenta mayor dificultad en el desarrollo de esta puesta en escena ya que ocupan el cálculo de raíces cuadradas, división o fracciones, en la pregunta 6 al dividir -2/4 colocan como resultado -2 y por eso argumentan que cae sobre una línea negra.

Puesta en escena Serpientes y Escaleras

Este es el juego clásico de serpientes y escaleras pero ahora utilizando el software de geogebra, se diseñó la siguiente aplicación, para poder jugar los alumnos seleccionan su personaje, dan clic en la opción que dice Tirar, automáticamente gira el dado, y avanzan el número que aparezca en el dado, ellos tienen que identificar cual es el par ordenado que deben mover *x* o y, si cae en la base de una escalera avanza a la casilla donde se encuentra la punta de la escalera, si cae en la cabeza de una serpiente, regresa a la posición donde se encuentra la cola, gana el primero que llegue a la meta. Durante la puesta en escena de este software didáctico los alumnos no tienen ningún problema en ubicar los puntos y mover a sus personajes, ellos juegan, se divierten, hacen uso de las matemáticas, al final del juego gano uno de los alumnos que no son muy destacados en la clase, argumentando uno de los más destacados que no se valía porque había ganado el que menos sabia en este juego, los cuestione preguntándoles a que se debía eso y respondieron que era cuestión de azar por ser un juego, que si lo repetían no ganaría el mismo.

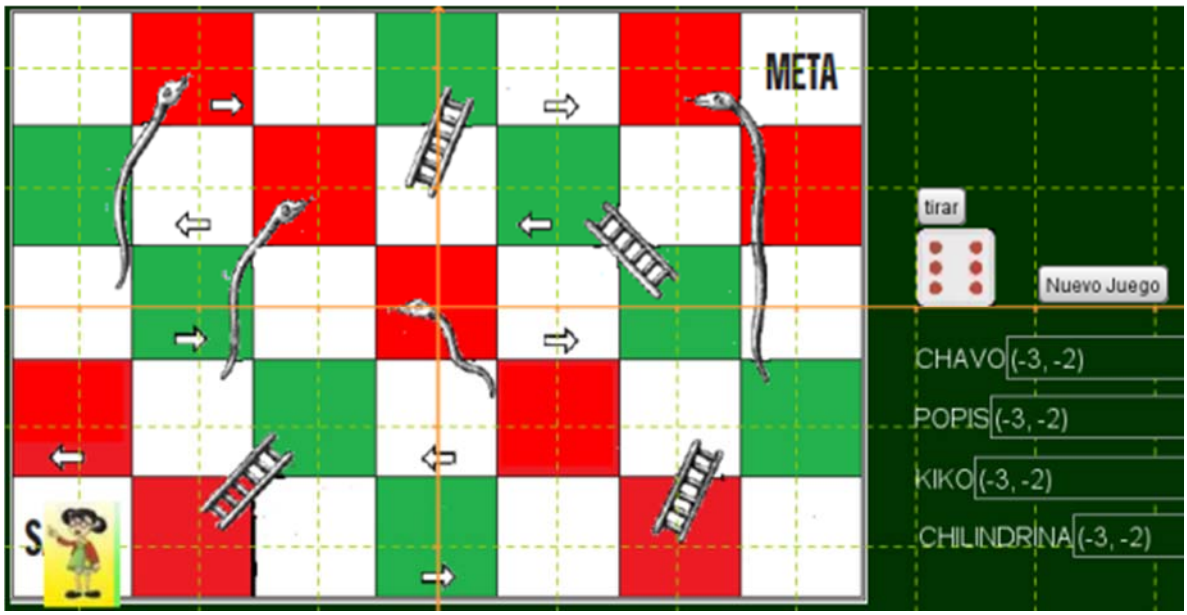
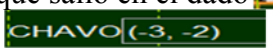


Figura 6. Pantalla inicial del software “Buscando el Tesoro”.

Consideraciones previas: Este juego consiste en la ubicación de puntos en el plano cartesiano haciendo uso del clásico juego de serpientes y escaleras, cuenta con 4 personajes (diseñado para máximo 4 jugadores) consiste en lo siguiente:

1. Descargar el software en el siguiente enlace: https://www.dropbox.com/s/zud1k4c5m3i7hl9/serpientes_y_escaleraschavo.html
2. Seleccionar un personaje
3. Dar clic en el botón que dice tirar

4. Avanzar el número de casillas que salió en el dado escribiendo la ubicación que le corresponde a la coordenada. 

5. Si caes en una escalera, escribes la coordenada que le corresponde al final de la escalera.
6. Si caes en una serpiente, bajas y escribes la coordenada correspondiente a la ubicación de la cola de la serpiente.
7. Gana el jugador que llegue primero a la meta.

Conclusiones

Para comprobar el aprendizaje de los alumnos se desarrolló la práctica presencial con una lona del plano cartesiano y salimos al patio de la escuela para que los alumnos ubicaran los puntos en el plano cartesiano lanzando unos dados rosa y naranja para representar el eje de las ordenadas y el de las abscisas. Obteniendo los siguientes resultados.

Figura 7. Alumnos ubicando puntos en el plano cartesiano de manera presencial en una lona

Durante esta puesta en escena los alumnos comprenden bien la ubicación de puntos en el plano cartesiano, aprenden y se divierten entre ellos mismos, toman sus conclusiones, les gusto bastante la aplicación de esta práctica y reforzaron lo aprendido con las puestas en escena anterior.

Los estudiantes construyen el plano cartesiano y las gráficas cartesianas en interacción con sus compañeros, interactuando con las aplicaciones específicas que hemos desarrollado.

En términos generales el análisis a priori coincide con el análisis a posteriori. Se puede observar que las respuestas de los estudiantes coinciden con las predicciones o son muy aproximadas en lo establecido. Estamos convencidos que los estudiantes tienen mucho que aportar, seguir trabajando y poniendo en práctica la utilización del laboratorio virtual de ciencias, en donde experimenten, simulen y lo hagan presencial para comprobar y comprender mejor, tener una mejor argumentación, salir de las practicas tradicionalistas, formar alumnos críticos, analíticos, reflexivos que sean capaces de enfrentar y resolver problemas de la vida cotidiana que se les presenten. Las aplicaciones multimedia las podemos descargar de los enlaces que se presentan en las referencias bibliográficas Espinosa, (C) 2013.

Referencias y Bibliografía

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula* (Tesis de Doctorado no publicada). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. México.

Artigue, M. et. Al. (1995). *Ingeniería Didáctica en educación Matemática: Un esquema para la investigación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Grupo Editorial Iberoamérica.

Artigue, M. (1998). Ingeniería didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno, & P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 88-96). Colombia: Una empresa docente.

Brousseau, G. (1994). Los diferentes roles del maestro. En C. Parra, et al. *Didáctica de Matemáticas. Aportes y reflexiones* (pp. 65- 95). Argentina: Paidós Educador.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer Academic Publishers - Mathematics Educations Library (Vol. 19). Holanda.

Chevallard, Y. (1991). *La transposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado*. Argentina: Editorial Aique.

Educación Básica Secundaria. (2006). *Plan de estudios, 2006*. Recuperado el 13 de enero de 2011 de http://telesecundaria.dgme.sep.gob.mx/formacion/planestudios2006.pdf

Espinosa, C. (2013). *Simulador del Plano Cartesiano.* Recuperado el 13 de junio del 2013 de https://www.dropbox.com/s/6vdydlx13kuwaxk/El_plano_cartesiano.html

Espinosa, C. (2013). *Simulador de en Busca del Tesoro.* Recuperado el 13 de junio del 2013 de https://www.dropbox.com/s/h8bvnxzml28yr5i/El_tesoro.html

Espinosa, C. (2013). *Simulador del Laberinto.* Recuperado el 13 de junio del 2013 de https://www.dropbox.com/s/e55s2334z9fzaqk/laberinto.html

Espinosa, C. (2013). *Simulador de Serpientes y Escaleras.* Recuperado el 13 de junio del 2013 de www.dropbox.com/s/zud1k4c5m3i7hl9/serpientes_y_escaleraschavo.html

López, C. (2010). *Las prácticas de modelación virtual, un estudio intercultural* (Tesis de Maestría no publicada). Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Méndez, M. (2008). *La experiencia como la evolución de las prácticas: La experiencia de modelar linealmente situaciones análogas* (Tesis de Maestría no publicada). Facultad de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero, México.

Secretaria de Educación Pública (2011). Educación Básica Secundaria. *Plan de estudios, 2011*. Recuperado de http://basica.sep.gob.mx/reformasecundaria/

La entrevista de carácter socrático como una estrategia para producir conocimiento Matemático en educación a distancia online

Edison Alberto **Sucerquia** Vega
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
edison.sucerquia@udea.edu.co
René Alejandro **Londoño** Cano
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
rene.londono@udea.edu.co
Carlos Mario **Jaramillo** López
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Antioquia
Colombia
carlos.jaramillo1@udea.edu.co

Resumen

En educación a distancia online, uno de los procesos de interacción que ocurren para producir conocimiento, es el diálogo (Borba, Malheiros y Amaral, 2011), sin embargo, en el campo de la educación matemática, este diálogo debe tener características que permitan progresivamente la producción de conocimiento matemático. El diálogo socrático se reconoce como un método para que un aprendiz encuentre la verdad sobre un conocimiento, así mismo, la entrevista de carácter socrático se ha implementado como una estrategia que permite generar, por una lado, experiencias de aprendizaje en relación con un conocimiento matemático y por otro lado, identificar el conocimiento que se ha producido (Londoño, 2011). El presente estudioretoma esta estrategia para propiciar interacciones en un colectivo de estudiantes-con-medios que permita una producción de conocimiento matemático de un curso en educación a distancia online, el cual se desarrolla en el marco del proyecto de investigación COLCIENCIAS-CAPES[1].

Palabras clave: educación a distancia online, entrevista de carácter socrático, humanos-con-medios, producción de conocimiento matemático.

Contextualización del estudio

Esta investigación es motivada por la propia experiencia docente de los investigadores, relacionada con los cursos de matemáticas que se imparten en los programas de pregrado de la

[1] Proyecto de investigación "La formación posgraduada de profesores de matemáticas en un ambiente de educación online" aprobado con código N° 111562838729 de la convocatoria 628 del 2013, que se viene desarrollando de manera cooperada entre los grupos de investigación Educación Matemática e Historia (EDUMATH) de Colombia y el Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM) de Brasil, y con apoyo de entidades como COLCIENCIAS y CAPES

Facultad de Ingeniería desarrollados en ambientes online del programa Ude@[2], entre ellos el de Cálculo Integral, donde se cuestiona sobre aspectos relacionados con los procesos de interacción entre estudiantes y docentes y también con los respectivos medios propios del programa, en tanto que, en algunos casos, los estudiantes han manifestado que hace falta "una mayor interacción", para "comprender" los conocimientos matemáticos respectivos del curso. Dado lo anterior, se podría interpretar que la interacción es un elemento que influye para que los estudiantes construyan conocimiento matemático asociado a los conceptos del curso, aspecto que no está claramente establecido en la estructura del programa Ude@. Así mismo, la investigación se apoya en estudios realizados por autores tales como: Borba y Villareal, 2005; Borba et al, 2011; Bairral, 2007; Zulatto, 2007 y Barbosa, 2009), quienes reconocen la interacción como un componente importante de los procesos que se imparten en educación a distancia virtual.

En educación universitaria,los conceptos matemáticos, especialmente, los relacionados con el pensamiento matemático avanzado, revisten una gran importancia en el desarrollo de los conocimientos matemáticos de los diferentes cursos de cálculo. Por lo tanto, analizar la manera cómo los estudiantes interactúan con los medios durante su proceso de aprendizaje para construir su conocimiento matemático, es objeto de especial interés para el presente estudio.

En un curso de cálculo, el conocimiento matemático, tanto en sus aspectos conceptuales como procedimentales, hace parte del proceso de aprendizaje, por lo tanto, reconocer sus características, definiciones y propiedades, es fundamental para el desarrollo del curso y de la investigación. Si bien la investigación no podrá abordar todos los conocimientos matemáticos de un curso de cálculo integral, centrará su atención en algunos conceptos relacionados con procesos de razonamiento infinito, haciendo énfasis en identificar las interacciones que permitan producir un conocimiento matemático. Entre los conceptos relevantes del curso de cálculo integral, están: el área bajo una curva, la integral indefinida, el teorema fundamental del cálculo y la convergencia de series.

Al parecer, las diferentes interacciones con los múltiples medios están directamente relacionadas con las diferentes maneras en que los estudiantes producen el conocimiento matemático. Además, para que esta producción pueda enriquecerse, se espera que el estudiante, interactúe de manera reflexiva, crítica, analítica y creativa con estos múltiples medios, sin embargo, los cursos de matemáticas del programa Ude@ no incluyen criterios que permitan describir esta interacción y analizar el conocimiento matemático producido por la unidad estudiantes-con-medios.

Dado lo anterior, esta investigación pretende realizar reflexiones sobre la manera cómo un colectivo de estudiantes-con-medios interactúan para producir conocimiento, específicamente los relacionados con el curso de cálculo integral que se desarrolla en ambientes virtuales de aprendizaje, permitiendo indagar sobre una visión de los posibles obstáculos conceptuales que se encuentran en dichas construcciones y así, establecer rutas metodológicas que posibiliten el mejoramiento de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, abordados en programas de educación a distancia online.

[2] Programa de educación virtual de la Facultad de ingeniería de la Universidad de Antioquia http://www.udea.edu.co/portal/page/portal/Programas/udearroba

Referentes teóricos

Este proyecto de investigación tiene como referente principal, el constructo teórico "Humans-with-media" planteado por Borba y Villareal (2005), sin embargo, deja abierta la posibilidad de que otros referentes teóricos puedan contribuir a develar las interacciones que realizan un colectivo de estudiantes-con-medios, para la producción de conocimiento matemático en la Educación a distancia en la modalidad online.

El constructo teórico propuesto por los investigadores Marcelo C. Borba y Mónica Villareal en el año 2005, nace de las reflexiones realizadas por los autores, sobre la aparente dicotomía que se presenta entre los humanos y la tecnología, y las consecuencias relevantes que se presentan en el aula de clase. Igualmente, propone hablar de la tecnología como las herramientas en interacción con los seres humanos, de tal manera que, no se contempla la posibilidad de pensarlos de forma independiente, por lo tanto, asume los humanos y la tecnología como una unidad que determina la producción de conocimiento.

Por otra parte, dado que la investigación es desarrollada en un programa de educación a distancia online, es necesario tener en cuenta algunas de sus definiciones, entre ellas tenemos:la educación a distancia para Moran (2002), "es el proceso de enseñanza y aprendizaje, mediado por las tecnologías, donde profesores y alumnos están separados en el espacio y/o en el tiempo" (p.1); por otra parte, según Borba et al(2011), "puede ser entendida como la modalidad de educación que acontece primordialmente mediada por interacciones vía internet y tecnologías asociadas" (p. 17);para Salazar y Melo (2013) "se define como un conjunto de relaciones pedagógicas entre estudiantes, docentes e institución, basadas o apoyadas en el uso de tecnologías para el desarrollo sistémico de procesos formativos de calidad" (p.102). Estas posturas se consideran pertinentes ya que según el Ministerio de Educación Nacional (2009), considera la educación virtual, "también llamada "educación en línea", se refiere al desarrollo de programas de formación que tienen como escenario de enseñanza y aprendizaje el ciberespacio." (p.1) características que corresponden al programa Ude@.

Desde las diferentes concepciones mencionadas y teniendo en cuenta el contexto del programa Ude@, la educación a distancia online, puede entenderse como el proceso de interacción entre estudiantes y docentes, a través de diferentes interfaces tecnológicas y otros medios, que permiten el diálogo, la comunicación y la producción de conocimiento. (Sucerquia, Londoño y Jaramillo, 2013)

Desde los principales referentes teóricos usados en esta investigación, Humans-with-media de Borba y Villareal (2005) y Educación a Distancia Online de Borba et al (2011), se reconoce que el diálogo es un factor importante en la educación a distancia online. Desde el contexto de las matemáticas, se identifica que este tipo de diálogo debe presentar algunas características particulares, entre otras, debe permitir por parte de un colectivo de personas la expresión de ideas, conocimientos, razonamiento crítico y reflexivo, procesos argumentativos, etc. Para que dicha producción pueda generarse, estas características deben estar en correspondencia con las propias del diálogo socrático.

Sócrates propuso el *Diálogo Socrático* como un método para que el aprendiz encuentre la verdad sobre un conocimiento (De la Torre, 2003b). El diálogo socrático es reconocido desde la antigüedad, como una estrategia para promover el pensamiento crítico, de tal manera, que sea el estudiante quien descubra el conocimiento, a partir de una serie de preguntas y no de respuestas, es decir, que construya su conocimiento a partir de la reflexión crítica de una situación motivada

por una serie de interrogantes. En este sentido, es una estrategia que puede ser articulada a la Educación a distancia online teniendo en cuenta las diversas posibilidades de interacción que se generan a través de los múltiples medios.

De la Torre (2003a) describe la importancia del método socrático en la enseñanza de un conocimiento matemático, el desarrollo de esta estrategia lo propone desde la elaboración de una entrevista, donde partiendo de preguntas generales se motiva al estudiante progresivamente a producir un conocimiento. En la entrevista, el lenguaje es un factor fundamental para determinar si el estudiante ha comprendido los conocimientos matemáticos; el vocabulario, las relaciones significativas entre los conceptos, entre otros aspectos, son factores de análisis en esta propuesta de enseñanza. Así mismo, Londoño (2011), también propone la utilización de una entrevista de carácter socrático como una estrategia para la comprensión del conocimiento matemático.

El constructo teórico Humans-with-media presenta como ejemplos de producción de conocimiento, algunos diálogos realizados por los profesores en formación posgraduada de cursos de geometría dinámica desarrollados en ambientes online (Borba y Villareal, 2005). Las entrevistas fueron utilizadas como una de las herramientas que evidencian el conocimiento producido por el colectivo de participantes del curso y fueron el principal instrumento de análisis. Sin embargo, el diálogo socrático no se utiliza en las entrevistas como una estrategia metodológica para la producción de conocimiento, aspecto que pretende ser abordado en la presente investigación a través del diseño de una entrevista de carácter socrático.

A continuación, se amplía la concepción de entrevista de carácter socrático que se viene diseñando, analizando y refinando en correspondencia al trabajo de campo propio de la investigación, la cual puede considerarse como una estrategia metodológica en el presente estudio, teniendo en cuenta las perspectivas de la investigación cualitativa en educación matemática propuestas por Borbay Araujo (2006) y que se encuentran en correspondencia con la producción de conocimiento por parte de un colectivo pensante constituido por seres-humanos-con-medios.

Entrevista de carácter socrático

Según De la Torre (2003b) citado por (Londoño, 2011) "El propósito de Sócrates, tal como se perfila en los diálogos de Platón, es que su interlocutor descubra la verdad sobre el concepto que se está debatiendo, […] no como un resultado de la enseñanza, sino, por la propia reflexión" (p.38). Así mismo, plantea que:

El método empleado por Sócrates consta de dos partes: destructiva una, creativa la otra. En la primera etapa, Sócrates toma como punto de partida la concepción del interlocutor acerca del asunto en cuestión, permitiéndole descubrir las contradicciones y las faltas de tal concepción. En la segunda etapa, llamada mayéutica, Sócrates se ve a sí mismo como una partera que ayuda a su interlocutor a dar a luz, a descubrir, a des-velar la verdad que lleva en sí mismo, a quitarle a esta verdad el velo que la cubre. (p.38)

Para el diseño y aplicación de la entrevista de carácter socrático, se tienen en cuenta las características enunciadas por Londoño (2011), en relación al diálogo que sostiene Sócrates con el esclavo de Menón. Estas características han sido utilizadas en otras investigaciones como las de Jaramillo (2003), De la Torre (2003a), Londoño (2011) y Jaramillo, Londoño y Jurado (2012),entre otras,para la comprensión de conocimientos matemáticos. A partir de ellas, se realiza una adaptación en el contexto de la educación a distancia online de la siguiente manera:

- La intencionalidad de la entrevista

En una entrevista, una de las características fundamentales "consiste en que el entrevistador conozca a cabalidad los objetivos que debe lograr el entrevistado durante su desarrollo" (Londoño, 2011, p. 41). Por su parte, desarrollar la entrevista en un ambiente virtual, implica que el entrevistador debe tener claridad de los aspectos que pretende alcanzar y las posibilidades de interacción que el medio elegido puede proporcionar, como también no debe perder el rumbo de los propósitos de la entrevista debido a las distracciones que los medios pueden ofrecer. Estos aspectos están relacionados principalmente con el proceso de interacción que permite una producción de conocimientos matemáticos, de tal manera que, durante el desarrollo de la entrevista, el entrevistador no pierda de vista las características del conocimiento matemático y la manera cómo los participantes realizan sus interacciones para dicha construcción, además, es importante tener en cuenta que el entrevistador puede preparar los ambientes virtuales de acuerdo con los propósitos de la entrevista, para posibilitar una orientación de las interacciones.

- El lenguaje

El lenguaje es un factor fundamental de una entrevista de carácter socrático, ya que permite explicitar la comprensión de los conocimientos (De la Torre, 2003) y, al mismo tiempo, evidenciar el conocimiento matemático producido.En este sentido, de la manera en que el entrevistador utilice un vocabulario familiar al entrevistado y acorde a sus conocimientos sobre el tema en cuestión, depende que se desarrolle un diálogo que permita una fluida interacción.

Teniendo en cuenta los medios que se utilizan en educación a distancia online, como por ejemplo, los espacios para el Chat, donde ocurre un fenómeno descrito por Borba y Villareal(2005) y también por Borba et al (2011), denominado *multi-diálogo*, en el cual ocurren diálogos simultáneos e intersectados en los cuales el entrevistador debe tratar de percibir en las respuestas, se hace necesario que el investigados haga uso de otras preguntas para profundizar o, de otro lado, poder avanzar, en caso de haber logrado un progreso en la producción de conocimiento.

- Los conceptos básicos

Inicialmente, la entrevista de carácter socrático debe indagar sobre los conocimientos previos que el estudiante posee, de tal manera que se tenga en cuenta una red conceptual preliminar, en la que se establezcan los conceptos y sus relaciones. Los medios ofrecidos por los ambientes virtuales facilitan este proceso de indagación, ya que los mecanismos de visualización se convierten en una herramienta más poderosa para abstraer los conceptos matemáticos. En este proceso, el entrevistador debe suministrar la información básica, las actividades que se pretenden desarrollar y los conceptos que serán abordados durante el desarrollo de la entrevista.

- Las experiencias previas del entrevistado

En correspondencia con los conocimientos previos y conceptos básicos, se deben plantear situaciones que permitan al entrevistado dialogar a partir de su experiencia; el entrevistador por su parte debe generar "preguntas inquisitivas (preguntas que conducen a la búsqueda cuidadosa de lo que se quiere conocer) acerca de situaciones, imágenes o ejemplos de la vida cotidiana" (Londoño, 2011, p.43) que le permitan evocar ideas y conectarlas con el entorno que le es familiar al entrevistado.En este sentido, la utilización de los ambientes virtuales, tales como un chat o una video-conferencia, por ejemplo, podrían permitir la interlocución entre varios

entrevistados para compartir sus experiencias en torno a un mismo concepto, lo que posibilitaría una nueva producción de conocimiento.

- El diálogo inquisitivo

Según Londoño (2011), "el diálogo inquisitivo le permite al entrevistador una interacción con el entrevistado y, a través de un pensamiento discursivo, que él descubra, manifieste soluciones y llegue a comprender el concepto, ampliando su red conceptual de manera espontánea" (p. 44). Esta característica del diálogo, pretende que la entrevista refleje de manera continua modificaciones a la estructura de pensamiento que un estudiante o colectivo de estudiantes presenta. En educación a distancia online, el diálogo inquisitivo debe permitir que las preguntas conduzcan al entrevistado a elegir el medio más adecuado proporcionado por el ambiente virtual, para dar respuestas que evidencien la producción de conocimiento, en términos de los procesos de interacción llevados a cabo.

- La movilización del pensamiento

Durante la entrevista, es necesario realizar una pregunta varias veces de maneras diferentes, de tal manera que a medida que se avanza en ella, el entrevistado pueda manifestar respuestas más elaboradas, con un lenguaje y argumentos más refinados y evidenciar modificaciones a su red conceptual. Así mismo, este tipo de movilizaciones, pretende que se adquiera una mayor seguridad, en relación con los conocimientos producidos. Dados los medios utilizados en educación a distancia online, el multi-diálogo es un fenómeno que permite gran variedad de situaciones simultáneas en las que se puede dar una movilización del pensamiento, mediante el uso de diversos medios propiciados por el ambiente virtual que favorecen la ampliación de su red conceptual.

- El aporte de información

Durante el desarrollo de la entrevista, el entrevistador puede realizar aportes de información con el propósito de aclarar o precisar ciertos conceptos y mejorar el vocabulario del entrevistado. En la educación a distancia online, dadas las posibilidades de los medios, estos aportes de información pueden ser brindados no sólo por el entrevistador, sino también por otros participantes en los cuales se puedan llegar a consensos en la terminología o vocabulario, con el propósito de refinar el lenguaje y, por tanto, evidenciar modificaciones en el conocimiento matemático producido. Por su parte, los ambientes virtuales poseen una gran variedad de alternativas donde el entrevistado pueda complementar la información que requiere en el momento de la entrevista, entre ellos están: los motores de búsqueda, las bibliotecas virtuales y las diferentes herramientas asociadas a la Web 2.0.

- La problematización con las ideas

La entrevista como proceso de indagación estructurado, debe motivar de manera constante a la reflexión; las preguntas buscan generar un estado donde el entrevistado se cuestione sobre sus propios pensamientos, lo que se propone como un estado de problematización de las ideas. En la educación a distancia online, la confrontación de las ideas entre los participantes usando diferentes medios, puede motivar un estado de conflicto interno que obliga al entrevistado a cuestionar y validar sus conjeturas mediante la búsqueda de información provista por el ambiente virtual; esta búsqueda puede ser desarrollada tanto en espacios sincrónicos como asincrónicos y orientada no sólo por el docente sino también por cualquier miembro del colectivo.

- El paso por los tres momentos

Según lo planteado por Londoño (2011), se debe plantear una estructura de la entrevista donde se busque tener en cuenta que el entrevistado pase por tres momentos:

Primero: que el entrevistado crea saber la respuesta a la pregunta.

Segundo: a través de las mismas preguntas, darse cuenta que no sabe. Es decir, generar una problematización.

Tercero: luego de quedar en un estado de contradicción consigo mismo, en este momento, se espera que el entrevistado evoque los deseos de llegar a la verdad.

Este paso por los tres momentos se puede desarrollar varias veces durante la entrevista, lo que se pretende es que el entrevistado, pase por un proceso donde reflexione el conocimiento que cree saber, generarle una problematización y motivar su deseo por conocer. En los ambientes virtuales, tanto en foros, chat o sesiones de videoconferencia, los participantes del colectivo de estudiantes-con-medios, pueden auto-regularse en el proceso del paso por los tres momentos. Es decir, en las discusiones propiciadas en un ambiente virtual, las respuestas contrarias pueden generar una problematización y, las posibilidades de interactuar con los medios en la búsqueda de la información, puede permitir el paso por el tercer momento, posibilitando la producción de un nuevo conocimiento.

- La red conceptual

Teniendo en cuenta *los conceptos básicos* planteados en la entrevista, se pretende organizar una estructura conceptual que busque relaciones entre los conocimientos abordados, de tal manera que durante el desarrollo de la entrevista, ésta sea ampliada o modificada, vinculando nuevos conceptos o relaciones entre los mismos. Dentro de la presente investigación y teniendo en cuenta los referentes de la educación a distancia online, se pueden utilizar diferentes medios que permiten diversos procesos de interacción, de tal manera que conjuntamente entre los participantes de un curso, se puedan realizar modificaciones en línea, y consolidar una red conceptual construida por un colectivo de estudiantes-con-medios.

Reconociendo que un aspecto importante de la interacción entre un colectivo de estudiantes-con-medios, está relacionado con el diálogo o multi-diálogo, se hace necesario involucrar una estrategia que permita regular dicho fenómeno, de tal manera que la orientación del proceso de aprendizaje esté direccionada a evidenciar el conocimiento matemático producido, por lo tanto, y dadas las características anteriormente mencionadas, se considera que la entrevista de carácter socrático, puede permitir esta regulación.

Londoño (2011), manifiesta que la entrevista de carácter socrático, es una estrategia metodológica que cumple una doble intencionalidad ya que, además de permitir identificar la comprensión que un estudiante tiene en relación con un conocimiento matemático, se convierte en una experiencia de aprendizaje y al mismo tiempo en "un instrumento para recolectar los datos en una investigación" (p.37). Por lo tanto, en la presente investigación, se utilizará como una estrategia que posibilite favorecer el proceso de interacción para evidenciar el conocimiento matemático que puede producir un colectivo de estudiante-con-medios, de acuerdo al proceso de interacción desarrollado en ambientes de educación a distancia online.

Por su parte, Borba et al (2011) afirman que el diálogo es un medio que influye en la producción de conocimiento en la educación a distancia online. Así mismo, plantea que "la

interacción, el diálogo y la colaboración son factores que condicionan la naturaleza del aprendizaje, […] los cuales resultan de una cualidad de la participación de las personas durante el proceso de producción del conocimiento" (p.29). En esta perspectiva, la entrevista de carácter socrático es una estrategia que, dadas sus características, puede permitir dicha interacción y hacer explícito el diálogo, las discusiones y los conocimientos producidos.

Consideraciones finales

Se ha identificado hasta el momento que la entrevista de carácter socrático implementada en ambientes virtuales de aprendizaje, tiene connotaciones diferentes a las planteadas por Londoño (2011), ya que estos, modifican la manera en que el entrevistador interactúa con su entrevistado; por otra parte, implementar la entrevista en un colectivo de estudiantes-con-medios, ha permitido procesos de interacción que no serían posibles en ambientes de aprendizaje presenciales; fenómenos como el multi-diálogo y la multiplicidad de formas en las que el colectivo puede acceder a aportes de información, son algunos de ellos.

Dadas las características de un proceso de educación a distancia online, la entrevista de carácter socrático, es una estrategia que parece propiciar un proceso de interacción que permita al mismo tiempo una producción de conocimiento por parte de un colectivo de estudiantes-con-medios. Consideramos que el carácter de esta producción puede entenderse como los razonamientos que el colectivo de estudiantes-con-medios realiza sobre la naturaleza abstracta de los conceptos matemáticos, que se deben evidenciar en los cambios de la red conceptual que emerge durante el desarrollo de la entrevista.

La investigación pretende hacer contribuciones metodológicas de este tipo de procesos y realizar aportes teóricos quepuedan ser articulados a los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en cursos desarrollados en ambientes online. De esta manera, establecer las características de una entrevista de carácter socrático en ambientes online, es una primera etapa dentro de este proceso investigativo.

Referencias Bibliográficas

Bairral, M. (2007). *Discurso, interação e aprendizagem matemática em ambientes virtuais a distancia.* Rio de Janeiro, Brasil: Universidade Rural do Rio de Janeiro.

Barbosa, S. (2009). *Tecnologias da informação e comunicação, função composta e regra da cadeia.* Tese de doutorado não publicada, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro-SP, Brasil.

Borba, M. y Araújo, J. (Orgs.) (2006). *Pesquisa Qualitavia em Educação Matemática.* Belo Horizonte, Brasil: Autêtica.

Borba, M., Malheiros, A. y Amaral R. (2011). *Educação a Distância Online. Coleção Tendências em educação Matemática.*Belo Horizonte, Brasil: Autêntica Editora LTDA.

Borba, M. y Villareal, M. (2005). *Humans -with-Media and the reorganization of Mathematical Thinking*. New York, USA: Springer.

De la Torre, A. (2003a). *La modelización del espacio y del tiempo: su estudio vía el modelo de van Hiele.* Tesis de Doctorado publicada. Universidad Politécnica de Valencia. Valencia - España.

De la Torre, A. (2003b). El método socrático y el modelo de van Hiele. *Lecturas Matemáticas, 24,* 99-121.

Jaramillo, C. (2003). *La noción de serie convergente desde la óptica de los niveles de van Hiele.* Tesis de Doctorado publicada. Universidad Politécnica de Valencia. Valencia - España.

Jaramillo, C., Londoño, R. y Jurado, F. (2012). *Una metodología alternativa para la comprensión de la noción de límite: El caso de la convergencia de series de términos positivos*. Alemania: Editorial Académica Española.

Londoño, R. (2011). *La Relación Inversa entre Cuadraturas y tangentes en el marco de la teoría de Pirie y Kieren*. Tesis de Doctorado no Publicada. Universidad de Antioquia. Medellín.

Ministerio de Educación Nacional. (2009). *Educación virtual o educación en línea*. Artículo publicado en:http://www.mineducacion.gov.co/1621/article-196492.html. AccesoFebrero de 2013.

Moran, J. M. (2002). *O que é educação a distância*. Recuperado de: http://www.eca.usp.br/moran/dist.htmAcceso Abril 22 de 2013.

Salazar. R. y Melo, A.(2013). Lineamientos conceptuales de la modalidad de educación a distancia.En N. Arboleda y C. Rama (Ed.) *La educación superior a distancia y virtual en Colombia: nuevas realidades* (pp. 81-111). ACESAD Asociación Colombiana de Instituciones de Educación Superior con programas a Distancia y Virtual. Bogotá, Colombia.

Sucerquia, E., Londoño, R. y Jaramillo, C. (2013). El teorema Fundamental del Cálculo en la Educación a Distancia Online. En *VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática – CIEM - ULBRA Canos /RS - Brasil* – ISSN: 2318-7271. Octubre de 2013. Publicado en: http://www.conferencias.ulbra.br/index.php/ciem/vi/paper/viewFile/1280/648

Zulatto, R. (2007). *A natureza da aprendizagem matemática em um ambiente online de formação continuada de profesores*. Tese de doutorado não publicada. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro - Brasil.

La interacción en foros virtuales en el desarrollo del proceso de Modelación Matemática con estudiantes de ingeniería

Jazmín Adriana **Juárez** Ramírez
Escuela Superior de Cómputo
México
jjuarezr@ipn.mx
José María **Chamoso** Sánchez
Universidad de Salamanca
España
jchamoso@usal.es
María Teresa **González** Astudillo
Universidad de Salamanca
España
maite@usal.es

Resumen

Algunas investigaciones señalan que al participar en una actividad mediada por foros virtuales, los estudiantes tienen la oportunidad, además de adquirir habilidades matemáticas y aprender procedimientos, explicar y justificar su propio pensamiento, discutir sus apreciaciones y utilizar las matemáticas de manera efectiva en diferentes situaciones de resolución de problemas. En este trabajo se analizan las interacciones entre estudiantes de ingeniería en un foro virtual al desarrollar una actividad de modelación matemática en un curso de ecuaciones diferenciales. Se utilizó un esquema de categorías para describir cómo participan los estudiantes al desarrollar un proyecto de modelación matemática en un entorno de aprendizaje basado en web. Los resultados indican que los niveles de interacción producidos en las aportaciones en el foro sugieren que el fácil acceso a la tecnología no es una condición suficiente para propiciar la participación activa y conseguir un alto nivel de interacción.

Palabras clave: Foros virtuales, Interacción, Modelación matemática, Ecuaciones Diferenciales, Ingeniería.

Planteamiento del problema

Actualmente se están llevando a cabo muchos esfuerzos para implementar otras maneras de enseñar matemáticas introduciendo instrumentos que incluyan nuevas herramientas tecnológicas, variando enfoques pedagógicos y métodos para involucrar a los estudiantes en su proceso de aprendizaje. En concreto, referido a la tecnología, los centros educativos deben asegurarse que los estudiantes tengan acceso a ella y los profesores deben maximizar el potencial de las TIC para desarrollar la comprensión de los estudiantes, estimular su interés e incrementar sus posibilidades en matemáticas (NCTM, 2000).

En la actualidad, los estudiantes son más capaces de comunicarse, discutir problemas o intercambiar ideas con sus compañeros de clase de manera efectiva a través de las herramientas de comunicación mediada por computadora. Las discusiones en línea que animan a los estudiantes a participar e interactuar en un entorno de aprendizaje se están convirtiendo en un

método al que se recurre para la enseñanza y el aprendizaje en diversas asignaturas. El profesor, el estudiante, el objeto de conocimiento y los objetivos de enseñanza son los elementos de cualquier práctica educativa, pero la interacción entre ellos es la que determina esa práctica y es, al mismo tiempo, el elemento intrínseco de la efectividad de cualquier entorno educativo, especialmente en el aula de matemáticas (Cordero, 2011).

En los últimos años, el uso de redes de computadoras y en particular Internet para propósitos de enseñanza y aprendizaje ha recibido mucha atención, y se ha enfatizado el uso de estos recursos como medios de comunicación. En este sentido la comunicación asíncrona tiene un reconocido potencial para transformar los procesos de enseñanza-aprendizaje haciendo posible la discusión entre un grupo y el acceso de otros participantes para la socialización y la comunicación (Silva & Gros 2007). Además, la comunicación asincrónica puede apoyar el desarrollo de funciones cognitivas tales como articulación, reflexión y negociación de los conceptos (Rodríguez & Clares, 2006). Una ventaja del uso de los foros virtuales es que el texto de las interacciones está disponible para estudiarse desde diversos puntos de vista por parte de investigadores y profesores. Algunos investigadores (Hara, Bonk, & Angeli; 2000; Naidu & Järvellä, 2006) afirmaron que la capacidad asincrónica de los foros virtuales permite que los alumnos tengan algún control sobre sus aportaciones a medida que aumenta el tiempo de respuesta y proporciona oportunidades para un aprendizaje reflexivo.

Esto conduce a que, en los cursos de matemáticas, el uso de foros virtuales permitiría a los estudiantes tener tiempo para analizar, reflexionar y negociar mientras se lleva a cabo el proceso de enseñanza y aprendizaje, y a los profesores evaluar las habilidades de pensamiento expuestas durante el desarrollo del foro. Esta investigación tiene como propósito analizar las interacciones entre estudiantes de ingeniería en un foro virtual al realizar una actividad de modelación matemática.

Antecedentes

Tras analizar la solución de problemas de matemáticas de estudiantes de secundaria, en un entorno de colaboración asistido por computadora, Hürme y Järvelä (2005) concluyeron que el trabajo con tecnología en red contribuye a que los estudiantes utilicen sus conocimientos matemáticos y los estimula a hacer visible su pensamiento. Sin embargo, señalaron que existen algunas dificultades al emplear estos entornos, ya que el dominio matemático consiste en símbolos, fórmulas y teoremas, lo cual podría implicar algunas limitaciones en las discusiones en red y en la negociación en comparación con otras asignaturas.

Nason y Woodruff (2005) realizaron una investigación con el propósito estudiar si la integración de un enfoque discursivo, y una perspectiva de solución de problemas basada en modelos dentro del contexto de un foro virtual mejora y enriquece la autenticidad de las actividades matemáticas de los estudiantes y su comprensión sobre la naturaleza y el discurso de la matemática. En sus resultados los investigadores observaron elementos importantes de la actividad tales como la búsqueda colectiva de la comprensión de los conceptos clave de matemáticas, y la mejora incremental de modelos matemáticos que pone de manifiesto el principio de ideas mejorables.

Para Rodríguez y Clares (2006) una perspectivas útil para analizar la comunicación a través de foros virtuales es la interactividad. Con el propósito de ir más allá de la descripción de los mensajes en foros, analizaron la interacción grupal, y se basaron en una experiencia de trabajo con entornos de aprendizaje con foros virtuales. Se uso un sistema de categorías para

analizar las conductas interactivas que promuevan el pensamiento crítico. Los resultados mostraron que el desarrollo eficaz de los temas de debate en los foros, guarda alguna relación en el modo en cómo los participantes estructuran el diálogo. Los investigadores comprobaron que los alumnos suelen reaccionar a las opiniones de sus compañeros justificando su posición respecto a las ideas que se expresan y dando respuesta a las preguntas formuladas. El foro crea un espacio donde los alumnos pueden manifestar ampliamente su acuerdo o desacuerdo acerca de las opiniones expresadas por otros compañeros. Sin embargo, la participación en este sentido resultó ser escasa, pues aunque los alumnos aclararon su posición respecto a una idea previamente expresada, no emitían argumentos claros para justificar su postura. Los investigadores concluyen que para que lograr que los estudiantes interaccionen unos con otros de manera más activa, es necesario implementar actividades o tareas.

En esta línea Zhu (2006) analizó los tipos de interacción que se producen durante las discusiones en línea, analizó los niveles de compromiso cognitivo de los estudiantes en cada debate, y exploró sus efectos e implicaciones para el aprendizaje y la enseñanza en la educación superior. Mediante la combinación de métodos de análisis de redes sociales con un análisis cualitativo de contenido, la investigación exploró nuevas metodologías para el análisis de la participación, la interacción y el aprendizaje que tienen lugar. Los resultados señalan que es poco realista suponer que la discusión en línea se activará y mejorará la interacción entre los estudiantes y los instructores y entre los propios estudiantes bajo cualquier circunstancia. El estudio también confirma que la interacción no se limita a ocurrir debido a la discusión en línea, pero debe estar integrada intencionalmente en la discusión y el curso y alimentada por el profesor y los estudiantes. Otros factores que contribuyeron a los tipos de interacción podrán ser el papel de los instructores en la discusión, y la facilitación de preguntas de discusión.

Sin embargo, se ha observado que existe limitada evidencia de investigaciones sobre el uso de foros virtuales en actividades de aprendizaje en asignaturas de matemáticas con estudiantes universitarios, a pesar de que algunos investigadores han mostrado que los foros son una herramienta que puede utilizarse en diversas disciplinas y además, brindan algunas posibilidades educativas que apoyan al proceso de enseñanza-aprendizaje.

Fundamentación teórica

El foro virtual puede considerarse como un centro de discusión acerca de un tema en particular, que concentra opiniones de varias personas en distintos lugares, de forma asincrónica, y que permite compartir reflexiones, búsquedas y hallazgos, así como resolver problemas mediante las respuestas a las preguntas generadoras de discusión (Ornelas, 2007). La interacción debe considerarse como un punto importante en el desarrollo y análisis de contextos virtuales que proporcionan experiencias de enseñanza y aprendizaje de calidad (Silva & Gros, 2007).

Un aspecto complejo en el análisis del proceso interactivo durante la comunicación a través de foros virtuales surge a partir de la necesidad de establecer sistemas de análisis del texto de los mensajes. Las herramientas para analizar el discurso producido en foros virtuales han tenido una interesante evolución. La investigación en el área del aprendizaje colaborativo a través de foros virtuales se basa en una amplia variedad de metodologías, una de estas es el análisis de contenido, una técnica que se usa frecuentemente para analizar las aportaciones de grupos mediada por computadora en ámbitos educativos.

Llinares y Valls (2009) diseñaron un esquema de categorías con el propósito de describir las características de las interacciones en discusiones en línea, cuando los estudiantes para

profesor examinan y analizan la enseñanza de las matemáticas como un proceso para desarrollar las habilidades necesarias para aprender a partir de la práctica y construir conocimiento. Este modelo proporciona información sobre el proceso en el cual participan los estudiantes con el fin de llevar a cabo las tareas en conjunto con los demás, como se dedican a la construcción de significados con otros, y cómo utilizan las ideas teóricas como herramientas.

En términos de interacciones en foros virtuales, hay que recordar que una ventaja de las herramientas de comunicación asíncrona es el marco de tiempo que permite construir una pausa en la comunicación, algo importante para la absorción e integración de materiales, creatividad y conexión profunda entre estudiantes (Silva & Gross, 2007).

Objetivo

Esta investigación tuvo como propósito analizar las interacciones entre estudiantes de ingeniería en un foro virtual al realizar una actividad de modelación matemática.

Metodología

A continuación se describen los aspectos metodológicos de la investigación realizada.

Contexto y participantes

La experiencia se llevó a cabo durante dos cursos consecutivos (curso A y curso B), en el desarrollo de la asignatura Ecuaciones Diferenciales, que se imparte en el primero de los 4 años de los estudios de Ingeniería en Sistemas Computacionales (ISC), carrera que oferta la Escuela Superior de Cómputo (ESCOM-IPN), en México. La asignatura tiene como principal objetivo que el alumno aprenda a formular modelos matemáticos de problemas de ingeniería con ecuaciones diferenciales, en particular de teoría de circuitos eléctricos.

La asignatura Ecuaciones Diferenciales se organizó a través de una plataforma web en el sistema gestor de contenidos educativos de libre acceso MOODLE, que la Unidad de Tecnología Educativa y Campus Virtual (UTEyCV) del centro educativo (ESCOM) ponía a disposición de los profesores para el desarrollo de cursos.

En esta investigación, en un primer curso A, participaron en la experiencia 26 estudiantes (8 mujeres, 31%, y 16 hombres, 69%), organizados en 5 grupos de trabajo. En un segundo curso B, participaron 27 estudiantes (6 mujeres, 22%, y 21 hombres, 78%), organizados en 5 grupos.

Desarrollo de la experiencia

La plataforma web y su funcionamiento se presentaron a los estudiantes al inicio del semestre en el laboratorio de cómputo, donde cada estudiante generó una cuenta de ingreso. Además se les informó que, aunque todas las sesiones del curso se iban a desarrollar de manera presencial, toda la información sobre el desarrollo de la asignatura, los materiales, los documentos de trabajo y las actividades que había que realizar, así como la entrega de las mismas, se haría a través de la plataforma.

Los estudiantes llevaron a cabo un *Proyecto* usando la plataforma del curso, que tenía como objetivos formular, resolver, interpretar, justificar y analizar modelos matemáticos con ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), y consideran el proceso de modelación matemática organizado en nueve etapas, diseñado específicamente para la experiencia y que se trabajó en el aula con los estudiantes. El proyecto se desarrolló de la siguiente manera:

1) Cada estudiante del curso eligió un problema de valores iniciales (PVI) de segundo orden, de la colección de ejercicios y problemas del curso.
2) Los estudiantes se organizaron en grupos de trabajo de unos 5 integrantes, donde cada uno aportó su problema seleccionado.
3) Se estableció en la plataforma web de la asignatura una sección F1 de un foro de discusión general en cada grupo para que, conjuntamente, se eligiera un problema entre los propuestos por cada integrante y que pudiera adaptarse a una situación de la vida real.
4) Se organizó un foro de discusión (sección F2) en cada grupo para resolver el problema propuesto y elaborar, de forma conjunta, un trabajo inicial consistente en una presentación en PowerPoint (presentación inicial PI), teniendo en cuenta las etapas del proceso de modelación matemática con EDO, que se presentó en el aula (Figura 2). Después de finalizar la sección F2, los trabajos se expusieron en el aula y quedaron a disposición de todos los estudiantes en la plataforma de la asignatura.
5) Se estableció una tercera sección F3 del foro en cada grupo para evaluar en conjunto una de las presentaciones (PI) que se expusieron en el aula, de manera que todas fueran seleccionadas. Los estudiantes debían discutir con sus compañeros del grupo de trabajo sobre los elementos del trabajo que consideraban se deberían revisar para favorecer la comprensión del proceso de modelación matemática.
6) Cada grupo de trabajo tuvo acceso a los mensajes de la sección F3 del foro en el que se evaluó su presentación inicial (PI) y, tras revisar los comentarios sobre su trabajo, elaboraron una presentación final (PF).

Los estudiantes del curso A realizaron el punto 5 del *Proyecto* de forma diferente al tener que evaluar, cada grupo, en la sección F3 del foro, la propia presentación inicial (PI).

Las secciones F1 y F2 del foro estuvieron activas durante 10 días y, la sección F3, 5 días. El debate en cada una de las secciones del foro comenzó con un mensaje del profesor, que contenía las indicaciones para participar, así como una pregunta que podía ser respondida por cualquiera de los integrantes de los grupos de trabajo. El profesor no participó en ninguno de los foros durante el desarrollo del debate.

Recogida de datos y análisis de la información

Los datos recogidos en esta experiencia fueron los mensajes de los estudiantes en el foro virtual durante el desarrollo del *Proyecto* en sus diferentes secciones.

Los mensajes de los estudiantes en el foro al desarrollar el *Proyecto* fueron transcritos y se organizaron en unidades de análisis. Se tomó como unidad de análisis (UA) cada idea con significado propio, entendida como una unidad única de pensamiento que expresaba una única información, extraída de un segmento de la aportación (Rourke, Anderson, Garrison & Archer, 2001). Así, un mensaje puede contener varias unidades de análisis.

Para clasificar las unidades de análisis se realizó una adaptación del modelo de Llinares y Valls (2009) utilizado cuando estudiantes para maestro interactuaban para generar competencias profesionales relativas a la interpretación de la enseñanza de la resolución de problemas en educación primaria. El modelo seleccionado (Tabla 1) permite que el proceso de implicación cognitiva producido en el contexto de la interacción resuelva aspectos entre los participantes, se propongan soluciones, se respondan comentarios adicionales y se presenten contrapropuestas.

Tabla 1
Plantilla de valoración para clasificar las aportaciones de los estudiantes según el tipo de interacción (adaptado de Llinares & Valls 2009).

Tipo de interacción en un debate virtual	
Categoría	Indicadores
Aporta información (I): Aporta nuevos datos relacionados con lo que se pide en la tarea.	- Contribución inicial como respuesta a las preguntas planteadas por el profesor. - Realiza preguntas que pueden conducir a la reflexión, a la revisión de una contribución o a la ampliación de la información proporcionada. - Introduce nuevos aspectos o propone una nueva idea.
Aclara (CL): Amplía o refina una aportación previa, ya sea propia o de otro participante.	- Subraya, explicita o explica aspectos considerados previamente. - Demanda la aclaración de algún concepto o idea utilizado en alguna aportación. - Responde preguntas de aclaración o de reflexión que se han planteado.
Coincide (C): Manifiesta conformidad y apoyo hacia una aportación determinada.	- Indica que está de acuerdo con alguna o algunas de las aportaciones previas.
Coincide y amplía (CA): Concuerda y amplía aspectos mencionados en otras aportaciones.	- Indica que está de acuerdo con alguna(s) de las aportaciones previas, y además añade argumentos para apoyar su participación.
Discrepa (D): Muestra desacuerdo con datos aportados previamente.	- Indica que no está de acuerdo con alguna(s) de las aportaciones previas.
Discrepa y amplía (DA): Muestra desacuerdo con una contribución acompañado de argumentos que lo respaldan.	- Indica que no está de acuerdo con alguna(s) de las aportaciones previas, y además añade argumentos para apoyar su participación.
Otros (O): Aporta datos que no están relacionados con lo que se pide en la tarea.	- Introduce elementos en la conversación que son ajenos al desarrollo de una tarea.

Después de realizar la clasificación anterior, las categorías se agruparon en tres niveles de acuerdo al nivel de interacción en que se desarrollaron las aportaciones de los estudiantes en el foro y teniendo en cuenta la tarea que debían realizar en cada sección del foro (Tabla 2).

Tabla 2
Plantilla de valoración para clasificar las aportaciones de los estudiantes según el nivel de interacción.

Nivel de interacción en un debate virtual	
Nivel	Categoría
Aporta información (0): Aporta ideas que no se han considerado previamente	Proporciona información (I)
Interactúa (1): Menciona ideas que han surgido de un aspecto considerado previamente por los compañeros o por él mismo	Aclara (CL) Coincide (C) Discrepa (D)
Interactúa y amplia (2): Amplía aspectos que han surgido en una aportación previa	Coincide y amplía (CA) Discrepa y amplía (DA)

A cada UA se le asignó la categoría correspondiente en cuanto al nivel de interacción (Tabla 2). Las frecuencias, en valores absolutos y porcentajes, se recogieron en tablas en función de las categorías desarrolladas teniendo en cuenta los grupos en los que los estudiantes se organizaron para cada sección del foro, el curso e indicando las cadenas de conversación que se habían construido. Posteriormente se compararon los porcentajes del nivel de interacción en las diversas partes del foro F1, F2 y F3. Se aplicó una prueba no paramétrica ji-cuadrada para determinar si las frecuencias de los niveles de interacción eran similares en las aportaciones de los estudiantes del curso A y las aportaciones de los estudiantes del curso B, y establecer si la manera en que interaccionaron los estudiantes en el foro dependió de la forma de desarrollar el *Proyecto* de modelación matemática con EDO.

Resultados

Inicialmente se realizó la distribución de las unidades de análisis (UA) de las aportaciones en el foro de los estudiantes en cada grupo de trabajo, y en cada uno de los cursos A y B, en función de las categorías consideradas respecto al tipo de interacción. Posteriormente, las unidades de análisis (UA) de las aportaciones en el foro de los estudiantes, en los grupos de trabajo y en cada uno de los cursos A y B, se organizaron en función de las categorías consideradas respecto al nivel de interacción (Tabla 3; no se consideró la categoría *Otros*).

Se observa que, en general, que los estudiantes de cada grupo, al participar en el foro, interaccionaron más con sus compañeros (nivel 1, 57%) que aportaron información (nivel 0, 32%), alcanzando el mayor nivel de interacción (nivel 2, 11%) en un porcentaje considerablemente menor al de los otros dos niveles.

Al comparar los resultados del nivel de interacción entre los cursos A y B, el total de porcentajes de UA de las aportaciones en el foro de los grupos de trabajo, en ambos cursos, fue similar en diferentes categorías aunque presentaron pequeñas diferencias en nivel 0 (*Aporta información)* y nivel 1 (*Interacciona).*

Teniendo en cuenta las diversas secciones del foro se observa que, el total de los porcentajes de UA en F1 y en F2, fue similar. En la sección F3, los grupos del curso B aportaron menos información que no se había considerado previamente en el foro que los grupos del curso A (*Aporta información*) mientras que los grupos del curso B mencionaron más ideas surgidas de aspectos considerados previamente en la discusión y, por lo tanto, interaccionando con sus compañeros (*Interacciona*), que los grupos del curso A, quienes en la mayoría de sus aportaciones se refirieron a temas que no se habían mencionado en la discusión. Por otro lado, al considerar conjuntamente las categorías *Interacciona* e *Interacciona y amplía*, se puede decir que los grupos del curso B alcanzaron mayores niveles de interacción (76%) al evaluar su propia presentación inicial (PI), que los grupos del curso A (53%), que evaluaron la presentación inicial (PI) de otro grupo de trabajo.

Tabla 3
Distribución de las UA de las aportaciones de los grupos de los cursos A y B en el foro, según el nivel de interacción.

Sección del foro	Curso	Nivel de interacción			Total (UA)
		Aporta Información (0)	Interacciona (1)	Interacciona y amplia (2)	
F1	A	86(33%)	141(54%)	33(13%)	260(100%)
	B	78(28%)	171(60%)	35(12%)	284(100%)
Total F1		164(30%)	312(57%)	68(13%)	544(100%)
F2	A	36(39%)	49(53%)	7(8%)	92(100%)
	B	69(31%)	130(57%)	27(12%)	226(100%)
Total F2		105(33%)	179(56%)	34(11%)	318(100%)
F3	A	53(47%)	53(47%)	8(6%)	114(100%)
	B	39(24%)	107(67%)	14(9%)	160(100%)
Total F3		92(34%)	160(58%)	22(8%)	274(100%)
Total	A	175(38%)	243(52%)	48(10%)	466(100%)
	B	186(28%)	408(61%)	76(11%)	670(100%)
Total foro		361(32%)	651(57%)	124(11%)	1136(100%)

Una prueba ji-cuadrado demostró que no existieron diferencias significativas, en cuanto al nivel de interacción en las frecuencias de las aportaciones de los estudiantes en cada grupo de trabajo en las secciones F1 [$\chi^2(2) = 2.28$, $p > 0.05$] y F2 [$\chi^2(2) = 2.82$, $p > 0.05$], cuando los estudiantes de ambos cursos realizaron las partes del *Proyecto* de la misma forma. Sin embargo, cuando los estudiantes en cada grupo trabajaron de manera diferente dependiendo de si pertenecían al curso A o curso B, es decir en la sección F3, la prueba ji-cuadrado mostró diferencias significativas entre las categorías del nivel de interacción entre los cursos A y B [$\chi^2(2) = 14.68$, $p < 0.01$], lo que puede hacer entender que el nivel de interacción estuvo relacionado con la forma en que los estudiantes en cada grupo evaluaron el *Proyecto* de modelación matemática. Estas diferencias en F3 hicieron que se mostraran diferencias significativas en las categorías del nivel de interacción, entre los grupos de los cursos A y B, al desarrollar el *Proyecto* de aplicación de las EDO [$\chi^2(2) = 12.24$, $p < 0.01$].

Discusión de resultados

Los estudiantes, en la mayoría de sus aportaciones, interaccionaron con sus compañeros de grupo principalmente aportando información y, en menor intensidad, aclarando contribuciones previas y coincidiendo o discrepando con otros alumnos pero, usualmente, sin justificar sus puntos de vista ni aportar alternativas. Estos resultados de un bajo o medio nivel de interacción confirman los resultados del estudio realizado por Zhu (2006), que sugirió que no se puede suponer que cualquier discusión en línea fomentará y mejorará la interacción, y que no se alcanzarán altos niveles de interacción entre los estudiantes bajo cualquier circunstancia.

Hay que observar que las interacciones promovidas en el desarrollo del *Proyecto* de modelación matemática, en cada grupo, a pesar de las escasas aportaciones con alto nivel de interacción, permitieron que los estudiantes reflexionaran sobre sus ideas y planteamientos iniciales al demandar en el foro que se aclararan conceptos o ideas. Esto concuerda con los resultados de Nasoon y Woodruff (2005) que señalaron que el uso de foros en los cursos de

matemáticas motiva la búsqueda de conceptos clave de matemáticas y la exploración de conjeturas.

Esta investigación se focalizó en el trabajo de los estudiantes sin intervención del profesor, quien solamente participó para explicar las instrucciones para el desarrollo de cada parte del *Proyecto* al inicio de cada sección del foro. Pero los resultados nos hacen pensar en lo referido por Rodríguez y Clares (2006) en la línea de que, en las actividades colaborativas que incluyan foros de discusión, es necesario añadir algunas estrategias para promover una interacción más intensa y activa. En concreto, es posible que las escasas aportaciones en las que los estudiantes ampliaron sus coincidencias o discrepancias con sus compañeros pudieran deberse, por ejemplo, a la necesidad de la intervención del profesor en el desarrollo del foro en algún sentido como, por ejemplo, realizando preguntas para animar o guiar la discusión.

Al estudiar cómo los estudiantes para maestro se involucran en la conceptualización de la enseñanza de las matemáticas al participar en discusiones en línea, Llinares y Valls (2009) concluyeron que el tipo de interacción que se produce en un foro varía en función de la tarea que se desarrolla. Esto pudo observarse en los resultados de este trabajo porque, aunque los tipos de interacción resultantes en dos secciones del foro (seleccionar un problema y resolver un problema) fueron similares, no ocurrió lo mismo en la otra sección del foro, cuando los estudiantes de un curso evaluaron el trabajo de otro grupo, mientras que los del otro curso lo hacían de su propio trabajo, donde se produjeron diferencias significativas tanto en los tipos como en los niveles de interacción. Por tanto este trabajo confirma estudios previos y corrobora que la forma de realizar la tarea influyó en la manera en que los estudiantes interactuaron.

Conclusiones

En este trabajo se ha pretendido analizar la forma en que interaccionan en un foro virtual los estudiantes de ingeniería al realizar un *Proyecto* de modelación matemática en un curso de ecuaciones diferenciales. Este objetivo se fundamentó ante la escasez de investigaciones sobre el uso de foros virtuales en actividades de aprendizaje en asignaturas de matemáticas con estudiantes universitarios, y dada la evidencia de que los foros virtuales son una herramienta útil en diversas disciplinas y con posibilidades educativas para apoyar al proceso de enseñanza-aprendizaje.

Las aportaciones de los estudiantes en el foro al desarrollar el *Proyecto* de modelación matemática mostraron, en general, niveles bajos y medios de interacción, ya que principalmente aportaron información y aclararon contribuciones previas. El nivel de interacción no varió al resolver las tareas que consistían en seleccionar un problema en conjunto y resolver el problema seleccionado, pero sí lo hicieron significativamente en la tercera sección, donde fue más alta en el curso donde cada grupo revisó su propio trabajo frente al otro curso donde cada grupo revisó el trabajo de otro grupo.

Este trabajo nos ha hecho considerar que las interacciones desarrollan muchas funciones fundamentales en el proceso educativo. Como se pudo observar, una de las características más significativas fue que los mensajes electrónicos estaban a la vista de todos los participantes del debate, lo cual provoca que los textos de los mensajes pudiera buscarse, sus contenidos se pudieran visualizar y examinar varias veces, y el texto se pudiera reestructurar. Por lo tanto, hay que reconocer que los foros virtuales son una poderosa herramienta de comunicación y trabajo colaborativo que fomentaron la participación de una forma reflexiva, frente a otras herramientas de comunicación, donde la inmediatez es un obstáculo para la reflexión y el análisis.

Así mismo, se debe considerar que no es suficiente que los estudiantes completen las tareas, sino que se les debe animar a reflexionar sobre su actividad, por ejemplo, al pedirles que justifiquen un método de solución. En este sentido, hemos observado que el uso de foros virtuales puede crear oportunidades para el diálogo y la reflexión.

Esto abre una futura línea de trabajo para descubrir si esos resultados son similares con otros estudiantes y otras tareas, e incluso en diferentes contextos, y así, poder analizar las circunstancias en que se producen.

Como limitaciones de la investigación, se puede decir que las herramientas utilizadas para analizar la interacción de las aportaciones de los estudiantes, que fueron adaptadas para esta experiencia, necesitarían más experimentación. En este sentido hay que considerar que, algunas veces, según las aportaciones realizadas en las tareas desarrolladas en el foro, fue complejo utilizar las categorías utilizadas. Hay que recordar que, por ejemplo, el modelo de Llinares y Valls (2009), que fue adaptado para este trabajo, fue diseñado por sus autores para describir las interacciones de estudiantes para maestro cuando participan en discusiones en línea para resolver un conjunto de tareas en un entorno de aprendizaje. Por lo tanto, consideramos que es necesario investigar para mejorar el modelo de categorías de acuerdo al contexto de ingeniería.

Hay que considerar además, que los estudiantes y profesores que participaron en la experiencia no estaban familiarizados con el uso de foros virtuales para desarrollar actividades académicas relacionadas con matemáticas, por lo tanto debe considerarse el hecho de preparar a los profesores en la introducción de estas herramientas en el aula, por ejemplo a través de talleres.

Los resultados obtenidos pueden abrir perspectivas de investigación, al considerar que al analizar además la profundidad de las aportaciones, se podría determinar no solo la manera en que interaccionan los estudiantes para negociar mientras se lleva a cabo el debate sobre el desarrollo de una tarea o un conjunto de tareas, sino también el nivel de reflexión que presentan los estudiantes durante un debate en línea. También puede considerarse a partir de estos resultados, ampliar la investigación considerando el impacto o los efectos del uso de foros considerando las interacciones de los estudiantes. Estos efectos podrían determinarse a partir de analizar la forma en que modifican o realizan cambios a sus trabajos desarrollados durante el *Proyecto*, como consecuencia de interaccionar en el foro.

La investigación podría realizarse de nuevo utilizando algún software para resolver, analizar y llevar a cabo predicciones del modelo matemático, y poder comparar los resultados con la experiencia realizada. También podría plantearse utilizando otras herramientas basadas en web como chats o blogs, y comparar con los resultados obtenidos al usar foros virtuales.

Esta investigación puede representar un primer paso para considerar los foros virtuales como herramientas educativas que se incluyan en la organización de actividades en el aula en los cursos de matemáticas en ingeniería, para promover interacciones entre los estudiantes. También hay que añadir que la incorporación de foros virtuales al implementar una estrategia didáctica puede extenderse, con un diseño apropiado, a otras asignaturas no necesariamente relacionadas con matemáticas.

Referencias

Chamoso, J., & Cáceres, M. J. (2009). Analysis of the reflections of student-teachers of mathematics when working with learning portfolios in Spanish university classrooms. *Teaching and Teacher Education*, *25*, 198–206.

Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones del cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME), 4*(2), 103-128.

Gunawardena, L., Lowe, C., & Anderson, T. (1997). Interaction analysis of a global on-line debate and the development of a constructivist interaction analysis model for computer conferencing. *Journal of Educational Computing Research, 17*(4), 395-429.

Hara, N., Bonk, C., & Angeli, C. (2000). Content Analysis of online discussion in an applied educational psychology course. *Instructional Science, 28*, 115-152.

Henri, F. (1991). Computer conferencing and content analysis. En A. R. Kaye (Ed.), *Collaborative learning through computer conferencing: The Najaden papers* (pp. 117-136). London: Springer-Verlag.

Hürme, T-R., & Järvelä S. (2005). Students' activity in computer-supported collaborative problem solving in mathematics. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *10*, 49-73.

Llinares, S., & Valls, J. (2009). The building of pre-service primary teachers' knowledge of mathematics teaching: interaction and online video case studies. *Instructional Science*, *37*, 247-271.

Naidu, S., & Järvelä, S. (2006). Analyzing CMC content for what? *Computers & Education*, *46*, 96-103.

Nason, R., & Woodruff, E. (2003). Fostering Authentic, Sustained, and Progressive Mathematical Knowledge-Building Activity in Computer Supported Collaborative Learning (CSCL) Communities. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, *22*(4), 345-363.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Virginia: NCTM.

Ornelas, D. (2007). El uso del Foro de Discusión Virtual en la enseñanza. *Revista Iberoamericana de Educación, 44,* 4-10.

Rodríguez, V., & Clares, J. (2006). Análisis de la integración grupal para la construcción del conocimiento en entornos de comunicación asincrónica. *Revista Complutense de Educación*, *17*(2), 155-168.

Rourke, L., Anderson, T., Garrison, D. R., & Archer, W. (2001). Methodological issues in the content analysis of computer conference transcripts. *International Journal of Artificial Intelligence in Education*, *12*, 8-22.

Silva, J., & Gros, B. (2007). Una propuesta para el análisis de interacciones en un espacio virtual de aprendizaje para la formación continua de los docentes. *Revista Electrónica Teoría de la Educación: Educación y Cultura en la Sociedad de la Información*, *8*(1), 81-105.

Zhu, E. (1998). Learning and mentoring: Electronic discussion in a distance learning course. En C. Bonk, & K. King (Eds.), *Electronic collaborators: Learner centered technologies for literacy, apprenticeship, and discourse* (pp.233-259). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

La noción de función mediada por entornos dinámicos. El caso del punto dinámico.

Rosa Ana **Ferragina**
Centro de Estudios en Didácticas Específicas, Universidad Nacional de San Martín
Argentina
rosaferragina_1@hotmail.com
Leonardo José **Lupinacci**
Centro de Estudios en Didácticas Específicas, Universidad Nacional de San Martín
Argentina
leolupinacci@yahoo.com.ar

Resumen

Esta comunicación propone mostrar cómo la implementación de un recurso de enseñanza con tecnología dinámica, destinado a la presentación de la función como modelizadora en el estudio de variaciones con magnitudes geométricas, puede constituirse como el inicio de nuevos interrogantes sobre el concepto de función. El desarrollo del trabajo se realizará a partir del análisis de las producciones de los alumnos, que condujeron a nuevas preguntas sobre este objeto matemático mediado por la tecnología: la noción de función que subyace en el punto dinámico. Los interrogantes que analizaremos son: ¿Qué concepto de función está subyacente en un software de geometría dinámica, como GeoGebra? ¿Con cuáles de los desarrollados históricamente, sobre la función, tiene más relación? ¿La construcción de un punto dinámico establece una función?, y si es así, ¿de qué modo la caracteriza?

Palabras clave: función, variación, dependencia, TIC, entornos dinámicos, punto dinámico.

Introducción

El presente texto se enmarca en un proyecto de investigación en red titulado "Recursos tecnológicos para y por los docentes destinados a la enseñanza de la Matemática en Argentina y Francia" y que se realiza desde el área Didáctica de la Matemática por la Universidad Nacional de San Martín, la Universidad Nacional de Río Negro (ambas de Argentina) y el École Normale Supérieure de Lyon, Francia. En el contexto de la investigación se trabajó colaborativamente en el armado e implementación de un recurso de enseñanza, con un grupo de profesores 5to año de una Escuela Secundaria Técnica en la provincia de Buenos Aires, Argentina. Los profesores decidieron re elaborar un recurso preexistente,[1] en donde la función se constituye como una herramienta de modelización para el estudio de variaciones de magnitudes geométricas. La elección realizada se ajustaba a los contenidos que planteaban desarrollar en esa etapa del año y a los propósitos didácticos establecidos en su planificación.

[1] La actividad seleccionada por los docentes está presente originalmente en Barbin & Douady (1996), siendo posteriormente adaptada para ser trabajada con software GeoGebra en Ferragina (2012). Los profesores tomaron estas referencias para adaptar la actividad a sus propósitos didácticos.

Esta comunicación se basa en el análisis de cuatro ítems (e, f, g y h) del recurso (ver Anexo 1). Éstos se refieren a la construcción, mediante un software de geometría dinámica, de un punto que exprese la variación entre dos magnitudes geométricas y su respectiva interpretación. Motiva esta elección, la dificultad presentada por los alumnos en el desarrollo de estos ítems, puesto que una fallida simbolización de las componentes del punto, condujo a que se detuvieran las actividades grupales para que los profesores realizaran aclaraciones e indicaciones. Los alumnos no interpretaban en esa instancia de trabajo el motivo por el que necesitaban la construcción de ese punto.

El desarrollo del trabajo se realizará a partir del análisis de las producciones de los alumnos, que condujeron a nuevas preguntas por parte de los investigadores acerca de este objeto matemático mediado por la tecnología: la noción de función que subyace en el punto dinámico.

Las producciones de los alumnos

En la implementación del recurso de enseñanza, una vez construida por los alumnos la figura a analizar (rectángulo inscripto en un cuarto de círculo de radio 6), se propuso el estudio de la variación del área del rectángulo en relación a la longitud de su base, tarea para la cual se propone desde la consigna construir un punto que refleje tal relación.

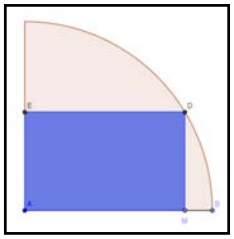


Figura 1. Construcción dinámica a realizar por los alumnos

En GeoGebra, los puntos pueden ser construidos ingresando sus coordenadas por medio de la Barra de Entrada, coordenadas que no necesariamente deben ser numéricas sino que el software admite también el ingreso de símbolos que hagan referencia a magnitudes de objetos ya construidos previamente.

En cuanto a la construcción del punto por parte de los alumnos, si bien en general identificaron las variables a relacionar (longitud de la base y área del rectángulo), se presentaron dificultades en la construcción. Pareció existir una resistencia a identificar que las coordenadas de un punto puedan ingresarse con valores que no sean numéricos, idea que surge ante preguntas por parte de los alumnos acerca de "la fórmula" que se debe ingresar en el software, indicando que tal relación debería definirse por medio de una expresión algebraica y no por un punto.

Algunas respuestas de los alumnos a dicha tarea fueron:

I. "El área del rectángulo varía dependiendo de M, modifica su tamaño. Las coordenadas de dicho punto deberían ser (x; y) variable independiente y dependiente, que en el problema se representan como base y área. La base es la variable independiente porque no necesita de nadie para poder moverse, en cambio, el área es la variable dependiente que depende de la base para cambiar sus medidas".

II. "Las coordenadas deben ser la base del rectángulo y su área porque el área depende de la base del rectángulo".

III. “Las coordenadas de dicho punto son P igual (a_1, polígono1). Porque utilizamos el área y los lados del polígono para poder hacer nuestro punto”.

IV. “a_1 (base) Polígono1 (área). Seleccionamos esos porque a_1 representa la base y polígono1 representa el área del rectángulo”.

En las dos primeras respuestas encontramos referencias específicas a la identificación de las variables, resaltando en este punto a la relación de dependencia de una sobre la otra. En las respuestas III y IV aparecen ejemplos que hacen referencia a los nombres que el software otorgó a los elementos construidos y que son tomados para la construcción del punto. La respuesta que hace referencia a las coordenadas del punto como (a_1, polígono1) fue una expresión que circuló por distintos grupos de alumnos a partir de interacciones y consultas. Esto provocó que algunos grupos utilizaran indistintamente estos “nombres” de los objetos, independientemente de su propia construcción o que los nombres establecidos por el software a estos elementos no fueran los mismos, cuestión posible puesto que cada grupo de alumnos construyó su propia figura dinámica.

La continuidad del trabajo permitió analizar los desplazamientos del punto construido a través del rastro dejado en la pantalla por dicho punto, acciones que posibilitaron centrar el análisis en las variables utilizadas para la construcción del punto y en sus variaciones.

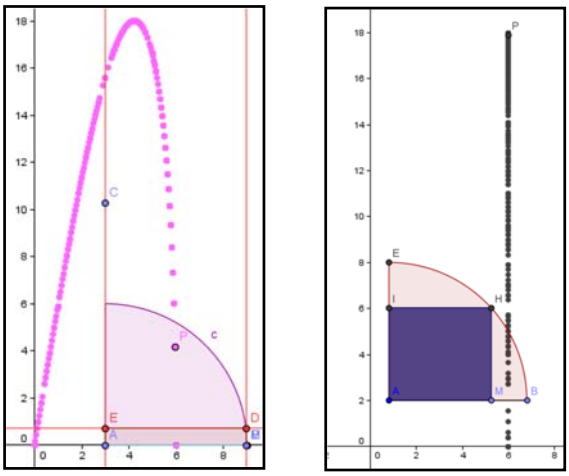


Figura 2: Rastro dejado por un punto dinámico construido correctamente (izquierda) e incorrectamente (derecha).

El análisis de estas variaciones mediante el rastro dejado por el punto, permitió contrastar entre lo esperado y lo obtenido. En la figura 2, se presenta a la izquierda, el rastro dejado por un punto dinámico cuyas coordenadas son correctas, mientras que la imagen de la derecha se corresponde con la producción de un grupo de alumnos que replicó la simbología utilizada por el grupo anterior (a_1 y polígono1), siendo que los elementos implicados no fueron llamados igual por el software (específicamente, en la construcción el valor a_1 hacía referencia a la distancia AB, que en todas las construcciones y de acuerdo al enunciado, tenía el valor fijo 6).

Otras construcciones del punto dinámico provocaron que la pantalla del software devolviera también imágenes inesperadas. En el caso de la figura 3, la construcción del punto estuvo dada por las variables pertinentes, pero la separación de las mismas en la sintaxis utilizada fue realizada por medio del punto y coma, símbolo generalmente utilizado por los alumnos en el trabajo con lápiz y papel para representar un punto. Esta sintaxis es reconocida por el entorno

informático como el ingreso de un punto dadas sus coordenadas polares y no sus coordenadas cartesianas.

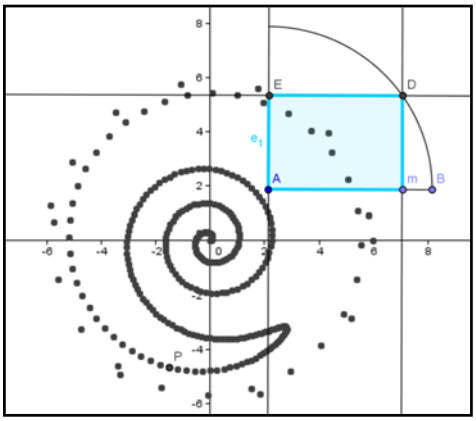


Figura 3: Inconveniente con la sintaxis

En este caso particular, los alumnos mencionaron lo "extraño" de la representación obtenida, pero no pudieron argumentar acerca de las cuestiones de por qué dicha trayectoria no podía corresponder con los valores de las magnitudes puestas en juego. Si bien el entorno GeoGebra permite las construcciones geométricas sin la mediación de un lenguaje específico de programación, las herramientas de cálculo algebraico que ofrece requieren del conocimiento de ciertos comandos y de la sintaxis de los mismos, estructuras que en algunos casos difieren de las utilizadas cotidianamente en el entorno del lápiz y papel. Esto resalta que los entornos informáticos no son transparentes, planteando la necesidad de familiarización tanto de los aspectos específicamente matemáticos como de los aspectos no matemáticos (Artigue; 1991).

Las producciones anteriores evidencian la dificultad de muchos alumnos de dotar de sentido al punto construido, principalmente al no cuestionar las representaciones obtenidas o al no contrastar lo esperado con lo obtenido. Esto produjo que, en algunos casos, se detuviera el trabajo grupal y los docentes tuvieran que guiar la construcción del punto, centrando el análisis en las técnicas matemáticas e informáticas para su elaboración. Luego de obtenida la representación gráfica correspondiente a la variación buscada, los alumnos no presentaron inconvenientes para identificar los valores correspondientes al área máxima del rectángulo y a la longitud de la base correspondiente, obteniendo los valores a partir de la lectura sobre los ejes cartesianos, incluso utilizando el zoom. Algunos alumnos argumentaron dichas técnicas en función de la imposibilidad de contar con una fórmula que les permitiera conocer el "valor exacto". Por un lado, esta ausencia de una expresión general, permitió avanzar con la implementación del recurso en pos de buscar dicha expresión y, además deja entrever la posibilidad de diferentes concepciones en relación al concepto de función.

La implementación de este recurso, llevó al grupo de investigadores al planteo de los siguientes interrogantes: ¿Qué concepto de función está subyacente en un software de geometría dinámica, como GeoGebra? ¿Con cuáles de los desarrollados históricamente, sobre la función, tiene más relación? ¿La construcción de un punto dinámico establece una función?, y si es así, ¿de qué modo la caracteriza?

Acerca del concepto de función

Es posible identificar tres líneas de caracterización de la función, en el recorrido histórico realizado por las diferentes definiciones adoptadas para este concepto (Boyer, 1994).

I. Una variación entre cantidades, estableciendo una dependencia entre esas cantidades variables: que se vislumbran en los trabajos de Oresme y Galileo.

Desde el siglo XII, se crean en Europa universidades que comienzan a discutir los pensamientos de la antigüedad clásica, en especial las ideas de Aristóteles referentes a la naturaleza del infinito y la divisibilidad de las cantidades, en su tratado de física. Sobre estas ideas, se basa el trabajo de Nicolás Oresme, profesor de la Universidad de París, a mediados del siglo XIV. Oresme propone una aproximación geométrica, frente a los estudios cinemático-aritméticos analizados hasta el momento. Utiliza segmentos rectilíneos para representar todo lo que varía, puesto que todo lo medible puede imaginarse como una cantidad continua, pasando después a una representación de diversos tipos de cambio. Los aportes de Galileo se basan en lo realizado por Oresme, hasta las presentaciones gráficas son similares. Pero, a diferencia de Oresme, los estudios cuantitativos de movimiento de Galileo se basan en experiencias realizadas y que luego le permiten establecer leyes entre magnitudes que son auténticas relaciones funcionales. Todavía, este tipo de relaciones se expresan verbalmente, por una tabla o por una representación gráfica.

II. Una dependencia entre magnitudes mediante la obtención de una expresión algebraica o fórmula: mediante los aportes de Descartes, Leibniz, Bernoulli.

Con *La Géométrie* de Descartes, es posible interpretar a las curvas por medio de ecuaciones. Además, en este texto aparece por primera vez que una ecuación en x e y es un modo de expresar dependencia entre dos cantidades variables, tal que a partir de valores de una de ellas es posible calcular valores de la otra. Leibniz y Jean Bernoulli, en sus cartas, escriben intentos de cómo expresar mediante una palabra cantidades que dependen de una cierta variable, para designar lo que hasta el momento eran expresiones analíticas. Bernoulli, en sus trabajos, propone varias notaciones para indicar que se trata de una función de x, entre ellas la más parecida a la actual es ϕx.

III. Sólo una correspondencia, como relación o regla, entre dos conjuntos de números o magnitudes: con las definiciones de Cauchy, Dirichlet y el grupo Bourbaki.

Dirichlet, en su cátedra de análisis de Gotinga, expuso la formulación más general de función como correspondencia entre dos conjuntos de números, cualquiera sea la forma en que se establece esa correspondencia:

> Designamos por **a** y **b** dos valores fijos y por **x** una magnitud variable comprendida entre **a** y **b**. Si a todo **x** corresponde un valor finito **y =f(x)** que varía de forma continua cuando **x** varía también de forma continua desde **a** hasta **b** diremos que **y** es una función continua para ese intervalo. Aquí no es del todo necesario que **y** se exprese en función de **x** según una misma ley en todo el intervalo; ni es incluso necesario prever una expresión algebraica explícita entre **x** e **y**. (Dirichlet, citado por Lacasta (1998), p 46)

En las primeras definiciones de función, los conceptos centrales son el cambio y la dependencia, estando presente la correspondencia de un modo implícito. Cuanto más se avanza con las definiciones modernas, hay menos indicio de cambio y dependencia, para poner en primer plano a la función como una correspondencia pura entre dos conjuntos. Siendo esta

última caracterización de difícil acceso para los alumnos de la escuela secundaria, porque es poco intuitiva si es el primer acercamiento al concepto que tienen. (De Cotret, 1988)

Ahora se podría preguntar qué definición de función está presente en los tipos de software que se emplean en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, ¿han modificado ese concepto como se realizó en su propia historia?

La definición de función mediada por un software de geometría dinámica

Cuando un concepto matemático está influido por la utilización de alguna tecnología informática, es posible que se modifiquen: aspectos asociados a las transformaciones de lenguaje que posibilitan su modelización en estos entornos, los medios de representación que permiten su desarrollo y a las técnicas que posibilitan el acercamiento a tal concepto. Este proceso de transformación, denominado transposición informática (Balacheff, 2000) deja en evidencia la no neutralidad de las herramientas informáticas en cuanto a los objetos de enseñanza gestionados con estas tecnologías, que imprimen ciertas características y restricciones a los objetos del saber que median y los convierten en "objetos modelizados".

Es posible considerar a la función como un objeto de enseñanza que puede ser modelizado mediante el empleo de algún software determinado. ¿Qué características de la función se pueden ver afectadas por este proceso de transposición informática? En primer término, lo referente al lenguaje específico utilizado por la herramienta en particular. Luego, los marcos de representación (algebraico, numérico o geométrico) que están presentes en este tipo de software, permitiendo varios tratamientos para el concepto de función y que posibilitan la construcción de concepciones muy diversas de ese concepto. Estas concepciones no son ajenas a las prácticas específicas propuestas desde la gestión de clase pero, seleccionar una herramienta informática en particular para el tratamiento del concepto de función, supone, desde el rol docente, asumir ciertas condiciones para su desarrollo.

La presentación de las herramientas y comandos que posee un software de geometría dinámica, en este caso GeoGebra, para el tratamiento de funciones está poniendo su énfasis en su expresión algebraica para definirla (como en los trabajos matemáticos del siglo XVII) y luego, si es necesario, usar otros registros de representación (gráfica, tablas, transformaciones). Pero un software de características dinámicas, brinda la posibilidad de interactuar con los objetos construidos y simbolizados en tiempo real. La manipulación de los mismos a partir del arrastre y la utilización de otras herramientas y comandos, permitiría dar ese dinamismo a las funciones como una variación entre magnitudes, característica que analizaremos en el siguiente apartado.

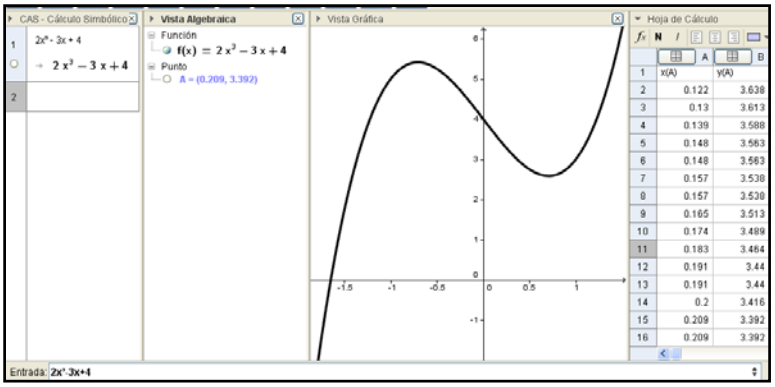


Figura 4: GeoGebra viabiliza el trabajo con diferentes registros matemáticos para un mismo objeto

Punto dinámico, ¿una función encubierta?

La posibilidad de transformación de cada objeto construido u obtenido mediante un software de geometría dinámica, permitiría interpretar de un modo particular el siguiente párrafo:

> La introducción del continuo de los números hace posible asociar a cada segmento de línea recta un número real determinado por su longitud; sin embargo, podemos ir mucho más lejos: no sólo la longitud, sino todo objeto geométrico y toda operación geométrica pueden ser remitidos a la esfera de los números. Los pasos decisivos en la aritmetización de la geometría fueron dados tan temprano como en 1629 por Fermat y en 1637 por Descartes. La idea fundamental de la geometría analítica es la introducción de "coordenadas", es decir, números asociados o coordinados con un objeto geométrico que lo caracterizan por completo. (Courant y Robbins, 2006, p 99)

Es posible, entonces, considerar que el objeto geométrico asociado a números es un punto. Esto no es una novedad para la expresión clásica de un punto mediante sus coordenadas, pero: ¿qué sucede si se considera que esos números pueden representar la medida de una longitud, una amplitud, un área, un volumen, un perímetro, etc.? El objeto geométrico es ahora un punto de coordenadas definidas mediante las medidas de otras magnitudes variables, que podrían controlar cómo se desplaza ese punto en el plano gráfico. A un punto construido con esas características es lo que llamamos punto dinámico. Algunos ejemplos:

I. Al seleccionar la herramienta Segmento de Longitud Fija, el software construye un punto (A, por ejemplo) y pide el ingreso de una medida (3, por ejemplo). Cuando se determina el otro extremo del segmento (B), es posible comprobar que éste no es único. Se generan todos los segmentos de la longitud ingresada respecto del primer punto construido. El punto B es un punto dinámico porque al desplazarlo construye no sólo un segmento sino un lugar geométrico: circunferencia de centro A y radio 3, según este ejemplo.

II. Construimos un punto cualquiera y una recta. Si utilizamos la herramienta Refleja Objeto en Recta, el punto simétrico que se obtiene también es dinámico. La posición de este punto, depende de la ubicación del primer punto y de la recta. Si se desplazan estos objetos geométricos, también lo hará el punto resultante de la simetría. Pero, en esta situación, queda más oculto de qué modo se establece esa dependencia entre el objeto reflejado respecto de los otros, porque la construcción del punto dinámico la realiza el software y hay varias condiciones geométricas que intervienen en la determinación del mismo[2].

III. Construimos en un software de geometría dinámica, como GeoGebra, los puntos A = (3,2); B= (x(A), 5) y C = (-2, y(A)). En este caso, consideramos que los puntos B y C son dinámicos puesto que una de sus coordenadas depende, respectivamente, de abscisa y ordenada de A. Con sólo mover el punto A, se desplazarán los otros dos puntos que también podríamos decir de qué modo se desplazan, qué representación gráfica tiene y su correspondiente simbolización.

IV. Construir un segmento AB, luego su mediatriz y sobre ella otro punto C de modo que se forme un triángulo ABC isósceles. Ese punto C es un punto dinámico porque con su propio desplazamiento sobre la mediatriz, se genera una familia de triángulos isósceles que dependen de la posición de este punto.

[2] Las mismas características se cumplen para las otras herramientas de ese bloque de transformación que tiene el software.

V. En el ejemplo anterior, es posible analizar cómo varía el área del triángulo construido si también ésta cambia la medida de la altura del segmento base AB. Para estudiar esta variación podemos construir un punto que contenga estas dos medidas: (medida de la altura, medida del área del triángulo). Este punto construido ad hoc para visualizar esa variación es un punto dinámico, sus componentes son números que se corresponden con medidas y éstas fueron determinadas anteriormente. Al desplazar el primer punto dinámico C, sobre la mediatriz, se modifica tanto el valor de la altura como el del área y, también, se desplazará el segundo punto dinámico que se ha construido con esas componentes.

El punto dinámico, desde la perspectiva del software es un objeto dependiente, construido por el usuario o por el software; de este modo, recuperaría dos características fundamentales para conceptualizar a la función: el cambio y la dependencia. El análisis de los ejemplos citados, permitiría inferir que el punto dinámico rescataría el concepto de función de los primeros tiempos en su desarrollo histórico.

Falcade (2002), propone que la herramienta de arrastre es un artefacto, que se transforma en instrumento (en el sentido de la génesis instrumental de Rabardel[3]) porque es lo que confiere el dinamismo a un software de geometría dinámica y, admite dos posibilidades semióticas. La primera, desplazar al objeto dentro de un determinado espacio (como puede ser la pantalla), que es uno de los elementos más sobresaliente del concepto de variable: "la generalidad". La segunda, evocar de un modo natural, pero implícito e intuitivo, la variación en el tiempo. La autora plantea que uno de los usos de este instrumento de arrastre puede realizarse dentro de un esquema de acción, por ejemplo, con el movimiento de un punto, se obtiene el desplazamiento de otro punto que depende del primero. Este uso refiere, fundamentalmente, a establecer la noción fundamental de variable dependiente que se ha adoptado en el marco de esta investigación.

La construcción de un punto dinámico con coordenadas variables, está implicando diferentes momentos en el proceso de esa variación. Primero se construye la que se considerará como variable independiente y luego se determinará qué otra variable dependerá de ella.

Dejamos para un segundo análisis la posibilidad de obtener una expresión simbólica mediante el desplazamiento de un punto dinámico. Esa posibilidad está presente mediante la opción de Activa Rastro para un punto que ofrece el software, GeoGebra en este caso.

Visualizar el rastro que deja un punto dinámico permitiría acceder a la noción de representación gráfica de una función mediante una trayectoria dinámica, que también puede analizarse como una sucesión de posiciones de un objeto (punto en este caso) dependiendo de los valores de sus componentes variables.

Es decir que hasta ahora la construcción de un punto dinámico permitiría conceptualizar a la función como una variación entre dos magnitudes, estableciendo previamente una dependencia entre ellas (Oresme, Galileo). Y, como las medidas de esas magnitudes pueden pertenecer a diferentes marcos matemáticos, posibilita trabajar con funciones que los relacione. Además, la representación gráfica no se instalaría como algo estático (ya construido o dado), ni como algo

[3] Para Rabardel (1995) un *artefacto* es una cosa que puede sufrir una transformación de origen humano. Además, este autor establece la diferencia entre *artefacto*, de un determinado objeto, y un *instrumento* como una construcción psicológica, puesto que este último no existe en sí mismo, se transforma en instrumento cuando el sujeto es capaz de apropiárselo y de integrarlo a sus actividades. Es decir que el término instrumento se usa para designar al artefacto en situación, delimitado por su uso.

que aparece casi al instante (cuando se ingresa una fórmula); sino como una construcción, tal vez no precisa, por los rastros que va dejando al variar sus componentes (Oresme, Galileo, Descartes).

Es oportuno destacar que hasta la versión actual de GeoGebra (5.0), si bien tiene herramientas CAS, no es posible obtener la expresión analítica que corresponde al rastro que deja ese punto dinámico construido[4]. Esta condición se torna favorable para afianzar el camino elegido sobre la definición de función que queremos introducir: la no necesidad de una fórmula desde sus comienzos (tal como sucedió en su desarrollo histórico). Además, permitiría la formulación de conjeturas sobre la forma de esa representación, el análisis de algunos puntos característicos, etc., para luego pasar a un trabajo de corte más algebraico si se considera necesario.

Reflexiones finales y perspectivas

Por lo analizado en esta comunicación y elaborado en el proyecto de investigación, sugerimos que:

Se realicen previamente construcciones geométricas para familiarizar al alumno con el concepto de dependencia que está presente en el software de geometría dinámica, cuando categoriza a los objetos que construye. También facilitaría construcciones más complejas que pueden estar presentes en problemas geométricos con un análisis algebraico, como es el caso del recurso implementado.

Se presenten problemas sólo para analizar variaciones entre magnitudes, establecer cuál es independiente y por qué. Luego, cuál se podría tomar como magnitud dependiente (si existieran varias). Proponer anexar una tabla de valores, que está incluida en el software dinámico, como un comienzo hacia la noción que la variación de un punto puede generar una relación entre esas magnitudes.

Se analice la construcción de puntos dinámicos para focalizar la importancia que tienen en el estudio de situaciones que integran diversos marcos: su potencialidad para realizar conjeturas sobre el trazo que van dejando, respecto de las condiciones establecidas; la posibilidad de incorporar cuestiones relativas a la optimización de problemas, antes de llegar a los cálculos formales. Puesto que, la construcción de un punto dinámico supone un tipo de tarea con la que los alumnos no están familiarizados al no estar presente en el entorno de lápiz y papel.

Se propongan varias definiciones del concepto de función, como una muestra del recorrido histórico, para que se seleccione una o dos, de acuerdo con las diferentes características del objeto que se ha trabajado en las actividades. Decimos que puede haber más de una porque esto implicaría mostrar la multiplicidad de sentidos que están contenidos en sólo un término: función.

Finalmente, en la matemática formativa (Santaló, 1994) tiene que estar presente el concepto de función. Lo que estamos cuestionando ahora es qué definición es la que mejor equilibra la relación formativa – informativa, si su construcción está mediada por un software dinámico. Por eso creemos que, la construcción de un punto dinámico para analizar la variación de dos magnitudes, estaría actuando en el sentido que plantea Santaló «informar formando»:

[4] La representación gráfica de una función, que ha sido definida por un punto dinámico, es posible visualizarla mediante dos herramientas del software **Activa Rastro** (como secuencia de puntos) y **Lugar Geométrico** (como una curva de trazo continuo).

informa de una dependencia, cómo se establece la misma y, además forma un recorrido posible para caracterizar a las funciones cuando se trabaja con entornos dinámicos.

Referencias y bibliografía

Artigue, M. (1991). Analyse de processus d'enseignement en environnement informatique. *Petit x* n° 26 1990-1991, 5-27.

Balacheff, N. (2000). Entornos informáticos para la enseñanza de las matemáticas: complejidad didáctica y expectativas por edades, en: Gorgorió, N. y otros (2000) *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional,* Barcelona: Grao, 93-108.

Barbin, E. & Douady, R. (1996). *Enseñanza de las Matemáticas: Relación entre saberes, programas y prácticas*. Tropiques éditions.

Boyer, C. (1994), *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Universidad de Textos.

Courant, R. y Robbins, H. (2006). *¿Qué son las matemáticas?* México DF: Fondo de Cultura Económica.

DE Cotret S. (1988). Une étude sur les représentations graphiques du mouvement comme moyen d'accéder au concept de fonction ou de variable dépendante*, Petit x*, 17, 5-27.

Falcade, R. (2002). L'environnement Cabri-géomètre outil de médiation sémiotique pour la notion de graphe d'une fonction, Laboratoire Leibniz-Imag de Grenoble, équipe IAM, *Petit x*, 58, 47-81.

Ferragina, R. (Ed.) (2012). *GeoGebra entra al aula de Matemática*. Montevideo: Espartaco.

Ferragina, R. y Lupinacci, L. (2015) Caracterización de la Función medidada por software de geometría dinámica. El caso del punto dinámico, en: Fioriti, G. (2015) *Recursos tecnológicos para y por los docentes destinados a la enseñanza de la matemática en Argentina y Francia*. Buenos Aires: Teseo. En prensa.

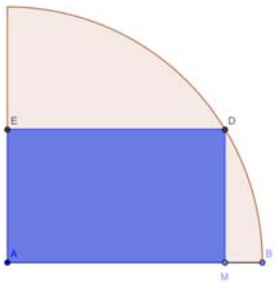
Lacasta, E. (1998). *Las funciones en los gráficos cartesianos*. Madrid: Síntesis.

Lupinacci, L. (2015). La función como variación. Producciones de alumnos y recursos docentes, en: Fioriti, G. (2015) *Recursos tecnológicos para y por los docentes destinados a la enseñanza de la matemática en Argentina y Francia*. Buenos Aires: Teseo. En prensa.

Rabardel, P. (1995). *Les Hommes et les Technologies*. Paris: Armand Colin,.

Santaló, L. A. (2002*). Matemática para no matemáticos*, en Parra, C. y Saiz, I. (1994) *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*, Buenos Aires: Paidós, 21-38.

Apéndice A
Recurso elaborado por los docentes



La figura muestra, un cuarto de círculo con radio AB de 6 cm y un punto M que se desplaza sobre AB. Sobre el segmento AM, se construye un rectángulo AMDE.

a) Realicen la construcción que se indica en la figura.

Para realizar la construcción, puede ser de utilidad comenzar con un segmento de longitud fija 6, construir un punto sobre él (M), y posteriormente construir el sector circular y el rectángulo.

b) ¿Qué ocurre cuando desplazamos al punto M? Indiquen qué elementos de la construcción cambian y cuáles permanecen constantes. ¿Qué ocurre con el área del rectángulo?

Mediante la herramienta Área es posible que el valor de la misma aparezca en pantalla.

También pueden hacer visible la longitud del segmento AM. Investiguen cómo.

Les proponemos estudiar las variaciones del área del rectángulo dependiendo de la posición del punto M.

c) ¿Cuánto vale el área cuando la base del rectángulo mide 3 cm? ¿Y cuando mide 5 cm?

d) ¿Cuánto debe medir la base del rectángulo para que el área del rectángulo sea de 15,5?

e) Si queremos crear un punto P cuyas coordenadas representen estas variaciones. ¿Cuáles deberían ser las coordenadas de dicho punto? Expliquen por qué deben seleccionar esas, y luego ingresen el punto P a través de la Barra de Entrada.

f) Ahora, desde el menú contextual del punto P, seleccionen la opción Activa Rastro. Vuelvan a desplazar el punto M a lo largo del segmento AB. ¿Qué ocurre? ¿Por qué?

g) ¿Cuál es el valor máximo al que llega el área del rectángulo? ¿Por qué?

h) ¿Cuánto mide la base del rectángulo cuando el área es máxima?

i) Trataremos ahora de encontrar la fórmula que corresponde al rastro dejado por el punto P. Antes de comenzar con esa búsqueda, ¿qué tipo de función te parece observar según el rastro? ¿Por qué? Propone algunas fórmulas posibles ingresándolas desde la Barra de Entrada. Indica si tus conjeturas fueron correctas.

La visualización en tareas de rotación y traslación sobre el plano del videojuego.

Jenny Patricia **Acevedo** Rincón
Universidad Estadual de Campinas
Brasil
jennyacevedorincon@gmail.com
Leonor **Camargo** Uribe
Universidad Pedagógica Nacional
Colombia
leonor.camargo@gmail.com

Resumen

El uso del videojuego en el aula de clases permite dinamizar la reflexión, desarrollar competencias y estimular capacidad deductiva. Con el fin de aprovechar su uso en el aula de matemáticas, se desarrolló una investigación que hace uso del videojuego en tareas de acercamiento a los conceptos geométricos de rotación y traslación con tres estudiantes con Necesidades Particulares de Aprendizaje y/o Emocionales en un colegio de la ciudad de Bogotá (Colombia). En la presente comunicación exponemos un marco analítico para identificar procesos y habilidades de visualización que desarrollan los estudiantes al aprovechar el videojuego como mediador visual dentro de una institución que defiende la Modificabilidad Estructural Cognitiva como modelo pedagógico. Seguido, ilustramos los efectos del uso del Tetris en la resolución de tareas desarrolladas por un estudiante de 12 años que cursa quinto grado de primaria con Necesidades Particulares de Aprendizaje.

Palabras clave: Videojuegos, visualización, rotación, traslación, necesidades educativas de aprendizaje.

Introducción

En la ciudad de Bogotá, el Gimnasio Los Robles atiende a niños que, en su mayoría, tienen dificultades de aprendizaje y/o emocionales. Al ingresar al Gimnasio, los estudiantes adelantan sus estudios en una enseñanza regular, mientras van superando o compensando sus dificultades, si las tienen, gracias al acompañamiento interdisciplinar constante que les brinda el Gimnasio.

La Institución considera el modelo pedagógico de Modificabilidad Estructural Cognitiva (MEC) que desarrolla funciones intelectuales a partir de operaciones con las que se resuelven situaciones que, al ser de carácter general, no se discriminan acciones específicas asociadas a la comprensión y uso de conceptos y procedimientos matemáticos, hecho que dificulta poner en funcionamiento el modelo (Prieto, 1987, p. 30) sugerido por el colegio, en esta asignatura. Este hecho, nos condujo a desarrollar un proyecto de investigación tendiente a seleccionar, redefinir y caracterizar a partir del análisis de las actuaciones de estudiantes, algunas funciones y operaciones del modelo que consideramos propias de la actividad geométrica y particularmente aquellas asociadas a habilidades y procesos de visualización.

A continuación, exponemos un marco analítico para dar cuenta de procesos y habilidades de visualización que se estimulan con el uso del videojuego *Tetris.* Este marco fue construido a partir de la selección de algunas categorías de visualización sugeridas en la literatura de referencia. Además, presentamos algunos resultados de la investigación, que buscaba aprovechar dichos procesos y habilidades de visualización en una aproximación metodológica que pretende acercar intuitivamente a estudiantes, con necesidades particulares de aprendizaje, a los conceptos de rotación y traslación. Ilustramos por medio de dos situaciones, el análisis realizado a algunos extractos de interacciones entre la profesora y un estudiante de grado 5° de primaria. Por último, presentamos unas reflexiones frente a la investigación.

Procesos y habilidades de visualización

Asumimos la Visualización según la definen Gal y Linchevski (2010) como el conjunto de habilidades y procesos necesarios para representar, transformar, generalizar, comunicar y documentar información visual o reflexionar sobre ella. Según estos autores, la visualización interviene en tres momentos del proceso cognitivo: en la organización, en el reconocimiento y en la representación de información. A partir de estos momentos organizamos procesos y habilidades de visualización sugeridos por Presmeg (1986), Duval (1995), Bishop (1983) y Del Grande (1990), los cuales se constituyeron en categorías de análisis del estudio investigativo que adelantamos.

En el momento de *organización* ubicamos las siguientes habilidades sugeridas por Del Grande (1990), las cuales definimos a continuación:

1. Coordinación óculo-manual: es la habilidad para seguir con los ojos el movimiento de los objetos de forma ágil y eficaz.
2. Identificación visual: es la habilidad para reconocer una figura aislándola de su contexto. El estudiante centra la atención en la figura, sin distraerse con estímulos irrelevantes.
3. Conservación de la percepción: es la habilidad para reconocer que un objeto tiene propiedades invariantes tales como forma y tamaño, a pesar de la variabilidad dada por el movimiento.
4. Reconocimiento de posiciones espaciales: es la habilidad para relacionar la posición de un objeto con uno mismo, es decir el observador.
5. Reconocimiento de relaciones espaciales: es la habilidad que permite identificar correctamente las características de relaciones entre diversos objetos situados en el espacio.
6. Discriminación visual: es la habilidad que permite comparar dos o más objetos identificando sus semejanzas y diferencias.
7. Memoria Visual: es la habilidad para recordar, las características visuales y de posición que tenía un conjunto de objetos que estaba a la vista pero que ya no se ve o que ha sido cambiado de posición.

Duval (1995) hace mención a la identificación visual de las figuras con base en leyes de organización perceptiva, y que, a su vez, se pueden usar para representar objetos reales u objetos matemáticos. Duval plantea tres tipos de funciones cognitivas, que denomina como aprehensiones de las cuales sólo hacemos referencia a la aprehensión operativa y la aprehensión discursiva, pues son las que usamos en los análisis. Por su parte, Bishop (1983) se refiere a dos procesos: Interpretación de la Información Figural (IFI) y Procesamiento Visual (VP), procesos

que incluimos en el momento de reconocimiento. Por lo anterior, en el momento de *reconocimiento* ubicamos dos tipos de aprehensiones definidas por Duval (1995) y los procesos de visualización señalados por Bishop (1983).

1. Aprehensión operativa: se produce cuando el sujeto lleva a cabo alguna modificación a la configuración inicial para resolver un problema geométrico y recuerda propiedades, movimientos y estrategias para llevar a cabo una tarea propuesta.
2. Aprehensión discursiva: se produce cuando hay una asociación de una configuración con afirmaciones matemáticas (definiciones, teoremas, axiomas).
3. Interpretación de la Información Figural (IFI): es el proceso de interpretación de representaciones visuales para extraer información de ellas. Para que haya Interpretación de la Información Figural debe existir un referente físico y de esta forma el individuo puede empezar a hacer el respectivo análisis.
4. Procesamiento Visual (VP): es el proceso de conversión de la información no figurativa en imágenes visuales o transformación de unas imágenes visuales ya formadas en otras.

Y por último, en el momento de *representación*, ubicamos los tipos de imágenes mentales sugeridos por Presmeg (1986), entendidas como las escenas mentales que describen información visual o espacial de un objeto sin requerir su presencia u otra representación externa. Presmeg diferencia tipos de imágenes con las que un individuo puede interactuar en una situación, de las cuales nosotros sólo presentamos dos: imágenes cinéticas e imágenes dinámicas.

1. Imágenes cinéticas: son imágenes en parte físicas y en parte mentales, ya que en ellas tiene un papel muy importante el movimiento de manos, cabeza, etc.
2. Imágenes dinámicas: son imágenes mentales en las que los objetos o algunos de sus elementos se desplazan.

Un acercamiento intuitivo a la rotación y la traslación

El estudio procuró la aproximación a los conceptos de rotación y traslación, teniendo en cuenta que los movimientos rígidos en el plano hacen parte del currículo de grado sexto y la propuesta fue desarrollada para el grado quinto. A continuación presentaremos el potencial de las habilidades y procesos de visualización en el reconocimiento de algunas propiedades matemáticas de dichas isometrías. Nuestro acercamiento tiene las siguientes características:

Aproximación visual.

El reconocimiento de las figuras geométricas que muestran el giro o el desplazamiento de una figura referenciada, así como las posiciones que ocupa en un plano (tablero de Tetris), las posiciones relativas al observador (o jugador), y las relaciones de las figuras entre sí, permiten cumplir con el objetivo del juego (ganar el mayor puntaje por acumulación de "líneas" en el videojuego).

Acercamiento por invariantes.

1. Rotación. El reconocimiento de giros de 90º en un mismo sentido y la asociación de los mismos a efectos producidos por el control (↑) del juego. En el caso de experimentar una rotación, las figuras mantienen la forma y el tamaño, pero cambian de orientación.

2. Traslación. El reconocimiento de los desplazamientos en tres direcciones: derecha (→), izquierda (←) y abajo (↓). En el caso de experimentar una traslación, las figuras mantienen la forma, el tamaño y la orientación, pero su posición varía.

Uso de vocabulario informal.

Dentro de las conversaciones sostenidas con los estudiantes en el desarrollo del estudio, asociamos la palabra "girar" con el movimiento de rotación y las palabras "correr", "bajar" o "mover" con el movimiento de traslación. Además cuando mencionan "cambio", aceptamos que se están refiriendo, en general, al uso de uno de los movimientos rígidos en el plano, o a la combinación de ellos.

Metodología investigativa

A continuación se describe el contexto del estudio dentro del modelo pedagógico MEC, los estudiantes con que se desarrolló la propuesta y las etapas de la investigación.

Contexto del estudio.

En el modelo pedagógico del Gimnasio Los Robles, MEC, se parte del diagnóstico de las disfunciones de los estudiantes para darle a cada uno el tratamiento adecuado, y brindarle el apoyo para que las disfunciones del estudiante sean superadas durante su estadía en el Gimnasio. Las disfunciones diagnosticadas a los estudiantes, al ingresar al colegio, se agrupan de acuerdo con cada una de las fases de enseñanza del modelo:

1. Entrada: percepción borrosa, comportamiento asistemático, vocabulario reducido, desorientación espacial, desorientación temporal, problemas para establecer lo esencial, recopilación de datos imprecisa, consideración de menos de dos fuentes de información.
2. Elaboración: no percibe el problema, no distingue datos, no tiene conducta comparativa, escasa amplitud del campo mental, percepción episódica, no hay razonamiento lógico, no hay interiorización del propio comportamiento, dificultad para proponer hipótesis lógicas, incapacidad de verificación de hipótesis, conducta por ensayo y error, dificultad para elaborar categorías cognitivas, reducción de la conducta sumativa, dificultad para establecer relaciones.
3. Salida: conducta egocéntrica, no establece relaciones virtuales, bloqueo en la comunicación, respuestas por ensayo y error, uso de instrumentos verbales inadecuadas, poca exactitud en la comunicación de repuestas, deficiencia en el transporte visual, conducta impulsiva.

Después de hacer el diagnóstico de las disfunciones cognitivas, se prevé lograr una modificabilidad de tipo cognitivo, en la medida en que la mediación hecha por los docentes sea favorable para el aprendizaje de los estudiantes. Dentro del aula de clases, la modificabilidad se logra a partir de proyectos de aula que contemplan potenciar operaciones mentales durante el desarrollo del mismo en cada una de las áreas. Generalmente, dichos proyectos son semestrales para los grados de preescolar a quinto, y anuales para los grados de sexto a undécimo. Aunque la gran mayoría de las operaciones mentales son trabajadas por medio de la interacción en el aula, sólo se propone potenciar una o dos de ellas a lo largo de un proyecto de aula desarrollado en un contexto específico. El desarrollo de cada proyecto de aula contempla por lo menos dos situaciones problemas semestrales, que llevan a proponer pequeñas situaciones que conllevan al desarrollo de funciones específicas del área. Bimestralmente, se evalúan los conceptos trabajados

con base en el proyecto de aula de cada grado. Y semestralmente, los estudiantes dan muestras de sus aprendizajes por medio de la exposición de los productos realizados a lo largo del desarrollo del proyecto.

Los estudiantes

La investigación se desarrolló con nueve estudiantes de quinto primaria en el Gimnasio Los Robles de la ciudad de Bogotá (Colombia), cuyas edades oscilaban entre los 9 y los 12 años. Los estudiantes escogidos para la investigación según su historia individual fueron: Juan David, Miguel Ángel y José Daniel[1]. Para ilustrar el perfil de los estudiantes, en la Tabla 1., mostramos una breve descripción del diagnóstico realizado a José Daniel, hecho por los terapeutas de la institución.

Tabla 1.
Perfil cognitivo de entrada del estudiante José Daniel

El estudiante ingresa al colegio a los 8 años. Se caracteriza por ser un niño inseguro, que mantiene regular atención tanto visual como auditiva y regular motivación. Comprende y resuelve problemas sencillos, que responde con rapidez pero inseguro. Analiza y sintetiza información. Tiene buena memoria. Se observan buenas habilidades de percepción visual. Maneja un buen nivel de conceptualización. Evidencia facilidad para iniciar y mantener el tópico de una conversación expresando sentimientos y experiencias propias. Se evidencia dificultad de escribir desde los primeros años y hasta el momento de las pruebas del estudio (año 2009) se mantuvo, esto evidenciado en la toma de apuntes nulos o incompletos. Al momento del estudio el estudiante tenía 12 años.

Etapas de la investigación

1. Selección del videojuego. Escogimos el videojuego Tetris, tipo puzzle, que con sencillos movimientos y fácil uso de los controles, permite un acercamiento a los movimientos rígidos en el plano: rotación y traslación. Gracias a su entorno visual, fortalece el acercamiento intuitivo a nociones matemáticas contribuyendo a la construcción del significado de éstas. Como lo indica Sedeño (2000), la componente visual de un videojuego favorece el control psicomotriz, la coordinación ojo-mano, el desarrollo de espacialidad, ayuda a dinamizar la reflexión sobre las causas y consecuencias de acciones, estimula la capacidad deductiva, la competencia en resolución de problemas, la imaginación, la memoria y las habilidades de análisis y síntesis.

2. Selección de los estudiantes para el estudio de caso. Estudiamos las carpetas diagnósticas, con la debida autorización de la institución. En ellas reconocemos, en cada uno de los estudiantes, las dificultades y fortalezas que daban muestras de un perfil cognitivo de cada estudiante. De esta manera, escogimos al grado Quinto B de la sección primaria para realizar el estudio de caso. Este curso contaba con 9 estudiantes con necesidades particulares de aprendizaje.

3. Diseño de la secuencia didáctica. Se creó una secuencia didáctica para el acercamiento a las nociones de rotación y traslación, con base en la articulación de operaciones y funciones del modelo pedagógico MEC y los procesos y habilidades de visualización seleccionados. Cada una de las actividades planteadas da cuenta de la activación de funciones a favor del desarrollo de las operaciones mentales.

[1] Nombres ficticios de los estudiantes

4. Toma de datos investigativos. Después de hacer las debidas adaptaciones de la secuencia didáctica, en cuanto a tiempo de aplicación y disponibilidad horaria, procedimos a la aplicación del mismo con base en el uso del videojuego. Las grabaciones se hicieron por miembros del personal de la institución y de la docente investigadora de este proyecto. Las actividades se desarrollaron en el salón de clases y la sala de informática.
5. Transcripción de los videos y selección de los estudiantes para el estudio de caso. Posterior a la toma de datos, se hizo la transcripción de los nueve videos para iniciar su respectiva interpretación. Vale la pena aclarar que aunque se hizo la transcripción de los nueve videos, la interpretación y el análisis minucioso de cada manifestación sólo se hizo a tres de los nueve estudiantes grabados.
6. Selección de los fragmentos para el análisis. Las intervenciones de los estudiantes eran extensas, por lo que se vio conveniente segmentar las intervenciones de cada uno, transcribirlas en orden cronológico y realizar el respectivo análisis, atendiendo a las necesidades del proyecto en cuanto al desempeño frente a las funciones y operaciones del modelo pedagógico MEC que se constituyeron en las categorías específicas de análisis. Por ejemplo, de José Daniel se tienen 12 manifestaciones.
7. Identificación de manifestaciones exitosas y no exitosas de los estudiantes. La selección que hicimos de las manifestaciones de los estudiantes, nos permitió la identificación de aquellas en las que los estudiantes se mostraban exitosos o no, con el fin de contrastar su desempeño con la información obtenida del diagnóstico que hicieron las terapeutas del colegio y con el comportamiento en clases de matemáticas.
8. Síntesis de las manifestaciones y perfil cognitivo de los estudiantes. Procedimos a hacer la respectiva síntesis de cada uno de los estudios de casos, en los que evidenciamos una ruta cognitiva utilizada por los estudiantes para acercarse a las nociones de rotación y traslación.

Secuencia didáctica

En la secuencia didáctica prevista en el estudio, se propusieron actividades organizadas en tres momentos: presentación del juego, interacción con el videojuego y prueba escrita. A continuación, se describen algunas de ellas. La descripción detallada de las actividades puede consultarse en Acevedo (2010).

Momento 1: Presentación del juego.

Se presenta el videojuego a los estudiantes, las fichas que se usan, y los posibles movimientos y desplazamientos de éstas sin que ellos interactúen directamente con el videojuego. Se muestra a los estudiantes modelos de cada una de las siete fichas del Tetris, elaborados en foamy[2] de diferentes colores; se invita a los estudiantes a nombrarlas de acuerdo con formas familiares de letras y figuras geométricas (te, ele, jota, zeta, ese, i y cuadrado), y reconocer sus subconfiguraciones de cuadrados de igual tamaño unidos por los lados. Adicionalmente, se establecen semejanzas y diferencias entre las figuras, se comparan aquellas

[2] También llamado Goma Eva, que por su flexibilidad permite la fácil manipulación del juego en concreto.

que son imagen bajo una reflexión de otras fichas como la "ele" con la "jota", y la "ese" con la "zeta".

Se muestran otras figuras hechas en foamy de formas y tamaños diferentes a las del Tetris, mostradas inicialmente, para que los estudiantes discriminen cuáles pertenecen al conjunto de las fichas del Tetris. Con modelos de fichas hechas en foamy de color blanco, que pertenecen al Tetris, los estudiantes seleccionan aquella ficha que es "igual" a una ficha sugerida por la profesora, la ubican en un tablero de corcho fijándola con chinches y hacen rotaciones de 90 grados para establecer las posibles posiciones diferentes en las que pueden ubicarse.

Es claro que en este Momento de la secuencia, no es posible evidenciar comportamientos de estrategia e hipótesis para actuar ante situaciones determinadas porque no hay interacción con el videojuego Tetris, por lo cual se plantea el Momento 2.

Momento 2: Interacción con el videojuego.

Los estudiantes interactúan con el videojuego y conversan con la investigadora. Se hacen preguntas sobre lo que el estudiante ve en un momento determinado. Al momento de hacer las preguntas, los estudiantes deben haber descubierto las herramientas 'pausa' y 'reinicio' del juego, ya que éstas son un apoyo para controlar el movimiento de las fichas. En este Momento, es preciso verificar la orientación espacial eficiente, conservación de la percepción, aprehensión operativa, y tratamiento de estrategias para verificar hipótesis, de igual manera, este Momento se considera apropiado para evaluar el razonamiento divergente de los estudiantes a partir de errores cometidos intencionalmente.

Momento 3: Prueba escrita.

Se diseña una prueba escrita con preguntas sobre algunas situaciones planteadas en el videojuego. Éstas permiten ver si el estudiante decodifica los movimientos a realizar en el plano de la hoja de papel. También se pregunta sobre estrategias a usar, cómo evaluar los errores cometidos en ciertas jugadas, descripción de fichas que tiene y plantear estrategias para cumplir con el objetivo, entre otras.

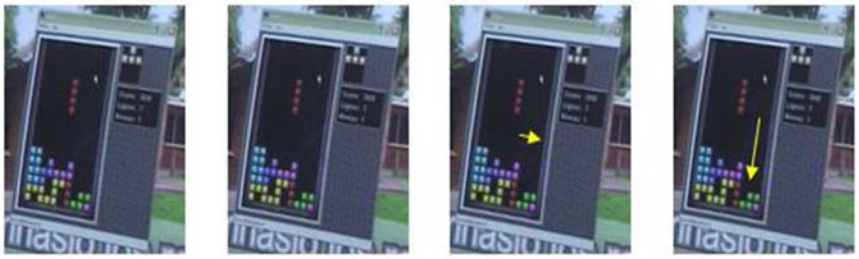
Un ejemplo de análisis

A manera de ilustración de los análisis realizados, presentamos dos extractos de conversaciones con el estudiante José Daniel en la fase de *Elaboración* de la secuencia.

Ejemplo 1 (Fase de Elaboración). El extracto de conversación presentado en la Tabla 2., corresponde a la interacción del estudiante con el videojuego, en la fase de elaboración en la operación *Diferenciar*, y con operación de *Ejercicio adecuado de la conducta comparativa* de la propuesta de enseñanza para analizar el proceso de *Procesamiento Visual*. A partir de una estrategia planteada por el estudiante, la profesora plantea otra para hacer llegar a un mismo lado la ficha que actualmente tiene. El estudiante juega con el tablero en pausa.

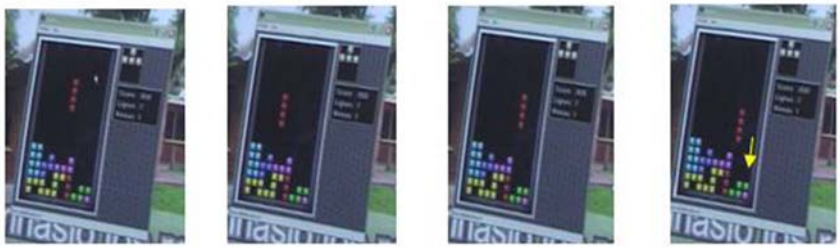
Tabla 2.
Manifestación Número 1 del estudiante José Daniel.

1. **Profesora:** ¿En dónde va a encajar esta I? [Pantalla a. Tablero inicial]
2. **José Daniel:** Aquí [Pantalla b.]
3. **Profesora:** ¿Qué movimiento le hace [para llegar allá]?
4. **José Daniel:** Estaba aquí [Pantalla a.] la muevo aquí [Flecha amarilla en Pantalla c.] y la bajo [Flecha amarilla en Pantalla d.].



Pantalla a. Pantalla b. Pantalla c. Pantalla d.

5. **Profesora:** Si yo la tengo aquí [Pantalla e.], la bajo [Pantalla f.], y la corro para acá [Pantalla h.], encaja (la ficha)?



Pantalla e. Pantalla f. Pantalla g. Pantalla h.

6. **José Daniel:** Si
7. **Profesora:** […]¿Es equivalente al movimiento que usted dijo que iba a hacer?
8. **José Daniel:** Sí, es lo mismo, porque la ficha va a llegar al mismo lado.
9. **Profesora:** Pero, ¿cuál de los dos es más rápido?
10. **José Daniel:** El que propongo yo.
11. **Profesora:** ¿Por qué?
12. **José Daniel:** Porque la I sólo tendría que hacer este movimiento [señala con su dedo sobre la pantalla representando el desplazamiento hacia →, y luego hacia ↓.] En cambio aquí [señalando lo hecho en la pantalla h.] tocaría hacer esto [señala con su dedo sobre la pantalla representando el desplazamiento hacia ↓,→, ↓ y→.].
13. **Profesora:** ¿Hay otra forma de hacerla llegar, aparte de las dos que hemos propuesto?
14. **José Daniel:** Eh si, pero… [la ficha] se movería mucho y perderías tiempo.

José Daniel reconoce que los caminos planteados por él [4] y por la profesora [5] hacen llegar la ficha al mismo espacio [8]. Reconoce que el camino planteado inicialmente por él es más eficiente porque es más rápido, es decir que toca hacer menos movimientos y ganaría tiempo. Además de esto piensa que, a pesar de que existan más caminos para llegar, estos se demorarían más tiempo [14]. Podemos evidenciar que el estudiante logra éxito en la tarea de reconocer que varios caminos conducen al mismo lado y que unos se demoran menos que otros. Esto es, José Daniel discrimina y compara dentro de la medida de las posibilidades para anticiparse a la solución, por lo que podemos decir que da muestras de una óptima función del ejercicio de la conducta comparativa dentro de la operación diferenciación. Parece ser que José Daniel reconoce que el camino que necesita menos tiempo para llegar al espacio planteado, es la menor combinación de rotaciones y traslaciones. Al comparar los diferentes caminos y escoger entre ellos el que demore menos tiempo, José Daniel convierte la información abstracta, correspondiente al camino planteado por la profesora, en imágenes visuales para lograr un apropiado procesamiento visual de la información planteada.

Ejemplo 2 (Fase de Elaboración). El extracto de conversación presentado en la Tabla 3., corresponde a la interacción del estudiante con el videojuego, en la fase de elaboración en la operación *Proyección de relaciones virtuales*, y con operación de *Ejercicio del pensamiento hipotético* de la propuesta de enseñanza para analizar el proceso de *Procesamiento Visual*. El estudiante ha creado una serie de obstáculos y no es posible hacer línea con la ficha que baja. La profesora pregunta sí con la ficha que baja puede o no hacer línea para verificar que el estudiante puede anticipar consecuencias y plantear una estrategia adecuada.

Tabla 3.
Manifestación Número 2 del estudiante José Daniel.

1. Profesora: Usted cree que con la ficha que viene, ¿puedo hacer alguna línea?

2. José Daniel: No

3. Profesora: ¿Por qué?

4. José Daniel: No, o de pronto… no, con la que viene no puedo hacer ninguna fila, porque la única que puedo es ésta [flecha amarilla en Pantalla a.] para poder quitar eso [obstáculos sobre la ficha]. Al hacer esa, esto cae [cuadro rojo en Pantalla a.] para poder hacer otra [fila].

5. Profesora: ¿Y en dónde la va a poner entonces?

6. José Daniel: Aquí la voy a colocar [Pantalla b.]

7. Profesora: ¿Por qué está seguro de que cabe ahí?

8. José Daniel: Porque si contamos los cuadritos [gira la ficha y señala la base de la ficha rotada. Pantalla c.]

9. Profesora: ¿Y dónde quedaría entonces esta parte? [Flecha Pantalla c.]

10. José Daniel: Quedaría arriba.

Pantalla a. Pantalla b. Pantalla c.

A pesar de haber llenado casi la mitad del tablero con obstáculos, José Daniel, logra plantear una estrategia con el fin de disminuir el número de obstáculos creados. Sin embargo, la ficha que va bajando, y la futura, no le ayudan para llevar a cabo la estrategia planteada, por lo que debe ubicar la ficha que va bajando inmediatamente sobre un lugar no adecuado en número de cuadros del tablero, pero que está sobre obstáculos previamente creados. Al proponer con argumentos adecuados como “hacer línea” para que los obstáculos bajen [4], el estudiante da

muestras de un adecuado desempeño en la función del ejercicio del pensamiento hipotético, dentro de la operación de Proyección de Relaciones virtuales.

El estudiante logra buen desempeño en la tarea de convertir información abstracta como lo constituye la situación que se presenta en el tablero, y que además logra dar muestras de reconocer las jugadas necesarias para desocupar el tablero de los obstáculos creados. Es decir, José Daniel tiene éxito en el *Procesamiento Visual*.

El análisis de las interacciones de José Daniel con el videojuego y con la profesora nos permitió identificar un cambio en el perfil cognitivo, por lo menos circunstancial. A diferencia del diagnóstico realizado por los terapeutas de la institución, se pudo observar que mediante el desarrollo de la secuencia didáctica se logró que el estudiante superara algunas de sus dificultades frente a aspectos puntuales como concentración y comunicación.

A continuación mostraremos la síntesis de los resultados exitosos y no exitosos del José Daniel durante el estudio de caso:

a. Frente a la identificación: reconoce que tanto la ficha como las sub-configuraciones de la ficha no están unidas por los vértices; realiza con éxito la rotación y la traslación de las fichas concretas; e identifica de manera adecuada la rotación y la traslación de las fichas dentro del plano del tablero del Tetris en el computador.

b. Frente a los movimientos rígidos en el plano: usa la rotación y la traslación para hacer coincidir una pareja de fichas en un espacio; reconoce el efecto de una transformación en las fichas en movimiento; identifica los giros y los desplazamientos; relaciona espacios y fichas, a través de rotación y traslación hechas a las mismas; relaciona la rotación y traslación con giros y desplazamientos respectivamente, y éstos con los controles del juego; utiliza la composición de rotación y traslación; recompone una figura a partir de rotación y traslación de fichas; y anticipa resultados posteriores a la comparación entre jugadas equivalentes.

c. Frente a las estrategias y pensamiento divergente: anticipa estrategias en términos de las jugadas más rápidas; además, reconoce el error justificando la posible jugada en términos de composición de movimientos de rotación y traslación

Comúnmente al observar en el aula de clase a José Daniel, aparentemente no se encuentra concentrado en la actividad. Sin embargo, durante el desarrollo de las actividades propuestas en esta investigación el estudiante muestra mantener su atención en todos los momentos de la actividad, ya que responde de manera adecuada y con seguridad, pese a mostrar un niño inseguro según lo manifestado en el perfil cognitivo de entrada del estudiante.

Podemos ver que la única dificultad encontrada en una de las doce manifestaciones del estudio de José Daniel (en Acevedo, 2010), fue en recordar la dirección que daba un giro, y aplicarlo en una de las preguntas hechas en la prueba. Sin embargo, resuelve con facilidad los problemas al planear estrategias para culminar en jugadas exitosas. El estudiante demostró por medio de pocas manifestaciones tener un nivel de conocimientos de ángulos, vértices, giros y pre conceptos importantes al momento de acercarse a la rotación y la traslación. Por esto encontramos posible que el estudiante entienda los efectos de dichos movimientos rígidos en el plano y la composición de los mismos. Frente a su motivación, José Daniel se mantiene

motivado durante el desarrollo de las actividades, pues su participación en el desarrollo de las mismas, es destacable dentro del grupo.

Algunas reflexiones

Sobre los objetivos propuestos en el estudio. Podemos reconocer que el presente estudio involucró la actividad extraescolar de la realidad de los estudiantes, al ámbito escolar, teniendo como base la mediación docente, guiada por la aplicación de una secuencia didáctica creada especialmente teniendo en cuenta las necesidades de aprendizaje y/o emocionales de los estudiantes.

Sobre el modelo y su relación con la visualización. Podemos encontrar en el modelos funciones transversales a todas las áreas de aprendizaje, lo que permite disponer de criterios para la evaluación de los estudiantes, lo que nos permitió analizar con más cuidado el desempeño en tareas que requieren habilidades y procesos de visualización. Tanto el modelo MEC como la visualización, aportan elementos teóricos que logran fusionarse para la creación de una secuencia didáctica que busca explorar nociones de los estudiantes del Gimnasio Los Robles.

Sobre la participación de estudiantes con necesidades particulares de aprendizaje. El videojuego permite que los estudiantes del estudio de caso muestren desempeños que, en su mayoría, son exitosos al desarrollar las tareas propuestas en la secuencia didáctica, en tareas que apuntan a la noción de traslación y rotación. La componente visual de la herramienta del Tetris logra centrar la atención y distribuirla para realizar adecuadamente tareas que implican movimientos rígidos en el plano, además de permitir la motivación del estudiante para que las estrategias que plantee le ayuden a ganar el juego. Esto implica que algunas de las dificultades de un estudiante con necesidades particulares de aprendizaje, sean compensadas con otras habilidades desarrolladas por él durante la actividad, al utilizar el recurso tecnológico.

Sobre el videojuego y el aprendizaje en matemáticas. Se puede observar que el videojuego Tetris, acompañado de un diseño pedagógico apropiado, favorece el desempeño en el acercamiento a las nociones matemáticas de niños que tienen necesidades particulares de aprendizaje frente a reflexión, desarrollo de competencias de resolución de problemas, y capacidad deductiva. Vale la pena resaltar que aunque existen diferentes tipos de videojuegos que son llamativos por su entorno visual, y de sumo interés para los estudiantes, no todos ofrecen el entorno necesario para tratar conceptos matemáticos.

Sobre la inserción de videojuegos al aula de matemáticas. La planeación de actividades con base en videojuegos que son parte de la realidad de los estudiantes, implica la planeación cuidadosa y dedicada para analizar detenidamente, seleccionar contenidos y preparar actividades que permitan acercamientos conceptuales para ganar profundidad en el conocimiento de las temáticas. Es muy probable que el uso de este tipo de actividades en grupos grandes, no dé resultados positivos, ya que la preparación y aplicación de las mismas demandan tiempo y atención constante en cada uno de los "videojugadores".

Referencias y Bibliografía

Acevedo, J. (2010). Modificabilidad Estructural Cognitiva vs. Visualización: un ejercicio de análisis del uso del tetris en tareas de rotación y traslación. Tesis de maestría. Universidad Pedagógica Nacional. Colombia, pp. 18-87

Bishop, A. (1983). Spatial abilities and mathematical thinking. En M. Zweng, T. Green, J. Kilpatrick, H. Pollak y M. Suydam (Eds.), Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education (pp. 176-178). Boston, USA: Birkhäuser.

Del Grande, J. (1990). Spatial sense. Arithmetic Teacher, 37(6), 14-20.

Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. En R. Sutherland y J. Mason (Eds.), Exploiting mental imagery with computer in mathematics education (pp. 142-158). Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag. Consultado el 16 de junio de 2010 en: http://books.google.com/books?id=R6PC 8GCt2AC&printsec =frontcover&dq=Computers&as_brr=3&cd=90&source= gbs_slider_thumb#v=onepage&q&f=false.

Gal, H. y Linchevski, L. (2010). To see or not to see: analyzing difficulties in geometry from the perspective of visual perception. *Educational Study of Mathematics*.74:163–183 DOI 10.1007/s10649-010-9232-y. Online Springer Science+BusinessMedia B.V. 2010.

Presmeg, N., (1986). Visualization in High School mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 6, 3, 42-46.

Prieto, M. D. (1987) *Modificabilidad Cognitiva y el programa de Enriqucimiento Instrumental de Feuerstein.* Colección Nueva Escuela. Editorial Bruño, Madrid. p. 25-75.

Sedeño, A. M. (2000). La componente visual del videojuego como herramienta educativa. OEI (*Revista Iberoamericana de Educación*), 1-7.

Matematización a través del curso abierto en línea: Lógica y Conjuntos

Yolanda **Campos** Campos
Universidad Autónoma Metropolitana-Unidad Iztapalapa
México
yola.campos@gmail.com
Eymard **Hernández** López
Universidad Autónoma Metropolitana-Unidad Iztapalapa
México
eymardh7@gmail.com
Leonardo **Rodríguez** Medina
Universidad Autónoma Metropolitana-Unidad Iztapalapa
México
lrm@virtuami.izt.uam.mx

Resumen

La experiencia que aquí se presenta, pretende la búsqueda de alternativas ante los nuevos roles que se han abierto a los docentes y las posibilidades que ofrecen los cursos en línea. Bajo enfoques dinámicos de la matemática, del reconocimiento de la relaciones entre matemática y tecnología, así como de un supuesto pedagógico que propone la construcción de conocimientos a través de la matematización y la metacognición, se diseñóel curso: Lógica y Conjuntos, con la creación de sus secuencias didácticas en línea y sus objetos de aprendizaje,con cuidado de su contenido matemático, su diseño académico, gráfico y computacional en un Aula Virtual. La metodología promovió tanto el estudio independiente como la colaboración entre pares y la integración de aprendizajes en un proyecto. El rol del docente se vio transformado y los participantes mostraron una gran capacidad para arribar a resultados que son alentadores, mismos que abren intensos retos para próximas versiones.

Palabras clave: educación matemática, formación docente, cursos de matemáticas abiertos en línea, matematización, formación docente, Lógica y conjuntos, nuevo rol docente, integración de aprendizajes.

Presentación

La Universidad Autónoma Metropolitana Unidad Iztapapa (UAMI) a través de su *Coordinación de Educación Virtual* (Virtuami) ha desarrollado diferentes programas de formación docente dirigidos al personal académico y a estudiantes. En particular, su Proyecto:"*La UAMI contigo"* ha dado pauta para experimentar un modelo de cursos que se ofrecen en línea con el propósito de "ofrecer a la comunidad universitaria alternativas de formación con fines de actualización y de desarrollo personal y profesional, por medio de cursos en línea que son impartidos durante los periodos inter–trimestrales, …considerando que "un curso en línea implica el desarrollo de un proceso educativo que se ubica en la modalidad a distancia, que es flexible, y en el que todas las personas pueden acceder al conocimiento que

requieran en el momento y lugar que lo deseen"(UAM-I, 2012). Con este tipo de curso se ha involucrado a académicos y estudiantes no sólo de la UAM sino de otras instituciones, de manera conjuntae interdisciplinar, de manera que se atienda a diversos intereses de conocimientos: generales, culturales,básicos para el desarrollo profesional contemporáneo y para la formación integral.Además, conjuntamente, el Departamento de Matemáticas de la misma UAM-I durante el año 2013 desarrolló un Programa de Formación Docente en Entornos de Aprendizaje de la Matemática en la Educación Superior, en el que un grupo de docentes crearon entornos de aprendizaje de la matemática para su campo específico y que se concretizaron en el diseño de secuencias didácticas en línea en un Aula Virtual.

En este contexto se inserta el curso de *Lógica y conjuntos* dirigido a la comunidad universitaria, sean académicos o estudiantes de todas las carreras; su desarrollo se justifica ante el reconocimiento de la necesidad de la comprensión de los fundamentos de la matemática indispensables a cualquier campo de conocimiento, en particular, los procesos de clasificación y categorización y su relación con la lógica, que permean la vida cotidiana y todos los campos del saber humano.

Elementos para un marco conceptual

El diseño del curso "*Lógica y conjuntos*" y su proyecto integrador: "*De mi realidad a la abstracción. Me doy cuenta de cómo matematizo con proposiciones y conjuntos*" fueron sustentados en las siguientes consideraciones:

Del enfoque de la matemática

Con la frase: "El libro de la naturaleza está escrito con caracteres matemáticos", Galileo Galilei destaca la ominpresencia de los patrones matemáticos en lo que ahora están llamando los científicos Multiverso, en nuestro mundo, en la sociedad, la cotidianidad, la ciencia, el arte, la tecnología, en nuestro ser y nuestra conciencia. Por su parte, Stephen Hawking en su libro: Dios creó a los números, además de enfatizar que "La matemática es más que una hermosa herramienta y un lenguaje para la ciencia; es principio y fin en sí misma, y como tal, ha influenciado nuestra visión del mundo a lo largo del tiempo", señala que "Como ocurrió en el pasado, el desarrollo futuro de las matemáticas afectará sin duda, de forma directa o indirecta, a nuestra forma de vivir y de pensar. Las maravillas del mundo antiguo, como las pirámides de Egipto, fueron físicas. Ahora, las mayores maravillas del mundo moderno se encuentran en nuestro propio entendimiento". Éste abre nuevas maneras de mirar el propio yo, a los otros, al ambiente, a la cultura, al universo o multiverso. Y en esas maneras cada vez más finas de modelar el mundo a través del pensamiento matemático, del sentimiento y la conciencia, se encuentran las semillas de la maravillosa posibilidad de crear, innovar e imaginar.

De las relaciones de la matemática y la tecnología

Al hacer un paseo por la historia, nos damos cuenta que nuestra manera de aprender, de conocer, de vivir y de relacionarnos, se ha transformado en concordancia con los avances de la ciencia y la tecnología. Y¡La ciencia y la tecnología avanzan en relación con el desarrollo de la matemática!Los nuevos descubrimientos en la física cuántica, las neurociencias, la genética, la nanotecnología, la computación cuántica, la inteligencia artificial, la teoría de la información, los estudios sobre la conciencia, están rebasando continuamente los límites de lo que hace apenas treinta años se podría considerar como ciencia ficción, y todos ellos encuentran sustento en

modelos matemáticos, los que a su vez, se pueden hacer más complejos, abstractos y útiles al contar con las nuevas herramientas que ofrecen la ciencia y la tecnología.

Del enfoque de la Lógica y los conjuntos

Una de las bases importantes del pensamiento matemático radica en la definición de contextos de espacio - tiempo – movimiento – información, en los que se afine el uso de un lenguaje sujeto a una lógica simbólica que conduzca a un proceso cada vez más abstracto y complejo de reconocimiento de relaciones y clases que permitan el encuentro de regularidades, de patrones y la formulación de modelos de la realidad en sus planos físico –mental- virtual y ello, encuentra sus primeras bases en el proceso de clasificación, entendida como un proceso mental, esto es, intelectual – psicológico - consciente y dinámico en el que a través de la intención – atención – observación se encuentran regularidades que permiten la organización de los elementos físicos – mentales - virtuales en clases. Desde que Aristóteles dividió a los seres vivos en dos reinos, el vegetal y el animal, se han dado diferentes clasificaciones según la tecnología que se dispone para hacer observaciones más finas y se han clasificado las mismas ciencias, la tecnología móvil, las aplicaciones informáticas que ahora brindan la oportunidad de colocar etiquetas a los videos y a todo aquello que se sube a internet, de manera que los robots informáticos puedan hacer la clasificación casi instantánea y devolver resultados de búsqueda, lo que ha tenido un gran impacto en todos los ámbitos del saber y quehacer humano. Desde este marco se mira la noción de proposiciones y conjuntos y sus relaciones, en un proceso de matematización que va de la experiencia cotidiana, la mirada del arte, la investigación en la ciencia, la aplicación en la tecnología, su comprensión en las matemáticas, a su sistematización en el álgebra booleana de George Boole y las aportaciones a la Teoría de Conjuntos de Georg Cantor.

Del enfoque pedagógico para la enseñanza - aprendizaje

Si bien el inicio de los procesos de clasificación se da desde los primeros momentos de vida y ya los bebésla realizan, se ha de partir de ahí para ir más allá, a matematizar y encontrar regularidades que nos lleven a modelos generales que a su vez, nos permitan aplicar las propiedades encontradas a un gran número de casos. “Lo que los seres humanos tienen que aprender no es la matemática como sistema cerrado, sino como una actividad: el proceso de matematizar la realidad y, de ser posible incluso, el de matematizar la matemática” (Hans Freudenthal, 1968). Se trata de abrir bien los ojos y afinar el entendimiento para ir de lo que se mira con los ojos, a lo que se piensa, imagina e intuye, para encontrar que en medio de la diversidad, en lo no visible, hay muchas semejanzas esperando a ser descubiertas.

La matematización y el proceso del aprendizaje y la enseñanza de la matemática se llevan a cabo en correspondencia con las posibilidades tecnológicas disponibles en cada momento histórico, brindando opciones para ir afinando y creando conocimiento más complejo, más rápidamente, en cualquier tiempo y lugar.Los nuevos modelos, metodologías, herramientas, recursos, formas de evaluación ante el impacto tecnológico, han llevado a la creación de MOOCs, (Cursos Múltiples Abiertos y en Línea, por sus siglas en inglés) de manera que universidades de diferentes lugares del mundo los están ofreciendo gratuitos, sin necesidad de demostrar antecedentes académicos, cada vez con más calidad y en casi cualquier campo de conocimiento, dirigidos tanto a estudiantes como a la formación de docentes: Baste citar el proyecto Coursera, el Open Course del MIT, EdX, Udacity, etc, etc. Con base en las teorías psicopedagógicas constructivistas (Jean Piaget), construccionistas (Seymour Papert) y

conectivistas (George Siemmens y Stephen Down) del aprendizaje, el uso de los múltiples medios que se están ofreciendo de manera gratuita en la Web didáctica para la comunicación, colaboración, creatividad en la nube, están ofreciendo un fuerte impulso para explorar estas opciones en la educación superior.

Propósito del Curso

Este curso de Lógica y Conjuntos es básico para la comprensión de los conceptos matemáticos que fundamentan el arte, la ciencia, la tecnología y los procesos mediante los cuales se pasa de las situaciones en realidades concretas, a su expresión como proposiciones lógicas y al manejo de conjuntos, además de adentrarse en los conceptos fundamentales de las estructuras matemáticas. Se maneja el enfoque que la matemática es más que una herramienta y un lenguaje para la ciencia, ¡es una manera de comprender el universo! Para ello, se tuvo el propósito que:

Los participantes aplicaran las relaciones y operaciones entre proposiciones lógicas y conjuntos en su campo de conocimiento específico.

Diseño, metodología y contenidos

Diseño del curso

La organización de los contenidos siguió las recomendaciones de la Coordinación de Educación Virtual, de manera que se contó con tres unidades de estudio, una para cada semana de las tres que comprendió el curso, con herramientas que propiciaran la autonomía, la colaboración y la creatividad en el aprendizaje.

Se elaboró el Programa de Estudios del curso (Documento maestro) con los apartados: Presentación, Propósito, Contenido de aprendizaje, Metodología, El proyecto final, Criterios de evaluación y certificación, Recursos, material y equipo requerido para el curso. El Programa fue proporcionado a los participantes en la sesión de INICIO en el Aula Virtual del Curso.

Se elaboraron también el Proyecto integrador, los guiones de video para la entrada a cada contenido del curso, la planeación y las actividades de aprendizaje y recursos para cada semana.

Diseño metodológico del curso

Se siguió la metodología de taller como unidad productiva de conocimientos a partir de una realidad concreta, integradora, compleja y reflexiva que une la teoría y la práctica (Kisnerman, 1998), a través de actividades de aprendizaje en línea realizadas en estudio independiente, lo que implica que los participantesasumieron la responsabilidad y el compromiso con su propio aprendizaje, desarrollando habilidades para aprender y compartir conocimientos y dudas a través de un foro.

El curso contó con la sesión de Inicio y un taller por cada una de las tres semanas.En la sesión de INICIO del curso, los participantes contaron con un video introductorio para conocer ¿para qué van a aprender?, ¿qué van a aprender?, ¿cómo lo van a hacer?, ¿cómo se les va a evaluar? Y junto con ello, tuvieron a la mano el Documento maestro del curso, indicaciones para tener en cuenta y el Proyecto integrador: *"De mi realidad a la abstracción"* para tenerlo presente en el desarrollo. También se proporcionaron normas, avisos y un inventario de auto-percepción del aprendizaje en línea aportados por la Coordinación de Educación Virtual. En cada taller se contó con la *Guía didáctica de la semana* y el foro: *Compartir saberes y red de apoyo,* además de las actividades de aprendizaje de cada contenido, y su Evaluación y cierre, con los Avances para el proyecto integrador y la Autoevaluación de la Semana.

En las actividades de aprendizaje, se presentaba el Resultado de aprendizaje, y a partir de situaciones didáctica relacionadas con la vida cotidiana, del arte, la ciencia o la tecnología, la aritmética y la geometría, se derivaban conceptos de la lógica proposicional y los conjuntos, sus relaciones y operaciones, mismos que se formalizaron matemáticamente, al transitar por su representación gráfica y simbólica, así como por su estructura algebraica; se realizaron ejercicios y problemas que apoyaban la integración de los aprendizajes en el proyecto de matematización.

Es interesante remarcar que de acuerdo con el modelo de este tipo de cursos, no se contó con tutoría, sino que se promovió el estudio independiente y colaborativo de manera que entre los participantes apoyaban la solución de dudas y hacían planteos y cuestionamientos, mientras que en Virtuami, se iban abriendo los foros y actividades semana a semana dando seguimiento a la participación, sin que hubiera intervención pedagógica o de apoyo en el manejo de herramientas.

Contenido del curso

I. Las proposiciones y los conjuntos en la vida diaria y en el arte.

1.0. Introducción a los conceptos en estudio.

1.1. El sentido de las proposiciones y los conjuntos.

1.2. Proposiciones y determinación de conjuntos.

1.3. Operaciones con proposiciones y operaciones con conjuntos.

II. Las proposiciones y los conjuntos en la ciencia y la tecnología.

2.0. Introducción a los conceptos en estudio.

2.1. Relaciones lógicas y relaciones entre conjuntos.

2.2. Propiedades de las operaciones entre proposiciones y entre conjuntos.

2.3. Inferencias y razonamiento deductivo.

III. Las proposiciones y los conjuntos en la matemática.

3.0. Introducción a los conceptos en estudio.

3.1 Conjuntos numéricos.

3.2 Conjuntos geométricos.

3.3 De lo numerable a lo transfinito.

Recursos de apoyo al aprendizaje

Sistema de Gestión del Aprendizaje:El curso se desarrolló en el Sistema de Gestión de Aprendizaje Moodle: http://virtuami.izt.uam.mx/cursos/my/en el que se integraron los talleres, y las actividades de aprendizaje con sus recursos de apoyo.

***Herramientas enlazadas al Aula*:** Como herramientas embebidas al Aula Virtual en Moodle, en las diferentes actividades de aprendizaje se aprovecharon: el Drive con sus documentos, formularios, hojas de cálculo y presentaciones compartidas de Google, videos y otras herramientas propias del aprendizaje de la Lógica y los Conjuntos.

Videos educativos en el Aula: Como parte de la metodología didáctica, cada contenido se iniciaba con el planteo de los fundamentos matemáticos en un video, de manera que pudieran ser analizados por los participantes, cuantas veces fuera necesario. Se produjeron los videos: ***(Videos de Introducción a los temas de Lógica y conjuntos)***

1. Las proposiciones y los conjuntos en la vida diaria y en el arte. Video 1: (9 min) con los siguientes fragmentos: 1.0. Introducción, 1.1. El sentido de la lógica y los conjuntos, 1.2 Proposiciones y determinación de conjuntos.
2. Las proposiciones y los conjuntos en la ciencia y la tecnología. Video 2: (12 min) con: 2.1. Operaciones lógicas y operaciones con conjuntos.2.2. Relaciones lógicas y relaciones entre conjuntos. 2.3. Propiedades de las operaciones entre proposiciones yentre conjuntos.
3. Las proposiciones y los conjuntos en la matemática. Video 3: 9 minutos con: 3.1. Conjuntos numéricos y sus propiedades, 3.2. Conjuntos geométricos, 3.3. De lo numerable a lo transfinito.Cierre.

Entornos y recursos:En esta sesión se contó con los Protafolios personales de avance en la integración de los saberes, Glosario y definiciones, Herramientas para el diseño de Diagramas de Venn, el Applet de Geogebra y la plantilla para Cuerpos geométricos en 3D.

Productos y el Proyecto Integrador

En cada semana se fueron realizando ejercicios, autoevaluaciones y avances al Proyecto integrador, que fue el producto principal y único solicitado como obligatorio.

Los aprendizajes se integraron en un proyecto que pretendió estimular la reflexión de los participantes en el proceso de matematización en su vida cotidiana, el arte, la ciencia, la tecnología y la matemática, al describir situaciones mediante proposiciones y conjuntos, plantear y solucionar problemas de aplicación en su campo de conocimiento y proponer expresiones matemáticas que los generalicen.

Cada semana se avanzó en una fase del proyecto: "*De mi realidad a la abstracción.Me doy cuenta de cómo matematizo con proposiciones y conjuntos"*.

Fase 1: Las proposiciones y los conjuntos en mi vida diaria y en el arte de mi interés.

Fase 2: Las proposiciones y los conjuntos en la ciencia, la tecnología y en mi campo de conocimiento.

Fase 3: Las proposiciones y los conjuntos en la matemática y en mi visión de futuro.

El proyecto fue de elaboración personal y tuvo un carácter significativo para cada participante, esto es, presentó situaciones y reflexiones de interés e impacto personal, con la colaboración de los colegas del curso que podrán opinar sobre su contenido en el foro semanal de ***Avances del proyecto integrador***, con el propósito de realimentar y de proporcionar elementos de mejora para que cada autor, corrigiera, editara y llevara a cabo la integración del mismo. El reporte final ya no recibió realimentación.

El Proyecto incluyó:

Introducción*:* Indicaron el propósito personal al elaborar el proyecto y cómo realizaron su contenido.

***Proceso**:* Incluyeron los reportes parciales del proyecto, Semana 1: El arte que me interesa, Semana 2. La clasificación en la tecnología, Semana 3. La lógica y los conjuntos en mi campo de conocimiento. Sintetizaron el proceso de metacognición que siguieron durante la matematización que les llevó desde el contexto realhasta la verificación de las propiedades de las operaciones con las proposiciones y con los conjuntos.

***Conclusiones*:** Aportaron lo aprendido en relación con los conceptos de proposiciones y conjuntos, del proceso de matematización y de la importancia de la metacognición; además describieron cómo ven el futuro de las aplicaciones de la lógica y los conjuntos en su campo de conocimiento y en general en la ciencia y la tecnología.

Comentarios generales, Obras consultadas.Anexos.

Evaluación y acreditación del aprendizaje

Con relación a la evaluación del curso, se tomaron en cuenta dos factores:

1) Su participación a través de las actividades y ejercicios, lo que se monitoreó por la Coordinación de Educación Virtual de manera permanente, sin intervención, sólo como seguimiento,y
2) El reporte del proyecto integrador, que fue analizado y procesado.

Resultados de acreditación

De los 38 participantes que se registraron en la plataforma, No se presentaron el 45 % e iniciaron y permanecieron el 55 %. El 60 % fue del Distrito Federal y el 40 % de provincia. En total aprobaron el 81% de los que iniciaron y permanecieron y 19% no aprobaron.

De los proyectos presentados, en el rubro de Arte: el 45% aplicó la lógica y los conjuntos a la Literatura, el 10 % al cine, el 18% a la música, 18 % a la pintura, el 9% a pintores. En lo relacionado a la aplicación a la tecnología, el 9 % presentó aplicaciones en el relación con los virus que afectan a los animales, el 54% a la clasificación en el manejo de correos electrónicos, el 9 % a las búsquedas en Internet y el28 % a la organización de sitios en Favoritos. En cuanto a los campos de conocimiento de los participantes, en los que fueron localizados y aplicados conceptos de Lógica y Conjuntos, se tuvieron: Filosofía, Literatura, Psicología, Ingeniería biomédica, Lenguaje de programación, Economía, Normatividad ambiental, Géneros literarios, Mercadotecnia, Bioquímica y Física.

Autoevaluación del curso

A manera de autoevaluación que expresa laautopercepción de los mismos participantes, se les preguntó en torno al nivel de logro de los propósitos iniciales planteados en el curso;si pudieron avanzar en la matematización al comprender que de la observación de relaciones en el mundo físico, es posible ir avanzando en la abstracción, hasta llegar a generalizaciones más abstractas para las que se requiere la definición de propiedades y la demostración; su posición ante su concepción acerca de lo que son: la matemática, la lógica y los conjuntos, su creencia acerca de si el inicio de la clasificación sólo es posible en el nivel universitario, si la Lógica y los conjuntos sólo tienen que ver con la matemática, si es suficiente con repetir ejercicios y memorizar demostraciones para llegar a la matematización de conceptos.

A quienes tuvieron una participación constante y fueron aprobados en el Proyecto integrador, se les otorgó por parte de la UAM-I una constancia del curso.

De la operación del curso

El desarrollo del curso de Lógica y Conjuntos,requirió una organización operativa para su diseño y desarrollo. Para ello se contó con los siguientes núcleos de atención:

La **coordinación general del Proyecto *Uami Contigo*** a cargo del Coordinador de Educación Virtual de la UAMI, el Dr. Cesáreo Morales.La **coordinación académica** del *Proyecto La UAMI contigo* la realiza el Lic. Arturo Alva. El**Diseño didáctico de La UAMI Contigo** por el Lic. Arturo Alva Rodríguez y la Lic. Laura González Zárate. La **Plataforma** educativa fue administrada por el Ing. Ramón Entzana. El **Diseño multimedia** lo realizó el D.C.G Christian Rogelio González y la **Comunicación multimedia**la Lic. Laura González Zárate.

Los contenidos del curso: Con apoyo de personal del Departamento de Matemáticas de la UAMI a cargo del Dr. Enrique Delgado, se diseñaron los contenidos que comprendieron: *Enfoque, Documento Maestro, Plan integrador, guiones de video, estructura en el Aula Virtual, actividades de apoyo*y *validación del curso***,** porla *Dra.* Yolanda Campos; *Actividades de aprendizaje y sus recursos*elaborados por el*M. en C.* Eymard Hernández y los *Ejercicios* a cargo del*Dr.* Leonardo Rodríguez, quienes además apoyaron la revisión y grabación de los guiones de video.

La coordinación de la producción de videos estuvo a cargo delMtro. Julio César Pérez Navarro y el **Apoyo a la integración de actividades y recursos en el Aula Virtual y sistematización de información de proyectos** porRaga Badillo Pedraza.

A manera de conclusiones:

Conclusiones a través de comentarios de los participantes

"En este curso pude encontrar que el pensamiento matemático nos permite y nos da herramientas para entender el mundo que nos rodea desde cuestiones muy sencillas hasta otras con mayor grado de dificultad, desde la observación hasta la realización de operaciones". "Cada concepto, tema, explicaciones en los videos y contenido general incluidos en el curso me permitieron recordar desde definiciones básicas hasta fórmulas complejas; el paso de actividades introductorias me hizo repasar mi poco conocimiento de la lógica que he ido aprendiendo en mi campo de estudio, que es la filosofía; disfruté mucho haciendo los avances y demás actividades de los foros, me ayudó a replantear una posibilidad de presentar trabajos académicos, además de que pude incluir a la filosofía dentro de uno de ellos". "Es la primera vez que tomo un curso en línea y la experiencia me resultó satisfactoria, el material me pareció el adecuado, aunque en principio lo percibí un poco repetitivo y al final un poco saturado, sin embargo, destaco los conceptos brindados, los videos que explicaban muy bien los temas a estudiar y el trabajo impecable de los demás participantes". "A manera de conclusión puedo decir que este curso me sirvió mucho para entender qué es un conjunto y qué relación tiene con mi mundo concreto, cómo expresar proposiciones abiertas y de éstas pasar a un lenguaje formal". "Una de las cosas que más me sorprendió fue lo relacionado con los conjuntos numéricos, pues es algo con lo que no había tenido acercamiento, me resulta sorprendente el hecho de que el número en sí mismo sea algo abstracto...". "Y tal vez una de las cosas que más atraparon mi atención es el desarrollo tecnológico que se ha dado gracias a los lenguajes matemáticos. Ahora bien, creo que lo aprendido en este curso me va a servir, para ver el mundo de otra manera". "En cuanto a las generalidades, creo que tanto la lógica como las matemáticas son la base del pensamiento, del

razonamiento y de la argumentación; podemos constatarlo porque toda la vida a cada momento, estamos pensando, razonando y argumentando, por ello están presentes en todo lo que hacernos y decimos; a veces no nos damos cuenta, pero no están sólo como entes metafísicos abstractos, sino como algo concreto, como algo que tiene que ver directamente con cómo percibimos el mundo". "Creo que es muy interesante entender cómo a partir de las matemáticas se conoce el universo, por ejemplo los avances que se han hecho sobre los hoyos negros, los modelos para la física y claro, en la tecnología; como el uso de las dimensiones que se ve reflejado en los juegos de video, en las realidades virtuales". "El estudiar y comprender la teoría de conjuntos permite visualizar las intersecciones que puedan existir entre las partes que conforman un problema, así como cada parte con el todo. Es un instrumento esencial para el desarrollo de la capacidad de análisis en cualquier disciplina, en cualquier contexto y hasta en situaciones de la vida cotidiana". "En la vida diaria se pueden formar todo tipo de conjuntos como los tipos de música y agruparlos de diferente manera yde igual manera con cualquier cosa que se nos pueda ocurrir se puede agrupar para tener un mejor orden de las cosas y sea más fácil encontrar lo que estamos buscando, tanto físicamente como virtualmente en la red". "En general el lenguaje matemático se encuentra presente en todo lo que compone nuestra vida diaria, la verdad es que es inevitable escapar de ellas y como se demostró a lo largo de este curso y con los ejemplos, todas las áreas hacen uso de ellas. En particular, en mi campo de conocimiento, las matemáticas son sumamente importantes, toda la teoría se fundamenta con lenguaje matemático, y con la lógica es posible diseñar todos los componentes digitales para los equipos médicos". "En lo personal fue un curso que me ayudó a practicar los conocimientos de lógica que adquirí durante la licenciatura, también me sirvió como ejercicio para aprender a matematizar; considero que faltó un poco de tiempo para tratar con más detalle, temas como el álgebra booleana, la cual para los alumnos de áreas como la mía es importante dominar". "La elaboración de proposiciones y conjuntos ayuda al análisis de nuestro entorno y a un mejor manejo de la información; la mayor importancia que he encontrado ha sido su expresión simbólica, su forma matemática y el razonamiento con el que he trabajado para describir actividades que no sólo involucran mi trabajo educativo, sino, incluso, en actividades recreativas". "Puedo decir que seguiré trabajando en el futuro con esta ciencia formal maravillosa, que al igual que todos lo hemos hecho desde pequeños, agrupando nuestros juguetes favoritos, también lo haré en el futuro, cuando trabaje con grandes cantidades de bibliotecas de códigos de programación que estructuren un programa. Mas he de agregar que el futuro también promete otras cosas: la computación cuántica". "Elaboré todos los avances del proyecto integrador, y la mayoría de actividades extra, a tiempo en los foros correspondientes, con los cuales no encontré mayor problema en hacerlos, sin embargo he de decir que la comunicación con los demás compañeros del equipo fue inexistente. Al no ver comentarios (de compañeros, ni mucho menos de algún moderador del sitio) que motivaran a la retroalimentación de los trabajos de los demás (principal objetivo en un foro) su uso fue entonces innecesario. Sospecho que en parte se deba a la tardía activación correcta del foro de cada semana, y a la separación por grupos para enviar mensajes". "El proceso de la comprensión de las proposiciones y la teoría de conjuntos, sirvió para poder comprender más allá de lo que estamos acostumbrados a ver dentro de nuestras áreas específicas de estudio (como en el campo del arte)". "La importancia del tema fue el de poder concretizar las proposiciones y los conjuntos en la realidad". "El uso apropiado de la teoría de conjuntos y la fundamentación adecuada de las proposiciones, es de crucial importancia para cualquier área del conocimiento, permite dilucidar y profundizar nuevos temas para cierta área, además, de poder contar con una importante herramienta en la facilitación de la realidad que se nos rodea y que se estudia". "Sin duda alguna

he aprendido mucho a lo largo de este curso, y lo que más resaltaría es la idea de integrar el arte a la matemática, así como aquellos ejemplos en los que nos proporcionaron conocimiento a través de objetos cotidianos como fue el caso de la conformación de conjuntos empleando video juegos. Además los videos que nos presentaron a lo largo del curso fueron muy didácticos así como cada una de las actividades en las que participamos. Considero finalmente que lo que aprendí lo puedo emplear en mi ámbito profesional y a partir de ahora lo haré sin ese miedo que en ocasiones nos causa el emplear la matemática en las cosas cotidianas". "Me agradaría mucho que diseñaran un curso como lo hicieron con "lógica y conjuntos" pero ahora enfocado a la geometría analítica, la cual considero es de vital importancia en el entendimiento de la matemática. Ojalá se pueda dar y cuenten por supuesto conmigo." "En la elaboración del proyecto integrador aprendí como hacer operaciones de conjuntos y proposiciones; la temática del curso junto con los ejercicios de aprendizaje, me hizo entender, aplicar las operaciones de conjuntos, y el proceso de pensamiento matemático que conlleva éste en el arte, la tecnología y en diversos campos de estudio". "La lógica y los conjuntos están ligados con mi campo de conocimiento, aunque llevo más lo teórico se pueden hacer relaciones; sirven para mis proyectos de investigación en el momento de hacer una hipótesis, aceptarla o rechazarla. En la ciencia y en la tecnología también se aplica la lógica y los conjuntos, y a futuro la relación será más estrecha, ya que el avance de la ciencia está ligado con el uso de las matemáticas". "El tomar el curso fue un acierto, me gustó y aprendí mucho. Está bien elaborado, es didáctico y la interacción con otros participantes permite reafirmar conocimientos, expresar dudas y saber cuándo se tiene una idea errónea. Si tuviera que hacer una crítica, sería que los temas de la tercera semana no son como para verlos en una sola, me parece que dos es algo razonable, aunque pienso que esto se debe al calendario de la UAM". "La clasificación de la información y el reconocimiento de las propiedades de las clases, permite mejorar los procesos de búsqueda, organización, representación, procesamiento y sistematización que han dado pauta para el desarrollo de la ciencia, la tecnología y a la efectividad en el tratamiento de la información en todos los campos de conocimiento, y en todos los ámbitos de nuestra vida" . "Veo un futuro muy prometedor de las aplicaciones de la lógica y los conjuntos en mi campo de conocimiento y en general en la ciencia y la tecnología, pararesponder a la necesidad de realizar una transición desde un aprendiz pasivo dispuesto a aprender de forma adaptativa y reproductiva lo que se le pida, hacia un aprendiz generador y constructivo, orientado a la búsqueda del significado de lo que hace". "Durante la elaboración del proyecto aprendí muchísimas cosas, el tema de conjuntos es un tema que nunca había visto, me costó trabajo entenderlo al principio, para mí es de muchísima utilidad ya que más adelante lo ocuparé en el transcurso de mis estudios, y cuando llegue esa etapa me será más fácil ahora que lo he aprendido". "En lo particular me gustó el curso y los temas incluidos aunque algunos de los videos de introducción que estaban en inglés no se podían subtitular y eso me pareció una desventaja en parte porque el material del video estaba muy bien pero no todos podían entenderlo. Las actividades introductorias fueron de mucha ayuda para la elaboración del proyecto y las definiciones muy bien especificadas tanto como los ejemplos muy entendibles, yo en lo personal investigué un poquito más a profundidad algunos temas y definiciones como complemento". "Quiero felicitar a los organizadores y coordinadores de este Curso Lógica y Conjuntos, por la oportunidad que me brindaron de tener otra perspectiva del mundo que me rodea, que a su vez me ayuda a encontrar el significado de mi quehacer docente".

Comentarios finales

La planeación y diseño de un curso con las características que tuvo el de Lógica y Conjuntos, implicó el reto de la elaboración precisa y el uso de herramientas lo suficientemente

claras para que sin necesidad de tutoría, los participantes pudieran resolver sus dudas y avanzar con seguridad. La efectividad del modelo de curso en línea, sin tutoría, fue inicialmente cuestionado en relación a que diera frutos en el aprendizaje de la matemática, lo que se convirtió enun reto que fue el motor de búsqueda para experimentarlo de manera que en él, el docente perdiera su rol de presentador de contenidos en un momento, espacio y tiempo único, y en contraste asumiera su rol de diseñador de contenidos y actividades en línea, para lo que se tuvo que investigar, fundamentar, diseñar secuencias de aprendizaje en un acto creativo, seleccionar contenidos ejemplares y ofrecerlos a manera de curador de obras de arte, así como generar los objetos de aprendizaje y recursos cuidadosamente preparados, o en su caso, el guión para la producción de los mismos.

Otro cuestionamiento era el enfoque y la efectividad de la estrategia de matematización que tenía que motivar, difundir e introducir en los participantes la comprensión de la matemática en su dimensión compleja, dinámica y creativa, y a manera de Max Tagark (2013), caminar a la conceptualización de que la esencia de la naturaleza es matemática, de que existimos en un universo matemático. Con ello, además, reconocer lo fundamental que es el proceso de clasificación bajo una lógica de creación de clases y su sistematización en una Teoría de Conjuntos, que permea todo el proceso mental humano en su camino en el descubrimiento de patrones y modelos, con impacto en el ser personal, la cotidianidad, el arte, la ciencia, la tecnología y todos los campos de conocimiento.

Al finalizar, fue notorio que enlos proyectos recibidos se diera muestra de esmero, atención al contenido y que les resultó novedoso, útil y adecuado el enfoque del curso, lo que reanima a continuar de manera espiral y dialéctica la aproximación didáctica y la experimentación sobre este tipo de experiencias, que se tendrían que afinar en próximas versiones en relación a la promoción de la colaboración en los foros, ya que al realizarse por equipos conformados al azar, unos funcionan de manera excelente, mientras en otros, la participación es casi nula. También se haría necesaria la adecuación de las actividades de aprendizaje para su mayor congruencia con los resultados de aprendizaje solicitados, así como el ofrecimiento de ejercicios más dinámicos y complejos acordes con el enfoque que se desea promover.

Si bien la Coordinación de Educación Virtual de la UAMI ya cuenta con experiencias y está en posibilidades de documentar su modelo del *Proyecto La UAMI contigo*, este curso proporcionó una evidencia de que sí se puede avanzar en la comprensión matemática sin miedos y con admiración a su potencial y que temas fundamentales como lo es la Lógica y los conjuntos, pueden abrir posibilidades para un aprendizaje significativo, ya que el 65% de los aprobados alcanzaron el nivel de ¡felicitación! Y se puede ahora confiar más en este tipo de cursos, que parece dan a veces mejor resultado, que aquellos en los que inhibimos a los estudiantes al no respetar sus diferencias individuales, su ritmo de aprendizaje ni fomentamos su autonomía y manejo de las tecnologías propias de su tiempo. ¡Seguiremos adelante con la búsqueda!

Referencias bibliográficas

Babini, J. (1967). *Historia de las ideas modernas en Matemática*. Washington D.C.: OEA.

Campos, Y. (1995). *Propuesta de una Didáctica integradora de la matemática, con computación, para la educación básica mexicana*. México: SEP.

Casanova, G. (1975). *La matemática y el materialismo dialéctico*. Cuba: Ministerio deEducación.

Coloquios de Royaumont. (1970). *El Concepto de Información en la Ciencia Contemporánea,* 204 -206. España: Siglo XXI Editores.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics as to be useful? Dordrecht, The Netherlands: *Educational Studies in Mathematics*.

Freudenthal, H. (1973b), Mathematics as an Educational Task . Dordrecht, The Netherlands: *Educational Studies in Mathematics*.

Hawking, S. (2007). *Dios creó los números*. Barcelona: Crítica.

Hawking, S., Mlodinow, L. (2010). *The Grand Design*. USA: Random House Inc.

Newman, J. (1968). *Sigma. El mundo de las matemáticas*. Barcelona – México: Grijalbo, S.A.

Piaget, J. (1980). *La toma de conciencia*. España: Ediciones Morata.

Piaget, J. y N. Chomsky (1984). *Teorías del lenguaje, teorías del aprendizaje*. España: Ed. Crítica.

Siemen, G. (2004). *Conectivismo.A learning theory for digital age*.Consultado el 12 de septiembre de 2014 en http://www.elearnspace.org/Articles/connectivism.htm

Russell, B. (1966*). Lógica y conocimiento*. España: Taurus.

Sagan, C. (2000). *The cosmic connection*. Cambridge: University Press.

Tegmark, M. (2014). *Our Mathematical Universe.My Quest for the Ultimate Nature of Reality*. USA: Random House LLC.

Vedral, V. (2010). *Decoding Reality: The Universe as Quantum Information*. England: Oxford UniversityPress.

Consultas generales a diferentes artículos en los Proceedings publicados de 1996 a 2012 por :

CIEAEM: Commission International pour l'Etude et l'Amelioation de l'Ensignment des Mathematiques.

ICME: International Congress on MathematicalEducation.

PME: Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

SMTE : International Conference on Science, Mathematics and Technology Education.

Mobilização de registros de representação semiótica em tarefas de Cálculo Diferencial e Integral

Paulo César **Oliveira**
Universidade Federal de São Carlos
Brasil
paulooliveira@ufscar.br
Rogério Fernando **Pires**
Universidade Estadual de Santa Cruz
Brasil
rfpires25@hotmail.com

Resumo

O presente relato tem por objetivo descreverepisódios de sala de aula cujoprocesso de aprendizagem fundamenta-se na teoria da relaçãocom o saber de Bernard Charlot. Para a análise da produção de informações sobre as atividades matemáticas dos alunos, apoiamos nos aportes teóricos dos registros de representação semiótica de Raymond Duval. A pesquisa de cunhoqualitativo, contoucom a participação de vinte e sete estudantes do curso de Engenhariaenvolvidos na resolução de duastarefasplanejadas e aplicadas na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1. Os resultados obtidoscom o trabalho de campo permitiram responder a seguintequestão de investigação: como se deu a apreensãoconceitual dos alunosenvolvidosemtarefas de Cálculo Diferencial e Integral?A análise dos resultados revelou a importância de considerarmoso tratamento do erro como forma de valorização do proceso de aprendizagem.

Palavras chave: cálculo diferencial e integral, registros de representação semiótica, sequênciadidática, winplot.

Introdução

Ao longo do nosso percurso enquanto docente do Ensino Superior percebemos que nos cursos de Engenharia, muitas vezes existe uma maior preocupação com as operações envolvendo os conteúdos das disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral do que a construção de saberes relativos aos conceitos desta área de conhecimento. Para nós, este fato tem relação direta com o desempenho, muitas vezes insatisfatórios, por parte dos alunos nessa disciplina.

Para auxiliar os alunos no processo aprendizagem da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1, inserimos em nossas aulas a leitura de artigos contendo o planejamento e desenvolvimento de tarefas pertinentes aos conteúdos desenvolvidos em nossas aulas; alguns publicados nas edições do Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia (COBENGE), o qual reserva em cada uma das suas reuniões anuais, um espaço dedicado às discussões inerentes ao processo de ensino-aprendizagem dos seus diversos componentes curriculares.Outra estratégia didático-pedagógica foi a implantação do uso do software livre winplot no decorrer das atividades realizadas pelos alunos.

Selecionamos para este artigo episódios de sala de aula envolvendo a produção de saberes em uma turma de vinte e sete alunos, tomando por base as atividades matemáticas realizadas por eles em duas tarefas propostas. Aprimeira tarefa, planejada a partir da leitura e discussão do artigo de Barros e Meloni (2006), contemplou o cálculo de área delimitada pela curva, o eixo x e um intervalo do mesmo.Já a segunda, foi produzida a partir da sequência didática envolvendo a construção e análise gráfica de uma função, adaptada do artigo de Jesus, Peixoto e Mascarenhas (2002).

Na condição de professores-pesquisadores, a formulação das tarefas teve o propósito de gerar respostas para a seguinte indagação: como se deu a apreensão conceitual dos alunos envolvidos em tarefas de Cálculo Diferencial e Integral?

Na busca de respostas à questão de investigação organizamos a escrita do artigo apresentando a fundamentação teórica, o percurso metodológico e os resultados mediante à análise da produção de informações dos estudantes.

A compreensão no aprendizado de matemática

Em Matemática, somente se pode aprender se compreendemos o enunciado da tarefa proposta, bem como as estratégias para sua resolução. Na perspectiva de Duval (2012) compreender envolve o ponto de vista matemático e cognitivo.

Do ponto de vista matemático, a compreensão inicia-se com a explicação sobre o uso de determinadas propriedades matemáticas que, no decorrer do processo, deve responder à exigência epistemológica de prova que é comum a todo conhecimento científico. Não se trata aqui de demonstrar no senso estrito do termo, mas é necessário argumentar sobre as conjecturas construídas de modo a validá-las ou refutá-las.

Do ponto de vista cognitivo, compreender implica no reconhecimento dos objetos matemáticos representados. Para ocorrer este reconhecimento, a compreensão é guiada pelo modo de acesso aos objetos matemáticos. O acesso a estes objetos se faz pela produção de diferentes registros de representação semiótica, as quais não podem ser confundidas com os objetos que eles representam (Duval, 2009). Outro detalhe é o fato de termos a possibilidade de pelo menos dois registros de representação semiótica distintos serem associadas a um mesmo objeto, o que constitui o problema crucial da compreensão no aprendizado da matemática (Duval, 2012).

Ser capaz de reconhecer o mesmo objeto em pelo menos dois registros diferentes de representação semiótica possibilita a conversão de registros quando necessário.Esta conversãoé uma transformação de registros em que se alteram a forma de apresentar o conteúdo, conservando a referência ao mesmo objeto. A representação geométrica de uma reta pode ser representada na forma de um registro algébrico $y = ax + b$, com “a” e “b” números reais.

Além deste tipo de transformação dos registros de representação semiótica há também o tratamento, o qual constitui numa transformação estritamente interna ao registro, sendo muitos destes específicos de cada objeto. Como exemplo, podemos citar que no cálculo do limite de uma função escrita na forma de quociente; aplicamos processos de fatoração para obter expressões algébricas mais simples, com a finalidade de eliminar a indeterminação, o que permite determinar o seu valor.

Em síntese, Duval (2012) argumentou que a atividade matemática comporta duas faces. Uma delas é matemática, centrada nos objetos, no processo lógico-dedutivo, que leva à

decomposição dos conteúdos matemáticos a ensinar. A outra face é cognitiva, inversa da matemática; pois não se decompõe em conteúdos, mas em atitudes intelectuais (maneira de olhar, de raciocinar, de explorar o objeto matemático na mobilização de diferentes representações). Atitudes desta natureza é que possibilitam aos alunos a capacidade de compreender e de saber utilizar conhecimentos matemáticos para resolver problemas.

A relação com o saber

Em nosso cenário, a sala de aula, estamos contemplando o professor, o aluno e o saber sob a ótica da Didática, em especial, da matemática, como a arte de conceber e conduzir condições que podem determinar a aprendizagem por parte de um sujeito (D`Amore, 2007). O termo condições tem sido tratado em nossas pesquisas como a relação que o sujeito (aluno) estabelece com o saber nas interações com os colegas e com o professor.

Bernard Charlot,em entrevista para Souza (2011, p. 17), afirmou que "a relação com o saber é a relação com lugares, pessoas, atividades, etc., em que se aprende". Esta relação é singular e externalizada por meio de representações:"argumentação, verificação, experimentação, vontade de demonstrar, provar, validar" (Charlot, 2000, p.60). No caso do objeto matemático o mesmo não é perceptível, mas seu acesso se dá por meio de registros de representação semiótica.Neste sentido, temos incluído o software winplot em nossas aulas de Cálculo Diferencial e integral, por conta do nosso interesse sobre as relações que o estudante pode estabelecer com a tecnologia e com seus pares.

Delineamento metodológico

Dada à natureza da questão de investigação, optamos pela pesquisa qualitativa, a qual pressupõe uma produção descritiva de informações em função do interesse do pesquisador na compreensão do significado que os participantes atribuem às suas experiências (Ponte, 2006). Neste sentido, a partir da formulação de duas tarefas matemáticas, utilizamos três instrumentos para a constituição do repertório de informações para análise: imagens geradas pelo software winplot, registros escritos da resolução dos estudantes e fragmentos de intervenções realizadas pelos pesquisadores.

O enunciado das tarefas envolveu sequências didáticas que, segundo Almouloud (2007) é uma atividade de ensino cuja finalidade para uma pesquisa é o seu processo experimental, ou seja, o conjunto de etapas delineadas pela elaboração, aplicação, produção e análise das informações.

A construção da sequência didática para a primeira tarefadeu-se a partir da metáfora descrita a seguir por Barros e Meloni (2006, p.741): "a metáfora dividir para conquistar é baseada numa tática de guerra do imperador romano Júlio César, que mandava espiões para semear discórdia nos países a serem conquistados, enfraquecendo-os. A ideia básica desta abordagem é a seguinte: um problema difícil é por vezes divisível num conjunto de problemas cuja resolução é relativamente fácil. Para tanto, podemos primeiramente dividir o problema em subproblemas (menores), em seguida resolver estas novas instâncias e, finalmente, intercalar os resultados desses subproblemas para achar a solução do problema principal, ou seja, dividir para alcançar o todo (conquistar o todo)".

Inspirados nessa metáfora, elaboramoso enunciado da tarefa envolvendo um problema subdividido em problemas menores, cujas resoluções possibilitaram a resolução do problema inicial:

Tarefa 1: Metáfora dividir para CONQUISTAR

Em termos matemáticos considere $f(x) = -x^2 + 4$ definida no intervalo [-1, 2]:

1. Utilize o Winplot para calcular a área entre a curva e o eixo "x". Selecione "Visualizar" para ver os retângulos construídos ao longo dos subintervalos.
2. A partir desta representação gráfica fracione o intervalo [-1, 2] de forma que cada retângulo tenha largura igual a 0,5. Determine a medida da área entre a curva e o eixo "x".
3. Agora utilize retângulos com largura igual a 0,25 a partir da fração do intervalo [-1, 2]. Determine a medida da área entre a curva e o eixo "x".
4. Se continuarmos dividindo a atividade original em subproblemas, o que podemos afirmar sobre a medida da referida área, ao passo que os retângulos ficam com cada vez mais estreitos em sua largura?

O enunciado da segundo tarefa foi uma adaptação da propostafeita por Jesus, Peixoto e Mascarenhas (2002) e ganhou a seguinte formulação:

Tarefa 2: Construa o gráfico da função $f(x) = x.\text{sen}\left(1/x\right)$ e utilize-o na análise de cada item a seguir:

a) como podemos apresentar o conjunto domínio?
b) a medida que "x" se aproxima cada vez mais de zero, o que ocorre com o produto $x.\text{sen}\left(1/x\right)$?
c) a medida que ocorre um distanciamento cada vez maior dos valores de "x" em relação ao zero, o que ocorre com o produto de $x.\text{sen}\left(1/x\right)$?
d) como podemos apresentar o conjunto imagem?
e) é pertinente associarmos assíntotas a esta representação gráfica?

Na próxima seção destacamos produções de informações geradas por grupos de estudantes pertencentes a uma turma com 27 alunos, no decorrer do desenvolvimento de suas atividades matemáticas. Os alunos foram orientados no momento da apresentação das tarefas sobre a importância de preservar o raciocínio expressos por diferentes formas de registros e, portanto, estavam cientes do papel de protagonistas nesse cenário de pesquisa. Por isso, tivemos oportunidade de acesso tanto aos registros escritos por meio de lápis e papel, quanto aos registros plotados na tela do computador.

A produção e análise das informações

O processo de resolução da 1ª tarefa iniciou-se com a apresentação da figura 1, construída por um grupo de 4 estudantes, relativa ao valor da área compreendida entre a curva $f(x) = -x^2 + 4$ e o eixo x, definido no intervalo [-1, 2]. Através da utilização do winplot foi gerado o valor 9 unidades de área, bem como a visualização de 24 sub-intervalos no item a.

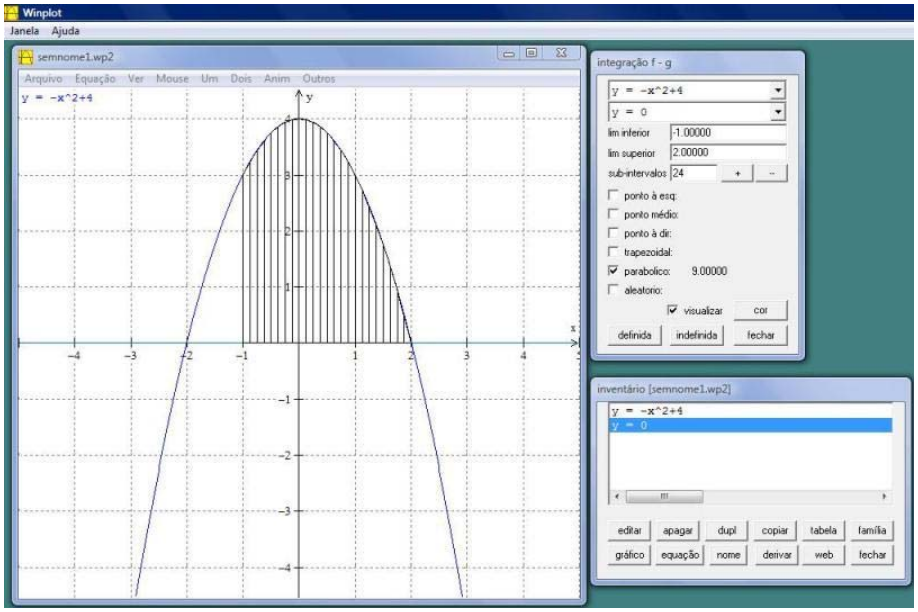
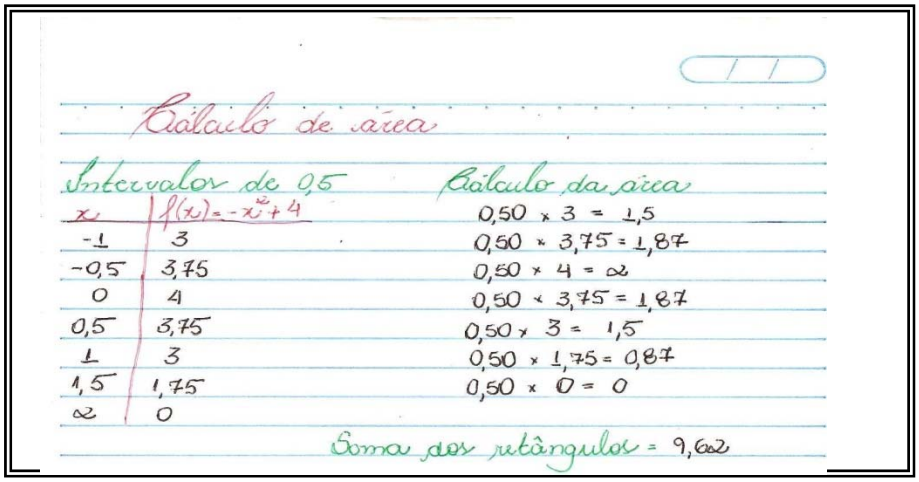


Figura 1. Tela do Winplot para cálculo de área

Para os itens b e c a estratégia de resolução foi desenvolvida em duas etapas. A primeira levou em conta o cálculo feito "a mão". Já na segunda etapa, buscou-se sistematizar os passos desenvolvidos na primeira etapa no winplot; os quais estão descritos a seguir:

1. Considerou a largura proposta para cada conjunto de retângulos e verificou a quantidade deles no intervalo [-1,2];
2. Identificado os valores de "x" como extremos das bases dos retângulos, foi calculado os valores correspondentes às imagens (altura de cada retângulo) na função $f(x)=-x^2+4$.
3. Para cada retângulo estabeleceu-se o valor correspondente à área.
4. A soma das áreas representou o valor aproximado para a referida integral.

Especificamente, em relação ao item b, apresentamos o protocolo de resolução (figura 2) e a respectiva imagem gerada pelo software (figura 3), tendo em vista a partição do intervalo [-1,2] em sub-intervalos de dimensão igual a 0,5:



Cálculo de área

Intervalos de 0,5

x	f(x)=-x²+4
-1	3
-0,5	3,75
0	4
0,5	3,75
1	3
1,5	1,75
2	0

Cálculo da área

0,50 × 3 = 1,5
0,50 × 3,75 = 1,87
0,50 × 4 = 2
0,50 × 3,75 = 1,87
0,50 × 3 = 1,5
0,50 × 1,75 = 0,87
0,50 × 0 = 0

Soma dos retângulos = 9,62

Figura 2. Cálculo aproximado da área a partir de seis subintervalos

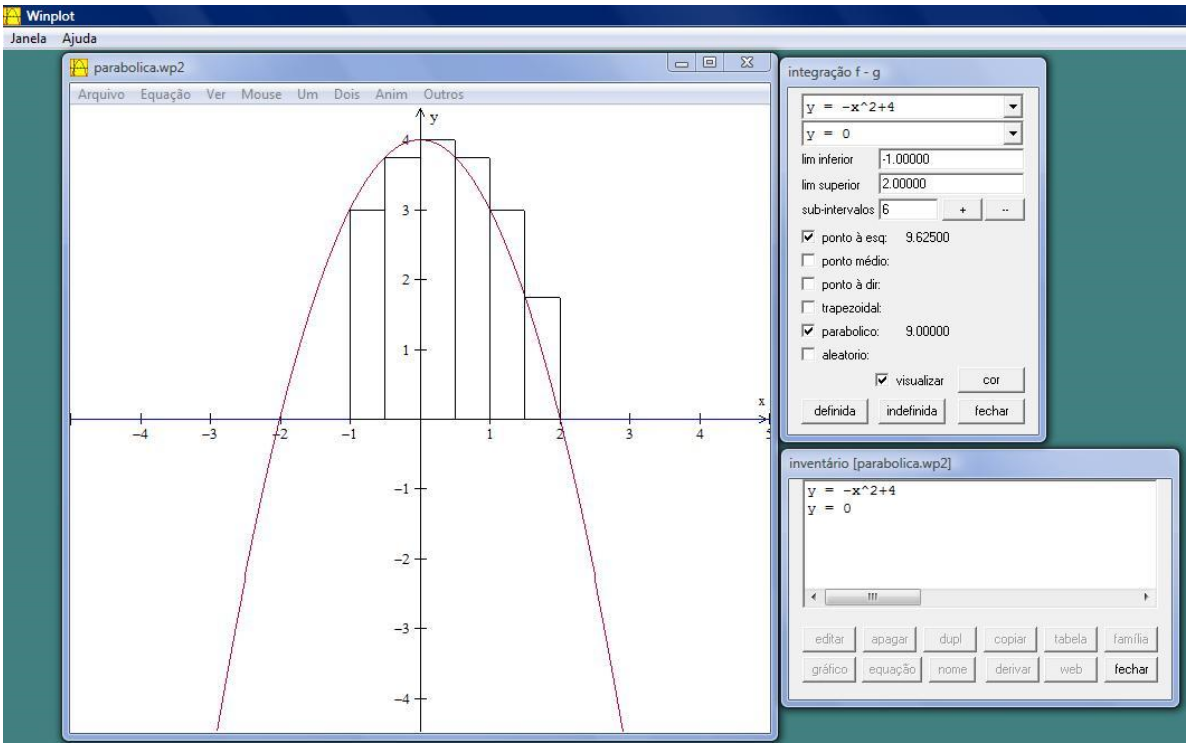
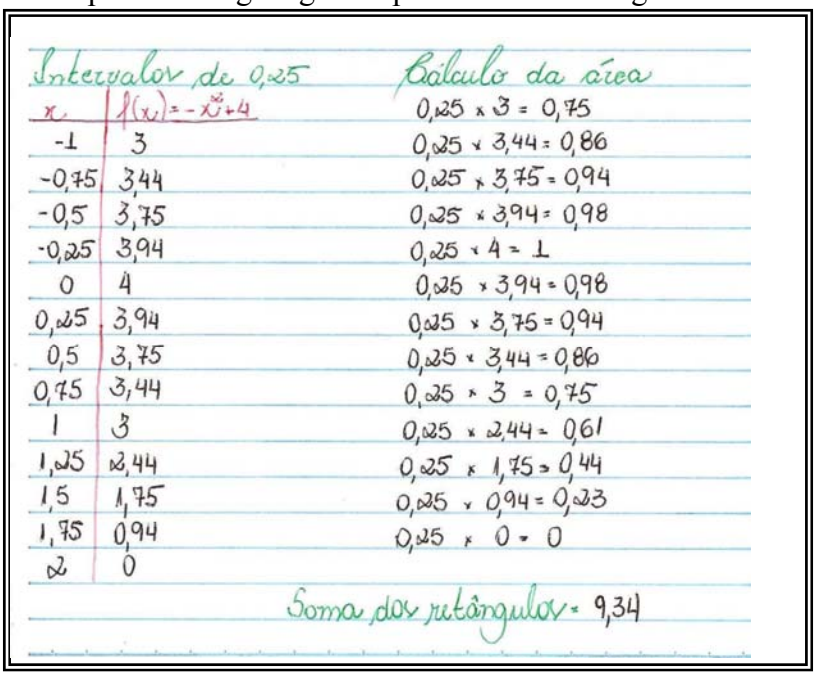


Figura 3. Tela do winplot com cálculo aproximado de área

Ao compararmos as figuras 2 e 3 observamos uma convergência no valor aproximado da área em questão, com uma diferença de 0,005.

Em relação ao item c, a partição do intervalo [-1, 2] em subintervalos de dimensão igual a 0,25 gerou o dobro de retângulos, ou seja, de 6 para 12. O protocolo de resolução está na figura 4 e a respectiva imagem gerada pelo software na figura 5.



Intervalos de 0,25

x	f(x) = -x²+4
-1	3
-0,75	3,44
-0,5	3,75
-0,25	3,94
0	4
0,25	3,94
0,5	3,75
0,75	3,44
1	3
1,25	2,44
1,5	1,75
1,75	0,94
2	0

Cálculo da área

0,25 x 3 = 0,75
0,25 x 3,44 = 0,86
0,25 x 3,75 = 0,94
0,25 x 3,94 = 0,98
0,25 x 4 = 1
0,25 x 3,94 = 0,98
0,25 x 3,75 = 0,94
0,25 x 3,44 = 0,86
0,25 x 3 = 0,75
0,25 x 2,44 = 0,61
0,25 x 1,75 = 0,44
0,25 x 0,94 = 0,23
0,25 x 0 = 0

Soma dos retângulos = 9,34

Figura 4. Cálculo aproximado da área a partir de doze subintervalos

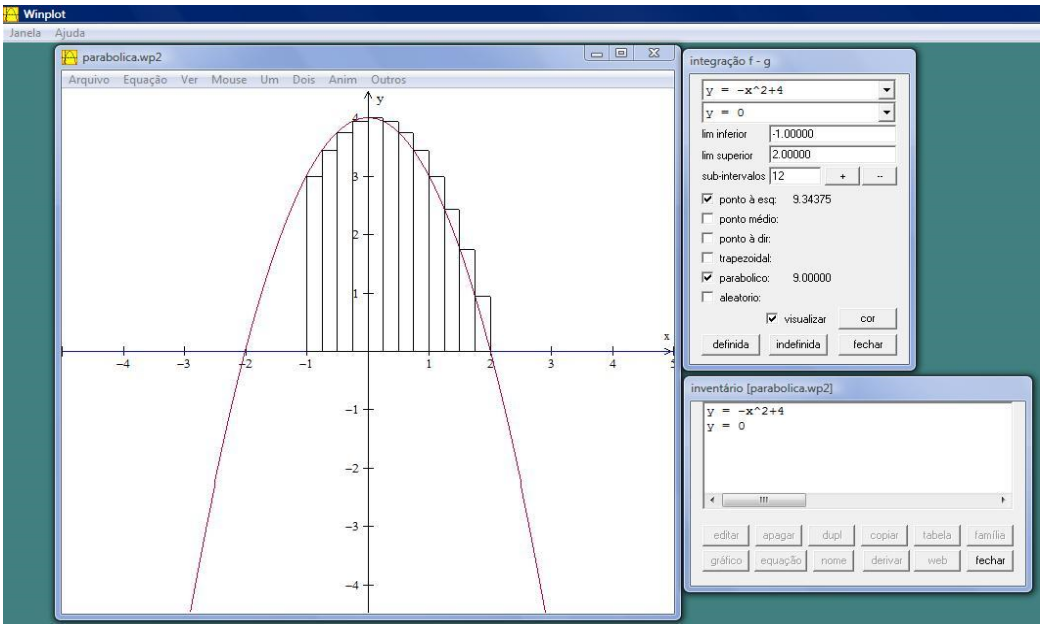


Figura 5. Tela do winplot com cálculo aproximado de área a partir de 12 subintervalos

Ao compararmos a figura 4 e 5 observamos uma convergência no valor aproximado da área em questão, com uma diferença de 0,00375.

Na continuidade do processo de partição do intervalo [-1, 2], o estudante Ivan expos: "à medida que os subintervalos (retângulos) ficam cada vez mais estreitos, o limite da área tende a 9, ou seja, se com os retângulos subdivididos com intervalos de 0,5 em sua soma obtivemos 9,62; quanto mais subdivididos estes retângulos estiverem, a soma será um resultado cada vez mais próximo de 9. No gráfico, isto ocorre devido que os retângulos, cada vez mais estreitos, preencherem melhor o espaço entre (-1) e 2, eliminando as sobras à direita do eixo y ou faltas das áreas à esquerda do mesmo eixo, em relação à curva, conforme podemos ver nas figuras a seguir".

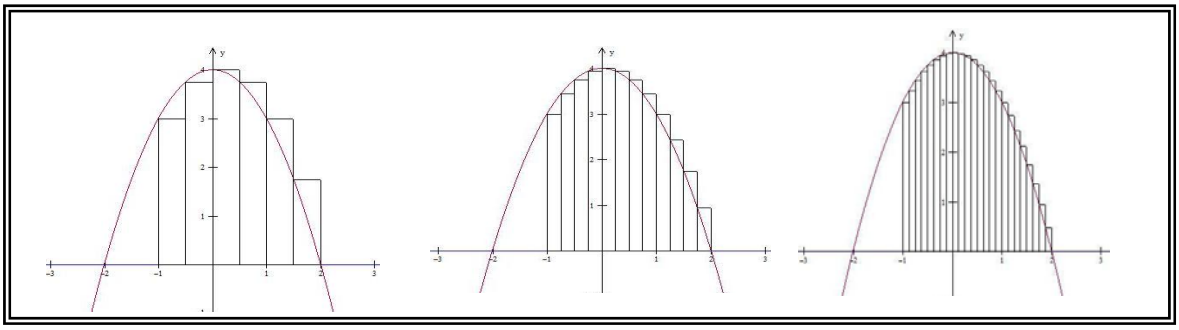


Figura 5. Apresentação dos subintervalos iguais a 0,5; 0,25 e 0,125 conforme comentado por Ivan

No decorrer da realização da sequência didática os estudantes transitaram da metáfora proposta por Barros e Meloni (2006) para uma estratégia de partição do intervalo [-1,2] com o auxílio do software winplot; ou seja, a área delimitada pela curva e o eixo x foi sendo ocupada por um conjunto de retângulos, cujo cálculo da área é mais simples.

No decorrer das etapas de resolução a utilização de retângulos com base cada vez mais estreita e, consequentemente em maior número, possibilitou aos estudantes, por um lado,

visualizar o processo de otimização do preenchimento do espaço delimitado pela curva, o eixo x e o intervalo [-1, 2]. Por outro lado, o processo de partição de cada retângulo reduzindo o valor da sua nova base à metade do valor anterior permitiu a compreensão de que o cálculo da medida da área de uma figura não convencional pode ser expresso algebricamente como um limite de função.

Nas diversas figuras descritas houve tanto a articulação de registros de representação semiótica interno a um mesmo tipo de registro (tratamento), quanto entre registros (conversão). Em termos de tratamento tanto as diferentes representações gráficas nas figuras 1, 3, 5 e 6, quanto às representações em tabelas, no caso, as figuras 2 e 4.

Com relação as transformações de registros de representação semiótica na modalidade de conversão temos os pares de figuras que associam tabelas e gráficos como formas de representação para a construção intuitiva do conceito de integral.

Na perspectiva de Duval (2009; 2012), esta mobilização e coordenação de registros de representação semiótica foi fundamental para a aprendizagem intuitiva do conceito de integral como limite de função, numa perspectiva geométrica.

Com relação à segunda tarefa, para a análise de cada um dos seus itens, recorremos aos registros escritos e entrevista sobre a atividade matemática desenvolvida por um grupo de 3 estudantes. O "fazer" matemática na concepção de Duval (2012) relacionou a maneira de raciocinar e ver o problema.

A seguir apresentamos um registro escrito deste "fazer":

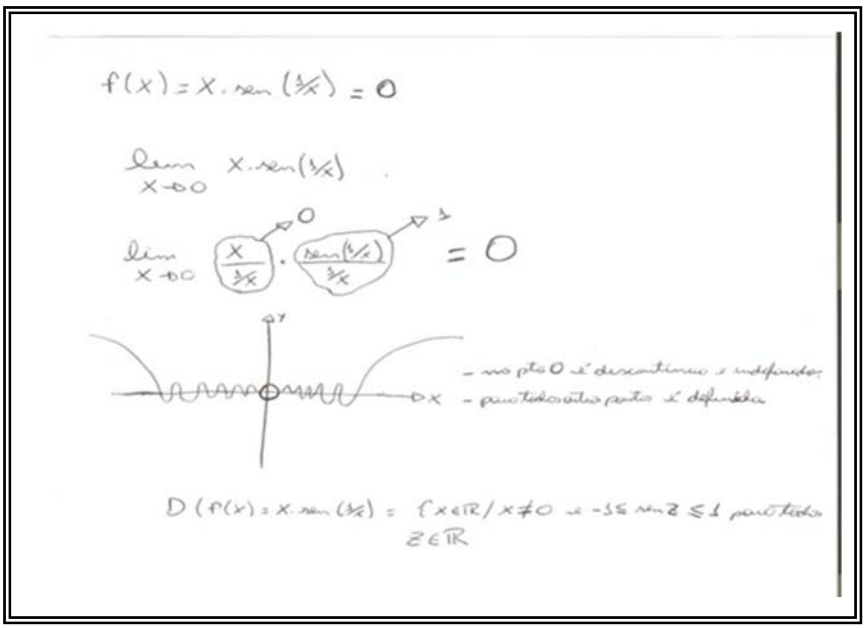


Figura 7. Resolução parcial da tarefa 2

Com base no conteúdo da figura 7 intervimos por meio de indagações para analisarmos o teor das respostas de cada um dos cinco itens propostos:

a) $D(f(x)) = IR^*$ ou $\{x \in IR / x \neq 0\}$

b) O produto $x.\text{sen}\left(1/x\right)$ também tende a zero.

c) Tende a 1

d) Im (f(x)) = {y∈IR/y<1, y⟩ -0,2 e y≠0}

e) Sim, elas vão ser paralelas ao eixo x, horizontal, no ponto y = 1 e y = - 0,2.

A análise das respostas revelaram erros nos três últimos itens. Na perspectiva de Duval (2012),estes erros classificados de transitórios, ou seja, são diretamente ligados a uma noção ou a um processo matemático particular. Era desejável que os alunos utilizassem o Teorema do Confronto ao invés do Limite Trigonométrico Fundamental.

Mediante a este diagnóstico houve a necessidade de intervenção do professor-pesquisador no processo de compreensão desses alunos. Primeiramente, resgatamos o seguinte registro do protocolo (figura 7): $-1 \leq \text{senz} \leq 1$. Pedimos que os alunos explicassem o conteúdo do registro escrito: "z representa a função $\left(1/x\right)$; então sen$\left(1/x\right)$ varia entre 1 e (-1)". Na leitura deste registro os alunos perceberem o erro cometido no item "c".

Para refletirmos sobre os erros cometidos no item "d" e "e", sugerimos a construção de um gráfico gerado no software winplot e uma tabela (figura 8) correspondente ao intervalo [-5, 5], estabelecido a partir do domínio da função f(x) = x.sen$\left(1/x\right)$.

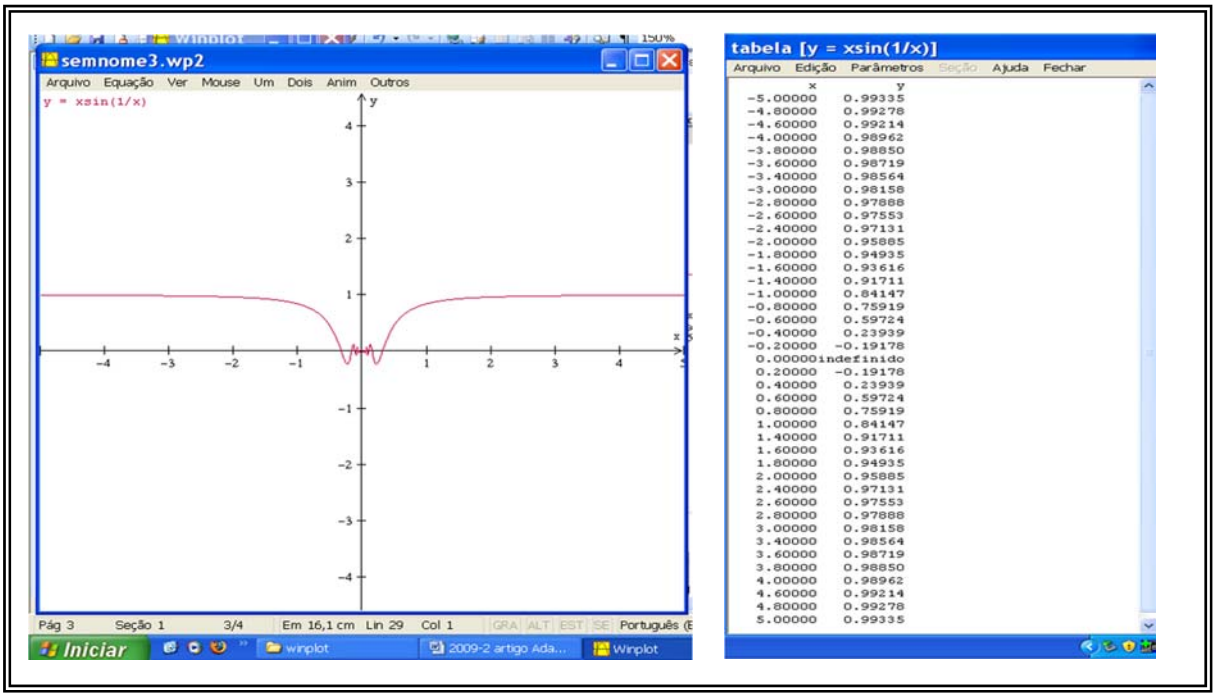


Figura 8. Gráfico e tabela gerados pelo winplot

A tabela da figura 8 permitiu aos alunos validarem a conjectura de que y = x.sen$\left(1/x\right)$ oscila de (-1) até 1 levando em conta o domínio da função, o que caracterizou corretamente o intervalo da imagem de f(x). Esta atitude intelectual dos estudantes, manifestada pela exploração do objeto matemático a partir da conversão e coordenação do registro gráfico e figural (tabela), possibilitou aos alunos a capacidade de compreender e de saber o que foi feito de errado na resposta do item "d".

Em relação ao item "e", o professor-pesquisador questionou esse grupo de estudantes sobre o conceito de assíntota para que a partir do gráfico da figura 8, pudessem validar a conjectura de que a função f(x)= xsin(1/x) oscila indefinidamente entre (-x) e (x).

Pelo Teorema do Confronto, os alunos construiram a desigualdade $-x \leq xsen\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$. Em seguida, designaram f(x)=-x e h(x)=x. Aplicaram os limites de função para f(x) e h(x) para x tendendo a zero e observaram que seus resultados tendem a zero. Finalizaram, concluíram que $\lim_{x \to 0} x.sen(^1/_x) = 0$.

Nesta tarefa, o grupo de estudantes mobilizou registros de representações semióticas de natureza algébrica e gráfica (figura 7). Porém, ao complementá-los com o auxílio do winplot (figura 8), a compreensão do objeto matemático tornou-se mais acessível. A intervenção do professor-pesquisador em resgatar o conceito de assíntota foi um passo importante para motivar a revisão das atitudes intelectuais dos alunos, ou seja, que a aplicação do Teorema Fundamental da Trigonometria no item "e" foi inconsistente frente à mobilização dos registros de representação semiótica.

A funcionalidade do software winplot na atividade matemática da tarefa 2 ressaltou a concordância que temos em relação a Guimarães (2002, p.3) ao afirmar que o uso dos softwares matemáticos agiliza processos algébricos, e por exemplo, pode proporcionar atividades de reflexão, como mudanças de parâmetros das funções, além de permitir visualização gráfica. Podem proporcionar um ambiente de investigação por parte dos alunos, e não simplesmente uma forma ágil de obter respostas.

Ao refletir como se deu o processo de desenvolvimento das atividades matemáticas dos alunos, pudemos perceber que as tarefas propostas tornaram-semomentos de investigação, nos quais os estudantes se deparavam com problemas para serem resolvidos. A subdivisão dos mesmos, em problemas menores, foi uma estratégia pedagógica que motivou os estudantes na observação de propriedades, no estabelecimento de relações, possibilitando a aprendizagem pela compreensão dos enunciados das tarefas propostas, sob o ponto de vista matemático e cognitivo.

Do ponto de vista matemático, exploramos com os estudantes o processo lógico-dedutivo por meio da avaliação de conjecturas necessárias à aprendizagem do conceito de área (tarefa 1), do conceito de assíntota e da aplicabilidade do Teorema do Confronto, ambos presentes na tarefa 2.

Do ponto devista cognitivo, instigamos a mobilização e coordenação de registros de representação semiótica distintos, necessários ao acesso dos objetos matemáticos, no caso, os referidos conceitos em questão.

Este cenário de investigação ressaltou como resultado de pesquisa que os pontos de vista matemático e cognitivo, embora inversos sob a perspectiva de Duval (2012), não são excludentes; pelo contrário, são inter-relacionados no processo da aprendizagem.A inter-relação ocorreu pelo fato de que a apreensão conceitual no contexto do Cálculo Diferencial e Integral se fez pela mobilização e coordenação de diversos registros de representação algébrico, geométrico, tabela e gráfico.

Considerações finais

Quando lecionamos Cálculo Diferencial e Integral, temos a preocupação com o desempenho não satisfatório de uma quantidade significativa de alunos. Neste relato de pesquisa apresentamos um cenário de investigação com o objetivo de analisar a apreensão conceitual dos alunos envolvidos em duas tarefas.

Na primeira, os estudantes foram capazes de produzir saberes envolvendo o conceito de área de uma figura bidimensional via limite de função. Esta apreensão conceitual, em um primeiro momento,articulou o registro algébrico, gráfico eo figural (partições de uma curva a partir da construção de retângulos), todos apresentados na tela do winplot. Em um segundo momento, a construção de subproblemas (problemas menores) fez com que os alunos registrassem em uma tabela os cálculos feitos com o auxílio de lápis e papel. Apoiados neste registro,os alunos utilizaramoutro registro (numérico) para estabelecer o cálculo da área relativa a cada retângulo e, consequentemente, do conjunto de retângulos.

Para cada subproblema recorreram à visualização gráfica proporcionada pelo winplot com o objetivo de avaliar a convergência no cálculo da área requerida. O fato de que a cada nova convergência, a diferença entre os cálculos das áreas foi ficando cada vez menor permitiu aos alunos utilizarem o registro da língua natural para sistematizar intuitivamente o conceito de integral na perspectiva geométrica.

Na segunda tarefa a apreensão conceitual por parte dos alunos ocorreu com a valorização dos seus erros cometidos, no sentido de servirem de base para o processo aprendizagem. Recorremos ao registro gráfico e de tabela, gerados no winplot, para que os alunos pudessem confrontar com os seus registros algébricos e, rever os erros produzidos.

A visualização gráfica da tarefa permitiu aos alunos a coordenação dos registros de representação semiótica mobilizados na atividade matemática da tarefa 2. Esta coordenação não se fez de forma direta, pois a aplicabilidade correta do Teorema do Confronto só foi possível quando os alunos compreenderam sobre a importância do conceito de assíntota. Na representação gráfica produzida no winplot, não foi inclusa as assíntotas, comprometendo a realização correta da tarefa. Porém, a intervenção do professor-pesquisador foi de suma importância para atenuar os erros transitórios.

Referências e bibliografia

Almouloud, S. A. (2007). Fundamentos da didática da matemática. Paraná: Editora UFPR.

Barros, R. M., &Meloni, L. G. P. (2006). O processo de ensino e aprendizagem de cálculo diferencial e integral por meio de metáforas e recurso multimídias. In: 34º Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia (COBENGE). Passo Fundo: Editora da Universidade de Passo Fundo, p.733-774.

Charlot, B. (2000). Da relação com o saber: elementos para uma teoria. Porto Alegre: Artes Médicas Sul.

D'amore, B. (2007). Epistemologia, Didática da Matemática e Práticas de Ensino. Bolema, v.20, n.28, Rio Claro, p.1179-1205.

Duval, R. (2009). Semiósis e pensamento humano: Registro semiótico e aprendizagens intelectuais. Tradução Lênio Fernandes e Marisa Rosani Abreu da Silveira. São Paulo: Editora da Livraria da Física.

Duval, R. (2012). Quais teorías e métodos para pesquisa sobre o ensino da matemática? Praxis Educativa, 2, 7, Ponta Grossa, p.305-330.

Guimarães, O. L. (2002). Cálculo Diferencial e Integral: do algebrismo às representações múltiplas. In: 25ª Reunião Anual da ANPEd. Caxambu, 16p.

Jesus, A. R., Peixoto, A. & Mascarenhas, M. (2002). Visualizando funções: Familias de gráficos, retas tangentes e áreas de figuras planas com a utilização de software livre. In: I Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. Salvador: Sociedade Brasileira de Matemática, 33p.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em Educação Matemática. Bolema, 19, 25, Rio Claro, p.105-132.

Souza, H. B. M. (2011). Professores, Alunos, Escola, Saber – relações atravessadas pela contradição: entrevista com Bernard Charlot. Cadernos de Educação, v.39, Pelotas, p.15-35.

Nivel de apropiación tecnológica con respecto al uso de recursos educativos abiertos en la enseñanza de la Matemática a distancia en Costa Rica

Cristian **Quesada** Fernández
Universidad Estatal a Distancia
Costa Rica
cquesadaf@uned.ac.cr

Resumen

Este trabajo presenta los resultados de una investigación cuyo objetivo principal fue el de determinar el nivel de apropiación tecnológica con respecto al uso de Recursos Educativos Abiertos en los profesores del Programa de Enseñanza de la Matemática de la Universidad Estatal a Distancia de Costa Rica, con el fin de plantear estrategias que permitan potenciar el uso de estos recursos y contribuir a mejorar la calidad de la práctica docente. La investigación se apoyó en la metodología de carácter cuantitativa, con un enfoque transeccional descriptivo. Se empleó el modelo de apropiación de TICs de Montes y Ochoa (2006) como apoyo en la recopilación y análisis de la información. La población de estudio consistió de 21 profesores. Los resultados mostraron que el 57.14% de los profesores alcanzan el nivel de utilización; estos docentes hacen uso de los REA para introducir un tema, o bien para realizar representaciones apoyadas por gráficos, videos, simulaciones o animaciones (elementos muy importantes en la enseñanza de la matemática), además, comparten sus experiencias sobre el uso de REA con los colegas del área, y colaboran en el desarrollo de cursos apoyados por estos recursos

Palabras clave: Apropiación tecnológica, Recursos Educativos Abiertos, Enseñanza de la matemática, Educación a distancia, Tecnología Educativa.

Introducción

Es una realidad que la rápida transformación de internet, la expansión de la telefonía móvil, los nuevos dispositivos inteligentes y la oferta tecnológica a bajo costo han contribuido a la estimulación de nuevas habilidades tecnológicas y han consolidado "nuevas formas de generar, organizar y difundir el conocimiento." (Cobo, 2007, p. 6).

Estas circunstancias irrumpieron dentro de los modelos educativos a distancia y los ubicó dentro de una nueva fase tecnológica que ofrece una oportunidad de adaptarse al intercambio social y educativo que proveen los entornos virtuales: el usuario ya no es solo un consumidor, sino que es constructor y productor de la información.

Las nuevas infraestructuras tecnológicas favorecen el intercambio de la información y el entorno de aprendizaje colaborativo (Contreras, 2010), cuyos beneficios han alcanzado a los niveles de divulgación, de construcción y de intercambio de los REA, pues se pueden construir y distribuir a audiencias masivas por medio de internet (Celaya, Lozano y Ramírez, 2010). En el caso de la educación a distancia estas posibilidades se vuelven imprescindibles para poder enriquecer la práctica educativa y permiten la interacción entre los actores educativos.

Ante dicho panorama, el Programa de Enseñanza de la Matemática de la UNED pretende aprovechar esa revolución tecnológica que ha venido replanteando y renovando las metodologías de enseñanza y demandando la incursión de nuevos dispositivos de información y comunicación en los entornos educativos (Cobo, 2007).

Como parte de la acreditación ante el SINAES, el Programa de Enseñanza de la Matemática realizó un Plan de Mejoramiento en el cual se comprometió a brindarles una enseñanza de calidad a sus estudiantes e instar a sus docentes a tener más acceso a la información, y a que puedan administrarla, producirla, adaptarla e intercambiarla. Lo anterior demanda una constante capacitación de su personal académico con el fin de que posean una adecuada apropiación tecnológica en el uso de recursos didácticos innovadores como parte de la mediación pedagógica en los diferentes cursos.

La apropiación tecnológica implica la transformación del usuario y de la tecnología pues depende de la manera en que los docentes aprehenden o se apropian de las tecnologías y cómo estas repercuten y cambian la dinámica de los cursos. Según McAnally, Navarro y Rodríguez, la manera en que "se integran los nuevos conocimientos y habilidades manifiestan el grado de dominio y apropiación que presenta el profesor" (citados por Celaya et al, 2010, p. 894).

Sin embargo, ¿realmente se encuentran capacitados los docentes del Programa de Enseñanza de la Matemática en el uso de los REA?, ¿son los docentes unos simples consumidores o explotan al máximo las capacidades del recurso?, ¿son consumidores autónomos, activos y creativos o más bien los utilizan de manera pasiva? y ¿alcanzan un alto nivel de apropiación tecnológica en uso de los REA?

A partir de los cuestionamientos anteriores, se plantea el problema que se intentó aclarar mediante esta investigación: ¿cuál es el nivel de apropiación tecnológica de los profesores del Programa de Enseñanza de la Matemática de la UNED de Costa Rica con respecto al uso de los REA?

El presente artículo pretende mostrar los resultados de una investigación desarrollada con el fin de responder los anteriores cuestionamientos. La investigación tomó como población a 21 docentes del Programa de Enseñanza de la Matemática de la UNED de Costa Rica en el Primer Cuatrimestre del 2013.

Marco teórico

La investigación se centró en dos constructos principales: los Recursos Educativos Abiertos (REA) y la Apropiación Tecnológica, conceptos muy importantes y presentes en la pregunta de investigación. Se realizó una extensa revisión de la literatura escrita alrededor del tema, con el fin de definir tanto de manera teórica como operacional estos constructos, esto es, determinar las posibles relaciones entre ellos así como una manera de ser evaluados, en unión con toda la información recabada.

Origen y definición de los Recursos Educativos Abiertos

Diversos autores (Santos-Hermosa et al, 2012; Atenas-Rivera et al, 2012; Contreras, 2010 y Burgos, 2010) concuerdan que el término REA (u Open Educational Resources OER) fue acuñado por primera vez en el 2002 en el marco del Forum on the Impact of OpenCourseware on Higher Education in Developing Countries auspiciado por la Organización de las Naciones Unidas para le Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO por sus siglas en inglés).

La importancia de los REA en el sector educativo se evidencia también en las numerosas iniciativas de la UNESCO para conceptualizar y teorizar alrededor del fenómeno. Muestra de esto es que en el 2005 y con el apoyo de la Fundación William and Flora Hewlett, la UNESCO creo la wiki denominada OER Community, un espacio para compartir información y trabajar de manera colaborativa en la producción de REA.

Además en el 2007 se firmó la *Declaración de Ciudad del Cabo para la Educación Abierta* y en el 2009 se firmó la *Declaración de Dakar sobre los recursos educativos abiertos*. En ambas declaraciones se señala que los REA son esenciales para lograr los objetivos de dichas declaraciones internacionales (UNESCO, 2012).

Un factor social que según Atenas-Rivera et al (2012), colaboró al auge del desarrollo de los REA fue la crisis económica del 2008 y cómo esta repercutió en los presupuestos de la educación de muchos países y en el incremento del material editorial como libros, revistas y materiales didácticos. Esto hizo que muchas universidades trataran de buscar alternativas que mantuvieran los ideales democráticos de la educación pública. Actualmente los REA se utilizan tanto en instituciones públicas como en instituciones privadas e inclusive se han convertido en valores agregados que les permiten competir entre sí por los altos estándares educativos.

Ya para el 2011 la UNESCO elaboró una guía donde se abordaba de manera más sistematizada las generalidades sobre los REA y las preguntas frecuentes alrededor de los mismos. Esta guía se denominó *A Basic Guide to Open Educational Resources: Frequently asked questions* y en ella la UNESCO amplió su definición de REA al agregar que son cualquier recurso educativo disponible para el uso libre de los educadores y estudiantes, tales como:

> curriculum maps, course materials, textbooks, streaming videos, multimedia applications, podcasts, and any other materials that have been designed for use in teaching and learning (UNESCO, 2011).
>
> [mapas curriculares, materiales de cursos, libros de texto, videos en streaming, aplicaciones multimedia, podcasts y otros materiales que han sido diseñados para su uso en la enseñanza y el aprendizaje] (Traducción del autor).

En esta guía la UNESCO demarcó los REA y los diferenció de otros materiales educativos digitalizados, dicha delimitación se considera de gran importancia para la presente investigación pues plantea límites en el campo de acción aplicables al problema que compete en este estudio.

Más recientemente, en el marco del Congreso Mundial sobre los Recursos Educativos Abiertos, en París en el 2012, se define a los REA como:

> materiales de enseñanza, aprendizaje e investigación en cualquier soporte, digital o de otro tipo, que sean de dominio público que hayan sido publicados con una licencia abierta que permita el acceso gratuito a estos materiales, así como su uso, adaptación y redistribución por otros sin ninguna restricción o con restricciones limitadas. Las licencias abiertas se fundan en el marco existente de los derechos de propiedad intelectual, tal como vienen definidos en los correspondientes acuerdos internacionales, y respetan la autoría de la obra" (UNESCO, 2012, p.1).

Características de los Recursos Educativos Abiertos

Los REA pueden ser tan variados como la creatividad de sus creadores y usuarios les permitan, por ejemplo se puede incluir recursos tan diversos como: módulos didácticos,

programas curriculares, libros de texto, herramientas de evaluación, materiales interactivos, bases de datos, aplicaciones, entre otros.

Ante todo, es pertinente diferenciar a los REA de los recursos digitales, estos últimos son materiales codificados y manipulados por computadora, la diferencia más importante es que al mencionar recursos digitales se habla de tecnología, mientras que el término REA se refiere a educación, tecnología y propiedad intelectual (Bonilla, García y González, 2010).

Por propiedad intelectual en el contexto de los REA se entiende que aunque muchos recursos se encuentran licenciados bajo la categoría de "dominio público", de igual manera se debe hacer el respectivo reconocimiento de la autoría de las personas que elaboraron el recurso, lo cual debe estar acorde a las normas y principios que rigen los derechos de autor (Burgos, 2010).

Autores como D´Antoni, Schmidt y la OCDE (citados en Bonilla et al, 2010) destacan diferentes elementos esenciales ligados a los REA, por ejemplo: su contenido educativo, su carácter tecnológico ligado al software con el que se desarrolla y su medio de distribución y, por último, su licencia abierta que permite el derecho a su libre utilización y circulación.

Sin embargo, para evitar confusiones con otro tipo de recursos educativos es necesario para la presente investigación explicar las características básicas de los REA que aseguren su portabilidad global. Los REA deben ser:

- Accesibles: pues son materiales de acceso público y pueden ser localizados y utilizados en cualquier lugar o momento.
- Gratuitos: pues se debe garantizar su utilización sin que se tenga que hacer ningún pago económico, delimitaciones del copyright o suscripción alguna, siempre que sea para su uso con fines académicos.
- Pertinentes: pues deben tener contenidos adecuados y aptos para el usuario y su contexto.
- Flexibles: que pueden ser adaptados a contextos particulares y/o regionales, para que el recurso pueda ser transferible en diferentes contextos culturales.
- Certificables: que aseguran una calidad en términos técnicos y de contenido.
- Reutilizables: pues pueden ser modificados, adaptados y utilizados en diferentes contextos educativos.
- Interoperables: que facilitan la adaptación entre diferentes *hardware* o herramientas.
- Sostenibles: que funcionan correctamente a pesar de los cambios que se les realiza.
- Solidarios: pues pueden ser compartidos entre diferentes miembros de la comunidad educativa.

En todo momento los REA contribuyen a la construcción del aprendizaje, especialmente al desarrollo de capacidades individuales y sociales que les permitan a las personas comprender y actuar. Sin embargo, para que los REA puedan transformar y mejorar el aprendizaje de los estudiantes, estos deben de ser adaptados por sus docentes acorde al contexto cultural, social y económico de la práctica educativa en cuestión.

Es decir, se trasciende el simple conocimiento y uso de los REA, sino que para esto se debe alcanzar niveles más altos de apropiación tecnológica, tales como adaptación y transformación, los cuales serán abordados en detalle en el siguiente apartado.

La apropiación tecnológica

La apropiación tecnológica consiste en la manera en que las herramientas tecnológicas son asumidas por los sujetos, cómo las utilizan para interpretar la realidad y para construir la base de su aprendizaje (Colás y Jiménez, 2008). Tiene que ver con el conocimiento, el uso y la modificación de las tecnologías y su nivel puede variar según el uso proactivo y dinámico de estas herramientas tecnológicas para estimular el aprendizaje y desarrollar habilidades que contribuyan a la creación de un nuevo conocimiento.

El proceso de apropiación implica que se traslade el control del uso de las herramientas de los contextos a los individuos (Colás y Jiménez, 2008). Por lo tanto, la apropiación tecnológica es un proceso dinámico y flexible y que está totalmente ligado al uso que les dé el individuo a las tecnologías, cómo este se vea modificado por el uso de las tecnologías y cómo modifica la tecnología de acuerdo con sus necesidades.

La apropiación tecnológica es un proceso que transforma tanto al usuario como a la tecnología (Celaya et al, 2010) pues su característica central es que los usuarios (docentes o estudiantes) puedan incorporar nuevas maneras de utilizar la información, tanto al crearla como al compartirla con la ayuda de las tecnologías (Cobo, 2007).

Al apropiarse de las tecnologías, el docente inevitablemente va a sufrir cambios a la hora de enfrentarse a su planeamiento y trabajo pedagógico dado que construye nuevos conocimientos y habilidades desconocidas anteriormente, estos conocimientos y destrezas van a variar acorde al grado de dominio y apropiación que el educador posea de las tecnologías (Celaya et al, 2010).

Un modelo de evaluación para la apropiación tecnológica

Montes y Ochoa en el año 2006 realizaron un proyecto denominado *Evaluación de cursos apoyados por tecnología* para la Pontificia Universidad Javeriana en Cali, Colombia. De este proyecto surgió el artículo *Apropiación de las Tecnologías de la Información y Comunicación en cursos universitarios*, en el cual generaron un modelo para caracterizar el conocimiento, la utilización y la transformación que los docentes hacen de las TIC en sus cursos.

En el artículo, los autores plantean que existen dos perspectivas con las que se ha abordado la apropiación tecnológica: la primera es "Aprender de la tecnología" y la segunda "Aprender con la tecnología". En la primera, se considera a la tecnología como una herramienta para trasmitir la información, romper barreras de comunicación tanto externas (limitación de tiempo y espacio) como internas (dificultad de estudiantes de expresarse) y donde el alumno cumple un papel más pasivo y sólo de receptor de la información.

Con la perspectiva de "Aprender con la tecnología", el docente la utiliza en disposición de la construcción del conocimiento por medio del papel activo y colaborativo del estudiante dentro de su proceso de aprendizaje. Las TIC son empleadas para diseñar y resolver problemas y demandan un mayor nivel de análisis y pensamiento por parte de los estudiantes, además de que les permiten acercarse a problemas similares a los que viven en su vida cotidiana y a utilizar sus conocimientos ya adquiridos (Montes y Ochoa, 2006).

Una característica importante que mencionan Montes y Ochoa (2006) de la perspectiva "Aprender con la tecnología" es la de poner menos énfasis en las instrucciones y más en la creación de ambientes de aprendizaje donde sea el estudiante el que interprete, organice y construya su conocimiento, a través de escenarios más contextualizados y no tanto a partir de contenidos abstractos.

Estas dos perspectivas han dado paso a diversas investigaciones acerca de la evaluación del impacto de las TIC, pero se han enfocado simplemente en los resultados académicos alcanzados, las actitudes de los estudiantes frente al uso de las TIC, la administración del tiempo, la accesibilidad de los materiales, los aspectos negativos de la interacción y el nivel de satisfacción de los alumnos. Enfoques que según, los autores citados, son insuficientes para evaluar la apropiación de las tecnologías de la información en los escenarios educativos; para ellos, "es necesario conocer la utilización que realmente se hace de las TIC en los cursos" (Montes y Ochoa, 2006, p. 91):

> la perspectiva de aprender de la tecnología presenta un vacío significativo en relación con la evaluación de su apropiación, y carece de unos instrumentos que permitan dar cuenta de la forma en la que la apropiación de la tecnología genera cambio en los cursos y en la manera de aprender de los estudiantes.

Se considera además, que existe un faltante de evaluaciones enfocadas en el docente por lo cual cobra pertinencia el presente estudio, pues el enfoque está centrado en el uso que realizan los docentes de las TIC.

Por esta razón, es necesario ampliar los horizontes de la evaluación y plantear nuevos enfoques para acercarse a la apropiación tecnológica. Para esto, los autores plantearon un modelo a partir de la adaptación de dos estudios realizados previamente. El primero es el planteado en 1995 por Hooper y Rieber y el segundo el propuesto en 2002 por Orozco, Ochoa y Sánchez (ambos citados por Montes y Ochoa, 2006).

Según menciona Montes y Ochoa (2006) el modelo de evaluación de Hooper y Rieber plantea diversas fases de apropiación tecnológica, de las cuales los autores rescatan la *integración*, la *re-organización* y la *evolución.*

La fase de *integración* se enfoca en el uso de la tecnología como medio de trasmisión de la información y como herramienta para comunicarse con los estudiantes.

La fase de *re-orientación* se utiliza la tecnología como herramienta para construir conocimiento más que para trasmitir información, en esta fase el docente orienta actividades para que el estudiante adquiera un papel activo dentro de su aprendizaje. Y por último la fase de *evolución* en la cual los docentes utilizan las tecnologías de una manera más dinámica para integrarlas en su labor docente y para compartir sus avances con el resto de la comunidad educativa.

Los autores enriquecen este modelo de evaluación al combinarlo con el modelo de evaluación de la apropiación de prácticas culturales de Orozco, Ochoa y Sánchez (2002). De éste último, los autores realizan una adaptación de tres categorías: el *conocimiento*, la *utilización* y la *transformación*.

El *conocimiento* de la tecnología se enfoca en la representación y usos que los docentes hagan de ella, desde la descripción hasta la creación de diversos escenarios. La *utilización* se relaciona con el uso cotidiano de las tecnologías en el ambiente educativo y la *transformación* se refiere a la adaptación y modificación de las prácticas educativas por medio de la incursión de la tecnología (Montes y Ochoa, 2006).

De esta manera, los autores plantean un nuevo modelo de evaluación de la apropiación tecnológica, el cual está dividido en tres categorías *integración*, la *re-organización* y la *evolución* y cada una de estas a su vez pueden ser evaluadas según los tres niveles (o subcategorías) de

apropiación: el *conocimiento*, la *utilización* y la *transformación.* Para operacionalizar dichas categorías, los autores elaboran una lista de rasgos que describen cada nivel de apropiación tecnológica.

Metodología

La investigación se apoyó en la metodología de carácter cuantitativa, con un enfoque transeccional descriptivo. Además, producto de la revisión bibliográfica realizada y reseñada en el marco teórico, se decidió emplear el modelo de apropiación de prácticas culturales de Orozco, Ochoa y Sánchez (2002) como apoyo en la recopilación y análisis de la información necesaria para el estudio. De este modelo se extrajeron y adaptaron categorías que contribuirían a clasificar los datos cuantificables para resolver el problema de investigación, tales como las fases de la apropiación tecnológica: *integración*, *re-organización* y *evolución* y sus subcategorías de apropiación: el *conocimiento*, la *utilización* y la *transformación.* Estas categorías de análisis fueron utilizadas para medir el nivel de apropiación tecnológica presente en los participantes.

Según Hernández, Fernández y Baptista, en los enfoques cuantitativos "se involucran muchos sujetos en la investigación porque se pretende generalizar los resultados del estudio" (1998, p. 13). Por esta razón se decidió utilizar la totalidad de los profesores que realizan labores docentes en el Programa de Enseñanza de la Matemática de la Universidad Estatal a Distancia de Costa Rica para poder plantear conclusiones generalizadas en toda la población existente. Cabe destacar que fue factible cubrir al 84% la población de docentes (21 profesores universitarios que desempeñan labores virtuales y presenciales dentro de la gestión docente del Programa) un número considerable por lo cual no fue necesario realizar un muestreo.

Además, se eligieron instrumentos que permitieran registrar el uso de los REA en los docentes de matemática y que a su vez se pudieran cuantificar según el nivel de apropiación tecnológica que tuvieran. Para la presente investigación se usaron los cuestionarios, las escalas para medir actitudes y los test de aptitudes. Se eligió los test de aptitudes pues "estos están diseñados para medir la capacidad de las personas para realizar algo" (Valenzuela y Flores, 2012, p. 85), lo cual se aplica perfectamente a la hora de medir la capacidad de los docentes de utilizar los REA.

Para elaborar dichos instrumentos se adaptaron las categorías descritas en el Modelo de Montes y Ochoa (2006), tales como las fases de la apropiación tecnológica: *integración*, *re-organización* y *evolución* y sus subcategorías de apropiación: el *conocimiento*, la *utilización* y la *transformación.*

En relación con el procedimiento seguido en esta investigación, el mismo fue llevado a cabo siguiendo varias etapas a saber: 1) aplicación de instrumentos a participantes, 2) sistematización de la información recopilada, 3) análisis de datos y 4) elaboración de conclusiones.

Análisis y discusión de los resultados

Con el fin de alcanzar el objetivo del estudio fue diseñado, validado y aplicado un cuestionario al personal docente participante en la investigación. El cuestionario aplicado contenía una serie de rasgos que identificaban los diferentes niveles de apropiación tecnológica descritos en el modelo propuesto por Montes y Ochoa (2006), los cuales fueron adaptados de acuerdo con las necesidades de este estudio.

Los profesores en su gran mayoría conocen las características de los Recursos Educativos Abiertos, identifican algunos REA que podrían incorporar en su labor docente y además son conscientes de la importancia que tienen los REA en la educación a distancia, específicamente en la construcción de conocimiento matemático. Los rasgos anteriores son distintivos del nivel de apropiación tecnológica denominado conocimiento, y los resultados muestran que un 71.43% de los profesores participantes alcanzan dicho nivel.

Sumado a lo anterior, se tiene que los profesores manifiestan hacer uso de los REA ya sea para introducir un tema, o bien para realizar representaciones apoyadas por gráficos, videos, simulaciones o animaciones, elementos que se vuelven muy importantes en la enseñanza de la matemática. Además, más de la mitad de los docentes también indican que comparten sus experiencias sobre el uso de REA con los colegas del área, y colaboran en el desarrollo de cursos apoyados por estos recursos. Estos rasgos presentes en el 57.14% de los profesores son característicos del nivel de utilización.

Los resultados anteriores son muy importantes pues en la enseñanza de la matemática a distancia, el uso de las TICs se vuelve un aspecto fundamental, y más aún el utilizar Recurso Educativos Abiertos que no representen costos para los docentes ni estudiantes. En particular los REA son útiles para fomentar el razonamiento matemático, no obstante el éxito está sujeto a que sean integrados a un buen diseño instruccional (Álvarez et al, 2012). Además, en forma coherente con Celaya et al (2010), el dominio que el profesor posea en cuanto a la utilización de los REA es mostrado tanto en la selección de los recursos como en las estrategias de enseñanza que planifique y aplique en sus cursos con la ayuda de estos recursos.

Es importante recordar que la inclusión de los REA no necesariamente es sinónimo de éxito en innovación educativa, ni que garantizan mejoras en la enseñanza y el aprendizaje, ni que van a ser la respuesta a todas las deficiencias en la educación; el aporte de los REA va a depender en qué medida el docente explote al máximo las capacidades de dichos recursos y se apropien adecuadamente de ellos, de ahí la importancia de que los profesores alcancen niveles altos de apropiación tecnológica en el uso de los REA.

A la luz de los resultados anteriores es factible obtener las primeras conclusiones del estudio, por cuanto fue posible medir el nivel de apropiación tecnológica de los profesores participantes en esta investigación.

Uso de los Recursos Educativos Abiertos por parte de los profesores

Los resultados muestran que los docentes están bastante familiarizados con el uso de Recursos educativos abiertos para la construcción de gráficas y de apoyo en construcciones geométricas, así como para la creación de contenidos educativos. Se muestra una debilidad en el uso de asistentes para probabilidad y estadística así como de cálculo simbólico y numérico, por lo que se podría plantear estrategias que permitan al docente indagar y explorar recursos de este tipo que pueda utilizar posteriormente en su función docente.

No obstante, sobresale el hecho de que los profesores en su mayoría están anuentes a recibir capacitación en el uso de medios tecnológicos para la enseñanza de la matemática. Esto favorece según Celaya et al (2010) que los profesores desarrollen las habilidades requeridas para aprovechar dentro de sus labores docentes las potencialidades de las TICs y de esta forma aumentar su nivel de apropiación.

Quizá un aspecto que favorece esta disposición en los docentes es el factor edad, pues según se verificó, el promedio de edad de los profesores es de 37 años (un 67% del grupo docente tiene menos de 40 años de edad). Este aspecto puede incidir favorablemente en que exista interés por capacitaciones en áreas ligadas al uso de TICs.

Otro aspecto a subrayar es que el Programa de Enseñanza de la Matemática de la UNED incorpora en todos sus cursos de matemática el apoyo mediante la Plataforma de Aprendizaje Moodle. A través de este entorno de aprendizaje se pone a disposición de los estudiantes y profesores una serie de recursos como videos, textos, paquetes computacionales, entre otros como apoyo para los cursos.

De esta manera el entorno Moodle se convierte en un espacio de interacción e intercambio propicio para que estudiantes y profesores tengan la posibilidad de acceder y utilizar Recursos Educativos Abiertos como apoyo en la gestión de los cursos. Por este motivo, se vuelve de gran importancia el que los docentes posean habilidades para "manejarse" dentro de este entorno virtual.

Los resultados muestran que un alto porcentaje de los profesores son capaces de realizar las tareas más frecuentes en el entorno de aprendizaje como acceder y navegar en el mismo, subir archivos y activar recursos así como gestionar tareas, foros y cuestionarios. Se evidencia una necesidad en los profesores de ser capacitados en el uso de glosarios, lecciones, paquetes de contenido SCORM, así como en el uso de wikis. Potenciar el uso de esta última herramienta, contribuiría además a que el profesor plantee estrategias de aprendizaje en ambientes colaborativos, aspecto del nivel de apropiación de utilización en que se detectó una necesidad de mejorar.

Se reitera que los REA contribuyen a la construcción del aprendizaje, especialmente al desarrollo de capacidades individuales y sociales que le permitan a las personas comprender y actuar. Sin embargo, para que los REA puedan transformar y mejorar el aprendizaje de los estudiantes, éstos deben de ser adaptados por sus docentes acorde al contexto cultural, social y económico de la práctica educativa en cuestión.

Conclusiones

Los objetivos de esta investigación fueron alcanzados. En primer lugar, fue posible adaptar el modelo de apropiación de TICs de Montes y Ochoa (2006) a las necesidades de esta investigación, y con ello realizar la recopilación y análisis de la información necesaria para el presente estudio.

Los resultados permitieron determinar que un 71.43% de los profesores participantes alcanzan el nivel de apropiación tecnológica denominado conocimiento; estos docentes presentan rasgos distintivos de dicho nivel como el conocer las características de los Recursos Educativos Abiertos, identificar algunos REA que podrían incorporar en su labor docente y ser conscientes de la importancia que tienen los REA en la educación a distancia, específicamente en la construcción de conocimiento matemático.

Asimismo, el análisis detectó que el 57.14% de los profesores participantes del estudio recurren a los REA para introducir un tema, para realizar representaciones apoyadas por gráficos, videos, simulaciones o animaciones. Además de compartir sus experiencias sobre el uso de REA con los colegas del área, y colaborar en el desarrollo de cursos apoyados por estos recursos.

Dentro de los principales hallazgos de esta investigación se destaca en el hecho de que un porcentaje mayor al 50% de los docentes involucrados alcanzan el nivel de apropiación tecnológica de utilización de acuerdo con el modelo de Montes y Ochoa (2006). Conjuntamente a esto, se subraya también que más de un 50% de los docentes alcanzan el nivel de transformación.

Por otra parte se cumplió con otro de los objetivos del estudio, pues fue posible determinar cuáles son las necesidades de capacitación de los docentes en relación con la utilización de Recursos Educativos Abiertos, esto considerando aquellos recursos comúnmente usados en los cursos del Programa de Enseñanza de la Matemática y que a juicio de los encargados de Cátedra y Programa, se requiere que los profesores sean aptos de utilizarlos.

En primer lugar, se muestra la existencia de una debilidad en el uso de asistentes para probabilidad y estadística así como de cálculo simbólico y numérico, por lo que se podría plantear estrategias que permitan al docente indagar y explorar recursos de este tipo que pueda utilizar posteriormente en su función docente. No obstante los resultados muestran que los docentes están bastante familiarizados con el uso de Recursos educativos abiertos para la construcción de gráficas y de apoyo en construcciones geométricas, así como para la creación de contenidos educativos.

Conjuntamente, considerando el hecho de que el entorno Moodle es un espacio mediante el cual los docentes y estudiantes de la carrera tienen la posibilidad de acceder y utilizar Recursos Educativos Abiertos como apoyo en la gestión de los cursos, el estudio permitió determinar que un alto porcentaje de los profesores son capaces de realizar las tareas más frecuentes en el entorno de aprendizaje (acceder y navegar en el mismo, subir archivos y activar recursos así como gestionar tareas, foros y cuestionarios).

Sin embargo se evidenció una necesidad de capacitación en el uso de glosarios, lecciones, paquetes de contenido SCORM, así como en el uso de wikis. Se reitera que el potenciar el uso de esta última herramienta, apoyaría la implementación de estrategias de aprendizaje en ambientes colaborativos, un aspecto del nivel de apropiación de utilización en que se mostró una necesidad de mejorar.

Una limitación del estudio fue que 4 docentes del personal académico no colaboraron respondiendo el instrumento. No obstante, el número de participantes alcanzó el 84% de la población (21 profesores en total) una cantidad bastante significativa con la cual dadas las características del estudio, fue posible realizar una descripción de la población participante, determinar su nivel de apropiación tecnológica con respecto al uso de REA así como sus necesidades de capacitación en relación con la utilización de estos recursos, y de esta manera generalizar los resultados obtenidos a la población en estudio.

Recomendaciones

Tomando en cuenta las conclusiones obtenidas producto de esta investigación, se exponen las siguientes recomendaciones:

- Se hace pertinente que el Programa de Enseñanza de la Matemática realice acciones continuas y permanentes de capacitación mediante las cuales se brinden espacios a los docentes para indagar y explorar recursos educativos abiertos que permitan mejorar su práctica docente. Dentro de estos recursos se establecen como prioridad asistentes para probabilidad y estadística así como de cálculo simbólico y numérico (por ejemplo

WinStats, Máxima, Hojas de cálculo, entre otras), puesto que se detectó una debilidad en cuanto a su uso.

- Se debe aprovechar la anuencia y apertura que manifiestan los docentes en recibir capacitación en el uso de medios tecnológicos para la enseñanza de la matemática. Con esto se podrían regenerar espacios de capacitación y formación que converjan a aumentar el nivel de apropiación tecnológica en el profesorado.
- Con el fin de que el profesor plantee estrategias de aprendizaje en ambientes colaborativos, se recomienda el capacitar en el uso de herramientas como wikis, portafolios electrónicos así como en paquetes de contenido SCORM. Asimismo, se recomienda el continuar capacitando a los docentes en el uso de las diferentes herramientas y la realización de tareas de gestión de cursos del entorno de aprendizaje Moodle. Esto ya que el apoyo mediante la Plataforma de Aprendizaje Moodle es un punto importante en los cursos ofrecidos por el Programa de Enseñanza de la Matemática, y dicho entorno virtual se convierte en un espacio de interacción e intercambio propicio para que estudiantes y profesores tengan la posibilidad de acceder y utilizar Recurso Educativos Abiertos como apoyo en la gestión de los cursos.

Cabe destacar que cada vez son más los estudiantes que desarrollan habilidades y conocimientos tecnológicos que les permiten apropiarse con relativa facilidad de recursos para su aprendizaje. En este sentido, se coincide con Celaya et al (2010) en cuanto hoy por hoy es necesario que los docentes desarrollen las habilidades requeridas para desempeñar de mejor manera su función en las condiciones actuales del contexto educativo. Por tales razones, de los resultados de este estudio pueden surgir nuevas preguntas de investigación, que deriven en el planteamiento de estrategias que permitan potenciar el uso de los REA para la mejora de los procesos de aprendizaje y contribuir a mejorar la calidad de la práctica docente.

Referencias y bibliografía

Atenas-Rivera, J., Rojas-Sateler, F., Pérez-Montoro, M. (2012). Repositorios de Recursos Educativos Abiertos. (Spanish). *El Profesional De La Información*, *21*(2), 190-193. doi:10.3145/epi.2012.mar.10

Bonilla, M., García, F. de J. y González, L. (2010). Incorporación de recursos educativos abiertos como medio para promover el aprendizaje significativo a nivel universitario: un estudio de casos en Ramírez Montoya, M. S. y Burgos Aguilar, J. V. (Eds.) Recursos Educativos Abiertos en ambientes enriquecidos con tecnología Innovación en la práctica educativa (pp. 28-50). México: Tecnológico de Monterrey.

Burgos, J. (2010). Aprovechamiento de Recursos Educativos Abiertos (REA) en ambientes enriquecidos con tecnología en Ramírez Montoya, M. S. y Burgos Aguilar, J. V. (Eds.) Recursos Educativos Abiertos en ambientes enriquecidos con tecnología Innovación en la práctica educativa (pp.5-28). México: Tecnológico de Monterrey.

Celaya, R.; Lozano, F.; Ramírez, M. (2009). Apropiación Tecnológica en los profesores que incorporan Recursos Educativos Abiertos (REA) en educación media superior. *Revista Mexicana De Investigación Educativa*, *15*(45), 487-513.

Cobo, C. (2007, diciembre*). Aprendizaje Adaptable y Apropiación Tecnológica: Reflexiones prospectivas*. Trabajo presentado en 3° Encuentro de Auto-estudio de las universidades Públicas Mexicanas, México D.F., México.

Colás, P., Jiménez, R. (2008). Evaluación del impacto de la formación (online) en TIC en el profesorado. Una perspectiva sociocultural. *Educación*. 187-215. Recuperado de http://www.revistaeducacion.mec.es/re346/re346_07.pdf

Contreras, R. (2010). Recursos educativos abiertos: una iniciativa con barreras aún por superar. *Apertura. 10*(13), 86-97. Recuperado de http://ehis.ebscohost.com/ehost/detail?vid=4&sid=8720a144-72b9-498b-ab69-d52e979c9cc7%40sessionmgr198&hid=116&bdata=Jmxhbmc9ZXMmc2l0ZT1laG9zdC1saXZl#db=ehh&AN=59573583

Hernández, R., Fernández, C., Baptista, P. (1998). Metodología de la Investigación. (2ª ed.) México: McGraw-Hill.

Montes, J., Ochoa, S. (2006). Apropiación de las tecnologías de la información y la comunicación en cursos universitarios. Acta Colombiana de Psicología 9(2), 87-100.

Orozco, M., Ochoa, S., y Sánchez, H. (2002). Prácticas culturales para la Educación de la Niñez. Itinerario para recuperar y Significar Prácticas Culturales desde la Perspectiva del Desarrollo. Cali, Colombia: fundación Antonio Restrepo Barco. Centro de Investigaciones y Estudios avanzados en Psicología, cognición y Cultura, Universidad del Valle.

Rodríguez, C.; Saldaña, B. (2010). Estrategias de enseñanza que favorecen el razonamiento lógico matemático en los alumnos de primaria mediante la implementación de REA. En Ramírez Montoya, M. S. y Burgos Aguilar, J. V. (Eds.) *Recursos Educativos Abiertos en ambientes enriquecidos con tecnología Innovación en la práctica educativa*, pp.85-97. México: Tecnológico de Monterrey.

Salado, L. (2011). Contribución de los recursos educativos abiertos al aprendizaje significativo de las tecnologías de información y comunicación en el estudiante universitario. *Revista Internacional Administración & Finanzas (RIAF)*, *4*(1), 101-114. Recuperado de http://ehis.ebscohost.com/ehost/detail?vid=3&sid=7cb8ee49-fc55-4427-b05a-d1e12455cbd4%40sessionmgr110&hid=109&bdata=Jmxhbmc9ZXMmc2l0ZT1laG9zdC1saXZl#db=bth&AN=54846658

Santos-Hermosa, G., Ferran-Ferrer, N., Abadal, E. (2012). Recursos Educativos Abiertos: repositorios y uso. (Spanish). *El Profesional De La Información*, *21*(2), 136-145. doi:10.3145/epi.2012.mar.03

UNESCO. (2011). A basic guide to Open Educational Resources (OER), Vancouver: Commonwealth of Learning. ISBN: 9781894975414. Recuperado de http://oer.unescochair-ou.nl/?wpfb_dl=29

UNESCO. (2012).Congreso Mundial sobre los Recursos Educativos Abiertos. Declaración de París de 2012 sobre los REA. Recuperado de http://www.unesco.org/new/fileadmin/MULTIMEDIA/HQ/CI/CI/pdf/Events/Spanish_Paris_OER_Declaration.pdf

Valenzuela, J.R. Flores, M. (2012). Fundamentos de Investigación Educativa, Volumen 2. Editorial Digital Tecnológico de Monterrey. México.

O (não) uso das tecnologias para o ensino de Matemática nas "boas" escolas: uma análise a partir da cultura da performatividade

Vanessa Franco **Neto**
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Brasil
vanessa.neto@ufms.br
Marcio Antonio da **Silva**
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
Brasil
marcio.silva@ufms.br

Resumo

Este artigo apresenta alguns resultados de uma pesquisa realizada em uma escola que obteve um ótimo desempenho no Exame Nacional do Ensino Médio, em 2010. Os principais objetivos foram investigar e analisar quais *competências profissionais* de professores de matemática do ensino médio são valorizadas por essa instituição e qual a influência da *cultura da performatividade* no trabalho desses docentes. Para isso, a coordenadora, a supervisora e os quatro professores do ensino médio da instituição investigada foram entrevistados. Analisou-se especificamente a competência *Utilizar Novas Tecnologias*. Intencionava-se compreender como instrumentos tecnológicos eram utilizados em prol do ensino de matemática na instituição. Entretanto, constatou-se que tais usos ou as reflexões sobre tais usos, não são estimuladas pela esquipe gestora. Isso porque esse incentivo vai de encontro aos objetivos da escola, qual seja: a melhoria do desempenho dos alunos em avaliações externas, promovendo a cristalização da *cultura da performatividade*.

Palavras chave: educação matemática, cultura da performatividade, competências profissionais, tecnologias, ensino médio.

Elementos norteadores

O presente artigo é um recorte da dissertação defendida pela primeira autora, sob orientação do segundo autor (Neto, 2011).

Nossa pesquisa investigou quais as competências profissionais – esse termo analisado sob a perspectiva do sociólogo Philippe Perrenoud – eram valorizadas nos professores de Matemática do Ensino Médio pelos gestores de uma escola que obteve um resultado expressivo (ficou entre as dez primeiras colocadas no *ranking* nacional) no Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM-2010). Esse resultado fez com que a escola fosse classificada como "boa" ou "de excelência" pela sociedade e pelo próprio governo federal. Ao longo da pesquisa, constatamos que as competências descritas por Perrenoud foram subvertidas pelas gestoras e pelos professores de Matemática em prol do alcance de ótimos resultados em avaliações em larga escala.

Perrenoud (2000) elencou dez competências que considera essenciais para o exercício da profissão docente, entre elas está o uso de tecnologias.

Além de buscar essas competências nos discursos dos professores, visto que as Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores baseiam-se explicitamente na obra de Perrenoud, procuramos compreender como essas eram interpretadas pelos docentes. Para isso utilizamos o conceito de Cultura da Performatividade do sociólogo Stephen Ball.

Dessa forma, em nossa investigação entrevistamos os quatro professores do Ensino Médio da escola "de excelência", e também duas gestoras da mesma. Nossa pesquisa partiu do pressuposto de que as dez competências profissionais, elencadas por Perrenoud, seriam valorizadas pelos gestores dessa instituição de ensino. Especificamente sobre a competência do uso da tecnologia, vertente que será aqui tratada, questionamos aos sujeitos quais os tipos de tecnologias eram inseridos no ensino, especificamente de Matemática, para que tais resultados tivessem sido obtidos. Todavia, antes de passarmos à exposição dos dados e das análises, é preciso delimitarmos e aprofundarmos nossos aportes teóricos para tais análises.

As novas tecnologias na educação básica

Muitas pesquisas em Educação e, mais especificamente em Educação Matemática, apontam para os avanços e benefícios que o uso das novas tecnologias como *softwares*, mídias sociais, além das calculadoras, entre outros instrumentos, trariam para o processo de ensino e, principalmente, de aprendizagem de conteúdos matemáticos.

De acordo com Purificação (2010), "[...] a escola deverá, portanto, estar atenta às novas formas de aprender, propiciadas pelas tecnologias da informação e comunicação, e criar novas formas de ensinar, para não se tornar obsoleta" (p. 33). Portanto, é preciso que a escola e, consequentemente, o professor, caminhem em direção às inovações e às potencialidades dos usos desses instrumentos, a fim de que o ensino acompanhe a variedade de ferramentas auxiliares aos processos de aprendizagem existentes atualmente.

Na matemática, essa variedade de usos e estratégias que se pode desenvolver com o uso de *softwares* para o ensino dos conteúdos dessa disciplina é inegável. Bittar (2010) discorre sobre as potencialidades e as restrições relacionadas aos usos de vários *softwares*, todavia a autora ressalva que, por mais promissor que seja o instrumento, se o professor não procurar usá-lo de maneira estimulante e instigante para o aluno, se os objetivos de ensino não estiverem pontuados à construção desses e não à transmissão, de nada adianta ter acesso aos mais sofisticados instrumentos, a aula permanece instrutiva.

O professor Silvio Fiscarelli[1], numa pesquisa com abordagem quantitativa, constatou que o uso de tecnologia melhorou em 32% o rendimento de matemática e física numa escola pública do interior do estado de São Paulo. E mais: os alunos que, em geral, apresentavam baixo rendimento nas avaliações foram os que mais "progrediram" com a inserção dos novos instrumentos para o ensino. Poderíamos aqui problematizar os procedimentos e os resultados dessa investigação, todavia, não sendo o foco do nosso artigo analisar esses instrumentos, nos restringimos ao tratamento do uso de tecnologias em sala de aula como um elemento potencial para que o ensino esteja sintonizado com a geração mais conectada da história. Além do senso

[1] Fonte: site UOL. Último acesso em 23 de jun de 2014. http://educacao.uol.com.br/noticias/2013/02/04/uso-de-tecnologia-no-ensino-melhora-em-32-rendimento-em-matematica-e-fisica-aponta-estudo.htm

comum, a instauração de políticas públicas[2] que incentivam o uso de tecnologias em sala de aula valida e ratifica tal compreensão.

A utilização de novas tecnologias é citada como umas das competências mais atuais, das consideradas por Perrenoud (2000) para profissionais em educação. No entanto, o autor questiona a viabilidade de implantação dessa nova obrigatoriedade – a utilização de tecnologias como instrumentos de ensino – além das ferramentas já institucionalizadas pela escola e que, mesmo assim, ainda estão à mercê da efetividade de suas atribuições. Desse modo, o autor questiona sobre outro problema que pode emergir: qual tecnologia poderia ser incorporada ao ensino? Sendo impossível dar uma resposta pontual ao problema, ele conclui que a competência requerida nessa situação seria a do professor julgar se há relevância ou não na utilização de instrumentos relativos à informática, mais até do que efetivamente ter em mãos uma ampla gama de *softwares* e outros instrumentos, coadunando com a posição anteriormente citada de Bittar (2010).

Portanto, a compreensão por nós elaborada é a de uso potencial e não imposicional desses instrumentos.

No entanto, no contexto de escolas que visam conquistar resultados de excelência em avaliações externas, emerge uma cultura muito peculiar, a da perfomatividade (Ball, 2005), teoria que nos auxiliou para a construção de um modelo analítico que levasse em conta a especificidade da instituição investigada.

A Cultura da Performatividade

O grande expoente do termo Cultura da Performatividade, é o sociólogo inglês Stephen Ball. O pesquisador define o termo como:

> [...] uma tecnologia, uma cultura e um método de regulamentação que emprega julgamentos, comparações e demonstrações como meios de controle, atrito e mudança [...] A performatividade é alcançada mediante a construção e publicação de informação e de indicadores, além de outras realizações e materiais institucionais de caráter promocional, como mecanismo para estimular, julgar e comparar profissionais em termos de resultados: a tendência para nomear, diferenciar e classificar (p. 543-544).

Em contextos escolares, Ball esclarece que o foco está no desempenho individual dos sujeitos e o objetivo é sempre o destaque e a ascensão de resultados explicitáveis à sociedade. O ensino adquire contornos meritocráticos, incentivando a competição entre os alunos.

Desse modo, a cultura da performatividade aponta para presença da competição em meio a ambientes educacionais. Nessa perspectiva, o ensino e a aprendizagem objetivam principalmente a mensuração dos resultados, por intermédio da ampla divulgação de *rankings* de desempenho de alunos, professores e escolas. O uso de metodologias só é legitimado pela instituição de ensino se existirem garantias da eficiência do mesmo para a obtenção de bons resultados dos estudantes nos exames externos.

Como a escola tratada em nossa pesquisa se destacou nacionalmente na avaliação do ENEM, nosso intuito foi verificar o quanto a cultura da performatividade, ou seja, o

[2] Como exemplo podemos citar o projeto Um Computador por Aluno (UCA). Disponível em <http://www.uca.gov.br/institucional/>. O Tablet Educacional, disponível em http://www.fnde.gov.br/tableteducacional/inicio. Entre outros.

direcionamento das ações para a obtenção de resultados explicitáveis, norteava os empenhos de gestoras e professores de matemática do ensino médio. Esse conceito nos serviu para que pudéssemos compreender os objetivos de ensino nessa instituição que recebe, socialmente, a condição de excelência.

No contexto da performatividade, "o conhecimento passa a ser encarado socialmente como expressão do resultado dos exames, uma identificação não apenas construída pelos elaboradores desses exames, mas pelos que analisam seus resultados e seus efeitos sociais" (Lopes & Lopez, 2010). Assim, o conhecimento dos alunos é validado mediante a posição da instituição de ensino em *rankings* amplamente divulgados.

É a partir desses apontamentos que pretendemos analisar os dados que temos construído ao longo da investigação.

A "boa" escola

A instituição de ensino na qual trabalham os quatro professores de matemática do ensino médio e duas gestoras que participaram da nossa pesquisa, é por nós classificada como "boa" devido a alguns fatores que não necessariamente remetem à opinião dos autores deste artigo, tal como pretendemos esclarecer.

Essa instituição privada de ensino oferece o 9º ano do ensino fundamental e o ensino médio. Está localizada na cidade de Campo Grande, capital do Mato Grosso do Sul, e tem uma das mais altas mensalidades do estado.

Como dissemos, tal classificação é justificada pela obtenção da colocação no *ranking* do ENEM de 2010. A unidade escolar ficou entre as dez melhores classificadas a nível nacional. Tal fato conferiu, social e comercialmente, à escola o *status* de excelência. Todavia, é importante ressaltar que esse ranqueamento não é elaborado pelo Ministério da Educação, o órgão apenas divulga os resultados das escolas e a mídia promove a classificação das mesmas e a ampla divulgação dos resultados.

Dez Novas Competências para Ensinar: utilizar novas tecnologias.

Philippe Perrenoud é um dos maiores expoentes internacionais quando o assunto são competências profissionais docentes. A importância para a educação básica no Brasil desse conceito e do referido autor, pode ser compreendida pela manifestação durante uma entrevista no programa Roda Viva da professora Guiomar Nano de Mello no ano de 2001, membro do Conselho Nacional de Educação e uma das responsáveis pela elaboração das Diretrizes Curriculares Nacionais para a Formação de Professores[3] que afirmou na presença de Perrenoud, que o documento oficial foi elaborado com base no conceito de competências profissionais de acordo com as ideias do autor.

Perrenoud (2000) elenca dez competências necessárias para a atuação docente no início do século XXI, ou seja, as que classificava como prioritárias na formação de professores daquela época: (i) organizar e dirigir situações de aprendizagem; (ii) administrar a progressão das aprendizagens; (iii) conceber e fazer evoluir os dispositivos de diferenciação; (iv) envolver os alunos em suas aprendizagens e em seu trabalho; (v) trabalhar em equipe; (vi) participar da administração da escola; (vii) informar e envolver os pais; (viii) utilizar novas tecnologias; (ix)

[3] RESOLUÇÃO CNE/CP Nº 1, de 18 de Fevereiro de 2002

enfrentar os deveres e os dilemas éticos da profissão; (x) administrar sua própria formação continuada.

O autor define *competências* como a:

> [...] aptidão para enfrentar uma família de situações análogas, mobilizando de uma forma correta, rápida, pertinente e criativa, múltiplos recursos cognitivos: saberes, capacidades, microcompetências, informações, valores atitudes, esquemas de percepção, de avaliação e de raciocínio (Perrenoud, 2002, p.19).

Ou seja, o profissional que pretende dedicar-se à função docente no século XXI, necessita compreender e executar esses elementos na sua atuação para, segundo Perrenoud, garantir o sucesso do processo de ensino e aprendizagem do aluno e, portanto, o pleno cumprimento de suas atividades profissionais.

Entre essas dez, vamos nos ater à família de competências (viii), qual seja, utilizar novas tecnologias.

Como a obra apresenta-se como um manual para o novo século, o autor chama a atenção para a inegável presença da tecnologia no cotidiano dos alunos e, para tanto, a constante chamada dos professores para adaptarem essa realidade aos instrumentos e meios para o ensino de seus conteúdos. O próprio Perrenoud atribui ao uso das Tecnologias da Informação (TICs) o caráter de instrumentos potenciais no processo de ensino-aprendizagem. Segundo ele:

> As novas tecnologias podem reforçar a contribuição dos trabalhos pedagógicos e didáticos contemporâneos, pois permitem que sejam criadas situações de aprendizagem ricas, complexas, diversificadas, por meio de uma divisão de trabalho que não satisfaz mais com que todo o investimento repouse sobre o professor, uma vez que tanto a informação quanto a dimensão interativa são assumidas pelos produtores de instrumentos. (Perrenoud, 2000, p. 139)

Atualmente, a educação básica tem recebido vários incentivos, tal como já enunciado o UCA, a inserção de salas de informática na grande maioria das instituições públicas. A utilização de ferramentas tecnológicas para comunicar-se a distância com os alunos, explorar as potencialidades dos *softwares*, são itens elencados pelo autor para tomar esses instrumentos como benéficos para o ensino e para a aprendizagem. Além desses, mais especificamente em Matemática, podemos elencar o uso de calculadoras como instrumento potencial na compreensão de relação, conceitos e raciocínios matemáticos. Os próprios Parâmetros Curriculares Nacionais orientam a utilização da calculadora em sala de aula a fim de instrumentalizar o aluno e, mais além, existem potencialidades matemáticas a serem exploradas, várias relações dessa ciência podem ser ilustradas por meio do uso dessas "maquininhas". Ponte (1989) já manifestava-se acerca das potencialidades de seu uso.

O que mais preconiza Perrenoud, ao discutir o tema, é sobre a capacidade do professor de reconhecer os momentos oportunos dessas inserções e quando tais usos são apenas floreios desnecessários. O autor afirma que "os professores que sabem o que as novidades tecnológicas aportam, bem como seus perigos e limites, podem decidir, com conhecimento de causa, dar-lhes um amplo espaço em sua sala, ou utilizá-las de modo bastante marginal" (Perrenoud, 2000, p. 138). Para tanto, a tomada de decisão, e principalmente o reconhecimento dos benefícios, potencialidades, demandas e efetividade desses usos é que constitui para o autor a competência profissional requerida no exercício da profissão docente.

A pesquisa: metodologia e sujeitos

A nossa pesquisa de cunho qualitativo, foi caracterizada como um estudo de caso, pelos argumentos já expostos anteriormente que fizeram com que escolhêssemos uma escola "de excelência".

A pesquisadora fez várias visitas à unidade escolar, onde todos os participantes da pesquisa concederam entrevistas. O diário de campo foi utilizado para que, durante as visitas, a autora pudesse anotar suas impressões sobre o ambiente escolar.

O quadro a seguir apresenta, suscintamente, as funções de cada um dos seis sujeitos de nossa pesquisa na escola em questão.

Quadro 1
Resumo das informações sobre os participantes da pesquisa analisados

Cargo ocupado na escola	Gênero	Identificação na pesquisa	Tempo de experiência de magistério, coordenação e/ou supervisão	Formação Acadêmica
Supervisora	Feminino	S	25 anos, sendo 23 anos na escola pesquisada. Desses 23 anos, 2 como supervisora.	Licenciatura e Mestrado em Geografia
Coordenadora Pedagógica	Feminino	C	19 anos, sendo 7 anos na escola pesquisada. Desses 7 anos, 2 como coordenadora.	Licenciatura em Educação Artística. Especialização em Psicopedagogia
Professor de Matemática	Masculino	MC	12 anos, sendo 1 anos na escola pesquisada.	Licenciatura em Matemática.
Professor de Matemática	Masculino	VA	13 anos, sendo 4 na escola pesquisada.	Licenciatura e Bacharelado em Matemática Aplicada e Computacional.
Professor de Matemática	Masculino	SA	4 anos e meio na escola pesquisada[4].	Licenciatura e Bacharelado em Matemática Aplicada e Computacional.
Professora de Matemática	Feminino	MO	16 anos, sendo 14 anos na escola pesquisada.	Licenciatura em Ciências com Habilitação em Matemática. Pós-Graduação em Tecnologia.

Fonte: dados da pesquisa. 2011.

O objetivo inicial era realizar duas entrevistas com cada participante. Como as entrevistas foram semiestruturadas, algumas delas suscitaram novos encontros para o esclarecimento e o aprofundamento de assuntos levantados.

Ao todo, foram quatorze entrevistas, cada uma com duração média de quarenta minutos, todas feitas nas dependências da própria escola analisada.

Todas as entrevistas foram transcritas para que fosse iniciado o processo de análise. Vamos nos ater aos dados obtidos com os questionamentos, ou posicionamentos espontâneos dos

[4] O professor SA começou a trabalhar nessa escola quando ainda não havia concluído seu curso de licenciatura.

sujeitos acerca do uso das tecnologias como um dos elementos que proporcionou o resultado obtido pela escola.

Análise da competência profissional do uso das tecnologias

Ao iniciarmos o processo de investigação e elaborarmos o roteiro de entrevistas para a construção de nossa dissertação de mestrado, pretendíamos verificar como as dez competências profissionais elencadas por Perrenoud (2000) eram utilizadas e valorizadas por nossos seis sujeitos. No entanto, algumas categorias emergiram da análise das entrevistas, sendo essas não previamente por nós relacionadas, quais sejam: (i) administrar o tempo; (ii) relacionar-se bem com os alunos; (iii) manter-se atualizado quanto às avaliações; (iv) utilizar bem o material didático, e são discutidas em Neto (2011).

Quanto à competência específica a que nos propusemos analisar nesse artigo, as perguntas dirigidas aos participantes sempre apresentavam questionamentos em relação a quais e como os instrumentos tecnológicos eram utilizados e/ou permitidos, com o intuito de proporcionar ou viabilizar a aprendizagem dos alunos na disciplina de Matemática.

Sobre os códigos utilizados no início de cada transcrição, a letra "P" refere-se à transcrição da fala da pesquisadora e as outras iniciais referem-se aos sujeitos apresentados no Quadro 1. Os pontos mais importantes foram por nós grifados.

Em geral, o que se observou foi o repúdio à utilização das novas tecnologias ou quaisquer outros instrumentos nas aulas de matemática por parte dos alunos sob o argumento de que esses poderiam prejudicar o processo de ensino e aprendizagem dos estudantes, principalmente para que esses se constituíssem aptos a realizarem as avaliações externas.

Das análises feitas a partir dos apontamentos dos participantes sobre a competência *utilizar novas tecnologias*, elencada por Perrenoud (2000), construímos três categorias para sistematizar nosso estudo, a partir do posicionamento dos entrevistados acerca das potencialidades do uso das novas tecnologias no ensino de conteúdos de matemática: (i) avaliações externas, (ii) perda de tempo e (iii) espaço de divulgação de listas de exercícios.

Avaliações externas

Nesse ponto da investigação, solicitamos às gestoras que avaliassem o potencial do uso de alguns instrumentos tecnológicos, tais como calculadoras e/ou *softwares* no processo de ensino e de aprendizagem de conteúdos de matemática. Os apontamentos delas foram:

> C: A gente não coloca (Software e/ou calculadora) muito ainda a disposição não, <u>até porque os vestibulares não deixam usar, não é?</u> Então a gente trabalha mais com a linha tradicional, do aluno fazer ele pensar.

Ou seja, ao ser questionada, a Coordenadora (C) adota o posicionamento de não disponibilizar esses instrumentos para que estes não comprometam o processo de treinamento dos alunos para o sucesso em avaliações externas, tais como o ENEM. Um movimento semelhante pode ser observado na fala da Supervisora (S), exposta a seguir:

> P: Mais uma questão S, vocês incentivam a utilização de calculadoras, no caso de professores de matemática?
>
> S: Não! Talvez química...Não!
>
> P: Não?

S: Não!

P: De maneira nenhuma?

S: Não, nós entendemos o seguinte, que o aluno, a gente até conhece a proposta metodológica moderna e nós entendemos as novas propostas metodológicas, eu até estava lendo a nova escola agora, é a posição dos professores de algumas escolas. E até alguns vestibulares apregoam, utiliza, autoriza o uso e deixa usar. A postura do colégio não é essa, porque nós entendemos que se o aluno tiver o raciocínio desenvolvido, eles fazem qualquer vestibular. Para desenvolver a calculadora, eu preciso de alguém sem calculadora para produzir o objeto. E eu formo este aluno. Ele tem que ser capaz de raciocinar, de operacionalizar e de dominar todos os processos, matemáticos, físicos, químicos, sem calculadora. Se ele precisar de calculadora ele vai usar fora daqui, mas na escola não. (...) então a escola tem como proposta o não uso em nenhum segmento, e nem nos simulados, apesar de sabermos que alguns vestibulares que eles fazem utilizam. Agora, se o meu aluno fizer a conta, se fizer o problema sem calculadora, e acertar, ele vai no vestibular e com calculadora ele vai acertar, eu vou ter essa garantia. Por que nós entendemos que essa calculadora é apenas um instrumento, tá. E eu preciso dar os passos para que esse aluno, sem esse instrumento seja capaz de sobreviver dentro de um contexto.

Nesse trecho, é notável, apesar do conhecimento de estudos na área de educação que valorizam o uso de tecnologia para o ensino, a compreensão da Supervisora (S) de que a calculadora, por exemplo, só tem o papel de promover a efetuação rápida e facilitação de cálculos matemáticos. Tal posicionamento é refutado por diversos autores, entre eles podemos destacar Bittar (2010) que atribui a esse instrumento a possibilidade do desenvolvimento do pensamento matemático, além da "facilitação" do uso algorítmico, oportunizando a construção de experimentações e conjecturas por parte do aluno. Movimento que parece não adquirir sentido no contexto da instituição analisada.

Analogamente, o professor MC, interpreta esse uso:

MC: De tecnologia? De tecnologia eu não uso não. Não uso calculadora. (...)Assim, falando especificamente de tecnologia, não uso. Nem calculadora.

P: Não permite?

MC: Não, não é que eu não permita. É que como nós trabalhamos com o terceiro ano e cursinho, e a ideia é preparar o cara para o vestibular, e no ENEM também não pode usar calculadora, eu não, não ... não é que eu não permito ... é ... não permito mesmo, não é? Para não atrapalhar, não é?

A partir desses excertos, analisamos que as atribuições da tecnologia, especificamente ao uso de calculadoras, só eram compreendidas pelas gestoras e pelo professor como um atalho no processo de ensino, que prejudicaria os alunos a desenvolverem conhecimentos e habilidades - aprendizagem na perspectiva por eles apresentada - indispensáveis à formação básica desse jovem.

Arraigado a esse posicionamento, está a interpretação que fazemos da cultura da performatividade. Os resultados buscados com o treinamento desses alunos objetivam principalmente a boa classificação da escola em *rankings* de avaliações em larga escala. Ou seja, os objetivos de ensino se desviam do potencial de desenvolvimento do conhecimento matemático, ignoram a viabilidade de novas estratégias para a atuação docente, tudo em prol dos resultados que podem, e necessitam, ser mensurados, explicitados e julgados, para tanto, Ball (2005, p. 548) afirma que, "em essência, a perfomatividade é uma luta pela visibilidade". Desse

modo, uma ação que não conduza a essa visibilidade está prontamente descartada, isso porque "a aprendizagem é reapresentada como resultado de uma política de custo-benefício" (p. 546).

Em outras palavras, essa ação é uma perda de tempo, o que nos conduz à próxima categoria.

A perda de tempo

Em relação ao uso do laboratório de informática, a pesquisadora faz questionamentos aos entrevistados, os posicionamentos foram:

> SA: É, tem o laboratório, mas eu, eu sinceramente nunca usei. Na verdade eu levo eles no data show, e aí a gente, por exemplo, tem algum programa, alguma coisa, eu uso, para eles poderem ver não é. (...) É importante (utilizar as novas tecnologias), mas não é o principal. Tem que ser alguma coisa do tipo, é (...) é, esporádico. Até porque eu não posso, porque querendo ou não, se eu levar eles lá. Por exemplo, em uma aula de história, não é depreciando, mas é uma coisa onde você mostra imagens, é uma coisa onde você consegue fazer uma imagem da África por exemplo, e em cima daquela imagem dar a sua aula inteira. Não é uma coisa assim. Então o tempo que eu desloco para subir, para ligar computador, para tal e para descer, eu podia estar resolvendo exercício, entendeu? (...) Por que, por mais exercício você fizer é melhor, não é? Mais treino, eu sempre penso nisso. (...) Ou, às vezes até para relaxar, entendeu? (...) Então querendo ou não, esta distraindo mas está formando. (...)

Nesse excerto, o professor destaca quantos exercícios deixaria de fazer devido ao deslocamento dos alunos, visto que uma das funções atribuídas por ele à sala de informática, é a recreativa, ou seja, não conduz à aprendizagem e nem à construção de conhecimentos que vão ao encontro dos seus objetivos de ensino: o alcance de bons resultados em avaliações externas. E, na sequência, de modo aparentemente antagônico, mas que na verdade só reforça as evidenciações anteriores, o professor explicita:

> SA: Eu uso (calculadora), assim, na hora que está corrigindo tarefa. Eles perguntam: "pode usar a calculadora?", eu digo: "pode, sem problemas". Até porque eu preciso de velocidade. Eu não vou ficar fazendo continha de multiplicação no ensino médio não é. Agora em prova eu não admito. Em sala de aula normal, para ir mais rápido, para conseguir fazer mais, vamos dizer assim.

Utilizamos o termo antagônico, pois no primeiro excerto a ida à sala de informática era *perda de tempo* e no segundo o uso da calculadora aparecia como *otimização desse tempo*. No entanto, esse termo resume a situação superficialmente, porque na verdade elas são complementares. Em ambas as situações não há o reconhecimento do potencial das novas tecnologias, quais sejam, como o próprio Perrenoud (2000, p. 139) enuncia, a possibilidade de criação de "situações ricas, complexas, diversificadas, por meio de uma divisão de trabalho que não faz mais com que todo o investimento repouse sobre o professor (...)", entre tantas outras que poderíamos citar. A possibilidade do aluno assumir-se como protagonista da construção de seu conhecimento, mediado pelo uso de algum instrumento tecnológico não tem espaço nessa configuração. Novamente, deixando a marca da performatividade, porque como mensurar e explicitar essa construção, caso ela aconteça? Como disponibilizar ao aluno o tempo necessário a essa construção se ele deveria estar treinando para atingir sua meta, a meta da escola? Ball (2005, p. 543) evidencia que "a eficácia só existe quando é medida e demonstrada, e as circunstâncias locais só existem como 'desculpa' inaceitável para falhas na execução ou na adaptação", portanto não cabe o trabalho e a incerteza da protagonização do indivíduo em processo de

aprendizagem, dada a imprecisão desse movimento, afinal, o treinamento não deixa dúvidas: caso não tenha aprendido, treine mais!

E na sequência, a última categoria expressa uma discreta valorização das novas tecnologias ou, emitindo juízo de valor, uma atribuição ingênua e cristalizadora das ações empreendidas.

Espaço de divulgação de listas de exercícios

Novamente no questionamento acerca da sala de informática, a supervisora tem o seguinte posicionamento:

> S: (...) Para o ensino médio, o professor trabalha lá, é amplamente utilizado. Mas aluno eu já não levo lá. Então o professor prepara as aulas lá, e utiliza o data show que é disponível a eles, e lá no data show ele utiliza todos os recursos na sala de informática e inclusive acesso a internet. Então a tecnologia é usada hoje através hoje, professor-aluno, através do sistema online que a escola tem, um portal direto do professor com o aluno, onde o professor disponibiliza lista, onde ele tem a comunicação direta com o aluno, onde ele disponibiliza material, tarefas, então realmente, o nosso sistema escola, de gestão, proporciona isso, para o médio. Eu já não tenho mais o laboratório com computadores para o aluno atuar.

Complementarmente às outras categorias apresentadas, o excerto anterior reforça que a compreensão dos potenciais do uso das novas tecnologias passa longe da perspectiva para o ensino. Aqui é destacada como mais um instrumento expositor, permitindo a involução do quadro-giz para o *data show*.

Sua função apenas como local para postagem de listas de exercícios, aparenta caminhar para o incentivo de atividades realizadas a distância, instrumento potencial para o desenvolvimento da autonomia de pesquisa e investigação dos alunos em ambiente extraclasse. Todavia, é notadamente explícita a manutenção da perspectiva de treinamento, ao colocar a divulgação de listas de exercício, o paradigma não se modifica.

Lopes & Lopez (2010) identificam que, em meio ao contexto performático, "busca-se a eficiência do indivíduo autorregulado, supostamente capaz de vir a se traduzir em uma eficiência do sistema" (p. 106). Para tanto, essa perspectiva é novamente referendada pelo posicionamento dos indivíduos concedentes das entrevistas. O que se busca, como enunciado pelas autoras, é competência de execução/repetição do trabalho realizado no momento em que os alunos são expostos às avaliações externas. Qual seria a função desses instrumentos para esses alunos? Afinal, estes não estarão disponíveis no momento da realização das avaliações. A evidenciação dos objetivos e dos meios para atingi-los vão de encontro à perspectiva de educação por nós assumida. Mas esses objetivos adquirem *status* de eficiência, por meio da legitimação dos resultados do ENEM, por exemplo. Isso porque, como nos alertar Lopes & Lopez (2010), é preciso destacar para superar o caráter que essa avaliação adquire pouco a pouco, qual seja

> [...] a perspectiva instrumental predominante no exame encontra-se hibridizada a outras tendências, que tanto podem assumir um viés mais democrático – quando sinalizam a necessidade de diminuir a desigualdade de acesso à universidade – quanto podem acentuar os efeitos performáticos – constituindo *rankings* supostamente científicos de escolas. (p. 106)

Portanto, permanece o entendimento de que o uso de tecnologias só tem potencial como instrumento de preparo de aula (*data show*) ou mesmo para a divulgação de listas de exercícios na página da escola. O próprio Perrenoud (2000) trata da potencialidade e da necessidade do uso de ferramentas para o trabalho a distância com os alunos, quando menciona a competência mais

específica de *comunicar-se a distância com os alunos*. Todavia, é importante ressaltar que tal fato só vem para reforçar as ações performáticas.

Nesse sentido, observamos que mesmo as gestoras e os professores, afirmando conhecer estudos sobre benefícios do uso das TIC, não os utilizam, pois isso prejudicaria a atuação para o objetivo proposto: o treinamento para as avaliações externas

Considerações finais

É importante ressaltar que não estamos julgando as ações desses professores, eles são sujeitos em um contexto que exige que coadunem e reforcem esse *status* de excelência, para a manutenção deles nesse espaço, nesse emprego.

Em meio à performatividade, acredita-se, como enunciado por Dias & Lopes (2003), que "alunos com bom desempenho escolar possuíam bons professores ou professores eficientes". Portanto, a responsabilização dos resultados sobre eles é enorme, e esses profissionais precisam sobreviver, esse é o termo: sobreviver! Eles não precisam que reforcemos ainda mais essa responsabilização. É imprescindível destacar, no entanto, os movimentos de políticas públicas e inserção da lógica de mercado nos ambientes da educação básica, quer seja em escolas públicas ou privadas, fato largamente pesquisado por Stephen Ball e seus interlocutores que estudam a cultura da performatividade. Esse movimento sim, é responsável por essas distorções na compreensão de educação de jovens.

A questão da tecnologia foi aqui tratada para explicitarmos ainda mais a situação performática instaurada, visto que muitos dos autores que trouxemos para dialogar sobre as novas tecnologias, inclusive o próprio Perrenoud, alertam para a necessidade de reflexão sobre os usos e potencialidades dessas. Todavia, fica evidente que, no contexto de "excelência" apresentado, essa reflexão é inviável.

A conclusão, portanto, é: se nem a reflexão é estimulada, quem dirá a utilização?

Este artigo procurou explicitar esses fatos, a fim de que sejam problematizados em vários níveis: acadêmicos, governamentais, escolares, entre outros. Nossa pretensão é ambiciosa, porém, cremos, necessária.

Referências

Ball, S. J. (2005). Profissionalismo, Gerencialismo e Performatividade. *Cadernos de Pesquisa*, 35(126), 539-564.

Bittar, M. (2010). A escolha do software educacional e a proposta pedagógica do professor: estudo de alguns exemplos da Matemática. In W. Beline & N. M. L. Costa (Eds.), *Educação Matemática, Tecnologia e Formação de Professores:* algumas reflexões. Campo Mourão: FECILCAM.

Dias, R. E. & Lopes, A. C. (2003). Competências na Formação de Professores no Brasil: O Que (Não) há de Novo. *Educação & Sociedade*, 24(85), 1155-1177.

Lopes, A. C. & López, S. B. (2010). A Performatividade nas Políticas de Currículo: O Caso do ENEM. *Educação em Revista*. 26, 89-110, Belo Horizonte, MG.

Neto, V. F. (2011). *Competências profissionais de professores de Matemática do ensino médio valorizadas por uma "boa" escola: a supremacia da cultura da performatividade*. 2011. 159 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande.

Neto, V. F., & Silva, M. A. (2013). Competências profissionais de professores de Matemática do Ensino Médio valorizadas por uma "boa" escola: a supremacia da cultura da performatividade. *Bolema*, *27*(45), 143–164.

Perrenoud, P. (2000). *Dez Novas Competências para Ensinar.* Porto Alegre: Artmed.

Perrenoud, P. (2001). Entrevista concedida ao Programa Roda Viva da TV Cultura. São Paulo, (2001, 19 de nov.)

Perrenoud, P. (2002). A formação dos professores no século XXI. In P. Perrenoud & M. C. Thurler (Eds.), *As competências para ensinar no século XXI*. Porto Alegre: Artmed.

Ponte, J. P. (1989). A calculadora e o processo de ensino e aprendizagem. *Educação e Matemática.* 11(3). 1-2.

Purificação, I.; Neves, T. G.; Brito, G. S. (2010). Professores de Matemática e as Tecnologias: Medo e Sedução. In W. Beline & N. M. L. Costa (Eds.), Educação Matemática, Tecnologia e Formação de Professores: algumas reflexões. Campo Mourão: FECILCAM.

O ensino de Matemática Financeira no ensino médio com o simulador *UOLInvest*

Dilamar Reis **Lamberty**
Faculdades Integradas de Taquara
Brasil
dilamar.lamberty@hotmail.com
Alexandre **Silva**
Faculdades Integradas de Taquara
Brasil
alexandrepratessilva@gmail.com
Magnus Cesar **Ody**
Faculdades Integradas de Taquara
Brasil
magnus.c.ody@gmail.com

Resumo

Este artigo apresenta os resultados de uma pesquisa realizada com estudantes do segundo ano do Ensino Médio de uma escola pública no estado do Rio Grande do Sul, Brasil. Objetivo foi realizar uma prática alternativa para o ensino de Matemática Financeira e promover melhor compreensão do conteúdo.*O*s estudantes manipularam o simulador UOLInvest, que consiste em exercitar as movimentações do mercado financeiro por meio da compra e venda de ações. A pesquisa apoiou-se nos princípios da Resolução de Problemas, Matemática Financeira e no uso das TIC. Teve o questionamento: como o uso do simulador UOLInvest pode auxiliar os alunos nas aulas de Matemática Financeira no Ensino Médio? Com o uso do simulador os estudantes demonstraram interesse pelos estudos e melhora na compreensão dos conceitos.O laboratório de ensino com o uso das tecnologias ligado aos conteúdos de Matemática Financeira favorece a aproximação da escola aos conhecimentos presentes no cotidiano dos alunos.

Palavras chave: Ensino Médio, Matemática Financeira, Educação Financeira, Resolução de Problemas, Tecnologias de Informação e Comunicação.

Introdução

Este artigo propõe mostrar os resultados de uma pesquisa realizada com estudantes de Ensino Médio de uma escola pública da região da grande Porto Alegre, RS, Brasil. Apresenta uma prática de ensino de Matemática Financeira com o uso das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) e por meio da Resolução de Problemas. Apresentou como metodologia de pesquisa as abordagens quantitativa e qualitativa, sendo utilizada a pesquisa de campo para coletar os dados (Fiorentini; Lorenzato, 2006).

O propósito do estudo foi verificar a relevância da Matemática e da Educação Financeira no dia a dia do estudante de Ensino Médio por meio do simulador UOLInvest. Nesse sentido a

pesquisa centrou-se em responder como o uso do simulador UOLInvest pode auxiliar os alunos nas aulas de Matemática Financeira no Ensino Médio? Considerou-se o fato de os alunos terem facilidade no uso do computador e no acesso às informações que atualmente circulam de diferentes modos. Cabe destacar a importância em interpretar, compreender e analisar criticamente as informações, especialmente, no caso da pesquisa, as de ordem econômica e financeira, para o exercício da cidadania.

A prática envolveu a utilização do simulador UOLInvest, fornecido pela BM&FBOVESPA e UOL, que possuem como um dos objetivos oferecer aos participantes noções do mercado financeiro brasileiro, no que diz respeito à compra e à venda de ações. A partir da utilização do simulador, podem ser trabalhados alguns conteúdos de Matemática Financeira, como: porcentagem, descontos, acréscimos e juros. Paralelamente, possibilita o exercício da Educação Financeira, fato relevante para jovens em idade escolar e que, de algum modo, fazem parte da vida econômica da região. O simulador possui utilização *online* e está disponível gratuitamente pelo endereço: <http://uolinvest.economia.uol.com.br/>.

Ensinar a Matemática Financeira de forma inovadora pode ser uma maneira de despertar no aluno o interesse pela Matemática. Nos dias de hoje, tem-se à disposição das pessoas diferentes tecnologias que fazem parte do seu cotidiano. Então, por que não usá-las na sala de aula, possibilitando aulas mais atrativas?

De acordo com a Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Lei nº 9.394/96), o Ensino Médio é a etapa final da educação básica, pois dentre os seus objetivos

> [...] estão não apenas a consolidação e o aprofundamento dos conhecimentos adquiridos durante o nível fundamental, no intuito de garantir a continuidade de estudos, mas também a preparação para o trabalho e para o exercício da cidadania, a formação ética, o desenvolvimento da autonomia intelectual e a compreensão dos processos produtivos. (Brasil, 2006, p. 69).

Com o uso das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) o professor e o aluno dispõem de diversos recursos na realização de uma tarefa e nas diferentes possibilidades de aprendizado, modificando a dinâmica da sala de aula. De acordo com a Unesco (2013), a redução da exclusão digital no Brasil depende da maneira como o sistema educacional incorpora as TIC.

Resolução de Problemas

A Resolução de Problemas é uma das tendências do ensino de Matemática que os educadores e pesquisadores procuram conhecer para melhorar a prática pedagógica. Soares (2014) menciona que é a partir da Resolução de Problemas que se pode envolver o aluno em situações da vida real, motivando-o para o desenvolvimento do modo de pensar a Matemática. Fato importante é que ela pode despertar o interesse do aluno.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998):

> A prática mais frequente na Resolução de Problemas consiste em ensinar um conceito, um procedimento ou técnica e depois apresentar um problema para avaliar se os alunos são capazes de empregar o que lhes foi ensinado. Para a maioria dos alunos, resolver um problema significa fazer cálculos com números do enunciado ou aplicar algo que aprendam nas aulas. Desse modo o que o professor explora na atividade matemática não é mais a atividade, ela mesma, mas seus resultados, técnicas e demonstrações. (p. 40).

É relevante ressaltar que os alunos precisam fazer alguma espécie de registro, pois, assim, poderão demonstrar suas ideias e como conseguiram chegar ao resultado final. Muitas vezes, as crianças preferem dar a sua opinião de forma oral, porque ainda possuem dificuldade na escrita por estarem no início do ciclo escolar.

De acordo com Carvalho (2005), o professor, ao utilizar a metodologia da Resolução de Problemas, precisa dedicar tempo para a preparação e planejamento das aulas. Assim, se surgirem dúvidas dos alunos, poderá auxiliá-los da forma que entendam melhor a metodologia de trabalho.

Podem-se destacar alguns tipos de problemas: "problemas rotineiros, problemas de determinação, problemas de demonstração e problemas práticos" (Polya, 1978, p.124). O tipo de problema pode ser adaptado à realidade da escola e também de acordo com os seus objetivos. Para Silveira (2014), devem ser considerados o contexto escolar, o nível de interesse dos alunos e o uso de instrumentos mediadores para a Resolução de Problemas.

Matemática Financeira no ensino médio e o uso das tecnologias de informação e comunicação (TIC)

A Matemática Financeira pode ser tratada como um dos temas relevantes dos conteúdos de Matemática, pois a maior parte dos assuntos abordados está ligada à realidade dos alunos. Atualmente, possui inúmeras aplicações no cotidiano, englobando situações relacionadas ao ganho de capital, pagamentos antecipados e postecipados, porcentagem, financiamentos, descontos comerciais, entre outros produtos do meio financeiro (Silva, 2013).

Santos (2005) define a Matemática Financeira como o ramo da matemática aplicada que estuda o comportamento do dinheiro no tempo. Busca quantificar as transações que ocorrem no universo financeiro, levando em conta a variável tempo, ou seja, o valor monetário no tempo.

No Brasil, a educação básica compõe-se, segundo a LDB (Brasil, 1996), de Educação Infantil, que tem como finalidade o desenvolvimento de crianças até os cinco anos; Ensino Fundamental, que é constituído de nove anos, gratuito em escolas públicas, iniciando-se aos seis anos; e Ensino Médio, que possui duração de três anos.

No Ensino Fundamental, com relação à Matemática Financeira, cabe destacar:

> Para compreender, avaliar e decidir sobre algumas situações da vida cotidiana, como qual a melhor forma de pagar uma compra, de escolher um financiamento etc [...]; trabalhar situações-problema sobre a Matemática Comercial e Financeira, como calcular juros simples e compostos e dividir em partes proporcionais, pois os conteúdos necessários para resolver essas situações já estão incorporados nos blocos (Brasil, 1998, p. 86).

Sobre o Ensino Médio, nos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998, p. 11), a Matemática Financeira refere-se ao estudo de funções em que juros e correções são aplicados em problemas de funções. Com esse intuito, pode-se estimular o aluno a raciocinar e a exercitar o hábito de tomar decisões, assim como promover a Educação Financeira por meio de diferentes atividades, incluindo o uso das tecnologias.

Muito se tem discutido acerca do uso das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) no âmbito escolar, incluindo produções acerca da aprendizagem do aluno, da metodologia utilizada no processo de ensino, se o estudante e o professor estão preparados para o tratamento da informação, a utilização e a comunicação das TIC. Nos dias atuais, nota-se uma diferença no uso das tecnologias pelas escolas. Gilleran (2006) menciona que:

> [...] Ao analisar a integração das TIC no currículo, notou-se grande diferença entre as escolas de ensino fundamental e médio e, em um segundo momento, entre as escolas de ensino médio técnicas e o currículo geral do ensino médio. Nas escolas técnicas, parecia que as TIC estavam integradas em todas as disciplinas técnicas, científicas, empresariais e no ensino da segunda língua, normalmente o inglês. [...] poderia concluir-se que a integração das TIC se realiza de maneira uniforme nas escolas técnicas [...] (p. 93-94).

Souza (2014) esclarece que:

> Aulas modernizadas pelo uso de recursos tecnológicos têm vida longa e podem ser adaptadas para vários tipos de alunos, para diferentes faixas etárias e diversos níveis de aprendizado. O trabalho acaba tendo um retorno muito mais eficaz. É importante, no entanto, que haja não apenas uma revolução tecnológica nas escolas. É necessária a revolução na capacitação docente, pois a tecnologia é algo ainda a ser desmistificado para a maioria dos professores.

A partir desse contexto, pode-se determinar que o professor pode ser um mediador da produção e comunicação de informações para o aluno, fazendo com que o mesmo adquira e construa conhecimentos. Para isso, há a necessidade da formação docente continuada, o planejamento de estratégias didáticas adequadas e a pesquisa na sala de aula como ação metodológica escolar.

Simulador UOLInvest

O simulador UOLInvest é a realização da parceria da BM&FBOVESPA e do Universo Online UOL para a criação de um simulado prático que oferece aos usuários a oportunidade de conhecer o mercado financeiro nacional. Tem como objetivo proporcionar ao público em geral a familiarização e conhecimentos básicos sobre o mercado de ações no Brasil, permitindo vivenciar o dia a dia das operações de valores.

Para utilizar o simulador, o participante precisa realizar o cadastro, descrito a seguir:

> As inscrições para participação no "UOL Invest" são gratuitas e deverão ser realizadas no endereço http://uolinvest.economia.uol.com.br, sendo esta a única forma de inscrição.
>
> A BM&FBOVESPA e/ou o UOL poderão solicitar a comprovação das informações cadastradas sempre que considerar necessário.
>
> Poderão se inscrever para participar do “UOL Invest" pessoas físicas domiciliadas no país ("Participantes").
>
> Os dados cadastrais necessários para realizar a inscrição compreendem nome, endereço, telefone, número da carteira de identidade, número do Cadastro de Pessoa Física - CPF, data de nascimento, sexo, e-mail e outros dados que a coordenação do "UOL Invest" entender como necessários, conforme previsto na página da rede mundial de computadores acima mencionada.
>
> Será permitido aos Participantes menores de idade que não possuírem o CPF realizar a inscrição utilizando o número do documento dos pais ou responsáveis.
>
> É proibida a realização de inscrição e negociação utilizando dados cadastrais de terceiros (CPF de terceiro, por exemplo) para operações no Simulador, bem como a utilização do login e senha de terceiros. O Participante que descumprir esta norma será punido nos termos do item abaixo.
>
> Cada Participante poderá realizar somente um cadastro. O Participante identificado pela coordenação do “UOL Invest” com mais de um cadastro perderá o direito de participar da

> premiação caso sua posição no ranking lhe conceda essa condição e terá o(s) cadastro(s) cancelado(s) sem prévio aviso. (BM&FBOVESPA & UOL, 2014, s/p, grifos do autor).

Metodologia utilizada na pesquisa

O processo de pesquisa adotado no estudo foi por método misto. Creswell (2010) o define como uma abordagem da investigação que combina aspectos positivos das formas qualitativas e quantitativas de pesquisa. Tratou-se também de uma pesquisa de campo, como Fiorentini (2006) define que:

> Considerando a educação matemática (EM) como uma prática social, o trabalho de campo torna-se uma opção importante, pois fornece elementos que nos permitem compreendê-la e, então, transformá-la. Além disso, são as informações que nos levam a criar e desenvolver conhecimentos a partir da prática e nos impedem que inventemos explicações ou suposições irreais e totalmente imaginárias ou fantasmagóricas (p. 101).

A pesquisa foi realizada no âmbito escolar, com 20 estudantes do segundo ano do Ensino Médio de uma escola pública da cidade de Santo Antônio da Patrulha, no estado do Rio Grande do Sul, Brasil. A escolha deu-se pelo fato de ser a única escola a contemplar o Ensino Médio e abrigar estudantes de todas as localidades do município.

O instrumento utilizado para a coleta de dados foi o questionário. A realização ocorreu em dois momentos: no primeiro, foi aplicado um questionário com questões abertas e fechadas com a finalidade de conhecer o perfil dos sujeitos e também identificar os conhecimentos de Matemática Financeira apresentados pelos estudantes. Parte do primeiro questionário procurou levantar variáveis intervenientes dos sujeitos, tais como sexo, idade, localização e opinião sobre aprender matemática.

Após a aplicação do questionário, foi desenvolvida uma sequência didática com a finalidade de apresentar e desenvolver atividades com o uso do aplicativo Folhainvest. A etapa final consistiu na aplicação de um segundo questionário avaliativo com o objetivo de identificar se de fato os alunos agregaram e desenvolveram habilidades e as competências em Matemática Financeira com o uso do aplicativo Folhainvest. Os dados foram coletados e analisados considerando os dois questionários, buscando tratar os dados quantitativos com valores absolutos e percentuais e as informações qualitativas apresentadas por categorias emergidas das respostas dos sujeitos.

Análise, discussão e considerações

A pesquisa teve como objetivo verificar a relevância da Matemática e da Educação Financeira no dia a dia do estudante de Ensino Médio por meio do simulador UOLInvest. Foi possível perceber o quanto é necessário trabalhar os conteúdos de Matemática Financeira, visto que, na aplicação do primeiro questionário, foi notável a dificuldade dos alunos perante alguns termos utilizados no contexto do conteúdo.

Na questão a seguir, procurou-se avaliar os conhecimentos dos alunos, referente a desconto simples, sendo necessário que os alunos obtivessem o valor correspondente ao desconto obtido em uma compra à vista. Segue a questão:

No site de uma determinada loja consta o produto Ar Condicionado Split Springer Way Quente e Frio, 12000 btus, com o custo de R$ 1.399,00. Se o cliente optar por pagamento à vista, o valor ficará reduzido em 12%. Qual será o valor cobrado se o cliente optar pelo pagamento à vista?

(a) R$ 1.215,00 (b) R$ 1.154,26 (c) R$ 1.231,12 (d) R$ 1.231,15

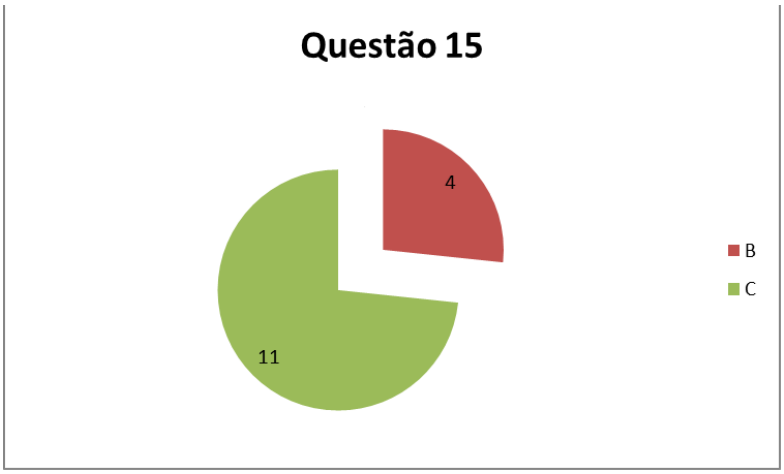


Gráfico 2 – Questão desconto e porcentagem
Fonte: A pesquisa

A partir das respostas obtidas junto aos sujeitos, o resultado alcançado foi considerado proveitoso, pois a maioria dos alunos assinalou a letra *c,* sendo essa a opção correta. O índice de acertos nessa questão foi de 80%. Segundo Silva (2013), a Matemática Financeira possui inúmeras aplicações no cotidiano, englobando situações envolvendo descontos comerciais. Na questão, observa-se que apenas quatro alunos erraram a resposta.

O simulador permitiu aos alunos a compreensão do funcionamento do mercado financeiro, na compra e na venda de ações, no uso da tecnologia, especialmente nos cálculos e simulações. De fato, o simulador auxiliou na visualização dinâmica de tabelas de investimento e no trabalho em grupo.

Percebeu-se, também, a relevância de trabalhar a Educação Financeira, visando a tomada de decisões, pois, nos dias de hoje, com a facilidade de acesso aos produtos, muitos alunos, após a realização das atividades, notaram que pagavam valores altos referentes aos juros em suas compras efetuadas parceladamente. O fato alertou os alunos para a importância de reavaliar as compras a prazo.

Nesta questão, foi avaliado o entendimento dos alunos em relação a descontos e compra parcelada, apresentando-se um modelo de compra aos sujeitos que deveriam realizar o cálculo e citar sua opinião sobre a forma mais vantajosa. Segue a questão:

Uma loja vende um artigo e oferece duas opções de pagamento: à vista, por R$180,00, ou em dois pagamentos iguais de R$100,00 cada, sendo o primeiro no ato da compra e o segundo um mês depois da compra.

a) Na sua opinião, seria melhor a compra à vista ou a prazo? Justifique a resposta.

b) No caso da compra a prazo, qual seria o percentual de juros incluído nessa opção de compra?

Nesse problema, os alunos foram questionados sobre a melhor opção de compra de um produto: à vista ou a prazo. Segundo os participantes do estudo, o melhor seria comprar à vista, pois a prazo eles teriam que pagar R$ 20,00 de juros. Se efetuarem o pagamento à vista, podem utilizar o valor da diferença na aquisição de outro produto. São apresentadas a seguir duas opiniões de alunos, denominados de aluno A e aluno B:

Aluno A: "Se eu comprar este produto a vista vou pagar 180,00 reais, se eu pagar a prazo em duas vezes de 100,00 reais, vou estar pagando 20,00 reais a mais no produto".

Aluno B: "prefiro pagar a vista, assim vou pagar 20,00 reais a menos e assim vai me sobrar este dinheiro, que posso usar para comprar outra coisa".

Na mesma questão, os alunos foram questionados sobre o percentual de juros implantados nessa compra. Nota-se que 12 alunos acertaram e três erraram a questão. O que chamou a atenção nesses três erros foi que os alunos, ao realizarem o cálculo, utilizaram como valor da compra R$ 100,00, ao invés de usarem os R$ 180,00. Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (1998) definem que a Matemática tem valor formativo e ajuda a estruturar o pensamento e o raciocínio. O acadêmico alertou os participantes do ocorrido para que eles percebessem o erro e passassem a ter mais atenção na hora da execução do cálculo.

O professor, ao utilizar o simulador, possui um bom caminho a seguir. A pesquisa em sala de aula e o trabalho no laboratório de informática como forma de promover a aprendizagem de Matemática Financeira tornaram o conhecimento dos alunos mais amplo e eficaz, evidenciando, assim, a importância da utilização do simulador nas aulas de Matemática, tornando a disciplina ainda mais significativa aos educandos.

Referências

Brasil.(2006). *Lei de Lei de Diretrizes e Bases para a Educação* – LDB. Brasília: MEC.

_____. Secretaria da Educação Fundamental.(1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática. Brasília: MEC/SEF.

_____. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica.(2006). *Orientações Curriculares para o ensino médio:* Ciências da Natureza, matemática e suas tecnologias. v. 2. 140 p. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria da Educação Básica.

BM&FBOVESPA & UNIVERSO ONLINE UOL. Disponível em:<http://uolinvest.economia.uol.com.br/>. Acesso em: 25 ago. 2014.

Carvalho. (2005). Mercedes. *Problemas? Mas que problemas?! Estratégias de resolução de problemas matemáticos em sala de aula.* Petrópolis: Vozes.

Creswell, J. W.(2010) *Projeto de Pesquisa*: métodos qualitativo, quantitativo e misto. 3. ed. Porto Alegre: Artmed.

Fiorentini, D.; Lorenzato, S.(2006) *Investigação em Educação Matemática:* percursos teóricos e metodológicos. Campinas, SP: Autores Associados.

Gilleran, A. (2006). Práticas Inovadoras em Escolas Européias. *In:* Sancho, J. M; Hernández, F. *Tecnologias para transformar a Educação.* Porto Alegre, RS: Artmed.

Polya, G. A.(1978). *A arte de Resolver Problemas*. Tradução: Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro, RJ, Interciência.

Santos, G. L. C.(2005). *Educação financeira:* a matemática financeira sob nova perspectiva. 2005. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência) – Faculdade de Ciências, Universidade Estadual Paulista, Bauru.

Silva, M. N. P. *Matemática Financeira.* Disponível em: <http://www.mundoeducacao.com/matematica/matematica-financeira.htm>. Acesso em: 28 set. 2013.

Silveira, J. F. P. *O que é matemática?* Disponível em: <http://athena.mat.ufrgs.br/~portosil/resu.html>. Acesso em: 3 abr. 2014.

Soares, M. T. C. *Metodologia da Resolução de Problemas.* Disponível em: <http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_24/metodologia.pdf>. Acesso em: 2 abr. 2014.

Souza, L. *Educação Financeira:* uma proposta de abordagem e de atividades. Disponível em: <http://200.131.208.43/bitstream/123456789/2975/1/DISSERTA%C3%87%C3%83O_Educa%C3%A7%C3%A3oFinanceiraProposta.PDF>. Acesso em: 6 abr. 2014.

Tecnologia. (2013). *In: DICIONÁRIO* de Português *on line*. Disponível em: <http://www.priberam.pt/dlpo/tecnologia>. Acesso em: 3 abr. 2014.

UNESCO. *TICs na educação do Brasil.* Disponível em: <http://www.unesco.org/new/pt/brasilia/communication-and-information/access-to-knowledge/ict-in-education/>. Acesso em: 29 set. 2013.

O estudo da cicloide utilizando o software GeoGebra

André Lúcio **Grande**[1]
Colégio São Marcos – Mogi das Cruzes
Brasil
andreamath@uol.com.br

Resumo

Esta pesquisa objetivou estudar algumas propriedades geométricas da curva plana denominada cicloide utilizando o software GeoGebra como recurso computacional auxiliar. A partir de sua construção, pode-se intuitivamente elaborar algumas conjecturas sobre suas características geométricas no sentido de procurar formalizar suas equações paramétricas. Como referencial teórico, utilizaram-se conceitos ligados ao uso da intuição e do rigor destacando a importância da elaboração de conjecturas e hipóteses no processo de ensino de aprendizagem da Matemática. Sobre os procedimentos metodológicos, ressalta-se o uso do GeoGebra que propiciou explorar algumas ideias intuitivas sobre o objeto de estudo em questão bem como validar e formalizar as conjecturas elaboradas.

Palavras chave: cicloide, curvas planas, intuição, GeoGebra, equações paramétricas.

Introdução

A Educação Matemática vem apresentando em suas diferentes modalidades, quer seja na Educação Infantil, Ensino Fundamental, Médio ou Superior um número significativo cada vez maior de pesquisas sobre o ensino e a aprendizagem de conceitos matemáticos abordados em todos esses ciclos como, por exemplo, a construção dos conjuntos numéricos, com gênese nas séries iniciais no estudo dos números naturais e que no Ensino Superior, num curso de Cálculo Diferencial e Integral ou Análise Real, esses conceitos são retomados e estudados com um rigor e formalismo maiores.

Além desses conceitos com tais características, alguns tópicos matemáticos envolvem diversas áreas do conhecimento, o que se pode inferir que a abordagem desses conteúdos em sala de aula possibilita promover uma interdisciplinaridade entre elas. O estudo desses objetos matemáticos se torna, com isso, uma valiosa experiência no âmbito do ensino e aprendizagem da Matemática.

Dentre alguns temas, o estudo das curvas planas, por exemplo, pode englobar alguns elementos que se inter-relacionam, tais como:

- o movimento de um ponto no plano que gera uma curva utilizando conceitos de Cinemática e Dinâmica em Física;

[1] Esta pesquisa contou com a participação dos alunos do Ensino Médio do Colégio São Marcos – Mogi das Cruzes que integram o Núcleo de Pesquisas e Ciências e Pesquisa

- o estudo do contexto histórico que envolve a gênese e o desenvolvimento do objeto matemático de estudo;
- o envolvimento de diversas áreas da Matemática como Geometria Plana, Analítica e Trigonometria, dentre outras.

Esse tema pode ser abordado, de um modo geral, nos diversos níveis de ensino, quer seja Médio ou Superior. No caso específico do Ensino Médio, por exemplo, o estudo da curva denominada *cicloide* apresenta todos esses elementos descritos. A cicloide é uma curva plana gerada pelo movimento de um ponto localizado em uma circunferência que gira sobre uma reta sem escorregar, conforme a figura a seguir:

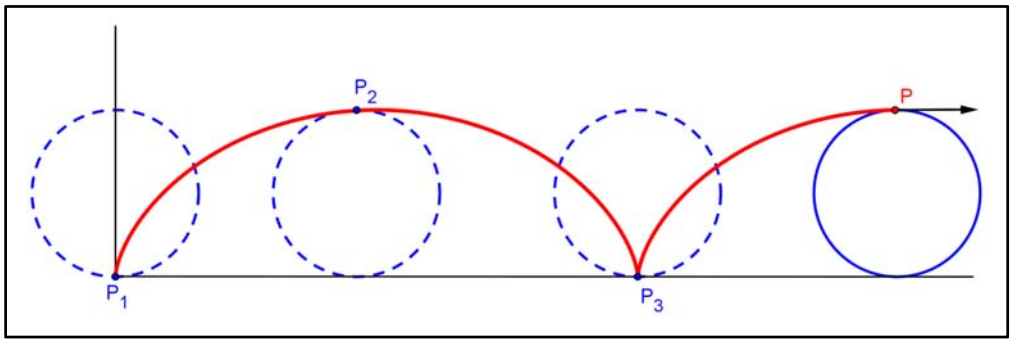


Figura 1. A Cicloide.

O estudo dessa curva sucinta, além da utilização de conceitos da Mecânica, Geometria e Álgebra, o uso de um recurso computacional para simular a questão do movimento, sendo que o objeto de estudo é tratado de um ponto de vista "dinâmico" e não "estático". Dentre os softwares com tais propriedades, o GeoGebra[2] se constitui de um recurso computacional que possui algumas características essenciais que podem auxiliar no ensino e aprendizagem de alguns conceitos matemáticos.

O GeoGebra permite também o estudo dos objetos matemáticos procurando explorar o raciocínio intuitivo dos alunos por meio da elaboração de conjecturas e hipóteses de modo interativo e dinâmico, promovendo uma inter-relação entre as representações algébrica, gráfica e geométrica do objeto matemático.

Com relação ao papel do uso do raciocínio intuitivo, o filósofo e matemático Jules Henri Poincaré (1854-1912) defendia a intuição como uma ideia ou interpretação antecipada daquilo que se está procurando, constituindo-se de um sentimento que possibilita gerar hipóteses.

O autor aborda em suas obras como *A Ciência e a Hipótese* (1984) e *O Valor da Ciência* (1905) alguns temas que discutem o papel da intuição, da lógica e da hipótese na construção do pensamento cientifico, criticando a ciência concebida como absoluta e inquestionável e destacando a importância da intuição e da lógica nesse processo de construção.

Em sua obra A Ciência e a Hipótese (1984), por exemplo, o autor procura trazer à tona a análise dos principais aspectos para se considerar uma ciência válida apenas se for passível de experimentação.

[2] www.geogebra.org

Poincaré (1995) defendia a intuição como papel central na questão da criatividade e a invenção. A intuição, segundo o autor, é uma faculdade do espírito, cuja função é essencialmente heurística, pois para o mesmo, é pela intuição que se descobre e se inventa, mas é pela lógica que se justifica.

Apropriando-se dessas ideias relacionadas à importância da exploração de hipótese e conjecturas na construção do conhecimento, esse trabalho visou estudar algumas propriedades geométricas da curva cicloide utilizando o software GeoGebra procurando a partir de algumas hipóteses e ideias elaboradas intuitivamente descrevê-la algébrica e geometricamente. Tal pesquisa em sua elaboração contou com a participação dos alunos do Ensino Médio do Colégio São Marcos que integram o Núcleo de Pesquisas em Ciências, com sede no próprio colégio, destinado ao estudo de tópicos especiais da Matemática com vistas à difusão cultural.

Após o estudo das propriedades da cicloide utilizando o GeoGebra, realizou-se um experimento prático de aplicação baseado no problema da braquistócrona (uma cicloide invertida) utilizando-se como simulador o mesmo recurso computacional. Todavia, antecedendo tal estudo, apresentaremos um breve contexto histórico relacionado à gênese do objeto matemático em questão.

Contexto Histórico

A cicloide foi estudada pela primeira vez por Charles Bovelles (1479 – 1566), que num trabalho de geometria publicado em Paris, em 1501, se referiu a essa curva relacionando-a com o problema da quadratura do círculo. Os primeiros estudos rigorosos que se tem conhecimento são creditados a Giles Person de Roberval (1602 – 1675) que a denominou de trochóide (roda, em grego). Blaise Pascal (1623 – 1662) passou a chamá-la de roulette e Galileu Galilei (1564 – 1642) estudou-a tendo inclusive chamado a mesma de cicloide e provou pesando modelos de papel que a área sob a curva é igual a três vezes a área do circulo gerador. Utilizando o método dos indivisíveis, esse resultado foi provado posteriormente por seu discípulo Marco Evangelista Torricelli (1608 – 1647), sendo acusado de plágio por Roberval; fato que pode ter sido a razão da morte prematura de Torricelli.

Vincenzo Viviani (1622 – 1703) calculou a reta tangente a cicloide, resultado que René Descartes (1596 – 1650) e Pierre de Fermat (1601 – 1665) também alcançaram.

Sobre o comprimento de um arco de cicloide, destacam-se os trabalhos de Christopher Wren (1632-1723) um famoso arquiteto inglês que projetou 51 igrejas em Londres, incluindo a Catedral de São Paulo e os de Roberval, que provou que o comprimento desse arco é igual a oito vezes o raio do círculo gerador.

Christian Huygens (1629-1695) mostrou, por volta de 1673, que o tempo gasto por uma partícula para chegar a um nível inferior, partindo do repouso e deslizando, sem atrito, sob a ação da gravidade é um arco invertido de cicloide, independe do ponto de partida (tautocronismo). Esse resultado o levou a construir o relógio de pêndulo, cuja extremidade superior oscila entre dois ramos de uma cicloide, o que faz com que o período seja sempre o mesmo, independente da amplitude das oscilações.

Algum tempo depois, a cicloide apareceria como solução de outro importante problema da ciência do final do século XVII, conhecido como braquistócrona ou do tempo mínimo. Em 1696 Johann Bernoulli lançou esse problema como desafio aos matemáticos na *Acta Eruditorum* da seguinte maneira: suponha que dois pregos sejam martelados ao acaso em uma parede (não na

mesma vertical), e que o prego superior seja conectado ao inferior por um arame flexível na forma de uma curva lisa. Qual a forma do arame no qual uma partícula deslizará (sem atrito) sob a influência da gravidade, para passar do prego superior ao inferior no menor tempo possível?

De imediato a questão despertou um grande interesse e logo foi resolvida por Isaac Newton (1642-1727), por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), por Jakob Bernoulli (1654-1705), irmão mais velho de Johann e por ele próprio. Fato curioso é que na sua solução Johann usou uma analogia com a refração da luz, demonstrando grande engenhosidade ao relacionar temas que aparentemente eram bem distintos. O problema da braquistócrona foi marcante porque apontou uma linha de pesquisa importantíssima, chamada de cálculo das variações e que trata do estudo de funcionais ou de funções que dependem de outras funções ou curvas.

Fundamentação Teórica

A cicloide é uma curva obtida como trajetória de um ponto *P(x, y)* localizado numa circunferência de raio *r* que gira sobre o eixo Ox sem escorregar.

Para obter suas equações paramétricas, seja *C* o centro da circunferência e suponha que a mesma girou θ radianos, sendo que para $\theta = 0$ o ponto *P* coincide com o ponto *O*, conforme a figura a seguir:

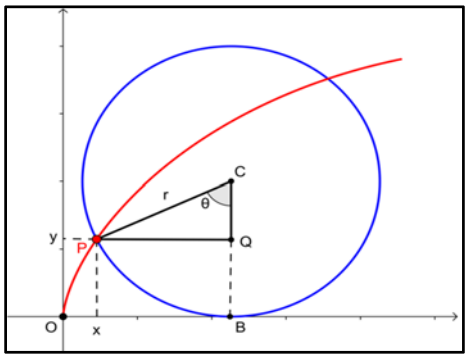


Figura 2. Equações paramétricas da cicloide.

Sendo assim, temos que:

$$|\mathrm{OB}| = \mathrm{med}\left(\widehat{BP}\right) = \mathrm{r}\theta$$

O centro do círculo terá coordenadas $C = (\mathrm{r}\theta, \mathrm{r})$

Com isso, as coordenadas do ponto P serão:

$$\boldsymbol{x} = |\mathrm{OB}| - |\mathrm{PQ}| = \mathrm{r}\theta - \mathrm{r}\,\mathrm{sen}\theta = \mathrm{r}(\theta - \mathrm{sen}\theta)$$

$$\boldsymbol{y} = |\mathrm{BC}| - |\mathrm{BQ}| = \mathrm{r} - \mathrm{r}\cos\theta = \mathrm{r}(1 - \cos\theta)$$

Portanto, as equações paramétricas da cicloide serão dadas por:

$$\mathrm{c}(\theta) = \begin{cases} x(\theta) = r(\theta - sen\theta) \\ y(\theta) = r(1 - cos\theta) \end{cases} \quad \text{com } \theta \in \mathbb{R}.$$

Cabe ressaltar que essa equação foi deduzida para $0 \leq \theta \leq \pi/2$ e que as equações de c(θ) são válidas para outros valores de θ.

Procedimentos Metodológicos – O estudo da Cicloide

Como procedimentos metodológicos foi realizado inicialmente um estudo da cicloide utilizando-se o software GeoGebra de uma maneira intuitiva objetivando estabelecer algumas conjecturas para se deduzir suas equações paramétricas $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Cabe ressaltar que é possível obter a equação cartesiana da curva, porém a mesma é relativamente complicada, o que torna mais simples e conveniente utilizar as equações paramétricas.

O GeoGebra é um software livre de Geometria Dinâmica que apresenta uma interface entre Geometria e Álgebra e possui a vantagem de dispor simultaneamente de diferentes representações do mesmo objeto matemático, sendo que essas representações podem ser simultaneamente manipuladas.

Com relação ao estudo da cicloide utilizando o GeoGebra, os alunos podem inicialmente de maneira intuitiva conjecturar a seguinte ideia: como a cicloide é obtida pelo movimento de um ponto *P* sobre uma circunferência de centro *C* e raio *r,* quanto esta gira sobre uma reta sem escorregar, podemos imaginar que a cada volta completa do ponto *P* a circunferência translada uma distância igual a $2\pi r$.

Além disso, pode-se questionar sobre algumas propriedades geométricas referentes à forma dessa curva como, por exemplo, se a mesma é periódica (em caso afirmativo, qual o seu período), os pontos, caso existam, extremos relativos (ponto de máximo ou de mínimo em *x* e *y*) e quais as alterações na curva ao variarmos o raio *r* da circunferência geradora.

Para explorar essas ideias intuitivas utilizando o GeoGebra, inicia-se o traçado da cicloide com a criação de dois controles deslizantes: o primeiro será chamado de *r,* destinado à medida do raio da circunferência geradora variando no intervalo $[0, 4]$ e o segundo denominado por *a* correspondente ao valor do comprimento de arco retificado dessa circunferência variando no intervalo $[0, 4\pi r]$. O valor $4\pi r$ corresponde a duas vezes o comprimento da circunferência geradora. Os controles, por conveniência, terão valores iniciais iguais à $r = 1$ e $a = 0$.

A partir desses parâmetros criados constrói-se uma circunferência de centro $C = (a, r)$ e raio *r* e um ponto *P* sobre a circunferência, localizado inicialmente na origem (0,0) conforme a figura a seguir:

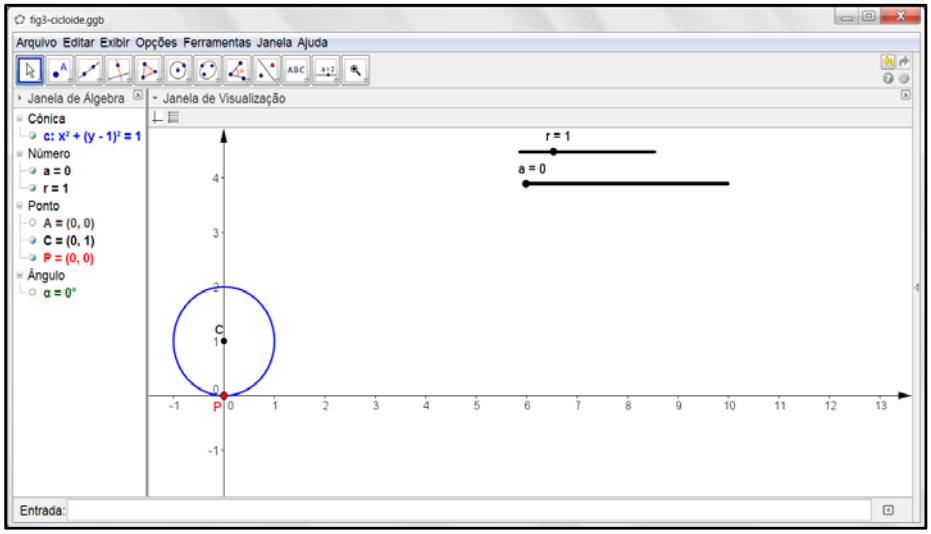


Figura 3. Construção da cicloide no GeoGebra.

Para obter a cicloide, devemos considerar que à medida que a circunferência gira sobre o eixo *Ox*, o ponto P descreve uma curva. Para visualizar tal situação, no GeoGebra utiliza-se o comando *Ângulo com Amplitude Fixa*, sendo que ao selecionarmos o ponto P, o ponto C como vértice e a amplitude dada por a/r habilitando a opção sentido horário, ao selecionamos no ponto *P* com a opção habilitar rastro e movimentando o seletor *a*, obtendo a cicloide conforme a figura a seguir:

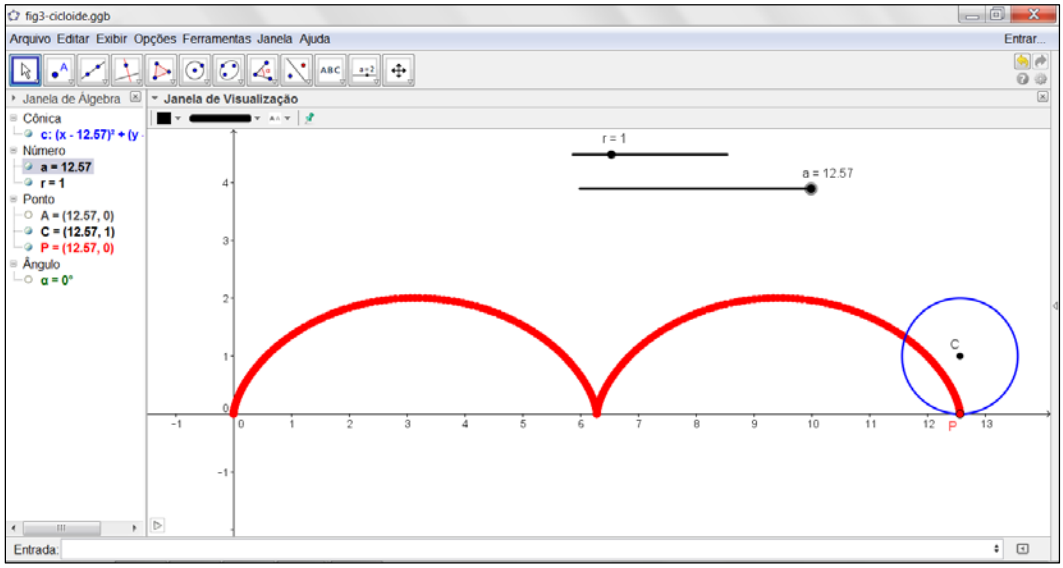


Figura 4. Cicloide obtida no GeoGebra.

Observa-se que a cicloide possui período igual a $2\pi r$, pois a circunferência geradora foi retificada duas voltas completas ($4\pi r$), conforme selecionado no cursor deslizante *a* e que os valores mínimo e máximo de $y(t)$ são dados, respectivamente, por $y = 0$ e $y = 2r$. Esses resultados podem ser inferidos mesmo alterando-se o valor do raio *r* da circunferência geradora.

Após algumas conjecturas serem validadas por meio da manipulação dos controles deslizantes, a formalização do estudo da cicloide pode ser feita demonstrando-se suas equações paramétricas $x(t)$ e $y(t)$ que a descrevem algebricamente.

Para isso, deve-se comentar com os alunos que a equação da cicloide pode ser obtida de uma maneira mais simplificada por meio de suas equações paramétricas, sendo que as coordenadas (x, y) de um ponto *P* da cicloide serão dadas em função do ângulo θ descrito pelo ponto *P* na circunferência. Utilizando-se desses argumentos, de maneira análoga aquela descrita na fundamentação teórica, obtém-se:

$$c(\theta) = \begin{cases} x(\theta) = r(\theta - sen\theta) \\ y(\theta) = r(1 - cos\theta) \end{cases} \quad \text{com } \theta \in \mathbb{R}.$$

No GeoGebra essas equações podem ser inseridas denominando-se, por conveniência, o ângulo θ como parâmetro *t* e criando-se um controle deslizante denominado *r* para o raio da circunferência geradora. No campo de entrada, inserindo-se $p(t) = r(t - sent)$ e $q(t) = r(1 - cost)$ e utilizando-se o comando *Curva [p(t), q(t), t, 0, 4πr],* sendo *r* o raio da circunferência, teremos a cicloide gerada conforme a figura a seguir:

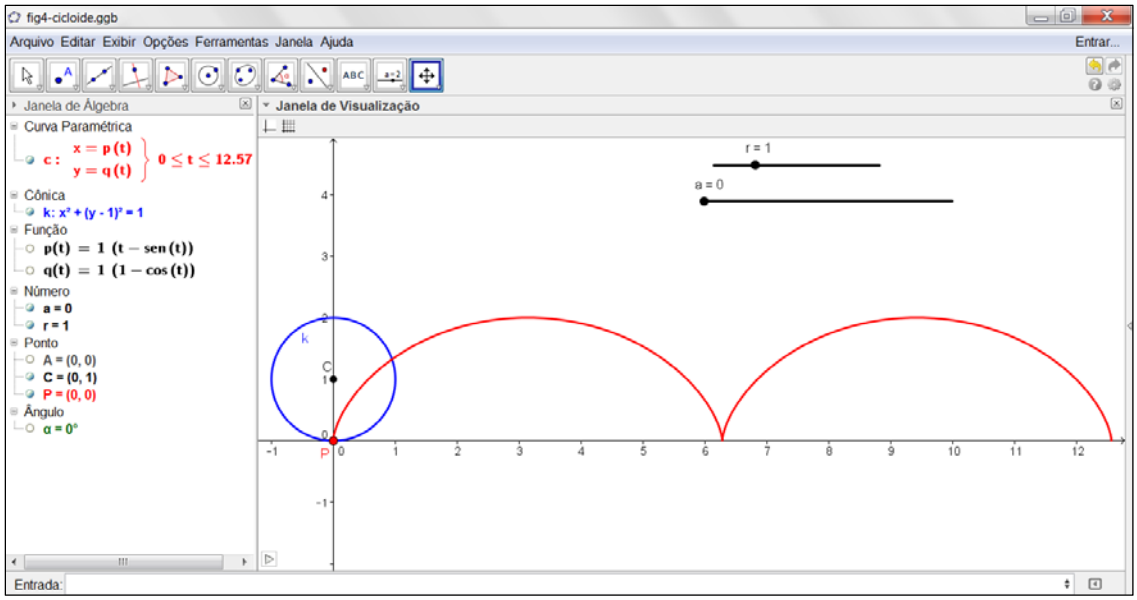


Figura 5. Equações paramétricas da cicloide.

Além da construção da cicloide por meio de suas equações paramétricas, pode-se comentar com os alunos que a mesma pode ser obtida do ponto de vista de um lugar geométrico, com relação ao ponto *P* e o parâmetro *a*. Para isso, utilizamos o comando do GeoGebra denominado *Lugar Geométrico* do ponto *P* em relação ao parâmetro *a*.

As equações paramétricas $x(t)$ e $y(t)$ obtidas podem ainda ser estudadas algebricamente para se validar algumas conjecturas. Na equação $x(t) = r(t - sent)$, com t $\in \mathbb{R}$ pode-se discutir, por exemplo, que $x(t) = 0$ é válida se, e somente se, $t - sent = 0$, o que implica $sent = t$ e isso só ocorre quando $t = 0$ conforme ser observado na cicloide gerada.

Pode-se discutir também a respeito da existência do valor máximo para $x(t)$, pois como $sent$ varia no intervalo $[-1, 1]$, como t $\in \mathbb{R}$, o valor de $t - sent$ varia no intervalo $[t - 1, t + 1]$. Sendo assim, conclui-se que $x(t)$ não admite valor máximo.

Para a equação $y(t) = r(1 - cost)$, como $cost$ varia no intervalo$[-1, 1]$ consequentemente o valor de $y(t)$ varia no intervalo $[0, 2r]$ pois para $t = \pi + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, teremos $cost = -1$ e, portanto, $y = 2r$ (valor máximo) e para $t = 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, teremos $cost = 1$ e, portanto, $y = 0$ (valor mínimo) conforme observou-se na conjecturou-se sobre a forma da cicloide.

Com relação às propriedades da cicloide observadas no contexto histórico, como por exemplo, o cálculo da área e comprimento de arco, cabe ressaltar que ambas podem ser obtidas no GeoGebra, entretanto sua demonstração formal foge ao escopo dos assuntos abordados no Ensino Médio, pois envolvem conceitos tratados num curso de Cálculo Diferencial e Integral no Ensino Superior, por exemplo.

Aplicação: Experimento prático

Após obter as equações paramétricas da cicloide pode-se efetuar um experimento prático ligado ao problema de se obter uma curva ao longo da qual uma partícula, sob a influência da gravidade, deslizará no tempo mais curto. Conforme foi descrito no contexto histórico,

constatou-se que tal curva é chamada de braquistócrona, que corresponde a uma cicloide invertida.

Para comprovar tal descoberta, inicialmente realizou-se uma simulação utilizando o GeoGebra onde foram construídas geometricamente três rampas com os seguintes formatos: plano inclinado, arco de parábola e braquistócrona, ambas com o mesmo desnível de altura e com o mesmo ponto inicial e final. Foram inseridas em cada rampa, respectivamente, três pontos A, B e C que representavam as três esferas abandonadas, respectivamente, no plano inclinado, arco de parábola e braquistócrona.

Utilizando o comando *Animar,* os três pontos ao serem movimentados, deslizaram sobre as rampas construídas e constatou-se que o ponto C localizado na braquistócrona é o primeiro a atingir o ponto de chegada, conforme a figura a seguir:

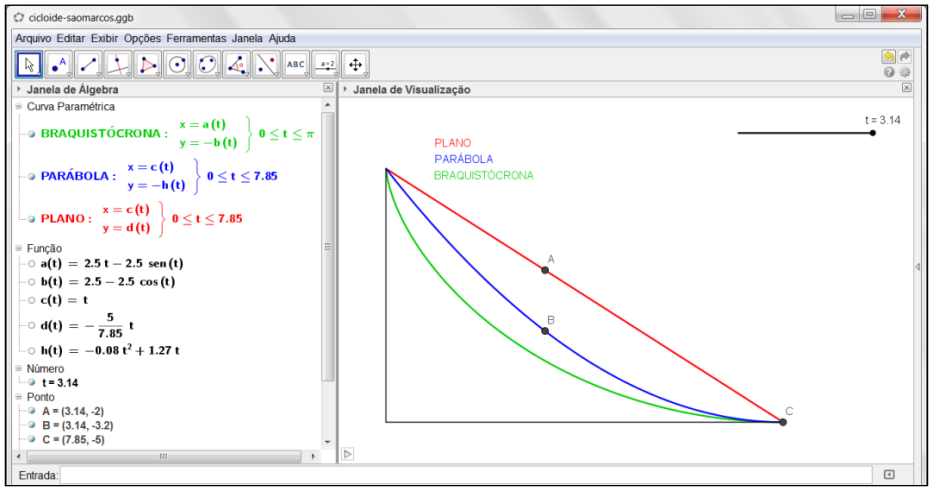


Figura 6. Simulação do experimento no GeoGebra

Para o experimento prático, utilizando-se materiais simples como placas de madeira, parafusos para fixação e esferas de aço, elaborou-se um sistema constituído por três rampas cujas formas correspondiam ao plano inclinado, arco de parábola e braquistócrona (cicloide invertida).

O objetivo desse experimento procurou mostrar que ao abandonarmos três esferas de aço idênticas simultaneamente do mesmo ponto de partida, a braquistócrona é aquela que permite a descida no menor tempo possível, conforme figura a seguir:

Figura 7. Experimento prático

Com isso, além do estudo teórico ligado ao objeto matemático esse experimento permitiu diagnosticar uma importante aplicação da cicloide envolvendo tempo mínimo de descida de objetos e que pode ser usada, por exemplo, da construção de pistas de skate, ou em alguma situação que necessite de tal característica.

Considerações finais

Esse trabalho procurou mostrar por meio de um exemplo, o estudo da curva cicloide, possibilidades e uma proposta de abordagem de um tópico matemático abordado no Ensino Médio com vistas à interdisciplinaridade de diversos conceitos e áreas envolvidas, evidenciando a importância do uso de um recurso computacional no ensino e aprendizagem da Matemática.

Ao realizar o estudo da cicloide procuramos destacar a pesquisa sobre o contexto histórico ligado à gênese e ao desenvolvimento do objeto matemático, a questão do ponto de vista dinâmico envolvendo a construção da curva e os conceitos matemáticos que podem ser explorados como geometria plana, analítica bem como alguns tópicos envolvendo trigonometria.

Além disso, a abordagem em sala de aula desse assunto permite ao professor a realização de um experimento prático, o que torna em grande medida um atrativo por parte dos alunos no estudo do objeto matemático.

Em todas as etapas envolvidas, o GeoGebra exerceu um papel imprescindível, pois além de se constituir como um recurso computacional auxiliar no ensino e aprendizagem, o mesmo permite ao aluno explorar, intuir, conjecturar, interagir com o objeto matemático de estudo de modo dinâmico, além de auxiliar na validação das hipóteses e conjecturas formuladas pelos estudantes bem como os resultados encontrados no contexto histórico. O GeoGebra também se tornou extremamente útil na simulação do experimento realizado sobre a braquistócrona demonstrando sua grande gama de recursos, o que se pode inferir sua significativa contribuição na construção do conhecimento científico.

Referências e bibliografia

Ávila, G. S. S. (2011). *Cálculo das funções de uma variável* (Vol.2.). Rio de Janeiro: LTC, 2011.

Baron, M. E. V., & Bos, H. J. M. (1985). *Curso de história da matemática: origens e desenvolvimento do cálculo* (Tradução de José Raimundo Braga Coelho, Rudolf Mayer e Maria José M. M. Mendes). Brasília: Editora da Universidade de Brasília, 5 v.

Boyer, C. (1996). *História da Matemática* (Tradução Elza F. Gomide, 2ª. ed.). São Paulo: Edgard Blucher.

Courant, R., & Robbins, H. (2000). *O que é matemática? : uma abordagem elementar de métodos e conceitos* (Tradução de Adalberto da Silva Brito). Rio de Janeiro: Ciência Moderna.

Eves, H. (2004). *Introdução à História a Matemática* (Tradução Hygino H. Domingues). Campinas, SP: Editora de UNICAMP.

Simmons, G. F. (2007). *Cálculo Diferencial e Integral com Geometria Analítica* (Vol. 1., Trad. Seiji Hariki). São Paulo: Pearson Education do Brasil.

Poincaré, H. (1984). *A Ciência e a Hipótese* (Tradução Maria Auxiliadora Kneipp). Brasília: Editora UNB.

Poincaré, H. (1995). *O valor da ciência* (Tradução de Maria Helena Franco Martins). Rio de Janeiro: Contraponto.

Poincaré, H. (2004). *Science and Method* (Translated by Francis Maitland). New York: Barnes e Noble Books.

Poincaré, H. (2008). *Ensaios Fundamentais.* Rio de Janeiro: Contraponto.

O laboratório de informática em escolas públicas de Guaratinguetá e o Programa Acessa Escola

Ingrid Cordeiro **Firme**
Instituto de Geociências e Ciências Exatas de Rio Claro, Universidade Estadual Paulista
Brasil
ingfirme@gmail.com
Rosa Monteiro **Paulo**
Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista
Brasil
rosa@feg.unesp.br

Resumo

Neste texto apresentamos um estudo realizado sobre um Programa que visa à implantação do uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) em escolas públicas de Educação Básica do Estado de São Paulo, Brasil. Por meio de um projeto vinculado ao Observatório da Educação, do Ministério da Educação e Cultura, desenvolvemos uma pesquisa de Iniciação Cientifica em que se procurou compreender as ações relacionadas ao Programa Acessa Escola, em Guaratinguetá, e sua contribuição para que o ensino e a aprendizagem da Matemática sejam mediados pelas TIC. A análise dos dados revela que, embora muito investimento tenha sido feito em termos de equipamentos, as ações didáticas com recursos tecnológicos ainda não são do cotidiano do professor.

Palavras chave: Ensino e aprendizagem da matemática; Tecnologia da informação e comunicação; Educação Matemática; Fenomenologia.

Introdução

No Brasil há histórico de grande quantidade de verba pública investida para equipar as escolas com recursos para a implementação do uso da informática. Dados da Secretaria da Educação a Distância (SEED), do Ministério da Educação e Cultura, Brasil, mostram que 143.355 microcomputadores foram distribuídos para 14.521 escolas de 5.564 municípios do Território Nacional. No entanto, a pesquisa em Educação Matemática que se volta para o uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), revela que, "embora esforços tenham sido empreendidos para equipar as escolas com computadores, ainda são poucos os professores que os utilizam em sua prática profissional" (Silva, 2009, p. 2).

Alguns desses esforços são empreendidos na tentativa de mudar tal situação. Há distintos Projetos com incentivos governamentais que mostram tal intenção. Recentemente, o Ministério da Educação e Cultura (MEC), implantou um programa federal o Programa Nacional de Tecnologia Educacional (ProInfo) visando incentivar o uso da informática na Educação. De acordo com o site do MEC, o ProInfo,

> É um programa educacional com o objetivo de promover o uso pedagógico da informática na rede pública de educação básica. O programa leva às escolas computadores, recursos

> digitais e conteúdos educacionais. Em contrapartida, Estados, Distrito Federal e municípios devem garantir a estrutura adequada para receber os laboratórios e capacitar os educadores para uso das máquinas e tecnologias (Brasil, 1997).

O ProInfo é, nesse sentido, um programa educacional criado por uma portaria Ministerial, a Portaria nº 522/MEC, de 9 de abril de 1997, que visa ao uso pedagógico das Tecnologias de Informação e Comunicações (TIC) na rede pública de ensino, nos níveis de ensino fundamental e médio (atendendo crianças e jovens na faixa etária dos 07 aos 15 anos). As ações desse Programa foram desenvolvidas pela Secretaria de Educação a Distância (SEED), por meio do Departamento de Infra-Estrutura Tecnológica (DITEC), em articulação com as Secretarias de Educação do Distrito Federal, dos Estados e de alguns Municípios brasileiros, que assumiram a corresponsabilidade pela implantação e pelo desenvolvimento de projetos cujo principal objetivo é a inserção das tecnologias nas escolas.

No Estado de São Paulo a Secretaria Estadual da Educação lançou, em 1998, um Programa em atenção a esse apelo do governo federal intitulado "*A escola de cara nova na era da informática*". Por meio de tal Programa a Secretaria Estadual equipou os laboratórios de informática das escolas adquirindo mais de 40 títulos de softwares destinados a temas variados, dentre os quais àqueles relativos ao ensino e a aprendizagem da Matemática. Dentre os vários softwares que foram distribuídos estão alguns específicos para o ensino de Matemática como, por exemplo, o Cabri II, Supermáticas, Fracionando, Factory e Bulding Perspective. Além do equipamento, algumas ações de formação docente também foram desenvolvidas em todo o Estado por meio de parcerias estabelecidas com as Diretorias de Ensino.

No entanto, a realidade mostra que o Programa não foi suficiente para que os laboratórios fossem efetivamente utilizados pelos professores. Novos Programas foram desenvolvidos na tentativa de que o uso dos laboratórios de informática nas escolas fosse efetivado. Atualmente temos, no Estado de São Paulo, o *Programa Acessa Escola*. Este programa,

> tem por objetivo promover a inclusão digital e social dos alunos, professores e funcionários das escolas da rede pública estadual. Por meio da Internet, ele possibilita aos usuários o acesso às tecnologias da informação e comunicação para a construção do conhecimento e o fortalecimento social da equipe escolar (São Paulo, 2008).

O principal objetivo do Programa é disponibilizar para as escolas os recursos do ambiente *web*, promovendo a criação e o fortalecimento de uma rede entre professores (para uso, troca e produção de novos conteúdos) que se torne um ambiente de colaboração. Nota-se, na intenção do Programa, um desejo de implementação da formação de professores envolvendo as características de um grupo colaborativo, embora a distância.

Porém, apesar dos esforços empreendidos e dos gastos efetuados, muitas vezes os computadores que estão nas escolas não são utilizados para fins pedagógicos. Borba e Penteado (2001), pesquisadores brasileiros em Educação Matemática, analisam as potencialidades pedagógicas do uso das TIC e destacam que

> [...] é preciso que, além do equipamento, os programas do governo incentivem e fiscalizem a infraestrutura oferecida pelas escolas. Se a atividade com informática não for reconhecida, valorizada e sustentada pela direção da escola, todos os esforços serão pulverizados sem provocar qualquer impacto dentro da sala de aula (Borba e Penteado, 2001, p.25).

Desde essas pesquisas, cada vez mais autores como Kensky (2007), Sousa (2010), Oliveira (2012), vêm mostrando que as práticas docentes dos professores nas escolas públicas pouco (ou

quase nada) têm mudado no que se refere ao uso das TIC. Isso nos faz interessados nos motivos que fazem com que os professores não tenham em sua prática docente as TIC como possibilidade ou como um recurso disponível ao ensino. Assim, por meio de um projeto de Iniciação Científica, ação de um projeto mais abrangente aprovado no Observatório da Educação (OBEDUC)/2012, fomos conhecer as condições dos laboratórios de informática das escolas públicas do município de Guaratinguetá, São Paulo. Por meio de visitas realizadas às escolas desse município, identificamos as condições de uso dos laboratórios observando a quantidade de computadores, as condições de funcionamento dos equipamentos e os softwares disponíveis. Por meio de entrevistas realizadas com membro da equipe gestora das escolas, estagiário do Programa e professores de Matemática, pôde-se compreender a realidade de uso para além das condições do laboratório.

Abordagem metodológica

Embora no projeto de Iniciação Científica alguns dados quantitativos tenham sido relevantes para a visão geral do quadro que expõe as condições de uso dos laboratórios, envolvemo-nos numa análise qualitativa do obtido nas entrevistas para, além dos dados numéricos, conhecer os modos pelos quais os sujeitos se envolvem com o Programa Acessa Escola no município de Guaratinguetá. Esses sujeitos se revelaram para nós durante as visitas as escolas. Além de membros da equipe gestora, como diretor, vice-diretor, professor coordenador pedagógico e da equipe docente, especialmente o professor de matemática, conhecemos e ouvimos o estagiário[1], figura que no Programa Acessa Escola é fundamental. Ou seja, embora tenhamos identificado a quantidade de computadores disponíveis nos laboratórios, os softwares mais utilizados, a frequência de uso do laboratório por alunos e professores, também nos interessou a postura de cada um dos atores da escola que podem contribuir para que o uso dos recursos tecnológicos seja efetivo. Para tanto, fizemos entrevistas com os membros da equipe gestora, os professores de matemática e com os estagiários do Programa Acessa Escola. Da equipe gestora nos interessava conhecer o apoio dado para o uso efetivo do laboratório. Do professor, o modo pelo qual ele vê as potencialidades do laboratório para o ensino e a aprendizagem da Matemática. Com o estagiário nos era importante compreender o modo pelo qual ele entende sua função no Programa e o que efetivamente desenvolve. Orientados pela interrogação "quais as condições de funcionamento do Programa Acessa Escola nas escolas públicas do município de Guaratinguetá" colocamo-nos a campo orientados pelos princípios da pesquisa qualitativa de abordagem fenomenológica.

A opção pela pesquisa qualitativa deu-se por entendermos que ela nos permite compreender o investigado considerando diferentes perspectivas sem que se exijam generalizações. Isso abre ao pesquisador a possibilidade de fazer considerações com foco em sua interrogação visando compreendê-la e não justificá-la mediante causas e efeitos. Ou seja, a abordagem qualitativa na pesquisa permite que o pesquisador expresse o compreendido acerca do contexto investigado.

Ainda, segundo Bogdan e Biklen (1999) a pesquisa desenvolvida na abordagem qualitativa não coloca o pesquisador como observador neutro que, de modo imparcial, conduz sua

[1] O estagiário é um aluno da escola que é selecionado para atuar no Programa Acessa Escola recebendo, do Governo do Estado de São Paulo, uma bolsa. É ele a figura que fica maior tempo no laboratório tendo contado com professores, alunos, visitantes, enfim todos que queiram utilizar o laboratório com alguma finalidade didática ou de lazer.

investigação. A pesquisa qualitativa considera o pesquisador como sujeito próximo ao que é investigado de modo que "o processo de condução da investigação qualitativa reflecte uma espécie de diálogo entre os investigadores e os respectivos sujeitos, dados estes não serem abordados de forma neutra" (p. 51). Ou seja, entende-se que o investigador, na pesquisa qualitativa, está com os sujeitos investigados buscando compreender o que por eles é expresso.

Para nós isso fez muito sentido uma vez que buscamos conhecer as condições de funcionamento do Programa Acessa Escolas nas escolas públicas do município de Guaratinguetá a partir do que dizem os sujeitos envolvidos nessas escolas com o Programa: gestores, professor e estagiário.

Os dados, portanto, são expressões do compreendido por esses sujeitos que, ao darem-nos entrevistas, expressam sua vivencia com o Programa Acessa Escola. As entrevistas, ao serem postas em texto escrito, abrem-se a análise e interpretação. A análise seguiu o rigor da pesquisa fenomenológica. A fenomenologia é uma corrente filosófica que surge na Alemanha com Edmund Husserl (1859-1938); matemático e filósofo. Na pesquisa qualitativa que se orienta pela abordagem fenomenológica o foco é a explicitação do que nos dados pôde ser compreendido pelo pesquisador. Não se trata, porém, de mera descrição. "A investigação fenomenológica começa com o silêncio" (Psathas, 1973, *apud* Bodgan e Biklen, 1999, p. 53). Ou seja, exige do pesquisador uma abertura para ouvir o que os sujeitos dizem, mesmo que no silêncio de um olhar ou gesto. Nesse sentido a fenomenologia volta-se para os detalhes do que é pesquisado, ouvindo os sujeitos entrevistados de modo que seja possível interpretar o dito com vistas a uma generalização. Esta generalização não é uma universalidade uma vez que está num certo contexto ou como se diz na abordagem fenomenológica, numa certa região de inquérito. Isto é, interessa-nos a realidade das escolas do município de Guaratinguetá. O Programa Acessa Escola nesse município, da forma como é visto e vivido pelos sujeitos envolvidos na escola, não é, necessariamente, idêntica a de outras localidades. Porém, oferece um olhar, uma perspectiva, uma totalidade que diz da realidade vivida nas escolas desse município.

Nesse sentido afirma-se que, na pesquisa fenomenológica, não existem problemas que devam ser resolvidos. O pesquisador tem dúvidas as quais interroga com a intenção de compreendê-las e esclarecer o compreendido explicitando-o a partir do movimento de análise e interpretação dos dados. Esse esclarecer exige um rigor nos procedimentos tanto de coleta de dados quanto de análise que objetivam expressar o mais fielmente possível o que do dito pelos sujeitos foi compreendido pelo pesquisador. Assim, a explicitação do pesquisador revela uma metacompreensão do Programa Acessa Escola no munícipio de Guaratinguetá, pois diz do que o pesquisador compreendeu acerca do que os sujeitos envolvidos com o Programa nas escolas visitadas, vivenciam, compreendem e expressam. Desse modo a análise é criteriosa e envolve dois momentos significativos: a análise ideográfica e a nomotética.

Na análise ideográfica, segundo Machado (1994), o pesquisador procurar ler, tantas vezes quanto for necessário, os depoimentos dos sujeitos, buscando o sentido do que é dito. Nessa leitura ele vai destacando do texto trechos significativos para a compreensão do que é interrogado. Esses trechos são denominados Unidades de Significado uma vez que são significativos ao pesquisador para que ele possa explicitar o sentido que o dito pelo sujeito tem para o que quer investigar. Essas Unidades de Significado trazem uma análise individual do dito. Ou seja, são próprias ao discurso de cada um dos sujeitos entrevistados.

Dando prosseguimento à análise, o pesquisador se volta para as Unidades de Significado tentando compreender o sentido do todo. Ou seja, o que nisso que particularmente se mostrou em cada discurso diz do todo investigado? O que se mostra relevante nos distintos depoimentos que convergem para uma ideia central (ou nuclear) que permite ao pesquisador dizer sobre *as condições de funcionamento do Programa Acessa Escola* para os sujeitos entrevistados? Busca-se, portanto, compreender o fenômeno *condições de funcionamento* do Programa. Adentra-se ao movimento da análise nomotética em que o pesquisador busca, na convergência do que é dito, a compreensão do interrogado. A análise nomotética, segundo Machado (1994), "não é apenas uma verificação cruzada da correspondência das afirmações reais, mas uma profunda reflexão sobre a estrutura do fenômeno." (p. 42). É, pois, na análise nomotética que o fenômeno investigado se mostra ao pesquisador dando-lhe possibilidades de compreensão do interrogado. Essas compreensões são expressas mediante a análise das Categorias Abertas. As categorias abertas são, segundo Husserl (*apud* Bicudo, 1994), grandes regiões de generalidades que revelam o que, nos discursos dos sujeitos, foi compreendido e interpretado pelo pesquisador que lhe permite dizer do fenômeno investigado.

Na pesquisa relatada neste texto, além dos dados quantitativos que mostram parte da realidade das escolas pesquisadas, construímos a interpretação dos depoimentos dos sujeitos e, aqui, optamos por apresentar a análise do discurso dos professores de matemática em sua vivência com o funcionamento do Programa Acessa Escola em sua realidade escolar.

O que nos dados se mostra

A pesquisa foi desenvolvida em 14 (quatorze) escolas da rede pública estadual do município de Guaratinguetá, São Paulo, Brasil. Dentre essas, 12 (doze) escolas têm o laboratório ativo. Em outras duas escolas o laboratório está desativado devido a reformas na estrutura física. O número de computador é muito variado, pois sua distribuição é dependente do número de alunos da escola na época de adesão ao Programa. Nas escolas de Guaratinguetá esse número varia entre 06 (seis) e 18 (dezoito) máquinas. Há uma escola com seis computadores, 03 escolas com 07 computadores, 05 escolas com 11 computadores, 03 escolas com 12 computadores e 02 escolas com 18 computadores. As escolas que possuem os 18 computadores são as que têm os laboratórios desativados para reforma. Todas as escolas têm acesso a internet.

A entrevista realizada com os estagiários apontava que os professores das escolas pouco utilizam o laboratório. Os motivos para isso, na visão dos estagiários, são vários. Dentre eles era apontada a quantidade de máquinas no laboratório relativamente ao número de alunos das turmas e a quantidade de computadores fora de uso. Em oito escolas, dentre as 12 que possuem o laboratório em funcionamento, há máquinas quebradas (fora de uso).

Diante da informação dos estagiários procuramos, nas 12 (doze) escolas que possuem o laboratório em funcionamento, ouvir o professor de matemática. Na análise do que por eles foi dito vimos que a maioria (re)conhece as potencialidades do uso das Tecnologias para a aprendizagem matemática. Os professores entrevistados afirmam conhecer softwares (como cabri, geogebra, graphmática, fracionando, entre outros) que estão disponíveis nos computadores dos laboratórios. Afirmam, ainda, já terem feito uso desses recursos algumas vezes. Porém, enumeram vários fatores que os impedem de ter as Tecnologias como aliado em sua prática docente.

Para este texto, trazemos parte da análise efetuada na pesquisa. Lembramos que, na abordagem fenomenológica, a análise visa explicitar o sentido do compreendido pelo

pesquisador. Para tanto, as entrevistas foram gravadas em áudio e transcritas. Ao se tornarem texto, mediante as transcrições, iniciamos a análise do dito. Destacamos, no texto das entrevistas, as unidades de significados. Transcrevemos tais unidades para um quadro como o exemplificado abaixo. Nomeamos esse quadro de 'análise ideográfica do discurso'. Nele há 05 (cinco) colunas. Na primeira identificamos o sujeito, na segunda coluna trazemos a Unidade de Significado que é um trecho da entrevista na linguagem do sujeito. Na terceira coluna fazemos uma asserção articulada trazendo o discurso do sujeito na linguagem do pesquisador. Na quarta coluna nomeamos as ideias nucleares que se destacam no discurso, mediante a interpretação do pesquisador. A quinta e última coluna expõe as convergências percebidas. Destaca-se que esta última coluna é construída após todas as ideias nucleares destacadas, pois revela o modo pelo qual o pesquisador vai compreendendo a fala dos sujeitos. Assim, desde as ideias nucleares, a intenção é expor o compreendido, pois traz a interpretação do pesquisador. O quadro abaixo revela parte do movimento efetuado na interpretação dos dados da entrevista dos professores. Optamos por fazer um recorte da entrevista dos 12 professores destacando aquelas falas que nos permitiram a construção de uma categoria aberta relativa à aprendizagem. O quadro expõe, portanto, parte das respostas dos professores relativamente à questão que lhes propusemos com o objetivo de ver se eles consideravam o uso das tecnologias relevantes para a aprendizagem matemática. Notar-se-á que não há falas dos 12 professores entrevistados, pois, uma vez que optamos por trazer para a discussão neste texto a categoria relativa à aprendizagem, elegemos falas dos sujeitos que nos remeteram a essa categoria. É importante, ainda, destacar que, na pesquisa fenomenológica, as ideias nucleares que permitem as convergências não são estanques ou isoladas podendo, uma mesma ideia nuclear estar presente (ou contribuir para) em mais de uma categoria aberta.

Tabela 1
Análise ideográfica do discurso dos professores

Sujeito	Fala do Sujeito	Asserção articulada	Ideias Nucleares	Convergência
P1	Contribui bastante principalmente para a parte visual e a rapidez em se montar uma função, por exemplo, e desenhar.	O sujeito afirma que o uso do computador contribui porque favorece o aspecto visual e permite maior rapidez na construção do gráfico de funções.	Aspecto visual. Rapidez para representação.	Desenvolver a visualização Abrir horizontes à aprendizagem
P3	O uso da tecnologia é um facilitador, pois a linguagem digital faz parte do vocabulário dos alunos de hoje.	O sujeito afirma que a tecnologia é um facilitador uma vez que a linguagem digital faz parte do vocabulários dos alunos que estão atualmente na escola.	Facilitador da aprendizagem	Abrir horizontes à aprendizagem
P4	Dinamizar a aula, para que a aula não seja somente na lousa. Talvez assim o aluno se interessasse mais nas aulas.	O sujeito afirma que o uso das tecnologias auxilia no dinamismo da aula e, talvez, no interesse do aluno.	Dinamizar a aula. Interesse.	Dinamizar a aula. Favorecer interesse.

Sujeito	Fala do Sujeito	Asserção articulada	Ideias Nucleares	Convergência
P6	Ajuda os alunos a desenvolver habilidades e enxergar novas maneiras de utilizar o computador além de acessar as redes sociais.	O sujeito afirma que o uso do computador em aulas favorece o desenvolvimento de habilidades nos alunos bem como mostrar-lhes potencialidades que vão além do acesso as redes sociais.	Desenvolver habilidades de uso do computador.	Abrir horizontes à aprendizagem
P7	É muito importante a utilização da informática como ferramenta para o ensino da matemática, porque os softwares são muitos agradáveis visualmente e muito eficazes, por exemplo, em relação à velocidade e precisão nos cálculos.	O sujeito afirma que o uso das tecnologias favorece o ensino de matemática uma vez que os softwares oferecem aspectos visuais agradáveis, dão velocidade ao que é feito e precisão.	Aspecto visual. Eficiência, Velocidade e precisão.	Desenvolver a visualização. Abrir horizontes à aprendizagem.
P10	As formas de aprendizado tem que estar em constante evolução acompanhando as tecnologias recentes.	O sujeito afirma que o modo pelo qual o aluno aprende deve ser atualizado acompanhando a tecnologia.	Modos de aprender dinâmico evoluindo com as tecnologias.	Abrir horizontes à aprendizagem.

A tabela 1, que expõe parte do quadro de análise da entrevista dos professores, traz a convergência das Unidades de Significado que permite a construção das categorias de análise. Na pesquisa, a análise leva-nos a três categorias abertas – *aprendizagem; ensino* e i*nteresse e interação*. A interpretação das categorias revela o modo pelo qual os professores de matemática das escolas do município de Guaratinguetá, que possuem o Programa Acessa Escola, entendem o uso das tecnologias em sala de aula. Entende-se que esses professores reconhecem as potencialidades das TIC para a aprendizagem matemática de seus alunos, para o ensino de conteúdos curriculares dessa ciência e como um modo de despertar o interesse dos alunos, favorecendo a interação entre eles, entre alunos e professores e entre aluno e conhecimento. Para este texto vamos nos ater, conforme dissemos, a um maior detalhamento da categoria relativa à *aprendizagem*.

A análise efetuada mostra que, para os professores entrevistados, isto é, professores de matemática das escolas públicas de Guaratinguetá que possuem o Programa Acessa Escola, o uso das tecnologias é significativo uma vez que oferece uma oportunidade de *dinamizar as aulas*, *desenvolver a visualização* e *abrir horizontes à aprendizagem*. Essas ideias nos levaram a nomear a categoria *Aprendizagem*.

Salientamos que este é um recorte da entrevista que tem o objetivo de mostrar o modo pelo qual o professor vê as tecnologias. No entanto, isso não significa que ele tenha as tecnologias presentes em suas aulas. Pelo contrário, em outras questões que lhe fizemos, vê-se que a maioria

não usa o laboratório de informática. Assim, segundo o que entendemos, essa é uma aparente contradição que, na pesquisa, nos fez atentos e curiosos, pois, embora os professores entrevistados afirmem a relevância da tecnologia, não a utilizam. Vamos entender um pouco tal contradição aparente.

Ao interpretarmos a categoria *aprendizagem* focamos a expressão *dinamizar a aula*. Para tanto fomos, inicialmente, ao sentido atribuído à palavra 'dinamizar' no dicionário da língua portuguesa. Vimos que ela está relacionada a uma intenção do professor que remete a ação: de dar caráter de dinâmico a algo ou a alguém. A palavra *dinâmico*, por sua vez, tem origem grega e relaciona-se a 'poder', 'força', 'capacidade', 'potência'. Interpretamos que os professores vêm nas tecnologias esse 'poder', essa 'força' que permite, inclusive, despertar no aluno o interesse. Isso porque, sua aula não apenas terá o caráter estático de fatos expostos na lousa, mas pode ganhar movimento, seja na visualização, seja na rapidez dos cálculos, seja na velocidade da informação que vêm devido a familiaridade do aluno com o computador e com sua interface (linguagem digital). Mostra-se para nós que os professores, ao desejarem que, pelo uso das tecnologias, suas aulas ganhem dinamismo, expressam uma intenção: de que suas aulas tenham o poder de fazer o aluno ver, compreender o sentido do que, em matemática, lhes é transmitido. Ou seja, o professor revela o desejo de querer que o aluno *aprenda* com sua aula e vê, no computador, ou nos software que pode utilizar, uma possibilidade de dinamizar a aula, de torna-la potencialmente significativa ao aluno levando-o a aprender. Mas qual o sentido de 'aprender'? Novamente, se nos voltamos para o sentido atribuído ao termo pelo dicionário, vemos que o aprender, por sua vez, diz do apropriar-se de algo, do compreender. O aluno, ao aprender com o computador, apodera-se do que lhe é mostrado. Pela potencialidade visual que o computador (ou os software) oferece, pela precisão de cálculos que oferece, pela rapidez da investigação abrem-se possibilidades de o aluno vir a compreender. Abrem-se, portanto, para o professor, horizontes à aprendizagem do aluno. Ele entende que nos dias atuais o computador esta presente na vida do aluno, uma vez que ele faz uso das tecnologias em diferentes situações. Sendo assim, ao trazê-lo para a sala de aula, potencializa-se a aprendizagem do aluno fazendo-o interessado pela aula. O interessar-se, por sua vez, está relacionado ao empenhar-se. Mostra-se, nesse sentido, o desejo que o professor tem em, ao fazer uso do computador, levar o aluno a empenhar-se com as aulas, voltar-se atentamente para o que é feito, buscando aprender, atribuir significado ao que é feito. Interpretamos, do depoimento dos professores, que estes vêm as tecnologias como um instrumento potencializador da aprendizagem matemática do aluno.

Porém, ao questionarmos 'se' e 'como' eles fazem uso das tecnologias para o ensino, as respostas vão noutra direção. Ou seja, o professor demonstra em sua fala compreender a relevância (e mesmo a força, a potencialidade) do uso das tecnologias para a aprendizagem dos alunos, mas não as têm como prática em sua docência. Por quê? A análise do depoimento dos professores mostra que a grande maioria – oito dentre os doze – não se sente segura para usar o laboratório de *informática*. Esses professores afirmam usarem esporadicamente o laboratório de informática da escola para realizar pesquisas na internet, para acessar um site de jogo ou mesmo para mostrar um gráfico de funções aos alunos. Alegam que a quantidade de alunos em sala não lhes permite construir uma aula no laboratório que seja produtiva. Ou seja, dado o grande número de alunos pertencente a cada turma e ao pequeno número de máquinas disponíveis para o uso no laboratório, a aula 'não rende' pois a turma fica dispersa e desatenta. Não havendo máquinas suficientes para todos e necessário o trabalho em grupo e isso, normalmente, causa dispersão da turma. Na opinião dos professores entrevistados, isso prejudica a aula e impede o

trabalho com o conteúdo curricular uma vez que não será possível fazer a investigação que seria necessária e relevante à aprendizagem.

Considerações Finais

Mediante o analisado fica evidente a necessidade de formação desses professores para uso das tecnologias bem como uma ampliação nas condições de uso dos laboratórios – tanto no que se refere ao espaço físico quanto ao número de máquinas disponíveis. Compreende-se, pela análise dos dados, que o pouco uso dos laboratórios está relacionado, principalmente, a esse fator, uma vez que os professores declaram entender que a tecnologia é de grande importância para a aprendizagem matemática. A pesquisa revela a urgência de um trabalho efetivo por parte do sistema educacional (e do próprio governo que mantém o projeto) para que os objetivos do Programa sejam atingidos. Compreende-se que, no município de Guaratinguetá, embora a maioria dos professores declare ter frequentado minicursos e oficinas sobre o uso de software para o ensino de matemática, isso não lhes foi suficiente para adquirir confiança no uso das TIC com seus alunos. Tal confiança, segundo o que interpretamos, está aliada tanto a formação desses professores quanto as condições de uso do laboratório: turmas grandes e número insuficiente de máquinas, compreensão do modo pelo qual as aulas com tecnologias podem favorecer o trabalho com o conteúdo.

Nesse contexto, segundo nossa compreensão, não é simplesmente a implantação dos laboratórios com a inserção de máquinas e disponibilidade de software que irá mudar o atual quadro educacional no que diz respeito ao uso das TIC. Nota-se que tal quadro revela que o investimento feito é um desperdício de verba pública. É preciso investir na formação efetiva do professor dando-lhe condições de uso dos recursos oferecidos. Entende-se que nada adiantará computadores de última geração e programas modernos nas escolas do município se o profissional não se sentir seguro e capacitado para utilizá-lo. O professor precisa, além de compreender a potencialidade do uso das tecnologias para a aprendizagem do aluno, compreender o modo pelo qual pode se dar o ensino com tecnologias. Nisso está envolvido o seu papel (bem como o dos conteúdos) num cenário em que o ensino e a aprendizagem sejam mediados pelas Tecnologias da Informação e Comunicação.

Os depoimentos dos professores, embora revele que eles vêm o computador como potencial à aprendizagem do aluno, expõe uma realidade vivida na escola que os faz afastados do uso das tecnologias. Os professores não se mostram seguros para o seu uso relativamente ao currículo, aos objetivos de ensino, as propostas que visam desenvolver em suas aulas. Enfim, tal qual pudemos compreender na pesquisa, as condições de uso dos laboratórios de informática nas escolas de Guaratinguetá, mostram-se precárias. Praticamente nenhum dos objetivos do Programa está sendo atingido. No município o Programa não oferece condições ao professor para o ensino com as tecnologias, não potencializa a rede de comunicações que possibilitaria uma formação colaborativa e dá aos alunos acesso a sites diversos sem orientação. Ainda, vê-se, pela análise do discurso dos professores entrevistados, uma visão ingênua do uso das tecnologias sem que haja, conforme recomenda D'Ambrósio (1986) e Skovsmose (2007), uma reflexão sobre o desenvolvimento que a tecnologia produz e o modo pelo qual tal desenvolvimento se dá. Ou seja, embora os professores entrevistados, afirmem que entendem a relevância da tecnologia para a aprendizagem dos alunos não fazem uma análise do modo pelo qual essa aprendizagem poderia se dar e do papel que ele, professor, condutor das tarefas mediadas pela tecnologia, deve ter no desenvolvimento das potencialidades que ele afirma ver nos recursos tecnológicos.

Referências e bibliografia

Bicudo, M. A. V. (1994). Sobre a Fenomenologia. In: Bicudo, M. A. V.; Espósito, V. H. C. (Org.). Pesquisa Qualitativa em Educação. São Paulo, Editora UNIMEP.

Bogdan, R. e Biklen, S. (1994). Investigação qualitativa em Educação. Uma introdução à teoria e aos métodos, Porto Editora, LTDA.

Borba, M. C., Penteado, M. G. (2001). Informática e Educação Matemática. 1. ed. Belo Horizonte: Autêntica.

Brasil. (1997). Ministério da Educação. Programa Nacional de Tecnologia Educacional (ProInfo). Disponível em <http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=244&Itemid=823 > Acesso em: 15 de março de 2013.

D'Ambrósio, U. (1986). Da realidade à ação. Reflexões sobre a educação e matemática. São Paulo: Summus.

Kensky, V. M. (2007). Educação tecnologias: o novo ritmo da informação. Campinas: Papirus.

Machado, Ozeneide V. M. (1994). Pesquisa Qualitativa: modalidade fenômeno situado. In: Bicudo, M. A. V.; Espósito, V. H. C. (Org.). Pesquisa Qualitativa em Educação. São Paulo, Editora UNIMEP.

Oliveira, Sandra Suely. (2012). A formação de professores na modalidade a distância: a docência, o ensino e a prática pedagógica em discussão. Dissertação de mestrado. Teresina-Pi, Universidade Federal do Piauí.

Psatas, G. (1973). Phenomenological Sociology. New York: Wiley.

São Paulo. (2008). Resolução nº 37 de 24/05/2008. Institui o Programa Acessa Escola. São Paulo. Disponível em <http://acessaescola.fde.sp.gov.br/Admin/Handlers/ArquivoComp.ashx?jkasdkasdk=122&type=Alterar>. Acesso em: 09 de julho de 2013.

Silva, J. X. (2009). Influências da Informática Educativa na Prática Pedagógica do Professor de Matemática. 160 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal do Mato Grosso do Sul. Campo Grande. Mato Grosso do Sul.

Skvsmose, O. (2007). Educação Crítica: incerteza, matemática, responsabilidade. Trad. M. A. V. Bicudo. São Paulo: Cortez.

Sousa, Silvia Regina R. (2010). Educação e as novas tecnologias da informação e comunicação. Modulo IV do curso de Pedagogia em EaD. Programa da Universidade Aberta do Brasil, Piaui. Teresina-Pi UFPI.

O potencial da elaboração de aplicativos na contextualização do uso da simbologia algébrica no ensino médio

Sani de Carvalho Rutz da **Silva**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná – Câmpus Ponta Grossa
Brasil
sani@utfpr.edu.br
Rodrigo **Duda**
Instituto Federal do Paraná – Câmpus Irati
Brasil
rodrigo.duda@ifpr.edu.br

Resumo

Neste trabalho apresentamos resultados decorrentes de uma atividade realizada com alunos do primeiro ano do ensino médio de um curso técnico em informática de uma instituição de ensino pública na cidade de Irati, região sul do Brasil. Por meio da análise qualitativa de dados coletados durante a execução das atividades iniciais de um projeto de extensão na instituição, objetivou-se verificar o potencial do processo de desenvolvimento de aplicativos na contextualização do uso da matemática escolar no meio tecnológico, integrando a utilização da linguagem algébrica na elaboração de aplicativos para dispositivos móveis. Para a estruturação dos aplicativos foi utilizado o App Inventor, ferramenta gerenciada pelo Instituto de Tecnologia de Massachusetts. Constatou-se a viabilidade do aproveitamento das atividades decorrentes do processo de elaboração dos aplicativos como objeto auxiliar no processo de avaliação em matemática, servindo como estímulo para o desenvolvimento de habilidades relacionadas ao desenvolvimento do pensamento algébrico nos discentes envolvidos.

Palavras-chave: Ensino de matemática, Recursos computacionais, App Inventor, Aplicativos para Android, Linguagem algébrica.

Introdução

Ensinar matemática é uma tarefa árdua, principalmente se não forem estabelecidas relações entre o objeto de estudo com situações do cotidiano ou com suas aplicações no contexto científico e tecnológico. Enquanto conhecimento, essa disciplina se caracteriza por apresentar elementos que expliquem fenômenos sociais e culturais (Mendes, 2009, p. 12).

A dificuldade de contextualizar o conteúdo estudado, de forma que corresponda aos anseios dos educandos, torna a tarefa ainda mais complexa, pois boa parte das temáticas abordadas no ensino médio não são aplicáveis de forma perceptiva nas atividades cotidianas dos alunos. É necessário, então, sua abordagem como uma atividade que busca construir soluções para processos que surgem no dia-a-dia (Mendes, 2009, p.10).

Por um lado, deve-se proporcionar ao aluno uma formação sólida na disciplina, por esta ser indispensável no exercício de diversas profissões. No contexto do uso dos computadores, por exemplo, torna-se indispensável convencer o aluno de que a matemática está em operação

(Skovsmose, 2007, p. 48). Por outro lado, tem-se a tarefa de tornar atrativo o estudo das relações numéricas, de forma que este não seja pautado apenas na resolução mecânica de listas de exercícios.

Com a crescente evolução da tecnologia digital e com a facilidade com que os adolescentes têm acesso a computadores, *smartphones* e *tablets*, torna-se recorrente a necessidade de aproveitar essas ferramentas para a contextualização e estudo de temáticas abordadas em sala de aula.

Com esses pressupostos, o presente trabalho apresenta resultados decorrentes da análise qualitativa de uma atividade realizada por alunos do 1º ano de um curso técnico em informática integrado ao ensino médio em uma instituição federal de ensino na cidade de Irati, no estado do Paraná, região sul do Brasil.

Buscamos explorar formas de integrar a linguagem algébrica presente na descrição de algoritmos numéricos e modelagem de situações-problema com a estruturação de aplicativos para dispositivos móveis utilizando o *designer* de aplicativos *App Inventor*. Nesse contexto, o aluno é estimulado a representar as relações numéricas por meio de símbolos, que posteriormente são utilizados na estruturação de *softwares* simples de execução de cálculos.

Fundamentação teórica

Vista atualmente como um dos componentes tecnológicos mais importantes para efetivação da aprendizagem matemática, a informática tem sua relação com a educação matemática estabelecida por meio de perspectivas metodológicas que a atribuem como instrumento de superação de obstáculos enfrentados por professores e estudantes durante o processo de ensino-aprendizagem. O computador representa um papel decisivo no ensino da matemática, em virtude das possibilidades de construção de modelos virtuais (Mendes, 2009, p. 113).

A alfabetização informática deve ser considerada como algo tão importante quanto a alfabetização na língua materna e em matemática (Borba & Penteado, 2012, p. 87). Por ser uma ferramenta que se torna cada vez mais frequente na vida dos educandos, sua utilização pode englobar tanto a pesquisa quanto a utilização de *softwares* específicos para a exploração de conceitos e propriedades dos objetos estudados.

Nesse sentido, é importante destacar que mesclar o uso de ferramentas computacionais no processo de ensino-aprendizagem não corresponde somente à aplicação de um recurso como um mero adereço no contexto escolar. Compreender como os recursos computacionais podem contribuir para o desempenho das ações humanas e ser capaz de explorar programas de computadores e seus componentes são requisitos mínimos que os alunos devem dominar, correspondendo às exigências do atual mundo do trabalho (Cox, 2003, p. 69).

É importante ter em mente que esse novo cenário pode afetar a forma de comportamento dos alunos e do professor, bem como a forma como estes se comunicam (Penteado, 1999, p. 303). O uso do computador sugere um novo tipo de comportamento para o professor, independente da forma como seja utilizado, e à medida que este se familiarize com o seu uso, as práticas que inibem o avanço discente na criação de estratégias próprias de resolução de problemas não encontrarão espaço (Oliveira, 1997, p. 92).

Apesar de representar uma opção atrativa tanto para o aluno quanto para o professor, cabe ressaltar que a inserção de uma ferramenta computacional em sala de aula deve ser

cuidadosamente planejada, tornando-se necessário refletir se sua inserção contribuirá efetivamente para a melhoria da qualidade das atividades desenvolvidas (Cox, 2003, p. 53). Torna-se necessário, então, analisar previamente as potencialidades da ferramenta a ser utilizada, verificando se esta servirá efetivamente para a melhoria no processo de desenvolvimento de habilidades no aluno. Caso contrário, é possível que a ferramenta escolhida não seja integrada ao processo de ensino-aprendizagem, sendo apenas um simples adereço na sala de aula (Giraldo, Caetano & Mattos, 2013, p. 392).

Quanto à forma de estruturar as atividades, recomendam-se propostas pedagógicas que enfatizem a experimentação, visualização, simulação, comunicação eletrônica e problemas abertos (Borba & Penteado, 2012, p. 88). Desta forma, não compete ao aluno apenas manipular objetos e executar cálculos. Torna-se necessária a interação entre o aluno e a ferramenta utilizada.

Diante dos desafios aqui elencados, o docente deve estar em constante processo de atualização, buscando aprimorar-se quanto ao uso da tecnologia da informação nas atividades em sala, aproveitando-a da melhor forma no planejamento das atividades de ensino.

Metodologia

As mídias digitais se tornam interessantes quando auxiliam a mudar a dinâmica da sala de aula, valorizando o desenvolvimento de habilidades cognitivas concomitantemente com a aprendizagem da matemática (Gravina & Basso, 2012, p. 34), possibilitando ainda uma visão completa sobre a natureza dessa ciência (Ponte, Oliveira & Varandas, 2003, p. 160).

Leva-se em conta ainda que o uso das TIC pode auxiliar no processo de construção de conhecimentos ou servir como meio para desenvolver autonomia pelo uso de *softwares* que possibilitem pensar e criar soluções (Garcia, 2012, p. 19). As TIC permitem que o ensino de matemática seja efetuado de forma inovadora, reforçando a importância de novas formas de representação, relativizando a importância do cálculo e da manipulação simbólica (Ponte et al. , 2003, p. 160).

Cabe ressaltar que a informática educativa faz do ensino de linguagem de programação uma forma de estímulo e desenvolvimento de funções intelectuais dos alunos, objetivando o seu uso na resolução de problemas em diversos contextos, permitindo a organização do raciocínio lógico do aluno. Desta forma, o computador contribuirá efetivamente para o processo de ensino-aprendizagem se inserido em um contexto que desafie o crescimento do grupo (Weiss & Cruz, 2001).

Com esses pressupostos, as atividades envolvendo a criação de aplicativos foram estruturadas de forma que os discentes participantes sejam sujeitos ativos em sua aprendizagem. Objetivou-se mesclar o uso da lógica, entremeada na arquitetura e estruturação dos aplicativos, com o uso da linguagem algébrica. Optou-se por se utilizar essa metodologia visando estimular a representação das respostas por meio do uso de símbolos, contextualizando a aplicação da matemática escolar em ferramentas tecnológicas.

Para o desenvolvimento dos aplicativos optamos pela utilização do designer de aplicativos App Inventor, plataforma de desenvolvimento de aplicativos online gerenciada atualmente pelo MIT (*Massachusetts Institute of Technology*). Baseado na programação por meio de blocos, na qual os comandos são efetuados pela justaposição de blocos lógicos semelhantes a um quebra-

cabeça (Wolber, Abelson, Spertus, & Looney, 2011), a ferramenta foi criada com a missão de democratizar e popularizar o desenvolvimento de aplicativos.

Além de possibilitar o desenvolvimento do pensamento lógico, tem proporcionado a elaboração de atividades relacionadas ao desenvolvimento de habilidades tecnológicas, do pensamento computacional e atividades relacionadas ao ambiente educacional. Informações detalhadas sobre essas atividades estão disponíveis na página oficial do App Inventor, no endereço *http://appinventor.mit.edu/explore/stories.html*.

Embora consista em uma ferramenta de desenvolvimento de aplicativos, a estruturação dos projetos é executada de forma intuitiva, bastando ao usuário possuir noções básicas de lógica. Desta forma, a ferramenta não tira o foco do estudo da disciplina de matemática. Pelo contrário, é necessário que o aluno possua o domínio da linguagem algébrica e que tenha conhecimento teórico suficiente para ser independente e usar a criatividade para solucionar problemas e transpor os algoritmos de resolução para o ambiente computacional.

Desta forma, buscou-se relacionar a matemática com a área afim do curso técnico escolhido pelos alunos, objetivando a aprendizagem significativa de ferramentas que possam ser úteis futuramente no exercício de sua profissão.

Resultados e Discussão

Nesta seção apresentamos dois aplicativos desenvolvidos pelos alunos, em caráter experimental. Por uma questão de ética, os alunos participantes das atividades aqui foram nomeados como A1, A2, A3, A4 e A5, levando-se em consideração a ordem alfabética de seus nomes.

Aplicativo 1 - resolução de regra de três com grandezas diretamente proporcionais

Para o desenvolvimento deste aplicativo foi explorada a forma como se relacionam os elementos envolvidos na resolução de uma regra de três simples envolvendo grandezas diretamente proporcionais. Este aplicativo foi desenvolvido como atividade inicial do experimento, sendo o momento no qual os alunos tiveram o primeiro contato com o *App Inventor*. Optou-se por utilizar a relação entre grandezas proporcionais para abordar a estruturação de aplicativos por esta apresentar solução algébrica de fácil entendimento.

Após a resolução de situações-problema envolvendo proporcionalidade, os alunos foram estimulados a representar a solução algébrica da regra de três disposta a seguir, onde x representa o valor a ser calculado, dado por $x = \frac{b.c}{a}$.

Grandeza 1	**Grandeza 2**
a	b
c	x

No contexto de desenvolvimento de um aplicativo, torna-se necessária a organização para a estruturação dos componentes visuais e lógicos que irão compô-lo e torná-lo funcional. Diante da necessidade dessa estruturação, foram apresentados os seguintes questionamentos aos alunos:

- Onde o usuário deve inserir os dados para o cálculo?
- Como será ativada a resolução?

- Onde será representada a resposta do problema?
- Como será fechado o aplicativo?
- E se o usuário necessitar efetuar outro cálculo, como reiniciar o processo?

As respostas a esses questionamentos se tornam úteis devido à necessidade da estruturação adequada dos campos de entrada e saída de dados e ativação de comandos. Embora mentalmente seja relativamente simples idealizar como o aplicativo executará os passos para a solução, organizá-los sistematicamente auxilia no momento de escolher as ferramentas adequadas que o tornem funcional.

Após apresentadas as ferramentas básicas do *App Inventor*, os alunos foram estimulados a criar o *design* de seus aplicativos. Na atividade de desenvolvimento do aplicativo relacionado à resolução de regras de três foi possível verificar particularidades na forma de trabalho de cada aluno envolvido, como a escolha das cores utilizadas e as formas de organizar as telas e os campos para entrada e saída de dados, conforme resultados dispostos nas Figuras 1 a 5.

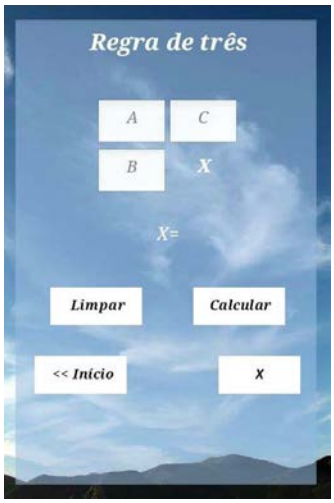


Figura 1. Tela de cálculo do aplicativo elaborado pelo aluno A1

Figura 2.Tela de cálculo do aplicativo elaborado pelo aluno A2

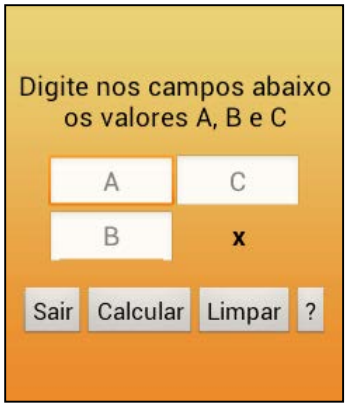


Figura 3. Tela de cálculo do aplicativo elaborado pelo aluno A3

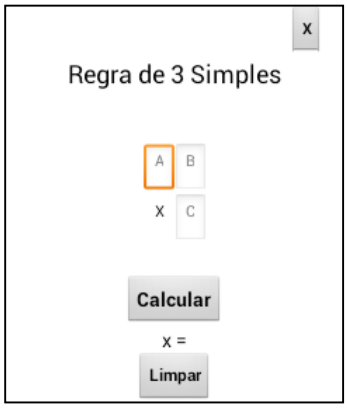


Figura 4. Tela de cálculo do aplicativo elaborado pelo aluno A4

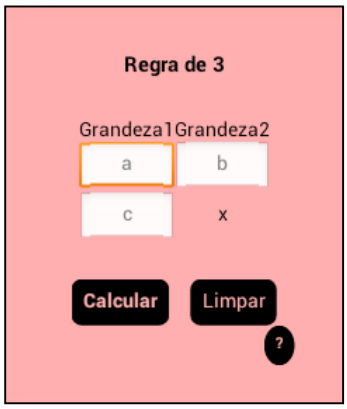


Figura 5. Tela de cálculo do aplicativo elaborado pelo aluno A5

Para a estruturação desse aplicativo foram utilizados os elementos listados a seguir:

- *Labels* (etiquetas) para registro de texto e da resposta;
- *Textbox* (caixas de texto) para entrada de dados numéricos;
- *Buttons* (botões) para ativação dos comandos de cálculo;
- *Arrangements* (arranjos) para organização dos demais elementos no *layout* do aplicativo.

Objetivando incorporar a linguagem algébrica na arquitetura dos aplicativos, os campos de entrada de dados para os valores numéricos foram nomeados como a, b e c. Essa forma de registro permitiu que a localização e identificação dos blocos correspondentes a essas variáveis

fossem facilmente efetuadas, possibilitando que a organização dos comandos de cálculo fossem executada de forma ágil.

Transcorrida essa etapa, foi trabalhada a forma de inserir os comandos lógicos para a execução dos cálculos e a ativação dos demais comandos para o aplicativo.

A função referente ao botão "Calcular", presente nos aplicativos ilustrados nas Figuras 1 a 5, consiste na ativação do cálculo $\frac{b.c}{a}$. Na Figura 6 é apresentado o conjunto de blocos que foi estruturado pelo aluno A2.

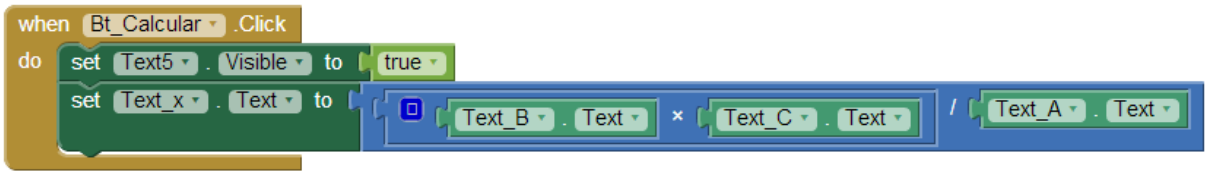


Figura 6. Organização dos blocos de cálculo referentes ao aplicativo elaborado pelo aluno A2

Conforme pode ser verificado na Figura 6, o clique no botão "Calcular" executa a mudança do texto da *label* "Text_x" para o valor numérico do produto $\frac{b.c}{a}$.

A função referente ao botão "Limpar" consiste em apagar o texto das *textbox* A, B e C e da *label* "Text_x". Os blocos de ativação desse comando foram estruturados conforme indicado na Figura 7.

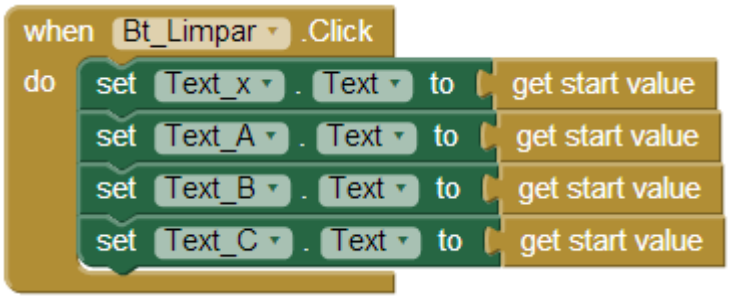


Figura 7. Organização dos blocos do botão "Limpar" no aplicativo elaborado pelo aluno A2

O botão "Fechar" possui como funcionalidade o encerramento do aplicativo. Os blocos de ativação desse comando foram estruturados conforme indicado na Figura 8.

Figura 8. Organização dos blocos do botão "Fechar" no aplicativo elaborado pelo aluno A2

Aplicativo 2 - análise comparativa entre o preço de combustíveis

Embora existam várias características que devem ser consideradas para analisar qual é o melhor tipo de combustível para o abastecimento de um veículo bicombustível, uma regra simples é comumente utilizada pela população brasileira: o abastecimento com etanol é vantajoso quando o preço do litro deste não ultrapassar 70% do preço do litro da gasolina (Brasil, 2013, p.10).

Baseados nessas informações, inicialmente os alunos foram estimulados a verificar qual combustível seria o mais vantajoso em situações hipotéticas. Para tal, a informação necessária para efetuar a análise foi apresentada aos alunos, discutindo-se sobre a relação entre as representações 70% e 0,7 no cálculo de porcentagens. Em seguida, baseados no procedimento utilizado para efetuar os cálculos, foram estimulados a estabelecer relações entre o preço do litro do etanol com o preço da gasolina utilizando a simbologia algébrica. O roteiro de atividades desenvolvido é elencado a seguir:

Problema 1 – Segundo o INMETRO, o abastecimento com etanol é vantajoso quando o preço do etanol não ultrapassar 70% do preço da gasolina. Usando esta informação, verifique qual combustível é o mais vantajoso em cada caso listado a seguir:

a) Preço do litro do etanol: R$ 1,957; preço do litro da gasolina: R$ 2,857;
b) Preço do litro do etanol: R$ 2,157; preço do litro da gasolina: R$ 2,997;
c) Preço do litro do etanol: R$ 2,065; preço do litro da gasolina: R$ 2,95;
d) Preço do litro do etanol: R$ 2,105; preço do litro da gasolina: R$ 2,957.

Problema 2 – Baseando-se na informação inicial sobre a comparação entre o preço do litro do etanol e da gasolina, represente ***algebricamente*** *as possíveis relações entre os preços dos combustíveis e a análise correspondente.*

As representações simbólicas são essenciais para a organização do conhecimento escolar (Mendes, 2009, p. 41). Nesse sentido, o Problema 1 consistiu na execução dos cálculos de porcentagem, de forma que os alunos possam perceber qual é a forma mais simples para relacionar os preços dos dois combustíveis. As respostas deste problema auxiliam na abstração para a representação simbólica solicitada no Problema 2, na qual devem ser formalizadas as respostas por meio do uso da linguagem algébrica, cujos resultados são expostos nas Figuras 9 a 13.

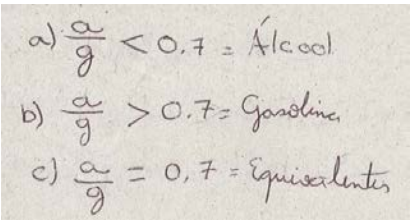


Figura 9. Resposta apresentada pelo aluno A1

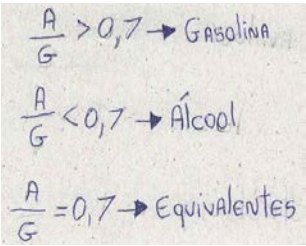


Figura 10. Resposta apresentada pelo aluno A2

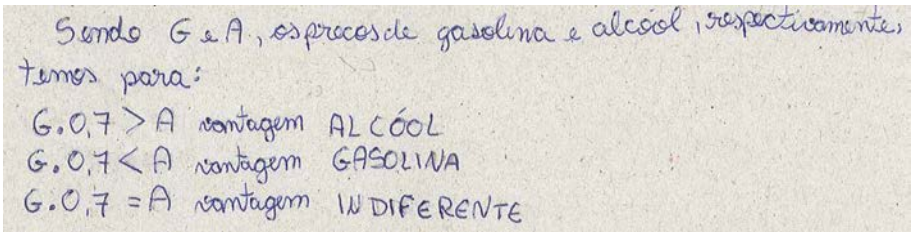

Sendo G e A, os preços de gasolina e alcóol, respectivamente, temos para:
G.0,7 > A vantagem ALCÓOL
G.0,7 < A vantagem GASOLINA
G.0,7 = A vantagem INDIFERENTE

Figura 11. Resposta apresentada pelo aluno A3

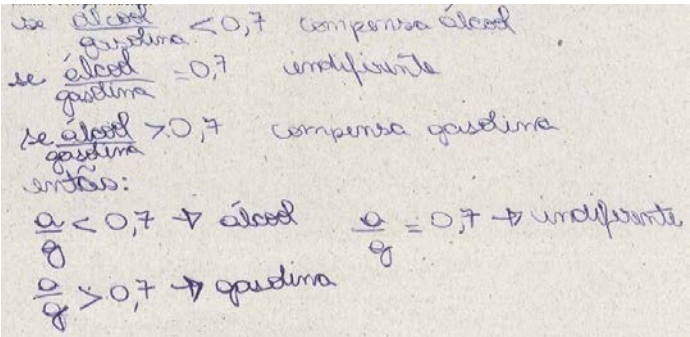

se álcool/gasolina < 0,7 compensa álcool
se álcool/gasolina = 0,7 indiferente
se álcool/gasolina > 0,7 compensa gasolina
então:
a/g < 0,7 → álcool a/g = 0,7 → indiferente
a/g > 0,7 → gasolina

Figura 12. Resposta apresentada pelo aluno A4

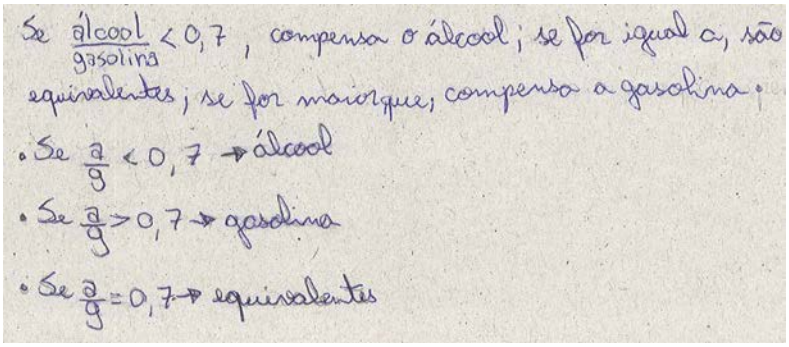

Se álcool/gasolina < 0,7, compensa o álcool; se for igual a, são equivalentes; se for maior que, compensa a gasolina.
• Se a/g < 0,7 → álcool
• Se a/g > 0,7 → gasolina
• Se a/g = 0,7 → equivalentes

Figura 13. Resposta apresentada pelo aluno A5

Note-se que foi necessária a readequação da resposta inicial registrada pelos alunos A4 e A5. Embora o processo de cálculo houvesse sido compreendido, as relações não foram representadas com o uso de simbologia algébrica no registro inicial efetuado pelos alunos.

As representações mentais constituem-se na forma individual que o aluno tem para formular o que foi internalizado sobre a situação matemática. Desta forma, um mesmo conceito matemático pode ter diferentes representações mentais (Mendes, 2009, p. 43). Corrobora-se isso na solução apresentada pelo aluno A3, conforme ilustrado na Figura 11. Enquanto os demais alunos apresentaram a relação entre o preço dos combustíveis na forma de uma razão, o aluno A3 optou por comparar os preços efetuando o cálculo de 70% do preço do litro da gasolina, caracterizado pela multiplicação do fator 0,7 pelo valor do litro do combustível.

A solução do problema 2 foi utilizada pelos alunos para elaborar um aplicativo para comparação entre o preço do litro desses combustíveis, fornecendo a análise ao consumidor no momento de abastecer seu veículo. Na Figura 14 temos as possíveis análises que podem ser geradas pelo aplicativo elaborado pelo aluno A3.

Figura 14. Possíveis análises do aplicativo desenvolvido pelo aluno A3

Neste aplicativo, os blocos referentes à execução da análise foram estruturados conforme indicado na Figura 15.

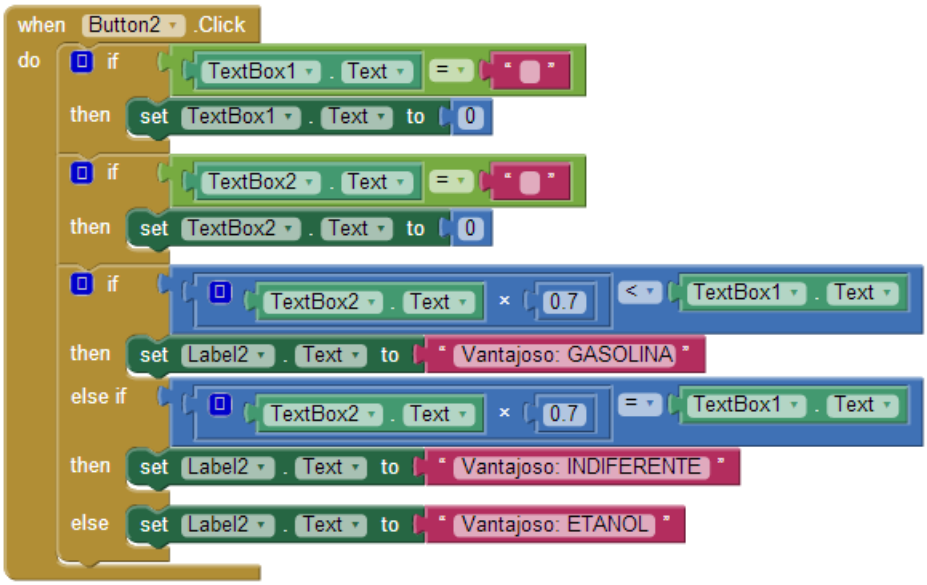


Figura 15.Blocos referentes ao botão "Comparar"

Observa-se que a análise, que será exibida na "Label2", é baseada nas opções detalhadas na Figura 11. Nesta representação, o texto da *Textbox2* corresponde ao valor do litro da gasolina e o texto da *Textbox1* corresponde ao valor do litro do etanol.

Nessa atividade se evidencia a necessidade de aliar a organização do conhecimento escolar por meio da lógica de programação com a utilização da linguagem simbólica, em consonância com Weiss & Cruz (2010), Ponte et al. (2003) e Mendes (2009).

Perceba-se que o uso do App Inventor concomitante às atividades não se prende à simples manipulação de objetos, mas também em analisar qual a melhor forma de organizá-los logicamente e como transpor o cálculo analítico para o ambiente computacional. Ao mesmo tempo, leva o aluno a estruturar logicamente seu pensamento, concomitante com reflexões sobre a necessidade da ação humana para a codificação de processos e como o computador pode ser utilizado para facilitar no desempenho das ações humanas, em consonância com o apontado por Cox (2003), Skovsmose (2007), Borba e Penteado (2012), Gravina e Basso (2012) e Ponte et al. (2003).

Considerações Finais

Diante dos resultados apresentados pelos alunos, verificou-se que o processo de desenvolvimento de aplicativos pode ser uma forma contextualizada de aplicar as soluções de situações-problema e motivador para a compreensão de processos que surgem no dia-a-dia, em consonância com Mendes (2009, p.10).

Como a estruturação dos aplicativos no *App Inventor* não exige conhecimento prévio sobre linguagem de programação, a ferramenta não tira o foco do estudo da matemática, pois para que um aplicativo de execução de cálculos seja estruturado de forma que execute adequadamente as operações há a necessidade da compreensão efetiva do problema estudado, possibilitando que o aluno busque soluções criativas e desenvolva competências relacionadas ao uso da linguagem algébrica. Desta forma, a ferramenta utilizada é integrada ao processo de ensino-aprendizagem, característica essencial destacada por Giraldo et al. (2013, p. 392).

Embora ainda não tenha sido viabilizada a aplicação dessa dinâmica de ensino na sala de aula convencional, com um número maior de alunos, observa-se que o roteiro de estudos e demais produtos decorrentes do processo de elaboração de um aplicativo podem ser utilizados como objetos auxiliares importantes no processo de avaliação em matemática, possibilitando a análise qualitativa do processo de ensino-aprendizagem no que diz respeito à autonomia do discente em buscar diferentes fontes e formas de solucionar ou descrever um problema, bem como estruturar logicamente o pensamento.

Constata-se, também, o potencial do processo de desenvolvimento de aplicativos no sentido de promover a aprendizagem significativa, uma vez que se objetiva contextualizar conceitos matemáticos com a profissão escolhida pelos alunos.

Referências bibliográficas

Borba, M. de C., & Penteado, M.G. (2012). *Informática e Educação Matemática*. 5a ed. Belo Horizonte: Autêntica. (Coleção Tendências em Educação Matemática, 2).

Brasil. Ministério de Minas e Energia. Empresa de Pesquisa Energética. (2013). *Avaliação do comportamento dos usuários de veículos flex fuel no consumo de combustíveis no Brasil*. Brasília.

Cox, K. K. (2003). *Informática na educação escolar*. Campinas: Autores Associados. (Coleção Polêmicas do nosso tempo, 87).

Garcia, V.C.V. (2012). Formação de professores de matemática e mudanças curriculares na escola. In: Búrigo, E.Z., *et* al. (orgs.). *A Matemática na escola: novos conteúdos, novas abordagens (p. 11-23)*. Porto Alegre: Ed. da UFRGS (Série Educação a distância)

Giraldo, V; Caetano, P., & Mattos, F. (2012). *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática*. Rio de Janeiro: SBM (Coleção PROFMAT, 06).

Gravina, M. A., & Basso, M. V. de A. (2012). Mídias digitais na Educação Matemática. In: Gravina, et al. (Orgs.) *Matemática, Mídias Digitais e Didática: tripé para formação do professor de Matemática (p. 11-35)*. Porto Alegre: Evangraf, 11-35.

Mendes, I.A. (2009). *Investigação histórica no ensino de matemática*. Rio de Janeiro: Ciência Moderna Ltda.

Oliveira, R. de. (1997). *Informática educativa: dos planos e discursos à sala de aula*. Campinas: Papirus.

Penteado, M. G. (1999). Novos atores, novos cenários: discutindo a inserção dos computadores na profissão docente. In: BICUDO, M.A.V. (org.), et al. *Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas (p. 297-313)*. São Paulo: Editora UNESP.

Ponte, J. P. da; Oliveira, H., & Varandas, J.M. (2003). O contributo das tecnologias de informação e comunicação para o desenvolvimento do conhecimento e da identidade profissional. In: FIORENTINI, D. (org.). *Formação de professores de matemática: Explorando novos caminhos com outros olhares (p. 159-192)*. Campinas: Mercado de Letras.

Skovsmose, O. (2007). *Educação Crítica: incerteza, matemática, responsabilidade*. (Bicudo, M. A. V., Trad.). São Paulo: Cortez.

Weiss, A.M.L., & Cruz, M.L.R.M. da. (2001). *A informática e os problemas escolares de aprendizagem*. 3a ed. Rio de Janeiro: DP&A Editora.

Wolber, D.; Abelson, H; Spertus, E., & Looney, L. (2011). *App Inventor: Create your own apps*. 1a ed. Sebastopol: O'Reilly.

O professor Vídeo na disciplina Cálculo 1 a distancia

Helber Rangel Formiga Leite de **Almeida**
Universidade Federal de Campina Grande
Brasil
helber.rangel@gmail.com

Resumo

A Educação a Distância no Brasil vem crescendo desde o avanço da Internet e tornou-se uma modalidade de ensino solidificada a partir da criação do programa Universidade Aberta do Brasil (UAB), em 2006. Um dos primeiros cursos vinculados a UAB foi o curso de Licenciatura em Matemática, tendo seus primeiros registros no ano de 2007. Esse artigo tem como objetivo apresentar parte de minha pesquisa de doutorado, que busca investigar o uso das Tecnologias Digitais na disciplina Cálculo 1 desses cursos, sendo que, nesse texto apresento um papel para a tecnologia Vídeo. A metodologia utilizada tem caráter qualitativo e a análise de dados se deu a luz da *grounded theory*. O que percebo como conclusão final é que o vídeo assume, em alguns casos, o papel de professor dessa disciplina, devido, principalmente a falta de contato físico entre professor, tutor e aluno na modalidade de ensino a distância.

Palavras chave: licenciatura em matemática, EaD, UAB, vídeo, Cálculo 1.

Abstract

Distance Education in Brazil has been growing since the advancement of the internet and became a solidified teaching modality from the creation of the Open University of Brazil ("Universidade Aberta do Brasil" - UAB) in 2006. One of the first courses linked to UAB was the course Pre-Service Mathematics Teacher Education, having his first register in the year 2007 This article aims to present part of my Doctor research, which investigates the use of Digital Technologies in the discipline Calculus of these courses, and in this text, I present a role of the Video technology. The methodology is qualitative and the analysis of data was the light of grounded theory. What I see as the final conclusion is that the video strikes, in some cases, the attitude of these teachers, mainly due to lack of physical contact between teacher, tutor and student in distance learning mode.

Key words: Pre-Service Mathematics Education, EaD, UAB, video, Calculus 1.

Resumen

La Educación a Distancia en Brasil ha estado em incremento desde el avance de Internet y se convirtió en una modalidad de enseñanza solidificada desde la creación del programa de la Universidade Aberta do Brasil (UAB), en 2006. Uno de los primeros cursos vinculados a la UAB fue el curso de Licenciatura en Matemáticas, funcionando a partir del año 2007. Este artículo tiene como objetivo presentar parte de mi investigación de doctorado, que estudia el uso de las tecnologías digitales en la

disciplina Cálculo 1, y en este texto presento el rol del vídeo como tecnología. La metodología es cualitativa y el análisis sigue lineamientos de la teoría fundamentada. Como conclusión final, el vídeo tiene, en algunos casos, el rol del professor de la asignatura, debido principalmente a la falta de contacto físico entre el profesor, el tutor y el alumno, en la modalidad de aprendizaje a distancia.

Palabras clave: licenciatura en matemática, EaD, UAB, vídeo, Cálculo 1.

Introdução

A Educação a Distância (EaD) no Brasil e no mundo vem se confirmando como uma modalidade de ensino que, apesar de recente, veio para ficar. Segundo Borba e Llinares (2012), o interesse da comunidade de Educação pelo tema, em especial a formadora de professores de Matemática, vem crescendo exponencialmente nos últimos anos. A EaD pode ser considerada como uma modalidade educacional que ocorre em sua totalidade, ou parcialmente, em momentos e/ou espaços diferentes, na qual a comunicação entre os envolvidos pode se dar através de televisão, correspondências postais, Internet, entre outros meios (Maltempi & Malheiros, 2010). Em se tratando do uso da Internet, o termo *online* pode ser adicionado à denominação para diferenciar das demais formas de comunicação, ou seja, "a EaDonline pode ser entendida como a modalidade de educação que acontece primordialmente mediada por interações via internet e tecnologias associadas" (Borba, Malheiros & Amaral, 2011, p. 15).

A EaD[1] deu seus primeiros passos no Brasil a partir do aumento do acesso à Internet no país, no final na década de 1990. O respaldo legal para sua realização ocorreu a partir da criação da Lei de Diretrizes e Bases da Educação – Lei 9.394, de 20 de dezembro de 1996, artigo 80, tendo sido regulamentada pelos Decretos 2.494 e 2.561, de 1998 e, finalmente, até os dias de hoje pelo Decreto 5.622 de 20 de dezembro de 2005 (Brasil, 2007). Com o reconhecimento da EaD na legislação educacional vigente, iniciou-se no país uma discussão acerca da criação de uma instituição específica para a oferta de cursos na modalidade a distância, surgindo assim, em 2006, a Universidade Aberta do Brasil (UAB).

Embora a sigla UAB nos traga na composição de seu nome o termo "Universidade", a UAB não é uma universidade usual do tipo que nos vêm direto a mente, com prédios, laboratórios, salas de aulas, na verdade trata-se de um Sistema sustentado por três pilares: o Governo Federal, responsável, entre outras coisas, pelo seu financiamento, os Governos Estaduais e Municipais, responsáveis pelo suporte e a infraestrutura dos polos de apoio presencial, e, finalmente e não menos importante, as Instituições de Ensino Superior, responsáveis pela oferta dos cursos (Chiari, Borba, Almeida, Oliveira, & Zampieri, 2013).

Em 2007, surge no Brasil as primeiras Licenciaturas em Matemática oferecidas no âmbito da UAB, ou seja, um dos primeiros cursos a ser ofertado e, hoje, já existem 40[2] oferecidos por diferentes IES, distribuídos pelas cinco regiões do Brasil. Inicialmente, o programa foi criado com o intuito de formar professores que atuavam em sala de aula sem uma devida formação acadêmica. Entretanto, hoje podemos verificar uma grande diversidade de cursos de graduação sendo oferecidos pelo sistema UAB (Gatti & Barreto, 2009), como alguns cursos de engenharia, por exemplo.

---

[1] Nesse texto estou usando o termo EaD para me referir à EaD *online* tratada em Borba, Malheiros e Amaral (2011).

[2] Disponível em <www.uab.capes.gov.br>. Acesso em fev. 2014.

Assim como no ensino presencial, a forma de ensinar e aprender a distância, não segue um modelo único. Dessa forma, teremos muito provavelmente, um número variado de estruturas didáticas fazendo com que cada instituição, cada profissional de ensino e cada aluno desenvolva uma maneira peculiar de se organizar, a fim de tornar o processo de ensino e de aprendizagem mais suscetível ao seu êxito particular (Nabel, 2006). No caso específico do uso das Tecnologias Digitais (TD) nesses processos, esse desenvolvimento peculiar pode nos apresentar um perfil do curso que está sendo realizado, justificando assim a tentativa pela construção de um mapa que represente esse uso.

E é essa diversidade de modelos e de uso das TD que permeiam minha pesquisa de doutorado, ainda em andamento. Nela, o meu objetivo é investigar os diferentes tipos de uso das TD na disciplina Cálculo 1 oferecida nos cursos de Licenciatura em Matemática a distância, oferecidos no âmbito da UAB. Uma dessas tecnologías que vem sendo utilizada nos cursos por mim investigados é o vídeo. Não apenas os disponíveis na *web*, como também os produzidos por professores e alunos na busca, muitas vezes, de suprir uma dificuldade na disciplina.

Apresentando a Pesquisa

Durante anos a frente da disciplina de Cálculo 1, como professor em Instituições de Ensino Superior, Públicas e Privadas, sempre encontrei dificuldades no ensino desta disciplina. Dificuldades que vão, desde a heterogeneidade dos alunos componentes de uma determinada turma - existem alunos com grande capacidade em assimilar conceitos matemáticos e alunos que sequer estudaram conceitos básicos de Matemática nos ensinos Fundamental e Médio, assim como a falta de exercícios aplicados a cursos específicos nos livros didáticos de Cálculo, já que a disciplina não compõe apenas a grade curricular das Licenciaturas e Bacharelados em Matemática, se inserindo também nas grades curriculares de alguns cursos da grande área de Ciências Exatas, em especial nas diversas Engenharias existentes em nosso País.

Considerada como uma disciplina introdutória, o Cálculo 1, quer seja o presencial ou a distância, é alocado, em geral, nos primeiros semestres dos cursos em virtude de seu conteúdo ser requisito para outras disciplinas, tornando-se assim uma peça importante na sequência destes. Dessa forma, uma reprovação ou desistência do aluno na disciplina acarreta um atraso substancial, fazendo assim com que o aluno tenha sua programação inicial alterada. Esses e outros fatores me fizeram pensar em realizar uma pesquisa que estudasse mais a fundo o processo de ensino e aprendizagem da disciplina, sendo que, neste caso optei em realizar essa investigação no ensino a distância.

Em Almeida (2013) é apresentada uma breve revisão da literatura dos temas relacionados diretamente com minha pesquisa. Em particular, as pesquisas relacionadas ao ensino e aprendizagem do Cálculo 1 apresentadas, abordam diversas perspectivas da disciplina, algumas que são inerentes ao próprio Cálculo 1 (Marin & Penteado, 2011; Olimpio Junior, 2006), mas outras abordam aspectos relacionados a visualização e a construção do conhecimento matemático a partir da inserção das tecnologias (Javaroni, 2007).

Metodologia da Pesquisa

A pesquisa qualitativa, corroborando Goldenberg (2011), é aquela em que a maior preocupação do pesquisador não deva ser com a representatividade numérica de um grupo pesquisado, mas com o aprofundamento da compreensão de algum, ou alguns aspectos desse grupo. Nesse tipo de pesquisa, o investigador deve estar completamente envolvido no habitat

natural dos investigados, de maneira que "o foco, o olhar da pesquisa encontra-se nas relações que tem significado para o pesquisador" (Javaroni, Santos & Borba, 2011, p. 198).

Segundo Bogdan e Biklen (1994), uma pesquisa qualitativa possui cinco características. *A fonte de dados deve ser o ambiente natural*, *deve ser descritiva, o investigador deve se interessar mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados, o investigador tende a analisar os dados de forma indutiva* e *o significado é de importância vital*. Essas características se entrelaçam nas etapas que serão desenvolvidas na pesquisa e apresentadas nas subseções seguintes.

O cenário da pesquisa e os procedimentos metodológicos

Lapèrriere (2012, p.357, grifo da autora), ao listar algumas regras analíticas da *grounded theory*, afirma que a seleção e a descrição do local ou do grupo pesquisado devem ser determinadas pelo problema da pesquisa. Segundo a autora, "escolhe-se um local, uma situação ou um grupo em função de sua pertinência *teórica* em relação a esse problema". Assim, como primeiro procedimento metodológico da pesquisa foi realizado um levantamento das Instituições que oferecem o curso de Licenciatura em Matemática[3] a distância, vinculados à Universidade Aberta do Brasil. Em seguida, decidi considerar como cenário da pesquisa cinco desses cursos, dentre os 40 encontrados, sendo um em cada região do Brasil[4].

Essa escolha em nenhum momento tem a intenção de caracterizar a utilização das tecnologias por região do País, tampouco pela Instituição de Ensino Superior (IES) pesquisada, mas sim por entendermos que quanto maior o universo pesquisado, e sua diversidade, podemos encontrar um maior número de diferentes tipos de uso das Tecnologias Digitais.

A produção dos dados

Para favorecer confiabilidade à pesquisa, múltiplos procedimentos foram utilizados nessa etapa. Paralelamente, foram realizadas observações participante das disciplinas diretamente nos Ambientes Virtuais de Aprendizagens (AVA), entrevistas semiestruturadas com professores, tutores e alunos das turmas observadas, bem como o uso de um diário de campo, no qual anotações foram feitas e confrontadas com as observações e as entrevistas já mencionadas.

Esse uso de diferentes procedimentos para a produção de dados é o que Goldenberg (2011) chama de triangulação.

> Cada pesquisador deve estabelecer os procedimentos de coleta de dados que sejam mais adequados para o seu objetivo particular […] A combinação de metodologias diversas no estudo do mesmo fenômeno, conhecida como triangulação, tem por objetivo abranger a máxima amplitude na descrição, explicação e compreensão do objeto em estudo. (Goldenberg, 2011, pp. 62–63).

Por meio de procedimentos variados, somos capazes de reunir um volume de informações considerável sobre o fenômeno observado. Comparando-os, codificando-os, extraindo as regularidades, enfim, seguindo métodos detalhados de produção de dados, a pesquisa pretende se encerrar com algumas teorizações que deverão emergir da análise rigorosa e sistemática.

---

[3] Essa consulta foi realizada no Portal da UAB. Disponível em < <http://uab.capes.gov.br/index.php>. Acesso em ago. 2014.

[4] Até o momento a produção e análise dos dados foi realizada em duas dessas Instituições: Universidade Federal de Pelotas (UFPel) e Universidade do Estado da Bahia (UNEB).

As observações

Na sequência, para produção de dados da pesquisa, utilizarei então a observação participante, diretamente no Ambiente Virtual de Aprendizagem dos cursos investigados. Lincoln e Guba (1985) nos chamam a atenção para o fato de que realizar uma pesquisa em um ambiente natural traz a ideia de que a realidade como um todo não pode ser entendida a partir de fragmentos isolados de seus contextos. Entendo que

> O ambiente virtual pode ser considerado natural, no sentido que Lincon e Guba (1985) o descreveram, ou seja, em contraste com o ambiente criado exclusivamente para a pesquisa. A internet já impregna nossa vida como os parques, as escolas ou outros ambientes "naturais" onde uma pesquisa que tenta ligar suas compreensões às experiências das pessoas se realiza. A rede já é natural, ela já modificou o humano, os coletivos seres-humanos-com-internet já protagonizam cenários educacionais [...] (Borba, Malheiros & Amaral, 2011, p. 130).

A observação dessas turmas se constitui em um momento importante, em virtude de compreendermos como ocorre a estruturação da disciplina em cada curso, já que o modelo pedagógico adotado por cada um deles não é, em geral, único (Almeida, Oliveira, & Francisco, 2014). É nesse momento que buscarei identificar quais e de que forma as TD estão sendo utilizadas dentro do Ambiente Virtual de Aprendizagem do curso ou na *web*, por exemplo, *chat*, fóruns, vídeos, softwares, etc.

As entrevistas

As entrevistas com os professores, tutores e alunos tem como objetivo buscar compreender esse uso na visão desses atores, bem como buscar identificar e compreender outros tipos de tecnologias e usos, distintos daqueles encontrados dentro do AVA.

Poupart (2012) afirma que as entrevistas nos permitem o acesso ao ponto de vista dos atores envolvidos na pesquisa. As entrevistas ocorreram tão logo a disciplina se inicou e seguirão até o seu término. Como ideia inicial, temos a intenção de realizar entrevistas semiestruturadas com todos os professores e tutores de cada turma e alguns alunos, escolhidos aleatoriamente dentro do ambiente do curso.

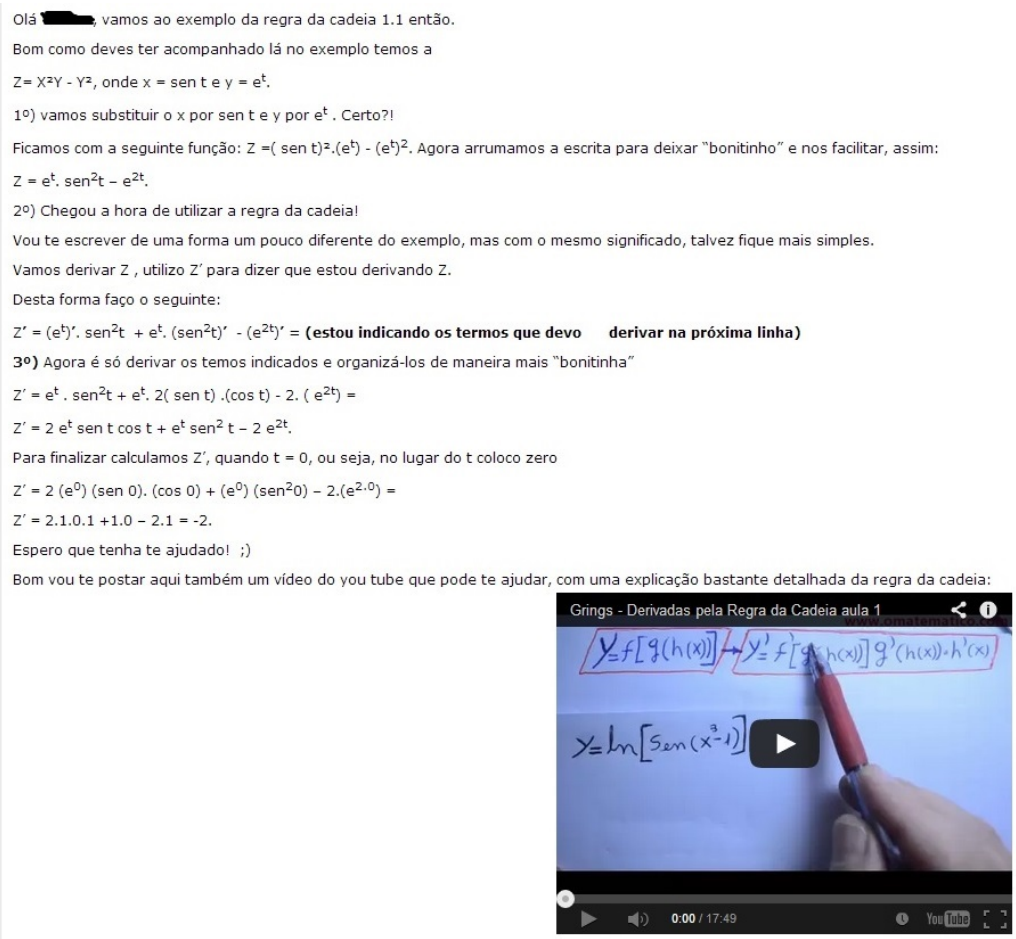
Devido a distância entre a cidade em que resido e as IES pesquisadas, as entrevistas estão sendo realizadas via Internet, utilizando para isso softwares de captação de vídeo e áudio que gravassem diretamente a interface do computador durante as entrevistas. Ao explicarem como são feitas as boas entrevistas, Bogdan e Biklen (1994) afirmam que estas caracterizam-se pelo fato de o investigador deixar os sujeitos à vontade, livres para expressarem seus pontos de vista. Além disso, deve-se comunicar ao sujeito o interesse do entrevistador e as transcrições devem estar bastante detalhadas e com exemplos. Em caso de respostas não compreendidas, deve-se perguntar: o que quer dizer com isso? Não tenho certeza se que entendi o que disse; pode me explicar melhor? E esse é o nosso interesse.

O professor Vídeo

Durante a realização das entrevistas e das observações, uma categoria emergiu relacionada ao uso de vídeos no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo 1 a distância. O fato que o vídeo pode desempenhar a figura do professor no ensino presencial.

No AVA dos cursos investigados, os professores e tutores da disciplina costumam disponibilizar alguns links de vídeos pré-existentes na *web*, bem como produzirem alguns, com o

intuito de auxiliar os alunos na resolução de uma determinada atividade, como também com a apresentação de conteúdos específicos da disciplina.



Olá [redacted], vamos ao exemplo da regra da cadeia 1.1 então.

Bom como deves ter acompanhado lá no exemplo temos a

$Z = X^2Y - Y^2$, onde $x = \text{sen } t$ e $y = e^t$.

1º) vamos substituir o x por sen t e y por e^t . Certo?!

Ficamos com a seguinte função: $Z = (\text{sen } t)^2.(e^t) - (e^t)^2$. Agora arrumamos a escrita para deixar "bonitinho" e nos facilitar, assim:

$Z = e^t.\ \text{sen}^2 t - e^{2t}$.

2º) Chegou a hora de utilizar a regra da cadeia!

Vou te escrever de uma forma um pouco diferente do exemplo, mas com o mesmo significado, talvez fique mais simples.

Vamos derivar Z , utilizo Z′ para dizer que estou derivando Z.

Desta forma faço o seguinte:

$Z' = (e^t)'.\ \text{sen}^2 t + e^t.\ (\text{sen}^2 t)' - (e^{2t})' =$ **(estou indicando os termos que devo derivar na próxima linha)**

3º) Agora é só derivar os temos indicados e organizá-los de maneira mais "bonitinha"

$Z' = e^t.\ \text{sen}^2 t + e^t.\ 2(\text{sen } t).(\cos t) - 2.(e^{2t}) =$

$Z' = 2\, e^t \text{sen } t \cos t + e^t \text{sen}^2 t - 2\, e^{2t}$.

Para finalizar calculamos Z′, quando t = 0, ou seja, no lugar do t coloco zero

$Z' = 2\,(e^0)(\text{sen } 0).(\cos 0) + (e^0)(\text{sen}^2 0) - 2.(e^{2.0}) =$

$Z' = 2.1.0.1 + 1.0 - 2.1 = -2$.

Espero que tenha te ajudado! ;)

Bom vou te postar aqui também um vídeo do you tube que pode te ajudar, com uma explicação bastante detalhada da regra da cadeia:

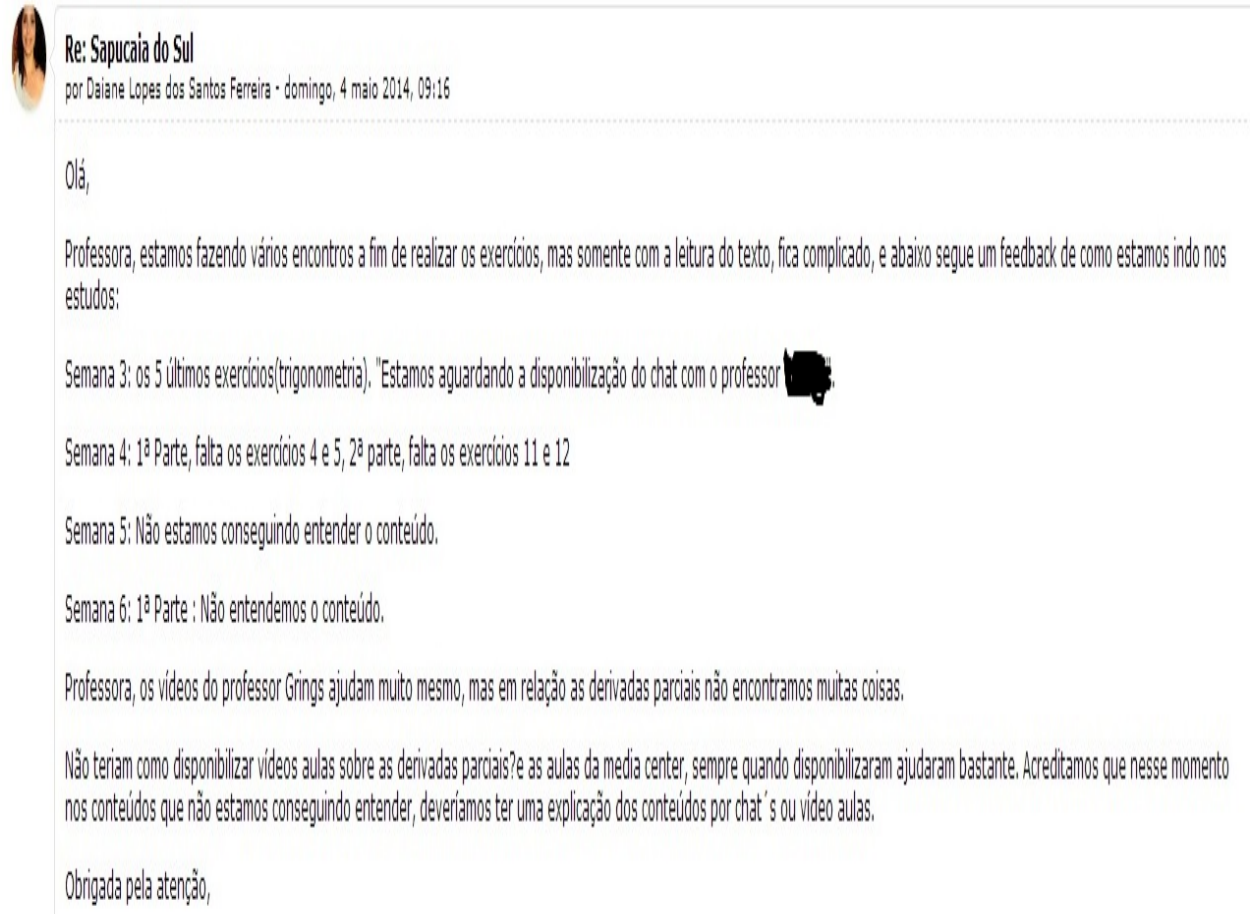
Figura 1. Resolução de um problema dentro do AVA de um curso analisado

Na Figura 1 podemos observar uma tutora[5] da UFPel resolvendo um problema relativo à derivada de funções compostas que surgiu dentro de um fórum de dúvidas da disciplina. A tutora apresenta duas resoluções distintas para o exercício. Em uma delas, é realizada a derivação a partir de uma substituição dos valores de *x(t)* e *y(t)* na expressão de *z(t)* e em seguida realizando a derivação com relação à variável *t*. Na sequência, ela utiliza a Regra da Cadeia para proceder a derivação.

Logo em seguida, a tutora anexa um vídeo a seu post com um exemplo diferente daquele apresentado anteriormente. O que chama a atenção na ação da tutora é que, mesmo ela apresentado duas resoluções distintas para o problema, ela ainda propôs que a aluna assistisse a um vídeo que, segundo ela, trazia "uma explicação bastante detalhada da regra da cadeia".

[5] A tutora e a aluna mencionada por ela não nos concederam entrevista e, consequentemente, tiveram seus nomes omitidos aqui.

Essa parece ser uma ação corroborada pelos alunos, como demonstra a fala da aluna Daiane Ferreira, também da UFPel, em outro fórum.



Re: Sapucaia do Sul

por Daiane Lopes dos Santos Ferreira - domingo, 4 maio 2014, 09:16

Olá,

Professora, estamos fazendo vários encontros a fim de realizar os exercícios, mas somente com a leitura do texto, fica complicado, e abaixo segue um feedback de como estamos indo nos estudos:

Semana 3: os 5 últimos exercícios(trigonometria). "Estamos aguardando a disponibilização do chat com o professor [redacted].

Semana 4: 1ª Parte, falta os exercícios 4 e 5, 2ª parte, falta os exercícios 11 e 12

Semana 5: Não estamos conseguindo entender o conteúdo.

Semana 6: 1ª Parte : Não entendemos o conteúdo.

Professora, os vídeos do professor Grings ajudam muito mesmo, mas em relação as derivadas parciais não encontramos muitas coisas.

Não teriam como disponibilizar vídeos aulas sobre as derivadas parciais?e as aulas da media center, sempre quando disponibilizaram ajudaram bastante. Acreditamos que nesse momento nos conteúdos que não estamos conseguindo entender, deveríamos ter uma explicação dos conteúdos por chat´s ou vídeo aulas.

Obrigada pela atenção,

Figura 2. Comentários de uma aluna sobre a inclusão de vídeos.

A importância de vídeos contendo a apresentação do conteúdo da disciplina, ou a resolução de um problema é destacada também pela fala de alunos e tutores da UFPel e de outra Instituição, no caso a UNEB, como podemos ver nos trechos a seguir.

- *Tutor Danilo Barreto (UNEB): "*Quando o aluno entra na EaD é um pouco impactante pra ele, ele sente a falta física do professor, então o vídeo faz um pouco esse papel. Então, na disciplina de Cálculo tem os vídeos, na UNEB tem em todas as disciplinas. Eu acho que isso ajuda bastante, é um diferencial."
- *Tutor Lucas Fernandes (UFPel): "*Eles geralmente gostam bastante [de usar o vídeo], eles falam assim 'depois que eu olhei o vídeo eu entendi o que eu não entendia antes'. E gostam do vídeo também porque eles estão ouvindo uma pessoa explicando ou comentando. É diferente de pegar um material, onde o aluno só ler e tem que trabalhar sozinho praticamente. Então, eles gostam bastante nesse sentido."
- *Aluna Geise Santos (UNEB): "*Olha, eu adoro quando eles [professores ou tutores] indicam vídeos pra gente, tanto que quando eles não indicam eu mesmo procuro (risos), pense que tem um canal no youtube chamado 'Me Salva' que é muito bom [...] Sabe, eu não sei o resto do pessoal, mas eu sinto muito a falta, digamos assim, do professor. Não to

reclamando deles viu, eles são muito participativos nos fóruns. Mas eu digo assim, da figura do professor, de olhar pra cara dele, de ouvir a voz. Eu acho que o vídeo funciona um pouco assim."

- *Aluna Renata Pinto(UFPel): "*Os vídeos são fundamentais né? Salva bastante a gente [...] o EaD proporciona a pesquisa, no caso de fatos que não ficaram claros, pode pesquisar outros vídeos sobre o assunto e confrontar, além do que é um professor falando, mesmo que não seja cara a cara (risos) e como a gente pode parar, voltar, parece que estamos na aula normal, interagindo."
- *Aluna Daiane Ferreira (UFPel): "*Assim, então, pô eu tô estudando, eu tô vendo as vídeo-aulas, eu tô vendo uma relação ali né, mas só que eu não vou colocar as minhas dúvidas porque ainda tem meu grupo de estudo pra me ajudar. Então nós vamos filtrar o que nós realmente precisamos pra colocar no fórum de dúvidas né? e aí os vídeos que tem na Internet ajudam demais. Ou a gente acha igual ou muito parecido com o que quer, sem falar que é um professor falando, a gente se sente até mais próxima, parece que ele ta falando diretamente comigo (risos)."

Podemos perceber, a partir das falas dos alunos e dos tutores, que a *web* funciona como uma grande biblioteca virtual, onde os alunos podem realizar uma busca por materiais que os auxiliem no momento de uma dúvida referente à solução de um problema. No caso específico do mencionado pelos alunos e tutores da disciplina, o vídeo funciona como uma espécie de profesor virtual, já que, no ensino a distância, o contato físico entre profesor e alunos se limita, em alguns casos, a encontros presenciais periódicos, mas que costumam ser dedicados, muitas vezes, para a realização de atividades obrigatórias, como a realização de avaliações, por exemplo.

Essa falta de contato físico entre professor e aluno é mencionada em Viel (2011). A autora menciona em sua tese de doutorado, que alguns alunos concluíram o curso tendo apenas um contato com alguns professores das disciplinas, sendo esse realizado na apresentação da disciplina que ocorre no início do semestre letivo. Neste caso, fica compreensível a visão do professor nos vídeos por parte dos alunos.

Considerações Finais

Entendo que o fenômeno EaD, mesmo que recente, encontra-se consolidado no Brasil. Entretanto, mesmo dentro de um sistema como o da UAB, não podemos identificar um modelo único de funcionamento de um curso, neste caso a Licenciatura em Matemática. Assim, entendo ser necessário investigar aspectos desses cursos que busquem identificar características próprias, ou comuns a todos, como os realizados em Almeida, Zampieri & Borba (2014), Almeida, Oliveira & Francisco (2014) e Borba (2013).

No que se refere ao uso de vídeos no processo de ensino e aprendizagem de Cálculo 1, oferecido pela Licenciatura em Matemática da UAB, a pesquisa aqui apresentada mostra que essa tecnologia pode servir como um repositório onde o aluno pode buscar por materiais complementares que os auxiliem na resolução de um determinado problema, ou até mesmo que apresente um conteúdo específico da disciplina, diferente de materiais digitalizados, como textos.

Outro papel que o vídeo desempenha, segundo a pesquisa, é o papel de um professor virtual, onde o aluno interage, mesmo de maneira assíncrona, como ocorre no ensino presencial, com o professor Vídeo.

Referências bibliográficas

Almeida, H. R. F. L., Zampieri, M. T., & Borba, M. C. (2014). Formação inicial de professores de matemática a distância: discussões acerca do acesso à internet. In *Fórum GT 06 - SBEM*. Rio de Janeiro.

Almeida, H. R. F. L. (2013). O Uso das Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação na Aula de Cálculo 1 a Distância. In *XVII Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática*. Vitória - ES.

Almeida, H. R. F. L., Oliveira, L. P. F., & Francisco, R. F. O. (2014). O uso das tecnologias digitais na licenciatura em matemática a distância: uma visão a partir dos projetos políticos pedagógicos. In *Simpósio internacional de educação a distância e encontro de pesquisadores em educação a distância*. São Carlos - SP.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Portugal: Porto Editora.

Borba, M. C. (2013). Os diferentes usos de Tecnologias Digitais em EaD no Brasil. In *Anais*, 1–8. Montevidéu: Semur.

Borba, M. C., & Llinares, S. (2012). Online mathematics teacher education: overview of an emergent field of research. *ZDM Mathematics Education, 44*, 697–704.

Borba, M. C., Malheiros, A. P. S., & Amaral, R. B. (2011). *Educação a Distância online* (3rd ed.). Belo Horizonte: Autêntica.

Brasil. (2007). *Referenciais de qualidade para educação superior a distância*. Brasília: MEC. Retrieved from http://portal.mec.gov.br/seed/arquivos/pdf/legislacao/refead1.pdf.

Chiari, A. S. S., Borba, M. C., Almeida, H. R. F. ., Oliveira, L. P. ., & Zampieri, M. T. (2013). Mapa de uso de Tecnologias da Informação e Comunicação em Educação a Distância online no Brasil: procedimentos de análise. In *Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, 1–8. Montevidéu: Semur.

Gatti, B. A., & Barreto, E. S. S. (2009). *Professores do Brasil: impasses e desafios*. Brasília: UNESCO.

Goldenberg, M. (2011). *A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais*. Rio de Janeiro: Record.

Javaroni, S. L., Santos, S. C., & Borba, M. C. (2011). Tecnologias digitais na produção e análise de dados qualitativos. *Educação Matemática Pesquisa, 13*(1), 197–218.

Javaroni, S. L. (2007). *Abordagem Geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagem de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias* (Doutorado). Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho," Rio Claro.

Lapèrriere, A. (2008). A teorização enraizada (grounded theory): procedimento analítico e comparação com outras abordagens similares. In *A pesquisa qualitativa: enfoques epistemológicos e metodológicos* (1st ed.). Petrópolis: Vozes.

Lincoln, Y. S., & Guba, E. G. (1985). *Naturalistic Inquiry*. London: Sage Publications.

Maltempi, M. V., & Malheiros, A. P. S. (2010). Online distance mathematics education in Brazil: research, practice and polic. *ZDM Mathematics Education, 42*, 291–303.

Marin, D., & Penteado, M. G. (2011). Professores que Utilizam Tecnologia de Informação e Comunicação para Ensinar Cálculo. *Educação Matemática Pesquisa, 13*(3).

Nabel, L. C. . (2006). La educación a distancia en México: ¿Quién y cómo la hace? *Neva Época, 6*(4), 74–89.

Olimpio Junior, A. (2006). *Compreensões de conceitos de Cálculo Diferencial no primeiro ano de Matemática - uma abordagem integrando oralidade, escrita e informática* (Doutorado). Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho," Rio Claro.

Poupart, J. (2012). A entrevista de tipo qualitativo: considerações epistemológicas, teóricas e metodológicas. In J. Poupart, J. P. Deslauriers, L. H. Groulx, A. Lapèrriere, R. Mayer, & A. P. Pires, *A pesquisa Qualitativa: enfoques epistemológicos e metodológicos* (pp. 215–153). Petrópolis: Vozes.

Viel, S. R. (2011). *Um olhar sobre a formação de professores a distância: o caso da CEDERJ/UAB* (Tese). Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho," Rio Claro.

O software GrafEq e os registros de representação semiótica: uma análise de trabalhos com ilusão de ótica

Márcia **Notare**
Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Brasil
marcia.notare@gmail.com
Leandra Anversa **Fioreze**
Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Departamento de Matemática, Universidade Federal de Santa Maria
Brasil
leandra.fioreze@gmail.com
Fabrício Fernando **Halberstadt**
Universidade Federal de Santa Maria
Brasil
ffhmatematica@gmail.com

Resumo

Este artigo tem como propósito analisar, a partir dos registros de representação semiótica de Duval, as construções de imagens de ilusão de ótica no GrafEq com o uso de parâmetros. Foram analisadas as produções de alunos (estes em sua maioria, professores de matemática) em uma das atividades da disciplina de Mídias Digitais II, do Curso de Especialização em Matemática, Mídias e Didática: Tripé para Formação do Professor de Matemática, da UFRGS. Utilizamos esta teoria, devido à importância das representações semióticas na aprendizagem da matemática, em especial para os conceitos da geometria analítica. Nesse sentido, o GrafEq consiste em uma interessante alternativa pedagógica, pois apresenta um bom potencial semiótico ao permitir a manipulação simultânea dos seus registros algébrico e gráfico. A partir da análise das produções dos alunos e dos relatórios entregues, percebemos que esta atividade proporcionou aos alunos um momento de mobilização para a compreensão das relações matemáticas utilizadas.

Palavras chave: semiótica, GrafEq, aprendizagem, equações e inequações, ilusão de ótica.

Introdução

O Curso de Especialização em Matemática, Mídias Digitais e Didática: Tripé para Formação do Professor de Matemática, é oferecido pelo Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática do Instituto de Matemática da UFRGS na modalidade à distância. Este curso tem como propósito a atualização dos conhecimentos dos professores de Matemática, especialmente quanto ao uso das mídias digitais no processo de ensino e aprendizagem. O curso caracteriza-se pela articulação entre conhecimento matemático, tecnologia e prática pedagógica.

O curso está em sua segunda edição e foi ofertado para seis cidades polos do estado do Rio Grande do Sul – Brasil, totalizando cento e oitenta vagas, destinadas a professores de matemática dos níveis de ensino fundamental e médio.

Uma das disciplinas deste curso, Mídias Digitais II, do qual parte dos autores deste artigo atua como professores formadores e conteudistas, teve como objetivo discutir o uso de vídeos nas aulas de Matemática e a abordagem de conceitos de geometria analítica com a utilização de mídias digitais. A disciplina foi organizada nos seguintes módulos: Módulo I – O uso de vídeos no ensino de Matemática; Módulo II – Construção de obras de arte com o uso do GrafEq, sendo que estas obras apresentam uma riqueza de elementos geometricos, com relações matemáticas que representam segmentos de retas de inclinações variáveis; Módulo III – Construção de imagens de ilusão de ótica, a partir do uso de parâmetros no GrafEq; Módulo IV - Construção de superfícies de revolução no software Winplot e no objeto de aprendizagem Gira; Módulo V – Planejamento de uma proposta de ensino com a utilização de recursos digitais, implementação da proposta e descrição e análise dos resultados.

Daremos ênfase, neste artigo, ao Módulo III – construção de imagens de ilusão de ótica a partir do uso de parâmetros. Neste caso, analisamos as construções dos alunos do curso (em sua maioria, professores de matemática da educação básica do interior do estado do Rio Grande do Sul) sob o olhar da Teoria dos Registros de Representações Semióticas de Duval (2009, 2006). Utilizamos esta teoria, pois sabemos da importância das representações semióticas na aprendizagem da Matemática, em especial para a aprendizagem de conceitos da geometria analítica, suas equações e suas respectivas representações gráficas, sendo que a mobilização de diferentes representações semióticas é condição fundamental para a compreensão de um conceito matemático. Com isso, o uso do *software* GrafEq no ensino da Matemática pode consistir em uma interessante alternativa pedagógica, pois apresenta um bom potencial semiótico, ao permitir a manipulação simultânea dos seus registros algébrico e gráfico.

Este artigo está organizado da seguinte maneira: no próximo item, apresentamos a temática "Ilusão de Ótica". Na sequência, tecemos considerações sobre a Semiótica e o papel dos softwares voltados para o ensino e aprendizagem da Matemática e, em especial, o potencial semiótico do GrafEq. Por fim, apresentamos a atividade proposta no curso de especialização, bem como os sujeitos da pesquisa, seguido da análise das produções dos alunos sob o olhar da semiótica.

Ilusões de Ótica

Malba Tahan, em seu livro "As maravilhas da matemática", no capítulo 8, aborda ilusões de ótica, sob o título "As aparências que enganam". O autor, citando John Newman, reconhece que este tema não é específico da matemática, pois nosso raciocínio poderá interferir nas ilusões de ótica que deturpam a visão natural das coisas, porém reconhece que o assunto é de alto interesse para a geometria.

Segundo Leivas (2013), ilusões óticas e Matemática sempre andaram juntas com as Artes. A história ilustra muitas situações nas quais a ciência auxiliou os artistas em suas obras que geram imagens dúbias. "Entretanto, na área artística, o termo utilizado é anamorfose, oriundo do grego, significando "sem forma". Com essa técnica, podem ser produzidas tais imagens, as quais podem ser apoiadas na perspectiva matemática".

Conforme o autor, as anamorfoses são imagens distorcidas que, dependendo do ponto onde o observador se encontra, ou por meio de objetos refletores, aparecem reconstituídas aos nossos olhos.

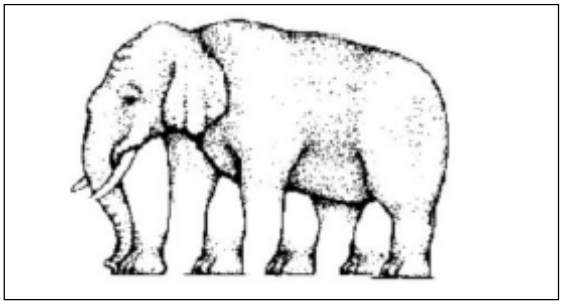
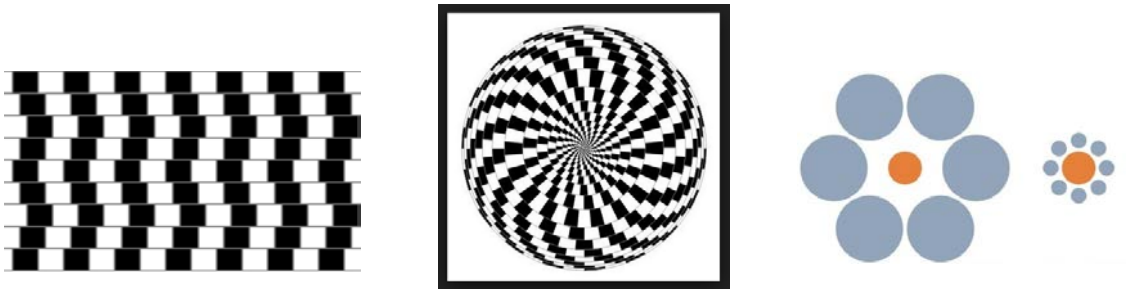


Figura 1. Quantas pernas tem o elefante?
Fonte: Ilusiones visuales. Recuperado em 29 setembro, 20014, de http://iesmjuancalero.juntaextremadura.net/archivos_insti

Observe, na Figura 1, que dependendo do ponto de vista do observador, teremos uma dualidade na interpretação do número de pernas do elefante. Uns dirão que nesta imagem há quatro pernas, pois é um mamífero, e outros, acompanhando a tromba do elefante pelo lado direito, dirão que há seis pernas.

É interessante perceber que o controle das construções geométricas de muitas imagens pode comprovar que se tratam apenas de ilusões. Vamos observar as imagens ilustradas na Figura 2.



(a) (b) (c)

Figura 2. Imagens de Ilusão de Ótica.
Fonte: Hype Science. Recuperado em 29 setembro, 20014, de http://hypescience.com/incriveis-ilusoes-de-otica

Na Figura 2 (a), temos a ilusão de que as linhas horizontais não são paralelas. As curvas que observamos em (b) parecem espirais, porém, na realidade, são circunferências concêntricas. Na Ilusão de Ebbighaus (c), temos a ilusão de que o círculo central da esquerda é menor que o círculo central da direita, porém ambos os círculos possuem raios de mesma medida. Ao realizar a construção destas imagens com o GrafEq ou outro software, podemos verificar, de fato, que se trata de uma ilusão de ótica.

Conforme Leivas (2013), geralmente, as imagens de ilusão de ótica despertam o interesse e servem para explorar os diversos olhares que se pode ter, conduzindo a debates sobre os significados que uns e outros atribuem a estas imagens.

O software GrafEq e os registros de representação semiótica

Atualmente, temos à nossa disposição diferentes recursos digitais, que nos possibilitam tratar o processo de aprendizagem de matemática de forma mais dinâmica e interativa. Muitos destes recursos permitem a elaboração de atividades nas quais as estratégias para sua resolução impulsionam ao entendimento global de conceitos matemáticos, que muitas vezes são compreendidos pelos alunos de forma restrita, em situações limitadas e focadas em manipulações algébricas repetitivas.

Os registros de representação semiótica tem papel fundamental na aprendizagem de conceitos matemáticos. Um sistema de representação semiótica pode ser considerado como um conjunto de signos expressos por meio da fala, da escrita e do desenho, associado a um conjunto de regras de produção e de organização destes signos, que estabelecem o fluir do discurso e a um conjunto de relações entre signos e seus significados.

Para Duval (2009), os sistemas de representação semiótica tem importante papel no processo de aprendizagem da matemática. Os objetos matemáticos, em geral, são expressos por meio de diferentes registros, tais como o registro algébrico com suas regras de funcionamento, o registro gráfico, com regras de tratamento que levam à identificação dos elementos pertinentes de uma figura e, dentro deste registro, inclui-se o de natureza gráfica, dado por sistema de coordenadas cartesianas e curvas que nele são traçadas, o registro discursivo em linguagem natural, e também com símbolos, com suas regras convencionais de comunicação.

A teoria de Duval (2009) traz a ideia de transformação de registros. Esta ideia explicita o quanto a atividade matemática consiste, essencialmente, de transformações sobre as representações. As transformações desdobram-se em dois tipos: tratamentos, caso em que elas acontecem dentro de um mesmo registro; e conversões, caso em que as transformações transitam entre dois diferentes registros. No processo de aprendizagem da matemática, Duval destaca que nas conversões, muito mais do que nos tratamentos, encontram-se as maiores dificuldades.

Halberstadt & Fioreze (2014) salientam que a conversão não se esgota em mudar de registro de representação semiótica. Diferentes registros de um objeto matemático podem evidenciar propriedades ou aspectos desse mesmo objeto, ou seja, as representações semióticas de um mesmo objeto não possuem o mesmo conteúdo. Daí a necessidade de haver a coordenação de ao menos dois tipos de registros de representações semióticas para que os objetos matemáticos não se confundam com as próprias representações.

Conforme Notare & Gravina (2013), o GrafEq[1] é um software que permite a construção de gráficos e regiões do plano a partir de equações implícitas ou inequações. Sua interface possibilita o trabalho simultâneo nos registros algébrico e grafico, que pode ajudar na aprendizagem das equações e relações envolvendo as coordenadas (x, y) de pontos no plano.

Na área de trabalho do GrafEq, tem-se duas janelas: uma delas para registro algébrico e outra para o registro gráfico. Diferentes registros algébricos convertem-se em formas geométricas, em uma mesma janela gráfica do software, conforme ilustra a Figura 3.

[1] http://www.peda.com/grafeq/

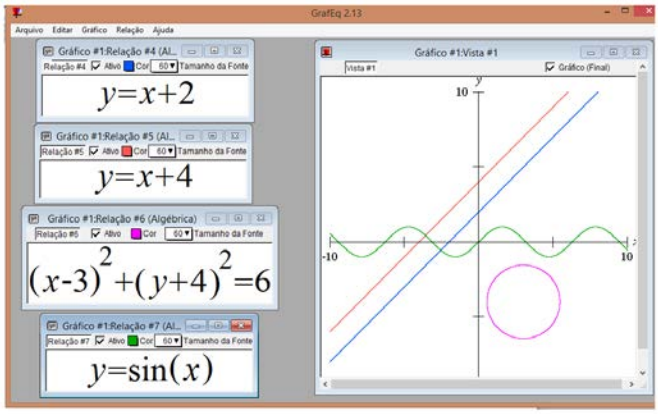
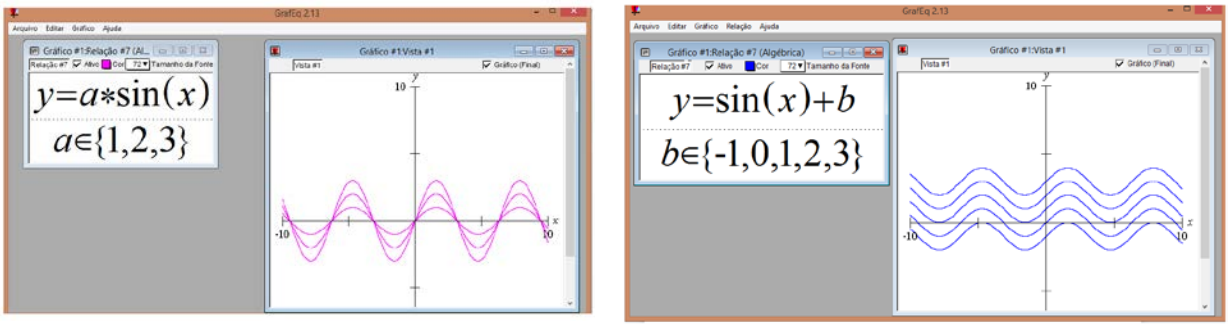


Figura 3. Interface do GrafEq.
Fonte: Ilustração dos autores.

Um recurso interessante do GrafEq é a possibilidade de trabalhar com equações com parâmetros. É possível trabalhar, de forma simultânea, com os registros algébricos e gráficos de famílias de curvas. A Figura 4 ilustra este recurso: em (a), podemos verificar na janela algébrica o parâmetro *a* admitindo os valores 1, 2 e 3, que produzem na janela gráfica três curvas, uma para cada valor de *a*, que representam o movimento de dilatação/compressão vertical; em (b), podemos verificar na janela algébrica o parâmetro *b* admitindo os valores -1, 0, 1, 2 e 3, que produzem na janela gráfica cinco curvas que representam o movimento de translação vertical.



(a) (b)

Figura 4. Família de curvas construídas a partir de parâmetros no GrafEq.
Fonte: Ilustração dos autores.

O uso de parâmetros, no GrafEq, pode tornar mais evidente a relação entre a equação algébrica e os efeitos de dilatação e/ou translação aplicados às relações algébricas. Este tratamento da equação, via variedade de transformações a partir do uso de parâmetros, pode proporcionar situações que levem o aluno ao entendimento global da relação entre as coordenadas dos pontos que pertencem à curva.

O GrafEq também permite a representação de regiões no plano por meio de inequações. A intersecção de regiões é produzida a partir da inclusão de diferentes relações de desigualdade em uma mesma janela algébrica do GrafEq. A Figura 5 ilustra este processo.

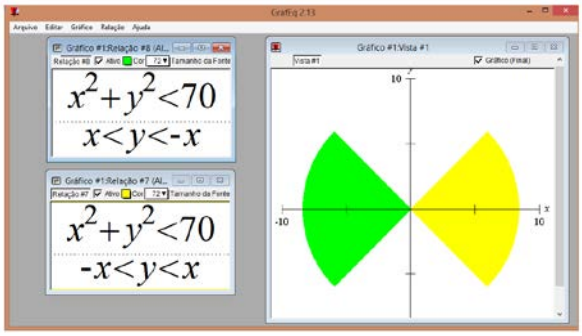
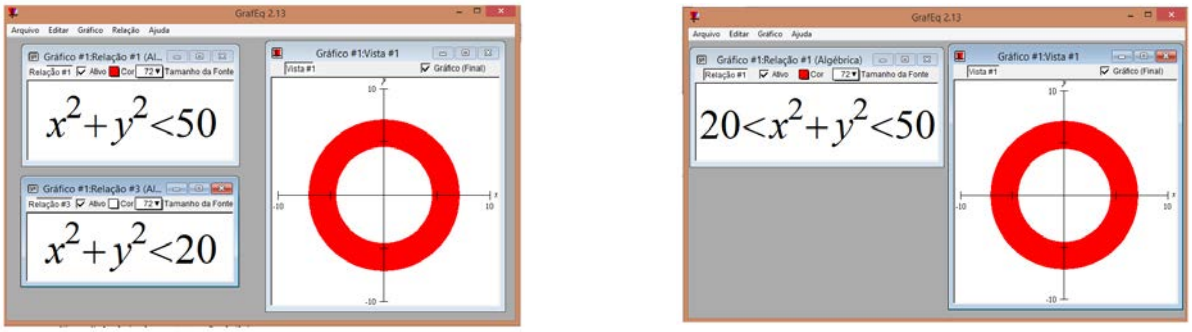


Figura 5. Intersecção de regiões no plano por meio de relações de desigualdades.
Fonte: Ilustração dos autores.

Neste caso, o potencial do software está na necessidade do entendimento de uma forma geométrica como sendo a intersecção de conjuntos soluções de diferentes inequações. Em experiências vivenciadas com alunos, muitas vezes, percebemos o estabelecimento de conflitos cognitivos frente à aparente não resposta do software ao desenho de forma resultante de intersecções de conjuntos – é o caso em que os alunos não entendem de imediato, que a intersecção solicitada via desigualdades algébricas é um conjunto vazio e que, portanto, o software está respondendo de forma adequada.

Na construção de formas geométricas a partir de inequações, é possível perceber raciocínios algébricos mais ou menos estruturados. Por exemplo, se na construção de regiões do plano é colocada a exigência de não haver sobreposição de formas, na janela de álgebra é preciso fazer intersecção de regiões. Para ilustrar o que estamos falando, podemos observar na Figura 6 duas formas de obter um mesmo anel circular: em (a) tem-se duas janelas de álgebra, uma para o círculo vermelho e a outra para círculo branco que é sobreposto ao vermelho; em (b) tem-se uma única janela de álgebra, resultado de raciocínio que usa maior estruturação algébrica.



(a) (b)

Figura 6. Anel circular e estruturação algébrica.
Fonte: Ilustração dos autores.

Ainda com o uso de parâmetros, é possível obter a união de regiões do plano em uma única janela de álgebra. Na Figura 7, temos um exemplo simples: uma coleção de retângulos. O potencial deste recurso está na possibilidade de desenvolvimento de raciocínio generalizador a partir da utilização de parâmetros via registro algébrico.

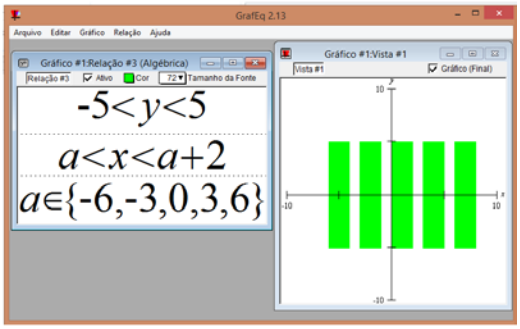


Figura 7. União de regiões no plano por meio do uso de parâmetros.
Fonte: Ilustração dos autores.

Dessa forma, podemos dizer que o GrafEq apresenta-se como um recurso interessante para trabalhar gráficos e suas respectivas relações algébricas com os alunos, provocando o desenvolvimento de habilidades em operar tanto no registro algébrico, quanto no registro gráfico.

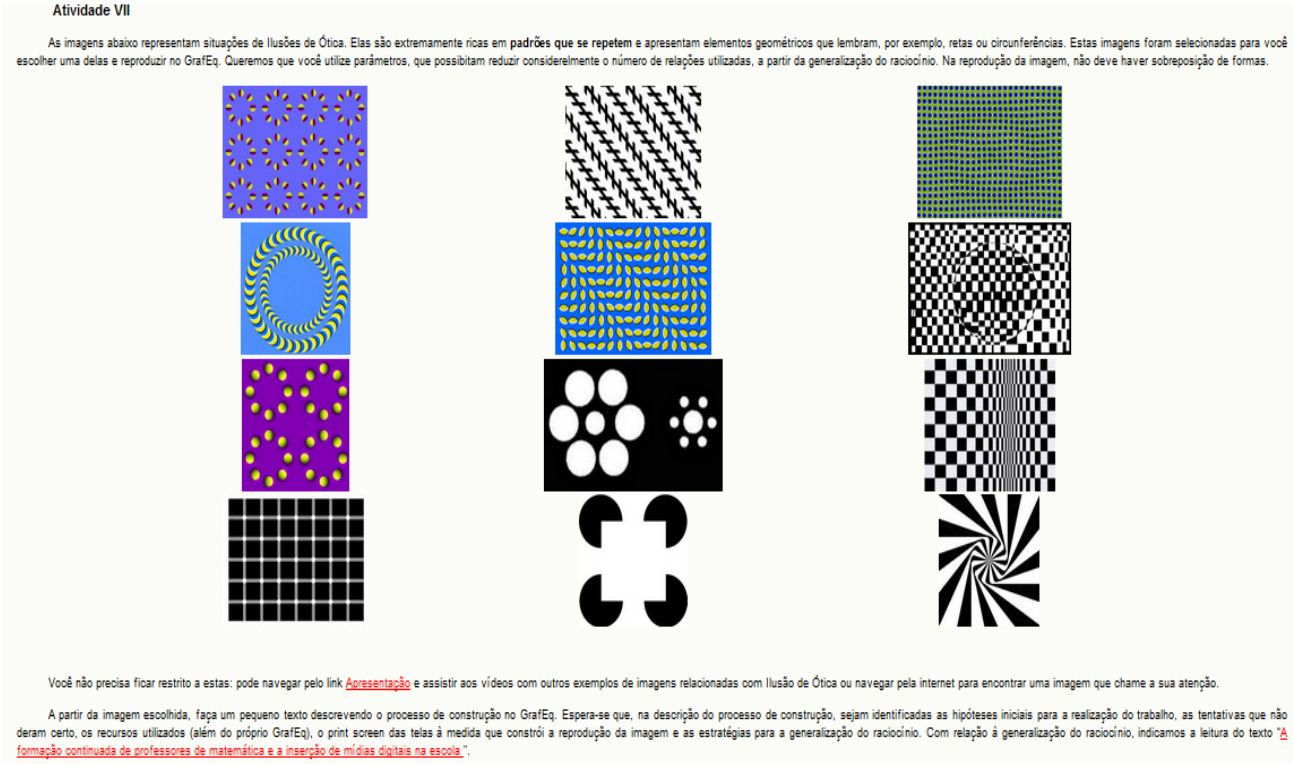
A disciplina Mídias Digitais II e as atividades planejadas

Conforme dito anteriormente, uma das disciplinas do curso de especialização Matemática – Mídias Digitais – Didática: tripé para Formação do Professor de Matemática denomina-se Mídias Digitais II.

Os recursos digitais enfocados na disciplina foram: vídeos, GeoGebra, GrafEq e Winplot. Para cada mídia apresentada aos alunos, atividades são planejadas, tendo em vista o processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos da educação básica, além da aprendizagem do *software* em si. Para tal, foi desenvolvido um website da disciplina[2], o qual foi organizado em cinco módulos. Cada módulo foi estruturado de forma a conter os seguintes menus: Apresentação, Conteúdos, Atividades, Recursos e Complementos. No menu Apresentação, trazemos a ideia e o objetivo geral do módulo; o menu Conteúdos apresenta os conteúdos matemáticos abordados nas atividades do módulo; o menu Atividades traz as atividades propostas; em Recursos, apresentamos o suporte necessário para que o aluno utilize o recurso digital abordado no módulo; no menu Complementos, procuramos trazer atividades, leituras ou recursos complementares ao tema abordado no módulo. O material desenvolvido apresenta animações, tutoriais e vídeos que explicam os principais recursos de cada mídia abordada, buscando dar o suporte necessário ao aluno à distância.

A atividade relatada neste artigo foi desenvolvida no segundo semestre de 2014. A atividade proposta consistia em construir no GrafEq uma imagem de ilusão de ótica a partir de relações matemáticas, caracterizada pela repetição de padrões, utilizando um número mínimo de relações com o uso de parâmetros. Além disso, solicitou-se aos discentes do curso que elaborassem um texto no qual descrevessem as etapas da sua construção, o raciocínio utilizado e as principais dificuldades encontradas nesse processo. A Figura 8 ilustra esta atividade.

[2] http://www.ufrgs.br/espmat/disciplinas/midias_digitais_II_2014/



Atividade VII

As imagens abaixo representam situações de Ilusões de Ótica. Elas são extremamente ricas em **padrões que se repetem** e apresentam elementos geométricos que lembram, por exemplo, retas ou circunferências. Estas imagens foram selecionadas para você escolher uma delas e reproduzir no GrafEq. Queremos que você utilize parâmetros, que possibitam reduzir considerelmente o número de relações utilizadas, a partir da generalização do raciocínio. Na reprodução da imagem, não deve haver sobreposição de formas.

Você não precisa ficar restrito a estas: pode navegar pelo link Apresentação e assistir aos vídeos com outros exemplos de imagens relacionadas com Ilusão de Ótica ou navegar pela internet para encontrar uma imagem que chame a sua atenção.

A partir da imagem escolhida, faça um pequeno texto descrevendo o processo de construção no GrafEq. Espera-se que, na descrição do processo de construção, sejam identificadas as hipóteses iniciais para a realização do trabalho, as tentativas que não deram certo, os recursos utilizados (além do próprio GrafEq), o print screen das telas à medida que constrói a reprodução da imagem e as estratégias para a generalização do raciocínio. Com relação à generalização do raciocínio, indicamos a leitura do texto "A formação continuada de professores de matemática e a inserção de mídias digitais na escola".

Figura 8. Atividade proposta no módulo III – Ilusões de Ótica.
Fonte: Ilustração dos autores.

O uso de vídeos permeou todas as atividades planejadas, pois acreditamos no seu potencial pedagógico, sendo que geralmente trazem algo de novo para a sala de aula e instigam a curiosidade dos alunos, ou por serem divertidos e atraentes, ou por trazerem boas animações, que ajudam a esclarecer determinados conceitos. Embasamos nossas ações tomando como referência textos que tratam do ponto de vista pedagógico o uso de vídeos na sala de aula, como Moran (1995) e Arroio e Giordan (2006).

Foram entregues um total de oitenta e oito trabalhos. Nestes, foram identificadas dez imagens de ilusões de ótica diferentes. No processo de análise e avaliação destes trabalhos, consideramos elementos como: a reprodução da imagem de ilusão de ótica busca ser fiel à original, com relações matemáticas que apresentam, por exemplo, segmentos de retas ou circunferências; a reprodução da imagem de ilusão de ótica utiliza parâmetros para reproduzir padrões que se repetem, estabelecendo um número mínimo de relações a partir de raciocínios generalizadores; a reproducao da imagem de ilusão de ótica evita a sobreposição de formas, recorrendo à intersecção de curvas para determinar as regiões do plano; no texto elaborado, o aluno expressa detalhadamente o processo de construção da imagem de ilusão de ótica. Dos trabalhos entregues, percebemos que trinta e sete trabalhos atenderam a todos os elementos explicitados acima; trinta e seis trabalhos atenderam a quase todos estes elementos; apenas quinze trabalhos apresentaram uma construção mais precária. Esse cenário evidencia que a grande maioria dos alunos se empenhou em realizar um bom trabalho, ao verificarmos que setenta e três trabalhos foram bem avaliados.

A ilusão de ótica que foi escolhida pelo maior número de alunos (22) foi o Quadrado de Kanizsa:

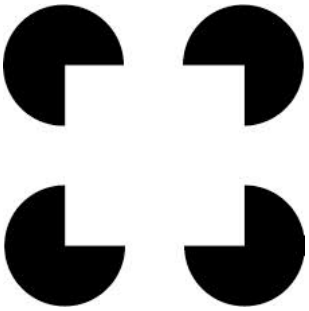


Figura 9. Ilusão de ótica escolhida.
Fonte: A natureza da inteligência. Recuperado em 29 setembro, 20014, de http://www.intelliwise.com.br/digital/natinta/natinta9.asp

Infere-se que a escolha se deve por aparentemente ser uma das mais simples de ser construída. Verifica-se que todos, à exceção de um aluno, conseguiram construir a sua versão para a ilusão de ótica. A maioria realizou a construção a partir da plotagem dos quatro círculos pretos, sem que lhe fosse subtraída o quarto de área correspondente. Em seguida, plotaram sobre esses círculos um quadrado branco de vértices nos centros dos círculos pretos. A Figura 10 ilustra uma destas situações.

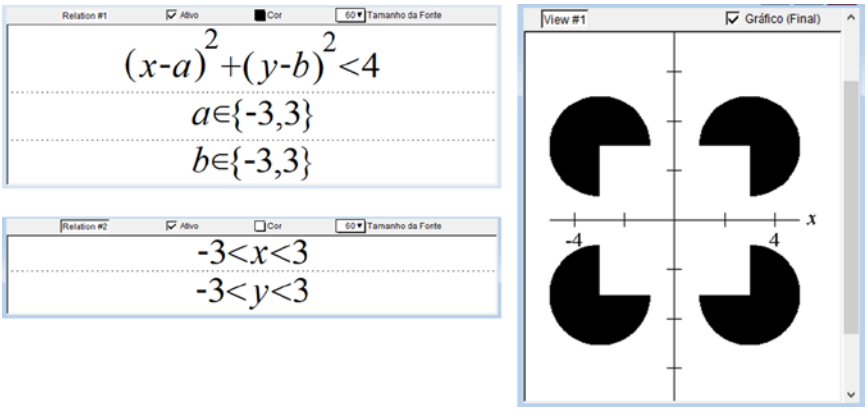


Figura 10. Ilusão de ótica escolhida.
Fonte: Produção dos alunos.

Construções como estas não seguiram as orientações da atividade, afinal uma das recomendações foi a não sobreposição de formas. Contudo, a partir dessa construção, observamos que por meio da utilização dos parâmetros *a* e *b*, o aluno generalizou em apenas uma relação matemática a posição relativa dos círculos.

Um aspecto que se observou em muitos dos relatórios apresentados pelos alunos, foi que a generalização resultou de um processo de várias tentativas. Segue a descrição do aluno A:

> "Para sua reprodução foram muitas tentativas, inicialmente tentei criar cada circunferência separadamente, e então logo usei a dica do texto e criei as quatro ao mesmo tempo".

Esse aspecto vai ao encontro com o que se esperava do GrafEq nessa atividade: proporcionar diferentes experimentações ao aluno e promover o pensar do aluno. O software contribuiu para a mobilização do aluno em busca da compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos na atividade.

Quatro alunos não usaram parâmetros algébricos de modo a reduzir o número de relações utilizadas nas suas construções. É interessante observar na descrição de um deles que mesmo observando a relação existente entre os círculos, o aluno não conseguiu expressar de que forma isso seria representado em uma única relação. Percebe-se que este aluno ainda está em processo de compreensão do efeito dos parâmetros na construção da figura, ou seja, ainda não possui um entendimento global deste conceito, pois, conforme Duval (2009, 2006), não controla as relações dos parâmetros nas equações e seus efeitos na representação geométrica.

O aluno B realizou uma interessante estratégia: o recurso *if*.

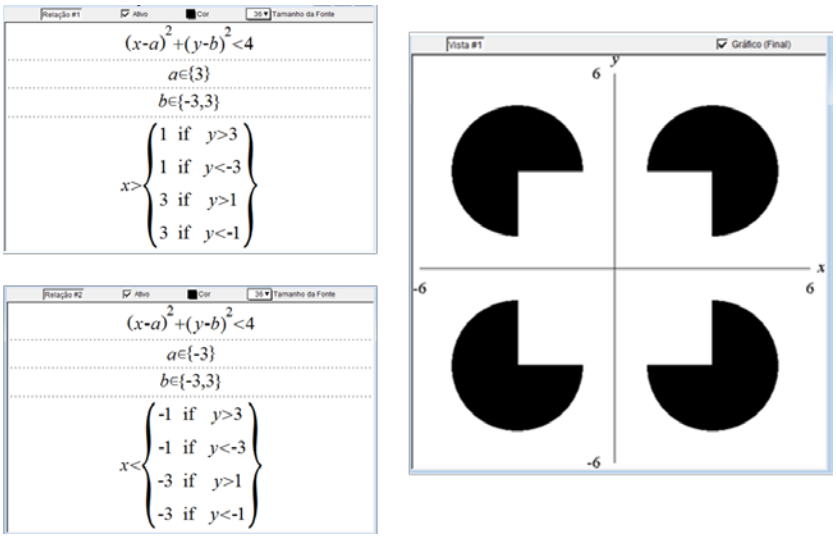


Figura 11. Ilusão de ótica escolhida e o recurso *if*.
Fonte: Produção dos alunos.

> "*[...] pensei numa maneira de construir somente os círculos da imagem, utilizando apenas uma relação. Minha primeira tentativa foi construir os quatro círculos com a mesma relação anterior e ainda utilizar o recurso if, disponível no software, para estabelecer a condição de existência dos círculos, inserindo uma restrição para valores de x. Esta tentativa, no entanto, não funcionou, pois dependendo da condição de existência utilizada, por vezes nenhuma região aparecia no gráfico, ou apareciam só dois círculos, ou a parte oculta do círculo não correspondia à imagem original. Foi então que optei por uma segunda tentativa, em que utilizei uma relação para cada par de círculos.*"

Verificamos no registro escrito do aluno B que ele articulou os registros algébrico e gráfico (e vice-versa) dos círculos representados. À medida que introduzia relações algébricas no GrafEq e estas não geravam o resultado gráfico esperado, a partir do registro gráfico buscava adequar as relações algébricas, e assim sucessivamente. Com base nessa análise, podemos dizer que, sob a luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica, o aluno B estava convertendo esses dois registros, o que é essencial para a compreensão dos conceitos matemáticos envolvidos.

Outra ilusão de ótica escolhida foi a *Scintillating Grid Illusion,* na qual os círculos entre os quadrados pretos parecem piscar (Figura 12). Na verdade, são todos círculos brancos.

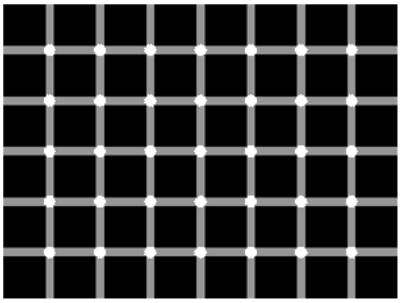
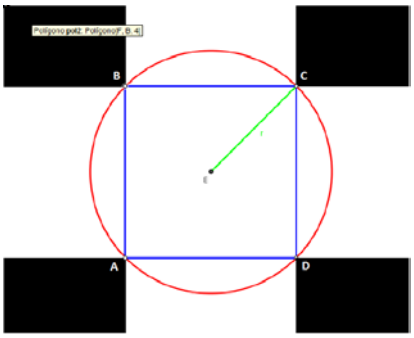


Figura 12. Ilusão de ótica escolhida.
Fonte: Produção dos alunos.

Seis alunos optaram em realizar essa construção. Todos conseguiram generalizar a suas versões em apenas duas relações algébricas do GrafEq. No relato do aluno C, observamos uma interessante descrição do processo para determinar qual seria o raio dos círculos.

De modo a não existir sobreposição de figuras, o raio do círculo deve ter dimensão igual à semidiagonal do quadrado ABCD, composto pelos quatro vértices dos quadrados adjacentes, conforme figura abaixo.



Sendo d a diagonal do quadrado e diâmetro do círculo e l o lado do quadrado temos:

$$d^2 = l^2 + l^2$$
$$d^2 = 2l^2$$
$$d = \sqrt{2l^2}$$
$$d = l\sqrt{2}$$

Como l=0,3, então $d = 0{,}3\sqrt{2}$.
Sendo o quadrado ABCD de lado 0,3, sua diagonal mede $0{,}3\sqrt{2}$*, e sua semidiagonal, portanto,* $0{,}15\sqrt{2}$.

Assim, verificamos no relatório do aluno C, que ao se defrontar com o desafio de determinar qual deveria ser a medida dos raios dos círculos, este necessitou converter as características do registro gráfico para o registro algébrico. Em seguida, realiza o necessário tratamento ao registro algébrico. Nesse sentido, podemos afirmar que a atividade proporcionou as duas formas de transformações de registros de representação semiótica: a conversão e o tratamento.

Vale ressaltar que muitos dos alunos utilizaram recursos adicionais para localizar as figuras geométricas no plano cartesiano como, por exemplo, inserir a imagem original da ilusão na janela gráfica do software GeoGebra. Dessa forma, a versão da ilusão produzida pelos alunos foi mais fidedigna em relação à original.

Considerações Finais

Este artigo apresentou uma proposta de trabalho com o software GrafEq, que explora a construção de imagens de ilusão de ótica para desenvolver a compreensão das relações matemáticas e seus efeitos gráficos. Para o desenvolvimento desta proposta, optamos por trabalhar com a utilização de parâmetros, com o objetivo de estimular a habilidade de generalizar situações que apresentam um padrão que se repete, explorando as potencialidades que o GrafEq oferece. O trabalho com parâmetros exige dos alunos uma compreensão mais global das relações matemáticas e seus coeficientes, uma vez que os alunos precisam trabalhar, simultaneamente, com os registros algébrico e gráfico e controlar estes parâmetros no registro algébrico para obter o efeito gráfico desejado no registro gráfico.

A partir das análises das produções dos alunos e dos relatórios entregues, percebemos que esta atividade proporcionou aos alunos um momento de mobilização para a compreensão das relações matemáticas utilizadas. Os alunos empenharam-se na realização da atividade, evidenciaram as estratégias utilizadas, os momentos de frustação com tentativas que não levaram aos resultados esperados e a necessidade de superar as dificuldades a partir da compreensão e controle da situação.

Esta experiência evidencia que o software GrafEq constitui-se como um recurso com potencial semiótico que pode mobilizar os alunos para a aprendizagem de equações e inequações matemáticas.

Referências Bibliográficas

Arroio, A & Giordan, M. (2006) O vídeo educativo: aspectos da organização do ensino. Química Nova na Escola, 24, p.8-11. Disponível em http://qnesc.sbq.org.br/online/qnesc24/eqm1.pdf.

Duval, R. (2009). Semiósis e Pensamento Humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais. São Paulo: Editora Livraria da Física.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61, (pp. 103-131). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Halberstadt, F.F. & Fioreze, L.A. (2014). A aprendizagem da geometria analítica do ensino médio e suas representações semióticas no GrafEq: algumas considerações iniciais. Anais da V Jornada Nacional de Educação Matemática (V JEM), Passo Fundo, RS, Brasil.

Leivas, J. C. P. (2013). Visualização ou Ilusão Ótica: O que dizem os mestrandos? *Revista de Educação, Ciências e Matemática* v.3 n.2 mai/ago 2013.

Moran, J. (1995). O Vídeo na Sala de Aula. Comunicação e Educação, (2),p. 27-35. São Paulo.

Notare, M.R. & Gravina, M. A. (2013). A Formação Continuada de Professores de Matemática e a Inserção de Mídias Digitais na Escola. Anais do VI Colóquio de História e Tecnologia no Ensino de Matemática (VI HTEM), São Carlos, SP, Brasil.

Tahan, Malba. (1973). As maravilhas da Matemática. 2ª. ed. Rio de Janeiro: Bloch Editores.

O uso do Facebook no ensino de Matemática: um estudo de caso

José Carlos Gonçalves **Gaspar**
Instituto Federal do Rio de Janeiro
Brasil
jose.gaspar@ifrj.edu.br
Lenon Izidorio dos Santos **Fernandes**
Instituto Federal do Rio de Janeiro
Brasil
lenonisfernandes@gmail.com
Vilmar Gomes da **Fonseca**
Instituto Federal do Rio de Janeiro
Brasil
vilmar.fonseca@ifrj.edu.br
André Luiz Souza **Silva**
Instituto Federal do Rio de Janeiro
Brasil
andrelssilva@globo.com
Bruno **Vianna**
Colégio Pedro II
Brasil
profbrunovianna@yahoo.com.br

Resumo

O avanço tecnológico dos últimos anos aproximou a população à Internet. Essa pesquisa tem o objetivo de usar essa aproximação a favor do ensino, integrando o uso do Facebook ao ensino da Matemática. Os conteúdos escolhidos foram os poliedros e corpos redondos, entretanto a pesquisa pretendeutambém desenvolver habilidades quanto ao colhimento de dados, produção, interação e familiarização com tecnologias, sendo ela desenvolvida numa turma do Ensino Médio do Instituto Federal do Rio de Janeiro nos meses de janeiro e fevereiro de 2014. Houve a participação de 23 alunos, divididos em 6 grupos. Trata-se de uma pesquisa qualitativa num estudo de caso, sendo usado a Engenharia Didática. Para uma análise preliminar, os participantes responderam um questionário. Em seguida, foram aplicadas sequências didáticas que cuminaram na produção de um blog para cada grupo. Houve excelente participação dos pesquisados, tendo a pesquisa resultado muito satisfatório.

Palavras chave: educação, matemática, facebook, blog, web 2.0, engenharia didática, modelagem matemática.

Introdução

O avanço tecnológico dos últimos anos provocou uma aproximação cada vez maior da população à Internet. Agora não é preciso um computador para acessá-la, celulares, *tablets*, diversos aparelhos possuem acesso a tal tecnologia, que se torna cada vez mais presente no cotidiano. Os alunos não ignoram tais mudanças. Pelo contrário, empresas responsáveis pela produção e venda de tais produtos os enxergam como público alvo, voltando suas propagandas e modelos de produção para chamar a atenção de tal público. Deste modo, a pesquisa descrita nesse artigo tem o objetivo de usar as citadas mudanças a favor do ensino, integrando recursos disponíveis na Internet para o ensino da Matemática.

Nesse novo contexto, o professor aparece com grande importância, pois ele que dirige o uso das tecnologias e sua aplicação como ferramenta de estudo. Elas serão tão competentes quanto a metodologia que o professor escolher, profissional que precisará acompanhar não apenas as mudanças no panorama educacional, como no panorama social dos alunos para aplicar tais modificações em sua sala de aula.

Segundo Machado (2008), o professor se torna facilitador da aprendizagem, utilizando os recursos tecnológicos como utensílios para essa empreitada. Dele dependerá a didática, a abordagem e os caminhos escolhidos na aula, que será transformada por tais recursos.

A ideia central da pesquisa é aliar o ensino de Matemática, mais especificamente o ensino de Geometria Espacial, com o uso de redes sociais.

Acioli (2007) problematiza o conceito de redes sociais, colocando em cheque diferentes visões do mesmo conceito para procurar uma linha em comum entre eles, acabou esboçando três abordagens, inspirada por Barnes, J.A. e Mitchell, J. Clyde. Seriam elas a metafórica (ligada à filosofia ou um conceito), analítica (ligada à análise das redes) e tecnológica (ligada às conexões, interações relacionadas as redes eletrônicas). Nesse caso, a abordagem tecnológica se torna mais interessante por englobar tecnologias de informação, sendo um meio de acesso e troca de informações entre grupos ou indivíduos.

Esse recurso foi escolhido por, segundo Gaspar (2009), gerar uma aproximação maior entre os participantes da pesquisa, já que tem como intuito a interação de pessoas. Além disso, é algo presente na vida de grande parte da população, causando uma familiaridade conveniente para a pesquisa.

A pesquisa

A rede social escolhida como base para a aplicação do estudo foi o *Facebook*. Tal plataforma foi escolhida pela vasta popularidade, principalmente entre jovens com a idade em que se planejava aplicar as atividades. Nela, ocorreu o contato, troca de informações, organização e interação entre os organizadores e os alunos, assim como entre eles mesmos.

Esse trabalho se torna relevante por dois aspectos fundamentais para a formação do indivíduo, o que é evidenciado nos parâmetros curriculares nacionais quando diz:

> O impacto da tecnologia na vida de cada indivíduo vai exigir competências que vão além do simples lidar com as máquinas. [...] Esse impacto da tecnologia, cujo instrumento mais relevante é hoje o computador, exigirá do ensino de Matemática um redirecionamento sob uma perspectiva curricular que favoreça o desenvolvimento de habilidades e procedimentos com os quais o indivíduo possa se reconhecer e se orientar nesse mundo do conhecimento em constante movimento. (Brasil, 2006, p. 41)

Portanto, a pesquisa vai além de reconhecer poliedros e corpos redondos, pretende desenvolver habilidades quanto a colhimento de dados, produção, interação e familiaridade com tecnologias para tornar os alunos hábeis a lidar com situações de adaptação e aprendizagem que enfrentarão no mercado de trabalho.

A pesquisa foi realizada em uma turma do 5º período (referente a primeira metade do 3º Ano do Ensino Médio na modalidade anual) do Instituto Federal do Rio de Janeiro nos meses de janeiro e fevereiro de 2014. Houve a participação de vinte e três alunos, divididos em seis grupos. A maior parte do contato com os alunos foi realizado pela *Facebook*, ocorrendo apenas três encontros entre eles e os pesquisadores: o inicial, um durante a realização da pesquisa para sanar dúvidas e na apresentação final.

A pesquisa usou como metodologia a Engenharia Didática, que, por Machado (2010), tem a finalidade de analisar situações didáticas, objeto de estudo da Didática Matemática, relacionando-as com o trabalho do engenheiro que, para realizar um projeto preciso, usa seus conhecimentos científicos, mas também considera situações fora de seu controle, impossíveis de se prever. Caracteriza-se por uma sequência de aulas organizadas e programadas pelo professor-pesquisador sobre um determinado assunto, sendo as reações e interações aluno-professor o objeto de estudo. Outra característica é o registro dos estudos feitos e a validação, feita internamente ao se comparar a análise *a priori* com a análise *a posteriori*, que serão explicadas a seguir.

Essa metodologia possui também uma relação interessante com os diferentes tipos de saber, onde, segundo Pais (2002), o saber acadêmico é produzido pelo resultado da pesquisa enquanto o saber a ser ensinado é observado na aplicação prática do trabalho.

O método possui quatro fases em sua organização: análises preliminares, concepção e analise *a Priori,* aplicação da Sequência Didática e analise *a posteriori* e validação.

As análises preliminares são feitas para embasar a concepção da engenharia, sendo retomada e aprofundada durante a pesquisa. São as considerações sobre o quadro teórico didático geral e os conhecimentos didáticos sobre o assunto discutido na pesquisa. Envolve a análise epistemológica dos conteúdos, do ensino atual e seus efeitos, das concepções, dificuldades e obstáculos dos alunos e dos possíveis obstáculos para a efetiva realização didática.

Na concepção e análise *a Priori* são determinadas as variáveis interessantes de estudo para a pesquisa, baseado na análise preliminar. Envolve descrever as escolhas locais e as características das situações provocadas por cada escolha, analisar qual o desafio da situação para o aluno e prever os comportamentos possíveis e como a pesquisa pode guiar esse comportamento.

A aplicação da Sequência Didática é a realização efetiva da pesquisa, quando começa o contato do professor-pesquisador com os alunos, sendo a sequência didática um conjunto de aulas planejadas e analisadas anteriormente para observar situações de aprendizagem. Envolve explicitação dos objetivos e condições de realização da pesquisa aos alunos, estabelecimento do contrato didático, aplicação dos instrumentos de pesquisa e registro das experimentações feitas durante a experimentação.

Por fim, a análise *a posteriori* é o tratamento dos dados obtidos nas sequências didáticas, se apoiando nos registros feitos durante a observação na experimentação e nas produções dos

alunos. Algumas vezes envolve dados complementares como questionários, entrevistas ou coisas do tipo. A validação se dá ao confrontar a análise a priori com a análise a posteriori.

Utilizou também a perspectiva da Modelagem Matemática, que segundo Hein e Biembengut (2003), baseia-se na organização de um problema na busca de soluções para o mesmo, usando as ferramentas disponíveis pelos alunos para tal. Relaciona-se com o trabalho por incentivar um estudo baseado na pesquisa e descoberta de conhecimentos através do esforço dos alunos, que constroem o conteúdo com o trabalho disponível para eles.

O assunto escolhido para ser tratado na pesquisa foi o estudo de poliedros e corpos redondos, usando a relação imediata entre eles e embalagens. Essa perspectiva se torna interessante pois as reflexões sobre embalagens englobam assuntos que vão além do estudo matemático de poliedros. Apesar da forma ser importante, na criação de embalagens também levado em conta a proteção do produto utilizado, o material necessário nessa fabricação, o custo e o visual com o objetivo de chamar a atenção do cliente. Assim, todos esses aspectos se tornam interessantes e ampliam a visão dos participantes sobre o quanto a matemática está envolvida no dia-a-dia e vai além dos números e da rigidez com que estão acostumados.

Resultados

Para uma análise preliminar dos participantes, eles responderam um questionário inicial. Nele havia perguntas que envolviam conhecimentos prévios sobre poliedros e corpos redondos, além da relação que eles possuíam com o estudo da Matemática e uso tecnologias e redes sociais.

Na figura 1, os gráficos que retratam o conhecimento dos termos poliedros e corpos redondos, respectivamente, por parte do pesquisados. Temos que o termo poliedro é mais conhecido pelos alunos, onde 91% afirma conhecê-los, enquanto o de corpos redondos apenas 61% diz o mesmo. Essa ideia acaba se confirmando quando são pedidos exemplos de poliedros e corpos redondos conhecidos, onde 10 exemplos de poliedros são citados e apenas 4 de corpos redondos, sendo que erradamente o cilindro foi citados como poliedro, e o círculo como corpo redondo.

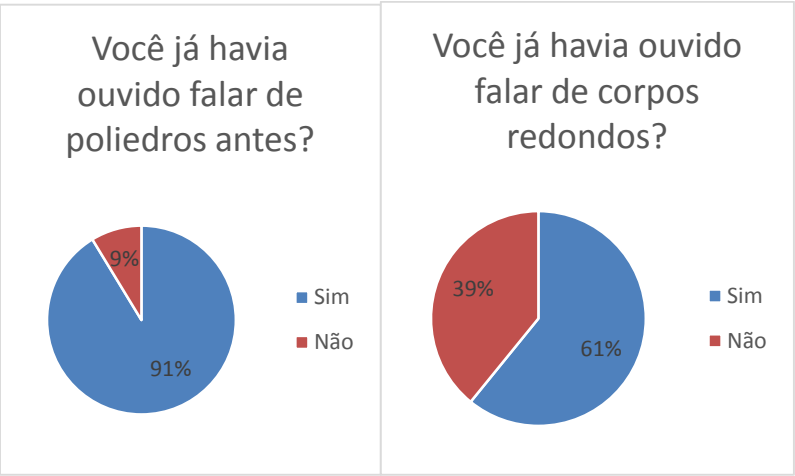


Figura 1. Gráficos que retratamo conhecimento dos termos "poliedros" e "corpos redondos", respectivamente.

Quanto a relação com o estudo da Matemática, quando perguntados se gostavam da disciplina, 70% respondeu que sim, enquanto 30% respondeu que não. Ao serem indagados

sobre os motivos das respostas, diversas justificativas foram citadas. Entre os que gostam da disciplina, foi citada facilidade na aprendizagem, prazer em aprender e realizar exercícios, a importância da matemática no cotidiano e o método preciso na resolução de problemas. Entre os que não gostaram, a maior incidência nas respostas apontava dificuldade na aprendizagem.

Quando perguntados quais recursos tecnológicos mais usavam em seu cotidiano, 11 recursos foram citados, sendo os mais incidentes celulares/*smartphones*, computadores e televisão. Sobre o uso de redes sociais, a resposta foi unânime, todos os alunos possuem acesso a elas, sendo 10 exemplos citados, com maior incidência para o *Facebook, Twitter* e *Instagram.* Na figura 2 temos o gráfico que mostra a frequência com que essas redes sociais são acessadas pelos pesquisados.

Figura 2. Gráfico representativo do questionamento – "Com qual frequência você acessa redes sociais?

Por fim, quando perguntados qual rede social utilizaram para estudo, 91% respondeu *Facebook*, mostrando mais uma vez porque a ferramenta pareceu tão atrativa na concepção da pesquisa.

Em seguida, começaram as sequências didáticas. Foram quatro no total, que ocorreram durante cinco semanas.

Na primeira sequência didática, os alunos colheram imagens de embalagens e relacionaram as mesmas com poliedros ou corpos redondos conhecidos, incluindo também a combinação de poliedros diferentes para achar o formato necessário. Ao todo, foram colhidas 26 imagens que seriam usadas em outra sequência didática citada a seguir.

Na segunda sequência didática, os alunos criaram suas próprias embalagens, usando como exemplo as imagens que colheram. Eles decidiram qual seriam os produtos seriam designados a tal embalagem e foram instruídos a considerar preços dos materiais, proteção do produto e atratividade aos clientes.

Foram produzidas sete embalagens:

- uma capa de jogo de papel em formato de paralelepípedo;

- um organizador de maquiagem de papelão com diferentes compartimentos para divisão dos produtos, também em formato externo de paralelepípedo;
- uma caixa de biscoito de papel em formato de paralelepípedo;
- uma caixa de doces de papel em formato de pirâmide;
- uma caixa de bombom de papelão em formato de hexaedro;
- uma caixa para preservativo de papel em formato de paralelepípedo, toda feita com dobraduras;
- um porta lápis de papel com a combinação de dois poliedros, um hexaedro e uma pirâmide.

A terceira sequência didática era uma discussão sobre a situação descrita a seguir: "Imagine a seguinte situação: você possui um recipiente em formato de um prisma. Agora imagine o mesmo volume desse prisma em água. Quando você coloco essa água no recipiente, não derrama, correto? Porém, se em vez de água, você tiver esse mesmo volume de bolinhas de gude? Todas as bolinhas caberão no recipiente? Por quê?" Todos os grupos responderam alguma variação da mesma ideia, que seria que a água como líquido conseguiria se adaptar ao formato do recipiente, enquanto as bolinhas de gude, sólidas, iriam deixar espaços não preenchidos entre elas e, por isso, transbordar.

Como última sequência didática, os alunos foram instruídos a criar *blogs* que seriam expostos para a turma e professor em uma apresentação final, onde deixariam disponível as imagens colhidas, o vídeo produzindo e as conclusões obtidas na discussão da terceira sequência.

Foram produzidos seis *blogs*. Todos eles continham uma pequena introdução sobre o conceito de poliedros e corpos redondos antes da postagem dos vídeos e imagens. Em um deles, havia até uma relação entre poliedros e arquitetura, com imagens de prédios como exemplos. Nas figuras 3, 4 e 5 temos a imagem de parte da página inicial de alguns dos b*logs* criados duranre a pesquisa.

Figura 3. Imagem inicial do *blog* "Poliblog"[1]

[1] http://grupogsmmat.blogspot.com.br/

Figura 4. Imagem inicial do *blog* "Nerds Supremos"[2]

Figura 5. Imagem do *blog* "Bona Bond"[3]

[2] http://nerdssupremosifrj.blogspot.com.br/
[3] http://bonabonde.blogspot.com.br/

A ideia do uso de *blogs* se apresentou pelas suas possíveis utilizações pedagógicas. Segundo Gomes (2005), os *blogs* podem ser utilizados como um "recurso pedagógico", para acesso a informação especializada ou divulgação de informações advindas do professor, ou como uma "estratégia pedagógica", assumindo a forma de um *portfólio* digital, para debate, integração, intercâmbio ou interação de diferentes partes. Neste trabalho, em específico, tal ferramenta foi usada como uma estratégia pedagógica, em forma de *portfólio*, para organizar e apoiar as aprendizagens, assim como avaliar o conteúdo do trabalho.

Após a apresentação, foi lançada uma última atividade a ser concluída: uma análise quanto ao desperdício de material na produção das embalagens. A ideia era comparar o volume do produto que a embalagem deveria proteger e a própria embalagem, procurando uma forma de produzi-la com menos gastos. Depois de tal análise, metade dos grupos encontraram modos mais eficazes e baratos para a produção da embalagem.

Como modo de avaliar as impressões deixadas nos alunos após a pesquisa, eles responderam um novo questionário com perguntas tanto sobre o aprendizado de poliedros quanto sobre o uso da rede social para tal propósito.

Dos vinte e dois alunos que responderam ao questionário (um aluno não compareceu à apresentação por motivos de saúde), todos responderam que o trabalho influenciou o seu modo de enxergar poliedros e corpos redondos. Quando perguntados como aconteceu essa influência, a maioria respondeu a identificação dos poliedros, sendo citados também o conhecimento de suas propriedades, entendimento melhor da matéria e perceber novos usos da matemática no cotidiano.

Quando perguntados sobre a influência da rede social no trabalho, 95% respondeu positivamente, citando razões como um aumento de interesse, comunicação, organização e interação, mostrando ser uma ferramenta de fácil acesso, dinâmica que facilitou no momento de sanar dúvidas. Por fim 95% respondeu que usariam redes sociais para estudos futuros.

Considerações Finais

Este estudo de caso mostrou que é válido trabalharmos com o facebook no ensino de Matemática, entretanto vimos que isso é válido agregado a uma estrutra de projeto, como por exemplo, sendo interligadoa uma sequência didática calcada na modelagem matemática e em situações que desafiem o estudante.

Em um mundo em que a comunicação rápida e a interação são cada vez mais incentivadas e necessárias, o ensino da Matemática deve acompanhar tais tendências. O uso de redes sociais se torna válido tanto por aumentar essa interação, como por utilizar um ambiente que os alunos estão familiarizados, mudando a perspectiva do propósito de tais ferramentas, além de inserir ainda mais os conhecimentos no dia-a-dia do aluno.

Por fim concluímos que o uso do blog como portifólio ajudou muito no acompanhamento do desenvolvimento da produção, bem como a simplicidade do uso facilitou o uso por parte dos pesquisados. Essa tecnologia da web 2.0 mostrou-se eficaz assim como o uso do facebook como apoio ao ensino de Matemática.

Referências e bibliografia

Acioli, S. (2007). Redes sociais e teoria social*:* revendo os fundamentos do conceito. *Revista Informação e Informação, 12,* número especial. Londrina.

Brasil, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica (2006). *Orientações curriculares nacionais para o Ensino Médio - Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília: Ministério da Educação.

Fonseca, L. (2012). *Funções trigonométricas: elementos "de" e "para" uma engenharia didática*. São Paulo: Editora Livraria da Física.

Gaspar, J. C. G. (2009). *Aprendizado colaborativo em matemática com uso da WEBQUEST: um estudo de caso*. Duque de Caxias. Dissertação (mestrado em Ensino de Ciências na Educação Básica) – Universidade do Grande Rio "Prof. José de Souza Herdy", Escola de Educação, Ciências, Letras, Artes e Humanidades.

Gomes, M. J. (2005). Blogs*:* um recurso e uma estratégia pedagógica. In António Mendes, Isabel Pereira e Rogério Costa (editores), *Actas do VII Simpósio Internacional de Informática educativa* (pp. 311-315). Leiria: Escola Superior de Educação de Leiria.

Hein, N.; Beimbengut, M. S. (2003). *Modelagem Matemática no Ensino***.** 3. ed. São Paulo: Contexto.

Pais, L. C. (2002). *Didática da Matemática: uma análise da influência francesa*. 2a ed. Belo Horizonte: Autêntica.

Machado, A.C.T. (2008). Novas formas de produção de conhecimento**:** Utilização de Ferramentas de WEB 2.0 com Recurso Pedagógico. *Revista UDESC Virtu@l.* Florianópolis, 1(2). Disponível em <http://revistas.udesc.br/index.php/udescvirtual/article/view/1655> Acesso em: 20 de Abril de 2014

Machado, S. D. A. (2010). *Educação Matemática**:** uma (nova) introdução*. 3. ed. São Paulo: EDUC.

Olimpíada de programação de computadores para estudantes do ensino fundamental: Scratch como recurso interdisciplinar

Adriano Canabarro **Teixeira**
Universidade de Passo Fundo
Brasil
teixeira@upf.br
Ariane Mileidi **Pazinato**
Universidade de Passo Fundo
Brasil
arianepazinato@upf.br
Neuza Terezinha **Oro**
Universidade de Passo Fundo
Brasil
neuza@upf.br
Jaqueline Pizzi **Zilli,**
Universidade de Passo Fundo
Brasil
jaqueline.fmma@gmail.com
Adler Jonas **Gross,**
Instituto Federal Sul-riograndense
Campus Passo Fundo
Brasil
adlerjgross@gmail.com

Resumo

O uso de recursos tecnológicos, em especial de computadores na educação, vem qualificando processos de ensino e aprendizagem. Esta percepção ganha força ao analisar uma parceria existente entre a Universidade de Passo Fundo e a Secretaria Municipal de Educação de Passo Fundo, Brasil, que tem se consolidado através da realização de projetos na área de informática educativa e inclusão digital. Um desses projetos é a Olimpíada de Programação de Computadores para Estudantes do Ensino Fundamental, usando o Scratch. Este artigo relata a metodologia da Olimpíada, bem como apresenta a análise de dois desafios constituintes da prova final. Foram realizadas duas edições, em 2013 e 2014, das quais participaram 29 equipes da cidade de Passo Fundo e região. Nelas foi possível constatar, entre outros elementos, que a programação de computadores apresenta grande fascínio nos jovens e possui grande potencial didático-pedagógico, desenvolvendo habilidades como o raciocínio lógico, pensamento procedimental e interdisciplinar.

Palavras chave: Programação de computadores, Olimpíadas, Scratch, inclusão digital, conceitos matemáticos, raciocínio lógico.

Introdução

É indiscutível a importância que a área de Tecnologia da Informação (TI) tem assumido no mundo contemporâneo, instituindo-se como elemento determinante no desenvolvimento de pessoas, empresas, municípios, estados e países. Motor do desenvolvimento econômico e vetor de agregação social, as tecnologias digitais transformam profundamente o mundo e abrem inúmeras perspectivas de ampliação da qualidade de vida dos indivíduos, de transparência para as instituições públicas e de transformação da sociedade como um todo. Entretanto é possível identificar claramente dois paradoxos: apesar da importância fundamental da área e de seu crescimento, existe um déficit de profissionais especializados neste setor, embora presente nas instituições de ensino há mais de 20 anos, não tem implicado melhorias nos resultados da educação ao redor do mundo.

De acordo com dados divulgados pela IDC América Latina, existe atualmente, no Brasil, uma carência de cerca de 39,9 mil profissionais de tecnologia sendo que até 2015, esse número deve crescer para 117 mil vagas abertas sem que os empregadores encontrem profissionais qualificados para atendê-las. Tal demanda já é reconhecida como urgente pela comunidade internacional e criando-se projetos como o code.org, liderado por grandes nomes da política, cultura, entretenimento e negócios do século XXI, como, por exemplo: Bill Clinton, ex-presidente dos EUA; Bill Gates, fundados da Microsoft; William, Músico da banda The Black Eyed Peas e empresário; Mark Zuckerberg, fundador do Facebook, dentre outros. No Brasil, diz o estudo, somente em áreas como rede essencial, segurança, telefonia IP e redes sem fio haverá uma lacuna de 23,6 mil profissionais. Percentualmente, segmentos como comunicações unificadas, vídeo, computação em nuvem, mobilidade, data center e virtualização serão as áreas com maior número de vagas abertas em comparação com o volume de profissionais qualificados disponíveis.

Neste contexto Passo Fundo, Rio Grande do Sul, Brasil ocupa lugar de destaque e estratégico no cenário da TI fora das capitais nacionais uma vez que conta com uma grande base de empresas na área, associações de profissionais e empresas da área de Tecnologia da Informação (TI), incubadoras empresariais e parques científicos e tecnológicos, além de vários cursos de nível médio e superior de graduação e pós-graduação na área de TI.

Diante desta realidade, é fundamental que se oportunizem espaços para o desenvolvimento de competências na área de TI desde o ensino fundamental, pois além de auxiliar a sanar esta demanda do mercado profissional, as tecnologias da informação podem ser um excelente aporte para os processos de ensinar e de aprender nas diferentes áreas do conhecimento.

Segundo D'Ambrosio (1998), um dos grandes desafios que se apresenta aos professores é oferecer espaço que oportunize ao estudante o despertar da criatividade e o aprimoramento do raciocínio lógico matemático, propiciando assim uma aprendizagem contextualizada e conectada às demais ciências e à sua realidade. É preciso registrar que inacreditavelmente, um alerta feito há 16 anos atrás mantém-se relevante uma vez que se verifica que a utilização das tecnologias digitais em contexto educacional tem ficado aquém das expectativas e do potencial daqueles que chamamos de nativos digitais. É como ferramenta auxiliar neste processo de ensinar e aprender e de criação de propostas que de fato desafiem os estudantes do século XXI, que a programação em computadores e a matemática estão interligadas. A matemática possibilita o desenvolvimento do raciocínio lógico e a programação necessita desta habilidade para elaborar e executar projetos em qualquer área do conhecimento.

Nesta perspectiva, o Grupo de Estudo e Pesquisa de Inclusão Digital, da Universidade de Passo Fundo (UPF), em parceria com o Projeto Interação das Olimpíadas Brasileiras de Matemática para as Escolas Públicas com o Ensino da Matemática da UPF e com a Secretaria Municipal de Educação de Passo Fundo, vem promovendo há dois anos a Olimpíada de Programação para Estudantes do Ensino Fundamental. A Olimpíada é destinada a estudantes do 6º ao 9º ano de escola públicas e tem por objetivos promover a introdução de programação de computadores no ensino fundamental, através do software Scratch; criar novas formas de utilização dos recursos de informática das escolas para o auxílio nas diversas áreas do conhecimento; despertar interesse para as áreas de matemática e informática; proporcionar novos desafios aos estudantes, visando à interdisciplinaridade; aproximar a Universidade das redes públicas de ensino.

O presente artigo tem por objetivo, a partir da reflexão teórica acerca da importância da programação de computadores, relatar a experiência das duas edições da Olimpíada, que ocorreram, respectivamente, em 2013 e 2014, e analisar dois dos desafios da prova final que envolveram conceitos matemáticos

Fundamentação Teórica

As tecnologias contemporâneas contribuem ativamente para a transformação do mundo, auxiliando na melhoria da qualidade de vida dos indivíduos, no processo de transparência das ações de instituições públicas e na vida da sociedade como um todo. Por permitir a interatividade, o uso das tecnologias digitais pode ser um recurso potencializador para o processo de ensino e aprendizagem, já que a construção do conhecimento é um processo dinâmico e participativo. Havendo cooperação entre os estudantes e entre estudantes e professores, o aprendizado tende a acontecer de forma efetiva e significativa.

Além disso, um profissional competente para atuar no segmento de TI necessita, hoje, além do conhecimento técnico na área, outras habilidades, tais como: adaptação às mudanças, capacidade de atualizar-se constantemente, capacidade de se relacionar, competências na área de análise matemática e da programação, entre outras.

No contexto de constante e emergente atualização em que o mundo se encontra, muitas vezes a escola necessita da mudança de parâmetros. Para Lévy (1999) o papel da informática não é o da inteligência artificial, mas sim auxiliar na inteligência coletiva. Segundo o autor, inteligência coletiva é "[...] a valorização, a utilização otimizada e a criação de sinergia entre as competências, as imaginações e as energias intelectuais, qualquer que seja sua diversidade qualitativa e onde quer que esta se situe."

Nesta perspectiva, o ensino de programação de computadores representa uma alternativa poderosa na qualificação da formação básica de crianças, contribuindo, potencialmente, para o processo de ensino e aprendizagem em todas as áreas do conhecimento, em especial para a Matemática, uma vez que possibilita o desenvolvimento do raciocínio lógico.

Pensando sobre programação enquanto prática

Para Papert (1986) programar implica capacidade para comunicar-se com o computador, utilizando uma linguagem que possa ser entendida tanto pela máquina, quanto pelo homem. Como crianças são ótimas na aprendizagem de línguas, elas facilmente aprenderiam a comunicar-se com um computador através de uma linguagem de programação.

Além disso, um programa de computador é "um conjunto de instruções que diz ao computador o que deve ser feito e quando, como se fosse um roteiro de filme ou uma receita culinária. O computador (máquina) sem esses programas é como um bloco de pedra! É incapaz de fazer qualquer coisa; nem mesmo funciona!" (Zímmerl, 2008)

Existem diferentes interfaces disponíveis com vistas a suportar a programação de computadores. Dentre estas linguagens que auxiliam na programação de computadores, pode-se destacar o software Scratch. Criado no Massachusetts Institute of Technology – MIT, é um recurso interdisciplinar voltado ao usuário infantil e jovem. Os comandos, no Scratch, encontram-se na forma de componentes gráficos, através de uma interface visual intuitiva, conforme mostrado na Figura 1, tem se consolidado como um poderoso recurso para o aprendizado de conceitos lógicos, matemáticos e computacionais por alunos de diferentes níveis..

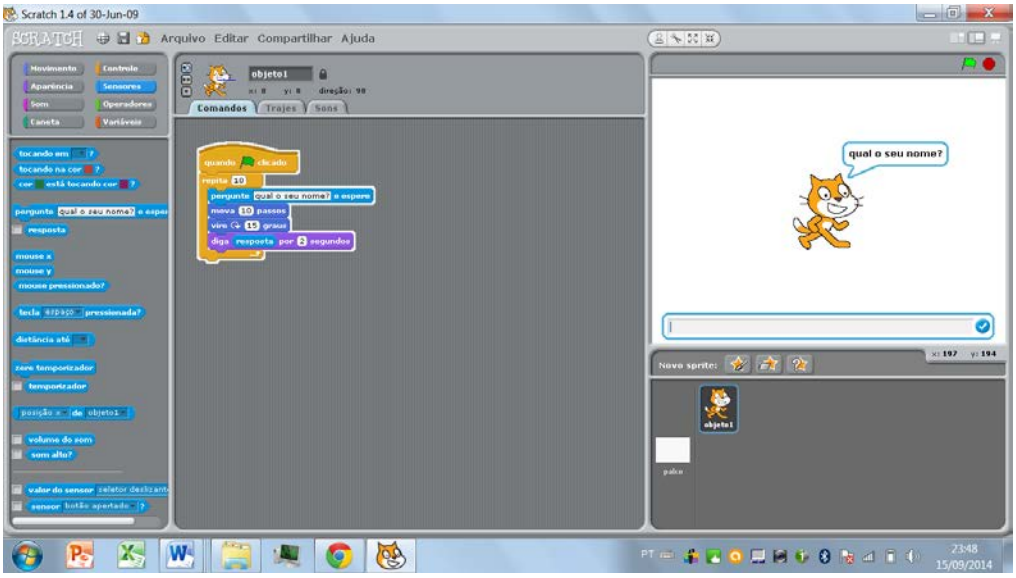


Figura 1: Tela inicial do Scratch 1.4

A programação no Scratch é feita através de blocos de comandos que são encaixados uns nos outros, formando a sequência de comandos que se deseja. Os blocos são concebidos para se encaixar apenas de uma única forma, o que faz sentido sintaticamente, evitando erros de sintaxe, porém não lógicos.

Segundo Pinto (2010), o Scratch tem muitas potencialidades, entre elas podem ser citadas as seguintes: liberdade de criação; criatividade associada a programas abertos e sem limitações do software; comunicação, colaboração e compartilhamento associados à aprendizagem e facilitados pelas ferramentas da Web que permitem a publicação direta; aprendizagem de conceitos escolares, partindo de projetos livres ou não escolarizados; manipulação de mídias, permitindo a construção de programas que controlam e misturam gráficos, animação, texto, música e som.

Além disso, possibilita aos usuários o desenvolvimento de competência para a resolução de problemas e para a concepção de projetos com raciocínio lógico, decomposição de problemas complexos em partes mais simples, identificação e eliminação de erros, desenvolvimento de ideias, desde a concepção até a concretização do projeto, concentração e perseverança (Marques, 2009).

Martins (2012) em sua pesquisa afirma que:

> Quando o próprio aluno cria, faz, age sobre um software, experimenta o ciclo que Dewey chamou de *continum experiencial*, decidindo o que melhor solucionaria um problema, torna-se sujeito ativo de sua aprendizagem. Afinal, o computador, ao ser manipulado pelo indivíduo, na visão construcionista de Papert, permite a construção e reconstrução do conhecimento, e a aprendizagem torna-se uma descoberta. Quando a informática é utilizada a serviço da educação de forma inventiva, o aluno ganha em qualidade de ensino e aprendizagem e exercita sua criatividade.

Neste sentido, analisando a evolução do processo de aprendizagem será mais fácil observar e desenvolver formas de ensinar o que possam vir a atender as demandas atuais. Assim, nas palavras de Pozzo, "não se trata de adaptar nossas formas de aprender e ensinar a esta sociedade que mais nos exige do que nos pede, como também modificar essas exigências em função de nossas próprias crenças." (2002).

É preciso envolver o aluno em atividades participativas, que estimulem seu raciocínio, em consonância com uma prática formativa e não meramente armazenadora de informações. Uma das possibilidades para esse envolvimento é oportunizar espaços para desenvolver a habilidade de escrever programas de computador. Quando as pessoas aprendem a programar, elas aprendem estratégias importantes para a resolução de problemas, promover a introdução de programação de computadores no ensino fundamental, através do software Scratch; criar novas formas de utilização dos recursos de informática das escolas para o auxílio nas diversas áreas do conhecimento; despertar interesse para as áreas de matemática e informática; proporcionar novos desafios aos estudantes, visando à interdisciplinaridade; aproximar a Universidade das redes públicas de ensino de design e comunicação de ideias.

Neste sentido, em 2013, através de um trabalho interdisciplinar entre os cursos de Ciência da Computação e Matemática da Universidade de Passo Fundo foram idealizadas as Olimpíadas de Programação de Computadores de escolas públicas com o objetivo de promover a introdução de programação de computadores no ensino fundamental, através do software Scratch. Além dos desafios desenvolvidos a partir da interseção das áreas, foi criada metodologia específica para esta atividade, descrita a seguir.

Metodologia das Olimpíadas

A Olimpíada de Programação de Computadores para Estudantes do Ensino Fundamental é uma competição destinada aos estudantes de escolas da educação básica, a partir do sexto ano, de Passo Fundo e região. Ela está dividida nas seguintes etapas: inscrição, treinamento e competição.

Inscrição. Cada escola pode inscrever no máximo duas equipes, compostas por um professor responsável, um professor suplente, três alunos titulares e dois alunos suplentes do ensino fundamental, a partir do sexto ano. Para as inscrições é destinado um período de aproximadamente um mês conforme informações no site oficial da olimpíada (http://olimpiada.mutirao.upf.br)

Treinamento. Esta etapa consiste em: oficina preparatória, desafios semanais e visitas às escolas inscritas.

As equipes inscritas participaram da *oficina preparatória* no Laboratório Central de Informática da Universidade de Passo Fundo, onde é apresentado o regulamento, o software

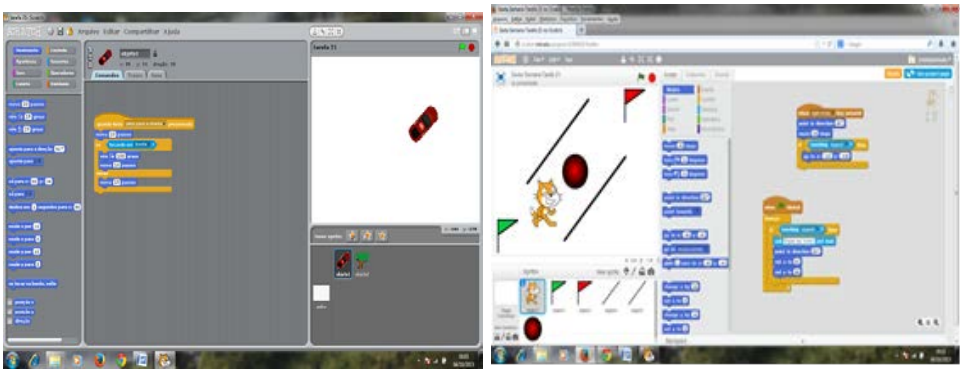
Scratch versão Linux e criada uma conta de usuário para cada equipe no site oficial do scratch (http://scratch.mit.edu). São realizadas as atividades propostas pela equipe organizadora, possibilitando aos estudantes e professores, o manuseio do Scratch.

Após a oficina, durante dez semanas, são disponibilizados *desafios semanais* às equipes participantes através do site oficial da olimpíada. As soluções devem ser postadas na página oficial do Scratch, por meio da conta de usuário de cada equipe. Com intuito de exemplificar as tarefas desta etapa, escolhemos a tarefa 21 de 2013:

> *Insira um objeto que percorra um trajeto em diagonal delimitado, desde o ponto de partida até o ponto de chegada, utilizando as setas do teclado (seta direita ou esquerda). Insira, no meio deste trajeto, um obstáculo. Para superá-lo e seguir adiante o objeto deverá solicitar seu nome. Quando alcançar o ponto de chegada deve retornar ao início.*

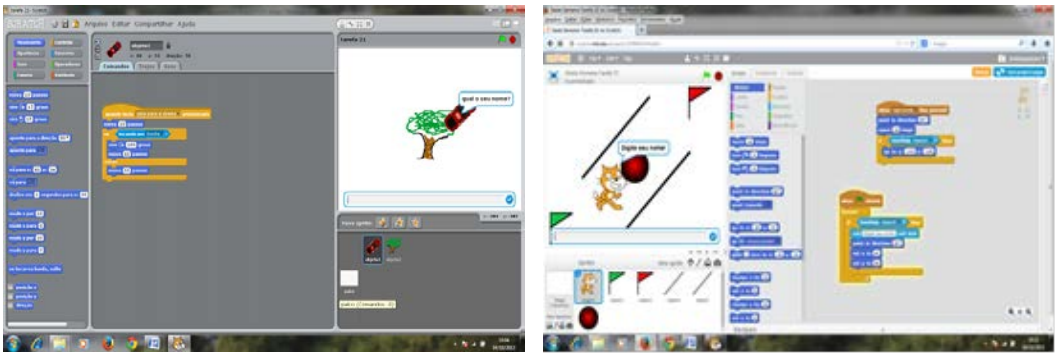
Esta tarefa requer leitura, interpretação, raciocínio lógico e aplicação dos seguintes conceitos matemáticos: direção, diagonal, coordenada cartesiana e ângulos.

As figuras 2, 3 e 4 ilustram a solução da tarefa realizada pela equipe Avast, da Escola Estadual de Ensino Médio Armindo Edwino Schwengber, do município de Colorado e da equipe Machado, da Escola Estadual de Ensino Fundamental Dr João Carlos Machado, de Sarandi.



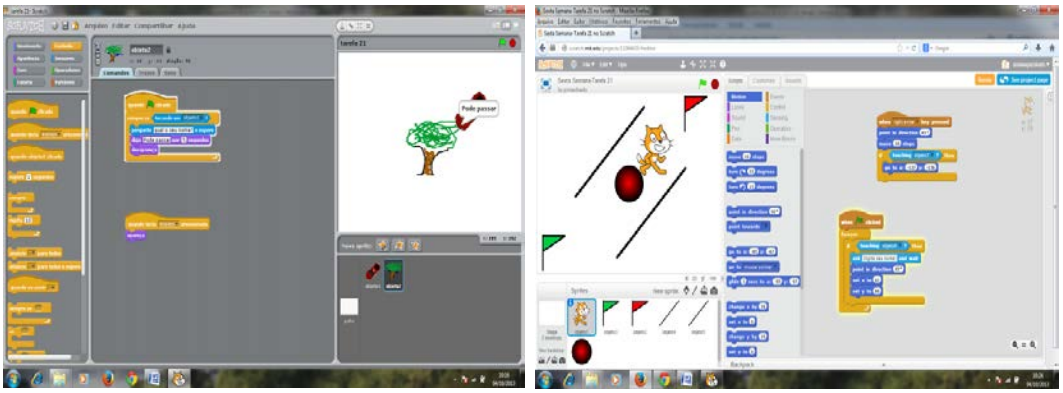
(a) Equipe Avast *(b) Equipe Machado*

Figura 2: Programação do deslocamento



(a) Equipe Avast *(b) Equipe Machado*

Figura 3: Programação do choque



(a) Equipe Avast *(b) Equipe Machado*

Figura 4: Liberação do caminho.

As duas equipes realizaram o proposto na tarefa. Percebemos que a Equipe Avast executou somente o que estava sendo solicitado. Já a Equipe Machado, além de realizar a programação dos objetos, criou um cenário de acordo com o contexto descrito.

Comparando as soluções executadas pelas equipes, podemos afirmar que o Scratch possibilita o desenvolvimento do raciocínio lógico necessário à programação. É um ambiente adequado para expressão da criatividade na criação de cenários e objetos, interação entre *sprite*[1], interação entre objeto e usuário, entre outros.

Outra ação realizada nesta etapa é a *visita às escolas*. Previamente agendadas, são destinadas ao suporte técnico das equipes, quando necessário, bem como o acompanhamento da execução das tarefas semanais. Como objetivo complementar, destaca-se o desejo de motivar as equipes para a competição.

Competição. As equipes são recepcionadas num espaço preparado para a competição nas dependências da Universidade de Passo Fundo. Na abertura, as equipes conhecem o regulamento e as regras gerais da competição. Durante um tempo previamente determinado, as equipes recebem o material impresso contendo os desafios a serem executados, conhecem a pontuação atribuída a cada desafio e realizam a programação. Quando julgarem concluído determinado desafio, as equipes encaminham para a avaliação da banca. Ao término do tempo estabelecido, é divulgada a classificação das equipes e os vencedores. A premiação prevê primeiro, segundo e terceiro lugares.

Na primeira olimpíada, o foco dos desafios foi o raciocínio lógico e a matemática. Dos oito desafios propostos, três deles foram adaptados da Olimpíada Brasileira de Matemática para Escolas Públicas (OBMEP). Na segunda, optou-se por uma abordagem interdisciplinar. Logo, os desafios envolveram animação de histórias, sequências musicais, games e operações matemáticas. Neste artigo, escolhemos o Desafio 1 das Olimpíadas de 2013 e 2014.

Desafio 1 (2013): *O macaco Kako deve subir uma escada com 18 degraus e alcançar o cacho de bananas, que está no topo desta. Só que a escada está muito lisa e Kako têm dificuldade de subir. A cada passo, Kako sobe três degraus e desliza dois.*

[1] Sprite: objeto a ser programado no software Scratch.

1- Construir o objeto escada, conforme descrição.
2- Mostrar Kako subindo a escada, conforme o critério descrito.
3- Mostrar o total de passos que Kako levou para chegar ao topo da escada.
PONTUAÇÃO TOTAL: 5 pontos.

Desafio 2 (2014): *Música* **-** *A casa (Vinicius de Moraes)*

mi mi fa sol mi| Era uma casa
la la la sol mi| muito engraçada
sol sol sol fa re| Não tinha teto
fa fa fa mi do | não tinha nada

mi mi fa sol mi| Ninguém podia
la la la sol| entrar nela não
sol sol sol fa re| Porque na casa
fa fa fa mi do| não tinha chão

do do do do la| Ninguém podia
do do do do sol| dormir na rede
sol sol sol fa re| Porque na casa
fa fa fa mi do| não tinha parede

do do do do la| Ninguém podia
do do do do| fazer pipi
sol sol sol fa re| Porque penico
fa fa fa mi do| não tinha ali

mi mi fa sol mi| mas era feita
la la la sol mi| com muito esmero
sol la sol si si| Na rua dos Bobos
sol la si do do| número zero

a) Crie, pelo menos, uma lista e armazene sequência de notas.
b) Programar a música conforme as notas e batidas, seguindo o ritmo e utilizando a(s) lista(s) criada(s) no item a).
c) Inserir um cenário e um objeto.
d) Fazer com que o palco e o objeto interajam, acompanhando o ritmo.
PONTUAÇÃO TOTAL: 100 pontos

Análise dos Desafios e Considerações Finais

Como parte das competências matemáticas explicitadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998), comunicar-se utilizando as diversas formas de linguagem empregadas na Matemática é uma competência que exige do aluno fazer diferentes representações matemáticas para um determinado problema ou questão.

Neste contexto, com os desafios propostos nas duas olimpíadas, foi proporcionado aos competidores situações que despertassem curiosidade; capacidade de resolver problemas, formular hipóteses, selecionar estratégias de resolução; comunicação e transmissão conceitos, ideias e procedimentos, tanto em linguagem corrente como em linguagem de programação, neste caso, no Scratch.

No desafio de 2013, é importante salientar que conceitos matemáticos, tais como simetria, deslocamento no plano cartesiano e variável, eram necessários para a construção de degraus da escada com o mesmo espaçamento, movimentação do macaco e controle de seus passos. Foram escolhidas para apresentar neste artigo as programações realizadas pelas equipes Avast e Giocondocanali, da Escola Municipal de Ensino Fundamental Giocondo Canali, do município de Tapejara, respectivamente, segundo e primeiro lugares da competição..

A Equipe Avast, em sua estratégia, na construção da escada determinou o número de passos necessários para realizar o movimento de subir três degraus e deslizar dois, para então contabilizar, na variável “passos”, o total de passos que o macaco se deslocou (Figuras 5).

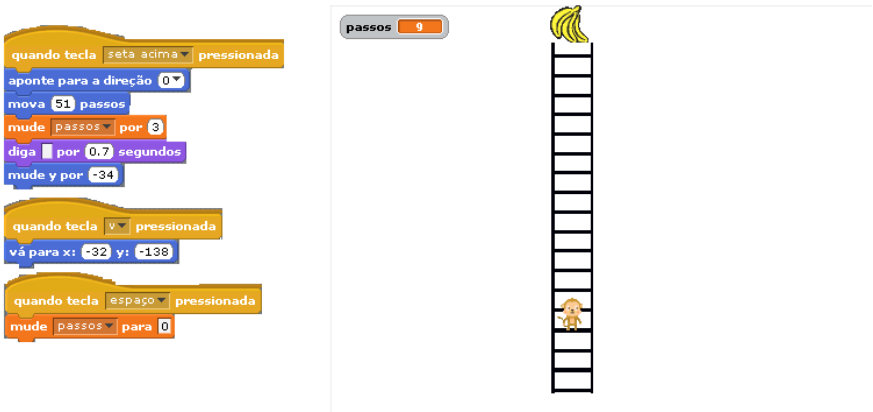


Figura 5: Inicialização da variável "passos". Posição inicial do movimento do Sprite macaco.

A equipe inicializou corretamente a variável "passos", conforme mostrado na figura 5, e também inseriu na programação do Sprite macaco as coordenadas iniciais do movimento, bem como o controle de que reiniciasse, nesta posição, sempre que quisesse recomeçar o movimento.

No desenvolvimento, a equipe não realizou a programação para controlar a chegada ao topo da escada, não cumprindo na totalidade o desafio.

A equipe Giocondocanali optou pela estratégia de descrever as coordenadas do movimento do macaco, ou seja, a posição dos degraus, computando na variável "passos" o total de passos realizados até chegar à posição definida pela equipe (ver figura 6). Nos blocos de comando, também são apresentados a inicialização da variável e do movimento do macaco.

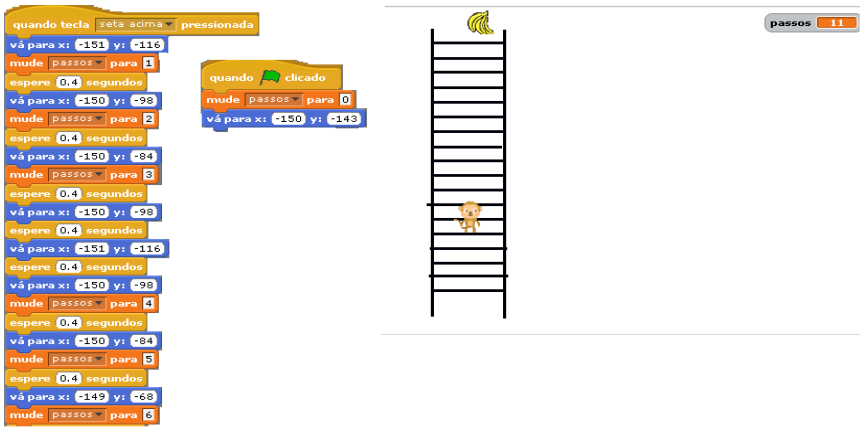


Figura 6: Programação do deslocamento e palco de execução da programação.

Analisando a programação realizada pelas equipes, ressalta-se que ao expor as estratégias ou formas de resolver o desafio, as mesmas demonstraram a compressão da atividade proposta. Mesmo que as respostas ou as propostas apresentadas não estejam totalmente corretas, observa-se que as equipes elaboraram uma estratégia de resolução, elencaram hipóteses, entre outros, passos esses importantes para o desenvolvimento de raciocínio lógico.

Para o desafio de 2014, as equipes tinham à disposição fones de ouvidos para ouvir a música durante o desenvolvimento da programação. O desafio requer o emprego de conceitos matemáticos, tais como: variáveis e listas necessários para armazenar sequências de notas; intervalos musicais, isto é, distância entre duas notas; e codificação e decodificação das notas.

Além disso, os competidores tinham que conhecer princípios básicos de música, como ritmo, compasso, batidas, entre outros. Estes conhecimentos foram construídos através dos desafios semanais preparatórios para a competição.

Para análise da programação do desafio, foram escolhidas as equipes Machado da da Escola Estadual de Ensino Fundamental Dr João Carlos Machado, do município de Sarandi.e SSPR da Escola Municipal de Ensino Fundamental Giocondo Canali, do município de Tapejara, respectivamente, primeiro e terceiro lugares desta 2014..

A equipe Machado cumpriu com os requisitos solicitados para a resolução do desafio. A equipe conseguiu controlar a execução da sequência musical, utilizando-se da lista criada. Ela também programou a interação entre Sprite e palco seguindo o ritmo da música. A figura 7 apresenta detalhes da solução proposta pela equipe.

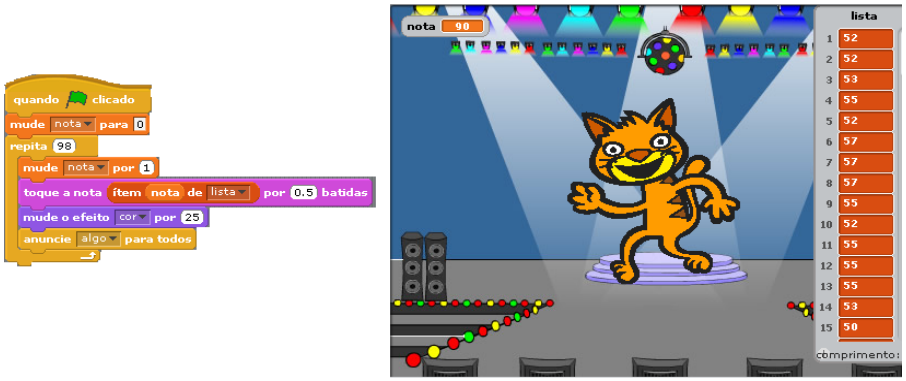


Figura 7: Programação da sequência musical e execução da programação no palco.

A equipe SSPR cumpriu parcialmente os requisitos do desafio. Criou a lista solicitada, porém não a utilizou na programação da sequência musical. Construiu a sequência através da repetição de blocos, conforme indicado na figura 8.

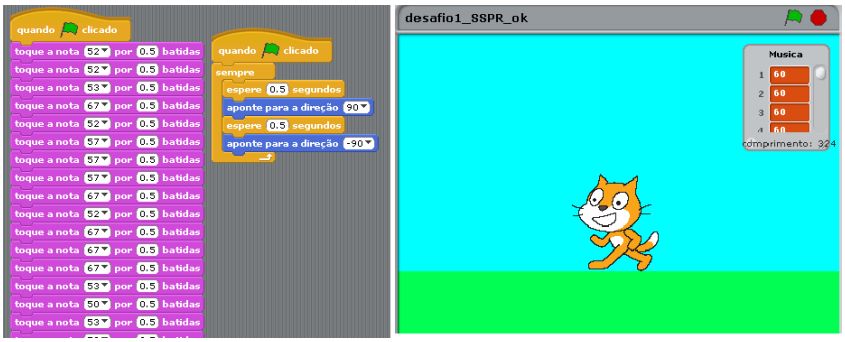


Figura 8: Bloco de comandos e palco de execução da programação.

O não cumprimento de alguns requisitos pela equipe SSPR pode indicar dificuldades na interpretação do desafio ou de lógica de programação, uma vez que não conseguiram utilizar a lista para programar a sequência musical.

Segundo Smole e Diniz, “o aluno, falando, escrevendo ou desenhando, mostra ou fornece indícios de que habilidades ou atitudes ele está desenvolvendo e que conceito ou fatos ele domina, apresenta dificuldades ou incompreensões.” (2001)

Tendo em vista esta afirmação, é que se pode comprovar que os competidores de algumas equipes tiveram dificuldades na interpretação do enunciado do desafio e, posteriormente, na elaboração da estratégia de resolução, fazendo com que não fossem cumpridos todos os requisitos solicitados.

Com a realização das duas edições da olimpíada, é perceptível nas escolas participantes o desacomodar de alunos e professores frente ao uso de novas tecnologias nas práticas escolares. Isto é comprovado através do relato de uma das professoras participantes:

> Estou agradecendo ao pessoal que se disponibilizou a vir na Escola.Estadual de Ensino Médio Ernesto Tocchetto, para orientar e instalar o programa do scratch para os membros da equipe e se inteirarem das tarefas para as olimpíadas de programação.
> Professora orientadora, a senhora está de parabéns por esse dia. Esta semente foi plantada.
> Estou muito feliz por encontrar pessoas como esse grupo que nos presenteou com o auxilio e a dedicação de acreditar que podemos juntos utilizar a informática e a tecnologia para a formação de nossos adolescentes.

É importante ressaltar que, a partir da participação da escola citada na olimpíada de 2014, vários alunos passaram a participar de oficinas de programação utilizando o Scratch, com a orientação da professora e da equipe competidora.

Assim, de acordo com Valente e Almeida(1999), as tecnologias da informação e comunicação podem proporcionar novas formas de aprendizagem, modificando as relações entre professores e alunos, ou entre alunos e alunos e entre alunos e conhecimento.

A matemática permeia todos os conceitos utilizados na programação, direta ou indiretamente. Com a programação de computadores os participantes da olimpíada, experimentaram a matemática de uma forma diferente. Neste contexto, ela se torna algo para ser usado intencionalmente, sendo percebida como uma fonte de motivação na busca pelo pensamento criativo, em conformidade com as ideias de Papert (1986).

Usando o Scratch, os estudantes deixam de ser somente usuários de computador, passam a ser seus programadores, dessa forma tornam-se cidadãos mais livres para criar e expressar suas ideias e convicções.

Referências e Bibliografias

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental (1998). *Parâmetros Nacionais Curriculares Nacionais: Matemática*, Brasília: MEC.

D'Ambrósio, U. (1998). *Etnomatemática*: *arte ou técnica de explicar e conhecer*. São Paulo: Ática.

Lévy, P.(1999) *Cibercultura* **(**C.I. da Costa,Trad.). São Paulo: Ed.34. (Obra original publicada em 1997).

Marques, M. T. P. M. (2009). *Recuperar o engenho a partir da necessidade, um recurso às tecnologias educativas: contributo do ambiente gráfico de programação o Scratch em contexto formal de aprendizagem*. Tese de Mestrado em Ciências da Educação, Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal. Disponível: repositório.ul.pt/handler/10451/847.

Martins, A. R. de Q. (2012). *Usando o Scratch para potencializar o pensamento criativo em crianças do ensino fundamental*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Passo Fundo, Passo Fundo, RS, Brasil.

Papert, S. (1986). *Logo: computadores e educação*, São Paulo: Brasiliense.

Pinto, A. S. (2010). *Scratch na aprendizagem da Matemática no 1.º Ciclo do Ensino Básico: estudo de caso na resolução de problemas*. Dissertação de Mestrado, Universidade do Minho, Minho, Portugal.

Pozzo, J. I. (2002). *Aprendizes e Mestres: a nova cultura da aprendizagem*. Porto Alegre: Artmed.

Smole, K. S.; Diniz, M. I (2001), *Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender Matemática*, Porto Alegre: Artmed.

Valente, J. A., Almeida, F. J. (1999) *Visão analítica da informática na educação no Brasil: a questão da formação do professor* Recuperado em 3 de junho, 2014, de http://www.geogebra.im-uff.mat.br/biblioteca/valente.html

Zimmerl, R. C. (2005) *Embaixadores do Novo Mundo*. Recuperado em 3 de junho, 2014, de http://www.itabra.com/outros/artigo08.pdf

Orquestração instrumental da tutoria *online* da Geometria Analítica

Rosilângela **Lucena**
Universidade Federal de Pernambuco
Brasil
rosi.lucenasc@gmail.com
Verônica **Gitirana**
Universidade Federal de Pernambuco
Brasil
veronica.gitirana@gmail.com

Resumo

Este artigo apresenta a análise de uma orquestração instrumental identificada em um caso de uso do *chat* como meio de tutoria *online* da disciplina de geometria analítica na modalidade a distância. Como metodologia, foram analisadas as mediações didáticas de 23 sessões de *chat* de duas turmas do componente curricular geometria analítica de um curso de Licenciatura em Matemática a distância. Desenvolveu-se um esquema para caracterização dos tipos de orquestração instrumental. No caso da tutoria *online*, o esquema revelou um padrão comum às configurações do professor executor. Desenvolveu-se uma classificação das situações a partir da necessidade de tratamento e conversão nas estratégias de resolução. Constatou-se também que os tutores *re*configuram o cenário virtual de ensino e aprendizagem da tutoria *online*, para realizar a mediação didática de situações matemáticas que necessitam de representações semióticas não disponíveis no *chat*.

*Palavras chav*e: Orquestração Instrumental, Educação a Distância, Geometria Analítica, Mediação Didática, Registros de Representações Semióticas, TIC.

Abstract

This paper analyses an instrumental orchestration identified in the use of *chat* as a tool for a *online* didactic mediation in an undergraduate Analytic Geometry course on mathematics teaching. As research methodology, the didactic mediations of 23 sessions of two years were analyzed. As results a schema was developed to characterize *online* instrumental orchestrations. The results also revealed a standard on virtual classes configurations prepared by the faculty responsible for the course. The mathematics situations were classified, taking into consideration the semiotic representations mobilized during the resolution. The analysis showed the tutor reconfigures the virtual teaching and learning environment, in order to promote didactic mediation of mathematics situations which needs semiotic representations not allowed into the *chat* tools.

Key words: Instrumental Orchestration, Distant education, Analytic Geometry, Didactic Mediation, Semiotic representation, Information technology.

Introdução

A tutoria *online* tem muitas vezes se configurado em uma sessão de bate papo que se desenvolve na ferramenta síncrona *chat* e segundo Machado (2004, p.13), "é o método mais utilizado para efetivar a interação pedagógica". Nessas sessões, os estudantes de cursos a distância têm a oportunidade de sanar suas dúvidas quanto ao conhecimento específico da disciplina, sobre as questões pedagógicas ou a respeito da organização da sala de aula. Criado para promover interações entre seus participantes por meio da escrita em língua materna, o *chat* tem provocado entraves durante a mediação de conteúdos matemáticos, particularmente, os de geometria analítica, campo da matemática que tem como foco o trato de questões relativas à geometria com o uso da álgebra. Esta tem como eixo o uso destes dois importantes sistemas de representação.

A dificuldade para realizar a mediação didática nessa ferramenta ocorre porque o *chat* limita os tipos de registros. No entanto, a matemática, como ciência abstrata, tem a representação como única forma de lidar e comunicar seus conceitos. Embora o *chat* possibilite a interação por meio da escrita em língua natural, computacional, numérica e de uma limitada escrita simbólica e algébrica, não é possível o uso de gráficos, figuras, esquemas entre outros tipos de registros semióticos, fundamentais à geometria analítica.

Enquanto no ensino presencial as ações didático-pedagógicas e de organização da sala de aula são peculiares do professor, na educação a distância, tais ações são racionalizadas entre vários personagens, o professor executor, que configura a sala de aula, o tutor que executa essa configuração, o conteudista que elabora o material didático da disciplina, entre outros. Essa forma fragmentada e dissociada em que está organizado e gerido o ensino a distância é uma realidade de muitas instituições no Brasil, inclusive, da instituição federal de ensino a distância em que se desenvolveu essa investigação.

Nesse contexto, uma questão nos levou a desenvolver a pesquisa: quais as estratégias utilizadas pelo tutor para realizar a mediação didática de geometria analítica diante das limitações do *chat*? Para responder esta questão, organizamos um quadro teórico composto pela Teoria das Representações Semióticas, (Duval, 2003; 2009; 2011) e da Orquestração Instrumental, (Trouche, 2004; 2005). Desse modo, objetivamos analisar a orquestração instrumental de situações matemáticas que demandem tratamento e conversão de representações semióticas.

Teoria dos Registros de Representação Semiótica

As diversas formas de representar um objeto matemático, tais como, algébrica, simbólica, gráfica entre outras, são consideradas por Duval (2011) como registros de representação semióticas. É por meio desses registros que a matemática pode ser comunicada e compreendida pelo sujeito que busca ascender tal conhecimento. Além de representar, o ato de transitar entre representações distintas de um mesmo conceito revela aspectos diferentes deste, de forma que o conjunto dessas especificidades permite a aquisição de um conhecimento global do objeto matemático estudado. Mas, esse conhecimento global só pode ser adquirido, segundo Duval (2011), mediante a coordenação de pelo menos dois registros de representação semiótica de um mesmo objeto, assim como, a realização de transformações nos mesmos, as quais ele classifica em: tratamento e conversão.

O tratamento consiste em um processo no qual o registro semiótico se transforma sem sair do sistema de representação a que pertence. Diferentemente, a conversão é o processo de transformação em que um registro sai de seu sistema de representação para outro. Embora as transformações sejam extremamente relevantes ao indivíduo que deseja ascender os objetos matemáticos é necessário que se valorize o processo de conversão. Primeiro, porque o esforço cognitivo que o estudante precisa exercer na conversão é muito superior ao exigido no tratamento (Duval, 2003). Segundo, porque, de acordo com Duval (2009), a dificuldade dos estudantes para aprender muitos conceitos matemáticos está relacionada a este tipo de transformação. Por último, por ser a conversão, a transformação que revela as especificidades que cada representação guarda a respeito de um mesmo conceito, evitando que se confunda a representação de um objeto matemático com o seu próprio conceito.

Teoria da Orquestração Instrumental

O termo orquestração instrumental consiste em uma metáfora que Trouche (2004) usa para comparar a sala de aula a uma orquestra. Nela, o educador é o maestro, os aprendizes os músicos, as tecnologias os instrumentos e as situações de ensino os repertórios. Segundo Trouche (2005, p. 126):

> Uma orquestração instrumental é o arranjo sistemático e intencional dos elementos (artefatos e seres humanos) de um ambiente, realizado por um agente (professor) no intuito de efetivar uma situação dada e, em geral, guiar os aprendizes nas gêneses instrumentais e na evolução e equilíbrio dos seus sistemas de instrumentos. É sistemático porque como método, desenvolve-se numa ordem definida e com um foco determinado, podendo ser entendido com um arranjo integrado a um sistema; é intencional porque uma orquestração não descreve um arranjo existente (sempre existe um), mas aponta para a necessidade de um pensamento a priori desse arranjo. (Trouche, 2005, p.126) (Tradução: Bellemain, F.)

Esta teoria tem contribuído com investigações que buscam compreender como as escolhas e arranjos, realizados pelo professor para tratar situações matemáticas, tendo como suporte um ambiente rico em tecnologia, os ajudam a conduzir os estudantes ao conhecimento matemático. As etapas da orquestração (Drijvers et al., 2010) são: a configuração didática, o modo de exploração e o desempenho didático. De uma forma geral, a configuração didática consiste na organização da sala de aula, na escolha das tecnologias e situações matemáticas envolvidas. Para Drijvers et al. (2010), essas configurações do ambiente e dos artefatos escolhidos devem ser bem planejadas antes de sua execução durante a aula, considerando a dificuldade para modificá-las.

A segunda etapa de uma orquestração instrumental é o modo de exploração que diz respeito à participação de cada sujeito nesse processo, seja ele professor ou estudante. Esta é uma etapa que segundo Trouche (2005) consiste nas estratégias de gestão aplicadas, sejam quanto à situação problema ou quanto à gestão dos artefatos.

Por fim, tem-se o desempenho didático, uma etapa introduzida por Drijves et al. (2010), que trata das decisões que o educador terá que tomar diante de situações inesperadas sejam referentes às tecnologias ou às situações matemáticas. Além disso, nessa etapa, busca-se verificar a viabilidade e o sucesso das escolhas do professor ou do aluno nesse processo.

Metodologia

Na pesquisa de mestrado analisamos um caso de uso do *chat* como meio de tutoria *online* no componente curricular de Geometria Analítica da Licenciatura em Matemática na modalidade EAD de uma instituição federal de ensino superior. As tutorias *online* de duas turmas foram

analisadas. Utilizou-se das técnicas da análise de conteúdo (Bardin, 1997), para organizar, descrever e interpretar os dados a serem analisados. As falas das sessões analisadas são a unidade de registro e as conversas são as unidades de sentido. Os dados coletados resultaram da observação no ambiente virtual de ensino das turmas. Foi identificado um total de 23 sessões de *chat* com mediações que discutiam o conteúdo matemático em foco.

Dessa forma, foram estabelecidas três etapas para o desenvolvimento desse trabalho: descrição do cenário da tutoria *online* de geometria analítica à luz da Teoria da Orquestração Instrumental, comum às sessões; caracterização dos modelos de orquestração instrumental da tutoria *online* de geometria analítica; análise da mediação didática dos modelos de orquestração descritos, à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Além da coleta de dados realizada a partir da observação do cenário da sala de aula virtual da disciplina de geometria analítica, utilizamos os registros das interações das sessões de *chat* e os documentos postados na sala, tais como: atividades, avaliações, livro didático, questões e fichas de exercícios.

Neste artigo, discutimos os resultados relativos a um dos modelos de orquestração instrumental da tutorial *online,* já caracterizado em pesquisa de mestrado.

Modelo de Análise da Orquestração Instrumental em Tutoria *Online*

As salas de aula virtuais da modalidade de ensino a distância são organizadas pelos professores executores para atender às necessidades dos estudantes e tutores durante os módulos de execução do componente curricular. Em geral, as configurações estão alinhadas às propostas pedagógicas das instituições e às especificidades de cada disciplina. As escolhas do professor executor quanto aos artefatos que serão utilizados, assim como a gestão do conteúdo, das situações problemas e dos métodos avaliativos entre outros, conduzem o trabalho desenvolvido pelo tutor, inclusive durante a tutoria *online*.

No entanto, o professor executor configura a sala de aula, não as sessões de *chat*, para as quais são determinadas apenas as regras de funcionamento, tal como os horários e a duração das mesmas. Desse modo, observamos sessões de *chat* de duas turmas da disciplina de geometria analítica, buscando identificar os aspectos comuns a cada uma delas, na intenção de encontrar um modelo de cenário que pudesse nos guiar na caracterização de orquestrações instrumentais.

O cenário padrão da tutoria *online* de geometria analítica

Para caracterizarmos uma orquestração instrumental da tutoria *online,* inicialmente, elaboramos um esquema que relacionava, ainda que de forma geral, os aspectos do ambiente virtual da disciplina de geometria analítica com as etapas da Teoria da Orquestração Instrumental: a configuração didática, o modo de exploração e o desempenho didático. Tais aspectos foram identificados a partir das observações realizadas no cenário das salas de aula, nos documentos disponibilizados nas mesmas e no conteúdo das interações das 23 sessões de *chat* de duas turmas de geometria analítica a distância. O esquema abaixo foi criado para ajudar na identificação de modelos de orquestração instrumental desenvolvidos pelos tutores em situações de ensino em tempo real, a partir de aspectos comuns encontrados em todas as sessões observadas.

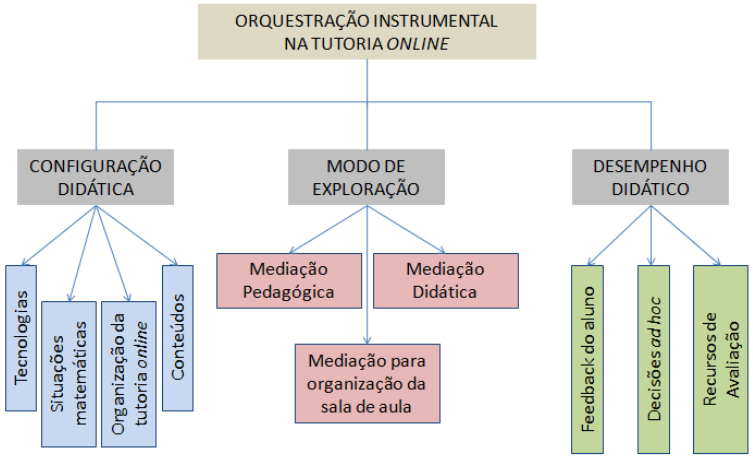


Figura 1. Cenário padrão das tutorias *online* de geometria analítica.

No cenário padrão (Figura 1), percebemos que na configuração didática dessas sessões as tecnologias, as situações matemáticas, os materiais de organização da tutoria e os conteúdos do componente curricular sempre estavam presentes. No modo de exploração, identificamos três tipos de mediação utilizados pelo tutor para desenvolver sua prática docente: a didática, a pedagógica e a organização da tutoria. No desempenho didático, verificamos a possibilidade de se avaliar a orquestração desenvolvida por meio do *feedback* do estudante em reposta às mediações do tutor, da identificação das decisões *ad hoc* do tutor e do desempenho dos estudantes nas atividades realizadas, que pode ser visto nos recursos de avaliação. A seguir, detalharemos a composição do cenário padrão da tutoria *online*.

A configuração didática

A tutoria *online* é organizada pelo tutor com base na configuração da sala de aula virtual que é realizada pelo professor executor. Tecnologias, atividades, livro didático, orientações, enfim, toda a estrutura didática, pedagógica e organizacional da sala fica à disposição do tutor que decide a partir da dúvida do estudante o que irá utilizar dessa configuração para realizar as mediações. Em alguns casos, essa configuração prévia não dá ao tutor o suporte necessário para que consiga mediar o conhecimento matemático em foco, o que dificulta o processo de ensino e de aprendizagem, levando-o a reconfigurar em tempo real, alguns aspectos das sessões. Para Drijvers et al. (2010) modificações na configuração didática não é algo fácil de realizar durante a execução da mesma.

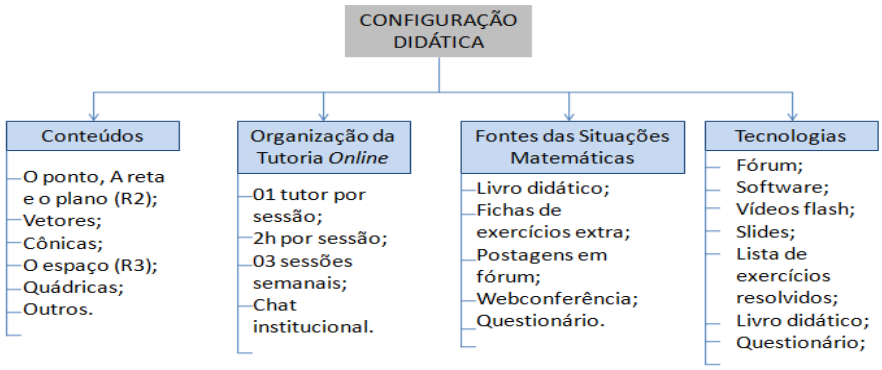


Figura 2. Configuração didática da tutoria *online.*

Na figura 2, especificamos o modelo padrão para configuração didática da tutoria *online* de geometria analítica das turmas. No campo Conteúdos, temos todos os assuntos pertinentes ao componente curricular que devem ser estudados durante a execução dos módulos do curso. Na Organização da Tutoria *Online*, temos os aspectos institucionais que determinam como a tutoria deve funcionar. No campo Fontes das Situações Matemáticas verificamos a origem das questões apresentadas pelos estudantes durante as sessões de *chat*. Por fim, em Tecnologias, listamos todos os recursos disponibilizados no ambiente para que os tutores possam fazer uso para sanar as dúvidas dos estudantes.

O modo de exploração

Ao analisarmos as diversas interações entre os tutores e estudantes, verificamos que o tutor realiza essencialmente três tipos de mediação para desenvolver sua prática na tutoria (Figura 3). A primeira é a mediação pedagógica que diz respeito às orientações, o incentivo, os esclarecimentos dados aos estudantes, entre outros. A segunda é a mediação para organização *online* da tutoria considerando-a como uma sala de aula, com horário predefinido para iniciar e terminar, por exemplo. A terceira mediação é a didática que consiste, essencialmente, na estratégia adotada pelo tutor para tratar do conteúdo matemático que o aluno tem dificuldade. Este tipo de mediação é revelado, na maioria das vezes, a partir de uma situação problema. Nesse processo, o tutor precisa buscar métodos para representar os registros semióticas ou mesmo fazer referência aos mesmos. Terá também que gerenciar os materiais didáticos e as tecnologias colocados à sua disposição para esclarecer as dúvidas que são apresentadas pelos estudantes.

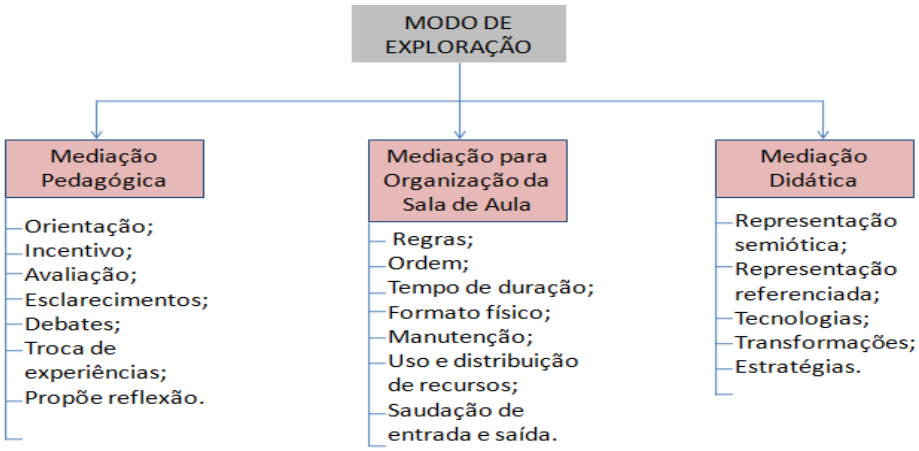


Figura 3. Modo de exploração da tutoria *online*

É no modo de exploração que o tutor busca métodos e estratégias para gerir as escolhas da configuração didática desenvolvida pelo professor executor, podendo inclusive, dependendo da situação e necessidade, reconfigurar a estrutura padrão.

O Desempenho Didático

Nessa etapa, o tutor poderá verificar o sucesso da configuração proposta pelo professor executor, da reconfiguração que necessitou realizar para sanar as dúvidas dos estudantes, das mediações realizadas, das estratégias utilizadas, enfim, o quão bem sucedidas, ou não, foram as suas escolhas e ações de uma forma geral, inclusive as não previstas. Na figura 4, especificamos como isso pode ser feito.

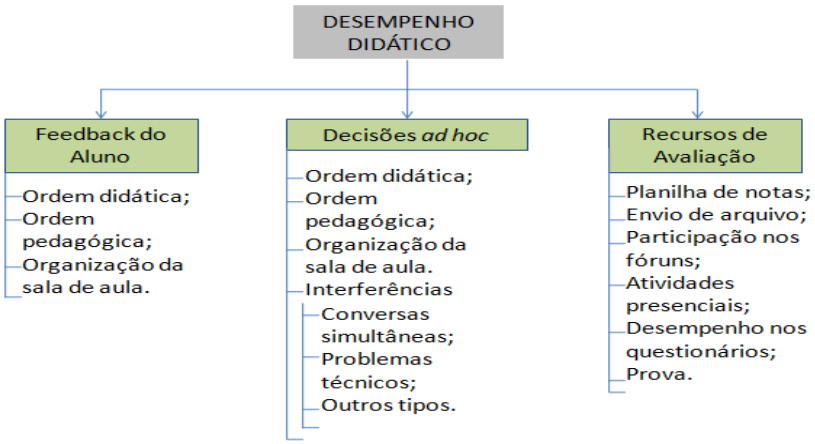


Figura 4. Desempenho didático da tutoria *online.*

O desempenho didático de uma orquestração poderá ser verificado no *feedback* do estudante dado ao tutor em resposta às mediações realizadas, sejam elas de ordem didática, pedagógica ou organizacional. Outro aspecto relevante a ser considerado são as decisões *ad hoc* tomadas pelo tutor diante de situações não previstas por ele, seja qual for a natureza da mediação. Tais decisões são comumente evidenciadas durante algumas interferências, uma delas são os problemas com a conexão.

Nessa etapa da orquestração, os recursos de avaliação também podem contribuir bastante, pois revelam o desempenho dos estudantes quanto ao conhecimento discutido nas sessões. É importante salientar que o *feedback* do estudante em relação à mediação do tutor, nem sempre traduzirá sua realidade. É muito comum, durante as mediações didáticas, por exemplo, o tutor explicar uma determinada questão por uma linha de raciocínio e o estudante confirmar que entendeu, porém, quando é desafiado à resolver outra questão da mesma natureza, não consegue ou apresenta dificuldades semelhantes às da primeira situação.

Análise de um Modelo de Orquestração de Tutoria *Online*

Nas próximas sessões apresentaremos a análise de um modelo de orquestração instrumental da tutoria *online*. Para tal, consideramos inicialmente o cenário desse modelo de orquestração, caracterizando seus aspectos quanto à sua configuração didática, seu modo de exploração e desempenho didático.

Selecionamos para discutir neste artigo, a tutoria de uma situação caracterizada por não possuir, nos recursos disponíveis na sala de aula virtual, uma fórmula direta capaz de resolvê-la. Nesse caso, faz-se necessário criar estratégias de resolução com o auxílio de imagem (esquema, gráfico, figura, etc) para que se tenha um melhor entendimento do que se trata, e se poder modelar algebricamente.

Cenário de uma Orquestração Instrumental da tutoria *online*

A partir da descrição do cenário padrão das tutorias *online* de geometria analítica, escolhemos um tipo de situação matemática, discutida em uma das sessões de *chat* para descrever uma orquestração instrumental. Isto porque, segundo Trouche (2005), os arranjos realizados pelo professor num determinado ambiente virtual ou real visam orientar a gênese instrumental dos estudantes no uso de tecnologias para compreensão e resolução da situação matemática.

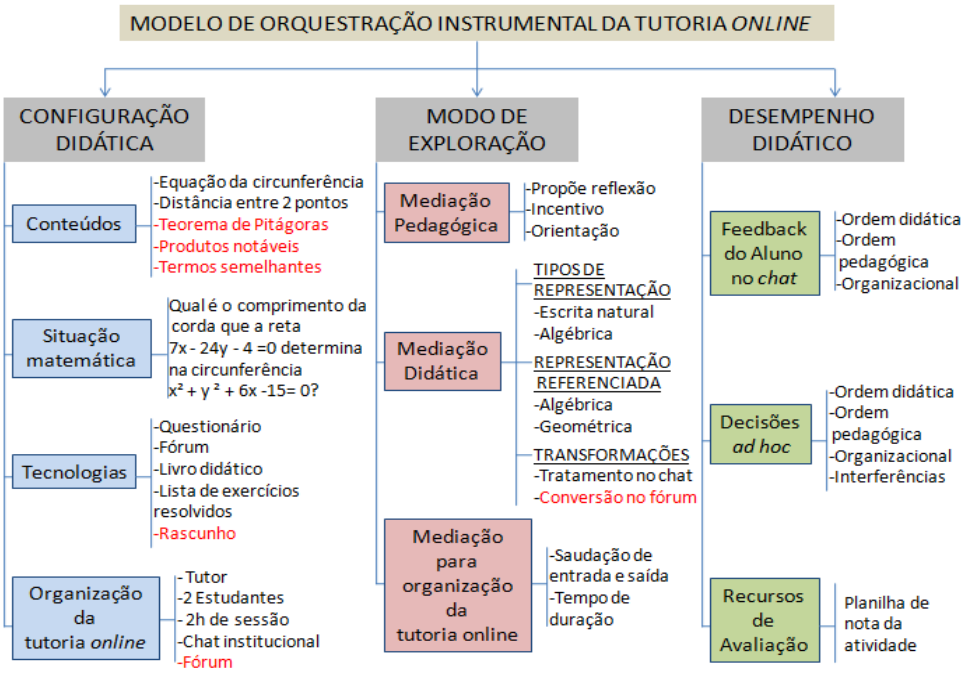


Figura 5. Cenário de uma Orquestração Instrumental da tutoria *online*

Dessa forma, no esquema da figura 5, especificamos cada fase da orquestração instrumental *online* desenvolvida pelo tutor. Vale salientar que os dados marcados em vermelho são aspectos não comuns a todas as sessões, mas específicos desses trechos da sessão que trata de uma situação matemática. Isto ocorre porque durante as mediações didáticas nas quais o tutor discute o conhecimento matemático com os estudantes, suas decisões quanto a que ferramenta utilizar ou que conhecimento prévio exigir, ou ainda que estratégia de resolução propor são motivadas pelos tipos de situações matemáticas, de estratégias, representações e transformações semióticas utilizadas nas mesmas para resolvê-las.

No esquema, a configuração didática organizada pelo tutor para ajudar uma estudante a resolver a situação matemática, ultrapassa o conteúdo proposto para o módulo da disciplina que trata da intersecção entre uma reta e uma circunferência, ambas dadas por equações e da distância entre dois pontos. Percebemos que na Tutoria dessa situação, o tutor discute conhecimentos prévios não indicados pelo professor executor na configuração desse módulo. Os conteúdos extras são: Teorema de Pitágoras (Figura 6), produto notáveis e termos semelhantes de um polinômio.

09:24 (Tutor) Lucas: É só achar o centro da circunferência e depois achar a distância do centro à reta. É só vc seguir o raciocínio da questão que postei no fórum e observar a figura. A distância do centro a reta é um dos catetos do triângulo retângulo e o outro vc achar pelo teorema de Pitágoras. A hipotenusa é o próprio raio da circunferência. O comprimento da corda é o dobro do outro cateto que vc vai achar.

*Figura 6. R*econfiguração da Configuração didática - Conteúdo

Adiante, discutiremos as características da situação matemática sobre a qual a estudante apresenta suas dúvidas. Nesse processo, o tutor escolhe as seguintes tecnologias para esclarecer as dúvidas da estudante sobre o conteúdo matemático: o questionário, de onde procede a situação em foco; o fórum, em que o tutor posta uma questão detalhadamente resolvida e "semelhante" a

do questionário; o livro didático para orientar o uso de fórmulas; a lista de exercícios resolvidos, disponibilizada pelo professor executor; e por fim, o rascunho.

A respeito do rascunho, é relevante informar que consiste no uso do lápis e do papel que está à mão do tutor e do estudante, cada um em seu espaço físico. O que um faz nesse recurso não pode ser visto pelo outro (Figura 7), pois não se trata de uma ferramenta que possibilite o compartilhamento de telas de forma que um pudesse ver o que e como o outro está fazendo. No entanto, é por meio do rascunho que o tutor orienta, no *chat*, o cálculo do estudante para que ele chegue à resposta tão almejada. O estudante informa como está resolvendo a questão e o tutor corrige passo a passo seus cálculos, ambos por meio da escrita.

09:41 Ana: to enrolada, os termos são semelhantes de x são x^2 - 2x + 6x
09:42 (Tutor) Lucas: Vou dá uma olhadinha, um momento
09:43 (Tutor) Lucas: Ana, qual é a questão que vc está resolvendo?

Figura 7. Reconfiguração da Configuração didática - Tecnologias

Quanto à organização da tutoria, verificamos que há uma reconfiguração na sessão. Embora haja a presença do tutor e de estudantes e o tempo de duração estabelecido para mesma seja seguido, a configuração padrão não é mantida, pelo fato dos participantes não permanecerem unicamente no *chat* (Figura 8), tendo que visitar o fórum para que se tenha uma melhor compreensão a respeito da mediação didática realizada pelo tutor.

09:02 (Tutor) Lucas : Vc olhou a questão do fórum?
09:02 Ana: olhei
09:03 (Tutor) Lucas: Lá eu detalho como encontrar o centro e o raio

Figura 8. Reconfiguração da Configuração didática – Organização da tutoria

Quanto ao modo de exploração detalhado na figura 5, percebemos que a prática docente do tutor é explicitada nas mediações que realiza com os estudantes. Nesta sessão, a mediação pedagógica é identificada nas conversas em que o tutor propõe à estudante uma reflexão sobre a necessidade de revisar conhecimentos prévios para que ela compreenda os novos conhecimentos (Figura 9). O incentivo quanto aos estudos e as orientações sobre como e o que estudar são outras ações que fazem parte desse tipo de mediação e são bastante utilizadas.

09:19(Tutor) Lucas: Eu acho que vc precisa dar uma revisada na parte de álgebra elementar. Produto notáveis e expressão algébrica.
09:22 Ana: vou fazer isso preciso muito revisar.

Figura 9. Reconfiguração do Modo de exploração – Mediação pedagógica

Na mediação didática, o tutor trata especificamente dos objetos matemáticos relacionados à situação matemática proposta por meio de algumas representações semióticas disponíveis no *chat*, entre elas estão a escrita natural e a algébrica. Nessa orquestração, o tutor faz uso do *chat* para tratar algebricamente a situação matemática e do fórum para mostrar uma questão semelhante em que propõem conversão. Embora a ferramenta fórum esteja disponível desde a configuração da sala de aula, o ato do tutor em postar uma questão, em que possa fazer uso de outros tipos de representação semióticas e realizar conversões entre as mesmas, revela uma reconfiguração realizada pelo tutor.

Quanto à mediação para organização da sala de aula, a ação do tutor nessa sessão é identificada nas saudações de entrada e saída dos estudantes na sala virtual, todas as vezes que o computador avisa que alguém entrou ou saiu, ou ainda, na orientação quanto ao tempo de duração da sessão, tendo em vista que uma sessão tem duração de 2h e que o tempo havia se encerrado fazendo com que o tutor se justifique afirmando que não poderá ultrapassá-lo (Figura 10).

09:58 (Tutor) Lucas: Agora, infelizmente vou ter que sair do chat
09:59 Ana: obrigada por me ajudar
(...)
09:59 (Tutor) Lucas: É pq vou trabalhar
10:00 Ana: Obrigada

Figura 10. Exemplo do Modo de exploração – Organização da sala de aula

O desempenho didático pode ser verificado no *feedback* dado pelo aluno em resposta às mediações de natureza pedagógica, didática e organizacional. Este retorno do aluno pode ser expresso na escrita quando responde se compreendeu ou não a explicação do professor, quando faz o tratamento da questão no *chat* ou ainda, quando revela aspectos do seu rascunho (Figura 11).

09:50 (Tutor) Lucas: É só aplicar o teorema de Pitágoras
09:51 Ana: $a^2+b^2= c^2$
09:51 (Tutor) Lucas: ok
09:51 Ana: 2
09:52 (Tutor) Lucas: não, refaça
09:52 Ana: espera

Figura 11. Reconfiguração do Desempenho didático – *Feedback* do aluno

Em alguns momentos, tal *feedback* pode levar o tutor a tomar uma decisão *ad hoc,* ou seja, algo que ele não esperava ocorre e ele precisa reconfigurar o cenário inicial. Um exemplo disso são os problemas de ordem técnica (queda da conexão) ou de outra natureza (ausência momentânea do estudante ou do tutor, mesmo "estando" na sessão (Figura 12).

Quando a conexão de um participante cai e ele retorna, o que foi discutido na sua ausência não fica registrado. Dessa forma, quem permaneceu na sessão deverá repetir todo discurso para aquele que retornou.

09:05 (Tutor) Lucas abandonou este chat
09:06 (Tutor) Lucas entrou no chat
09:08 (Tutor) Lucas abandonou este chat
09:12 (Tutor) Lucas entrou no chat
09:13(Tutor) Lucas: Desculpe-me Ana, tiver problemas com a conexão. Vamos continuar?
09:18 Ana: sim, desculpa, é que fui dar a mamadeira de Joãozinho, desculpa mesmo.
09:19 (Tutor) Lucas: Não há de que, Joãozinho tem sempre prioridade.

Figura 12. Desempenho didático – Interferências

Outro aspecto considerado no desempenho didático, dessa tutoria, são as informações contidas nos recursos de avaliação, tal como a nota que o aluno alcançou naquela atividade discutida no *chat*. As interações dos estudantes no fórum a respeito das postagens do tutor sobre

a questão matemática discutida não ocorreram, de forma que não podermos considerar tal recurso para fins de avaliação. Nessa orquestração, a estudante consegue uma boa nota na atividade a qual fica registrada na planilha de notas do ambiente (Figura 13).

Nome / Sobrenome	Questionário 1 (0,3)	Questionário 2 (0,3)	Questionário 3 (0,3)	Questionário 4 (0,3)	Questionário 5 (0,3)	Questionário 6 (0,3)	Questionário 7 (0,2)
Intervalo	0,0-10,0	0,0-10,0	0,0-10,0	0,0-10,0	0,0-10,0	0,0-10,0	0,0-10,0
Ana Maria da Silva	10,0	10,0	10,0	10,0	10,0	10,0	10,0

Figura 13. Desempenho didático – Recursos de Avaliação

Considerações Finais

As observações das 23 sessões de *chat* de duas turmas de geometria analítica de uma instituição federal de ensino a distância, contribuíram para a criação de um esquema que mostra que a tutoria *online* tem um modelo padrão para seu cenário o qual é composto pelas escolhas da instituição (funcionamento) e do professor executor (configuração da sala aula virtual). Além disso, foi possível relacionar todas as características desse modelo padrão às etapas da orquestração instrumental, a saber: configuração didática, modo de exploração e desempenho didático.

O modelo padrão do cenário da tutoria contribuiu com a caracterização de um tipo de orquestração instrumental da tutoria *online* de geometria analítica. Tal orquestração revelou que embora o modelo padrão seja adotado em todas as sessões analisadas, o tutor reconfigura as escolhas da instituição e do professor executor, à medida que tais escolhas não dão o suporte necessário à sua prática. Vale salientar, que as orquestrações instrumentais identificadas, inclusive a que apresentamos nesse artigo foram desenvolvidas sempre a partir de uma situação matemática apresentada pelos estudantes ao tutor durante as sessões.

Referências e bibliografia

Bardin, L. (1997). *Análise de Conteúdo*. Lisboa, Portugal: Edições 70.

Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., Gravmeijer, K. (2010). The teacher and the tool: instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 75 (2), pp. 213-234.

Duval, R. (2003). Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: Machado, S. D. A. *Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica.* São Paulo: Papirus Editora, p.11-33.

Duval, R. (2009). *Semiósis e pensamento humano: registro semiótico e aprendizagens intelectuais*. São Paulo: Editora Livraria da Física.

Duval, R. (2011). Gráficos e equações: a articulação de dois registros. *REVEMAT*, 6 (2), pp. 96-112, 2011.

Machado Dias, L. (2004). *O Papel do Tutor em Ambientes Online*. Disponível em http://portal.iefp.pt.

Trouche, L. (2004). Environnements informatisés et mathématiques: quells usages pour quells apprentissages? *Educational Studies in Mathematics,* 55, pp. 181-197.

Trouche, L. (2005). Construction et conduit des instruments dans les apprentissages mathématiques: nécessité des orchestrations. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 25(1), pp. 91-138.

Programação de computadores e Matemática: potencializando a aprendizagem

Neuza Terezinha **Oro**
Universidade de Passo Fundo
Brasil
neuza@upf.br
Ariane Mileidi **Pazinato**
Universidade de Passo Fundo
Brasil
arianepazinato@upf.br
Valéria Espíndola **Lessa**
Instituto Federal do Rio Grande do Sul (IFRS)-câmpus Erechim
Brasil
valeria.lessa@erechim.ifrs.edu.br
Franciele Meinerz **Forigo**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha-câmpus Santa Rosa
Brasil
francieleforigo@gmail.com

Resumo

Este trabalho apresenta o projeto Escola de Hackers, em sua perspectiva metodológica, bem como uma discussão a respeito dos conceitos e habilidades matemáticas presentes na transição da linguagem narrativa para a linguagem de programação. A Escola de Hackers é um projeto interinstitucional, coordenado pela Universidade de Passo Fundo (UPF- Brasil), que oportuniza espaço para desenvolvimento de conhecimentos na área de programação de computadores e de matemática para estudantes do Ensino Fundamental da rede pública de Passo Fundo. Para tanto, utiliza-se o *software* Scratch, pois acredita-se que sua linguagem de programação no formato de blocos facilita a compreensão da lógica algorítmica pelos estudantes.

Palavras Chave: Programação, Matemática, Scratch, Aprendizagem.

Introdução

A programação de computadores pode vir a intensificar relações interdisciplinares da computação com outras áreas do conhecimento, em especial a matemática, e também a desenvolver o raciocínio lógico e a criatividade. Nesta perspectiva, a Escola de Hackers é um projeto que consiste em um conjunto de ações que oportunizam a alunos do ensino fundamental o aprendizado de técnicas de programação, utilizando o *software* Scratch (http://scratch.mit.edu). O projeto é desenvolvido por Instituições de Ensino Superior da cidade de Passo Fundo sendo elas: Universidade de Passo Fundo (UPF), Instituto Federal Sul Rio Grandense (IFSul) e Faculdade Meridional (IMED), com apoio da Secretária Municipal de Educação de Passo Fundo (SMEPF), Brasil.

Na Escola de Hackers participam alunos de 6º ao 9º ano do Ensino Fundamental com idades entre 11 e 14 anos. As atividades na Escola de Hackers são realizadas em oficinas semanais por um monitor orientado pela equipe executora do projeto. Estas atividades procuram desafiar os estudantes a transpor a linguagem narrativa de um problema em linguagem de programação, na qual esse elo está permeado de conhecimento implícito de matemática.

Além disso, a programação tende a agir de forma intermediária entre o problema narrativo e a formalização matemática, "podendo promover uma transição mais 'suave' para compreensão da linguagem matemática". (Barcelos e Silveira, 2012)

Neste sentido, apresentaremos, nesta comunicação, o projeto Escola de Hackers sob o viés metodológico, bem como uma discussão a respeito dos conhecimentos matemáticos informais presentes nos códigos de programação do *software* Scratch, que possibilitam esta transição "suave" da linguagem narrativa dos problemas que queremos resolver, para o entendimento da matemática formal da escola.

Escola de Hackers

A Escola de Hackers foi idealizada por meio de diversas ações que aconteciam na UPF em 2013, mais especificamente no Grupo de Pesquisa em Inclusão Digital (GEPID - http://gepid.upf.br). A ação responsável por esta promoção foi a Olimpíada de Programação de Computadores para Estudantes de Ensino Fundamental, que já viabilizava a utilização do *software* Scratch pelas equipes participantes e, a partir de seu destaque na região, encontra-se em sua terceira edição.

A partir disso, no início de 2014, iniciou-se as atividades da Escola de Hackers, cujo principal objetivo é que os estudantes destas escolas aprendam programação e realizem projetos no *software* Scratch com o auxílio de monitores, durante todo o ano letivo de 2014. Este é um projeto piloto, cuja pretensão é dar continuidade nos próximos anos. Dessa forma, cada instituição envolvida - UPF, IFSul, IMED e SMEPF - ficou encarregada de realizar atividades específicas do projeto nas 21 escolas municipais da cidade de Passo Fundo que participam.

O projeto da Escola de Hackers está organizado em quatro etapas: preliminar, execução, formatura e avaliação. A etapa preliminar consiste na definição dos conteúdos de programação, elaboração de material didático pedagógico; contato com as escolas municipais; realização das inscrições; e formação de monitores, que são acadêmicos dos cursos de Matemática e Ciências da Computação da UPF, bem como a formação dos professores das Escolas do município, realizadas pelo IFSul.

A etapa de execução se refere à implementação das ações da Escola de Hackers. Dentre as ações desenvolvidas pela Escola destacam-se a realização de oficinas semanais com duração de 2 horas, conduzidas pelos monitores, nos laboratórios de informática das escolas inscritas. Nessa etapa, está se utilizando o material elaborado na etapa preliminar. Estas ações são acompanhadas por professores da UPF e da IMED e, em dezembro de 2014, será realizada a formatura com a entrega de certificados aos participantes.

De forma a avaliarmos o desenvolvimento do Projeto, estão sendo construídos relatórios mensais, a partir de reuniões e seminários realizados. Após a finalização deste projeto piloto, o desdobramento de dará em dois momentos: a continuidade das oficinas nas escolas para novos estudantes, com o auxílio daqueles que já participaram do projeto, e, a realização de oficinas

avançadas de programação, na UPF, para estudantes destaques desta primeira experiência, envolvendo a robótica educacional.

O conteúdo das oficinas foi elaborado em formato de módulos. No primeiro módulo, trabalhou-se a interface do *software* Scratch, com atividades que envolveram a troca de palco e de *sprites*[1], cores, sons, trajes ou fantasias, entre outras. No segundo módulo (o projeto encontra-se nesta etapa), está sendo trabalhado a programação, utilizando atividades que envolvem todos os comandos ou roteiros, inclusive as noções de variáveis, condicionais e listas. A partir das instrumentalizações obtidas no que já foi feito, no módulo 3 serão propostas atividades na qual os estudantes podem construir projetos de jogos, animações e histórias. Além desses módulos, também estamos elaborando um Caderno Didático, no qual serão apresentadas propostas pedagógicas para que possam ser aplicadas ou adequadas às futuras oficinas de programação.

Educação, Matemática e Programação de Computadores

Segundo Papert (2008), as crianças possuem, antes de ir para a escola, estilos orais de aprender e quando chegam lá precisam desenvolver estilos "leterados"[2] de aprender. Para o autor, esta transição é menos aplicável à matemática, uma vez que o nome "matemática" é reservado apenas para o tipo de matemática "leterada" da escola e exclui uma base de conhecimentos "orais" que poderiam ser usados de alicerce para a matemática formal. Nesse sentido, a programação pode privilegiar a utilização destes conhecimentos informais (orais) na construção de algoritmos necessários para resolução dos problemas, em especial da Escola de Hackers.

Acreditamos que esse processo sequencial utilizado na elaboração de algoritmos contribua para a compreensão de conceitos, teoremas, conteúdos, etc., da matemática numa situação formal de ensino desta ciência. A partir disso, compreendemos que é possível criarmos estratégias inovadoras dentro do Sistema Escolar privilegiando processos de aprendizagem pela invenção e criação. Papert e Freire convergem neste sentido, na qual Papert diz que para Piaget "entender é inventar. Ele (Piaget) estava pensando nas crianças. O princípio, porém, aplica-se a todos nós." (Papert, 2008). Ainda, Freire (2005) afirma que

> fora da busca, fora da práxis, os homens não podem ser. Educadores e educandos se arquivam na medida em que, nesta distorcida visão da educação, não há criatividade, não há transformação, não há saber. Só existe saber na invenção, na reinvenção, na busca inquieta, impaciente, permanente, que os homens fazem do mundo, com o mundo e com os outros. (2005, p.66)

Na busca de uma educação mais criativa, a Escola de Hackers utiliza o *software* de programação Scratch, elaborado no Massachusetts Institute of Tecnology (MIT - http:// http://web.mit.edu/) por Mitchel Resnick[3]. O Scratch é um ambiente gráfico de programação que possibilita o desenvolvimento de aplicativos que integram recursos de multimídia de forma intuitiva. Tem por objetivo facilitar a introdução de conceitos de matemática e de computação, bem como oportunizar o pensamento criativo, o raciocínio e o trabalho colaborativo. Segundo

---

[1] Sprite: objeto a ser programado no software Scratch.

[2] Papert (2008) utiliza a palavra "leterado" para se referir "à habilidade de ler palavras formdas com as letras do alfabeto".

[3]Dirigi o grupo Lifelong Kindergarten no Media Laboratory do Instituto de Tecnologia de Massachusetts na qual desenvolve novas tecnologias para envolver as pessoas (especialmente crianças) em experiências de aprendizagens criativas. Trabalhou com Seymour Papert. Recebeu o Prêmio McGraw em Educação para 2011. (Fonte: http://web.media.mit.edu/~mres/)

informações que constam no portal EduScratch (http://eduscratch.dge.mec.pt/*)*, a ferramenta Scratch foi concebida e desenvolvida como resposta ao problema do crescente distanciamento entre a evolução tecnológica no mundo e a fluência tecnológica dos cidadãos.

O termo "Scratch" provém da técnica de *scratching* utilizada pelos disco-jockeys do hip-hop, que giram os discos de vinil com as suas mãos para frente e para trás de modo a fazer misturas musicais originais. Com o Scratch, é possível fazer algo semelhante, misturar diferentes tipos de clipes de mídia de modo criativo e usar uma programação matemática similar à feita nos programas de computadores reais, conforme mostra a Figura 1, porém de forma lúdica, simples e intuitiva (EduScratch, 2014).

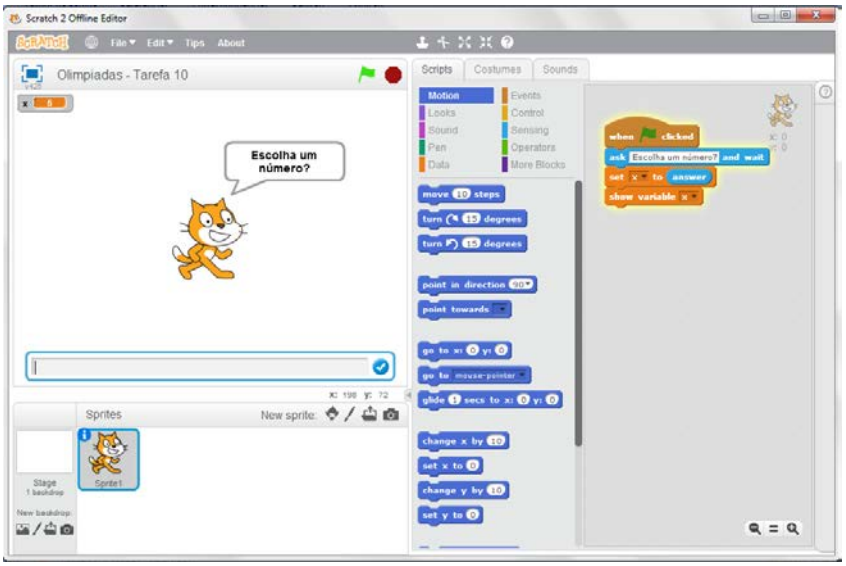


Figura 1. Tela do Scratch 2.0

Entre os recursos do Scratch, destacam-se as competências para a resolução de problemas e para a concepção de projetos com raciocínio lógico, decomposição de problemas complexos em partes mais simples, identificação e eliminação de erros, desenvolvimento de ideias, desde a compreensão até a concretização do projeto, concentração e perseverança (Marques, 2012).

O Scratch é voltado, principalmente, ao usuário infantil e jovem, mas já com adeptos da idade adulta. Oferece uma linguagem de programação simples, em que é possível criar projetos que auxiliam na aprendizagem e no desenvolvimento de habilidades matemáticas e computacionais, de modo a complementar e enriquecer o pensamento criativo e aprender a trabalhar de maneira colaborativa. Segundo Resnick (2013)

> no processo de aprender programação, as pessoas aprendem muitas outras coisas. Eles não estão apenas aprendendo a programar, eles são programando para aprender. Além de aprender idéias matemáticas e computacionais (tais como variáveis e condicionantes), eles também estão aprendendo estratégias para a resolução de problemas, elaboração de projetos e a comunicar idéias. Essas habilidades são úteis não apenas para cientistas da computação, mas para todos, independentemente da idade, interesse ou ocupação (s/p. Tradução dos autores)

Vemos que na interação da criança com o computador, delineia-se um processo em espiral no qual a criança programa uma ideia inicial (hipótese) e testa. Assim, se algo não sai conforme previsto, a criança tem a possibilidade de refletir, propor novas hipóteses e testá-las novamente.

Resnick (2007) propõe um modelo de espiral que apresenta o processo sequencial de criação do estudante. Tal modelo inicia com "Imagine", imaginar o que quer fazer, seguido por "Create", criar o projeto a partir de suas ideias, "Play", divertir-se com suas criações, "Share", compartilhar suas ideias com outros e "Reflect", refletir sobre suas experiências para depois reiniciar o processo, conforme ilustra a Figura 2.

Figura 2. Modelo de Espiral de Resnick(2007)

Dessa forma, antes de iniciar o processo em espiral, o estudante necessita do apoio do professor para apropriar-se dos recursos básicas do programa e conhecer alguns exemplos de jogos e criações já prontas para que, a partir daí, consiga imaginar o que deseja fazer. Na criação, o estudante utilizará tais recursos em seu projeto e o papel do professor é de mediador do processo, dando liberdade de criação ao estudante e, só interferindo se for solicitado.

A diversão é um dos fatores mais relevantes para a aprendizagem, pois leva o estudante a querer aprender. Segundo Resnick (2007), divertir-se e aprender são ações que podem e devem estar intimamente ligadas, pois incentiva a busca por novos conhecimentos, a desenvolver suas ideias e a testar seus limites e, talvez o mais importante, a gerar novas ideias a partir de suas experiências. O compartilhamento do projeto é uma parte fundamental do processo criativo, embora a habilidade de compartilhar e colaborar seja pouco enfatizada nas atividades escolares. Mostrar suas criações para outras pessoas e conhecer outros trabalhos facilita a troca de informações e de experiências e contribui para a reformulação dos projetos e à geração de novas ideias. Por conseguinte, a reflexão leva o estudante a analisar se o resultado obtido foi o esperado e como poderia ser modificado para melhorar. Assim, novamente haverá a etapa de imaginar o que poderá ainda ser feito, criar, se divertir, compartilhar e refletir novamente. E a espiral continua.

Com base nisso, Resnick e Rosenbaum (2013) afirmam que um projeto de construção criativa precisa partir do interesse do estudante e não de um conteúdo escolar pré-determinado. Os conteúdos específicos das área científicas podem ou não ser trabalhados dentro de um projeto com tais particularidades. Este é um fato importante de ser destacado, pois, o professor, ao determinar que ensinará certo conteúdo matemático por meio do Scratch, deverá ter cuidado para

não tornar a atividade de programação algo desinteressante e sem sentido ao estudante. É importante que eles queiram programar.

Na verdade, a programação de computadores utiliza muita matemática, mas esta, muitas vezes, não se apresenta da mesma forma que na escola. O estudante, ao programar computadores, aplica seus conhecimentos prévios de matemática, aprende e desenvolve outros conhecimentos necessários à programação, sem saber necessariamente que o está fazendo. Ele tem a compreensão de uma matemática aplicada ao problema que está resolvendo pela programação, mas pode não ter clareza da relação disto com a matemática escolar.

Para tanto, acreditamos que a programação de computadores possa facilitar a aprendizagem de conhecimentos matemáticos formais da escola, quando for possível a criação de vínculos entre o que se faz no computador e o que se aprende na sala de aula.Portanto, no ? tópico seguinte, apresentamos algumas atividades propostas na Escola de Hackers, assim como reflexões sobre os conhecimentos matemáticos encontrados.

Atividades de programação na Escola de Hackers: discussão de conhecimentos informais de Matemática

Segundo Marji (2014), as linguagens de programação mais comuns são baseadas em textos, que "parecem uma forma enigmática de inglês" (p.22), possuindo algumas regras de sintaxe, que a princípio são desafiadoras aos estudantes. Por exemplo, se você quiser escrever "Olá!" , na linguagem Python terá que digitar: *print("Olá!")*; na linguagem C++ terá que digitar: *std::cout << "Olá!" << std::endl*; na linguagem java: *System.out.print("Olá!");* e na linguagem php: *echo "Olá!".* Já o Scratch, é uma linguagem de programação visual, na qual os comandos são representados por blocos a serem encaixados uns nos outros na implementação dos algoritmos, conforme a Figura 3.

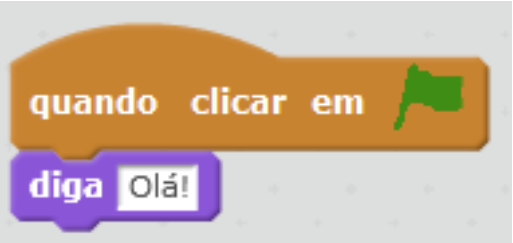


Figura 3. Programação em Scratch 2.0

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998), afirmam que comunicar-se em diferentes formas de linguagem é uma competência que exige do aluno fazer diferentes representações matemáticas para um determinado problema ou questão. O mesmo problema escrito na língua materna (forma narrativa) pode ser representado numa linguagem simbólica, como gráfico, equações, fórmulas, e inclusive numa linguagem de programação. Conforme já mencionado, a linguagem de programação pode servir de ponte entre a linguagem narrativa e a linguagem formal simbólica da matemática.

A matemática está intrinsecamente presente em qualquer linguagem de programação sob uma forma diferente da aprendida na escola, conforme já foi dito. Com exceção de alguns algoritmos que solucionam certos tipos de exercícios de matemática escolar, como por exemplo: faça o *sprite* desenhar um triângulo retângulo, ou faça o *sprite* calcular as raízes de uma equação do 2° grau, dados seus coeficientes; e que, portanto, estão "cheios" de matemática visível aos estudantes, todos os outros algoritmos que podem ser criados lidam, necessariamente, com a

lógica matemática e com conhecimentos matemáticos informais, nem sempre visíveis aos estudantes.

Nas três atividades descritas a seguir, apresentamos uma solução possível no Scratch 2.0 e uma análise dos conhecimentos matemáticos percebidos nos códigos de programação. Estes conhecimentos, no entanto, podem ser a aplicação de algum conteúdo formal específico já compreendido pelos estudantes ou, conforme viemos argumentando, poderão dar subsídios para a compreensão da matemática formal futuramente.

Atividade 1: Crie um programa que permita que um retângulo gire de modo perceptível, quando clicada a bandeira verde.

Esta é uma atividade aplicada à um conteúdo específico da matemática. Com ela, o professor pode ter a pretensão de trabalhar conceitos de geometria e recursos do Scratch. A Figura 4, apresenta uma forma de solução, realizada no Scratch 2.0. Com isso, obtemos diversas possibilidades de giro do retângulo, considerando o seu ponto de rotação. As figuras 5 e 6, mostram duas posições diferentes do ponto de rotação.

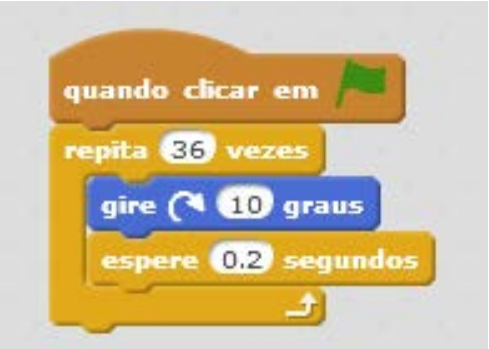


Figura 4: Programação da Atividade 1

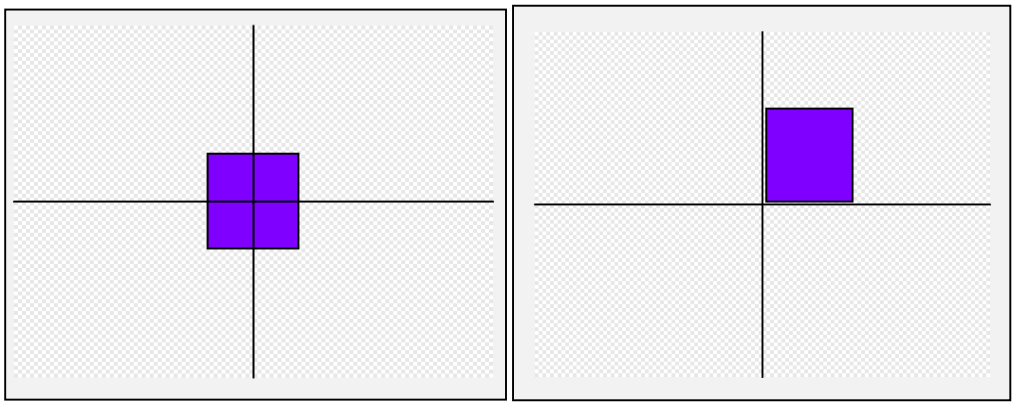


Figura 5. Ponto de rotação no centro e num dos vértices do retângulo

Esta atividade é simples, mas contém conhecimentos interessantes. Além de trabalhar o conceito de retângulo, desenvolve a noção de centro como uma referência para o movimento, o que é importante para a construção do conceito de centro de massa, centro de gravidade da Física. Mudando o centro (Figura 5), o movimento do retângulo muda. Também são trabalhados noções de ângulos - um giro completo tem 360° - e, para o movimento ser visível no programa, é necessário que ele gire aos poucos (esperando para girar novamente alguns segundos depois). Neste caso, escolhemos a repetição de 36 vezes um giro de 10° a cada 0,2 segundos.

Atividade 2: Crie um programa que faça um objeto se mover de modo a desenhar um octógono regular.

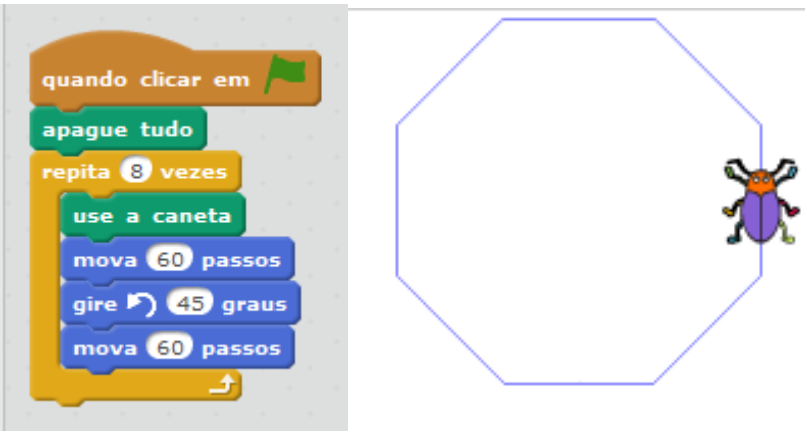


Figura 6. Programação e visualização da solução da Atividade 2

Nesta atividade, assim como a anterior, é necessário a compreensão prévia do conceito de octógono regular para definir o ângulo de rotação do objeto. Também é necessário desenvolver o conhecimento de que o objeto da tela precisa girar conforme o ângulo externo do octógono, mas este conhecimento pode ser aplicado de forma implícita (o estudante escolhe o ângulo, mas não sabe o que é ângulo externo de polígonos). E, para formar a figura, é preciso definir o número de repetições. Com isso, o estudante poderá generalizar a construção de qualquer polígono regular.

Atividade 3: Crie um programa que solicite, via teclado, as dimensões de um retângulo, que desenhe o tal retângulo e forneça a medida de sua área.

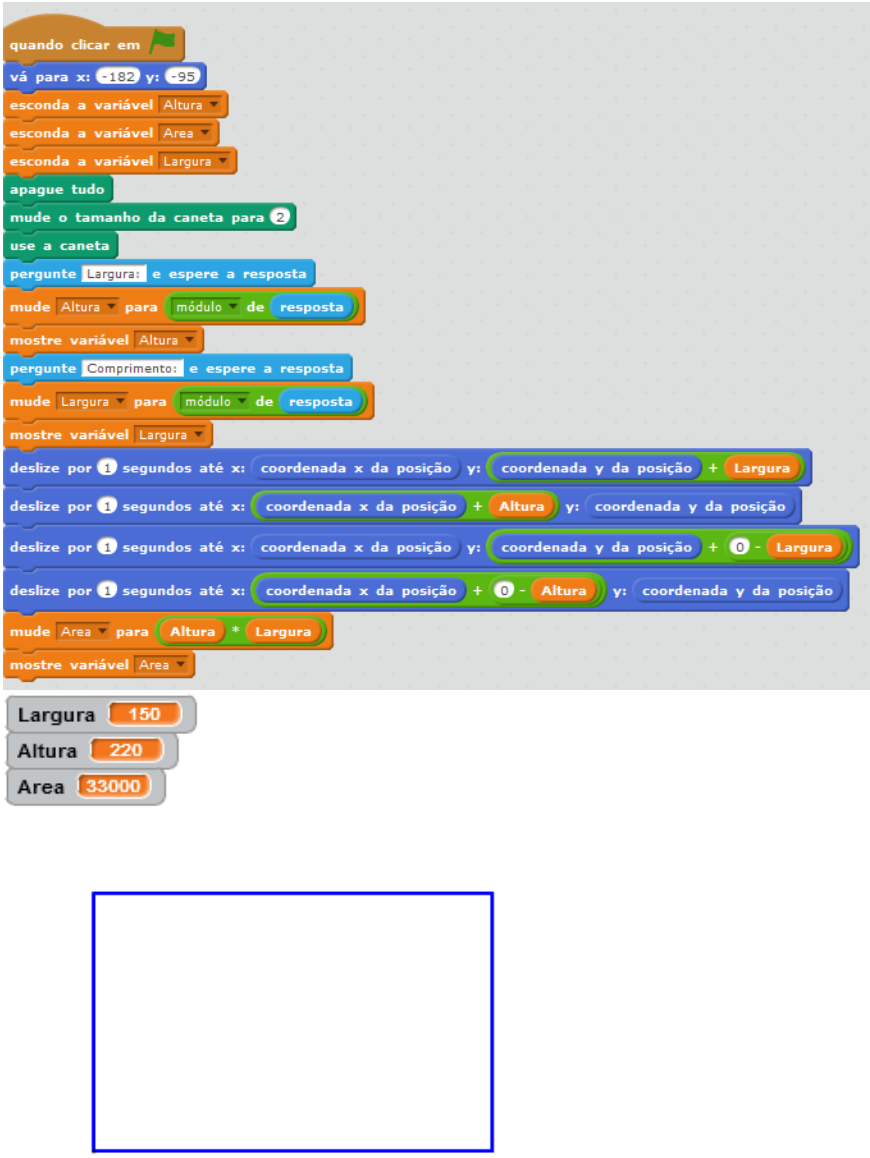


Figura 7. Programação e visualização da atividade 3

Esta atividade desenvolve a noção de coordenadas, no momento em que iniciamos o desenho de um lugar específico na tela. Também é preciso aplicar o conceito de retângulo e de área de retângulo. Na Figura 7, vemos que foi utilizado o recurso "variável" do Scratch. Este recurso tem o sentido semelhante do que se entende de "variável" na matemática, ou seja, é um "lugar" ou "símbolo" que representará diferentes valores numéricos que escolhemos. Neste código, é necessário informar um valor numérico para a variável "largura", depois para a variável "comprimento", na qual é armazenado na memória. Depois, outra variável é criada, para guardar a resposta da operação de multiplicação entre as duas variáveis anteriores. Temos, então, diferentes conhecimentos matemáticos envolvidos, sem contar o raciocínio lógico presente na superposição das categorias (cada categoria possui uma cor) que formam os blocos, conforme pode ser observado na programação.

Atividade 4: Crie um jogo que contenha pontuação

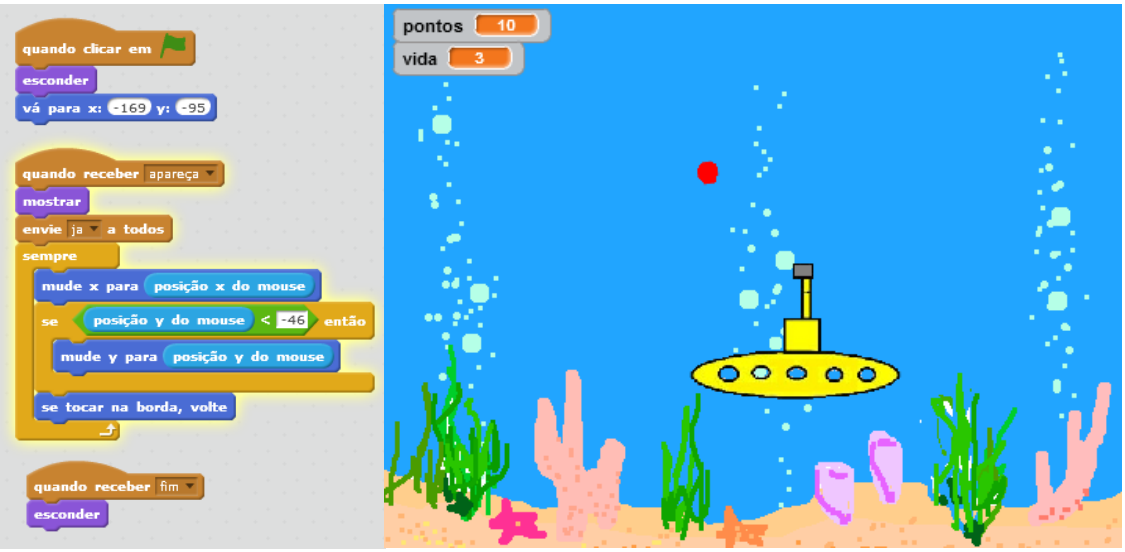


Figura 8. Programação do submarino e visualização da Atividade 4

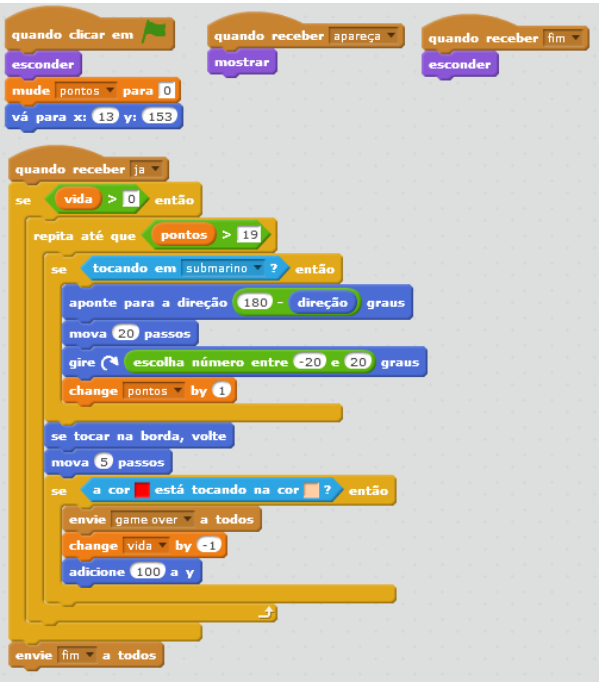


Figura 9. Programação da bolinha

O objetivo da Atividade 4 é de não direcionar os conhecimentos envolvidos e, portanto, muitas ideias inesperadas e surpreendentes podem surgir. Na Figura 8 e 9, temos um exemplo construído na Escola de Hackers para introduzir a ideia de construção de jogos, na qual apresenta uma programação mais complexa e com dois objetos em movimento, portanto, duas telas de programação.

Na programação do submarino, percebe-se a utilização de coordenadas para estabelecer a posição de início tanto do submarino quanto da bolinha. E a condição é usada para estabelecer a posição do submarino, conforme a posição do mouse. É interessante observar que há uma

limitação da altura que o submarino pode atingir. No código, temos a restrição desta posição determinada pela condição "se posição y do mouse < -46, então mude y para posição y do mouse". Logo, se a posição do mouse for maior do que -46, ele não se mexe na direção do mouse.

Na programação da bolinha, na Figura 9, percebe-se o uso de: coordenadas; operadores "-" e ">"; variáveis para guardar a pontuação e as vidas; noções de ângulos quando a bolinha toca o submarino (ângulos de incidência e reflexão); e a ideia de condição "se, então".

Conclusão

A Escola de Hackers, dessa forma, apresenta-se como uma possibilidade para os estudantes de Escolas Municipais de Passo Fundo aprenderem programação e consequentemente, matemática. Conforme já foi dito, a programação possibilita muitas aprendizagens e pode potencializar a compreensão da matemática formal da escola, mediante um trabalho paralelo nos laboratórios de informática das escolas com o uso de matemática informal nos códigos de programação. Segundo Resnick (2013)

> no processo de aprender a programação, as pessoas aprendem muitas outras coisas . Eles não estão apenas aprendendo uma programação, eles estão programando para aprender. Além de aprender noções matemáticas e computacionais (como variáveis e condições) , eles também estão aprendendo estratégias para a resolução de problemas, elaboração de projetos e comunicar idéias. Essas habilidades são úteis não apenas para os cientistas da computação, mas para todos, independentemente da idade, interesses ou ocupação. (p. s/n, Tradução dos autores)

Para uma criança programar em Scratch, ela não precisa saber a matemática formal da escola. O *software* permite que ela conheça seus recursos brincando e teste muitas vezes suas hipóteses e, portanto, a espiral do conhecimento proporciona uma visão do processo, na qual a reflexão sobre seus códigos de programação gera as aprendizagens.

Como vimos na descrição das atividades da Escola de Hackers, o pensamento matemático referente às variáveis, por exemplo, não precisa, necessariamente ter sido trabalhado na escola para que o estudante consiga programar. E isso, pode também, ser validado para outros conhecimentos. Aliás, há uma grande possibilidade de o estudante não conseguir relacionar os dois tipos de variáveis, mesmo já tendo visto um deles na escola. O que observamos é um distanciamento dos conhecimentos formais dos aplicáveis fora da escola.

Nesta perspectiva, o GEPID, do qual os autores deste artigo fazem parte, está engajado em estudos teóricos sobre o software Scratch, assim como, na concretização da Escola de Hackers e das Olimpíadas de Programação, como possibilidades de inclusão dos estudantes na sociedade cada vez mais digital, promovida por meio do conhecimento.

Referências

Barcelos, T., & Silveira, I. F. (2012). Pensamento Computacional e Educação Matemática: Relações para o Ensino de Computação na Educação Básica. In XX Workshop sobre Educação em Computação, Curitiba. Anais do XXXII CSBC.

Brasil. (1998). Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Nacionais Curriculares Nacionais: Matemática, Brasília: MEC.

EduScratch. (2012). Site do Scratch para Educadores. Disponível em: <http://eduscratch.dgidc.min-edu.pt>. Acesso em: 10 jun. 2012.

Freire, P.(2005). *Pedagogia do Oprimido*. 41.ed. Rio de Janeiro: Paz e Terra.

Marji, M. (2014). Aprenda a programar com scratch: uma introdução visual à programação com jogos, arte, ciência e matemática. São Paulo: Novatec.

Marques, Maria T. P. M. (2012). Recuperar o engenho a partir da necessidade, com recurso às tecnologias educativas: contributo do ambiente gráfico de programação Scratch em contexto formal de aprendizagem. Universidade de Lisboa, 2009. Disponível em: <http://eduscratch.dgidc.min-edu.pt/index.php?option=com_docman&task=doc_ download&gid=43&Itemid=40>. Acesso em: 10 jun. 2012.

Papert, S. (2008). *A máquina das crianças*: repensando a escola na era da informática. Ed.rev. Porto Alegre: Artmed.

Resnick, M. & Rosenbaum, E., (2013). Designing for Tinkerability. In Honey, M., & Kanter, D. (eds.), *Design, Make, Play: Growing the Next Generation of STEM Innovators*, pp. 163-181. Routledge.

Resnick, M. (2007). All I Really Need to Know (About Creative Thinking) I Learned (By Studying How Children Learn) in Kindergarten. *ACM Creativity e Cognition conference*, Washington DC, June.

Resnick, M. et al. (2009). *Scratch: programming for all.* Communication of the ACM. vol.52. n.11. pp.60-67.

Resnick, M. (2013). *Learn to code, code to learn*. MIT Media Lab. Artigo on-line. Disponível em: < http://web.media.mit.edu/~mres/papers/L2CC2L-handout.pdf> Acesso em: 18 maio 2014.

Proposta de formação do professor para o uso pedagógico das tecnologias digitais com a metodologia da Sequência Fedathi

Marta Alves da **Silva**
Instituto Federal do Ceará – IFCE
Brasil
marta@ifce.edu.br
Hermínio **Borges** Neto
Universidade Federal do Ceará
Brasil
herminio@multimeios.ufc.br
Francisco Edisom Eugênio de **Sousa**
Universidade Federal do Ceará
Brasil
edisom@multimeios.ufc.br

Resumo

Este artigo apresenta uma proposta de formação do professor para o uso pedagógico das tecnologias digitais, com a metodologia da sequência Fedathi (SF), visando promover mudança da postura docente, a fim de que ele possa adequar-se ao universo tecnológico digital. A pesquisa, de tipo qualitativo, apoia-se em estudo de caso realizado numa Instituição Pública Federal de Ensino Médio, localizada em Fortaleza - CE, no Brasil. O sujeito da pesquisa, foi um professor de Matemática. A investigação deu-se em três fases: observação da aula do professor; participação do professor em formação sobre a SF e observação das Sessões Didáticas; após a formação. A coleta de dados deu-se a partir da observação direta, dos vídeos produzidos durante as aulas e das entrevistas semiestruturadas. Concluíu-se que a SF potencializou uma nova postura docente; no uso pedagógico das tecnologias, posibilitando ao professor tornar-se mais reflexivo nas atividades educativas.

Palavras-chave: Formação do Professor, Tecnologias Digitais, Sequência Fedathi

Este trabalho apresenta uma proposta de formação para o professor, para o uso pedagógico das tecnologias digitais; com a sequência Fedathi (SF).

A proposta é oferecer ao professor a oportunidade de refletir sobre sua própria prática, seu pensar e seu fazer. Conforme Schön (2000), esse processo ocorre num ciclo de reflexão na ação, reflexão sobre a ação e reflexão sobre a reflexão na ação, de modo que a visão tecnicista de ensino vai sendo substituída por outra forma de ensinar.

A SF é uma metodologia de ensino estruturada em quatro etapas sequenciais e independentes, denominadas de: *tomada de posição*, *Maturação*, *Solução* e *Prova*. Voltada para o planejamento da aula, procura orientar a prática pedagógica, com o fim de estabelecer outra forma de relacionamento com o aluno, diferenciando-se positivamente do ensino tradicional, por tratar igualmente as ações do professor e do aluno durante o ensino. (SOUSA, 2013)

No Ensino tradicional, o professor, em geral, limita-se a reproduzir uma aula instrucional, baseada na lógica transmissiva do conhecimento. Nesse modelo, o professor não dá liberdade ao aluno para desenvolver suas habilidades cognitivas. Nesse caso, ocorrerá o que Brousseau (1996, p. 54) enfatiza: "se uma situação leva o aluno à solução como um trem em seus trilhos, qual é a sua liberdade de construir seu conhecimento? Nenhuma". Essa postura apresenta-se inadequada em plena era da Informação e Comunicação, deixando o ensino aquém do desejado.

Desse modo, questionou-se como a SF, utilizada na organização didática e metodológica do trabalho do professor, poderá contribuir na mudança da postura tradicional de ensino a partir do uso pedagógico das tecnologias digitais.

Ibernón (2002), por exemplo, diz que o professor é chamado a assumir outra postura; frente ao planejamento de sua tarefa, baseada no estabeleciemnto de estratégias de pensamento, de percepção e de estímulos e centrar-se na tomada de decisões para processar, sistematizar e comunicar a informação, partindo de ações reflexivas para provocar nos alunos o espírito de cooperação e participação na construção do conhecimento.

Nessa perspectiva, trabalhou-se a dinâmica da aula, com as tecnologias digitais, a partir de Sessões Didáticas (SD); planejadas e executadas de acordo com as concepção da SF, para tornar o aluno o protagonista da construção do seu conhecimento.

A pesquisa, de natureza qualitativa, configurou-se num estudo de caso, tendo como objeto de estudo a postura do professor. O *lócus* de investigação foi uma Instituição Pública Federal de Ensino Médio, localizada em Fortaleza - CE, no Brasil. A experiência empírica deu-se em três fases: observação do professor durante a aula, formação do professor sobre a SF e observação da aula; após a formação. A coleta de dados deu-se a partir da observação direta das aulas, dos vídeos produzidos no Laboratório de Informática Educativa (LIE) e das entrevistas semiestruturadas.

A seguir, apresentar-se-á a descrição da aula do professor, realizada durante a primeira etapa da experimentação, o que serviu de diagnóstico inicial do trabalho de tese. Nesse contexto, surgiu o problema da pesquisa, centrado no próprio método de ensino do professor, ao utilizar as tecnologias digitais em suas aulas. A partir do diagnóstico inicial, elaborou-se a proposta de formação sobre a SF.

Primeira etapa: observação da aula do professor, antes da formação com a SF

Na primeira aula observada, o professor, inicialmente, apresentou a pesquisadora à turma e explicou sobre o trabalho que ela pretendia desenvolver. Logo após, o professor pediu aos alunos para acessarem o *winplot*[1], mas foi constatado, pelos próprios alunos, que em nenhum computador havia o programa. Enquanto os alunos faziam a instalação do *software*, o professor dirigiu-se até o quadro convencional e fez a explanação sobre o conteúdo de funções, explorando o gráfico da função do 1º grau. A ideia de trabalhar este conteúdo havia surgiu naquele momento, sem nenhum planejamento. Isso foi confirmado; na primeira entrevista realizada com ele, após a primeira fase.

[1] O *Software Winplot* foi desenvolvido, por volta de 1985, por Richard Parris, professor da Philips Exeter Academy, nos Estados Unidos. O programa é de fácil acesso para *download*, consultar o site: http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html

Dessa forma, o professor passou a explicar como poderiam ser construídos gráficos das funções do 1º grau no *Winplot*, como visualizado; na figura 1, a seguir:

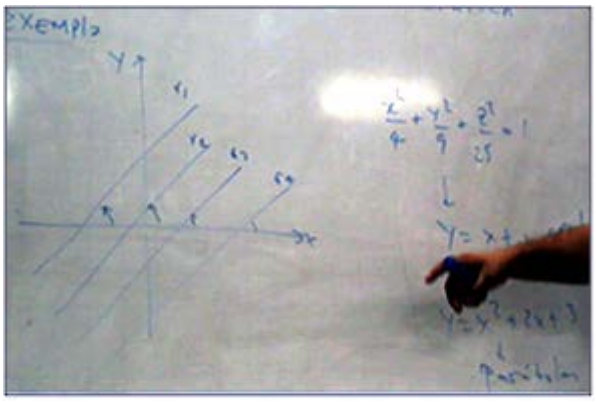


Figura 1. Conteúdo sobre funções do 1º grau

O *winplot* é um *software*; que propicia uma aprendizagem por descoberta, permitindo trabalhar a construção de figuras em duas e três dimensões, o que contribui para uma melhor organização e visualização de objetos geométricos. Outra possibilidade oferecida pelo programa é a exploração de atividades; por meio de animações. O estudante poderá utilizar cores e linhas variadas para identificar na tela diferentes objetos, de forma clara e precisa. Também é possível mudar o objeto de um lugar para outro, num mesmo plano cartesiano, sem deformá-lo. A articulação do conteúdo no *software*, quando conduzida pelo aluno, propicia interpretações de ordem cognitiva e metacognitiva.

Desse modo, depois da exposição do conteúdo, caberia ao professor propor aos alunos utilizarem o *software* para trabalhar a construção dos gráficos, esboçados no quadro convencional, respeitando o ritmo de aprendizagem de cada um; e dando-lhes tempo para realizar a "transposição informática", mas não o fez. Segundo Souza (2010, p. 60), o termo entre aspas designa o trabalho sobre o conhecimento que permite sua representação simbólica e operacional num dispositivo informático, nos aspectos de apresentação, manipulação e visualização do conhecimento. Entretanto, nessa aula, não houve integração do ambiente digital com o conteúdo proposto. Enquanto, de um lado, o conteúdo era lançado, estabelecendo uma forma de ensino unilateral, pronto e acabado; de outro lado, o aluno permaneceu alheio ao processo, ora explorando o *software*; de forma desarticulada do conteúdo, ora observando passivamente as explicações do professor feitas no quadro.

A abordagem tradicional de ensino, com o professor limitando-se à exposição e à transmissão do conteúdo matemático, predominou durante a aula. Os alunos pareciam estar no mesmo nível de conhecimento, recebendo o mesmo conteúdo, no mesmo ritmo. Além disso, havia um distanciamento do professor para com os alunos e vice-versa, afastando estes do processo de construção do conhecimento. Essa postura do professor ratificou as características do modelo de ensino tradicional.

Souza (2010, p. 85) entende que o professor, quando se mantém distante do aluno, produzindo aula na forma unilateral, não contribui para a construção do conhecimento em jogo. Nesse processo, a autora orienta que "o docente deve levar em conta as experiências vivenciadas pelos alunos e seus conhecimentos anteriores, acerca das atividades desenvolvidas".

Após a observação da aula, na primeira fase, compreendeu-se que o professor precisava ter, em sala de aula, uma postura compatível com o novo paradigma da educação, que o coloca na posição de mediador de um ensino reflexivo, cujo objetivo é tornar o aluno o protagonista de sua própria aprendizagem, condição essencial e necessária para a construção de um modelo educacional diferente do paradigma tradicional. (BRASIL, 2009, p.14)

Frente a essa realidade, percebeu-se que o problema da pesquisa estava na própria ação docente, situada numa prática instrucional que deixou praticamente sem efeito o uso do *software winplot*. Desse modo, houve a necessidade de construir uma proposta de formação do professor para adequar-se às novas posturas de ensino. Usou-se, para isso, a SF como referencial metodológico, por considerá-la um instrumento ideal para discutir a prática pedagógica; no contexto das tecnologias digitais.

Incluiu-se Schön (2000) neste estudo, em razão de suas ideias serem pertinentes ao que se propôs desenvolver na proposta de formação; e por ser ele um teórico inserido na epistemologia da prática reflexiva e do conhecimento na ação. A postura do professor reflexivo muda a condição de mero transmissor do conhecimento.

As fases de experimentação da pesquisa empírica foram realizadas no LIE, antes e depois do período da formação.

Segunda etapa: a formação do professor com a metodologia da SF

Após a análise da postura do professor, na primeira etapa da pesquisa empírica, com o uso do recurso digital (*software winplot)*, o professor foi convidado a assistir sua própria aula, a fim de estabelecer um comparativo de suas ações com o modelo de ensino tradicional; e fazer uma autocrítica de seu trabalho, procurando identificar em suas ações os seguintes aspectos, característicos do ensino tradicional, conforme asegurado por Freire (1996): Exposição como ato exclusivo do professor; transmissão de informações, na forma unilateral, dele para o aluno, afastamento do aluno do processo de construção do conhecimento, tornando-o receptor passivo de sua própria aprendizagem, e professor como principal fonte da informação.

Diante dos resultados constatados, realizou-se uma intervenção na prática pedagógica do professor, pasando a trabalhar com ele o proceso de mediação, com o intuito de mudar sua postura; a partir da apropriação da sequência Fedathi, o que favorece uma postura mais reflexiva no ensino, amparada nas concepções de Schön (2000).

As quatro fases da SF foram exploradas na formação no momento da preparação da "sessão didática", expressão que, de acordo com Rocha (2006, p.57), guarda familiaridade com "situação didática", de Brousseau (1996). Enquanto; esta é formada pelas múltiplas relações pedagógicas estabelecidas entre professor, alunos e saber, constituíndo a parte essencial para caracterizar o espaço vivo de uma sala de aula, àquela reúne os mesmos elementos vinculados a outros, como: objetivos, métodos e recursos didáticos.

Assim, tornou-se essencial o planejamento de sessões didáticas, objetivando nortear a postura do professor durante a execução da aula. A SF orienta que, na preparação da sessão didática, deve-se fazer a análise do ambiente e a análise teórica: A primeira prevê a verificação do nível de conhecimento do aluno; sobre o conteúdo abordado (*plateau*)[2], a escolha do material

[2] *Plateau*: De acordo com a SF, significa o conhecimento do aluno acerca do assunto abordado (Souza, 2010).

(recursos analógicos e digitais que serão utilizados), a duração da aula, variáveis locais, como hipóteses levantadas a respeito do conteúdo; dos alunos e do professor, dentre outras preocupações que poderão surgir durante a preparação da aula. A análise teórica envolve o conteúdo que será abordado.

Na *tomada de posição*, que corresponde à primeira fase da SF, o professor deverá apresentar aos alunos a situação desafiadora ou o problema, podendo ser feito na forma escrita ou oral, mediante a utilização de jogo, de *software* educativo; ou de outra forma sugerida pelo próprio professor.

Na fase da *maturação*, o estudante busca compreender e identificar as variáveis envolvidas no problema. Nessa hora, caberá ao professor intervir no processo, mediando com perguntas reflexivas; para ajudar o aluno a levantar hipótesis; e tecer conjecturas para o entendimento do problema proposto. Esse momento proporciona ao professor o *feedback*, a partir do qual se poderá constatar se os alunos estão compreendendo ou não os conteúdos ensinados.

A *solução* é a fase na qual os alunos, individualmente ou em grupo, representam e organizam esquemas das soluções encontradas, podendo apresentá-los mediante linguagem escrita e/ou oral, utilizando recursos analógicos ou digitais. A postura do professor como mediador será a de promover desequlíbrios cognitivos e metacognitivos no aluno ao estimular as trocas de ideias e as discussões sobre suas próprias construções, objetivando a apropriação do conhecimento de modo investigativo e reflexivo.

Na última fase, a *prova*, o professor faz a analogia das soluções apresentadas pelos alunos com os modelos científicos, por meio da linguagem formal da Matemática, finalizando, assim, o processo.

Durante o período de formação, foram preparadas três sessões didáticas. No tópico; a seguir, analisar-se-á a postura do professor ao aplicar a primeira sessão didática; com a SF.

Terceira etapa: observação do profesor; durante a aplicação da primeira sessão didática

O LIE, após quatro meses fechado, em razão de reforma, reabriu mais modernizado, com outra estrutura física e tecnológica, incluindo um quadro interativo. Mas o professor preferiu usar o quadro convencional e iniciou a aula começando com uma breve exposição sobre o conteúdo de funções do 2º grau. Em seguida, solicitou aos alunos a construção de gráficos no *winplot*, a respeito do conteúdo exposto.

Identificou-se, aqui, uma possível semelhança com a *tomada de posição*, da SF, quando o professor apresentou o problema, na forma oral e escrita, como mostrado na figura 2, a seguir.

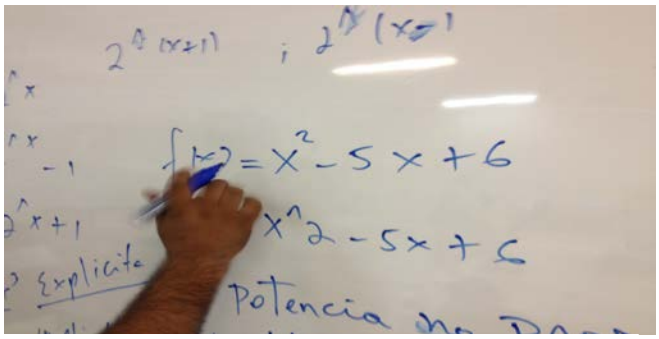


Figura 2. Conteúdo sobre funções de 2º grau

Durante a abordagem do problema, o professor permaneceu com a mesma postura da fase anterior, ou seja, não assumiu a condição de mediador; para estimular os alunos a se envolverem no problema, de modo individual ou coletivo. De acordo com a metodologia da SF, a mediação didática do professor é importante para provocar conjecturas que podem ajudá-los a obter êxito nas atividades educativas. Novamente, houve apenas a apresentação da situação desafiadora.

Depois dessa etapa, iniciou-se a fase da *maturação*, em que os alunos debuçaram-se sobre a atividade e utilizaram o *winplot* para contruír os gráficos solicitados pelo professor. Na formação, enfatizou-se que a SF deixa nitidamente claro que "o engajamento do estudante nas atividades matemáticas está diretamente ligado à sequência das diferentes situações propostas mediante uma situação didática". (LIMA, 2006, p. 44)

Entretanto, durante a *maturação*, não existiu a preocupação em instigar os alunos à estabelecerem relações do problema com outros conhecimentos aprendidos anteriormente, fazendo-os levantar hipóteses e tercer conjecturas com conhecimentos anteriores, no próprio ambiente digital. Com isso, o professor poderia ter obtido novamente momentos de *feedback* a respeito da aprendizagem deles. Mas, desta vez, os alunos ficaram à vontade. Alves (2011, p. 154), um estudioso da SF, propõe que, nesta fase, o professor deve provocar situações de conflitos cognitivos, explorando a percepção e a intuição dos alunos sobre o conhecimento e; estimulando a troca de ideias; a respeito do conteúdo.

Terminada essa etapa, iniciou-se a fase da *solução*, em que os alunos foram chamados a apresentar suas soluções, mediante as representações dos objetos construídos. Alguns usaram o quadro interativo, outros preferiram apresentá-las no próprio computador, permanecendo sentados onde estavam.

Um representante do grupo B foi ao quadro interativo e mostrou como se construíam gráficos da função do 2º grau; no *software*. Durante as apresentações, o professor manteve a postura de mediador do conhecimento, explicando também que o recurso digital facilitava a elaboração e a visualização dos gráficos; com mais precisão. O professor formulou perguntas sobre o domínio da função, mas não apresentou contraexemplos; no sentido de lançar novas situações; e, assim, gerar desequilíbrios de ordem cognitiva e metacognitiva, fazendo-os compreender que havia outra solução diferente daquela apresentada.

Conforme Souza (2010, p.93), a refutação ou rejeição dos modelos inadequados; têm a intenção não apenas de mostrar aos alunos que a solução ideal deverá satisfazer o problema em questão, ou somente determinadas situações, mas de apresentar "um número maior possível de situações que necessitem desse conhecimento, com vista à resolução".

Um representante do grupo D iniciou a apresentação da atividade; no quadro digital. Da mesma forma, o professor manteve a postura de um mediador, levando-os a refletir sobre a relação entre a imagem e o domínio da função. Dessa vez, formulou questionamentos e teceu conjecturas do conteúdo abordado. Finalizada essa etapa, o professor, então, parte para a *prova*, explicando as soluções propostas pelos grupos e formalizando, então, o conhecimento por meio da linguagem científica da matemática. Dessa forma, terminou a aula fazendo a conexão entre os modelos apresentados e o modelo matemático científico.

A SF foi de fundamental importância por ter propiciado ao professor a transformação de sua postura, mesmo sem haver internalizado a metodología; de forma plena. Aos poucos, o

professor passou a assumir a postura de mediador, à medida que suscitava nos alunos o espírito investigativo e reflexivo de sua própria aprendizagem.

Outra constatação é que o quadro interativo e o *software* utilizados como recursos didáticos serviram para facilitar a transposição do conhecimento matemático, visto que favoreceram a movimentação dos objetos geométricos, dando-lhes vida e proporcionando melhor nitidez e visualização ao estudante; e, ainda, propiciando ao professor *feedback* imediato da construção dos objetos; em movimento, impossível de ser feito no quadro convencional ou no caderno do aluno.

Resultados e considerações finais

Na aula observada, realizada na primeira etapa da pesquisa empírica, a postura do professor refletiu o método do ensino tradicional, com aulas expositivas, centradas em uma pedagogia diretiva, em que um ensina e o outro aprende, não permitindo ao educando intervir no proceso; de forma investigativa.

Na primeira Sessão Didática, realizada na terceira etapa, evidenciou-se a melhoria da prática pedagógica do professor, que, influenciado pela SF, transformou sua postura; de forma positiva, ainda que não tenha sido como o esperado. No entanto, percebeu-se que os alunos tiveram a liberdade de apresentar suas construções, o que propiciou a interação entre eles e o professor, além de momentos de discussão e socialização do conteúdo.

Todavia, o professor não levou em conta o *plateau* da turma nos dois momentos relatados, antes e depois da formação com a SF, partindo do princípio de que os alunos encontravam-se no mesmo nível de conhecimento. Dessa forma, não respeitou o ritmo de aprendizagem de cada um. Notou-se, então, uma lacuna na internalização da SF, à medida que não valorizou os conhecimentos prévios dos alunos.

Mediante as condições apresentadas, atestou-se a necessidade de formação do professor para mudar a postura convencional de ensinar, preparando-os para empregar os recursos informáticos no planejamento e execução da aula, visto que a maioria dos professores ainda permanece presa a uma prática que reflete a sua própria formação, solidificada no ensino por transmissão/recepção, o que produz uma postura inadequada ao universo tecnológico informatizado.

Vale ressaltar que o emprego dos recursos digitais no ensino exige mudança de atitude, de comportamento, de organização didática e metodológica. A esse respeito, é possível ver na SF uma forma de ajudar o professor nessa organização didática para o planejamento e execução da aula com as tecnologias digitais.

A pesquisa conduz à conclusão de que a metodologia Sequência Fedathi foi imprescindível para repensar a atividade educativa, tornando a aula mais atrativa e desafiadora para os alunos.

Na sessão didática, o *winplot* favoreceu modos diferentes de refletir sobre os conteúdos matemáticos. No entanto, a escolha de uma tecnologia requer uma conscientização sobre a forma de abordagem do professor para aplicá-las nas atividades, a fim de explorar o potencial do aluno na aquisição de conhecimento.

Abordou-se a Sequência Fedathi (SF) na organização didática e metodológica do trabalho do professor, visando estabelecer possíveis interfaces entre prática, teoria e uso pedagógico das

tecnologias digitais, com o intuito de oferecer ao educador outras competências que precisam ser incorporadas para a melhoria do processo educativo.

Em vista disto, a proposta deste trabalho rompeu com a visão tradicionalista de ensino, na concordância de que a dinâmica da aula deve estar assentada na relação permanente entre professor e alunos.

Referências e Bibliografia

Alves, Francisco Régis Vieira, (2011). *A aplicação da Sequência Fedathi no ensino intuitivo do Cálculo a varias variáveis*. Tese de Doutorado em Educação. Universidade Federal do Ceará (UFC).

Brasil, (2009). *O uso dos computadores e da internet nas escolas públicas de capitais brasileiras*. Estudo realizado son encomenda da Fundação Victor Civita.

Brouseau, G., (1996). *Fondements et méthodes de la Didactique des Mathématiques*. In: Brun, J. (Org.).Didactique des Mathématiques. Paris: Delachaux et Niestlé S.A.

Freire, Paulo, (1996). Pedagogia da autonomía: Saberes Necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra.

Ibernón, F., (2002). *Formação docente e profissional: formar-se para a mudança e a incerteza*. São Paulo: 3ª. ed. Cortez.

Lima, Ivoneide Pinheiro, (2006). *A matemática na formação do pedagogo: oficinas pedagógicas e a plataforma teleduc na elaboração dos conceitos*. Tese de Doutorado em Educação. Universidade Federal do Ceará, UFC.

Rocha, Elizabeth Matos, (2006). *Uso de instrumentos de mediação no estudo da grandeza comprimento a partir de sessões didáticas*. Dissertação de Mestrado em Educação. Universidade Federal do Ceará, UFC.

Schön, D. A., (2000). *Educando o Profissional Reflexivo: um novo desing para o ensino e aprendizagem.* Trad. Roberto Cataldo Costa. Porto Alegre: Artes Médicas Sul.

Sousa, Francisco Edisom Eugênio *et al*. (Org.), (2013). *Sequência Fedathi: uma proposta pedagógica para o ensino de Ciências e Matemática*. Fortaleza, CE: Edições UFC.

Souza, M. J. Araújo, (2010). *Aplicações da sequência fedathi no ensino e aprendizagem da geometria mediada por tecnologias digitais*. Tese (Doutorado em Educação), Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará, UFC.

Representaciones semióticas de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 con Excel

Elvira **Borjón** Robles
Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Zacatecas
México
borjonrojo@hotmail.com
Mónica del Rocío **Torres** Ibarra
Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Zacatecas
México
mtorres@matematicas.reduaz.mx
Leticia **Sosa** Guerrero
Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Zacatecas
México
lsosa@matematicas.reduaz.mx

Resumen

El presente trabajo evidencia el proceso de aprendizaje de alumnos de bachillerato respecto a la solución de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 a través de la puesta en escena de dos instrumentos diseñados en dos diferentes escenarios: Con lápiz y papel (I1) y con uso de la tecnología Excel (I2), con la finalidad de apoyar el tránsito entre representaciones semióticas, teniendo en cuenta la afirmación de Duval (1998) de que "se ha adquirido un concepto determinado, cuando se es capaz transitar entre por lo menos dos diferentes representaciones semióticas del concepto mismo".

Palabras clave: tecnología, representaciones semióticas, sistemas de ecuaciones lineales.

Introducción

La motivación de este trabajo surge de los errores comunes que cometen los alumnos que acaban de egresar del bachillerato (17 a 18 años) y que ingresan a cursar una licenciatura en matemáticas, respecto al tema de sistemas de ecuaciones lineales. Además de un estudio que realizó Martínez (2013) a un profesor del nivel bachillerato.

El objetivo es que mediante la utilización de la tecnología (diseño en Excel) los alumnos transiten de la representación entre diferentes representaciones de la solución de ecuaciones lineales (de verbal a la analítica, de analítica a geométrica y de geométrica a aritmética), para posteriormente regresar la solución del problema en su contexto.

Como menciona Segura (2004) los errores comunes que presentan los alumnos al resolver sistemas de ecuaciones de 2x2 son:

- El manejo de las operaciones aritméticas elementales
- Resuelven un sistema de ecuaciones lineales y no verifican la solución
- No realizan de forma correcta el paso del registro verbal al algebraico

Generalmente para que los alumnos lleguen a una representación gráfica pasan primero por la representación tabular, generando una serie de parejas ordenadas que posteriormente les sirven de base para trazar la gráfica. En este sentido la bondad del diseño implementado es que genera gráficas a partir de las ecuaciones planteadas sin la necesidad de pasar por el registro tabular, desvinculando con ello las representaciones que se fomentan tradicionalmente y propiciando la visualización matemática de la solución de la solución del sistema en cuestión, o por lo menos una aproximación de dicha solución.

Marco de referencia

El referente teórico que da soporte a este trabajo es el denominado Teoría de representaciones semióticas, compartiendo la idea Duval (1999) de que comprender los conceptos en el área de las matemáticas no es una tarea fácil, pues no son objetos tangibles, es decir, en general comprendemos un objeto hasta que lo vemos representado; esta teoría se basa en la idea de que para apropiarse de un objeto se requiere algo más que nombrarlo, es necesario exteriorizarlo y desligarlo de su representación.

Cuando trabajamos con sistemas de ecuaciones lineales, generalmente se trabaja en un contexto algebraico, donde se presenta el sistema y se pide su solución por diferentes métodos, en éste trabajo se pretende realizar una transición "natural" entre los registros de representación, para permitir al alumno identificar las soluciones del sistema de ecuaciones lineales en diferentes contextos, tomando como herramienta mediadora a la tecnología.

El mismo Duval (1999) define las representaciones como "una forma de exteriorizar las representaciones mentales por medio de producciones constituidas por el empleo de signos. Las producciones se pueden representar de forma verbal, numérica, algebraica y gráfica, que pueden incluir diferentes formas de escritura, como números, notaciones simbólicas, representaciones tridimensionales, gráficas, redes, diagramas, esquemas, etc.". En este sentido la tecnología es un fuerte aliado, pues permite un tránsito natural entre las representaciones sin la necesidad de realizar todos los procesos de conversión necesarios para llegar a ellos.

Los resultados mostrados en el trabajo concuerdan con la idea de Duval (1998), de que "se ha adquirido un concepto determinado, cuando se es capaz transitar entre por lo menos dos diferentes representaciones semióticas del concepto mismo", es decir, manipular e identificar la solución de un sistema de ecuaciones lineales en cualquier contexto.

Del miso modo, Duval (2006) menciona que: "Los contextos de representación usados en la actividad matemática son necesariamente semióticos y tener en cuenta la naturaleza semiótica de las mismas implica tener en cuenta tanto las formas en que se utilizan como los requisitos cognitivos que involucran", por tal motivo, para introducir un objeto matemático en el salón de clases se requiere necesariamente usar sus representaciones, transformaciones y conversiones.

Metodología

El tema de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2 se aborda tradicionalmente a partir del segundo año de secundaria de acuerdo a los planes y programas de estudio SEP (2011), como una manera de iniciar con el aprendizaje del álgebra, se continúa con él en el primer semestre de nivel bachillerato, puntualizando más los métodos de solución.

Éste trabajo se desarrolla en un esquema experimental diseñando dos instrumentos de manera paralela: En el primero (I1) se trabajó con lápiz y papel y en el segundo (I2) a través de una hoja de cálculo interactiva en Microsoft Excel.

Ambos instrumentos fueron aplicados a un grupo de 18 alumnos del primer semestre de la licenciatura en matemáticas, de la Universidad Autónoma de Zacatecas, México; cada uno de ellos contaba con una computadora personal para ejecutar el I2. Cabe mencionar que los alumnos actualmente trabajan por competencias la matemática preuniversitaria con la finalidad de solventar dificultades que se han detectado con anterioridad.

Instrumentos

Se diseñaron un par de instrumentos (I1 e I2), con problemas que fueron extraídos de Barnet, Ziegler, y Byleen (2000) y de Bello (1997), estructurados de la siguiente manera:

I1. Conformado por un problema tipo examen en el que se reflejan los aprendizajes adquiridos por los alumnos. Se parte de un problema en su representación verbal en el contexto de la agronomía, para que a partir de éste se obtenga: la representación analítica, la solución del sistema de ecuaciones lineales de 2x2 inmerso en el mismo y la devolución de la solución en el contexto del problema. En éste instrumento se fomenta el tránsito entre las representaciones verbal – analítica – verbal.

I2. Es un instrumento interactivo diseñado en una hoja de cálculo en Excel que permite a los alumnos completar campos estratégicos de una representación y visualizar el comportamiento de los mismos en un contexto de un problema de sistemas de ecuaciones lineales. La reflexión de sus respuestas es necesaria para cuidar la lógica del problema.

Así mismo, el I2 está estructurado por cuatro problemas de la siguiente manera: En los dos primeros se trabaja el tránsito entre las representaciones verbal - analítico – gráfico – aritmético, mientras que los dos últimos problemas se apegan al proceso de solución de un sistema por el método de sumas y restas, transitando entre la representación verbal, aritmética y gráfica. En todos los problemas se incluyen campos prediseñados que permiten al alumno verificar su proceso de solución y realizar una devolución del problema.

Resultados

La experimentación se realizó el día 20 de junio del 2014 en un aula de cómputo de la Unidad Académica de Matemáticas de la UAZ, con un grupo de 18 alumnos próximos a ingresar al primer semestre de la licenciatura en Matemáticas, quienes trabajaron con los dos instrumentos. La imagen 1 muestra la forma de trabajo

Figura 1. Forma de trabajo en el aula

Los alumnos respondieron el I1 por diferentes métodos, la imagen 2 ilustra el tipo de respuestas obtenidas, donde se rescata que contrario a lo que opina Segura (2004) los alumnos en su mayoría fueron capaces de transitar entre la representación verbal y la analítica

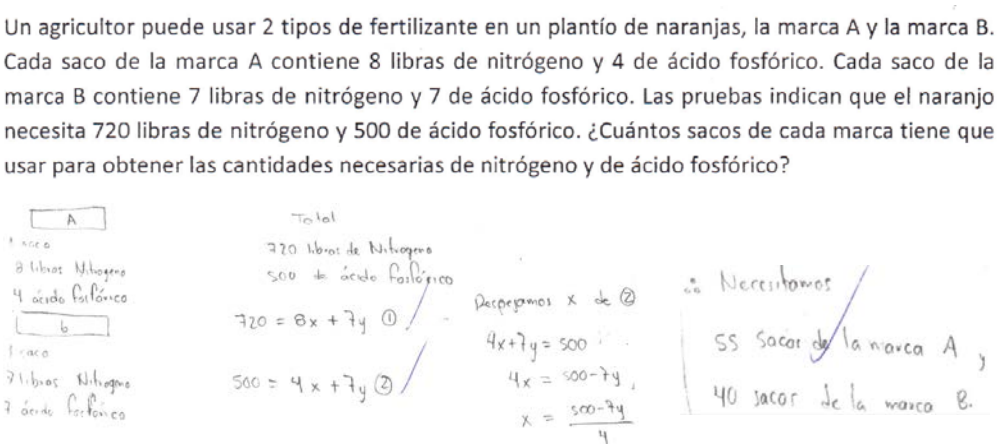
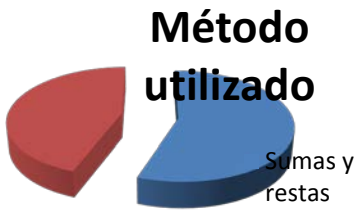


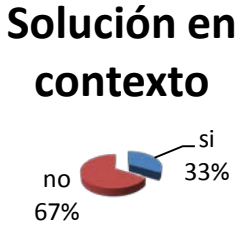
Figura 2. Respuesta de alumnos a I1

Los resultados globales de I1 muestran que los alumnos utilizaron sólo dos métodos de solución conocidos por ellos, el de sumas y restas y el de sustitución, predominando una mayoría al método de sumas y restas, como se muestra en la gráfica 1.



Gráfica 1. Métodos de solución utilizados en el I1

Por otro lado, la mayor parte de los alumnos resuelven el problema en su representación analítica pero no logran regresar a la representación verbal, es decir, la mayoría no fueron capaces de dar la solución en el contexto del problema, tal como se muestra en la gráfica 2.



Gráfica 2. Formas de solución implementadas

Por otra parte, respecto a la utilización de I2, el software inicia con el manejo del método gráfico para la solución de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2, y presenta al alumno un problema verbal véase figura 3, con el cual deberá rellenar celdas estratégicas coloreadas en amarillo, que lo llevarán a la siguiente representación. En él encontramos que es fácil que los

alumnos intercambien las incógnitas del problema, lo que se refleja de manera inmediata en la representación geométrica, y ocasionando soluciones invertidas. Por ejemplo, para el problema 1, las soluciones obtenidas fueron (4,6) y (6,4), lo que no altera la solución del problema, como se verá posteriormente.

Problema 1.

En una granja se crían gallinas y conejos. Si se cuentan las cabezas son 10, si se cuentan las patas son 28. ¿Cuántos animales hay de cada clase?

Identifica las incógnitas.

Qué estamos buscando	Incógnita
CONEJOS	X
GALLINAS	Y

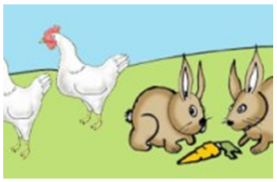


Figura 3. Representación verbal del problema e identificación de variables

Una vez identificadas las variables, debe transitar a una representación analítica del problema, como se muestra en la figura 4, identificando con ello los coeficientes planteados.

2. Con los datos del problema y las incógnitas que indentificaste, completa el siguiente par de ecuaciones de la forma $ax+by=c$

Ecuación 1	1	X	+	1	Y	=	10
Ecuación 2	1	X	+	4	Y	=	28

3. De acuerdo a las ecuaciones planteadas, los coeficientes de cada ecuación son:

Ecuación 1:	Ecuación 2:
a= 1	a= 1
b= 1	b= 4
c= 10	c= 28

Figura 4. Representación analítica e identificación de coeficientes

Con los valores propuestos, el software presenta automáticamente la representación gráfica de las rectas del sistemas de ecuaciones, permitiendo que el alumno visualice el cruce o no de las gráficas, como se muestra en la figura 5, posteriormente se plantean preguntas que permiten al alumno verificar la solución que él visualizó.

Figura 5. Representación geométrica del problema

Finalmente, se transita de la representación geométrica a la solución del problema en su contexto, como se ilustra en la figura 6.

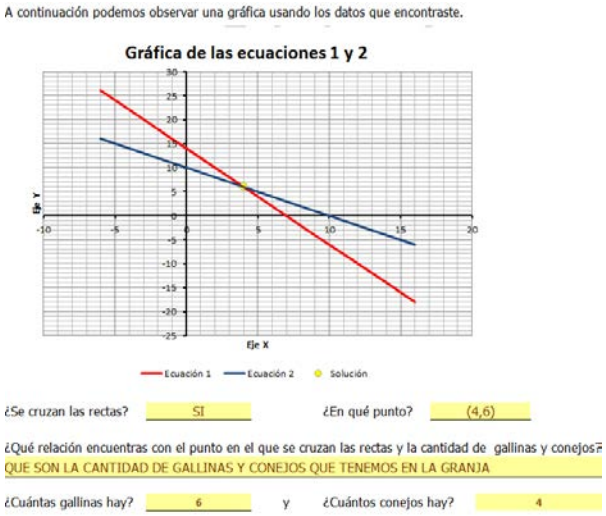


Figura 6. Tránsito de la representación geométrica a la representación verbal

Por otra parte, con la finalidad de que los alumnos comprueben que la solución obtenida es verdadera, se agrega un apartado para cada problema en el que tecleando los valores obtenidos, el software automáticamente los sustituye en las ecuaciones originales y evidencia que el resultado satisface las igualdades, como se muestra en la figura 7.

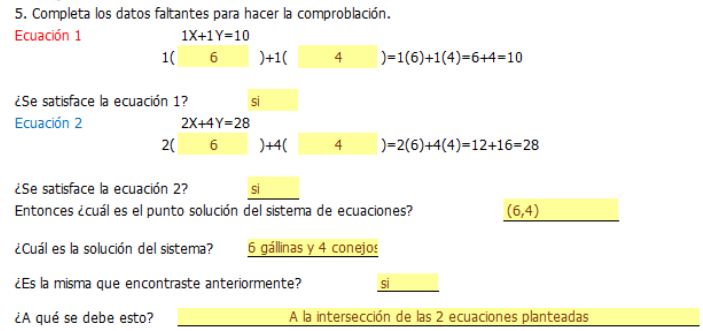


Figura 7. Comprobación de la solución obtenida

Con las respuestas a las preguntas planteadas y la comprobación automática de la solución, ellos deben formular una definición de solución de un sistema de ecuaciones lineales de 2x2, en esta parte encontramos expresiones como la que se ilustran en la figura 8, donde se detecta que la mayoría de los alumnos no reflejan un concepto claro de la definición, ya que sólo 4 de 18 fueron capaces de estructurarla.

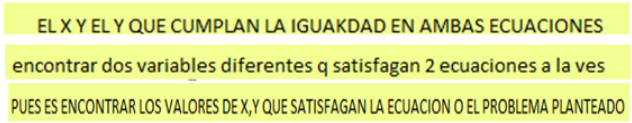


Figura 8. Definiciones de los alumnos respecto al concepto de solución de un sistema de ecuaciones.

Llama la atención que sólo un alumno estructuró su definición en términos de la representación geométrica, como se muestra en la figura 9.

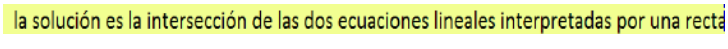


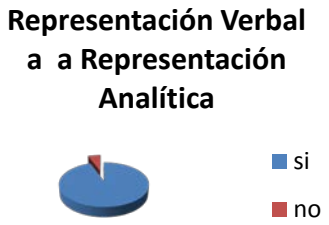
Figura 9. Definición en el contexto geométrico

Los problemas presentados en I2, se trabajan mediante los métodos de solución gráfico y de sumas y restas, permitiendo que los alumnos modifiquen sólo los campos requeridos para el tránsito de una representación a otra.

Por otra parte, los resultados obtenidos reflejan que el I2 tuvo una gran aceptación por parte de los alumnos, ya que el propio instrumento realiza las operaciones necesarias y las gráficas correspondientes, es decir, guía al alumno en el tránsito entre representaciones y permite que visualicen y reflexionen sus respuestas.

Conclusiones

Las conclusiones se presentan en base al tránsito entre representaciones para el instrumento I1 observamos que la mayoría de los alumnos fueron capaces de transitar entre la representación verbal y la representación analítica, véase gráfica 3.



Gráfica 3. Tránsito de la representación verbal a la analítica

Por otra parte, acorde con el objetivo planteado, el uso de la tecnología utilizada en I2, permitió que los alumnos lograran transitar entre diferentes representaciones del concepto de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2, como lo muestran las figuras 3, 4, 5, y 6, una vez que completan los campos marcados con fondo amarillo, lo que acorde con la teoría de representaciones semióticas nos permite concluir que se ha apropiado del concepto.

Por otra parte, cuando se les indagó acerca de si "¿Representa para ti alguna ventaja usar la tecnología?", en su mayoría los alumnos argumentaron que es ventajosa, ya que solamente sustituían valores en las expresiones dadas y automáticamente la computadora les arrojaba resultados y gráficas, reduciendo notablemente el tiempo que invierten en resolver un problema. Solamente uno de los alumnos tomó la posición del programador, afirmando que "para usarla es más fácil, pero para crear aplicaciones del este tipo es más difícil y en el caso de un sistema pequeño es más fácil resolverlo que programar la solución en una hoja de cálculo".

Referencias y bibliografía

Barnet, R. A., Ziegler, M. R. y Byleen, K. E. (2000). Álgebra. 6ta. Edición. McGraw Hill. Traducción de Ing. Javier de León Cárdenas. Escuela de Ingeniería Universidad de la Salle.

Bello, I. (1997). Elementary Algebra. Tampa Florida: *Brooks/Cole Pub Co*.

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. *Investigaciones en Matemática Educativa II* (Editor F. Hitt). (págs. 165-178). Grupo Editorial Iberoamérica.

Duval, R. (1999). Semiosis y Pensamiento Humano, traducido por Myriam Vega Restrepo. Santiago de Cali Colombia: Artes Graficas Univalle.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar de registro de representación. *La Gaceta de la RSME*, Vol 9.1, 143-168.

Martínez, C. (2013). Conocimiento del Contenido y estudiantes que evidencia un profesor de bachillerato al impartir el tema de sistemas de ecuaciones lineales de 2x2, un estudio de caso. Tesis de Licenciatura UAZ no publicada.

Segura, S. (2004). Sistemas de ecuaciones lineales: Una Secuencia didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (Relime)*. Vol. 7, Núm. 1, marzo 2004, pp.49-78

Secretaría de Educación Pública (2011). Plan de Estudios de Educación Básica. México.

Sobre a utilização de objetos de Aprendizagem no ensino de Matemática do ponto de vista de futuros professores

Renata Cristina Geromel **Meneghetti**
Instituto de Ciências Matemáticas e Computacionais, Universidade de São Paulo
Brasil
rcgm@icmc.usp.br
Raissa de Castro **Moda**
Licenciatura em Ciências Exatas, Universidade de São Paulo
Brasil
raissa.moda@usp.br

Resumo

Atualmente, o computador é usado em diversas atividades do cotidiano. Por isso, pode se tornar uma ferramenta importante no processo de aprendizagem se utilizado adequadamente. Considerando o potencial de utilização do computador como ferramenta de aprendizagem da matemática, foram elaborados sete Objetos de Aprendizagem (OA's). Estes OA's são voltados para o ensino de frações na Educação Básica e são caracterizados como materiais didáticos virtuais. Este trabalho objetiva discutir com os licenciandos a finalidade e os aspectos metodológicos dos OA's, assim como as possibilidades de sua utilização através de abordagens alternativas de ensino e aprendizagem. Seguindo uma abordagem qualitativa de investigação, este artigo focaliza a aplicação desses objetos junto a alunos de um curso de Licenciatura em Matemática; a coleta de dados se deu através de questionários. Como resultado, foi possível observar que, para esses futuros professores de matemática, os OA's têm potencial de proporcionar ao aprendiz uma maneira inovadora, estimulante e significativa de aprender, se acompanhados de um bom direcionamento. Segundo os participantes, isso ocorre em função do aspecto lúdico e metodológico empregado nestes OA's.

Palavras chave: frações, objetos de aprendizagem, formação inicial de professores.

Introdução

Os números racionais, em particular as frações, estão entre os assuntos mais complexos para os alunos da Educação Básica (Brasil, 1997). Desta forma, a criação e aplicação de métodos de ensino, que facilitem a aprendizagem a partir de abordagens lúdicas, pode ser uma alternativa que torne o ensino de frações mais simples e atraente. Sabe-se que o computador está presente na maioria das atividades realizadas hoje em dia (Brasil, 1997). Neste sentido, a utilização do computador para se ensinar matemática, nos dias de hoje, tem grande potencial didático-pedagógico. Apoiados na utilização do computador para fins educacionais, sete atividades lúdicas foram desenvolvidas em ambientes virtuais para o ensino e aprendizagem de frações na Educação Básica. Estas atividades são chamadas Objetos de Aprendizagem (OA's), cuja definição será apresentada mais adiante.

Nos últimos anos, as diretrizes curriculares brasileiras têm reconhecido uma crise na Educação e proposto mudanças na estruturação da aula, tanto em relação aos conteúdos a serem ensinados quanto na metodologia de ensino das escolas brasileiras (Brasil, 1997). Levando isso em consideração, será abordado neste trabalho não somente o uso das novas tecnologias no ensino de matemática (em particular dos OA's) como também a metodologia que se emprega na utilização das mesmas, a qual interfere diretamente em seus resultados (Macedo, 2000). Mais especificamente, este trabalho busca promover uma discussão sobre o tema da utilização de OA para ensino de frações, junto a alunos de graduação de um curso de Licenciatura em Matemática.

Os OA's avaliados neste trabalho exploram aspectos lúdicos do conhecimento com propósito de introduzir (nível 1), consolidar (nível 2) e expandir (nível 3) conceitos referentes a Frações. Na totalidade, são utilizados sete objetos que englobam atividades experimentais e jogos pedagógicos, cujas regras e dinâmicas são familiares aos alunos, como jogo da memória, quebra-cabeça, dominó etc. Já a aplicação desses objetos foi realizada junto a alunos de um curso de Licenciatura em Matemática, a fim de promover uma discussão sobre a importância e a finalidade do emprego desses objetos no processo de ensino e aprendizagem de matemática, bem como sobre os aspectos metodológicos inerentes à proposta empregada na elaboração destes OA's. Uma vez que essa aplicação permite reflexões acerca do processo de ensino e aprendizagem da matemática e da utilização do lúdico no ambiente computacional, entende-se que isso pode enriquecer a formação profissional destes futuros professores, influenciando positivamente na atuação destes em sala de aula.

Considerações teóricas

Sobre o ensino de frações

No Brasil, o conceito de número racional, na sua representação fracionária, é abordado nos anos iniciais do Ensino Fundamental[1] (entre o 4º e o 5º anos) e este estudo se estende até os anos finais deste nível de ensino (7º e 8º anos). Este estudo se estende pelo menos até o final do terceiro ciclo (7º e 8º anos). Para Damico (2006), os números racionais são de grande importância para a formação dos alunos. Os conhecimentos de números racionais favorece ao aluno o desenvolvimento de habilidades para resolução de problemas cotidianos e age no desenvolvimento de competências cognitivas. Além disso, provê uma sólida base conceitual na qual se apoiam estruturas matemáticas mais complexas. Castro e Oliveira (2009, p.60) ainda complementam: "No mundo real, segundo Onuchic e Botta (1997), frequentemente nos deparamos com situações que exigem o conhecimento de Números Racionais, seja na forma de frações, razões, decimais ou porcentagem".

Embora este tema tenha grande importância, pesquisadores e educadores concordam que noções relacionadas aos Números Racionais ainda são difíceis de serem aprendidas pelos alunos (Behr; Harel; Post; Lesh, 1992 apud Damico, 2006). Para Ohlsson (1991 apud Onuchic, 2008), a natureza dos números racionais (que é composta por diferentes "personalidades", isto é, diferentes significados que eles podem assumir) é um dos motivos que leva à dificuldade no aprendizado. Da perspectiva da pesquisa e do desenvolvimento curricular, descrever estas "personalidades" com clareza e profundidade de forma a proporcionar aos alunos uma firme fundamentação teórica é também um desafio a ser conquistado (Onuchic e Allevato, 2008). Isso

[1] O ensino fundamental brasileiro é composto de nove anos e contempla os anos iniciais (do 1º ao 5º ano) e os anos finais (do 6º ao 9º ano).

se aplica, em especial, para os números racionais na forma fracionária, fato apontado por diversas avaliações oficiais.

Segundo Damico (2006), resultados do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB), de 2001, por exemplo, mostrou que grande parte dos alunos da 4ª série do ensino fundamental precisa de registros pictóricos (esquemas ou desenhos) para associar partes de um todo às frações. O autor também apresenta resultados da análise pedagógica do SARESP (Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo, 1998). O conjunto de resultados mostrou um preocupante cenário, pois os resultados revelaram que alunos do Ensino Médio têm dificuldades em resolver situações-problema que envolvem as operações básicas com frações. Outro dado do SARESP (2009) aponta que, em relação à matemática, cerca de 30% dos alunos avaliados tiveram notas consideradas "insuficientes" ou "abaixo do básico". Mais recentemente, o relatório geral do Pisa (Programme for International Student Assessment, 2012) mostrou que o desempenho dos estudantes brasileiros em leitura piorou em relação a 2009. Esse mesmo relatório apontou que "2 em cada 3 alunos brasileiros de 15 anos não conseguem interpretar situações que exigem apenas deduções diretas da informação dada. Não são capazes de entender percentuais, frações ou gráficos".

Evidências como as expostas anteriormente mostram que é preciso muita dedicação e responsabilidade no ensino de frações para que este tema seja ensinado e efetivamente aprendido. Faz-se importante refletir também sobre isso em curso de formação dos futuros professores de Matemática. Esse tipo de reflexão aprimora a preparação dos alunos destes cursos, visando melhor compreensão sobre os diferentes construtos que compõem o conceito de número racional (Damico, 2006).

Sobre o lúdico no ambiente virtual

É notório que o mundo está em uma época de avanços tecnológicos cujos impactos são incontestáveis, mudando constantemente atividades rotineiras. Com isso, novas demandas surgem também para os profissionais da educação, implicando na necessidade de rever as formas de interação professor–aluno–informação (Curry & Nunes, 2009). Nesse contexto, o computador pode representar muito mais que uma máquina de memorização. Curry & Nunes (2008, p. 28) consideram que o computador "pode promover a aprendizagem do educando e ajudar na construção do processo de conceituação e no desenvolvimento de habilidades importantes para que ele participe da sociedade do conhecimento".

Ao se inserir a informática na Educação, deve ser ressaltada a importância tanto dos aspectos pedagógicos quanto dos sociais. Isto é, a adoção destas novas tecnologias, particularmente as computacionais, "requer interação, participação, colaboração e a consciência de que o conhecimento implica em um processo de construção" (Curry & Nunes, 2008, pp. 229). O professor precisará rever seu papel e, para tal, necessitará de um novo modelo de formação que venha a abranger, inclusive, o uso pedagógico do computador.

Ainda sobre a importância do uso de novas tecnologias aliadas à Educação, Curry et al. (2008) apontam que o desenvolvimento de atividades lúdicas através de softwares educacionais são capazes de tornar a prática educacional e a relação professor-aluno mais prazerosa. O termo lúdico tem suas raízes etimológicas na palavra latina ludos, que pode significar: jogo, brinquedo. Segundo Almeida (2009), se o termo tivesse ligado a sua origem, o lúdico estaria se referindo apenas ao jogo, ao brincar, ao movimento espontâneo; entretanto este termo passou a ser reconhecido também como traço essencialmente psicofisiológico. Isso mostra uma necessidade

básica da personalidade do corpo e da mente no comportamento humano. Assim, as implicações das necessidades vão além das demarcações do brincar espontâneo e, por isso, a definição de lúdico deixou de ser simples sinônimo do jogo (Almeida, 2009).

Atualmente, percebe-se que a utilização do lúdico pode contribuir muito no processo ensino-aprendizagem, inclusive para o caso de Frações. Araújo (2000, pp.15) destaca que através de atividades lúdicas, as aulas de matemática podem se tornar "[...] dinâmicas e prazerosas facilitando assim, o ensino e a aprendizagem e levando o aluno a se apropriar do conhecimento, vivenciando, experimentando e se tornando uma pessoa autônoma para poder aplicar seus conhecimentos na vida". Portanto, no intuito de fomentar esta união entre tecnologia e educação, entre o lúdico e o computador, que surgiu o projeto de elaboração de objetos de aprendizagem para o ensino de frações focalizado neste trabalho.

Sobre os Objetos de Aprendizagem

Os Objetos de Aprendizagem (OA's) são quaisquer entidades, digitais ou não, que possam ser usadas, reutilizadas ou referenciadas pelas tecnologias que apoiem o aprendizado (Institute of Eletrical and Eletronic Engineers [IEEE], 2002 apud Barbosa; Meneghetti & Ponte, 2009). Ou seja, conteúdos multimídia, como vídeos e músicas, softwares específicos a domínio de conhecimento, entre outros, que se utilizem tecnologias. Em síntese, um objeto de aprendizagem é um recurso digital que pode ser utilizado como suporte ao ensino (Wiley, 2002). São características necessárias aos OA's ter como a reusabilidade, adaptabilidade, granularidade, acessibilidade, durabilidade, interoperabilidade e metadados. Essas características, dentre outras, permitem a avaliação destes OA's, sendo sua qualidade relacionada diretamente à satisfação das necessidades implícitas dos clientes. (Gama, 2012).

Baseando-se nesta definição de OA's, numa fase anterior a este trabalho, da qual participou a primeira autora deste artigo, sete objetos de aprendizagem foram desenvolvidos de acordo com o esquema:

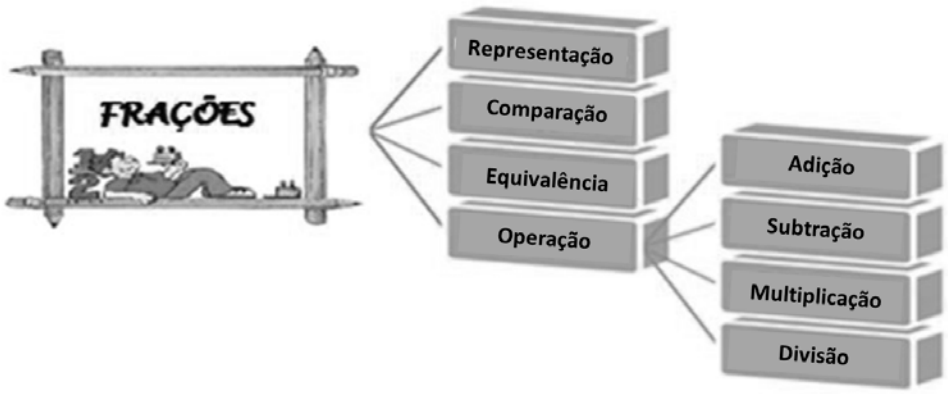


Figura 1. Assuntos abordados pelos OA's para o ensino de frações.

O desenvolvimento desses OA's se deu a partir de uma versão manipulável do material, composta de atividades experimentais ou em forma de jogos, que buscam proporcionar a construção, por parte dos alunos, dos conceitos envolvidos. Tais atividades foram desenvolvidas seguindo uma abordagem em espiral e por níveis de aprofundamento, nos quais se buscou por

um equilíbrio entre os aspectos lógico e intuitivo do conhecimento, como enfatizado por Meneghetti (2003). Somente depois se começou a criar uma versão virtual, composta por sete objetos e abordada em Meneghetti & Barbosa (2009), sobre a qual será comentada de forma sucinta no que segue.

Os quatro primeiros objetos pertencem à fase de introdução de conceito de frações e suas operações. O primeiro objeto, que se chama "Frações com o Professor Sagaz", aborda representação, equivalência, e comparação de frações. O segundo objeto, "Soma e Subtração de Frações" introduz o bloco de operações com frações. Posteriormente, o terceiro objeto, "Multiplicando Frações com o Trevo de 4 Folhas", e o quarto objeto, "Dividindo Frações com Dinheiro", vêm para concluir o conteúdo do bloco de operações que contemplam multiplicação e divisão de fração, respectivamente. A título de ilustração, seguem duas telas sobre "Soma e Subtração de Frações".

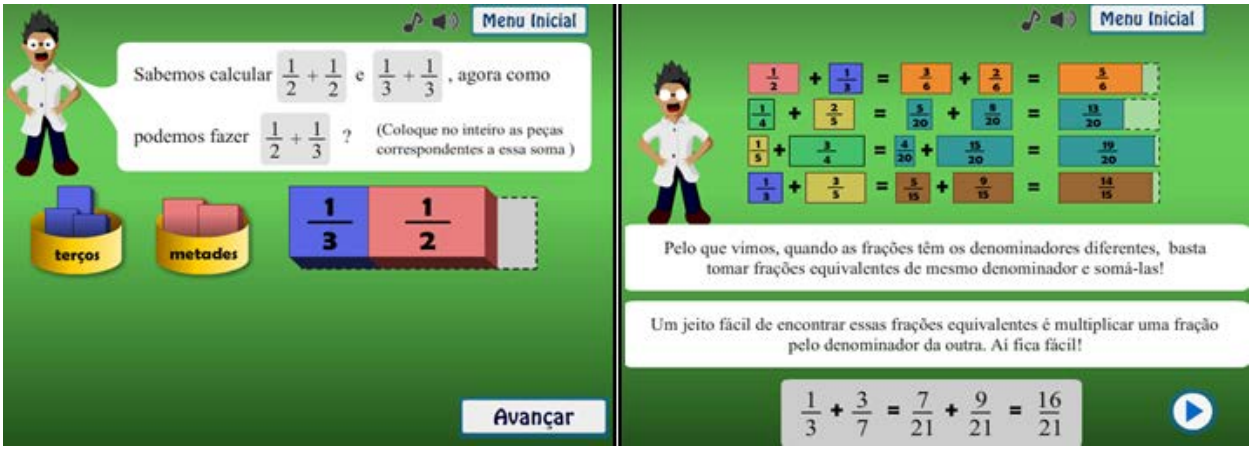


Figura 2. Referente à segunda fase do Objeto de Aprendizagem "Soma e Subtração de Frações".

Este objeto, representado na Figura 2, encontra-se dividido em quatro eixos. O primeiro eixo visa ensinar o aluno a somar frações de denominadores iguais; já o segundo aborda subtração de frações. O terceiro eixo focaliza soma de frações com denominadores diferentes, enquanto o quarto trata de subtração de frações com denominadores diferentes. No caso da tela representada no lado esquerdo da Figura 2, observa-se que há peças de cores diferentes (azul e vermelho). Essas peças são dispostas de forma que os usuários possam manipulá-las, dando-lhes a possibilidade de observar a parte do todo que esta soma de frações representa. Já a tela apresentada no lado direito da Figura 2 traz uma síntese acerca do assunto, na qual o aluno pode se basear anteriormente a resolver os exercícios propostos na sequência da atividade.

Além da fase de introdução dos conceitos, composta pelos quatro primeiros objetos descritos, tem-se a próxima fase que consiste em retomar estes conceitos e aplicá-los em jogos cujas dinâmicas são conhecidas pelos alunos, composto por um dominó (referente ao objeto 5), um jogo da memória (objeto 6) e um quebra-cabeça (objeto 7). Para exemplificar, é apresentada na Figura 3 a seguir uma ilustração do "Quebra-Cabeça das Frações" (objeto 7), que tem por propósito retomar de forma divertida o bloco de operações com frações (tratado anteriormente nos objetos 2, 3 e 4).

Figura 3. Telas ilustrativas do jogo "Quebra-Cabeça das Frações".

Esse jogo, último objeto desenvolvido, consiste em várias partidas. Em cada uma delas, uma operação matemática envolvendo frações é gerada (como ilustrado na tela apresentada no lado esquerdo da Figura 3). Para liberar uma peça do quebra-cabeça, o jogador precisa resolver a operação proposta. Cada operação oferece quatro alternativas, dentre as quais apenas uma é a correta. Caso o jogador erre, precisará gerar uma nova pergunta contendo uma operação diferente, como visto na tela do lado direito da Figura 3. O aluno só terminará o jogo quando liberar todas as peças e colocá-las corretamente nos respectivos espaços.

Aspectos metodológicos da aplicação dos objetos

A aplicação das atividades ocorreu junto aos alunos da disciplina "Prática de Ensino em Matemática I" de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública brasileira, ministrada pela primeira autora deste trabalho. Essa disciplina tem como um dos propósitos abordar metodologias alternativas de ensino e aprendizagem de matemática. Por isso, supôs-se oportuna a realização desta aplicação com os alunos desta disciplina. Participaram da aplicação oito alunos, número total de inscritos na disciplina em questão.

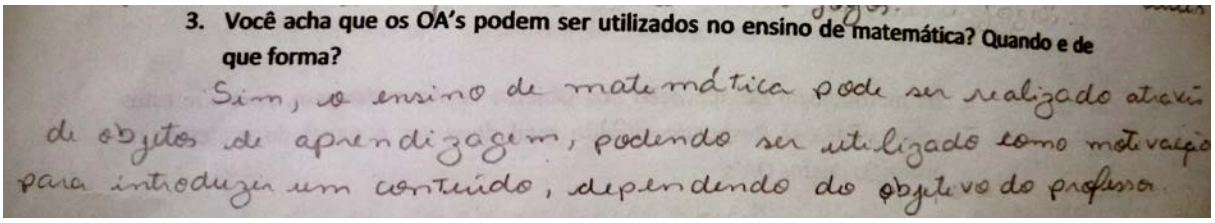
A aplicação ocorreu no mês de junho de 2013, se deu em três dias, totalizando 6 horas/aula e seguiu as seguintes etapas: (a) apresentação breve da atividade a ser desenvolvida com a turma; (b) aplicação de um questionário inicial para verificar os conhecimentos prévios da turma, com respeito à utilização dos OA's no processo de ensino e aprendizagem; (c) aplicação dos OA's; (d) aplicação de um questionário final de coleta de opiniões, reflexões e sugestões da turma referente aos OA's.

O questionário inicial, composto por onze questões, teve por objetivo investigar os conhecimentos e opiniões dos alunos sobre o tema "Objetos de Aprendizagem enquanto um recurso didático tecnológico e sua utilização no ensino de matemática". Também se buscou conhecer a visão da turma acerca de aspectos importantes tanto no desenvolvimento dos objetos (funcionalidade), quanto na aplicação dos mesmos (metodologia). Já o questionário final foi específico para os Objetos de Aprendizagem utilizados na aplicação. Este último questionário continha sete questões, iguais para cada um dos objetos, que tiveram como propósito coletar as opiniões dos futuros professores de Matemática acerca da funcionalidade dos objetos, da metodologia empregada, dos aspectos estruturais, do potencial pedagógico destes materiais, dentre outros.

Discussões da aplicação

Por meio de uma avaliação da aplicação dos Objetos de Aprendizagem junto aos alunos do curso de Licenciatura em Matemática, feita através da análise dos questionários inicial e final, foi possível refletir sobre a finalidade dos OA's e avaliar o emprego destes objetos no processo do ensino e aprendizagem da matemática. Além disso, os licenciandos posicionaram-se em relação aos aspectos metodológicos inerentes à proposta apresentada e à utilização do lúdico em ambientes virtuais.

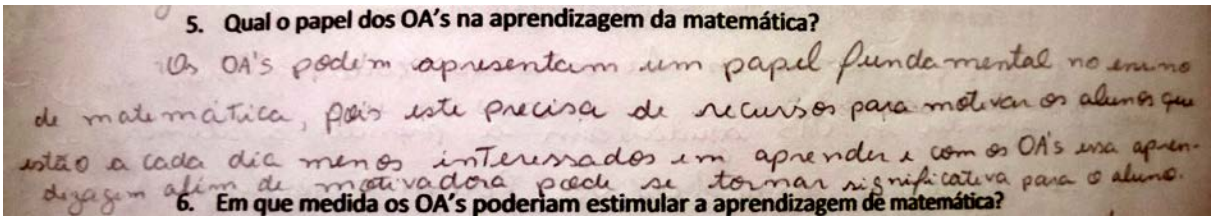
Quanto à análise do questionário inicial, notou-se que, para estes futuros professores, os OA's podem motivar os alunos e promover uma aprendizagem significativa. Entretanto, a utilização dos objetos estaria condicionada ao objetivo do professor, conforme aponta resposta colocada na Figura 4.


3. Você acha que os OA's podem ser utilizados no ensino de matemática? Quando e de que forma?

Sim, o ensino de matemática pode ser realizado através de objetos de aprendizagem, podendo ser utilizado como motivação para introduzir um conteúdo, dependendo do objetivo do professor.

Figura 4. Resposta de um dos alunos referente à terceira questão do Questionário Inicial.

Além do aspecto observado acima, as respostas à outra questão, também do questionário inicial envolvendo a finalidade dos OA's, apresentam uma reflexão sobre qual seria o papel dos Objetos de Aprendizagem na aprendizagem de matemática. Na opinião dos participantes desta pesquisa, a função dos AO's é de auxiliar o professor na exposição e construção dos conteúdos e favorecer uma aprendizagem significativa motivando os alunos, como é possível observar na figura 5.


5. Qual o papel dos OA's na aprendizagem da matemática?

Os OA's podem apresentam um papel fundamental no ensino de matemática, pois este precisa de recursos para motivar os alunos que estão a cada dia menos interessados em aprender e com os OA's essa aprendizagem além de motivadora pode se tornar significativa para o aluno.

6. Em que medida os OA's poderiam estimular a aprendizagem de matemática?

Figura 5. Resposta de um dos alunos referente à questão cinco do Questionário Inicial.

Em outras questões do questionário inicial, os licenciandos apontaram que através da utilização de OA's a aprendizagem de matemática pode se tornar mais divertida (resposta apresentada à questão nove), desenvolvendo, ainda, outros saberes que não são necessariamente matemáticos (questão oito). Também foi citado o potencial dos OA's em desenvolver habilidades como de trabalhar em grupo, de investigar e de construir estratégias de resolução de problemas. Contudo, eles salientaram que embora possa promover todos estes aspectos, os OA's necessitam ter uma boa funcionalidade, tanto no sentido técnico quanto no sentido didático (questão 10, item a).

De acordo com os licenciandos, no desenvolvimento dos objetos é necessário se atentar à sua organização, ou seja, garantir um layout favorável e uma linguagem adequada ao público-alvo. Também é preciso ter coerência entre os conteúdos e apresentar clareza em seus objetivos. Além disso, os licenciandos comentaram ser importante que estes OA's sejam de fácil acesso e

manipulação e, por fim, lembraram que estes devem aguçar a curiosidade dos alunos. Ainda tendo todas essas características, os participantes desta pesquisa enfatizaram ser essencial o papel do professor durante a aplicação (resposta à questão 10, item b). Para eles, o professor deve: elaborar bem as aulas para saber quando utilizar os OA's; conhecer bem os objetos a serem trabalhados para esclarecer possíveis dúvidas; orientar seus alunos e garantir o correto manuseio dos objetos; traçar objetivos claros para que as atividades não sejam apenas brincadeiras sem sentido para os alunos; e ser um facilitador e mediador durante as atividades, motivando seus alunos.

Através da comparação dos questionários respondidos, foi possível verificar se os aspectos apresentados como importantes na elaboração e aplicação de objetos se aplicavam aos objetos testados. No questionário final, referente especificamente aos materiais utilizados, percebeu-se, de modo geral, pelas respostas à primeira questão, que os licenciandos gostaram dos Objetos de Aprendizagem que lhes foram apresentados. Eles fizeram comentários positivos sobre o aspecto lúdico e visual que os OA's podem proporcionar aos alunos; e sobre a forma diferenciada e motivadora de abordar frações, entre outros. Vale ressaltar que um dos respondentes colocou que alguns dos objetos "são bastante dinâmicos e desafiadores em fatores que vão além do raciocínio matemático".

Em relação à metodologia empregada nos objetos, abordada na segunda questão do questionário final, os alunos consideraram que tal abordagem ajudaria na direção de uma aprendizagem mais significativa aos alunos. Inclusive, um aluno elogiou a forma como os materiais se apresentaram: começando com exemplos mais simples e partindo, paulatinamente, para uma generalização, segundo relatos deste aluno: "Essa generalização é feita de modo gradativo, onde um aluno por si só, consegue aprender os conteúdos." Nesta mesma linha de raciocínio, outro aluno descreveu os objetos por etapas, como segue:

> Nos cinco primeiros, através dos tutoriais presentes, é possível compreender todo o raciocínio e a ideia que cada objeto quer transmitir sem grandes dificuldades. A questão visual contribui para despertar a atenção e curiosidade dos alunos que poderão aprender o conteúdo 'se divertindo'. Já o sexto objeto, o jogo da memória, requer muita habilidade do aluno e permite trabalhar não só o conteúdo de frações como a questão da memória e da atenção/concentração. Além disso, possui traços característicos de uma brincadeira, pela razão de se basear em regras de um jogo da memória tradicional. O sétimo objeto também é característico de jogo, o quebra cabeça, o que pode despertar uma maior curiosidade dos alunos. O detalhe nesta atividade que faz toda a diferença é o fato de que só é possível montar o quebra cabeça à medida que o aluno acerta os cálculos (ou seja, ele tem um desafio de responder corretamente para obter mais uma peça), e para isso, é necessário aplicar todo o conhecimento visto nos demais objetos de aprendizagem apresentados. Outra questão que se pontua positivamente é a linearidade dos objetos de acordo com os objetivos que se pretende alcançar e dessa forma; acreditamos que isso contribui para uma melhor aprendizagem dos alunos. Por exemplo, o quebra cabeça é um apanhado geral de todo o conhecimento construído nos outros objetos de aprendizagem. (resposta de um dos participantes da pesquisa).

Outros itens colocados no questionário final foram quanto à contribuição que estes objetos podem trazer aos alunos (terceira questão) e quanto à potencialidade pedagógica destes (referente à quarta questão). Sobre isso, uma licencianda colocou que o lúdico funciona como um expressivo facilitador na aprendizagem dos alunos, chamando suas atenções e fazendo com que eles queiram aprender "porque sai um pouco daquela rotina de papel e lápis; sai do método

tradicional". Outro licenciando colocou que "todos esses objetos podem trazer consequências positivas para a aprendizagem dos alunos, uma vez que aborda o conteúdo de forma dinâmica atingindo a motivação deles". Além disso, eles citaram como ponto positivo, no quesito pedagógico, os tutoriais[2] curtos seguidos de momentos em que o aluno deve agir/fazer presentes nos objetos.

Por conseguinte, analisando os questionários (inicial e final) foi possível observar que, para os licenciandos, que participaram desta aplicação, os objetos podem tornar o ensino de matemática mais divertido, motivando os alunos, proporcionando-lhes vivências que os auxiliam no desenvolvimento de outros saberes e habilidades (que não são apenas matemáticos), facilitando a aprendizagem e a assimilação através da utilização de situações familiares aos alunos. Eles elogiaram os OA's aplicados por apresentarem coerência entre a metodologia e a forma de apresentação dos conteúdos. Além disso, listaram alguns aspectos em relação à funcionalidade e estrutura, os quais são importantes em objetos de aprendizagem, como ter layout favorável, linguagem adequada ao público-alvo, coerência entre os conteúdos, ser claro em seus objetivos, ser de fácil acesso e manipulação e, por fim, aguçar a curiosidade dos alunos. Nestes quesitos, pelo questionário final, observou-se que, de maneira geral, os objetos de aprendizagem aplicados conseguiram atingir uma boa funcionalidade e uma estrutura adequada. Igualmente, como visto em respostas de ambos os questionários, o aspecto "lúdico" foi apontado várias vezes como um facilitador na aprendizagem, principalmente porque pode auxiliar disciplinas mais abstratas, como é o caso da matemática. Notou-se, sobre este ponto, que os participantes dessa pesquisa consideraram os OA's aplicados como atividades lúdicas que despertam a curiosidade dos alunos e, potencialmente, facilitam a aprendizagem de frações por se apresentarem através de jogos ou atividades de dinâmicas conhecidas pelos alunos, como é caso do jogo da memória.

Conclusão e considerações finais

O fato de muitos conteúdos de matemática ser concebidos pelo senso comum como "de difícil aprendizagem" pode estar relacionado à maneira como esses são apresentados em sala de aula: muitas vezes de forma "obsoleta, desinteressante e inútil" (D'Ambrosio, 1991). Assim, a fim de proporcionar um ensino de matemática mais prazeroso ao aluno, surgem novos recursos visando aguçar seu interesse. Neste aspecto, os recursos tecnológicos – dentre estes, o computador – ganham grande destaque. Os Objetos de Aprendizagem aplicados neste trabalho foram desenvolvidos com o intuito de contribuir para um ensino de matemática que permita ao aluno uma participação mais ativa na construção de seu conhecimento, através da interação com o computador (por meio de abordagens alternativas e com uma adequada orientação do professor).

Foi notável o bom recebimento dos objetos de aprendizagem pelos futuros professores de matemática que participaram da aplicação desta pesquisa. Em relação à metodologia empregada nos objetos, os licenciandos consideraram que a mesma ajudaria na direção de favorecer uma aprendizagem mais significativa aos alunos. Segundo eles, os objetos podem deixar a aprendizagem de matemática mais prazerosa, motivando os alunos, proporcionando-lhes vivências que os auxiliam no desenvolvimento de outros saberes e habilidades (que não são apenas matemáticos), facilitando assim a aprendizagem e a assimilação dos conceitos

[2] Tutorial é uma ferramenta, podendo ser tanto um programa de computador quanto um texto, contendo ou não imagens, que auxilia o processo de aprendizagem exibindo passo a passo o funcionamento de algo.

envolvidos. Por fim, notou-se, sobre esse ponto, que os licenciandos consideraram os objetos de aprendizagem como atividades lúdicas que despertam a curiosidade dos alunos e, potencialmente, facilitam a aprendizagem de frações, pois os OA's focalizados neste trabalho se apresentam através de jogos e dinâmicas conhecidas pelos alunos.

Retomando o que Macedo (2000) aponta, sobre a maneira pela qual uma atividade é trabalhada: "qualquer jogo pode ser utilizado quando o objetivo é propor atividades que favorecem a aquisição de conhecimento. A questão não está no material, mas no modo como ele é explorado (....)" (Macedo & Petty, pp.24, 2000). Diante dessa consideração teórica, é possível observar que não apenas o objeto, mas também a forma como o mesmo é apresentado e trabalhado, é de fundamental importância quando se tem como meta a aprendizagem efetiva e significativa.

Isto foi também destacado pelos os futuros professores de matemática, os quais alertaram para algumas questões relacionadas à forma de aplicação dos objetos e ao papel do professor. Este último deve planejar bem as aulas para saber quando utilizar os OA's; conhecer bem os objetos a serem trabalhados para esclarecer possíveis dúvidas; orientar seus alunos e garantir o correto manuseio dos mesmos; traçar objetivos claros para que os objetos não sejam apenas uma brincadeira sem sentido e ser um mediador durante as atividades (motivando seus alunos). Outros aspectos também foram destacados como importantes em se tratando de objetos de aprendizagem, a saber, ter layout favorável, linguagem adequada ao público-alvo, coerência entre os conteúdos, ser claro em seus objetivos, ser de fácil acesso e manipulação e, também, aguçar a curiosidade dos alunos.

Por fim, percebeu-se nesta pesquisa que apresentar e discutir sobre os objetos de aprendizagem com os futuros professores de matemática foi importante por proporcionar este tipo de experiência em cursos de formação de professores, visto que foi uma oportunidade deles refletirem sobre a utilização de recursos tecnológicos e de abordagem alternativas no processo de ensino e aprendizagem de matemática em cima de uma proposta pedagógica que caminha nesta direção.

Agradecimentos

Às Pró-reitorias da Universidade de São Paulo: de Pesquisa (Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica) e de Graduação (Programa Ensinar com Pesquisa); pelo apoio a subprojetos que colaboram com o projeto de pesquisa como um todo. A todos que direta ou indiretamente contribuíram em algum momento com a pesquisa realizada.

Referências e bibliografia

Almeida, A. *Ludicidade como instrumento pedagógico*. 2009. Recuperado de http://www.cdof.com.br/recrea22.htm

Araujo, I. R. O. (2000). *A utilização de lúdicos para auxiliar a aprendizagem e desmistificar o ensino da matemática*, P.136. Dissertação (Mestrado) - Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Santa Catarina.

Brasil (País). Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental.(1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais: introdução aos parâmetros curriculares nacionais*. Brasília: MEC/SEF. 126 p.

Castro, R. A.; Oliveira, N. (2009). Número fracionário: estudo histórico, epistemológico e da transposição didática. *Revista de Educação*, vol. XII, Nº13, p. 60 – 68.

Curry, R.; Nunes L. C. (2008). Contribuição dos Softwares Educativos na Construção do Conhecimento de Forma Lúdica. *Linhas Críticas*, Brasília, v. 14, n. 27, p. 227-246.

D'Ambrosio, U. (1997).Matemática, Ensino e Educação: uma proposta global. São Paulo: temas & debates.

Damico, A. (2006). *Uma Investigação Sobre a Formação Inicial de Professores de Matemática Para o Ensino de Números Racionais no Ensino Fundamental*. Resumo do projeto de tese do doutorado. Lisboa.

Gama, C. L. G. (2007). *Método de Construção de Objetos de Aprendizagem com Aplicação em Métodos Numéricos*. P.210. Tese de doutorado. Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia - UFPR. Curitiba/Paraná – Brasil. Recuperado de <http://www.ppgmne.ufpr.br/arquivos/teses/9.pdf

Gil, A. (2008). Métodos e Técnicas de Pesquisa Social: Questionário; Entrevistas; Análise; e Interpretação. São Paulo: Atlas, P.109-134, P. 156-179.

IEEE – Institute of Electrical and Electronic Engineers. (2002). *Draft Standard for Learning Object Metadata*. Recuperado de http://ltsc.ieee.org/wg12/files/LOM_1484_12_1_v1_Final_Draft.pdf

Macedo, L. D., & Petty, A. L. S., Passos, N.C. (2000). *Aprender com Jogos e Situações-Problema.* Porto Alegre: Artes Médicas Sul.

Machado, A. I. (2011). *O lúdico na aprendizagem da matemática*. Recuperado de http://bdm.bce.unb.br/bitstream/10483/2120/1/2011_AparecidaItamaraMachado.pdf.

Meneghetti, R.C.G. & Bicudo, I. (2003). Uma discussão sobre a Constituição do Saber Matemático e seus Reflexos na Educação Matemática. *Bolema:* Boletim de Educação Matemática, no 19- ano 16- 2003, p. 58-72.

Meneghetti, R.C.G.; Barbosa, E. F. (2009). Os Números Racionais enquanto Objeto de Aprendizagem em Ambiente Computacional: atividades iniciais. IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. *Anais*… Taguatinga, p. 1-16.

Onuchic, L. R.; Allevato, N. S. G. (2008). As diferentes "personalidades" do número racional trabalhadas através da resolução de problemas. *Bolema*, Rio Claro, n. 31 (21), p. 79-102.

Onuchic, L. R.; Botta, L. S. (2009). Uma nova visão sobre o ensino e a aprendizagem dos números racionais. Revista de Educação Matemática, Publicação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, São Paulo, ano 5, n. 3, p. 5–11, 1997 apud CASTRO, R. A.; OLIVEIRA, N. Número fracionário: estudo histórico, epistemológico e da transposição didática. *Revista de Educação*, vol. XII, Nº13, p. 60–68.

Programme for International Student Assessment (Pisa). (2012). Resultados Gerais. Recuperado de http://educacao.uol.com.br/noticias/2014/04/01/alunos-brasileiros-ficam-entre-os-ultimos-em-teste-de-solucao-de-problemas.htm

Sistema de Avaliação da Educação Básica (SARESP). (2009). Resultados Gerais. Recuperado de http://saresp.fde.sp.gov.br/2009/pdf/1_Resultados_Gerais_Rede_Estadual.pdf.

Wiley, D. A. (1999). *Learning objects and the new CAI: So what do I do with a learning object?*. Recuperado de http://penta3.ufrgs.br/objetosaprendizagem/11wiley_traducao.doc

Tecnologias digitais na formação do professor de Matemática

Eline das Flores **Victer**
Universidade do Grande Rio
Brasil
elineflores@hotmail.com
Brasil
Adriano Vargas **Freitas**
Instituto de Educação de Angra dos Reis, Universidade Federal Fluminense
Brasil
adrianovargas@id.uff.br
Renan Marques **Pereira**
Universidade do Grande Rio
Brasil
renanmarques89@gmail.com

Resumo

Neste trabalho analisamos a formação do professor que ensina matemática na educação básica e os possíveis impactos nas práticas pedagógicas desses profissionais a partir da utilização de tecnologías digitais. Trazemos para a nossa reflexão um exemplo de ferramenta para o ensino da matemática, o *software* Geogebra. Realizamos um estudo exploratório com abordagem qualitativa através de oficinas direcionadas a profesores.A coleta de dados se efetivou a partir de questionário com questões semiestruturadas e relatos espontâneos em um grupo de quatorze profesores atuantes na educação básica. Dentre os resultados, destacamos que a formação inicial não dá conta da complexidade das novas possibilidades comunicacionais e pedagógicas proporcionadas pelas tecnologias digitais. Ressaltamos que as aceleradas mudanças promovem contínuas modificações na postura desses profissionais frente às novas formas comunicacionais proporcionadas pela cibercultura. Acreditamos ser emergente que modificações sejam pensadas,implementadas e avaliadas.

Palavras chave: formação do professor, ensino de matemática, tecnologias digitais.

Considerações iniciais

Buscamos neste estudo analisar a formação do professor que ensina matemática, em especial da escola básica, e os possíveis impactos que podem ocorrer nas práticas pedagógicas desses profissionais a partir da utilização de tecnologias digitais. Dois questionamentos que consideramos primordiais nos nortearam nesta pesquisa de metodologia qualitativa e de caráter exploratório (Gil, 2009). Quais são as novas demandas que os recursos tecnológicos digitais trazem para a formação/atuação do professor? O Geogebra[1] pode auxíliar na prática pedagógica do professor de matemática?

[1] O autor do Geogebra (http://www.geogebra.org/cms/en/info), Markus Hohenwarter, o define como "um *software* gratuito e multiplataforma de Matemática dinâmica para todos os níveis de ensino. Ele integra

Tomamos como ponto de partida o entendimento de que é primordial em nossa sociedade, cada vez mais envolvida em facilitações de produção e acesso a informações, a percepção por parte do professor de que sua formação não se finda no momento da obtenção do seu diploma de sua licenciatura. Essa percepção, ao nosso ver, significa apenas um recomeço, uma nova etapa de um proceso formativo. Talvez, uma tomada de consciência do processo de conhecimento e de suas fragilidades no campo academico e profissional.

Pesquisas recentes, conforme assinala Freitas (2009, 2011), indicam que boa parte das dificuldades enfrentadas por professores quanto a atualização do uso de tecnologias digitais em sala de aula, se referem a problemas de disponibilidade de tempo para dedicação, e dinheiro para investimento em novos cursos. Tais considerações nos remetem as análises de Kenski (2008) que defende não ser possível "impor aos professores a continuidade da autoformação, sem lhes dar a remuneração, o tempo e as tecnologias necessárias para sua realização" (Kenski, 2008, p.106).

Atento para o distanciamento entre a prática pedagógica do professore e a realidade vivenciada pelos estudantes, Silva (2013) argumenta que as máquinas assumirão em ritmo cada vez mais crescente os trabalhos rotineiros e a confecção de cálculos intensivos. Desta forma, os desafios que se apresentam para as novas gerações e, por consequência, para os professores, formadores dessas gerações, envolverá a busca de resolução de problemas concretos que incluirá ferramentas computacionais e conhecimento dos significados, das capacidades e limitações das tecnologias.

Essas ideias significam remodelar/adaptar o ambiente escolar para que seja propício ao desenvolvimento da inteligência enquanto "capacidade multiforme de adaptação às diferenças e às mudanças" (Perrenoud, 1999, p.15). Em especial, destacamos as mudanças decorrentes do pertencimento ao mundo em constante avanço tecnológico. Tais mudanças vêm exigindo adaptação contínua dos professores às novas formas comunicacionais proporcionadas pela cibercultura (Levy, 1999)[2], de forma a tornarem-se profissionais capazes de "lidar com inúmeros desafios suscitados pela escolarização de massa em todos os níveis de ensino" (Tardif, 2007, p.114).

As análises dessas demandas nos levam a questionar o quão distante estão os atuais cursos de formação de professores de matemática dos reais problemas que enfrentarão estes docentes ao entrarem na sala de aula da educação básica. Em paralelo, nossa análise levanta reflexões sobre os novos papeis do professor; o que significa ser um bom professor de matemática e quais as formas de eliminar e⁄ou complementar as lacunas existentes na formação, de maneira que o professor se sinta à vontade para lidar com as crescentes potencialidades das novas formas tecnológicas de informações e comunicações.

Destacamos que esta formação deva significar que este profissional deixe de ser simples consumidor de tecnologias e torne-se pesquisador de caminhos que direcione suas aulas para a aprendizagem consistente e dinâmica, podendo também, ser divulgador dessas novas possibilidades.

---

geometria, álgebra, planilha eletrônica, gráficos, estatística e cálculo em um único ambiente fácil de usar". Atualmente está na sua versão 4.4.23.0 e pode ser encontrado no *site:* http://www.geogebra.org/cms/pt_BR/download/. Acesso em: 6 abr. 2014.

[2] De acordo com Levy (1999), cibercultura significa a forma sociocultural que advém de uma relação de trocas entre a sociedade, a cultura e as novas tecnologias via internet e suas ferramentas computacionais.

Os estudos de Buckingham(2008) convergem nessa linha de análise, destacando que devemos ter consciência da urgência na busca de formas de inclusão digital do professor de modo que as potencialidades comunicacionais e pedagógicas dessas tecnologias tenham maior espaço em suas aulas, afinal, os meios digitais têm "enorme potencial para o ensino, mas é difícil realizar este potencial se eles são considerados apenas tecnologias, e não formas de comunicação" (Buckingham, 2008, p.9).

Lucena (2003) ressalta que, nos últimos anos, propostas que visam melhorar nosso sistema educacional têm exigido decisões fundamentais e criativas por parte de equipes responsáveis no sentido de propor mudanças efetivas na educação. Dentre tais decisões, a de inserir tecnologias digitais, com ênfase no computador e na internet no processo educacional para que a escola possa construir ambientes mais próximos da realidade cotidiana de nossos estudantes, exploradores das "inúmeras possibilidades disponibilizadas pelas novas tecnologias e tudo o que elas representam em termos de potenciais para a produção e veiculação de conhecimento" (Lucena, 2003, p. 237), bem como de outras facilidades relacionadas à vida, ao trabalho e ao lazer.

A utilização das ferramentas computacionais a favor do Ensino da Matemática representa um novo desafio na formação dos profesores, Silva (2013) destaca que é fundamental permitir que os profesores conheçam e saibam analisar problemas da realidade auxiliado pelas tecnologias computacionais.

> Não será admissível que a análise de situações da vida real identificando modelos matemáticos que permitam a sua interpretação e resolução seja exequível sem o recurso a meios computacionais, pelo menos numa grande classe de problemas mais realistas. O contato dos alunos com os modelos matemáticos não se poderá restringir à classe daqueles que "dão contas certas". (...) Não é possível compreender a relação entre o avanço científico e o progresso da humanidade sem referir o papel das novas tecnologias da informação e comunicação e suas relações com as ciências básicas. A formulação de "generalizações a partir de experiências" será em grande parte exequível apenas com o auxílio das capacidades numéricas ou gráficas de uma calculadora científica ou gráfica ou de um computador. (Silva, 2013, p.11).

Compreendemos que preparar o professor de matemática da educação básica para dar conta das novas exigencias das habilidades e competências não significa uma simples substituição da lousa e giz (ou do cálculo de papel e lápis) pelo artifício de cálculo por meio de uma tecnologia, mas utilizar criticamente as potencialidades pedagógicas dessas ferramentas, preparando os alunos para uma melhor interação com essas ferramentas.

Essas defesas se apresentam em concordância com análises internacionais que indicam que Educação, Ciência e Tecnologia são as três chaves da nova era (Sevcenko, 2007). Consideramos necessário que tais elementos estivessem presentes em nossa proposta de oficina para utilização de *softwares* educacionais nas aulas de matemática, em destaque, o Geogebra.

Consideramos também que a atenção para a formação do professor que ensina matemática colocam em foco uma área de conhecimento que comumente gera diversos receios nos alunos e, muitas vezes, nos próprios professores que atuam na educação básica. Entre tanto, parcela maior costuma relatar a percepção de que atualmente não existiria a necessidade de dominarem uma determinada linguagem de construção de *softwares*, pois já existem diversas opções de simuladores, construtores de gráficos e jogos educacionais. Mas, verificaram também que, embora muitos desses programas já apresentem ambiente bastante "amigável", ainda exigem

estudo criterioso para que sejam levados para o interior da sala de aula e deles se possa extrair a melhor forma pedagógica de ampliar a qualidade do trabalho pedagógico que os envolva. Consideramos este como um dos principais pontos que tornam nossa proposta bem atualizada e contributiva para a formação destes profissionais.

Atividades no Geogebra: formação/inclusão do professor

A apresentação do uso da tecnologia na sala de aula para os professores de matemática que atuam na educação básica não simboliza a solução dos problemas educacionais, "pois sabemos que a simples presença da tecnologia na sala de aula não garante qualidade nem dinamismo à prática pedagógica" (Leite *et al.*, 2012, p. 10). O planejamento e escolha das atividades possui uma importância significativa para que a proposta de formação de professores alcance alguns objetivos, tais como levá-los a repensar sua própria metodologia em sala de aula, analizar a utilização da tecnologia e enriquecer o Ensino da Matemática.

As atividades apresentadas neste trabalho propõe explorar vertentes que somente com o quadro e giz se apresentariam como um caminho mais árduo para o professor lecionar. O dinamismo que o ambiente do Geogebra pode proporcionar nas aulas é um fator que se destaca nas construções de gráficos, as quais "podem ser manipuladas de forma que as propriedades e relações dos objetos construídos sejam preservadas" (Giraldo *et al*., 2012 p. 120), tendo sido esta, por sinal, uma das razões de termos selecionado tal *software* para nossa análise e discussão.

A proposta de oficinas, para os profesores, envolveram o seguinte roteiro: (1) apresentação e debate de questões relacionadas a utilização de tecnologias digitais nas aulas de matemática e a lacuna na formação dos professores para que isto aconteça. São apresentados resultados de recentes pesquisas na área da educação matemática e propostas de leituras específicas do tema; (2) Em seguida, são apresentadas as ferramentas básicas disponíveis no Geogebra, para o (re)conhecimento das possibilidades e limites deste *software*. Analisamos também algumas formas e ideias para a construção de novas ferramentas/atividades pedagógicas envolvendo o seu uso, assim como os caminhos que facilitam o encontro de diversas outras já prontas que foram socializadas por professores de diferentes nacionalidades no ambiente da internet. (3) Por fim, analizamos algumas ferramentas/atividades originais, que produzimos para nossas aulas de matemática da educação básica, e que tiveram sua eficácia previamente testada em salas de aula.

Para exemplificarmos essas atividades, podemos destacar duas que envolvem a construção das funções seno e cosseno, geralmente abordadas no primeiro ou segundo ano do Ensino Médio da Educação Básica brasileira. Nos livros didáticos, devido à própria característica destes veículos, os gráficos dessas funções são apresentados de forma estática. Na proposta utilizando o Geogebra os professores e seus alunos podem visualizar (Figuras 1 e 2) e entender o porquê dessas funções serem periódicas.

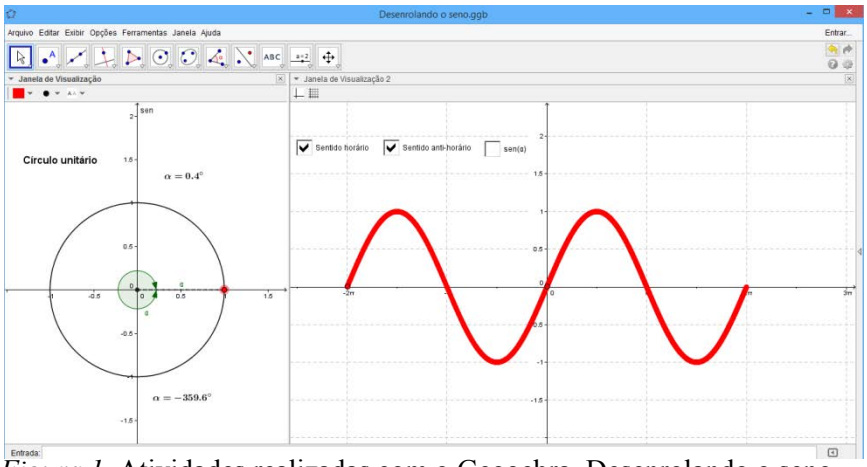


Figura 1. Atividades realizadas com o Geogebra. Desenrolando o seno

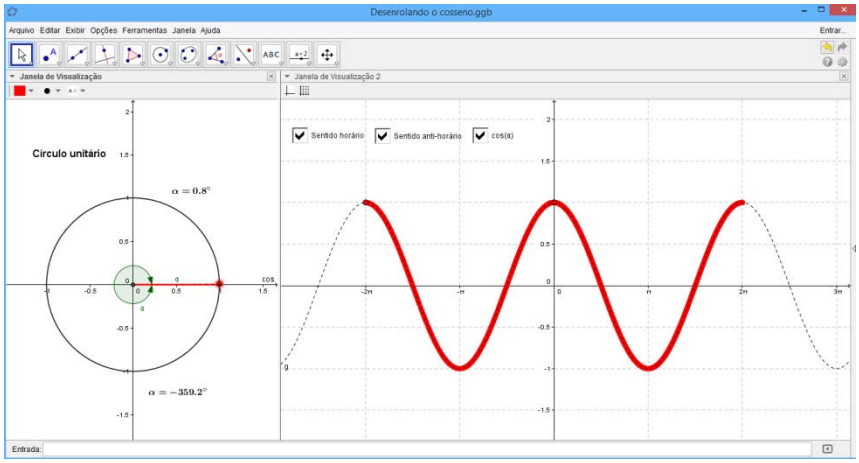


Figura 2. Atividades realizadas com o Geogebra. Desenrolando o cosseno.

Através do círculo unitário (na parte esquerda das Figuras 1 e 2) pode-se manipular o ponto que pertence ao mesmo, e concomitantemente formando-se o gráfico da função ao lado. As atividades apresentadas acima são caracterizadas por visualizações, e podem explorar os seguintes tópicos: ciclos; intervalos; sentidos horário e anti-horário; porque uma função começa na origem (0,0) e outra não; seno e cosseno dos ângulos notáveis; construção de gráfico, entre outros. As atividades estão disponíveis no GeogebraTube[3].

Análise dos dados de nosso estudo

Nossa pesquisa utilizou o modelo qualitativo exploratório cuja principal finalidade é "desenvolver, esclarecer e modificar conceitos e ideias" (Gil, 2009, p.27). Após a proposição da etapa (3) descrita no tópico anterior, aplicamos a interrogação direta aos profesores participantes da oficina a respeito de questões relacionadas a utilização de tecnologías. Para isso elaboramos um questionário com perguntas do tipo semiabertas e recolhemos relatos espontáneos.

[3] http://www.geogebratube.org/?lang=pt_BR. Site pertencente ao Geogebra para que os usuários disponibilizem os materiais (arquivos) criados. As atividades comentadas estão disponíveis nos *links*: http://www.geogebratube.org/material/show/id/92290 e http://www.geogebratube.org/material/show/id/92280. Acesso em: 6 abr. 2014.

Do total de quatorze (14) professores envolvidos nas atividades da oficina, onze (11) aceitaram participar da pesquisa, sendo quatro(4) sujeitos do sexo feminino e sete (7) do sexo masculino. Com relação à experiência de regência de aulas de matemática na educação básica, 10 apontaram que já tinham atuado nesta escolaridade, em escolas públicas ou particulares de municípios próximos do Rio de Janeiro. Com relação ao tempo dessa experiência, verificamos que três(3) indicaram possuírem até 3 anos, um (1) indicou até 6 anos,quatro (4) indicaram até 10 anos e dois(2) indicaram de 15 a 24 anos de atuação como professor.

Questionamos em seguida a respeito da quantidade média de aulas semanais que estes professores lecionavam. Neste quesito encontramos a quantidade mínima de 20 aulas semanais (2 professores), chegando a até impressionantes 70 aulas (1 professor).

Verificamos que todos possuíam computadores, mas apenas 3 responderam que receberam suas máquinas de projetos de inclusão tecnológica do profesor que atua na rede pública (estadual ou municipal).

Seis professores responderam já terem frequentado a algum tipo de curso de formação para o uso geral dessas máquinas. A mesma quantidade respondeu já ter participado de cursos de formação específica para o uso de computadores na área de matemática. Entretanto, desse grupo, 3 indicaram que tais cursos não foram suficientes para que se sentissem seguros para a utilização de tecnologias digitais no ambiente escolar.

Com relação aos professores que indicaram que utilizam periodicamente ferramentas computacionais em suas aulas, verificamos que sua utilização se resume basicamente ao formato de substituição para antigas tecnologias, tais como a televisão e o videocassete. Pois todos indicaram utilizar o computador basicamente para exibição de filmes, documentos e apresentações de *slides*. Seis deles indicaram utilizar programas pedagógicos, e apenas dois relataram trabalhar com pesquisas em sala de aula envolvendo o espaço da internet.

Nove indicaram já terem tido contatos prévios com o Geogebra, mas destes, apenas quatro comentaram que este contato ocorreu em disciplinas oferecidas no curso de licenciatura de matemática. Tal verificação nos remete às análises apresentadas nos primeiros tópicos deste artigo, em que diversos autores denunciam a precariedade que prevalece nesta área de formação dos professores, ao ponto de ignorarem em seus currículos espaços que sirvam para o contato e análise das potencialidades de utilização dos diversos recursos pedagógicos como forma de ampliar a qualidade do processo de ensino e aprendizagem em nossas escolas.

Diversos depoimentos convergiram para a defesa da promoção de projetos envolvendo a formação continuada de professores de matemática envolvendo discussões e propostas práticas a respeito da utilização de tecnologias digitais, como a que propomos neste estudo.

> Gostei das sugestões apresentadas na oficina, as enxergo como facilitadoras da construção do conhecimento. (Prof. K.).

> As oficinas oferecem a oportunidade de conhecermos o *software* em aplicações práticas onde pude com outros do meu conhecimento. O interessante é a percepção do quanto este *software* é intuitivo e a possibilidade de poder usá-lo tanto em álgebra quanto geometria ou cálculo. (Prof. G.).

> O *software* foi apresentado de forma bastante clara. Foi possível ter acesso a diferentes funcionalidades do programa. (...) O programa permite que algumas construções e demonstrações sejam visualizadas facilitando a compreensão do aluno. (Prof. I.).

> A oficina apresentada foi muito boa, pois trouxe informações importantes para auxiliarem e serem exploradas em sala de aula, dando uma visão concreta a assuntos abstratos. (Prof. F.).

Consideramos que os resultados obtidos neste estudo estão alinhados com indicações verificadas em nossas pesquisas anteriores (Freitas, 2009; Freitas e Leite, 2011) analisando que, com o desenvolvimento cada vez mais acelerado de tecnologias e novas ferramentas digitais, a formação do professor de matemática deve se moldar em novos paradigmas pedagógicos, envoltos em possibilidades de experiências que os capacitem a continuarem essa formação de forma autônoma.

Defendemos que a postura destes profissionais em pensar e repensar-se enquanto docentes "não só ocupados com tarefas didáticas, mas em uma dimensão maior que inclui o desenvolvimento de capacidades e competências para trabalhar em cenários diversos, interculturais e em permanente mudança" (Campos, 2007, p.17).

Esta nova escola estaria mais direcionada para a promoção para as novas gerações de estudantes cada vez mais acostumadas com as facilidades de comunicação proporcionadas por tecnologias digitais. Os ambientes escolares passariam a ser espaços propícios ao desenvolvimento crítico de suas diferentes potencialidades, ao reconhecimento do erro como parte do processo de construção do conhecimento, à descoberta, à simulação e à socialização de todas estas etapas formativas.

Considerações Finais

A crescente necessidade de repensarmos a formação inicial e continuada permeou este nosso estudo, mas, além de analisarmos as conjecturas de teóricos no assunto, apresentamos também uma proposta de inserção de atividades práticas que podem ser inseridas nesta formação com o objetivo de ampliá-la no quesito atualização para as potencialidades comunicacionais das tecnologias digitais. Consideramos que consiste neste ponto a principal contribuição de nosso estudo, ao proporcionar o contato direto com novas posibilidades de uso pedagógico de recusos tecnológicos.

Os dados analisados nos permitem verificar que os professores hoje, de uma forma geral, procuram se adaptar e se "modernizar" no que se trata ao modo de ensinar, ou ao menos percebem a necessidade dessa adaptação, pois utilizam periodicamente ferramentas computacionais em suas aulas. Entretanto, estes recursos ainda são utilizados muitas vezes como simples substitutos para "velhas" tecnologías, sem a percepção de suas outras potencialidades pedagógicas.

Vimos que por falta de preparação adequada, muitos profissionais consultados não conseguem utilizar tecnologias digitas em suas atividades em sala de aula, pois para isso há necessidade de estudos, é necessário que o professor faça cursos de capacitação, conheça os *softwares* e tenha tempo para preparar suas aulas e que possa estar sempre atualizado as novas tendências e tecnologias.

Consideramos que as oficinas, como as apresentadas em nossa proposta/estudo ao nosso grupo de professores participantes das atividades do Geogebra podem ser formas de capacitar continuamente esses professores, e poderiam estar integradas à formação inicial de professores, como possibildiade de inclusão digital centrada no binômios estudar-fazer e teoría/prática. Neste formato acreditamos que, mais do que uma simples sensibilização para seu uso, nossa proposta facilitaria a vivência crítica e adequada com as tecnologias, para a posterior utilização em

ambientes educacionais sem os comuns receios de errar que causam, por diversas vezes, o distanciamento desses recursos.

Referências

Buckingham, D. (2008). *Aprendizagem e cultura digital.* Ano XI, n. 44. Porto Alegre: Artmed..

Campos, M. R. .(2007). Profissão docente: novas perspectivas e desafios no contexto do século XXI. *In* UNESCO/CONSED: BALZANO, S. (org.) *O desafio da profissionalização docente no Brasil e na América Latina*. Brasília: Edições UNESCO.

Freitas, A. V. (2009). Mudanças na ação pedagógica do professor mediante a utilização de novas tecnologias. *Educação em Destaque*. Juiz de Fora: Minas Gerais, vol. 2.

FreitaS, A. V.; Leite, L. S. (2001). *Com giz e laptop: da concepção à integração de políticas públicas de informática*. Rio de Janeiro: Wak Editora.

Freire, P. (1996). *Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa*. São Paulo: Paz e Terra.

Gil, A. C. (2009). *Métodos e técnicas de pesquisa social*. 6ª ed. São Paulo: Atlas.

Giraldo, V.; Caetano, P.; MattoS, F. (2012). *Recursos Computacionais no Ensino de Matemática*. 1ª ed. Rio de Janeiro: SBM.

Hohenwarter, M. (2014). *Geogebra*. Disponível em: <http://www.geogebra.org/cms/en/info>. Acesso em: 6 abr.

Kenski, V. M. (2008). *Educação e Tecnologias: O novo ritmo da informação*. Campinas, São Paulo: Papirus.

Levy, P. (1999). *Education et Cyberculture*. Disponível em: http://www.caosmose.net/pierrelevy/pierrecyberedu.html. Acesso em: 24.05.2013.

Leite, L. S.; Pocho, C. L.; Aguiar, M. M.; Sampaio, M. N. (2012). *Tecnologia Educacional*: descubra suas potencialidades na sala de aula. 7ª ed. Petrópolis: Vozes..

Lucena, S. (2003). A internet como espaço de construção do conhecimento. In: ALVES, L.R.G.; NOVA, C. C. *Educação e Tecnologias: Trilhando caminhos*. Salvador: Editora da UNEB.

Perrenoud, P. (1999). *Construir as competências desde a escola.* Porto Alegre: Artmed

Sevcenko, N. (2007). *A corrida para o século XXI. No loop da montanha russa.* São Paulo: Companhia Das Letras.

Silva, J. C. (2013). *A formação de professores em novas tecnologias da informação e comunicação no contexto dos novos programas de Matemática do Ensino Secundário.* Universidade de Coimbra. Disponível em: http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/pessoal/matnti.html. Acesso em 24.05.2013.

Tardif, M. (2007). *Saberes Docentes e Formação Profissional.* Petrópolis, Rio de Janeiro: Vozes, 2007.

Un enfoque transdisciplinario de Cálculo potenciado por tecnología

H. E. **Bosch**
Universidad Tecnológica Nacional
Argentina
hbosch@funprecit.org.ar
M. S. **Bergero**
Funprecit
Argentina
msbergero@gmail.com
M. A. **Di Blasi** Regner
Universidad Tecnológica Nacional
Argentina
mario.diblasi@gmail.com
M. C. **Rampazzi**
Universidad CAECE
Argentina
mcrampazzi@gmail.com

Resumen

Se presenta un enfoque sobre cómo enseñar Cálculo considerando que la matemática debe integrarse en un tejido transdisciplinario de ciencias, tecnologías y aplicaciones a diversos aspectos de la vida. Ello implica que la enseñanza de matemática, particularmente de Cálculo, debe ligarse con aspectos de la vida real, intercambiando conceptos de otras ciencias y utilizando las tecnologías actuales en forma combinada. Se propone encuadrar la enseñanza de Cálculo en un marco conceptual de integración de Ciencias, Tecnología, Ingeniería y Matemática (STEM por sus nombres en inglés).Ello implica también que la obtención de datos experimentales sobre fenómenos de la vida real sea importante, tanto para la formulación de modelos como para la formación de los estudiantes. Como ejemplo de unidad didáctica se muestra la descripción matemática y física del movimiento uniformemente acelerado de un carro que se mueve sobre un riel inclinado. Se utiliza un sistema de registro, procesamiento y representación de datos como tecnología básica, aparte de programas de procesamiento y representación gráfica computacional. Se interrelaciona el concepto de derivada de una función con las definiciones de velocidad y aceleración instantánea del movimiento del carro. Se refiere la operación inversa a la derivación con la obtención del modelo que predice el desplazamiento del carro sobre un riel inclinado. Para que este enfoque pueda ser conducido por docentes de matemática, es necesario que éstos adquieran los conocimientos y prácticas necesarios en Workshops organizados por los investigadores que desarrollan este tipo de unidades didácticas.

Palabras clave: Cálculo, tecnología, transdisciplinaridad.

Introducción

Los libros y cursos clásicos de Cálculo enfocan su enseñanza desde un único punto de vista matemático proponiendo ejercicios generalmente abstractos, desligados de la vida real, resolviendo ecuaciones sin plantear los problemas que las generan.

La clave consiste en considerar que la educación en ciencias matemáticas tiene que ser parte de la ciencia de interés público. Se debe aprender ciencias matemáticas para resolver problemas, que es la demanda de la Sociedad. Resolver ecuaciones aisladas de contexto no significa una solución. Las soluciones son útiles cuando demuestran ser respuestas a problemas prácticos, con validación experimental, de ser posible.

La tecnología debería ser una componente integral de los métodos de enseñanza y no ser tratada, como es habitual, como una herramienta independiente de las aplicaciones educativas. La tecnología debe ser usada para ayudar al estudiante a interactuar con los contenidos de las ciencias y de matemática en una forma de promover un mayor entendimiento de ideas complejas, facilitar la solución de problemas complejos y crear nuevas oportunidades de educación.

Es necesario dar vuelta la página y plantear la enseñanza de Cálculo sobre la base de un nuevo enfoque transdisciplinario, usando la tecnología computacional y presentando problemas de la vida real. Existe actualmente una evidencia hacia un enfoque interdisciplinario del aprendizaje de las ciencias naturales y ciencias matemáticas. Esta tendencia es congruente con el concepto de educación STEM (Sciences, Technology, Engineering and Mathematics) ampliamente difundida en instituciones educativas del mundo. Se ha demostrado que los problemas de la vida real son esencialmente interdisciplinarios, de tal modo que las soluciones deben ser también enfocadas de la misma forma. Por otra parte, la educación STEM propugna un entrelazamiento equitativo entre sus componentes, lo cual implica que la tecnología debe ser integrada con las ciencias, la matemática y la ingeniería.

Se muestra en el presente trabajo un ejemplo de cómo debe introducirse la trans disciplinariedad y las tecnologías para enseñar conceptos básicos de Cálculo.

Marco conceptual y Metodología

Se adopta el marco conceptual de educación STEM, o sea la educación integrada de ciencias naturales y ciencias matemáticas potenciada por el uso de tecnologías electrónica e informática y sistemas computacionales de cálculo y representación gráfica. El marco conceptual también incluye el desarrollo de experiencias para proveer datos y elaborar un modelo que describa y prediga el comportamiento del sistema en observación. La modelización implica concebir algoritmos a partir de los resultados experimentales. Luego se resuelve matemáticamente el algoritmo, generalmente a partir de una ecuación diferencial con condiciones de contorno o iniciales dadas por la experiencia. El objetivo final es obtener una ecuación o sistema de ecuaciones que prediga o predigan el comportamiento del sistema.

En resumen, la metodología de diseño de recursos didácticos STEM debe estar basada sobre las siguientes características:

→ Resolución de problemas
→ Generar experimentos y estructurar modelos
→ Procurar trabajo en equipo
→ Procurar que alumnos aprendan a expresar sus conceptos y comunicar sus resultados.

Las experiencias de laboratorio proveen oportunidades para los alumnos de interactuar con el mundo real, usando herramientas, técnicas de colección de datos, modelos y teorías científicas. La estructuración de modelos sobre el comportamiento de fenómenos observados constituye una sólida base para el aprendizaje.

El interés de todo recurso didáctico con contenidos de las ciencias es que los estudiantes tengan una oportunidad de ejercitar su pensamiento más que su memoria, aprender a resolver problemas científicos en general y mejorar su experiencia y actitudes hacia el aprendizaje de las ciencias. En particular, los estudiantes deben aspirar a poseer ciertas cualidades básicas de todo estudioso de las ciencias, tales como:

- Cultivar una comunicación efectiva oral y escrita de las ideas científicas;
- Lograr un entendimiento básico del manejo de datos y los métodos estadísticos para tratarlos;
- Aprender a encarar modelos de la vida real utilizando métodos computacionales;
- Desarrollar el razonamiento científico;
- Entender la complejidad y la ambigüedad del trabajo empírico;
- Desarrollar habilidades prácticas;
- Desarrollar habilidades de trabajo en equipo.

Si bien este es un *desideratum,* la mayoría de estudiantes que han seguido cursos de ciencias durante los últimos 50 años no han ganado un entendimiento genuino de conceptos, prácticas y hábitos usados sobre disciplinas científicas. Lecciones dadas por el profesor, libros, ejercicios y problemas se han mantenido intactos durante el último medio siglo.

En el presente, la educación superior debe preparar graduados para la arena internacional, lo cual obliga a aprender nuevos conceptos, entender sistemas complejos, manejar grandes cantidades de datos , pensar en forma creativa y crítica, comunicar y colaborar. Este marco conceptual y metodología pueden aplicarse en los cursos básicos de matemática como una innovación en la concepción de la enseñanza de las ciencias matemáticas para la sociedad contemporánea, abandonando la concepción que han mostrado los libros clásicos de matemática hasta el presente.

Como lo demuestra la experiencia, los problemas de ingeniería poseen una componente importante de las ciencias naturales y las ciencias matemáticas. Muchos de los problemas de las ciencias y de la ingeniería se plantean mediante una modelización matemática algorítmica, cuya solución requiere del uso de tecnología computacional. Por consiguiente, la metodología de diseño de recursos didácticos en el ámbito de ingeniería ciencias y matemática debe estar centrada en la actividad del alumno realizando experimentos con sus manos (*hands-on, la main à la pâte*).

Con el objeto de adoptar el paradigma STEM es necesario cambiar los procedimientos de enseñanza y pedagogías que están presentes desde hace 50 años, cambiar el aula clásica y la disposición de los estudiantes para que trabajen en grupo con sus computadoras, paquetes de software, de tal manera que puedan encarar nuevas áreas tales como cálculo, visualización, análisis de datos y graficación instantánea, de fluido uso.

Resultados

Como resultado de la exposición metodológica y marco conceptual se han realizado diseños de recursos didácticos integrando la matemática con las ciencias naturales y la experimenta-

ción. Se plantea a continuación una propuesta de cómo puede enseñarse el concepto de derivación e integración relacionado con el estudio experimental de un simple problema de la vida real: estudiar el movimiento uniformemente variado de un carro que se mueve en un riel inclinado.

Se estudia el movimiento de un carro sobre una guía rectilínea en posición inclinada, acoplado a un sistema de registro automático de datos constituido por una persiana, una foto compuerta y un programa incorporado a una computadora. En la pantalla de ésta aparecen los resultados en tablas numéricas y gráficos. En la Fig. 1 se muestra el arreglo experimental. Se ubica el carro en el extremo superior del carril, se lo suelta y se mueve hacia abajo. Cuando ha pasado la persiana completa por la foto compuerta, se cierra la experiencia y aparece en la pantalla una tabla con los respectivos valores de los intervalos de tiempo que tarda cada intervalo de bandas en pasar por la compuerta.

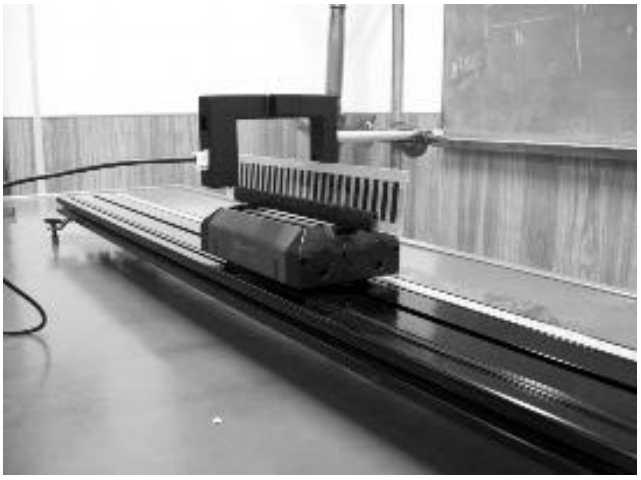


*Figura 1.*Arreglo experimental para estudiar el movimiento del carro.

El programa calcula las relaciones de incrementos $\frac{\Delta x}{\Delta t_i}$ para cada intervalo de tiempo t_i , $t_i + \Delta t_i$, las cuales definen el parámetro llamado **velocidad media del carro** para cada intervalo t_i , $t_i + \Delta t_i$

$$v_{m_i} = \frac{\Delta x}{\Delta t_i} \qquad (1)$$

Como los intervalos de tiempo Δt_i **disminuyen** en el transcurso del tiempo, las velocidades medias v_{m_i}, **aumentan.** Se calculan los incrementos de velocidades medias

$$\Delta v_{mi} = v_{mi+1} - v_{mi} > 0$$

y se los divide a cada uno por los respectivos intervalos de tiempo Δt_i.

Se trata ahora de un nuevo cociente incremental llamado **aceleración media,** para cada intervalo de tiempo t_i , $t_i + \Delta t_i$

$$a_{m_i} = \frac{\Delta vmi}{\Delta t_i} \qquad (2)$$

Si se analizan estos cocientes, resultando todos iguales, dentro de los errores experimentales. Por lo tanto, se deduce que las aceleraciones medas son todas iguales a una misma constante.

La Figura 2 muestra la gráfica de las velocidades medias en función del tiempo.

Si se utiliza otra persiana con distancias entre bandas negras $(\Delta x)_1$ más pequeñas, los intervalos de tiempo correspondientes t_i, $t_i + (\Delta t_i)_1$ también serán más pequeños. Con esta nueva persiana quedan definidas nuevas velocidades medias para cada intervalo t_i, $t_i + (\Delta t_i)_1$. En particular, al mismo tiempo t_i que se eligió anteriormente, le corresponde la velocidad media $(v_{mi})_1$ definida para el intervalo t_i, $t_i + (\Delta t_i)_1$

$$(v_{mj})_1 = \frac{\Delta x1}{\Delta ti1}$$

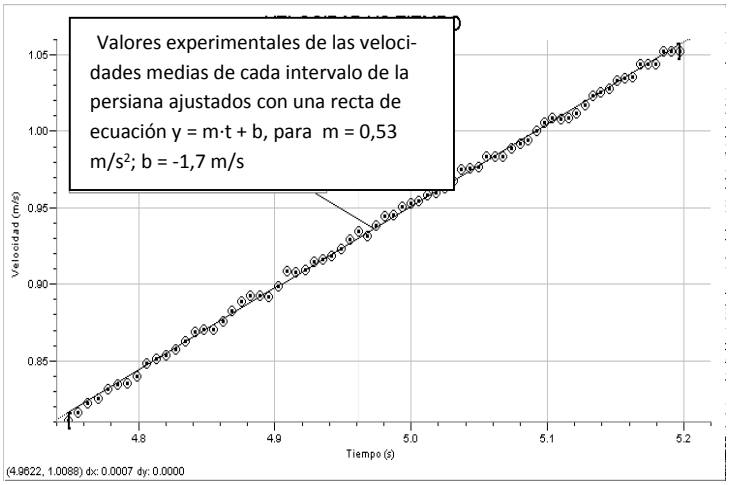


Figura 2. Representación de los valores de las velocidades medias correspondientes a cada intervalo de tiempo t_i, $t_i + \Delta t_i$, ajustados con una recta de pendiente positiva, según el movimiento experimentado por el carro. La ecuación de la recta de ajuste está indicada en el borde superior, donde m = 0,53 es la pendiente, b = -1,73 es la ordenada al origen.

Si se utiliza otra tercera persiana con distancias entre bandas negras $(\Delta x)_2$ más pequeñas, los intervalos de tiempo correspondientes t_i, $t_i + (\Delta t_i)_2$ también resultan más pequeños. Con esta nueva persiana quedan definidas las nuevas velocidades medias para cada intervalo t_i, $t_i + (\Delta t_i)_2$. En particular, al mismo tiempo t_i que se eligió anteriormente, le corresponde la velocidad media $(v_{mj})_2$ definida para el intervalo t_i, $t_i + (\Delta t_i)_2$

$$(v_{mj})_2 = \frac{\Delta x2}{\Delta ti2}.$$

Teniendo en cuenta la sucesión de velocidades medias obtenidas con diferentes persianas, para el mismo tiempo t_i

$$\frac{\Delta x}{\Delta t_i}, \frac{\Delta x1}{\Delta ti1}, \frac{\Delta x2}{\Delta ti2},$$

Se observa que dicha sucesión tiende a un valor finito único para cuando el intervalo de tiempo Δt es cada vez más pequeño. Ese valor se define como velocidad escalar instantánea v_i del carro al tiempo t_i

- ***Velocidad escalar instantánea*** $v(t_i) = \lim_{\Delta t_j \to 0} \left(\frac{\Delta x}{\Delta t_i}\right)$. (3)

Esta definición es la definición matemática de la derivada de la función x(t) respecto del tiempo, para el instante t_i

Velocidad escalar instantánea: $v(t_i) = \frac{dx}{dt}$ (4)

La Fig. 3 esquematiza el límite al cual tiende las velocidades medias al tiempo t_i, cuando los sucesivos incrementos Δt_i disminuyen, que es el valor $v(t_i)$ de la función velocidad al instante t_i.

Para la descripción de un *movimiento uniformemente acelerado* se tiene en cuenta la aceleración media escalar en un intervalo de tiempo t_i, $t_i+\Delta t_i$, definida por

$$a_{mi} = \frac{\Delta vi}{\Delta t_i} . \qquad (5)$$

Siguiendo un procedimiento similar al de la definición de velocidad instantánea, se define la aceleración instantánea como límite del cociente incremental (5) para el instante t_i

Aceleración escalar instantánea al tiempo t_i:

$$a_i = \lim_{\Delta t_i \to 0} \frac{\Delta vi}{\Delta t_i} = \frac{dv}{dt}. \qquad (6)$$

La característica del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado de un cuerpo es que su aceleración es constante y positiva.

La derivada de esta función, que es la aceleración contante, tiene el valor a = 0.53, que a su vez, es el valor de la pendiente de la recta de ajuste de los valores experimentales de las velocidades medias de ka Fig. 2. Por lo tanto, se concluye que la velocidad del carro varía linealmente con el tiempo (con pendiente positiva igual a la aceleración *a*).

$$v = 0.53\ t - 1.7. \qquad (7)$$

Conocido el valor de la aceleración, obtenido experimentalmente, se plantea determinar la ecuación de movimiento del carro, o sea conocer la posición del cuerpo en cada instante mediante la función desplazamiento x(t) . Para ello se parte de la ecuación (6)

: $a = \frac{dv}{dt}$ con la condición inicial para t =0 es v = b = - 1.7 m/s

Mediante la realización de la operación inversa de la derivación, que es la integración

$$v + 1.7 = \int_0^t a \cdot dt = a \cdot t$$

se obtiene

$$V(t) = a\ t - 1.7.$$

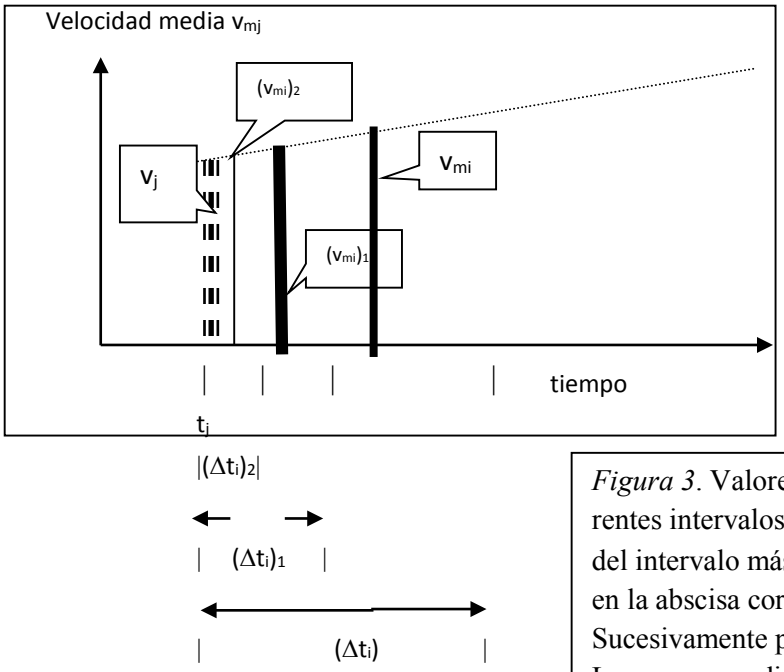


Figura 3. Valores de las velocidades medias v_{mj} para diferentes intervalos de tiempo, a partir del tiempo t_i. Se parte del intervalo más grande (Δt_i), el valor de v_{mi} se representa en la abscisa correspondiente al punto medio del intervalo. Sucesivamente para intervalos de tiempo más pequeños. Los correspondientes valores de v_{mi} tienden a un valor f*inito único* v_j.

Como, a su vez, la velocidad es la función derivada del desplazamiento según la relación (4), para determinar la función desplazamiento se debe realizar la operación inversa de la derivación, que es la integración:

Si $v = \dfrac{dx}{dt}$ con la condición inicial para $t = 0$ es $v_0 = -1.7$, $z = x_0$ resulta

$$x - x_0 = \int_0^t v \cdot dt = \int_0^t (0.53\, t - 1.7) \cdot dt = 0.53\, (\tfrac{1}{2}\, t^2) - 1.7\, t$$

$$x = 0.265\, t^2 - 1.7\, t + x_0 \qquad (8)$$

El desplazamiento del carro varía cuadráticamente con el tiempo. El coeficiente del término cuadrático es igual a la mitad del valor de la aceleración *a.* El coeficiente x_0 se determina experimentalmente. El sistema automático de registro de movimiento del cuerpo provee un gráfico de los desplazamientos de las diferentes porciones Δx de la persiana respecto del inicio de la persiana, según se muestra en la Fig. 4. Estos valores son ajustados por una función cuadrática con los mismos valores de los dos primeros coeficientes, proveyendo el valor del tercer coeficiente.

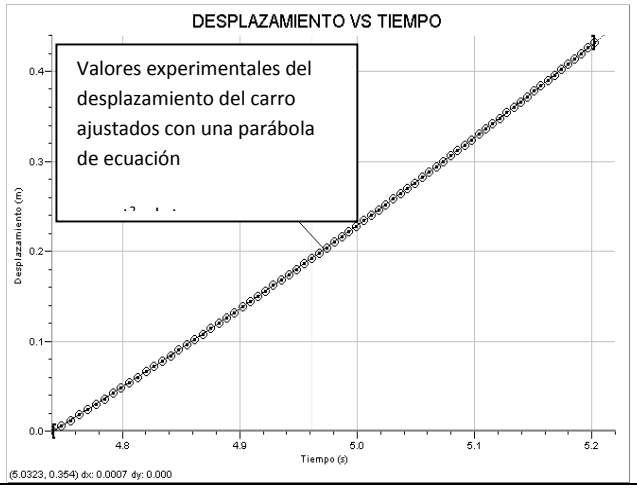


Figura 3. Representación gráfica de los valores experimentales de los desplazamientos D_i de las bandas negras respecto de la banda inicial, para cada tiempo t_i, correspondiente a un movimiento uniformemente acelerado. Se observa un arco de parábola con concavidad hacia arriba.

Discusión de resultados

A partir del estudio de un problema de la vida real como el movimiento de un carro sobre un riel inclinado, se ha desarrollado una metodología de diseño de recursos didáctico en la cual están embebidos conceptos físicos y matemáticos, aparte de recursos tecnológicos modernos y programas de cálculo y graficación.

Se parte del estudio experimental, obteniendo datos de velocidades medias y aceleraciones medias. Mediante el uso de persianas con intervalos entre bandas negras cada vez más pequeños se obtiene la sucesión de velocidades medias cuyo límite es la velocidad instantánea, según la definición general de derivada de una función, en este caso cuya variable independiente es tiempo.

Se plantea la operación inversa de derivación a partir de la constante característica del movimiento, que es la aceleración, obteniéndose un modelo que predice la expresión del desplazamiento del carro sobre el riel, cuyos coeficientes son datos experimentales.

Este ejemplo muestra un camino de cómo: enseñar los conceptos matemáticos relacionados con problemas reales que pueden experimentarse. Los datos numéricos no son arbitrarios, surgen de la experiencia.

Conclusiones

Los recursos didácticos que se proponen para integrar la enseñanza experimental de ciencias y matemática tienen por objeto posibilitar que el docente guíe al alumno en la aplicación del método científico de la manera que actualmente se desarrolla la ciencia con un enfoque transdisciplinario.

Como la mayoría de los textos de ciencias y matemática no contemplan experiencias, es preciso enfatizarlas, pues ellas permiten trabajar con conceptos, leyes, métodos y procesos, y los derivados de ellos, que son los contenidos. Cada ***unidad didáctica*** debe ser enmarcada con una

motivación acorde con los intereses y saberes previos de la población a la cual va a ser aplicada. Debe existir un cierre de la actividad que contemple instancias de comunicación y aplicación, con el agregado de actividades de evaluación correspondientes al nivel y propósito. Es importante que a lo largo de todo el proceso, en todo momento, el docente fortalezca la integración teoría-experimentación-resolución de problemas.

La comunidad de educadores de matemática debe estar atenta a esta transformación. Se requieren cambios en la forma en que los docentes son educados en matemática. Es necesario prepararlos en una forma integrada de conocimientos en Ciencias, Tecnología, Ingeniería y Matemática. Como imagen, esta comunidad debe ver a las ciencias matemáticas según un diagrama elaborado por la Academia de Ciencias de EE. UU., que se muestra a continuación.

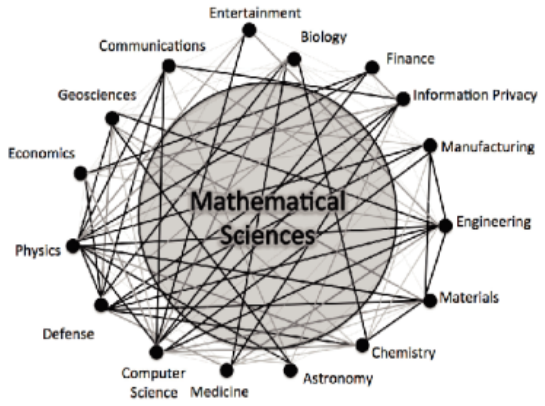


Figura 4. Esquema de la trans disciplinariedad de las ciencias matemáticas.

Bibliografía

National Science Foundation. www.nsf.org/ITEST (Fecha de consulta: permanente).

Remath. London Knowledge Lab. London WC1N 3QS. United Kingdom.

Science, Technology, Engineering, and Mathematics (STEM) Education Issues and Legislative Options (2006). *CRS Report for Congress,* Order Code RL33434

Successful STEM Education: A Workshop Summary. www.nap.edu/catalog/id.13230

Workshop on Science, Technology, Engineering and Mathematics (STEM) Enterprise: Measures for Innovation & Competiveness (2009), *George Washington University*, Washington.

STEM integration on K-12 Education-Prospects and Agenda for Research. (2014). *National Academy of Sciences.*

"The Mathematical Sciences in 2025*",* (2014). *Report U. S. National Academies Press,*

A Framework for K-12 Science Education: Practices, Crosscutting Concepts, and Core Ideas (2012). *National Academies Press*).

European School Net Observatory (2014). www.eun.org

Desire Project (2014). http://desire.eun.org.

Un estudio exploratorio sobre prácticas de búsqueda de ayuda Matemática en Internet entre estudiantes de ingeniería mexicanos

Danelly **Esparza** Puga
Universidad Autónoma de Ciudad Juárez
México
danelly.esparza@uacj.mx
Mario Sánchez **Aguilar**
CICATA Legaria, Instituto Politécnico Nacional
México
mosanchez@ipn.mx

Resumen

Reportamos un estudio exploratorio enfocado en identificar algunos de los recursos de Internet usados por estudiantes de ingeniería mexicanos cuando necesitan ayuda para sus clases de matemáticas. En una fase inicial del estudio se diseñó y se probó un cuestionario, en una segunda fase el estudio se utilizó este cuestionario para guiar entrevistas individuales y grupales. Los resultados muestran que la búsqueda de ayuda matemática en Internet es una práctica difundida entre los estudiantes quienes llegan incluso a preferirla sobre fuentes de ayuda más tradicionales como la biblioteca. Entre los recursos más ampliamente utilizados están YouTube y Facebook. Estos y otros sitios son utilizados para encontrar distintas maneras de resolver problemas matemáticos, para clarificar dudas y repasar tópicos, para obtener respuestas directas a sus tareas, para comparar resultados, y cuando pierden clase y quieren ponerse al día.

Palabras clave: búsqueda de ayuda, Internet, redes sociales, educación matemática, estudiantes de ingeniería.

Introducción

El fenómeno de búsqueda de ayuda —o help-seeking, como se denomina en la literatura anglosajona— ha capturado el interés de sociólogos y psicólogos sociales durante varias décadas. En términos generales, estos estudios se han enfocado en identificar y explicar qué factores demográficos, socioculturales, y psicológicos favorecen que las personas busquen la ayuda de otras personas. Dichos estudios se han efectuado principalmente en contextos médicos, laborales y de bienestar o seguridad social (ver por ejemplo Cornally y McCarthy, 2011). Las primeras conceptualizaciones sobre búsqueda de ayuda favorecieron que ésta se percibiera como una actividad no deseable; esto es, algunos investigadores comenzaron a interpretar la búsqueda de ayuda como un indicador de falta de independencia, que puede tener altos costos para la autoestima de los individuos y su sentido de competitividad. La reconceptualización del concepto de búsqueda de ayuda propuesta por Nelson-Le Gall (1985) contribuyó a asignar una acepción positiva al concepto en el campo de la investigación educativa; esto en el sentido de

que la búsqueda de ayuda puede verse como una habilidad o competencia útil para que los estudiantes puedan abordar problemas que de otra manera serían difíciles de afrontar. La búsqueda de ayuda puede verse como una habilidad muy útil para el auto-aprendizaje de los estudiantes.

Buscar ayuda es un elemento básico en el estudio de las matemáticas sin embargo, los estudios que abordan las prácticas de búsqueda de ayuda en la educación matemática siguen siendo escasos. Algunos de estos estudios se han enfocado en identificar los elementos afectivos que motivan o inhiben a los estudiantes a buscar ayuda matemática (Ryan & Pintrich, 1999), mientras que otros estudios han caracterizado los comportamientos de búsqueda de ayuda que manifiestan algunos estudiantes de matemáticas (Kempler & Linnenbrink, 2006), tamnién existen estudios que indagan en el conocimiento de los profesores de matemáticas acerca de los comportamientos de búsqueda de ayuda que manifiestan sus estudiantes cuando resuelven problemas de matemáticas expresados con palabras (mathematical word problems) (Marais, Van der Westhuizen & Tillema, 2013). Una característica común de estos estudios es que solo se consideran como posibles fuentes de ayuda matemática a personas —profesores, compañeros de clase— pero los recursos tecnológicos no son considerados como posibles fuentes de ayuda matemática.

Sin embargo, las prácticas de búsqueda de ayuda de los estudiantes contemporáneos están cambiando debido a la ubiquidad del Internet y los dispositivos móviles; por ejemplo, existen estudios que muestran que estudiantes de matemáticas de distintas regiones del mundo utilizan foros en línea abiertos para encontrar ayuda matemática (Puustinen, Volckaert-Legrier, Coquin & Bernicot, 2009; van de Sande, 2011). Ambos estudios, mediante un análisis de los intercambios y publicaciones de los estudiantes en este tipo de foros, caracterizan los comportamientos de búsqueda de ayuda que estos estudiantes manifiestan cuando buscan ayuda matemática en este tipo de espacios. Es necesario sin embargo desarrollar más estudios que muestren qué otras herramientas tecnológicas utilizan los estudiantes de hoy en día como fuente de ayuda matemática, y cómo las usan.

En este artículo reportamos un estudio exploratorio enfocado en identificar los sitios y herramientas basadas en Internet que algunos estudiantes de ingeniería mexicanos utilizan como fuente de ayuda para sus clases de matemáticas. En particular, exploramos tres aspectos de sus prácticas de búsqueda de ayuda basada en Internet:

1. ¿Qué sitios o herramientas consultan los estudiantes cuando necesitan ayuda para sus clases de matemáticas y con qué frecuencia los utilizan?
2. ¿Cuáles son los motivos que los llevan a utilizar esas herramientas?
3. ¿Cuáles son las razones por las que los estudiantes confían en la información proporcionada por estas fuentes?

La principal contribución de nuestro estudio es ayudar a ampliar nuestro entendimiento acerca de cómo los estudiantes contemporáneos de matemáticas utilizan de manera independiente la Internet como fuente de ayuda para sus estudios en matemáticas.

Marco conceptual

Como se mencionó antes, la búsqueda de ayuda en la investigación en educación matemática es usualmente conceptualizada como la habilidad de estudiantes de apoyarse en personas —profesores, compañeros, parientes— para obtener ayuda que pueda ser útil para

superar las dificultades que pueden surgir cuando se estudia matemáticas. Karabenick y Puustinen (2013) confirman esta situación cuando señalan que la investigación educativa sobre búsqueda de ayuda se ha enfocado principalmente en estudiar las interacciones que surgen en el salón de clases cuando un estudiante pide ayuda a su profesor o a sus compañeros. Estos autores señalan la necesidad de expandir esta área de investigación con la intención de entender mejor cómo las nuevas tecnologías están afectando las prácticas de búsqueda de ayuda de los estudiantes.

Siguiendo la línea de argumentación de Karabenick y Puustinen (2013), en este trabajo adoptamos una definición amplia del concepto de búsqueda de ayuda en matemáticas la cual incluye elementos no humanos como posibles fuentes de ayuda; así, en este estudio la búsqueda de ayuda en matemáticas se define como la habilidad que tiene un individuo de utilizar las personas y los recursos (incluyendo recursos tecnológicos tales como el Internet y los dispositivos móviles) que lo rodean como fuentes de ayuda que le permitan superar las dificultades y dudas que pueden surgir durante el proceso de estudio de las matemáticas.

Contexto

Este estudio se desarrolló en el Instituto de Ingeniería y Tecnología de la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez (UACJ) en México. El Instituto es una institución pública de nivel superior que está localizado en Ciudad Juárez, en la frontera norte de México y al sur de la ciudad de El Paso, Texas, en E.U.A. El Instituto tiene una población aproximada de 4,500 estudiantes provenientes de esta región del país, los cuales tienen un estatus socioeconómico que varía entre el medio y bajo.

Una razón para seleccionar esta institución para desarrollar nuestro estudio fue nuestro interés en explorar las prácticas de búsqueda de ayuda basadas en Internet entre estudiantes universitarios. Una razón adicional para seleccionar a la UACJ como contexto de estudio fue que la primera autora de este trabajo labora como profesora en la institución, lo cual nos daba acceso tanto a los estudiantes que participarían en el estudio como a las instalaciones de la Universidad para que pudiéramos desarrollarlo más fácilmente.

Población de estudio

El estudio involucró un total de 21 estudiantes universitarios de ambos sexos, divididos en dos fases: una fase inicial-exploratoria, y la segunda fase del estudio. Más detalles sobre la estructura de estas fases se encuentran en la sección “Procedimiento”.

Todos los participantes en el estudio fueron estudiantes de diferentes especialidades de ingeniería del Instituto de Ingeniería y Tecnología de la Universidad Autónoma de Ciudad Juárez. Seleccionamos estudiantes de diferentes especialidades de ingeniería porque todos ellos estaban tomando varios cursos de matemáticas (cálculo, ecuaciones diferenciales, álgebra lineal) como parte de su educación como ingenieros. Al momento de realizar el estudio, las edades de los estudiantes variaban entre 19 y 38 años. La participación de todos los estudiantes en el estudio fue voluntaria.

En la fase inicial-exploratoria participaron cuatro estudiantes provenientes de tres distintas carreras: ingeniería industrial, ingeniería en sistemas digitales e ingeniería eléctrica. Al momento de participar en el estudio dos de ellos cursaban el primer semestre, otro estaba en tercer semestre, y otro más en cuarto semestre —la duración de los estudios de ingeniería en la UACJ es de ocho semestres—.

La segunda fase del estudio involucró la participación de 17 estudiantes provenientes de cinco ingenierías distintas: civil, eléctrica, biomédica, industrial y mecatrónica. En esta fase solo se seleccionaron estudiantes de semestres intermedios y avanzados —de cuarto a octavo semestre—.

Procedimiento

Como hemos mencionado anteriormente, nuestro estudio estuvo dividido en dos fases. El estudio comenzó con una fase exploratoria en la cual se aplicó un cuestionario de siete preguntas abiertas que fueron utilizadas para guiar entrevistas semiestructuradas; estas entrevistas se desarrollaron entre el 19 y 26 de noviembre de 2014. El objetivo de esta fase fue doble: por un lado se buscaba confirmar la hipótesis de que algunos estudiantes universitarios utilizan el Internet cuando necesitan ayuda o tienen dudas sobre sus clases de matemáticas; por otro lado se intentaba valorar qué tan bien funcionaba el cuestionario diseñado para generar los datos empíricos, esto es, valorar por ejemplo si la formulación de las preguntas era entendida por los estudiantes o si el cuestionario arrojaba el tipo de información que necesitábamos para dar respuesta a los cuestionamientos planteados. Algunos ejemplos de las preguntas incluidas en la versión del cuestionario utilizado en esta fase fueron: ¿has utilizado algún sitio de Internet para tu clase de matemáticas?, ¿con qué frecuencia utilizas estos sitios?, ¿en tu opinión qué herramienta de Internet es más confiable y qué la hace confiable?

La fase exploratoria nos permitió refinar el cuestionario que serviría de guía para conducir algunas entrevistas durante la segunda fase del estudio. Las preguntas que constituyeron la versión final del cuestionario son las siguientes:

1. ¿Has utilizado algún sitio de Internet para tu clase de matemáticas?
2. ¿Cuáles son los sitios de Internet que has utilizado para tus clases de matemáticas?
3. ¿Con qué frecuencia utilizas estos sitios?
4. ¿De qué forma utilizas estos sitios de Internet en tus estudios de matemáticas?
5. Menciona los beneficios de utilizar sitios de Internet en tu formación matemática en la universidad.
6. Menciona las limitaciones que tiene el utilizar sitios de Internet en tu formación matemática como estudiante universitario.
7. En tu opinión, ¿Qué herramienta de Internet es más confiable y qué la hace confiable?

Esta versión final del instrumento fue utilizada en la segunda fase del estudio para entrevistar a 17 estudiantes de ingeniería de la UACJ. Cinco de ellos fueron entrevistados de manera individual, mientras que los 12 restantes fueron entrevistados a través de dos grupos focales de seis integrantes cada uno. La segunda fase del estudio fue desarrollada en tres diferentes días: 13 de febrero, 12 de marzo, y 26 de junio de 2013. Las respuestas emitidas por estos 17 estudiantes constituyen la principal fuente de datos empíricos en los que se basan los resultados de nuestro estudio. Todas las entrevistas, tanto las de la fase exploratoria como las de la fase final, fueron audiograbadas para su posterior análisis y transcripción.

Para analizar los datos empíricos consistentes en entrevistas individuales y grupales, fue necesario escuchar repetidamente las audiograbaciones con la intención de localizar las respuestas a las preguntas del cuestionario guía, y entonces hacer una categorización de las respuestas. Durante este proceso fue evidente que algunas respuestas de los estudiantes tenían elementos comunes, los cuales efectivamente nos permitieron producir una categorización de estos datos. Los resultados de este proceso se presentan en la siguiente sección.

Resultados

Este apartado de resultados está dividido en cuatro secciones y se refiere únicamente a las entrevistas realizadas a los 17 estudiantes que participaron en la segunda fase del estudio. En la primera sección se hablará sobre la frecuencia con que los estudiantes utilizan los sitios de Internet como fuente de búsqueda de ayuda. En la segunda sección se mostrarán los sitios más populares entre los estudiantes de ingeniería que participaron en el estudio. Enseguida se describirán las percepciones de los estudiantes ante los beneficios y limitaciones del uso de los sitios de Internet como fuente de ayuda y finalmente se presenta una sección en la cual se presentan los argumentos dados por los estudiantes para confiar en un recurso de Internet como fuente de ayuda.

Frecuencia de uso de los sitios de Internet

En su totalidad, los 17 entrevistados declararon utilizar algún sitio de Internet como fuente de ayuda para sus clases de matemáticas. La mayoría de los estudiantes son usuarios frecuentes ya que de los 17 entrevistados, 12 universitarios afirmaron utilizar estos sitios diariamente y solamente cinco universitarios mencionaron que utilizan este tipo de recursos cada fin de semana.

Sitios de Internet más populares y su funcionalidad

En la figura 1 se ilustran los sitios de Internet más frecuentemente mencionados por los estudiantes de ingeniería que participaron en el estudio como fuente de ayuda matemática.

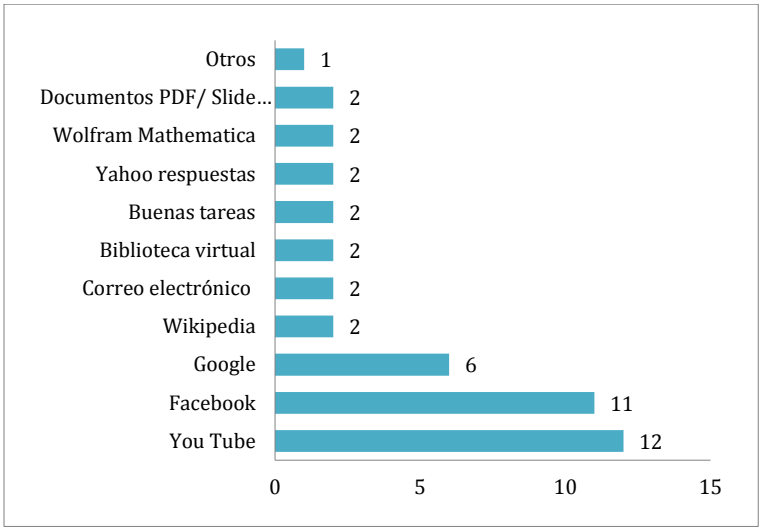


Figura 1. Sitios de Internet más populares como fuente de búsqueda de ayuda entre los estudiantes que participaron en este estudio.

El sitio de Internet más mencionado por los estudiantes fue YouTube, doce de los diecisiete entrevistados coinciden en que este es el sitio en el cual recurren para comprender mejor los temas vistos en clase.

Facebook es el segundo sitio más mencionado, once de los diecisiete entrevistados lo han utilizado en sus clases de matemáticas. Ellos afirman que Facebook es una herramienta con la cual pueden contactar con compañeros de clase o con el maestro para aclarar dudas sobre trabajos, tareas o inquietudes de logística. Por ejemplo, el alumno 2 del grupo focal 1 menciona lo siguiente:

Alumno 2, grupo focal 1:
[…] utilizo Facebook con mis compañeros cuando tengo dudas de lo que explican en clase, ya que en ocasiones cuando llego a casa no recuerdo lo que vi.

El siguiente sitio sería Google con seis menciones. Este es el sitio donde los universitarios buscan directamente los temas que desean investigar. La mayoría de los usuarios de Google hacen búsquedas especializadas en Google Books y Google Académico para delimitar, es decir, para restringir los sitios o documentos donde deben enfocar su búsqueda.

Otras páginas de Internet como Wikipedia, buenastareas.com, Yahoo! Respuestas y Slide Share, así como herramientas de Internet tales como el correo electrónico, o la calculadora en línea Wolfram Mathematica, fueron mencionadas debido a las distintas funcionalidades que ofrecen:

Alumno 2, grupo focal 2:
[…] Utilizo Wolfram Mathematica para puros resultados, pero en veces no es muy confiable por que salta unos pasos […] nada más metes la ecuación y ya te da paso por paso […]
Alumno 4, entrevista individual:
A veces ya ve que le dan un problema y las preguntas ya están subidas… Yahoo respuestas lo utilizaría para ya cuando batallas y dices ay no […]"

En la categoría de "otros" que se muestra en la figura 1 están incluidas herramientas como Skype, y sitios Web como Profesores Universia (http://profesores.universia.es), Vitutor (http://www.vitutor.com), Web Profesores y Formularios. Estos sitios son utilizados para encontrar métodos de soluciones de problemas, comparar resultados de problemas, encontrar la resolución paso a paso de un problema, entre otros:

Alumno 1, entrevista individual:
[…] Uno que se llama Web Profesores es una página donde los profesores suben documentos o técnicas de enseñanza […] son documentos escritos […] una vez metí una fórmula que necesitaba en Google y así llegué a la página y también hay otra que es lo mismo…Profesores Universia.
Alumno 5, grupo focal 2:
Hay una página que se llama creo vitutor.com ahí vienen muchos ejercicios de muchas materias… problemas resueltos de matemáticas y para hacer […] te da todo paso por paso.

En suma podemos decir que la mayoría de los sitios y herramientas a las que recurren los estudiantes se utilizan para: (1) encontrar diferentes maneras de resolver algún problema matemático, (2) clarificar dudas y repasar lecciones, (3) obtener soluciones hechas o problemas matemáticos resueltos, (4) comparar resultados, y (5) cuando pierden una clase y se quieren poner al tanto.

Beneficios y limitaciones percibidos por los estudiantes

Los beneficios que perciben los estudiantes al usar la Internet como fuente de ayuda son diversos. Algunos estudiantes destacan el acceso geográfico y temporal ilimitado, lo que los hace preferir la Internet sobre fuentes de ayuda más tradicionales:

Alumno 5, entrevista individual:
Yo pienso que ahorro de… por ejemplo si debo ir a la biblioteca tengo que manejar … ahorro tiempo y dinero.
Algunos estudiantes perciben la Internet como una fuente de ayuda para clarificar dudas que es infalible, tal como afirma este estudiante:

> Alumno 3, grupo focal 2:
> El beneficio que encuentro es que cualquier cosa que busque la voy a encontrar, son miles de páginas las que van a salir y siempre encontraré algo, nunca me quedaré con la duda.

Además, identificamos cuatro limitaciones expresadas por los estudiantes las cuales son: (1) acceso restringido a las fuentes debido a derechos de autor o limitaciones de lenguaje, (2) falta de confiabilidad de las fuentes, (3) la Internet puede funcionar como un distractor, y (4) existe un exceso de información en la red. Para ilustrar estas limitaciones, enseguida se transcriben algunos extractos de las entrevistas:

> Alumno 6, grupo focal 2:
> El problema es que si no sabes lo que estas buscando recibes respuestas muy ambiguas, información muy ambigua y en la Internet se regulan mucho los derechos de autor, si quieres leer un libro solo puedes ver una parte […] el material útil está restringido.
> Alumno 5, grupo focal 2:
> A mí me pasó una vez que estudiando para un examen había un tema que de plano no sabía nada […] encontré un método que nada que ver, que no era lo que necesitaba […] en veces pones algo y salen como mil cosas de eso, no es lo que andas buscando.

Motivos para confiar en una página de Internet

Varios de los estudiantes que participaron en este estudio basan la confiabilidad de las fuentes de ayuda que obtienen de la Internet en el prestigio o autoridad que puede brindar un grado o posición académica, o una institución:

> Alumno 3, grupo focal 1:
> YouTube me parece lo más confiable porque los videos son de profesores de universidad.
> Alumno 5, entrevista individual:
> No confío en ningún sitio […] pero Slide qué? … Slide Share se me hace más confiable porque ahí las mandan los doctores.
> Alumno 1, entrevista individual:
> Por ejemplo en Youtu [sic], bueno ahí los videos son de los profesores de universidades y ellos mismos hacen los videos para aclarar las dudas, para mí es muy confiable porque son profesores de universidades y creo que hasta reciben un beneficio económico por hacer los videos […].

Discusión

A través de este estudio exploratorio hemos investigado las prácticas de búsqueda de ayuda basadas en Internet entre estudiantes mexicanos de ingeniería. Como otros estudios indican (e.g. van de Sande, 2011), hemos encontrado que la búsqueda de ayuda matemática a través de Internet es una práctica difundida —12 de 17 estudiantes reportaron utilizar el Internet para estos propósitos diariamente—. De acuerdo a los participantes en nuestro estudio, los sitios más comúnmente utilizados son: (1) YouTube, donde los estudiantes pueden encontrar videos de clases de matemáticas para repasar y profundizar los temas vistos en clase; y (2) Facebook, donde pueden contactar a sus compañeros o al profesor para clarificar dudas conceptuales o logísticas relacionadas con sus clases de matemáticas. Sin embargo, algunos estudiantes también declaran usar sitios como Yahoo! Respuestas para encontrar respuestas acabadas a sus tareas matemáticas.

Los estudiantes que participaron en el estudio buscan ayuda en Internet para encontrar maneras distintas de resolver un problema de matemáticas, para clarificar dudas y reforzar conocimiento, para obtener respuestas acabadas o problemas resueltos paso a paso, para

comparar los resultados que ellos obtienen, y cuando pierden clases y se quieren poner al tanto. Sin embargo, cuando se trata de evaluar la confiabilidad de la información que ellos obtienen de estos sitios, los estudiantes parecen no poner atención a las propiedades matemáticas intrínsecas de la información obtenida (Lithner, 2003), sino que basan su evaluación en características de la información que no guarda relación con las matemáticas, tales como el prestigio académico de la persona o institución que publica la información.

La naturaleza exploratoria de este estudio nos permite ver solo la superficie de una práctica ampliamente difundida que está afectando la manera en que los jóvenes estudian matemáticas. Enseguida señalamos algunas rutas de investigación que podrían ser profundizadas para comprender mejor este fenómeno educativo.

Posibles rutas de investigación

Una de las limitaciones de nuestro estudio es que está basado en auto reportes sobre uso de tecnología, lo cual puede ser menos preciso que las observaciones de los comportamientos reales de los estudiantes (Junco, 2014). Una futura línea de investigación se podría enfocar en utilizar métodos de observación más directa como el propuesto por Junco (2014), en la que se utilice software para documentar y caracterizar los comportamientos de búsqueda de ayuda manifestados por los estudiantes cuando utilizan distintos dispositivos como computadoras, tabletas y teléfonos móviles.

Otra limitación de nuestro estudio es que no profundiza en cómo cada sitio o herramienta web son utilizadas como fuente de búsqueda de ayuda. Es entonces necesario producir caracterizaciones detalladas de cómo los estudiantes utilizan herramientas como Facebook y YouTube para encontrar ayuda matemática. También, se podría profundizar en los criterios de selección y exclusión que los estudiantes aplican cuando seleccionan una porción particular de información matemática del océano de información que la Internet proporciona.

Otra línea de investigación relevante sería explorar la perspectiva de los profesores de matemáticas acerca de estas prácticas de búsqueda de ayuda matemática: ¿qué piensan ellos de esta práctica de sus estudiantes? ¿la consideran una práctica deseable o provechosa? ¿integran este tipo de fuentes de ayuda en la instrucción matemática que proveen a sus estudiantes?

Creemos que la búsqueda de ayuda matemática en Internet es un área de investigación emergente que no solo es fértil sino también relevante de cultivar ya que se trata de una práctica difundida que afecta la manera en que los estudiantes contemporáneos se relacionan con las matemáticas escolares.

Referencias y bibliografía

Cornally, N. & McCarthy, G. (2011). Help-seeking behaviour: A concept analysis. *International Journal of Nursing Practice, 17*(3), 280–288. doi: 10.1111/j.1440-172X.2011.01936.x

Junco, R. (2014). iSpy: seeing what students really do online. *Learning, Media and Technology*, *39*(1), 75–89. doi: 10.1080/17439884.2013.771782

Karabenick, S. A. & Puustinen, M. (Eds.). (2013). *Advances in Help-Seeking Research and Applications. The Role of Emerging Technologies*. Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Kempler, T. M. & Linnenbrink, E. A. (2006). Helping behaviors in collaborative groups in math: A descriptive analysis. In S. Karabenick & R. Newman (Eds.), *Help Seeking in Academic Settings: Goals, Groups, and Contexts* (pp. 89–115). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Lithner, J. (2003). Students' mathematical reasoning in university textbook exercises. *Educational Studies in Mathematics, 52*(1), 29–55. doi: 10.1023/A:1023683716659

Marais, C., Van der Westhuizen, G. & Tillema, H. (2013). Teacher knowledge of learners' help-seeking in mathematics problem solving. *African Journal of Research in Mathematics, Science and Technology Education, 17*(1–2), 63–73. doi: 10.1080/10288457.2013.826971

Nelson-Le Gall, S. (1985). Help-seeking behavior in learning. *Review of Research in Education, 12*(1), 55–90. doi: 10.3102/0091732X012001055

Puustinen, M., Volckaert-Legrier, O., Coquin, D. & Bernicot, J. (2009). An analysis of students' spontaneous computer-mediated help seeking: A step toward the design of ecologically valid supporting tools. *Computers & Education, 53*(4), 1040–1047. doi: 10.1016/j.compedu.2008.10.003

Ryan, A.M. & Pintrich, P.R. (1999). "Should I ask for help?" The role of motivation and attitudes in adolescents' help seeking in math class. *Journal of Educational Psychology, 89*(2), 329–341. doi: 10.1037/0022-0663.89.2.329

Shapiro, E.G. (1978). Help seeking: Effects of visibility of task performance and seeking help. *Journal of Applied Social Psychology, 8*(2), 163–173. doi: 10.1111/j.1559-1816.1978.tb00774.x

van de Sande, C. (2011). A description and characterization of student activity in an open, online, mathematics help forum. *Educational Studies in Mathematics*, *77*(1), 53–78. doi: 10.1007/s10649-011-9300-y

Unidades virtuales de aprendizaje en capacitaciones docentes en el uso de tecnología en la enseñanza de las Matemáticas

Luis Armando **Hernández**
Universidad Estatal a Distancia de Costa Rica
Costa Rica
luisarmandohs21@gmail.com

Resumen

En este artículosedescribe una experiencia en el diseño y ejecución de Unidades Virtuales de Aprendizaje (UVA) dentro de una estrategia para la capacitación docente en el uso de tecnología dentro de la enseñanza de las Matemáticas en Costa Rica. Esta estrategia fue diseñada en el marco del proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica(del Ministerio de Educación Pública con el apoyo de la Fundación para la Cooperación Costa Rica Estados Unidos CRUSA), en el contexto de la implementación de nuevos programas de matemáticas para toda la educación preuniversitaria que fueron aprobados en mayo del 2012 por las autoridades costarricenses de educación. En el documento se explicará la estrategia de capacitación realizada, las características de estas UVA, su construcción técnica, los resultados obtenidos y las ventajas y limitaciones de las mismas en el contexto de un país en vías de desarrollo como Costa Rica.

Palabras clave: Entornos virtuales de aprendizaje, Educación matemática, Reforma en Matemáticas, Formación continua, TIC.

Antecedentes y ubicación en el contexto

El 21 de Mayo del 2012 el Consejo Superior de Educación de Costa Rica (Órgano de carácter constitucional responsable de orientar y dirigir desde el punto de vista técnico los diferentes niveles, ciclos y modalidades del Sistema Educativo Costarricense) aprobó nuevos programas de estudio de Matemáticas para toda la educación preuniversitaria de ese país.

El nuevo currículo es más que un ajuste de contenidos (reacomodo, aumento o disminución); formula una nueva estrategia pedagógica "Resolución de problemas con énfasis en contextos reales", con lo cual se busca el fortalecimiento de mayores capacidades cognoscitivas en el abordaje de los nuevos retos que plantea una sociedad moderna. Esto implica unatransformación sustancial de la acción de aula, por lo que el papel del docente en laejecución de esta metodología es trascendental. Sin embargo, una de las debilidades para la implementación de este currículo, es precisamente la formación inicial y continua de los profesores en servicio. Así lo indican Gaete y Jiménez (2011, p.111):

> Tanto en la formación inicial de los y las docentes como en los procesos de capacitación y asesoría brindados por el MEP, observan los y las directores institucionales serias carencias y debilidades formativas: Para uno de los directores entrevistados, "Las capacitaciones en matemática no son las más adecuadas porque no responden a las necesidades reales de los docentes (Gaete y Jiménez, 2009).

Es por esto que para encaminar y afianzar esta reforma en los años venideros, era necesario construir un liderazgo pedagógico nacional, es decir, un conjunto de docentes preparados y entusiastas que pudieran afrontar los nuevos desafíos. Pero cómo hacer esto realizable mediante un curso de formación en el uso de tecnologías digitales para la enseñanza de la Matemáticas que pudiera involucrar a gran cantidad de docentes y que a su vez fuera accesible y flexible para la población, que no tuviera tan alto costo, que fuera reusable y que sobre todo lograra resultados positivos en la acción de aula.

Para ser esto viable en el contexto educativo nacional, el proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*, tomó la decisión de desencadenar un proceso de formación a gran escala para docentes en servicio, con base a la experiencia obtenida a los cursos bimodales (conjunción de sesiones presenciales y de trabajo independiente) efectuados en el 2011 y 2012, donde fue entonces necesario utilizar un sistema de gestión de aprendizaje o *LMS* (*Learning Management System*), y para ello se escogióla plataforma *Moodle* (*Modular Object – Oriented Dynamic Learning Environment*) por ser de distribución libre y tener como propósito el ayudar a los educadores a crear comunidades de aprendizaje en línea.A su vez, este sistema permite llevar el seguimiento del aprendizaje de los participantes del curso teniendo la posibilidad de estar al tanto de los avances y necesidades de cada uno de ellos. Cuenta, además, con herramientas para colaborar y comunicarse (foros de consulta y de discusión, chats, entre otros), y tener acceso a recursos de apoyo. Asimismo, hacen posible acercar los contenidos a los participantes del curso con el objetivo de facilitar, mostrar, atraer y provocar su intervención constante y productiva sin olvidar las funciones necesarias para la gestión de los participantes como la inscripción, seguimiento y la evaluación.

Al mismo tiempo se pensó que de forma intrínseca la experiencia en el empleo de este tipo de plataformas no solo acercaba al docente al uso de las *Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC)* sino que modificaba su perfil profesional impulsándolo a una visión moderna de educador.

En el 2011, el proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*implementó este tipo de sistemas de administración de aprendizajes al diseñar capacitaciones bimodalespara profesores de la Educación Primaria[1] y de la Secundaria[2] por separado. Esta estrategia se siguió utilizando para los cursos realizados en el 2012. Se trata de una orientación novedosa que involucra dos tiempos, uno para trabajar con docentes líderes y otra para capacitar a poblaciones masivas de docentes. Los detalles de este proyecto y sus acciones se pueden ver en Ruiz (2013).

Para el 2013 las capacitaciones han girado en torno a: i) el uso inteligente y visionario de tecnologías digitales y ii) el uso de la historia de las Matemáticas.En cuanto a las tecnologías, el diseño de capacitación debía contemplar dos dimensiones que están íntimamente relacionadas: las dificultades de un contexto nacional en cuanto a disponibilidad de recursos tecnológicos y flexibilidad para usarlos por parte de los docentes, así como que los cursos están concebidos para desarrollarse en poblaciones masivas (de 1400 profesores de Secundaria y 6000 de Primaria). Es

[1]También conocida como **educación elemental o general básica**, es la primera de seis años establecidos y estructurados de la educación que se produce a partir de la edad de entre seis y siete años hasta aproximadamente los 12 años de edad.
[2]También denominada **educación media**, **segunda enseñanzao bachillerato**. Tiene como objetivo capacitar al alumno para poder iniciar estudios de educación superior.

preciso resaltarse que no es igual ofrecer capacitaciones a grupos pequeños con ambientes muy controlados, que hacerlo con poblaciones masivas donde las contingencias pueden ser muchas.

Planteamiento del problema

En el nuevo currículo costarricense la tecnología se concibe como un instrumento al servicio de los aprendizajes matemáticos (MEP, 2012). Además, con el finde enriquecer y redimensionar la resolución de problemas y las estrategias educativas, así como de potenciar algunas dimensionescurriculares relevantes para la enseñanza efectiva de esta materia, se apunta como uno de sus cinco ejes transversales específicos *El uso inteligente y visionario de tecnologías digitales*.

Sin embargo, esto no es sencillo, si se toma en cuenta la escasa o nula formación inicial en esta temática recibida por los docentes tanto de educación secundaria como de primaria. Al mismo tiempo, se tiene claro que el simple hecho de saber emplear técnicamente una herramienta tecnológica no implicará mejores resultados en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Así se establece en los programas de estudios de matemática (MEP, 2012, p.37):

> La utilización de tecnologías, sin embargo, no conduce necesariamente al mejoramiento de los aprendizajes en las Matemáticas, peor aún: un mal uso puede debilitarlos. La tecnología debe entonces introducirse de forma pertinente y precisa en los distintos niveles educativos y de acuerdo a las condiciones materiales y humanas existentes en el contexto educativo nacional.

Por esto mismo, los cursos de uso de tecnología elaborados por este proyecto, buscan preparar a los docentes en cómo usar la tecnología en la acción de aula. Poseen un sentido pedagógico. No obstante para poder usar tecnología con estos propósitos es necesario aprender a emplear las herramientas tecnológicas específicas que se usarían. ¿Cómo hacer esto último en las condiciones y posibles contingencias de algunos entornos en un país donde existen desigualdades regionales, socioeconómicas y de diversidad de accesos tecnológicos? El proyecto elaboró una respuesta en dos líneas bien articuladas: elaborar unidades didácticas orientadas al uso pedagógico de la tecnología, y unidades virtuales de aprendizaje asociadas a las primeras para generar dominio de esas herramientas.

Diseño y metodología

Una *Unidad Virtual de Aprendizaje(UVA),*en el contexto de los cursos bimodales 2013, es una pequeña unidad de aprendizaje diseñada bajo un soporte digital con diferentes elementos multimediales orientados al desarrollo autónomo y dinámico de habilidades en el uso de algún software con fines educativos en la enseñanza de Matemática. A su vez, está orientada a las necesidades técnicas de la unidad didáctica[3]; pero se desarrolla en línea y posee autoevaluación y evaluación propias. La UVA se considera un entorno virtual de aprendizaje, y esta estrategia se inscribe en la perspectiva de que la formación en el uso de las TIC en la enseñanza, no sólo debe ser técnica sino también metodológica.

Tanto la unidad didáctica como la UVA, están enmarcadas en lo que el *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica* definió como un *Módulo* de aprendizaje. Además,

[3]Es un documento descargable mediante la plataforma *Moodle*, que presenta un problema y el análisis del mismo bajo una perspectiva metodológica referente al uso del recurso tecnológico empleado.

cada módulo cuenta con mecanismos de comunicación sincrónica (chat) y asincrónica (foros de consulta) así como elementos de autoevaluación y evaluación de los aprendizajes.

Las UVA son *Modelos de Referencia de Objetos de Contenido Compartibles*, o también llamados paquetes *SCORM* por sus siglas en inglés (*Sharable Content Object Reference Model*).Se toma la decisión de que sea un paquete con este formato estándar por varias razones:Se puede reproduciren cualquier plataforma *LMS*, soporta contenidos que son muy fáciles y no onerosos de producir, sin embargo con un muy alto valor de calidad, los contenidos de los cursos son de larga duración debido a la compatibilidad y la estandarización por loque su larga vida contribuye a un mejor retorno de inversión.

Para la elaboración de las UVA se utilizó la herramienta *eXe-learning* como editor, ya que permite exportar el recurso como paquete *SCORM 1.2* y además provee instrumentos para la publicación de contenido web de acuerdo a los estándares requeridos por sistemas de gestión didácticos. Es un sistema de autoría que puede trabajar en sistemas "Online" o "Offline" (Sin conexión a internet), permite un manejo intuitivo de contenidos mediante un editor que admite previsualizar los contenidos antes de su publicación, presenta un entorno amigable al realizar acciones como: insertar contenidos como texto enriquecido, gráficos, animaciones, vídeo y actividades interactivas. Además, algo muy importante es que permite la reutilización de contenidos para su adecuación, mejora o producción de nuevos materiales didácticos.Esta herramienta permite la fácil organización de los temas que se quieren desarrollar en los cursos, así como la autoevaluación y la evaluación de contenidos.

La herramienta *eXe-learning* es un generador de páginas web que tiene como objetivo brindar una herramienta a profesionales de la educación, dedicada al desarrollo y publicación de materiales de enseñanza y aprendizaje a través de la web. Esta herramienta se tuvo que utilizar ya que generalmente, los *LMS* no ofrecen muchas *herramientas de autor*[4]especializadas en el desarrollo de contenidos de aprendizaje.

Las UVA están diseñadas para un modelo de formación a distancia que utiliza Internet como herramienta de aprendizaje. La estructura de cada UVA es la siguiente:

1. En la sección inicial se presenta un componente animado que explica, de forma audiovisual, el propósito de la UVA y hace una breve introducción de la misma.

Figura 1. Componente animado de UVA 0.

[4]Las **herramientas de autor** son aplicaciones informáticas que facilitan la creación, publicación y gestión de los materiales educativos en formato digital utilizados en la educación a distancia mediada por las TIC.

2. La sección siguiente plantea un problema matemático que se resolverá utilizando el recurso tecnológico respectivo. Además, en esta sección se facilitan los elementos técnicos necesarios para enfrentarse al problema (bases de datos, imágenes,etc.)
3. Posteriormente, aparece una serie de secciones estructuradas con un orden previamente establecido, que brindan instrucciones (por medio de videos explicativos) para desarrollar varias tareas que tienen como propósito no sólo ir construyendo la solución del problema sino aprender el uso técnico de la herramienta. Cada sección cuenta con una subsección de autoevaluación.

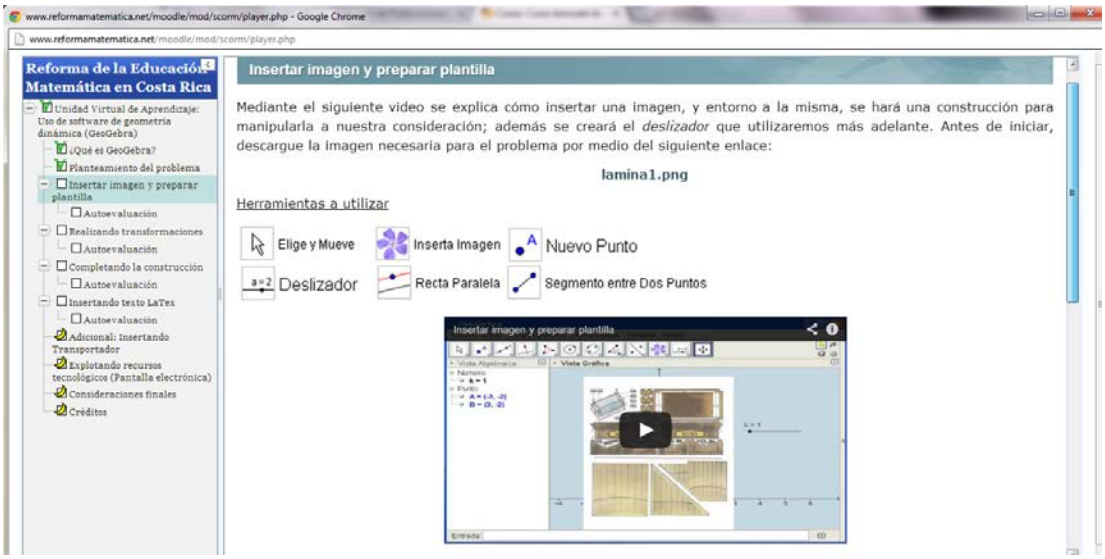


Figura 2. Sección "Insertar imagen y preparar plantilla" del módulo 9 del curso de secundaria.

4. Las secciones de autoevaluación son de carácter formativo (tienen retroalimentación, se pueden realizar varios intentos y no tienen calificación en el curso). En ellas hay ítems de Verdadero-Falso y Selección única que buscan orientar el aprendizaje técnico de la herramienta.

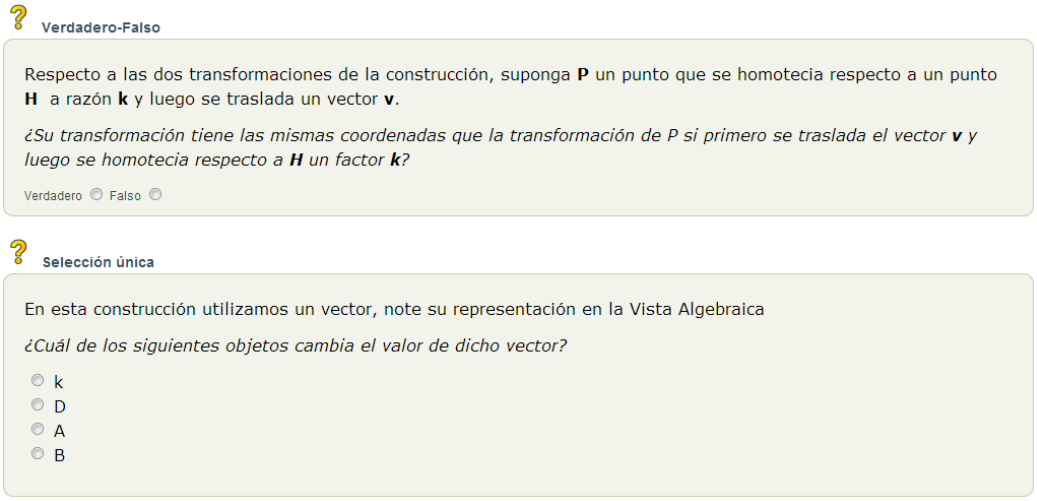


Figura 3. Subsección de autoevaluación UVA del módulo 9 del curso de secundaria.

5. La última sección es de Consideraciones finales, en la cual se realiza un cierre pedagógico de la unidad.

La UVA se considera un entorno virtual de aprendizaje, y esta estrategia se inscribe en la perspectiva de que la formación en el uso de las TIC en la enseñanza no sólo debe ser técnica sino también metodológica.Para Suárez (2002), estos instrumentos de mediación tienen doble valor: como herramienta y como signo. Como herramienta, permite operar sobre los cursos de forma externa, tanto a nivel tecnológico como pedagógico; como signo favorece la construcción y ampliación interna de aprendizajes, vinculados con el recurso tecnológico y con el proceso pedagógico.

Cada UVAposee una evaluación específica en línea que tiene como propósito medir el aprendizaje técnico que se alcanzó con el desarrollo de la misma. Esta evaluación también fue diseñada con *eXe-learning* y exportada como paquete *SCORM 1.2*. Este paquete estandarizado permite crear cuestionarios de selección única que admiten la calificación y el registro inmediato de las notas obtenidas en la plataforma del curso.

El propósito de la creación de los módulos de aprendizaje es preparar a docentes en servicio en el uso de tecnologías en la Educación Matemática, no sólo como medios de motivación personal sino como importantes instrumentos y capacidades que se exigirán cada vez más en este escenario histórico de reforma educativa. Es por esto, quede acuerdo a las necesidades y posibilidades educativasactuales del país se escogió desarrollar tres temáticas: uso de sitios web, uso adecuado de la calculadora, la hoja de cálculo para diferentes áreas matemáticas y uso software de geometría dinámica.

Al haber gran variedad de software y herramientas tecnológicas en el mercado, se tomó la decisión de escoger los siguientes recursos con el propósito de uniformar los aprendizajes técnicos del uso de la herramienta tecnológica:

- como hoja de cálculo el programa *Microsoft Office Excel 2007* o en su defecto la hoja de cálculo que aparece en *Apache Open Office*,
- y como software de geometría dinámica *GeoGebra 4.2*.

En el caso de *Microsoft Office Excel 2007* se escogió debido a que es un programa que comúnmente cuenta las computadoras de los costarricenses. Sin embargo siempre se ha intentado potenciar el uso de software libre el cual es un programa cuya licencia otorga a los usuarios la libertad de utilizar, copiar, distribuir, estudiar, modificar y compartir trabajos, bajo el mismo acuerdo de licencia. Es por esto que se escogió el software de geometría dinámica *GeoGebra* para desarrollar actividades tanto par Educación Primaria como para Secundaria.

Para educación primaria se diseñaron los siguientes módulos de aprendizaje:

- Módulo 6: Uso de sitios web (no posee UVA)
- Módulo 7: El uso de la calculadora en educación primaria
- Módulo 8: El uso de la hoja de cálculo para el análisis estadístico
- Módulo 9: El uso de software de geometría dinámica

Y para secundaria:

- Módulo 5: Uso de sitios web (no posee UVA)
- Módulo 6: El uso de la calculadora en educación secundaria
- Módulo 7: Modelación matemática con hoja de cálculo

- Módulo 8:El uso de la hoja de cálculo para el análisis estadístico
- Módulo 9:El uso de software de geometría dinámica

La mayor diferencia entre los módulos coincidentes de primaria y los de secundaria radica en el problema planteado, los conocimientos y estrategias didácticas del nivel respectivo. Por ejemplo, el propósito del módulo acerca del *Uso de la hoja de cálculo para el análisis estadístico*, tanto para primaria como para secundaria, consiste en apoyarse en el recurso para determinar diferentes representaciones (cuadros de frecuencias absolutas y porcentuales y para elaborar gráficos de barras)y así centrar los esfuerzos en la interpretación y análisis de la información estadística. Sin embargo, el tipo y nivel de complejidad del problema propuesto, la base de datos utilizada y el vocabulario empleado fueron pensados de acuerdo al nivel educativo. Análogamente ocurre con los módulos de *Uso de la calculadora*, ya que tanto para educación primaria como para secundaria se pretende el desarrollo de actividades con una intencionalidad didáctica, donde la calculadora sirve al estudiante como un recurso que facilita la comprensión de un determinado conocimiento o el desarrollo de una habilidad.

Para el módulo de *Uso de software de geometría dinámica*, en ambos niveles el propósito es que el docente pueda visualizar dimensiones que de otra manera sería muy difícil de incorporar en la acción educativa, como por ejemplo el movimiento. En el caso de educación primaria el problema se centra en la exploración de propiedades de los cuadriláteros y en secundaria en el estudio de la homotecia para la introducción de la semejanza y congruencia de triángulos. Adicionalmente y de carácter opcional, para el curso de secundaria, se pone a disposición del docente la UVA *Transformaciones geométricas* con el propósito de profundizar en este tema mediante la reconstrucción de un diseño geométrico.

En el caso del módulo de *Modelación matemática con hoja de cálculo* fue pensado sólo para educación secundaria ya que tenía como objetivo no sólo utilizar la hoja de cálculo como apoyo en la visualización de distintas representaciones y la construcción de modelos matemáticos; sino también, experimentar con distintos tipos de curvas de tendencia para conjeturar, verificar, analizar y comunicar la solución de problemas contextualizados.

Al seresta una estrategia nueva de aprendizaje para población de docentes en el país, eran indispensables algunos elementos adicionales para la buena implementación de este tipo de entornos virtuales de aprendizaje. Para esto fue necesaria la creación de un módulo inicial que tiene como objetivo preparar no solamente el equipo de cómputo con los requerimientos técnicos necesarios,sino también, predisponer al docente en la utilización de las Unidades Virtuales de Aprendizaje que se utilizarán en el curso. Este módulo, el cual se llamó *Módulo 0*, posee los siguientes elementos:

- *Instructivo de requerimientos técnicos:*Se dan las indicaciones correspondientes para descargar e instalar el*Apache Open Office*, si no se cuenta con *Microsoft Office Excel* 2007, descargar e instalar *Java*(requerimiento de *GeoGebra*) y descargar e instalar la última versión de *GeoGebra*.Adicionalmente, con el propósito de que el docente pueda observar cuantas veces quiera, sin necesidad de conexión, los videos que se exponen en la diferentes Unidades Virtuales de Aprendizaje se le proponen varias opciones para descargar los videos correspondientes desde el canal en *youtube.com* que tiene el Proyecto.
- *UVA 0:* Es de carácter formativo y tiene como objetivo que el docente se familiarice con el recurso y pueda manipular con tranquilidad sus diferentes componentes (videos, descarga

de archivos, ítems de autoevaluación, etc.). El contenido que se presenta es una pequeña introducción al uso de la TIC.

- *Evaluación de UVA 0:* Es de carácter formativo y tiene como objetivo familiarizarse con la herramienta.
- *Foro de consultas:* Tiene como objetivo aclarar las dudas, antes de arrancar los demás módulos, que puedan surgir de este primer acercamiento a este tipo de entornos virtuales de aprendizaje.

Es importante indicar que todo este proceso de diseño y elaboración fue validado preliminarmente por docentes en servicio (primaria y secundaria) y asesores nacionales de matemática que se desempeñan en el Departamento Diseño, Producción y Gestiónde Recursos Tecnológicos del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica.

Resultados y conclusiones

Al principio, como se esperaba, en ambos cursos hubo algunas consultas técnicas que se atendieron en el módulo 0 respecto al funcionamiento del entorno virtual; pero que para las etapas avanzadas del curso fueron mínimas.

Respecto al grupo de docentes de secundaria y primaria, quienes serían facilitadores de un grupo de 1400 docentes de secundaria y 6000 docentes de primaria, respectivamente distribuidos a nivel regional, la *tabla 1* y la *tabla 2* (ver **Apéndice A**) muestran resultadosque se consideran satisfactorios debido al nivel de complejidad particular de este tipode procesos;máxime que es la primera experiencia para los mismos, utilizando este tipo de entornos virtuales en el aprendizaje de herramientas tecnológicaspara la enseñanza de las matemáticas.

En el grupo de secundaria estabanmatriculados en la plataforma *Moodle* 157 personas entre ellos docentes en ejercicio, asesores nacionales, asesores pedagógicos regionales. Es importante aclarar que 29 no efectuaron ninguna evaluación de las UVA, ya sea porque eran asesores nacionales o regionales que no tenían que hacerlo obligatoriamente, o docentes que aunque estuvieron matriculados, no iniciaron el curso. Ya para la última evaluación (UVA 9), 41 personas no la efectuaron, por lo que tan sólo 12 personas abandonaron el curso, lo cual se considera positivo. Respecto a la notas obtenidas (de 1 a 100) entre los matriculados que realizaron las evaluaciones en cada UVA (ver la *tabla 1*,**Apéndice A**) se tiene que en todas más del 45% obtuvo mayor o igual a 75, siendo la UVA 7la de mejor promedio ponderado y la UVA 6 la de menor.

En el caso del curso de primaria, las notas obtenidas (de 1 a 100) entrelos matriculados que realizaron las evaluaciones en cada UVA (ver la *tabla 1*, **Apéndice A**) se tiene que en todas más del 49% obtuvo mayor o igual a 75, siendo la UVA 7 la de mejor promedio ponderado y la UVA 8 la de menor.Este curso tuvo una matrícula superior a la del curso de secundaría (se matricularon 348 personas entre ellos maestros de primaria, asesores nacionales, asesores pedagógicos regionales). Por las mismas razones expuestas anteriormente, 75 no realizaron ninguna evaluación de las UVA y ya para la última evaluación (UVA 9), 81 personas no la efectuaron, por lo que tan sólo 6 personas abandonaron el curso, lo cual también se considera satisfactorio.

Para evaluar ambos cursos se aplicó un cuestionario en línea, el cual lo completaron 61personas matriculadas en el curso de secundaria y 186 del de primaria. Respecto a la valoración que hicieron los docentes de secundaria de las UVA de los módulos referentes a uso

de la tecnología para la enseñanza de la Matemática se tiene que 70,5%, el 65,5%, el 75,4%, el 78,7 y el 75,4% calificaron de bien o muy bien las UVA de los módulos 0, 6, 7, 8 y 9 del curso bimodal 2013, respectivamente. Acerca de a la valoración que hicieron los docentes de primaria de las UVA de los módulos referentes a uso de la tecnología para la enseñanza de la Matemática se tiene que 92,5%, el 90,3%, el 77,4% y el 70,4% calificaron de bien o muy bien las UVA de los módulos 0, 7, 8 y 9 del curso bimodal 2013, respectivamente.

En el contexto de un país en vías de desarrollo como Costa Rica, la estrategia seguida para la capacitación docente en uso de tecnología, aporta enseñanzas que pueden servir a otros países en condiciones similares. Por un lado, ofrece accesibilidad y flexibilidad para la poblacióndocente, posee un bajo costo relativo y permite un escalamiento. Cuando se trabaja con poblaciones masivas donde se potencian las contingencias esto resulta muy importante. Si a ello se le suma el hecho de que es difícil planificar y ejecutar capacitaciones, que se adapten a las características y disponibilidades de un número heterogéneo de docentes (diferentes edades, regiones, horarios, etc.), el uso de este tipo de estrategias vienen a ser una buena opción de formación docente.

Esta estrategia es novedosa en este país. Como señala Ruiz (2013): modifica drásticamente lo que había sido usual en los procesos de capacitación que se venían dando en Costa Rica y abre nuevos horizontes que utilizan inteligentemente las tecnologías de la comunicación.

Agradecimientos

Al proyecto *Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica*.

Proyecto del Ministerio de Educación Pública, con el apoyo de la *Fundación de Colaboración Costa Rica - Estados Unidos de Norteamérica CRUSA*, y la administraciónfinanciera de la *Fundación Omar Dengo de Costa Rica*.

http://www.reformamatematica.net

Referencias bibliográficas

Gaete, M. & Jiménez, W. (2011). Carencias en la formación inicial y continua de los docentes y bajo rendimiento escolar en Matemática en Costa Rica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *9*, 93-117.

Ministerio de Educación Pública (MEP) (2012).*Programas de Estudio de Matemáticas. I, II Y III Ciclos de la Educación General Básica y Ciclo Diversificado.* San José: Autor.

Ruiz, A. (2013). La reforma de educación matemática en Costa Rica: Perspectiva de la praxis. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, Número especial, 6-109.

Bibliografía

García, L., Ruiz, M. & Domínguez, D. (2007). *De la educación a distancia a la educación virtual*. Barcelona: Ariel.

Garrison, D. & Anderson, T. (2005). *El e-learning en el siglo XXI. Investigación y práctica.* Barcelona: Octaedro.

Ministerio de Educación Pública, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2013). *Programa del curso Grupo 80. Curso bimodal de capacitación para docentes de Secundaria: Uso de tecnología y Uso de historia de las Matemáticas.* San José, Costa Rica: autor.

Ministerio de Educación Pública, Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica (2013). *Programa del curso Grupo 300. Curso bimodal de capacitación para docentes de Primaria: Uso de tecnología y Uso de historia de las Matemáticas.* San José, Costa Rica: autor.

Ramírez Vega, A. (2012). *Diseño, desarrollo e implementación del curso MA-1404 cálculo para estudiantes del TEC mediante estrategias de e-learning*. (Tesis inédita de licenciatura). Instituto Tecnológico de Costa Rica, Cartago, Costa Rica.

Suárez, C. (2002). *Los entornos virtuales de aprendizaje como instrumentos de mediación.* Ediciones Universidad de Salamanca. Recuperado el 2 de julio de 2013 de http://campus.usal.es/~teoriaeducacion/rev_numero_04/n4_art_suarez.htm

Universidad Estatal a Distancia. (2011). *Cómo diseñar y ofertar cursos en línea.* San José, Costa Rica: autor.

Apéndice A
Notas obtenidas por los docentes de primaria y secundaria en las evaluaciones de las UVA de los cursos bimodales 2013

Tabla 1.
Notas obtenidas por los docentes de secundaria en las evaluaciones de las UVA de los módulos 6, 7, 8 y 9 del curso bimodal 2013

Categorías de notas	UVA 6		UVA 7		UVA 8		UVA 9	
	Total	Porcentaje	Total	Porcentaje	Total	Porcentaje	Total	Porcentaje
De 0 a 25	21	13,4	10	6,4	15	9,6	23	14,6
De 26 a 50	48	30,6	13	8,3	17	10,8	13	8,3
De 50 a 75	0	0,0	28	17,8	24	15,3	26	16,6
De 75 a 100	59	37,6	73	46,5	65	41,4	54	34,4
No realizaron la evaluación	29	18,5	33	21,0	36	22,9	41	26,1

Fuente: Base de datos, curso bimodal 2013

Tabla 2
Notas obtenidas por los docentes de primaria en las evaluaciones de las UVA de los módulos 7, 8 y 9 del curso bimodal 2013

Categorías de notas	UVA 7		UVA 8		UVA 9	
	Total	Porcentaje	Total	Porcentaje	Total	Porcentaje
De 0 a 25	9	2,6	37	10,6	22	6,3
De 26 a 50	1	0,3	36	10,3	38	10,9
De 50 a 75	0	0,0	60	17,2	71	20,4
De 75 a 100	263	75,6	134	38,5	128	36,8
No realizaron la evaluación	75	21,6	81	23,3	89	25,6

Fuente: Base de datos, curso bimodal 2013

Apéndice B
Valoración de los docentes de primaria y secundaria respecto a las UVA de los cursos bimodales 2013

Tabla 3
Valoración de los docentes de secundariarespecto a las UVA de los módulos 0, 6, 7, 8 y 9 del curso bimodal 2013

Valoración de las UVA	UVA 0		UVA 6		UVA 7		UVA 8		UVA 9	
	Total	Porcentaje	Total	Porcentaje	Total	Porcentaje	Total	Porcentaje	Total	Porcentaje
Muy bueno	22	36,1	21	34,4	28	45,9	31	50,8	26	42,6
Bueno	21	34,4	19	31,1	18	29,5	17	27,9	20	32,8
Regular	13	21,3	14	23,0	10	16,4	10	16,4	11	18,0
Malo	3	4,9	5	8,2	3	4,9	3	4,9	4	6,6
Muy malo	2	3,3	2	3,3	2	3,3	0	0,0	0	0,0

Fuente: Base de datos, curso bimodal 2013

Tabla 4
Valoración de los docentes de primaria respecto a las UVA de los módulos 0, 7, 8 y 9 del curso bimodal 2013

Valoración de las UVA	UVA 0		UVA 7		UVA 8		UVA 9	
	Total	Porcentaje	Total	Porcentaje	Total	Porcentaje	Total	Porcentaje
Muy bueno	127	68,3	110	59,1	94	50,5	75	40,3
Bueno	45	24,2	58	31,2	50	26,9	56	30,1
Regular	11	5,9	15	8,1	31	16,7	38	20,4
Malo	1	0,5	1	0,5	4	2,2	10	5,4
Muy malo	2	1,1	2	1,1	7	3,8	7	3,8

Fuente: Base de datos, curso bimodal 2013

VilGebra como recurso de enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal

Enrique **Vílchez** Quesada
Escuela de Informática, Universidad Nacional
Costa Rica
enrique.vilchez.quesada@una.ac.cr

Resumen

En el contexto de la experimentación de aula, el autor del presente trabajo diseñó un paquete vinculado al conocido software comercial *Mathematica 9.0*, añadiendo a la aplicación ochenta y seis comandos para desarrollar distintos tipos de procedimientos en las áreas de contenido fundamentales de cualquier curso de álgebra lineal. El paquete denominado *VilGebra*, fue utilizado por una muestra de 40 estudiantes provenientes de la Universidad Nacional (UNA) y la Universidad de Costa Rica (UCR), dos importantes instituciones de educación superior en este país. Participaron también, 21 alumnos de un grupo control, con el objetivo de determinar las dificultades cognitivas más comunes en este campo de conocimiento. El estudio se enfocó en precisar el impacto que proporcionó a los grupos experimentales, el uso de la herramienta *VilGebra* para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje. La investigación fue de naturaleza descriptiva, implementada durante el II semestre del año 2013.

Palabras clave: enseñanza, aprendizaje, álgebra, lineal, software.

Introducción

La enseñanza y el aprendizaje de la matemática asistida por computadora en el marco de acción de las instituciones de enseñanza superior, plantea retos metodológicos que implican una equilibrada dosis entre la mediación pedagógica tradicional y el uso de la tecnología.

Usar tecnología con fines educativos propone interrogantes esenciales ante la ruptura de un escenario que en muchas universidades ha favorecido más la transmisión del conocimiento. Parte de estas interrogantes, pretenden evidenciar cuáles son los mecanismos ideales que garanticen un aprendizaje de calidad, complementando el uso de herramientas de software que proporcionen insumos de investigación en la resolución de problemas.

La presente investigación se circunscribe en un ámbito de aula tradicional que lucha por su hegemonía frente a las nuevas alternativas de enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal en carreras vinculadas con ingeniería. En este contexto, el uso del software comercial *Mathematica* ofreció las opciones de experimentación necesarias para analizar después de varios años de implementación, cuál debería ser el enfoque más adecuado de una estrategia de aprendizaje mediada por ordenador en esta área específica de conocimiento. Se utilizó una muestra proveniente de tres grupos de apoyo, dos de la Universidad Nacional de Costa Rica y uno de la Universidad de Costa Rica, respectivamente.

Fundamento teórico

Enseñanza y aprendizaje mediado

La enseñanza y el aprendizaje de la matemática se han caracterizado durante décadas en la educación superior, por centrar los procesos educativos en el docente, siendo este agente el principal mediador de los contenidos de clase. De acuerdo con Sánchez (2012):

> los estudiantes de matemática ven su aprendizaje como una tarea rutinaria y aburrida, de concepción árida donde pronto se pierde el verdadero interés de su estudio, donde los contenidos presentados por los docentes se realizan de forma rigurosa y no atractiva" (p. 24).

Esto ha desembocado en una educación arcaica, fragmentada y diluida lejos de aproximarse a un "*aprendizaje estratégico*". Según Córica y Dinerstain (2009) éste se produce cuando: "el estudiante intenta aprender de manera significativa e involucra un procesamiento del contenido de tipo informado, deliberado y autoregulado" (p. 125).

Una autoregulación marcada por experiencias previas a través de engranajes de enseñanza que favorezcan aprendizajes más duraderos mediante la mediación pedagógica. La presente investigación supone el uso de la tecnología educativa como un medio potenciador de espacios de mediación que conduzcan a la comprensión conceptual y el desarrollo de competencias matemáticas asociadas con conocimientos específicos en el campo del álgebra lineal. A este respecto, Trejos (2012) afirma:

> para fortalecer la enseñanza de las matemáticas es necesario recurrir al uso de la tecnología, a través de la cual se ejerce la acción educativa y la conducción de nuestros estudiantes hacia experiencias reflexivas que respalden la construcción de su aprendizaje, de manera autónoma" (p. 376).

Una experiencia reflexiva en áreas de conocimiento abstracto (como ocurre en álgebra lineal), solo puede ser efectiva al transformar dicha abstracción en objetos tangibles que el estudiante altere y manipule. La tecnología en este punto puede contribuir notablemente, tal y como lo señala Borbón (2003):

> la utilización de nuevas tecnologías en el salón de clases trae consigo una nueva gama de posibilidades para la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas (…) la principal razón es que estos instrumentos pueden mostrar, de forma dinámica, conceptos que son muy difíciles de enseñar de la forma tradicional (p. 1).

La mediación pedagógica intervenida con el uso de software es el punto de partida que ha impulsado el desarrollo del presente trabajo, creemos con ello, que el diseño pedagógico a través del uso transparente de la tecnología, puede favorecer la calidad de la enseñanza y el aprendizaje y desde luego, tener un impacto directo sobre el rendimiento académico mostrado por los alumnos en matemática.

Dificultades en la educación matemática asistida por computadora

La educación matemática apoyada en el uso de computadoras es un área de investigación impulsada fuertemente desde finales del siglo XX. Su aparición en el currículum de las carreras universitarias e inclusive de la educación básica, cobra en la actualidad un papel fundamental dentro de los ejes disciplinares y modelos pedagógicos de las distintas instituciones de enseñanza superior en Costa Rica.

La razón de ello, obedece a su indudable influencia dentro de las economías, la sociedad en general y la cultura. En el plano educativo la huella tecnológica propaga sus fines hacia la construcción de un recurso humano capaz de enfrentar los desafíos de un medio metamórfico, complejo y multidisciplinario. A este respecto, Ruíz (2013) define con claridad el aporte de la innovación curricular asistida por computadora:

> la tecnología se visualiza como un instrumento que replantea el lugar y organización de contenidos curriculares, los métodos de manipulación de los objetos de aprendizaje y la construcción de aprendizajes con base en estrategias nuevas y de mayor impacto individual y colectivo (p. 38).

La incorporación de la tecnología educativa pese a sus claras ventajas dentro de un marco de acción pedagógica bien planificada, presenta diversas dificultades traslucidas en distintas dimensiones. Interrogantes tales como: ¿qué recursos tecnológicos son más adecuados?, ¿cuándo utilizarlos?, ¿cómo afectan a la evaluación?, ¿es preferible crear o empaquetar?, u otras, son cuestiones que inciden la práctica educativa en su fase más primordial: lo que el docente implementa de manera real dentro del salón de clase. La tarea no es sencilla, más aún en escenarios donde la formación profesional muestra debilidades en este tipo de competencias. De allí, el trasiego de muchas experiencias educativas donde prevalece un enfoque dogmático-magistral con recursos no tradicionales. Artigue (2011) relacionado con lo anterior, señala:

> convertir una tecnología en legítima y matemáticamente útil desde un punto de vista educativo, sea cual sea la tecnología en cuestión, supone, si excluimos el caso de las formaciones más profesionales, modos de integración que permiten un equilibrio satisfactorio entre el valor epistémico y el pragmático de las técnicas instrumentadas asociadas. Y esto, como también lo muestra la investigación, si se examinan sus resultados con esta perspectiva, necesita que las tareas propuestas en los planes de estudio, no sean simples adaptaciones de lo que se hace con lápiz y papel (p. 22).

Desenmascarar la ilusión de la innovación ante las sombras de una pedagogía que falsamente se declara imparcial en los sistemas educativos tradicionales y en la Universidad, demanda una ruptura epistemológica únicamente posible a través de la investigación educativa. Los estudios de caso, en este contexto, pueden arrojar resultados que brinden un panorama claro sobre las formas más adecuadas de incorporación de tecnologías de información y comunicación. El presente estudio en esta dirección, representa un esfuerzo de continuidad de otro denominado: "*Percepción estudiantil sobre una metodología asistida por computadora en las áreas cognitivas del álgebra lineal y la matemática discreta*" (Vílchez y González, 2013). Esta investigación permitió redefinir una estrategia de uso de software, particularmente del programa *Mathematica 9.0*, en la enseñanza y el aprendizaje del álgebra lineal para ingeniería.

Construir y reconstruir representa una constante en este ámbito, donde resulta indispensable tomar conciencia del impacto positivo de las tecnologías en la educación matemática, en la medida en que los alumnos se logren apropiar a través de ellas, de las formas de razonamiento y el quehacer matemático en la resolución de problemas (Santos, 2011).

El software comercial *Mathematica*

Mathematica es una aplicación comercial desarrollada por la compañía *Wolfram Research*. Esta empresa fue fundada por *Stephen Wolfram* creador del software, quien junto a su grupo de investigadores lograron revolucionar desde su primer lanzamiento en 1988, la computación técnica orientada a la investigación científica.

En palabras de *Wolfram*: "*con sus dramáticos avances de 2007 y 2008, se encuentra actualmente al final de sus primeras dos décadas como el sistema definitorio del futuro de la computación*" (2014). Es sin duda hoy en día, uno de los programas más importantes utilizados en 15 departamentos del gobierno de los Estados Unidos y 50 de las mejores universidades a nivel mundial.

En la presente investigación se utilizó como referencia experimental este software, pues tanto la Universidad Nacional de Costa Rica como la Universidad de Costa Rica, cuentan con una licencia institucional del programa. Esta licencia permite a cualquier estudiante o docente adjunto, tener la posibilidad de auto gestar la cantidad de seriales necesarios para el uso de la aplicación.

Metodología

La investigación realizada con el presente trabajo fue de carácter descriptivo. Se recurrió a dos grupos experimentales: uno de la carrera Ingeniería en Sistemas de Información de la Universidad Nacional de Costa Rica y el otro de las carreras Ingeniería Industrial e Ingeniería Mecánica en la Universidad de Costa Rica. Ambas instituciones de enseñanza superior constituyen universidades públicas con un alto renombre a nivel nacional e internacional. También, participó un grupo control (de la UNA) para determinar las dificultades cognitivas a percepción de esta población, que presenta un curso clásico de álgebra lineal para ingeniería.

Antecedentes

Las estudiantes de los grupos experimentales utilizaron junto al autor de esta propuesta, el software *Mathematica* y particularmente un paquete denominado *VilGebra*, diseñado por el profesor de la materia.

VilGebra es el resultado de varios años de implementación de una metodología asistida por computadora en cursos de álgebra lineal para ingeniería. El paquete abarca 86 nuevos comandos de ciertas funciones que por defecto *Mathematica* no ejecuta. Los métodos aportan novedosas competencias en áreas de contenido tales como: matrices y determinantes, geometría vectorial, rectas y planos, espacios vectoriales, proyecciones ortogonales, transformaciones lineales, diagonalización de matrices y formas cuadráticas y, programación lineal.

En la experiencia docente del investigador, se planteó la necesidad de crear *VilGebra* como un recurso que facilitara el uso de *Mathematic*a potenciando sus capacidades de cálculo simbólico en la resolución de problemas no triviales, sin demandar un conocimiento profundo del ambiente de programación que el software provee. Este enfoque fue objeto de una validación anterior y parte de sus resultados se comparten en el artículo: "*Percepción estudiantil sobre una metodología asistida por computadora en las áreas cognitivas del álgebra lineal y la matemática discreta*" (2013, Vílchez y González).

Durante el II semestre del año 2013 los grupos experimentales complementaron una metodología tradicional de curso con otra asistida por computadora, específicamente recurriendo al uso del paquete *VilGebra* como principal mediador en la resolución de problemas. La modificación de la evaluación de los cursos, se fundamentó en sustituir en cada prueba parcial escrita, una pregunta a ser resuelta con apoyo de software en el laboratorio de informática. Al finalizar la experiencia se pasó un cuestionario a los 40 estudiantes participantes, con el principal objetivo de determinar el impacto motivacional y de aprendizaje de *VilGebra* y la metodología empleada.

Finalmente, se utilizó un grupo control con la intención de valorar las dificultades cognitivas propias de un curso de álgebra lineal concebidas por esta muestra. A continuación se comparten los resultados obtenidos.

Características de un curso de álgebra lineal para ingeniería

Con la finalidad de rescatar la percepción de los estudiantes del grupo control en este tema, se utilizó una escala *likert* que contempló las siguientes valoraciones: (1) muy de acuerdo, (2) de acuerdo, (3) medianamente de acuerdo, (4) en desacuerdo, (5) muy en desacuerdo. Un 57.1% de los estudiantes fueron de género masculino y un 42.9% de género femenino, ante una muestra de 21 alumnos. De ellos, 6 en edades entre los 17 y 19 años, 13 entre los 20 y 23 años, 1 entre los 24 y 27 años y 1 mayor a 27 años. Además, 6 llevaban el curso por primera vez y 15 de dos a tres veces. La tabla 1 reúne los porcentajes de respuesta.

Tabla 1
Singularidades de un curso de álgebra lineal grupo control

	1. Muy de acuerdo	**2. De acuerdo**	**3. Medianamente de acuerdo**	**4. En desacuerdo**	**5. Muy en desacuerdo**
Lo considero un curso difícil.	33.3%	38.1%	23.8%	4.8%	0%
El curso es interesante.	23.8%	28.6%	28.6%	14.3%	4.8%
El abordaje práctico es de naturaleza teórica.	14.3%	4.8%	52.4%	23.8%	4.8%
Es un curso importante dentro de mi formación profesional.	19%	28.6%	19%	19%	14.3%
Mis bases previas en matemáticas son las adecuadas.	4.8%	33.3%	28.6%	23.8%	9.5%
Los contenidos son abstractos.	47.6%	23.8%	23.8%	4.8%	0%
El abordaje práctico es de naturaleza de cálculo.	4.8%	23.8%	47.6%	9.5%	14.3%

En resumen, se logra interpretar las siguientes características de un curso de álgebra lineal para ingeniería:

- Es un área de difícil comprensión.
- Pese a ello, resulta ser interesante en la mayoría del estudiantado.
- Es de naturaleza teórica y abstracta y presenta diferencias con relación a un curso de cálculo.
- La materia es importante en el desarrollo de la carrera, aunque existe un 33.3% que opina lo contrario.
- También, un 33.3% no se considera capaz de llevar el curso con sus bases matemáticas previas.

A los grupos experimentales se les realizó las mismas preguntas. La muestra estuvo conformada por 40 alumnos, 67.5% hombres y 32.5% mujeres. De ellos, 16 entre los 17 y 19 años de edad, 17 entre los 20 y 23 años, 6 entre los 24 y 27 años y 1 con más de 27 años.

Además, 15 llevaban el curso por primera vez y 25 entre dos y tres veces. La tabla 2 muestra la tendencia de los resultados.

Tabla 2
Singularidades de un curso de álgebra lineal grupos experimentales

	1. Muy de acuerdo	**2. De acuerdo**	**3. Medianamente de acuerdo**	**4. En desacuerdo**	**5. Muy en desacuerdo**
Lo considero un curso difícil.	20%	57.5%	20%	2.5%	0%
El curso es interesante.	17.5%	42.5%	27.5%	5%	7.5%
El abordaje práctico es de naturaleza teórica.	17.5%	37.5%	40%	0%	5%
Es un curso importante dentro de mi formación profesional.	15%	20%	45%	10%	10%
Mis bases previas en matemáticas son las adecuadas.	10%	22.5%	55.5%	12.5%	0%
Los contenidos son abstractos.	22.5%	50%	27.5%	0%	0%
El abordaje práctico es de naturaleza de cálculo.	12.5%	32.5%	45%	7.5%	2.5%

Se observan pocas diferencias significativas en comparación con el grupo control. Pese a ello, en general hay un leve aumento en los porcentajes que conciben álgebra lineal como un curso interesante, menos difícil, teórico/abstracto e importante en la formación profesional. Un aspecto que pudo haber influido en estos leves cambios de percepción fue el uso del software *Mathematica* y el paquete *VilGebra*. También, hay un aumento relativo a considerar álgebra lineal similar a un curso de cálculo, a diferencia del grupo control. En este sentido, *VilGebra* tuvo un impacto en la percepción estudiantil al proveer herramientas de cálculo directo para la resolución de problemas, lo cual a juicio del autor de esta propuesta, es un aspecto muy positivo de la metodología empleada, al estar dirigido el curso a estudiantes de ingeniería.

Paquete *VilGebra* como recurso para la enseñanza y el aprendizaje

Los grupos experimentales completaron un cuestionario con preguntas en una escala *likert* con la finalidad de determinar el impacto de uso del paquete *VilGebra* en términos de aprendizaje. Se aplicó una prueba de fiabilidad al cuestionario arrojando un coeficiente *Alfa de Cronbach* igual a 0.846, un valor bastante aceptable de acuerdo con Hernández, Fernández y Baptista (2006), quiénes sugieren un estándar mínimo de 0.75. La tabla 3 muestra un resumen de las tendencias de respuesta.

Tabla 3
Puntos fuertes y débiles del paquete VilGebra

	1. Muy de acuerdo	**2. De acuerdo**	**3. Medianamente de acuerdo**	**4. En desacuerdo**	**5. Muy en desacuerdo**
VilGebra es útil para el curso.	67.5%	30%	0%	0%	2.5%
VilGebra facilita la visualización de conceptos.	65%	27.5%	5%	2.5%	0%
VilGebra permite resolver problemas.	72.5%	25%	0%	0%	2.5%
El uso de *VilGebra* y software facilita el aprendizaje.	55%	32.5%	10%	2.5%	0%
Es la primera vez que llevo un curso asistido por computadora.	72.5%	5%	2.5%	7.5%	12.5%
El uso de *VilGebra* y de software considero que mejora la enseñanza.	47.5%	37.5%	12.5%	2.5%	0%
VilGebra permite analizar problemas.	45%	50%	2.5%	2.5%	0%
El curso asistido por computadora llenó mis expectativas.	45%	37.5%	12.5%	2.5%	2.5%
VilGebra es una herramienta adecuada para el curso.	67.5%	27.5%	2.5%	0%	2.5%
Le agrada el uso software para el curso de álgebra lineal.	70%	22.5%	5%	0%	2.5%
Preferiría una metodología tradicional en este curso.	0%	2.5%	7.5%	40%	50%

De la tabla se concluye:

- Hay una percepción en un 97.5% respecto a la utilidad de *VilGebra* para impartir un curso de álgebra lineal asistido por computadora.
- Un 92.5% de la muestra percibe en *VilGebra* capacidades en la visualización de conceptos.
- Existe una fuerte tendencia de un 97.5% a considerar a *VilGebra* una buena herramienta para resolver problemas.
- 87.5% del alumnado opina una mejoría en el aprendizaje y un 85% en la enseñanza.
- Un 95% de la muestra está a favor de utilizar *VilGebra* para analizar problemas y lo considera adecuado para el curso.
- A 92.5% del estudiantado le agradó el uso de software y el paquete *VilGebra* para desarrollar contenidos de álgebra lineal, esto pese a existir un 77.5% de alumnos neófitos en el empleo de una metodología basada en el uso de un computador.

- La metodología resulta ser exitosa al tener un 82% de alumnos satisfechos con la experiencia implementada. De ellos, además un 90% percibe más adecuada dicha estrategia, en comparación con las lecciones magistrales tradicionales.

Por lo anterior en este estudio de caso, *VilGebra* resulta ser una herramienta muy propicia para abordar un curso de álgebra lineal en el campo de la ingeniería.

El cuestionario incluyó también, dos preguntas abiertas. Ante la interrogante: ¿Señale las fortalezas o debilidades que considere pertinentes en el paquete *VilGebra*? ¿Por qué?, se destacan las siguientes categorías:

- Es muy completo en cuanto a su contenido.
- Permite realizar visualización gráfica de conceptos y propiedades abstractas.
- Ayuda a resolver problemas de manera rápida y efectiva.
- Contribuye con el aprendizaje de definiciones y teoremas.
- Facilita el uso del software *Mathematica*.
- Es un plus dentro de la formación profesional recibida en la universidad, al constituirse *Mathematica* en un software enfocado en la investigación.
- *VilGebra* es de fácil uso y minimiza el trabajo y los cálculos tediosos que distraen la atención sobre el foco de un problema.
- Permite revisar ejercicios sin necesidad de la presencia del docente.

También, ante la pregunta: ¿Señale fortalezas o debilidades de la metodología asistida por computadora empleada en el curso? ¿Por qué?, arrojó los resultados:

- Se mejora el rendimiento académico.
- Mejora la enseñanza y el aprendizaje.
- Permite interiorizar más la materia vista en clase.
- Permite realizar experimentación en la resolución de un problema.
- Si se abusa de la metodología puede ser perjudicial pues se debe también aprender a resolver a mano los procedimientos.
- Puede implicar el uso de tiempo valioso en aspectos no directamente vinculados al curso.

Conclusiones

VilGebra en este estudio resultó muy exitoso con relación a las expectativas iniciales de su autor, entre sus fortalezas se destacan:

- Es robusto en cuanto a contenido.
- Es eficiente y fácil de emplear.
- Demuestra una mejoría en el aprendizaje al facilitar herramientas para el análisis y resolución de problemas, inclusive sin la presencia del profesor de aula.
- Demuestra una mejoría en la enseñanza al suministrar comandos de graficación de conceptos y propiedades abstractas.
- Facilita estrategias de exploración en la búsqueda de soluciones a un problema.
- Mejora el rendimiento académico, dado que las estadísticas de aprobación han ido incrementando desde el año 2011 hasta su último registro en el II semestre del año 2013.

Es fundamental enfatizar en esta experiencia, cómo ha resultado más adecuado para su autor, emplear una metodología asistida por computadora que minimice el riesgo de la

dispersión, sea sintáctica en cuanto al uso de *Mathematica*, o procedimental, en la solución de ejemplos que implican cálculos muchas veces inclusive, imposibles de realizar sin el apoyo de software. Bajo esta perspectiva, *VilGebra* proporciona los recursos necesarios con la intención de madurar una estrategia de enseñanza y aprendizaje del álgebra lineal para ingeniería, en diferentes contextos educativos.

Bibliografía y referencias

Arce, C., Castillo, W., & González, J. (2004). *Álgebra lineal.* San José: Editorial de la Universidad de Costa Rica.

Artigue, M. (2011). Tecnología y enseñanza de las matemáticas: desarrollo y aportes de la aproximación instrumental. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, *6*, 14-33.

Borbón, A. (2003). Algunos usos de las calculadoras y la computadora para introducir el concepto de derivada. *Revista Matemática*, *Educación e Internet*, 4, 1-10.

Córica, J., & Dinerstain, P. (2009). Diseño curricular y nuevas generaciones, incorporando a la generación .net. Argentina: Editorial Virtual Argentina.

Kolman, B. (1997). *Álgebra lineal con aplicaciones y Matlab*. México: Editorial Pearson.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2006). *Metodología de la Investigación.* México: McGraw Hill Interamericana.

Ruíz, A. (2013). Reforma de la educación matemática en Costa Rica. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, *8*, 1-115.

Sánchez, A. (2012). Incorporación de las TIC en el aprendizaje de la matemática en el sector universitario. *Revista de Educación Matemática* (*REM*), 27, 23-38.

Santos, M. (2011). La educación matemática, resolución de problemas, y el empleo de herramientas computacionales. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, *6*, 35-54.

Shiskowski, K., & Frinkle, K. (2011). Principles of Linear Algebra with *Mathematica*. USA: Wiley.

Trejos, L. (2012). El uso del lenguaje en la construcción del número natural: una situación didáctica de juego con calculadora. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *25*, 376-383.

Vílchez, E. (2012). *Álgebra lineal apoyada con Mathematica*. Costa Rica: Editorial Tecnológica.

Vílchez, E., & González, E. (2013). Percepción estudiantil sobre una metodología asistida por computadora en las áreas cognitivas del álgebra lineal y la matemática discreta. *Revista Matemática*, *Educación e Internet*, *14*, 1-16.

Wolfram Research (2014). Historia y orígenes. http://www.wolfram.com/company/mathematica-history.es.html. Consultado 20/01/2014.