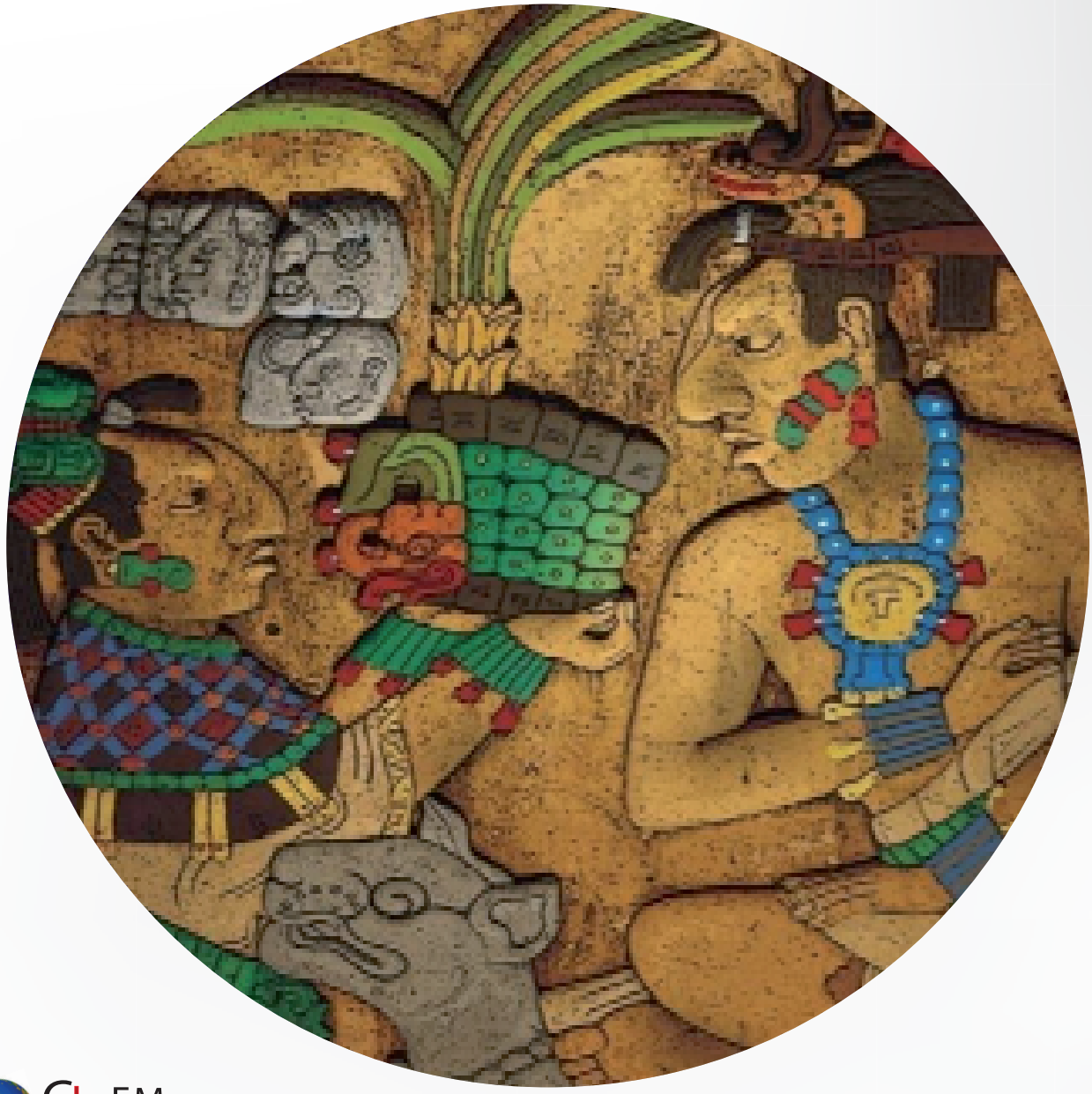
Educación Matemática en las Américas 2015

Volumen 17: Talleres y Minicursos



CIAEM
CME
Fundado Founded: 1961

© 2015
Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM)
Paseo de la Reforma 383., 7° Piso,
Colonia Cuauhtémoc, Delegación Cuauhtémoc,
México D.F. CP 06500, MÉXICO

www.ciaem-iacme.org
ciaem.iacme@gmail.com

Educación Matemática en las Américas 2015
Volumen 17: Talleres y minicursos
Editado por Patrick (Rick) Scott y Ángel Ruiz
Colaboradora: Sarah González.

ISBN Volumen: 978-9945-603-14-9
ISBN Obra Completa: 978-9945-415-97-1

El Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM) es una organización fundada en 1961 asociada a la International Commission on Mathematical Instruction. Busca potenciar la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en las Américas.

Se permite la reproducción de cualquier parte de este libro para fines no lucrativos siempre que se consignen los créditos a los autores y al Comité Interamericano de Educación Matemática.

Para citar este libro y este volumen:

Comité Interamericano de Educación Matemática (2015). *Educación Matemática en las Américas: 2015. Volumen 17: Talleres y minicursos*. Editores: Patrick (Rick) Scott y Ángel Ruíz. República Dominicana.

Tabla de Contenidos

Presentación i-iii

A Sequência Fedathi no ensino de Geometria: O uso dos pentaminós 1-9
Ana Paula Alves Santos-BR, Christiano Sales-BR, Daniel Menezes-BR

Análisis de tres categorías del conocimiento matemático para la enseñanza de la generalización en la escuela primaria 10-18
Hilduara Velázquez-CO, Jose Cisneros-CO, Walter Castro-CO, Patricia Konic-AR

Aplicação do LABGG para o ensino básico em Matemática: aula dinâmica com animação aplicada a funções do primeiro e do segundo grau 19-25
Teresa Bixirão Neto-PT, Eimard Gomes do Nascimento-PT

Aplicaciones de ecuaciones diferenciales mediadas por simulaciones interactivas 26-32
Juan Molina García-CO

APOE y la generalización como estrategia cognitiva para el aprendizaje en técnicas de conteo 33-45
Isabel Maturana Peña-CL, Marcela Parraguez-CL, Alejandro Nettle-CL

Articulação das tecnologias digitais aos processos de ensinar e aprender Geometria: perspectivas de abordagem no software GeoGebra 46-54
Andriceli Richit-BR, Maria Farias-BR, Adriana Richit-BR, Mauri Tomkelski-BR

Como um Matemático embrulha presentes gastando pouco material? 55-63
Juliana Cordeiro da Cunha-BR, Raquel Carneiro Dörr-BR

Competencias matemáticas, diseño y selección de tareas para el aprendizaje de las matemáticas en ingeniería 64-75
Ana Alicia Guzmán-CO, Edgar Obonaga Garnica-CO, Sandra Gutiérrez-CO

Construcciones de videojuegos para el desarrollo del pensamiento espacial en educación básica 76-82
Marisol Santacruz-MX, Ana Sacristán-MX, Angel Pretelín-Ricárdez-MX

Consumo consciente de agua, a estatística e o AVALE-EB. 83-90
Eliene Amorim-BR, Irene Cazorla-BR, Elaine Santos-BR

Cotidiano e Matemática: desde os primórdios 91-99
Ademir Basso-BR

Deducción de la fórmula del área del círculo en la formación inicial docente. 100-109
Luis Soto-HN

Desarrollo del sentido numérico para la construcción del concepto de número real 110-122
Omar Hernández Rodríguez-PR, Jorge López Fernández-PR, Ana Quintero-PR

Desenvolvimento do conceito de equação a partir da exploração do princípio da alavanca em balança de pratos 123-134
Eduardo Sarquis Soares-BR, Grace Marisa Miranda de Paula-BR

El continuo numérico en el último siglo: de las axiomáticas a los estructuralismos 135-143
Maribel Anacona-CO, Guillermo Ortiz-CO, Luis Arboleda-CO

Enseñanza del Álgebra Lineal basada en el uso del paquete VilGebra 144-149
Enrique Vílchez Quesada-CR

Escenarios de aprendizaje para la solución de problemas apoyados con matemática dinámica 150-156
Alfonso Meléndez Acuña- CO

ETM de la noción de tangente en un ámbito gráfico: cambios de dominios y de puntos de vista 157-168
Elizabeth Montoya Delgadillo-CL, Laurent Vivier-FR

Etnomatemática y Geometría Dinámica 169-176
María del Carmen Bonilla-PE

Figuras dinámicas y funciones: representaciones vinculadas en la pantalla de Geogebra 177-187
Enrique Di Rico-AR, Cecilia Lamela- AR, Juan Luna-AR, Carmen Sessa-AR

Formación de maestros desde numerario: una experiencia con fracciones 188-197
Gabriela Builes Gil-CO, Luz Díaz Gaviria-CO, Yolanda Beltrán de Covaleda-CO

Geogebra: programando interações em objetos geométricos 198-205
Iaqchan Homa-BR

Homeomorfismos: da intuição à visualização em construções geométricas 206-216
José Leivas-BR, Rosvita Franke-BR

Introducción de conceptos básicos de matemáticas desde la primaria: el caso del currículo en Costa Rica 217-225
Ricardo Poveda-CR

La evaluación continua en clase de Matemática 226-231
Alejandra Deriard-AR, Ana Martínez-AR, Gerardo Couyet-AR, Noelia García-AR

La incorporación al aula de prácticas de modelación/simulación del movimiento 232-238
Jaime Arrieta Vera-MX, Eduardo Carrasco-CL, Rafael Pantoja Rangel-MX

La visualización en la resolución de patrones 239-250
Sergio Damián Chalé Can

Limites e possibilidades dos registros de representação semiótica na construção de gráficos por meio dos softwares Geogebra e R 251-258
Fabiano Souza-BR, Cileda Coutinho-BR

O design de problemas com as tecnologias digitais no ensino da Matemática 259-266
Fabiane Fischer Figueiredo-BR, Rodrigo Dalla Vecchia-BR

O estudo do Teorema Fundamental das Curvas Planas utilizando o GeoGebra 267-278
André Lúcio Grande-BR, Larissa Nunes-BR, Marlon Silva-BR

O jogo da lâmpadas e sistemas lineares 279-287
Rubens Viriato Júnior-BR, Raquel Carneiro Dörr-BR

Pensamiento matemático y pensamiento estadístico: herramientas para enfrentar la incertidumbre. 288-299
Nelly León-VE

Professional knowledge of future primary teachers – how can diagnostic competency be fostered? 300-307
Macarena Larrain-CL, Gabriele Kaiser-DE

Reflexión sobre el razonamiento algebraico elemental en profesores de primaria y secundaria 308-317
Antonio Estepa-ES, Ángel Contreras-ES, Juan Godino-ES, Miguel Wilhelmi-ES

Reforzamiento del pensamiento algebraico con base en estratos de competencia funcional 318-326
Vicente Carrión Miranda- MX, Pablo Rafael Zamudio Cortés-MX

Sentido geométrico de objetos matemáticos no ostensivos que emergen en las prácticas computacionales de contexto algebraico 327-335
Larissa Sbitnava-MX, Nehemias Moreno M-MX, Melissa Cervantes- MX, Rogelio Valdez-MX

Sequência didática com polígonos e área de figuras planas utilizando objetos de aprendizagem 336-345
Iaqchan Homa-BR

Simulación de variables aleatorias discretas utilizando Excel 346-357
Greivin Ramírez Arce-CR, Kendall Rodríguez Bustos-CR

Una propuesta de enseñanza sobre la función lineal en el contexto de proyectos productivos agroindustriales 358-367
Ligia Torres Rengifo-CO, Ofelia Angulo Vallejo-CO

Una secuencia didáctica sobre la construcción del concepto de número natural en preescolar 368-379
Ligia Torres Rengifo-CO, Lina Vanessa Gutiérrez Vecca-CO

¿Versiones históricas no multiplicativas de la proporcionalidad? 380-390
Edgar Guacaneme (Colombia)

Presentación

La **XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática** realizada en Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México, del 3 al 7 de mayo del 2015, contó con la participación de cerca de 1000 personas de 23 países y la presentación de más de 500 trabajos (conferencias plenarias y paralelas, mesa redonda, minicurso, diálogos, comunicaciones, talleres y posters) Esta fue una reunión regional de la *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI). El CIAEM es la organización afiliada al ICMI con mayor antigüedad. Su creación se remonta al año 1961 cuando se realizó la primera conferencia en Bogotá, Colombia.

Un gran nivel científico dominó los trabajos, en un ambiente cultural muy especial, con una gran hospitalidad por parte de los colegas de Chiapas.

Los conferencistas plenarios fueron Michèle Artigue (Francia), Carlos Vasco (Colombia), Diane Briars (USA), Abraham Arcavi (Israel-Argentina), Celia Hoyles (Reino Unido), María Teresa Tatto (USA) y Alicia Ávila (México). Ellos también desarrollaron *Diálogos* especiales, espacios adicionales de conversación e intercambio.

Una mesa plenaria organizada por la *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe* contó con la participación de Carlos Sánchez (Cuba), Nelly León (Venezuela), Edison de Faría (Costa Rica), Luis Carlos Arboleda y Jhony Villa (Colombia).

El evento tuvo conferencias paralelas y minicursos impartidos por académicos invitados, entre ellos: Gabriele Kaiser (Alemania), Richard Noss (Reino Unido), Manuel Santos (México), Gert Schubring (Alemania), José Chamoso (España), José Luis Lupiáñez (España), Arthur Powell (USA), Alessandro Ribeiro (Brasil), Roberto Araya (Chile), Gilberto Obando (Colombia), Uldarico Malaspina (Perú).

Los dos temas principales fueron la *Preparación de docentes que enseñan matemáticas* y el *Uso de tecnologías en la Educación Matemática*.

El congreso tuvo el valioso patrocinio de varias instituciones internacionales y nacionales: International Commission on Mathematical Instruction; Universidade Luterana do Brasil; Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas, y Centro de Investigación y Formación en Educación Matemática de la Universidad de Costa Rica; Secretaría de Educación del Estado de Chiapas; Universidad del Valle de México; Sindicato de Trabajadores de la Educación de México; Centro Regional de Formación Docente e Investigación Educativa (CRESUR); Oficina de Convenciones y Visitantes de Chiapas; Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas de México; Escuela Normal Superior de Chiapas; Universidad de Costa Rica; HP; CASIO; y EduSystems.

Desde el 2007 el CIAEM ha logrado, entre otras cosas:

- Potenciar la calidad académica en los trabajos, la organización eficiente y la proyección de las conferencias interamericanas
- Consolidar la publicación de trabajos seleccionados de la Conferencias en la revista *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* (editada en Costa Rica)

- Fortalecer la relación del CIAEM con la comunidad internacional de Educación Matemática, especialmente con el ICMI y la *International Mathematical Union*.
- Crear y consolidar la Medalla *Luis Santaló*
- Apoyar el desarrollo del *Capacity and Networking Project* del ICMI en América Latina (Costa Rica 2012, Perú 2016)
- Auspiciar la creación y las actividades de la *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe*
- Apoyar la organización del *I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe*, celebrado en Santo Domingo, República Dominicana, en noviembre del 2013
- Consolidar el uso intenso de tecnologías de la comunicación en todas las actividades del CIAEM
- Crear una comunidad virtual del CIAEM de gran proyección tanto a través de su sitio web principal como de su página en Facebook
- Fundar en México el *Comité Interamericano de Educación Matemática* con personalidad jurídica para atender los múltiples compromisos formales que posee
- Traducir al español y publicar algunos textos del NCTM relacionados con la temática *Principles to actions* y continuar una línea importante de colaboración con el *National Council of Teachers of Mathematics* de los USA

En la XIV CIAEM fue confirmada la decisión de tener la XV CIAEM en Medellín, Colombia, en el 2019. Será desde hará 58 años la segunda ocasión en que se realizará una CIAEM en tierra colombiana.

CIAEM es el evento internacional más importante en Educación Matemática en América Latina. Constituye un punto de referencia para investigadores, docentes y estudiantes en todo el continente.

La mayoría de los textos de base para las presentaciones plenarias o paralelas ha sido incluidas en el número 15 de los *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* que se edita en Costa Rica: http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem.

Las comunicaciones, talleres, minicursos y posters han sido incluidas en esta colección digital de volúmenes que titulamos *La Educación Matemática en las Américas: 2015.* Los trabajos se han organizado de la siguiente manera:

- Volumen 1 *Educación Matemática en las Américas 2015: Formación Inicial para Primaria*
- Volumen 2 *Educación Matemática en las Américas 2015: Formación Inicial para Secundaria*
- Volumen 3 *Educación Matemática en las Américas 2015: Formación Continua*
- Volumen 4 *Educación Matemática en las Américas 2015: Uso de Tecnología*
- Volumen 5 *Educación Matemática en las Américas 2015: Etnomatemática y Sociología*
- Volumen 6 *Educación Matemática en las Américas 2015: Currículum, Evaluación y Competencias*
- Volumen 7 *Educación Matemática en las Américas 2015: Investigación*
- Volumen 8 *Educación Matemática en las Américas 2015: Estadística y Probabilidad*
- Volumen 9 *Educación Matemática en las Américas 2015: Geometría*
- Volumen 10 *Educación Matemática en las Américas 2015: Álgebra y Cálculo*

- Volumen 11 *Educación Matemática en las Américas 2015: Educación Primaria*
- Volumen 12 *Educación Matemática en las Américas 2015: Historia y Epistemología*
- Volumen 13 *Educación Matemática en las Américas 2015: Nuevos Enfoques y Relación con Otras Áreas*
- Volumen 14 *Educación Matemática en las Américas 2015: Necesidades Especiales*
- Volumen 15 *Educación Matemática en las Américas 2015: Resolución de Problemas*
- Volumen 16 *Educación Matemática en las Américas 2015: Modelación*
- Volumen 17 *Educación Matemática en las Américas 2015: Talleres y Minicursos*
- Volumen 18 *Educación Matemática en las Américas 2015: Posters*

El CIAEM desea agradecer a todos los autores que presentaron sus trabajos en la XIV CIAEM y que incluimos en esta colección de volúmenes. Y a todos los revisores, directores de tema, y colaboradores que participaron en la revisión científica de las ponencias de este magno evento.

La organización detallada y la edición en sus diversas dimensiones fue realizada por nuestro segundo vicepresidente Patrick Scott (Estados Unidos) quien dedicó un esfuerzo extraordinario para tener estas *Memorias* disponibles. Quiero expresar en nombre de nuestra organización nuestro agradecimiento a Rick. Nuestra compañera Sarah González (Vocal para El Caribe) se encargó de tramitar su registro en República Dominicana que contó con el apoyo de la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra de ese país, a las que también expresamos nuestra gratitud.

Los enlaces de estos volúmenes se han colocado en las páginas web oficiales del CIAEM.

Esperamos que la publicación de todos estos trabajos contribuya al progreso de la investigación y la acción de aula en la Educación Matemática de las Américas.

Angel Ruiz
Presidente
Comité Interamericano de Educación Matemática

A Sequência Fedathi no ensino de geometria: o uso dos pentaminós

Ana Paula Rodrigues **Alves** Santos
Universidade Federal do Ceará
Brasil
anapaularasantos@gmail.com
Christiano de **Almeida** Sales
Faculdade Ratio
Brasil
christiano.almeida@yahoo.com
Daniel **Brandão** Menezes
Universidade Federal do Ceará
Brasil
danielbrandao@multimeios.ufc.br

Resumo

Objetivamos com a realização dessa oficina contribuir para a formação inicial e/ou continuada de professores de Matemática, mostrando como podemos trabalhar a Geometria a partir dos pentaminós. Verificamos continuamente uma dificuldade por parte dos alunos em assimilarem e aplicarem alguns conceitos matemáticos, devido a ausência de uma participação mais ativa na construção do conhecimento. Apresentaremos atividades nas quais utilizaremos os pentaminós, que é um jogo matemático o qual fomenta a curiosidade do aluno em resolver problemas, por tornar o ambiente de sala de aula desafiador e dinâmico. Utilizaremos a metodologia Sequência Fedathi, a qual promoverá uma aprendizagem mais significativa, transformando a postura do professor, tornando-o mais reflexivo e ativo sobre a sua *Práxis*. Como resultado durante os processos de ensino e de aprendizagem da Matemática, teremos alunos mais autônomos, reflexivos e críticos, fomentando o caráter investigativo durante a construção dos conceitos matemáticos.

Palavras chave: Sequência Fedathi, pentaminós, formação de professores, ensino de Geometria.

Introdução

Esta oficina propõe alternativas para os professores de Matemática em dinamizar as suas aulas, tornando a participação do seu aluno mais ativa na construção do conhecimento, neutralizando o desinteresse e o distanciamento do aluno durante a apreensão de alguns conceitos geométricos, tais como: área, superfície, perímetro e semelhança de figuras.

De acordo com as novas tendências pedagógicas em Educação Matemática, exige-se cada vez mais que o professor tenha uma postura de ação transformadora na sua prática pedagógica cotidiana. Diante desse desafio, utilizaremos uma metodologia de ensino denominada Sequência

Fedathi[1], na qual o professor exerce as funções de refletir, ouvir, indagar e levantar hipóteses acerca do novo saber a ser construído, bem como promover a discussão entre os alunos. Sendo assim, temos como resultado um aluno mais reflexivo, investigativo, crítico e participativo durante o processo de construção do conhecimento.

Sendo essa oficina destinada a vinte participantes, formaremos grupos com quatro componentes. As atividades serão organizadas em cinco blocos, nos quais os participantes vivenciarão as etapas da metodologia Sequência Fedathi, descritos a seguir (ver tabela 1):

Tabela 1
Descrição das atividades

Bloco 1	Conhecendo os Pentaminós: Realizaremos um diagnóstico, a cerca dos pré-requisitos que os participantes necessitam ter referente aos jogos Matemáticos no ambiente de sala de aula, sobretudo ao uso dos pentaminós como ferramenta didática. Verfica-se o *"Plateau"* dos participantes. Esse momento tem como objetivo promover maior familiarização dos professores com os pentaminós.
Bloco 2	Atividade 1: Construindo Retângulos Pretendemos nesse momento mostrar aos participantes uma alternativa de trabalharem os conceitos de perímetro, área e superfície em sala de aula de uma forma significativa para os seus alunos.
Bloco 3	Atividade 2: Construindo Quadrados De uma forma lúdica, podemos mostrar aos nossos alunos que um quadrado também é um retângulo, estudando as suas propriedades.
Bloco 4	Atividade 3: Ainda construindo retângulos. De uma forma bastante desafiadora, os participantes solucionarão este problema, com o objetivo de trabalhar a formulação de estratégias e o raciocínio matemático.
Bloco 5	Atividade 4: Semelhança de Figuras Nesse momento haverá a formalização do uso dos pentaminós no ensino da Geometria, pois os professores criativamente demostrarão como utilizá-los para ensinar o conceito de Figuras Semelhantes.

Os Pentaminós como Ferramenta Didática

Os jogos matemáticos são indicados para se trabalhar em sala de aula por envolver ativamente os alunos na resolução de problemas de uma forma bastante desafiadora, motivando-os a ultrapassar dificuldades em busca da solução, tornando-os mais autônomos e colaborativos entre si. Os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática – PCN´s recomendam a utilização de jogos na construção de conceitos matemáticos, pois os jogos podem contribuir para um trabalho de formação de atitudes necessárias para a aprendizagem Matemática, a enfrentar desafios, lançar-se à busca de soluções, desenvolvimento da crítica, da intuição, da criação de estratégias e da possibilidade de alterá-las quando o resultado não é satisfatório, sem deixar marcas negativas (Brasil, 1998, p. 47).

[1] A Sequência Fedathi conduz o professor a levar os alunos a desenvolverem o raciocínio matemático, através da interpretação, compreensão e investigação de problemas matemáticos, levando-os a construírem suas aprendizagens a partir das experimentações e constatações feitas durante todo o processo de desenvolvimento da Sequência.

O termo poliminó foi lançado pela primeira vez por Solomon W. Golomb, em 1953, no Clube de Matemática da Universidade de Harvard. Mas o primeiro problema com pentaminós foi publicado por Henry Ernest Dudeney, um dos maiores inventores de quebra-cabeças, em 1907, na sua obra Canterbury Puzzles. Os poliminós foram divulgados a partir de 1957 pela coluna de Martin Gardner no Jornal Scientific American. Desde então, diversos pesquisadores procuram livros, palestras, artigos como também participam de discussões sobre esse jogo matemático. Houve também a formação de grupos internacionais para a resolução dos problemas geométricos, impulsionando as pesquisas na área de análise combinatória (Barbosa & Gandulfo, 2013)

Os poliminós são figuras planas formadas pelo agrupamento de quadrados que sejam adjacentes em pelo menos um lado. São classificados de acordo com o número de quadrados que os compõem: monominó (um quadrado), dominó (dois quadrados), triminó (três quadrados), …, n-minó (n quadrados). Essa oficina se deterá em abordar o uso dos pentaminós no estudo de conceitos geométricos. Os pentaminós fazem parte de um caso específico dos poliminós, que são formados por cinco quadrados adjacentes em pelo menos um lado, essa combinação de quadrados permite obtermos doze tipos de pentaminós, os quais identificamos através das letras do alfabeto (ver figura 1).

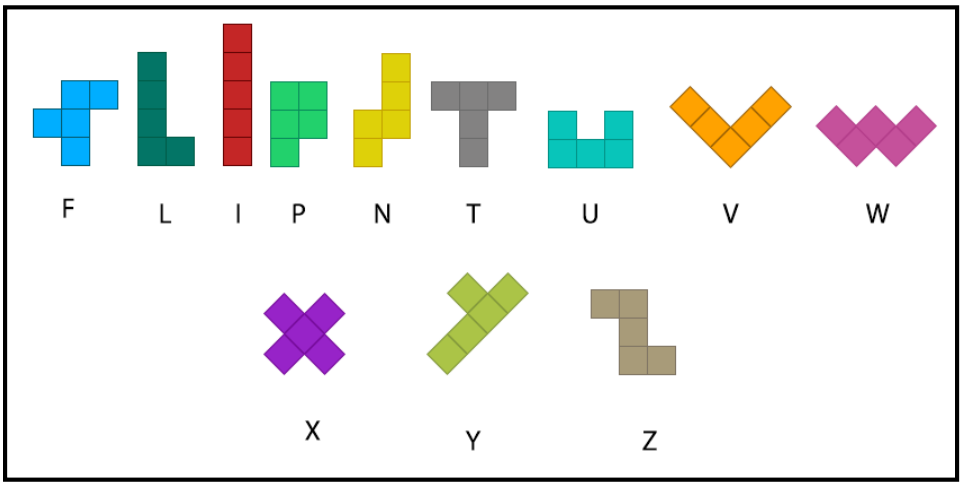


Figura 1. Nomenclatura dos pentaminós.

Não utilizamos os monominós, dominós ou triminós, pelo fato de serem constituídos por um menor número de peças, tornando as atividades não tão enriquecedoras. Os tetraminós (poliminós formados por quatro quadrados) não nos será atrativo, pois além de ser simples, são bastante populares, sendo conhecidos através dos jogos eletrônicos chamado Tetris. Os pentaminós, por não serem tão populares, tornam-se mais interessante aos participantes, promovendo o autodescobrimento, enriquecendo cada atividade realizada.

De acordo com as novas tendências pedagógicas em Educação Matemática, exige-se cada vez mais que o professor tenha uma postura de ação transformadora na sua prática pedagógica cotidiana. Diante desse desafio, utilizaremos uma metodologia de ensino denominada Sequência Fedathi, na qual o professor exerce as funções de refletir, ouvir, indagar e levantar hipóteses acerca do novo saber a ser construído, bem como promover a discussão entre os alunos. Sendo assim, temos como resultado um aluno mais reflexivo, investigativo, crítico e participativo durante o processo de construção do novo saber.

A metodologia Sequência Fedathi

A metodologia Sequência Fedathi propõe que o aluno se debruce sobre a situação-problema proposta, reproduzindo os passos que um matemático realiza quando se debruça sobre os seus experimentos: aborda os dados em questão, experimenta vários caminhos que possam levar a solução, analisa possíveis erros, busca conhecimento para construir a solução, testa os resultados, corrige-se e monta um modelo (Sousa, Vasconcelos, Borges Neto, Lima, Santos & Andrade, 2013 p.18).

A Sequência Fedathi é constituída por quatro etapas sequenciais e interdependentes: Tomada de Posição, Maturação, Solução e Prova (Borges Neto, Cunha, Lima & Souza, 2001). Descreveremos detalhadamente cada etapa a seguir.

Análise Ambiental e teórica: o plateau e o acordo didático

Nessa fase, verificamos os conhecimentos prévios dos participantes em relação a utilização dos jogos matemáticos em sala de aula e a sua criatividade em desenvolver atividades com os pentaminós, trabalhando conteúdos matemáticos. Os participantes formarão grupos com quatro componentes, sendo que cada grupo receberá um jogo de pentaminós (ver figura 2). Primeiramente, pediremos que observem as peças e quantas peças compõe o jogo. Nesse momento é necessário conhecer o "plateau[2]"dos participantes, por isso serão desafiados a responder algumas perguntas: Se existe alguma semelhança entre esse jogo e o dominó. Se conhecem esse jogo. Já trabalharam algum jogo matemático em sala de aula, se sim, qual o conteúdo. Enfim, serão verificados os seus conhecimentos prévios em relação ao uso dos pentaminós em sala de aula. Com o retroprojetor multimídia mostraremos aos participantes que os pentaminós, são doze, os quais associamos as letras do alfabeto.

Figura 2. Pentaminós.

Diante dessas ações verificaremos o *plateau* dos participantes e estabeleceremos o acordo didático. Do ponto de vista da Sequência Fedathi, o acordo didático enfatiza o desenvolvimento do trabalho do professor, a organização de estratégias metodológicas que possam ser pensadas durante a preparação de uma sessão didática, a postura que o professor deve assumir durante o processo de ensino e aprendizagem, que é a postura de mediador, ao observar as investigações dos estudantes, acompanhando-os durante a descoberta do novo saber. Portanto, adotaremos a postura de mediador durante a realização das atividades, estabeleceremos regras para mediar o

[2] De acordo com a Sequência Fedathi, o "plateau" faz parte do processo de diagnóstico realizado para compreender o nível cognitivo dos alunos (Sousa, Vasconcelos, Borges Neto, Lima, Santos & Andrade, 2013 p.20).

trabalho dos participantes (acordo didático), resultando em participantes mais investigativos, reflexivos, críticos e autônomos.

Após manipular os pentaminós, ativando as percepções dos participantes com o objetivo de fomentar a sua utilização durante os procesos de ensino e de aprendizagem de alguns conceitos matemáticos, conhecerão a História dos Pentaminós (mencionada na secção anterior).

Esperamos alguns questionamentos, tais como: podemos utilizar as peças do lado oposto e girá-las. Como utilizar os pentaminós no ensino da Geometria. Teremos realmente como resultado uma aprendizagem mais significativa. Os conteúdos que podemos trabalhar em sala de aula.

Tendo verificado o nível cognitivo dos participantes, daremos início a primeira etapa da Sequência Fedathi, a **Tomada de Posição**. Nessa etapa, o problema será apresentado (atividades a serem realizadas), promovendo a interação entre mediador e participantes, propiciando o trabalho interativo, ou seja, o mediador insere-se no grupo com as funções de refletir, ouvir, indagar e levantar hipóteses acerca do novo saber, bem como suscitar estes questionamentos entre todos.

No momento da **Maturação**, os participantes devem buscar compreender o problema e tentar identificar os possíveis caminhos que possam levá-los a uma solução, devem identificar quais os dados contidos no problema, qual a relação entre eles e o que está sendo solicitado pela atividade. Será um dos momentos de grande relevância na formulação do raciocínio matemático, onde serão feitos os questionamentos, proporcionando ao mediador o *feedback* necessário para acompanhar o desenvolvimento do trabalho dos participantes. Os questionamentos poderão surgir do mediador ou dos participantes, espera-se que primeiramente sejam feitos pelos participantes, pois eles é que se debruçarão sobre os dados do problema, originando-se a partir daí as reflexões, hipóteses e formulações, na busca de caminhos que conduzam à solução do problema em questão. Sendo que os questionamentos também podem partir do mediador, através de perguntas estimuladoras, esclarecedoras e orientadoras (Sousa, Vasconcelos, Borges Neto, Lima, Santos & Andrade, 2013 p.23).

A terceira etapa, é a **Solução**, nesse momento os participantes deverão organizar e apresentar modelos que possam conduzí-los a encontrar o que está sendo solicitado pelo problema. O mediador dará tempo aos professores para que pensem, reflitam e avaliem as suas respostas, por meios de ensaios, erros e tentativas, para, junto ao mediador, validar os modelos criados. Esse é um momento em que os participantes exercitarão a autonomia e perceberão a importância da participação de cada um na elaboração de sua aprendizagem. O mediador estará junto de cada participante para analisar as diferentes formas de representações por eles apresentadas, para, com apoio nelas, possa buscar a constituição do novo conceito matemático implicado. O mediador deverá mostrar para os participantes que a solução ideal deve satisfazer não só o problema em questão ou somente determinadas situações, mas sim o número maior possível de situações que necessitem desse conhecimento conforme a sua resolução. Destacamos nessa etapa a importância da discussão das soluções, para os participantes perceberem as diferentes compreensões e representações do grupo em relação aos problemas matemáticos propostos.

Após as discussões realizadas a respeito das soluções dos participantes, o mediador deverá apresentar o novo conhecimento como meio prático e otimizado para conduzir a resposta do problema. É nessa etapa final que o novo saber deverá ser compreendido e assimilado pelos

participantes. A **Prova** constitui a finalização do processo de ensino e aprendizagem, o mediador deverá levar cada participante a elaborar o modelo geral do conhecimento em jogo. Ressaltamos que o modelo geral refere-se ao conceito final, representação genérica ou fórmula a ser apreendido, a qual será um objeto de conhecimento tanto para a resolução do problema em questão, como para sua aplicação na resolução de outras situações-problema.

Portanto com a realização das atividade, os participantes percorrerão o seguinte caminho que representa as etapas da Sequência Fedathi:

O mediador apresentará o problema generalizável;

Os participantes se debruçarão sobre o problema na busca da solução;

Mediador e participantes discutem as soluções apresentadas, quando o mediador identifica os erros e acertos para o encaminhamento da solução final;

Após as soluções discutidas, o mediador exibirá a solução correta, enfatizando o conhecimento que planeou ensinar.

A **avaliação** dos participantes deve ser realizada nessa última etapa, através de questionamentos propostos pelo mediador, para que ele possa verificar se realmente houve a apreensão do novo saber.

Atividades com os Pentaminós

Nesta oficina propomos uma sequência didática composta de quatro atividades devidamente estruturada para serem trabalhadas com alunos do ensino fundamental. Apresentamos os objetivos, a indicação da série, o tempo necessário para realizar cada uma, o material necessário para sua realização e proposta de avaliação. Elas têm como objetivo despertar o interesse dos alunos pelo estudo da Geometria e tornar a aprendizagem mais significativa.

Atividade 1: Construindo Retângulos

Os participantes aprenderão a utilizar os pentaminós para o cálculo de perímetro e área.
Objetivos: Familiarizar os participantes com os pentaminós, construindo retângulos; desenvolver uma visão atrativa e dinâmica para o ensino e aprendizagem de alguns conceitos, tais como: área e perímetro. Discutir sobre o ensino desses conceitos com aulas diferenciadas no Ensino Fundamental.
Metodologia: Os participantes vivenciarão a primeira etapa da Sequência fedathi, a Tomada de posição.
Indicação: A atividade pode ser trabalhada com alunos do Ensino Fundamental (5º ao 9º anos). Tempo estimado: 20 minutos.
Material necessário: Para a realização desta atividade faz-se necessário os pentaminós: U, P e V. Papel e lápis para anotações dos participantes.
Avaliação: Debateremos em grupos estratégias iniciais e como solucionaram a questão. Espera-se que ao final da atividade os participantes identifiquem as propriedades dos retângulos utilizando os pentaminós.

Atividade 2: Construindo Quadrados

Os participantes aprenderão a utilizar os pentaminós para o cálculo de perímetros e área.
Objetivos: Familiarizar os participantes com os pentaminós, construindo quadrados; trabalhar conceitos como área e superfície. Discutir sobre a diferença desses conceitos no Ensino Fundamental.

Metodologia: Nesse momento, os participantes estão preparados para vivenciar a segunda etapa da Sequência Fedathi, a **Maturação.**
Indicação: A atividade pode ser trabalhada com alunos do Ensino Fundamental (5º ao 9º anos) dependendo do nível de aprofundamento da discussão proposta.
Tempo estimado: 30 minutos.
Material necessário: Para a realização desta atividade faz-se necessário os pentaminós: U, P, X, L e T. Papel e lápis para anotações dos participantes.
Avaliação: Debateremos em grupos estratégias iniciais e como solucionaram a questão. Espera-se que ao final da atividade os participantes identifiquem as propriedades dos quadrados, bem como o cálculo do perímetro e da área, utilizando os pentaminós.

Atividade 3: Ainda construindo retângulos.
Os participantes aprenderão a utilizar os pentaminós para o cálculo de perímetro e área, através da formulação de estratégias.
Objetivos: Mostrar aos participantes que é interessante durante as aulas colocar situações desafiadoras aos alunos. Trabalhar a formulação de estratégias e o raciocínio matemático.
Metodologia: Os participantes vivenciarão a terceira etapa da Sequência fedathi, a **Solução.**
Indicação: A atividade pode ser trabalhada com alunos do Ensino Fundamental (7º ao 9º anos).
Tempo estimado: 20 minutos.
Material necessário: Para a realização desta atividade faz-se necessário os doze pentaminós. Papel e lápis para anotações dos participantes.
Avaliação: Debateremos em grupos estratégias iniciais e como solucionaram a questão. Espera-se que ao final da atividade os participantes identifiquem as propriedades do retângulo e estabelaçam a diferença entre os conceitos de área e superfície.

Atividade 4: Figuras Semelhantes
Os participantes aprenderão a utilizar os pentaminós para determinar a razão de semelhança e despertar nos seus alunos a construção do conceito de Figuras Semelhantes.
Objetivos: Estabelecer a relação entre lado e perímetro, lado e área, razão de semelhança, construindo o conceito de Figuras Semelhantes.
Metodologia: Nesse momento de grande relevância, os participantes colocarão os seus conhecimentos em prática, com a última etapa da Sequência Fedathi, a **Prova**.
Indicação: A atividade pode ser trabalhada com alunos do Ensino Fundamental (9º ano).
Tempo estimado: 30 minutos.
Material necessário: Para a realização desta atividade faz-se necessário os pentaminós P, I, L, Y e W. Papel, lápis para anotações dos participantes.
Avaliação: Debateremos em grupos estratégias iniciais e como solucionaram a questão. Espera-se que ao final da atividade os participantes identifiquem como trabalhar o conteúdo de Figuras Semelhantes de uma forma significativa para o aluno. Formulando uma situação-problema a partir da resolução dessa atividade.

Pretendemos com a realização dessa oficina contribuir para a formação inicial e/ou continuada dos participantes, tornando-os mais reflexivos sobre a sua *Práxis* em sala de aula, fomentando ideias inovadoras, formas de envolver os alunos na elaboração dos conceitos geométricos, além de incentivar a busca pelo aperfeiçoamento profissional no seu cotidiano.

Considerações Finais

Os pentaminós possibilitam o estudo de vários conteúdos relacionados à Geometria (isometrias, congruências, semelhanças de figuras, áreas, perímetros), à Aritmética e à Análise Combinatória. Também desenvolve a percepção espacial e o raciocínio matemático. Escolhemos nessa oficina trabalhar com alguns conceitos geométricos, como área, superfície, perímetro e semelhança, devido a grande dificuldade do aluno assimilar e aplicar estes conceitos de grande relevância no estudo da Geometria.

Empregamos a metodologia Sequência Fedathi, com o objetivo de tornar a postura do professor mais reflexiva, crítica, participativa e competente. Pretendendo assim, que os seus alunos tenham uma nova perspectiva sobre a aprendizagem em Geometria, relacionando com os seus conhecimentos prévios e com o seu cotidiano, ajudando-o a compreender melhor a vida.

Referências

Barbosa, J. A. & Gandulfo, A. M. R. (2013). *Explorações Geométicas Lúdicas com Poliminós* (UNB).

Borges Neto, H., Cunha, F. G. M., Lima, I. P., & Souza, M. J. A. (2001). *A Sequência Fedathi como Proposta Metodológica no Ensino-Aprendizagem de Matemática e sua Aplicação no Ensino de Retas Paralelas*. Encontro de Pesquisa Educacional do Nordeste. Educação – EPENN, 15, Anais. São Luís.

Brasil. Ministério da Educação e Cultura. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental.* 5ª a 8ª, série, Brasília.

Sousa, F. E. E., Vasconcelos, F. H. L., Borges Neto, H., Lima, I. P., Santos, M. J. C., & Andrade, V. S. (2013). *Sequência Fedathi: uma proposta pedagógica para o ensino de Ciências e Matemática*. Fortaleza, CE: Edições UFC.

Apêndice

Atividades com os Pentaminós

Atividade 1: Construindo Retângulos
Construir um retângulo utilizando as peças U, P e V dos pentaminós (ver figura 3), de forma a pavimentar toda a superfície retangular, sendo a área de cada quadrado $1m^2$. Determine a área e o perímetro desse retângulo.

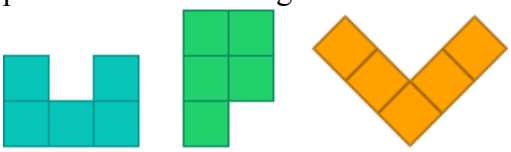


Figura 3. Pentaminós U, P e V, respectivamente

Atividade 2: Construindo Quadrados
Construir um quadrado com as peças U, P, X, L e T dos pentaminós (ver figura 4), de forma a pavimentar toda a superfície quadrangular.

Figura 4. Pentaminós U, P, X, L e T, respectivamente

Atividade 3: Ainda construindo retângulos
Construa um retângulo 6 x 10 usando os 12 pentaminós. Só existe uma solução?

Atividade 4: Semelhança de Figuras
Duplicar o pentaminó (ver figura 5), combinando os quatro pentaminós I, L, Y e W.

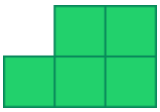


Figura 5. Pentaminó P

Informação Geral	
Título da oficina	A Sequência Fedathi no ensino de geometria: O uso dos pentaminós
Nome dos autores	Ana Paula Rodrigues Alves Santos Christiano de Almeida Sales Daniel Brandão Menezes
Instituição dos autores	Universidade Federal do Ceará
País ou países dos autores	Brasil
Número de horas	Duas horas
Nível educativo da oficina	Professores do Ensino Fundamental (6º ao 9ºanos) e estudantes de Graduação e pós-graduação em Matemática.
Número máximo de participantes	20
Material utilizado	Cinco conjuntos de pentaminós de madeira
Equipamentos audiovisuais ou informáticos necessários	Projetor multimídia

Análisis de tres categorías del conocimiento matemático para la enseñanza de la generalización en la escuela primaria

Hilduara **Velásquez** Echavarría
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
sarcavelasquez@gmail.com
José Wilde **Cisneros**
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
jose.wilde@gmail.com
Walter Fernando **Castro** Gordillo
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia
wfcastro82@gmail.com
Patricia **Konic**
Departamento de Matemática, Universidad de Rio Cuarto
Argentina
pkonic@gmail.com

Resumen

Diversas investigaciones informan sobre las dificultades que los maestros tienen para reconocer y promocionar el razonamiento algebraico elemental. En este taller se discute sobre tareas de generalización, sus características y los vínculos que éstas tienen con el modelo del "conocimiento matemático para la enseñanza" (MKT) propuesto por Ball y colaboradores. Se cuestiona el conocimiento matemático para la enseñanza (MKT), en las categorías del Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS), el Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT) y el Conocimiento Especializado (CSK) en tareas relacionadas con la generalización en la escuela primaria. Se propone una herramienta de análisis epistémico para identificar conocimientos presentes en las tareas de generalización y los conflictos emergentes en su discusión. Esta herramienta promueve vincular las tres categorías del conocimiento del profesor.

Palabras clave: Conocimiento matemático para la enseñanza, generalización, formación de profesores, razonamiento algebraico elemental, análisis epistémico.

Presentación

El propósito del taller es debatir los conocimientos para la enseñanza de temas relacionados con la generalización en la escuela primaria. Se pretende movilizar tanto aspectos del modelo del conocimiento del profesor como mostrar una herramienta para el análisis didáctico- matemático (Godino, 2011) para poner en cuestión los conocimientos del maestro durante la enseñanza de temas específicos.

El taller se desarrolla en dos momentos: en el primero, se indaga con los participantes sobre la forma en que abordan la generalización de patrones puntuales; en el segundo momento, se desarrollan dos tareas de generalización matemática escolar.

Marco Teórico

El estudio del conocimiento que deben tener los maestros para la enseñanza de las matemáticas ha sido un asunto de reflexión e investigación. Investigadores como (Shulman, 1986, 1987; Ball, 2000; Ball, Hill, & Bass, 2005; Ball, Lubienski, & Mewborn, 2001; Godino, 2009, 2011; Godino, Batanero, & Font, 2007; Gómez, 2007; Hill, Rowan & Ball, 2005; Ponte, 2012; Ponte & Chapman, 2008) han propuesto, desde diversas perspectivas epistemológicas del conocimiento matemático y de la educación matemática, diferentes modelos que han permitido describir, valorar y guiar el proceso de enseñanza y aprendizaje.

El Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK), propuesto por Shulman (1987) ha servido de referencia para otros trabajos de investigación como los de Ball (2000); Ball et al., (2001) quienes han introducido la noción de "conocimiento matemático para la enseñanza" (MKT)1. Hill, Ball y Schilling (2008) definen el conocimiento matemático para la enseñanza como "el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y desarrollo en el alumno" (p. 374). Es aquel conocimiento que caracteriza al maestro que enseña matemáticas "Tal conocimiento no es algo que tendría un matemático en virtud de haber estudiado matemáticas avanzadas… más bien es un conocimiento especial para la enseñanza de las matemáticas" (Ball et al., 2001, p. 448).

El equipo de investigación de Ball et al. (2005) establece dos categorías del Conocimiento Matemático para la Enseñanza: el Conocimiento del Contenido y Conocimiento Pedagógico del Contenido; en la primera categoría se ubican, Conocimiento Común del Contenido (CCK), Conocimiento Especializado del Contenido (SCK), y Conocimiento en el Horizonte Matemático. En la segunda categoría se ubican tres tipos de conocimiento: el Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS), el Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT), y el Conocimiento del Currículo; en la Figura 1 se aprecia estas categorías de conocimiento. Sin embargo éste modelo falla en proponer articulaciones entre estas categorías de conocimiento.

En el taller se propone articularlas y conectarlas en el marco de una temática específica de interés tal como la generalización matemática escolar en el nivel de primaria.

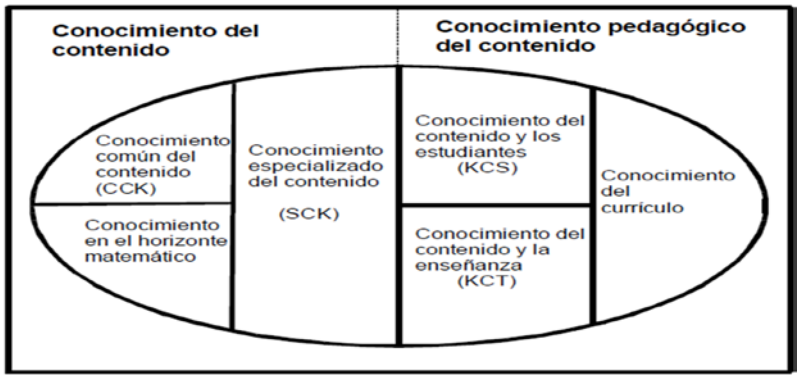


Figura 1. Conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) (Hill et al., 2008, p. 377).

[1] Mathematical Knowledge for Teaching (MKT).

En la investigación (Hill et al., 2005) sobre la influencia del conocimiento matemático para la enseñanza, en el desempeño de los estudiantes, se afirma que "…el conocimiento del contenido juega un papel fundamental incluso en la enseñanza de contenidos elementales de matemáticas" (p. 399). La manifestación de éstos conocimientos, pueden evidenciarse en la manera como los niños abordan situaciones de generalización en diferentes contextos matemáticos así como en los conocimientos requeridos por el maestro para la enseñanza de los procesos de generalización matemática escolar.

Los estudiantes de secundaria tienen dificultades con el aprendizaje del álgebra por la forma como se aborda en el currículo escolar, que se caracteriza por la presencia de fórmulas y procedimientos sintácticos que parecen carentes de significado para los niños (Carraher, Martínez & Schliemann, 2008; Mason, 1996; Molina, 2006; Molina, Castro & Castro, 2009; Godino, Castro, Ake & Wilhelmi, 2012) y que manifiestan una ruptura con la experiencia aritmética de los niños. Estas dificultades tienden a subsanarse mediante el estudio temprano del álgebra en la primaria (Derry, Wilsman & Hackbarth, 2007; Strother, 2011) enfatizando en procesos de generalización, búsqueda de patrones y regularidades, modelación, y representación de diferentes contextos matemáticos (Godino & Font, 2003).

Mason (1996) argumenta a favor de la introducción del álgebra en la escuela primaria, al reconocer que los estudiantes tienen capacidades naturales de generalización y habilidades para expresar patrones de formación, de modo que el desarrollo del razonamiento algebraico depende, esencialmente, del tratamiento que se da al álgebra desde los primeros grados. Diversos estudios (Blanton & Kaput, 2006; Molina, 2006) coinciden en que el álgebra puede enseñarse a partir de los primeros grados escolares y puede servir como una preparación para el estudio del álgebra en grados superiores, y exponen el caso de la generalización como un enfoque a través del cual se hace factible esta propuesta. Otros enfoques son: la resolución de problemas, la modelación y la función.

Lee (1996) afirma "No es difícil demostrar que la función, la modelación, y la solución de problemas son todas actividades de generalización, que el álgebra y todas las matemáticas tratan con generalización y patrones" (p. 102). Cuando los estudiantes producen una expresión o representación sucinta a partir de la comprensión que tienen, hay generalización. Carraher et al. (2006) presentan la generalización como una actividad intelectual que realizan los sujetos habitualmente y que consiste en detectar regularidades y generar una expresión para éstas. La expresión puede ser verbal, simbólica, icónica o gráfica.

Stacey (1989) hace una distinción entre la generalización cercana, que consiste en la identificación de un patrón a partir de una estrategia de conteo, un dibujo o una tabla; y la generalización lejana, que se caracteriza por la identificación de una regla general, independiente del caso que se considere.

Godino, Rivas, Castro & Konic (2008); Castro, Godino & Rivas (2011) proponen una herramienta de análisis epistémico de las tareas, que tiene tres objetivos: El primero, explorar objetos y significados puestos en juego en la solución de una tarea; el segundo, identificar posibles conflictos de significado y predecir dificultades y errores que podrían surgir en las soluciones que los estudiantes brindarían a la tarea, y el tercero, explorar cómo el uso de las entidades primarias permite predecir e identificar conflictos potenciales. Esta herramienta favorece dar una mirada tanto a los elementos primarios de significado como a los conflictos que se ponen en juego en la solución de una tarea matemática y que se manifiestan durante la actividad generada con motivo de su solución.

Metodología

Las actividades durante el taller se desarrollan en dos momentos; en el primero se proponen dos tareas de generalización matemática, una vez los participantes las resuelvan, se formulan cuestionamientos sobre los conocimientos requeridos por el maestro para su enseñanza y se resaltan los posibles conflictos entre las soluciones de los niños y las de los maestros.

En el segundo momento los participantes resuelven dos tareas matemáticas de generalización y a continuación, se ponen en cuestión las tres categorías del conocimiento del maestro, en torno a las soluciones dadas por los participantes. Se incluyen soluciones dadas por niños de escuela elemental y maestros en formación, que favorecen la discusión de las posibles dificultades del aprendizaje de éste tema en particular.

Las reflexiones se orientan hacia el establecimiento de algunas relaciones entre tres de las categorías de conocimiento (MKT): el Conocimiento Especializado del Contenido (SCK), el Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS) y el Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT). Mediante la propuesta de análisis didáctico de Godino (2011) se articulan las tres categorías donde el conflicto de significado orienta el análisis de las tareas.

Primer momento

Tarea 1. Observa la siguiente secuencia de figuras:

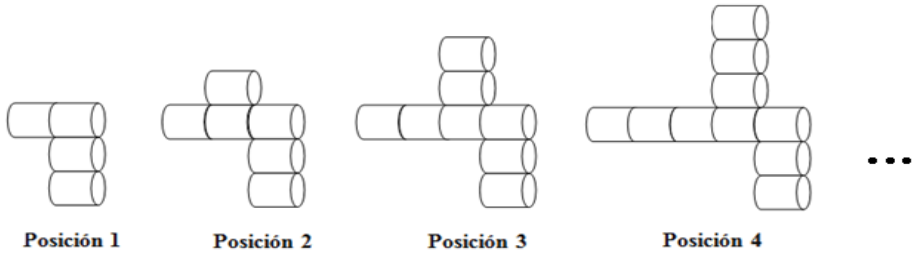


Figura 2. Secuencia de cilindros.

Dibuja la figura de la quinta posición

¿Cuántos cilindros conforman la figura de la octava posición?, explica tu respuesta

¿Cómo encontrarías la cantidad de cilindros que están en una posición cualquiera?

¿Existe una configuración que contenga 25 cilindros?

¿En cuál posición está la configuración que contiene 30 cilindros?

Tarea 2. Encuentra el patrón de formación de los números que se dan a continuación, y escriba los tres números siguientes: 32, 16, 8, 4, 2, 0.5,…

Segundo momento

Tarea 3. Discutir la regla para construir triángulos a partir de una configuración y de una condición dada2.

Con tres palillos o palos de helado se forma un triángulo de tal manera que para cada lado se utilice sólo un palillo, como se muestra en la Figura 3.

[2] Ejercicio tomado de Mora (2012).

Figura 3. Construcción de un triángulo con tres palillos.

Ahora, utilizando uno de los lados del triángulo armado, construir otro triángulo pero usando dos palillos cada vez (un palillo es un lado de la figura en forma de triángulo), como se exhibe en la Figura 4.

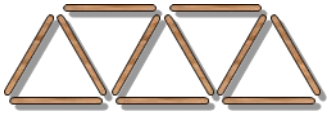


Figura 4. Una forma de construcción de triángulos.

Algunos cuestionamientos son:

1. ¿Cuántos palillos se necesitan para armar 10 triángulos? ¿Para armar 20 triángulos? ¿Para armar 32?
2. ¿Cómo saber cuántos palillos se requieren para construir 100 triángulos con las características dadas? Sin necesidad de hacer los triángulos. ¿Qué procedimiento se puede seguir?

En la Figura 5 se observa otra construcción alterna de triángulos, la cual pretende problematizar la tarea, en tanto que es posible construir un triángulo usando tan solo un palillo. Esto se puede ver en la parte inferior de la Figura 4, con lo cual se altera la regla propuesta inicialmente.

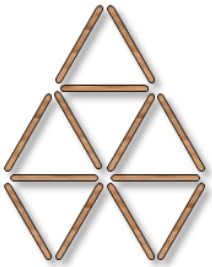


Figura 5. Otra forma de construcción de triángulos.

Tarea 4. A partir de la secuencia de la Figura 6, construya las dos posiciones siguientes.

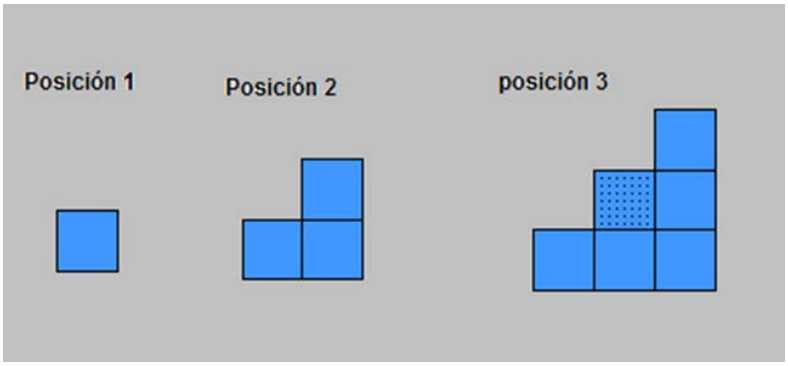


Figura 6. Secuencia de cuadrados

Identifique el patrón de formación de la secuencia.

¿Cómo se puede expresar simbólicamente la regla de formación de la secuencia?

¿Cuántas fichas corresponden a la posición 10?, realiza ésta operación sin considerar individualmente la cantidad de fichas correspondientes a las posiciones 4 al 9.

¿Cómo se puede expresar la cantidad de fichas ubicadas en la posición n?

A partir de la posición 2, con la misma cantidad de fichas de cada posición y conservando la configuración, construya las formas rectangulares como se aprecia en la Figura 7.

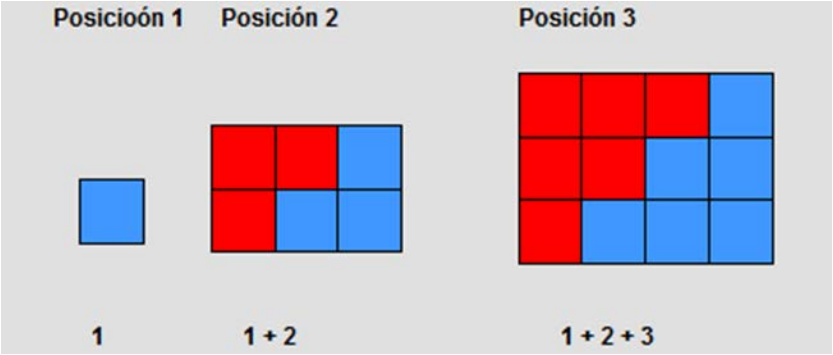


Figura 7. Formas rectangulares

¿Cuáles son las dimensiones de cada rectángulo obtenido?

¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo en la posición 10?

¿Cómo varía el área del rectángulo en cada una de las posiciones?

¿Cuál es la expresión algebraica que representa las dimensiones del rectángulo de la posición n?

Si B representa la base y H representa la altura, calcule el área del rectángulo ubicado en la posición n.

Se indaga con los participantes sobre los conocimientos que debe tener el maestro para abordar dicha tarea, las dificultades que puede presentar el estudiante en la solución de la misma y los posibles conflictos que se presentan en su enseñanza.

Conclusiones

Durante las discusiones y análisis que se proponen en el taller, se espera que el maestro reflexione no solo sobre el conocimiento del contenido, sino sobre los conocimientos que se requieren para la enseñanza. Se espera que los maestros en formación inicial y continuada de matemáticas, logren reconocer la complejidad del entramado de conocimientos que se requieren para la planeación y desarrollo de las tareas matemáticas para la enseñanza de temas específicos.

Vía el uso de la herramienta de análisis epistémico y didáctico, los maestros pueden no solo anticipar los posibles conflictos de significado que emergen durante la solución de tareas matemáticas por parte del estudiantes sino prever la complejidad del proceso de enseñanza. La identificación de conflictos de significado puede ser una herramienta para movilizar tres tipos de conocimiento: conocimiento matemático para la enseñanza; el conocimiento del contenido y la enseñanza, y el conocimiento del contenido y los estudiantes.

Las discusiones y análisis anteriores favorecen poner en cuestión la generalización matemática escolar como una vía de introducción del álgebra elemental en la escuela primaria, además de poner en cuestión los tres tipos de conocimientos planteados en el modelo de Hill et al., (2008). Una cambio en su concepción formalista de la generalización, el reconocimiento de los conflictos de significado y la relación entre los tres tipos de conocimiento planteados en este modelo, ayudaría a que los maestros mejoren el diseño instruccional de tareas y actividades matemáticas.

Los niños pueden presentar dificultades en el aprendizaje, debido a la complejidad del conocimiento matemático, a las creencias epistemológicas de los maestros y al diseño instruccional de actividades de aprendizaje que se proponen sin efectuar una análisis epistémico y de reconocimiento de conflictos. Las soluciones dadas por los maestros son solo una parte del trabajo de diseño instruccional que un maestro debe contemplar. Consideramos que los conflictos de significado pueden relacionar las tres categorías de conocimiento matemático para la enseñanza: Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS), el Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT) y el Conocimiento Especializado (CSK).

La discusión de tareas de generalización y su ampliación epistémica ayuda a reconocer la complejidad de la actividad matemática, aún en casos aparentemente sencillos de reconocimiento de patrones o de reglas, asociadas al análisis de la validez de la misma, por parte de los estudiantes.

Aún en actividades matemáticas aparentemente sencillas se manifiesta la complejidad de la estructura del conocimiento matemático y la necesidad de un "conocimiento matemático para la enseñanza". Es deseable por tanto generar espacios de formación continuada de maestros, donde se reflexione sobre los conocimientos que se requieren para asumir el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Se requiere diseñar e implementar instrumentos que permitan valorar los conocimientos del maestro, para generar procesos de transformación de las prácticas en la escuela. El análisis del conocimiento matemático para la enseñanza de los procesos del maestro que enseña matemáticas, puede contribuir al diseño de programas de formación de maestros, a la implementación de normas y de políticas educativas que podrían ayudar a mejorar el proceso de formación matemática de los niños.

Referencias y bibliografía

Ball, D. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education, 51*, 241-247.

Ball, D., Hill, H. & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: ¿Who know mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator*, 29(1), 14-46.

Ball, D., Lubienski, S. & Mewborn, D. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching* (4th ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.

Blanton, M. & Kaput, J. (2006). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Carraher, D., Martínez, M. & Schliemann. A. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education, 40*, 3-22.

Castro, W. F., Godino, J. D. & Rivas, M. (2011). Razonamiento algebraico en educación primaria: Un reto para la formación inicial de profesores. *Revista Unión*, *3*,73-88.

Derry, S., Wilsman, M. & Hackbarth, A. (2007). Using contrasting case activities to deepen teacher understanding of algebraic thinking and teaching. *Mathematical Thinking and Learning, 9*(3), 305-329.

Godino, J. (2011). Indicadores de la Idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática. CIAEM.* Recife, Brasil.

Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Iberoamericana de educación matemática*, 20, 13-31.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V., (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127-135.

Godino, J., Castro, W., Ake L., & Wilhelmi, M (2012). Naturaleza del Razonamiento Algebraico Elemental. *Revista Bolema, 26*(42), 483-511.

Godino, J. D. & Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas. Universidad de Granada. Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/7_Algebra.pdf (2012, 27 de junio).

Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. F. & Konic, P. (2008). Epistemic and cognitive analysis of an arithmetic-algebraic problem solution. In *ICME 11*. Morelia: ICME.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, Departamento de didáctica de la matemática, España.

Hill, H., Ball, D. & Schilling, S. (2008). Unpacking "pedagogical content knowledge": Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372-400.

Hill, H., Rowan, B. & Ball, D. (2005). Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journal, 42*, 371. Disponible en: http://aer.sagepub.com/content/42/2/371. (2012, 18 de agosto).

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic activities culture through generalization activities. En N. Bednarz, C. Kieran & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching* (Vol. 18, pp. 87-106) Kluwer academic publishers. Dordrecht.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. Approaches to algebra: Perspectives for Research and Teaching. C. K. Nadime Bednarz, Lesley Lee. Dordrecht, Kluwer Academic Publishers: 65-86.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria* (Tesis doctoral). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

Godino. J, Castro. W, Ake, L., & Wilhelmi. (2012). *Naturaleza del razonamiento algebraico*. Bolema, pp.483-511.

Molina, M., Castro, E, & Castro, E. (2009). Elementary students' understanding of the equal sign in number sentences. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology, 7*(1), 341-368.

Mora, L. (2012). Algebra en primaria. Convenio MEN Universidad Pedagógica Nacional. Colombia.

Ponte, J. & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. En L. D. English (Ed), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (2th ed.) Nueva York: Routledge. 225-263.

Ponte, J. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. En N. Planas (Ed.), *Teoría, crítica y Práctica de la educación matemática,* 93-98.

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-22.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics, 20*(2), 147-164.

Strother, S. A. (2011). *Algebra Knowledge in early elementary school supporting later mathematical ability* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de Lousville, Kentucky.

Aplicação do LABGG para o ensino básico em Matemática: Aula dinâmica com animação aplicada a funções do primeiro e do segundo grau

Teresa **Bixirão** Neto
Departamento de Educação e Tecnologia, Universidade de Aveiro
Portugal
teresaneto@ua.pt
Eimard **Gomes** Antunes do Nascimento
Departamento de Educação e Tecnologia, Universidade de Aveiro
Portugal
prof.eimard@gmail.com

Resumo

Os recursos tecnológicos nas escolas tem crescido rapidamente nas últimas décadas, sendo valorizado como um recurso que favorece o ensino e aprendizagem. O LABGG (Laboratório GeoGebra), apresentado como um desse recurso ao ensino na Conferencia Latinoamericana de Geogebra, em Montevideo-Uruguay em 2012. No LABGG foi desenvolvido a coletânea de assuntos matemáticos em forma de módulos, no qual utiliza-se a aplicação do software GeoGebra sob uma abordagem construtivista no processo de possibilidades de estudo e aprendizagem da matemática. Destinado a formação de docentes de escolas de ensino básico, fundamental, e superior. Tem como objetivo, proporcionar aos participantes as técnicas iniciais de aplicação dos módulos usando o LABGG. Será utilizado dois módulos da coletânea: o NEF.M901 – aplicação da função quadrática e o NEF.M903 - aplicação da função afim. Tendo como proposta proporcionar outra forma de ensino em um ambiente de caráter laboratorial, onde possibilitará a prática pretendida.

Palavras chaves: Educação Matemática, Matemática, Formação de professores, Coletânea LABGG, GeoGebra.

Introdução

O uso de recursos tecnológicos digitais ou tecnologias digitais interativas (TDI) no contexto escolar constitui uma linha de trabalho que necessita se fortalecer na medida em que há uma considerável distância entre os avanços tecnológicos na produção de softwares educacionais livres ou proprietários e a aceitação, compreensão e utilizações desses recursos nas aulas pelos professores.

Santos (2007) afirma que apesar das tecnologias digitais se mostrarem influenciadoras às mudanças e transformações em âmbito educacional, suas utilizações nas aulas não correspondem ao que se espera. Em face da assertiva, a escola se ver diante da necessidade de redescobrir o seu papel social e pedagógico como unidade significativa no processo de crescimento e desenvolvimento da concepção de competência para a formação dos indivíduos que estão integrados a si. Omitir que o sistema educacional brasileiro se encontra em meio a uma expressiva crise torna-se impossível em face dos indicadores de rendimento escolar expresso pelo MEC/Inep (Brasil, 2010).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN para o Ensino Fundamental e Médio expressam a importância dos recursos tecnológicos para a educação com vistas à melhoria da qualidade do ensino aprendizagem. Destacam que a informática na educação "permite criar ambientes de aprendizagem que fazem sugerir novas formas de pensar e aprender" (Brasil, 1998, pp. 147). Os Princípios e Normas para a Matemática escolar americana, publicados pelo National Council of Teachers of Matemathics – NCTM (2008) também motivam claramente o desenvolvimento curricular da matemática escolar associado ao uso de tecnologías, pelo principio da tecnología relata que "A tecnologia é essencial no ensino e na aprendizagem da matemática; influencia a matemática que é ensinada e melhora a aprendizagem dos alunos."(p. 26).

O link entre a teoria e a prática quando implantado de forma agradável e estimulante causa ao aluno o senso de curiosidade e, por via de consequência, o senso de pesquisa. Segundo Nascimento (2012a), as ideias básicas do pesquisador Dewey (2007) sobre a educação estão centradas no desenvolvimento da capacidade de raciocínio e espírito crítico do aluno. Dewey defendia a democracia e a liberdade de pensamento como instrumentos para a maturação emocional e intelectual dos alunos. Afirma, outrossim, que o processo educativo consiste na adequação e interação do aluno com o programa da escola e das disciplinas, pois a concepção das relações entre um e o outro, tende a tornar a aprendizagem fácil, livre e completa.

As ideias de Dewey apregoam o princípio de que os alunos aprendem melhor realizando tarefas práticas associadas aos conteúdos estudados, fato que causa grandes estímulos e maior aprimoramento e memorização em vez de decorá-los. (Nascimento, 2012a, 2012b).

Gravina (1998); Arcavi e Hadas (2000) explicam que a Geometria Dinâmica (GD) evidencia uma nova abordagem ao aprendizado geométrico, onde conjecturas são feitas a partir da experimentação e criação de objetos geométricos. Deste modo, se pode introduzir o conceito matemático dos objetos a partir da resposta gráfica oferecida pelo programa GeoGebra, surgindo daí o processo de questionamento, argumentação e dedução.

Desta forma, surgiu a coletânea LABGG (figura 1) com intuito de criar as possibilidades para os estudos em matemática, física e outras disciplinas, onde usa-se para nortear o professor na aplicação prática dos assuntos abordados. A interface da teoria e a prática tende ser de certa forma uma experiência agradável e estimulante para aluno, pois desperta nele o censo de curiosidade, e consequentemente o censo de pesquisa.

Figura 1. Logo da Coletânea LABGG para Laboratório e Material impresso.

A Coletânea do LABGG funciona como ferramenta metodológica pscicopedagógico junto com o software GeoGebra, aqui nominada de Geometria Dinâmica e Interativa (GDI), para auxiliar as tecnologias, habitualmente utilizadas (figura 2), tais como: quadro de demonstração da matéria e a aula tradicional (livro e caderno). Tal ferramenta possibilitará ao docente tanto a

interação como o conhecimento de outra forma de ensino. Além disso, o professor terá oportunidade de desenvolver um ambiente de caráter laboratorial, aonde facultará a prática pretendida.

Figura 2. Aplicação da Coletânea LABGG na estrutura educacional.

O que é o LABGG[1] ?.

O LABGG é a organização estrutural e ferramenta própria de um metodología utilizada na formatação de módulos em cada série/ano de ensino. A utilização de um software de Matemática dinâmica como o GeoGebra é de um complemento visual para o entendimento e assimilação dos conteúdos matemáticos expostos em sala de aula.

Sua operacionalização se efetiva através de módulos relativos aos assuntos prescritos na integralização curricular. O LABGG pode ser implantado no contexto educacional por ser um instrumento pedagógico, bem como, psicopedagógico adequado ao ensino e aprendizagem em matemática, física, estatística e outras áreas. A formatação dos módulos se codifica por assuntos em Núcleos e Níveis escolares, distribuidos em: Núcleo do Ensino Infantil (NEI), Núcleo do Ensino Fundamental I e II (NEF), Núcleo do Ensino Médio (NEM), Núcleo do Ensino Profissionalizante (NEP) e Núcleo do Ensino Superior (NES), conforme figura 3. Essas codificações integram o título de cada módulo, seguido de ponto e outra codificação que representa a disciplina a ser aplicada, série/ano e o número do experimento aplicado. No caso da Oficina temos o módulo NEF.M903, que representa a terceira aplicação/experimento do 9º ano na disciplina de Matemática do Ensino Fundamental.

[1] Termo criado por Nascimento, Eimard G. A. (2012), *in* artigo: proposta de uma nova aplicação como instrumento psicopedagógico na escola: o LABGG (laboratório geogebra), *Conferência Latinoamericana de GeoGebra, Montevideo - Uruguay*. Actas de la Conferencia. pp. 448-455.

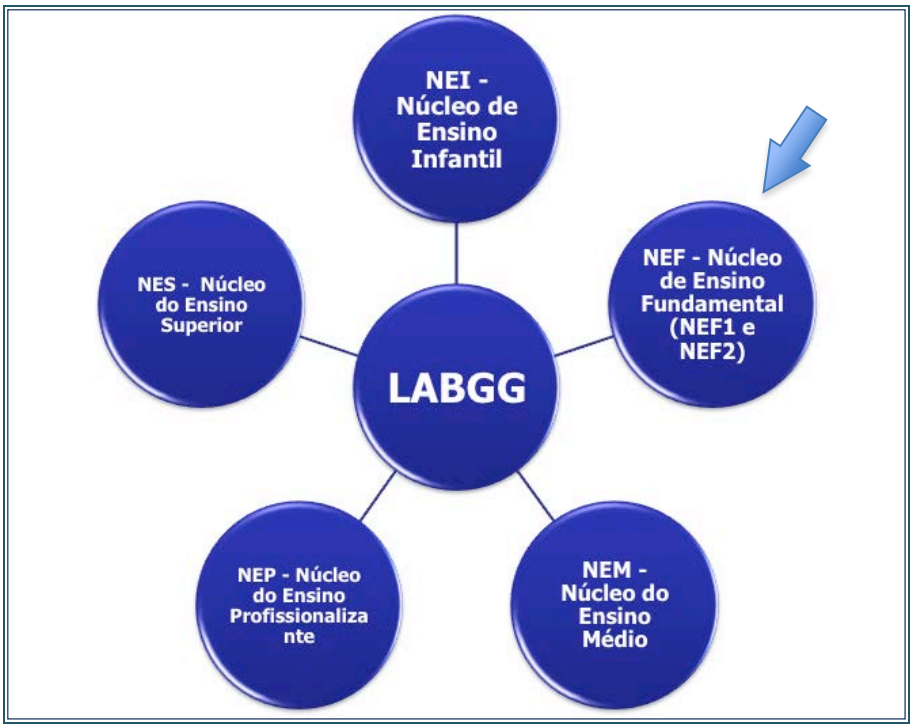


Figura 3. Estrutura dos Núcleos Educacionais distribuidos pelo LABGG.

Objetivo

Proporcionar aos participantes as técnicas iniciais e de uma programações simples no LABGG (Laboratório Geogebra) para as possibilidades de estudo nos assuntos em Matemática. Nesta oficina será contemplada dois temas da Coletânea LABGG aplicados em Matemática no ensino básico/fundamental, o módulo NEF.M901 – aplicação da função quadrática e o NEF.M903 - aplicação da função afim, ambas representam os módulos do ensino fundamental II, do 9º ano. A oficina é direcionada para formação de docentes e futuros docentes tanto para escolas, no qual possibilitará ao docente interagir com os alunos e ter outra forma de ensino em um ambiente de caráter laboratorial.

Metodologia

A metodologia será de caráter experimental e aplicada nos conceitos de acordo com os livros didáticos, como o de Giovanni J. (2012) aplicado nas escolas públicas do estado do ceará e alguns outros autores ou conceitos que os docentes relatarem na oficina, no qual será transformado em uma prática laboratorial nos computadores ou com *laptops*.

Aplicação de Animação e Programação

No LABGG o professor pode programar para que fique mais interesante e dinâmico sua aula. Por exemplo, a colêtane mostra como o assunto de função afim pode se tornar uma animação para que os alunos façam suas proprias análises e questionem ou façam suas interações com a aplicação e/ou simulação.

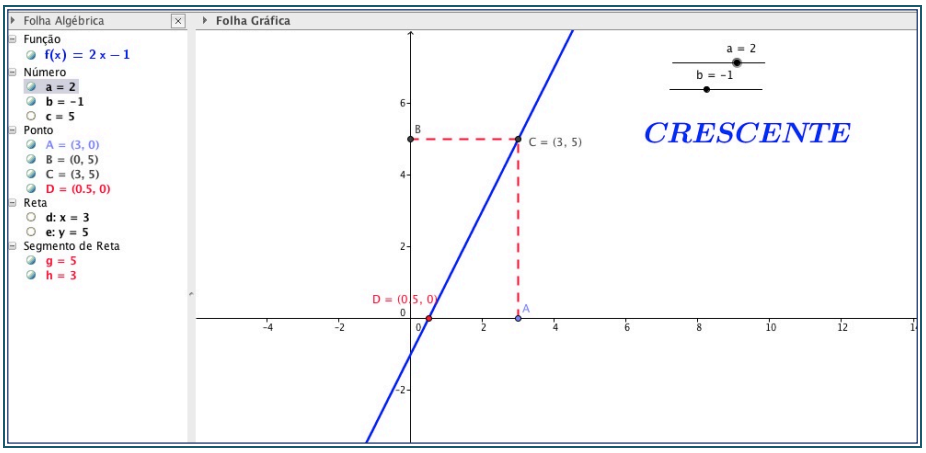


Figura 4. Animação da função pelo controle deslizante, movimento de a = 2.

Quando a estiver valendo 2, aparecerá automáticamente a palavra "Crescente" que representa o tipo de reta da função, e quando muda-se a posição de a para -1, mudará o sentido da reta e aparecerá a palavra "Decrescente", e assim por diante, no nosso exemplo, se a for igual a zero aparecerá a palavra "Constante".

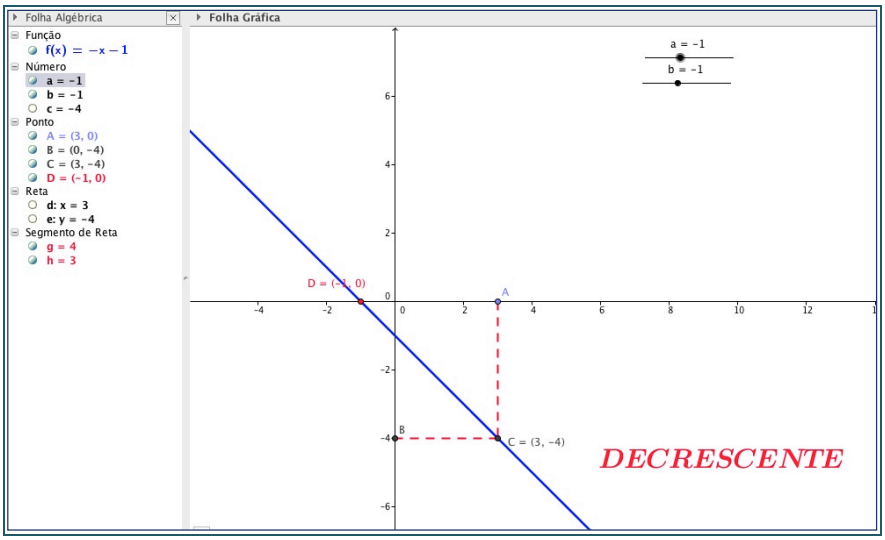


Figura 5. Animação da função pelo controle deslizante, movimiento de a = - 1.

Por fim, o professor encontrará vários objetos (variáveis) que poderá aplicar para ensinar este conteúdo de uma forma agradável e estimulante. Podendo aprofundar mais no estudo da função Afim.

Ementa

Apresentação do LABGG;

Apresentação do módulo NEF2.901 e NEF2.903;

Parte teórica: Conceito de Função do 1º Grau ou Função Afim e Função do 2º grau e seus elementos: coeficientes, como encontrar as raízes da função, e sua representação no plano cartesiano (os pontos e o gráfico);

Parte Prática, programação e animação: toda a parte teórica apresentada no LABGG.

Docente / Ministrante

Eimard Gomes Antunes do Nascimento

• Doutorando em Educação e Tecnologia

LEM@TIC - Laboratório de Educação em Matemática e

LAQE – Laboratório de Avaliação da Qualidade Educativa.

Universidade de Aveiro – UA, Portugal.

Bolsista de Pesquisa da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES – Ministério da Educação – Brasil.

• Mestre em Educação Brasileira, eixo da Avaliação pela UFC – Brasil.

• Especialista em Educação Matemática pela UECE – Brasil.

• Especialista MOUS em Excel pela Microsoft – EUA.

• Graduado em Matemática pela UFC – Brasil.

• Coordenador Diretor do Instituto GeoGebra Fortaleza – Brasil.

Recursos

• Laboratório com computadores (se for possível).

• Projetor (Data Show).

• Software Livre GeoGebra.

• Áudio (caso seja em auditório).

Considerações Finais

A aplicação do LABGG no processo de ensino e aprendizagem em Matemática, Física, Estatística e outras disciplinas ou áreas afins, pode contribuir em muitos fatores, especificamente no que tange a manipulação geométrica. A habilidade de manipular pode ser desenvolvida, à medida que se forneça ao aluno materiais de apoio didático baseados em elementos concretos representativos do objeto geométrico em estudo.

A coletânea tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, duas representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si: sua representação geométrica e sua representação algébrica.

Em face do exposto, o LABGG se fundamenta na perspectiva didática proativa e interativa, vivenciada em duas representações diferentes do mesmo objeto que interagem entre si: no caso, a representação geométrica e sua representação algébrica. A utilização do software como recurso didático no ensino da Matemática se constitui um caminho para o professor vivenciar com os alunos o processo ensino e aprendizagem, a motivação, competência e habilidade em relação à aprendizagem com qualidade.

Referências

Arcavi, A., & Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: an example of an approach. *International Journal of Computers of Mathematical Learning*, *5*(1), 25–45.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.* Brasília: MEC.

Dewey, J. (2007). *Democracia e educação: capítulos essenciais.* São Paulo: Ática.

Giovanni J., J. R. (2012). *A conquista da Matemática, 9º ano* (Edição renovada).São Paulo: FTD.

Gravina, M. A. ,& Santarosa, L. M. (1998, maio). A Aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados. *Informática na Educação: teoria & prática*, 73-88. Recuperado em http://seer.ufrgs.br/InfEducTeoriaPratica/article/view/6275, 9/10/2013 às 22 horas.

Nascimento, E. G. A. do. (2012a). *Avaliação do software GeoGebra como instrumento psicopedagógico de ensino em geometria* (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal do Ceará, Fortaleza, CE.

Nascimento, E. G. A. do (2012b). Proposta de uma nova aplicação como instrumento psicopedagogica na escola: o LABGG (Laboratório GeoGebra). In *Actas de la Conferencia Latinoamericana de GeoGebra.* Montevideo, Uruguai.

NCTM. National Council of Teachers of Mathematics. (2008). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* Edição Portuguesa, Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Santos, V. P. (2007). *Interdisciplinaridade na sala de aula.* São Paulo: Loyola.

Aplicaciones de Ecuaciones Diferenciales mediadas por simulaciones interactivas

Juan Carlos **Molina** García
Instituto Tecnológico Metropolitano
Colombia
juanmolina@itm.edu.co

Resumen

Los sistemas interactivos se configuran como una fuente importante de generación de experiencias de aprendizaje ya que cautivan el interés del estudiante y le permiten realizar pruebas de variación, contraste y verificación de resultados. Una experiencia de aprendizaje fundamentada en la visualización y exploración interactiva, estimula el desarrollo de las operaciones mentales y acerca el estudiante al dominio de conceptos y procedimientos matemáticos. El propósito del taller apunta a la configuración de sistemas interactivos basados en sistemas dinámicos que surgen de modelos matemáticos obtenidos de soluciones de problemas de aplicación de las ecuaciones diferenciales de primer orden. Tales modelos se llevan a un diagrama de bloques soportado en la herramienta Simulink de Matlab, con lo que se obtiene una representación gráfica del modelo y un recurso de mediación que favorece en el estudiante la comprensión del problema de aplicación y la apropiación de significados.

Palabras clave: Sistemas interactivos, modelos dinámicos, recursos de mediación, herramienta Simulink de Matlab.

Modelación de sistemas

La modelación de sistemas es un área básica de estudio a nivel de programas de educación superior relacionados con la electrónica, mecatrónica, biomédica y la automatización y control entre otros. El estudio de dicha área es fundamental en la formación en ciencias aplicadas del estudiante, por lo que es considerada como un área integradora que involucra conocimientos relacionados con el álgebra lineal, el cálculo diferencial e integral y las ecuaciones diferenciales. De esta manera, la modelación de sistemas valída su importancia por lo que se configura como un área que relaciona conceptos matemáticos básicos con conceptos avanzados de formación profesional en ingeniería.

Una dificultad marcada en la modelación se presenta por la gran cantidad de información matemática que se debe dominar para llegar a comprender conceptos tales como: la noción de función del tiempo, función de transferencia, la transformada de Laplace y su relación con las ecuaciones diferenciales. Es común que, en el tratamiento de estos temas, se aborden metodologías docentes a nivel de exposiciones a los estudiantes que hacen pensar que cada tema estudiado fuera independiente uno del otro. Por esto, la propuesta que se presenta, además de integrar estos temas, busca reafirmar la teoría mediante el análisis de situaciones problema en contextos específicos, de manera particular en el campo de las aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden.

Las ecuaciones diferenciales son la base para muchas aplicaciones, ya que, si se pretende describir o predecir un determinado fenómeno o evento, será necesario utilizar modelos con ecuaciones que incluyen razones de cambio. La importancia de representar tales fenómenos (físicos o sociales) por medio de ecuaciones diferenciales radica en poder llegar a controlar el fenómeno y las variables que allí intervienen. La representación de los sistemas o fenómenos por medio de ecuaciones se denomina modelado de sistemas. En ocasiones resulta complicado manejar las partes del proceso que se llevan a cabo al modelar un sistema y solucionar las correspondientes ecuaciones. Por esta razón, se recurre a la resolución por medio de ayudas computacionales mediante sistemas interactivos que parten de un modelo matemático representado por un modelo simbólico el cual es estructurado a través de componentes elementales denominadas bloques operacionales. Esto es fundamental y de gran utilidad para la implementación del modelo en un diagrama de bloques que se constituyen en una representación ´de partes´, las cuales son más fáciles de analizar.

Sistemas interactivos en la mediación pedagógica

La teoría de la modificabilidad estructural cognitiva propuesta por Feuerstein plantea el desarrollo cognitivo en términos dinámicos, esto es, susceptible de ser modificado en tanto se trabaje sobre las funciones cognitivas necesarias para realizar procesos de aprendizaje adecuados. Con base en esta idea, y apoyados en los sistemas interactivos, se espera aumentar las capacidades de los estudiantes a través de la exposición directa a experiencias de aprendizaje mediado como uno de los principales mecanismos para aprender (Feuerstein, 1991). En este sentido, y para el caso del estudio de problemas de aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden, los sistemas interactivos se configuran como una fuente apropiada de generación de ambientes de aprendizaje, ya que, además de cautivar el interés del estudiante, le permiten realizar pruebas de contraste y verificación de soluciones. De esta manera, una experiencia de aprendizaje fundamentada en la visualización, exploración y contraste de resultados, estimula el desarrollo de las operaciones mentales y acercan el estudiante al dominio de conceptos y procedimientos matemáticos (Molina, Ramírez & Madrigal, 2011).

Las estructuras didácticas que permiten desarrollar conceptos y desplegar relaciones científicas, se configuran en la actualidad como recursos didácticos de apoyo a una práctica docente que busca incentivar en el estudiante sus habilidades para inferir y deducir propiedades a partir de un modelo matemático. De esta manera, los sistemas interactivos de simulación disponibles, permiten apoyar modelos pedagógicos de intervención en los que se favorece prioritariamente el aprendizaje significativo a través del descubrimiento y la investigación.

Modelos dinámicos para inferir e intervenir

Los modelos en general se convierten en herramientas útiles para revisar o construir las teorías (Hartmann, 2005) o, como lo expresa Hacking, permiten crear, refinar y estabilizar fenómenos (Hacking, 1983). Por su parte, los modelos dinámicos computacionales como los que se logran diseñar con la herramienta Simulink de Matlab, se pueden catalogar como ´objetos de conocimiento´, que según Knuuttila, permiten a los estudiantes realizar inferencias y predecir resultados a partir de las posibles variaciones entre las variables (Knuuttila, 2005ª; 2005b). Los modelos se caracterizan por facilitar un mejor conocimiento de los objetos o fenómenos del mundo por lo que permiten también su intervención. Si el modelo es usado para experimentar y analizar variaciones, dicho modelo también interviene el problema que representa, de esta

manera, se configura un modelo a fin de intervenirlo a la luz de su propia representación (Rivera, Galo & Alcón, 2010).

Para efectos del presente taller postulado para la XIV conferencia interamericana de educación matemática, lo que se busca es dar pautas para modelar situaciones problema e intervenirlas desde los conceptos matemáticos y cambios en los parámetros que permite la aplicación computacional. Para esto, se opera sobre la base de que el modelo no sólo interviene la teoría, sino que también permite intervenir otros factores inherentes al fenómeno representado como lo es la variación de sus condiciones iniciales. Los modelos como estructuras de representación, intervienen los procesos cognitivos de los estudiantes, dado que, el trabajo con estos modelos y sus simulaciones permiten mejorar las habilidades perceptivas del estudiante. El modelo, entonces, se constituye en un recurso de mediación entre el fenómeno o situación representada y el estudiante, o entre la teoría y el estudiante. Esto con dos propósitos posibles: primero, que el estudiante intervenga lo representado y, segundo que intervenga la teoría, esto es, que construya o elabore su propio conocimiento.

Para enfocar el presente trabajo de acuerdo a los planteamientos anteriores, los modelos que interesan en el contexto del taller, son aquellos que permiten inferir e intervenir sobre problemas de aplicaciones de las ecuaciones diferenciales de primer orden. Los problemas objeto de estudio, están relacionados con dinámicas de poblaciones, la ley de Hooke, mezclas, propagación de una enfermedad y la ley de Newton del enfriamiento o calentamiento entre otras. De esta manera, el propósito apunta a la configuración de sistemas interactivos a partir de sistemas dinámicos que surgen de un modelo simbólico-matemático que se lleva a un diagrama de bloques soportado en la herramienta Simulink de Matlab. Este diagrama de bloques se constituye como una representación gráfica del modelo matemático y un recurso interactivo de mediación pedagógica que favorece en el estudiante tanto la comprensión del problema como la apropiación de significados.

Modelos de sistemas dinámicos con Simulink

Algunos sistemas continuos se representan mediante ecuaciones diferenciales ordinarias, por tanto, en la labor de predecir el comportamiento de dichos sistemas ante variaciones de las entradas o condiciones iniciales, se deben resolver ecuaciones de distinta naturaleza. A excepción de los casos lineales y algunos no lineales triviales, las ecuaciones diferenciales ordinarias carecen de soluciones analíticas. Más aún, en los pocos casos en los que se puede encontrar una solución, el procedimiento puede ser tedioso y el resultado una expresión compleja y complicada de manipular. Este proceso corresponde a un proceso que podría llamarse ´de ejercitación´, por demás válido, pero no más importante como lo es el proceso de contraste y análisis de los resultados en la vía de comprobar las predicciones del modelo. Por estas razones, en general se recurre al uso de distintos algoritmos numéricos que permiten obtener una solución aproximada de la ecuación diferencial para distintos valores del tiempo. Estos algoritmos asociados con los métodos de integración de ecuaciones diferenciales, se suelen implementar a través de herramientas computacionales de software, algunas de propósito general como Matlab, Scilab, entre otros o bien para dominios específicos como el PSpice para simular circuitos como caso particular.

En relación al propósito de este trabajo práctico, se puede precisar que, más que implementar métodos de integración numérica, lo que se busca es explorar las características de la herramienta Simulink de Matlab y el entorno gráfico de simulación que provee para realizar

pruebas de contraste de resultados en la solución de ecuaciones de primer orden que provienen de un modelo matemático que da solución a una situación problema planteada. Como ya se ha señalado, el Simulink como entorno gráfico, es una herramienta de análisis interactiva para modelar y simular sistemas dinámicos, con base en diagramas de bloques (Gil, 20103). Permite a los usuarios concentrarse en la estructura del problema, en lugar de tener que preocuparse acerca de un lenguaje de programación. Los parámetros de cada bloque de señal y sistema son configurados por el usuario de tal manera que la simulación se realiza sobre un tiempo determinado. Las fases para el modelado con Simulink incluyen la definición de un modelo y su representación matemática, el ajuste de las condiciones de ejecución de la simulación, la definición de los parámetros del sistema y la selección del método de integración apropiado.

Un sistema en Simulink, se representa como una interconexión de bloques elementales operacionales implementados como algoritmos integrados en un entorno gráfico-numérico. Cada bloque, que representa una operación matemática simple o compleja, posee unos parámetros internos ajustables, y unos campos específicos o variables de entrada y de salida, esto es, cada bloque lleva asociado un modelo matemático que representa su relación entrada/salida. La conexión de dos bloques operacionales, indicará simbólicamente que la variable de salida del primero ha de considerarse como variable de entrada del segundo y así sucesivamente. Los elementos básicos para el diseño de un proyecto son líneas y bloques, donde cada bloque aparece ubicado en una determinada librería, biblioteca o categoría. La ventana que aparece al arrancar Simulink permite establecer las categorías de bloques disponibles. Estas categorías están agrupados en: *Sources*, S*inks*, *Continuos*, *Math operations*, entre otros.

Para implementar un diagrama de bloques como un sistema interactivo, primero se parte de arrastrar los bloques a la página en blanco. Estos bloques se modifican dando doble clic sobre cada uno de ellos con lo que se pueden cambiar sus parámetros o valores luego de su interconexión. Lo segundo es cambiar los nombres a los bloques y asignar las variables o señales haciendo doble clic en el lugar en que se van a colocar. De igual forma se debe salvar el modelo especificándole un nombre. Por último se procede a simular el sistema, por lo que se hace necesario configurar el tiempo de simulación. Para ejecutar la simulación se escoge del menú la opción *simulation start.* Para visualizar la evolución de las variables, se utiliza el bloque *Scope* de la librería S*inks.* Este último bloque permite apreciar de forma gráfica la respuesta o salida del sistema. Una vez implementado el sistema, la versatilidad se convierte en un factor importante de contraste y verificación, toda vez que, es de gran utilidad didáctica disponer del modelo gráfico para realizar de manera rápida variaciones en las entradas y las condiciones o parámetros que intervienen en el modelo.

Implementación de un modelo sencillo

Considérese la siguiente situación problema: una barra de aluminio, se encuentra inicialmente a una temperatura de 80°C, después de 5 minutos la barra tiene una temperatura de 65°C. ¿Cuál será la temperatura de la barra después de 60 minutos, si se sabe que la temperatura ambiente es de 25°C.

La hipótesis para plantear el modelo se basa en que la temperatura T de un cuerpo cambia a una velocidad que es proporcional a la diferencia de las temperaturas del cuerpo con la temperatura ambiente T_m (Zill & Cullen, 2008). De esta manera, un objeto a diferente temperatura que la de su alrededor, termina alcanzando una temperatura igual.

Con esta información se plantea la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{dT}{dt} = K(T - T_m) \quad (1)$$

O bien,

$$\frac{dT}{dt} = KT - KT_m \quad (2)$$

Al resolver la ecuación (2) se llega a la siguiente función de temperatura:

$$T(t) = Ce^{K\,t} + T_m \quad (3)$$

Por las condiciones del problema se tiene que $T(0) = 80$ lo que implica que $C = 55$. De igual forma, $T(5) = 65$ implica que $K = -0.0629$. Para estas condiciones, la solución de la ecuación diferencial está dada por la expresión (4).

$T(t) = 55e^{-0.0629\,t} + 25$ (4)

Al reemplazar $t = 60$ en la ecuación (4), se obtiene la solución al problema planteado, esto es, la temperatura después de 60 minutos corresponde a $T = 26.5$ °C

Para validar estos resultados y realizar actividades de contraste y verificación en el modelo tratado, se procede con su implementación a través de la herramienta Simulink. Al observar la ecuación diferencial (2) se aprecia que se requieren de los siguientes bloques operacionales:

- Un bloque *Integrator* para obtener T a partir de dT/dt.
- Dos bloques de coeficientes *(Gain).*
- Un bloque de constante (*Constant*) para almacenar el valor de K
- Un bloque sumador *(Sum)*
- Un bloque *Scope* para visualizar la relación de salida del modelo, esto es, la evolución de la temperatura T.

La figura 1, muestra la conexión apropiada de los bloques que configuran el modelo.

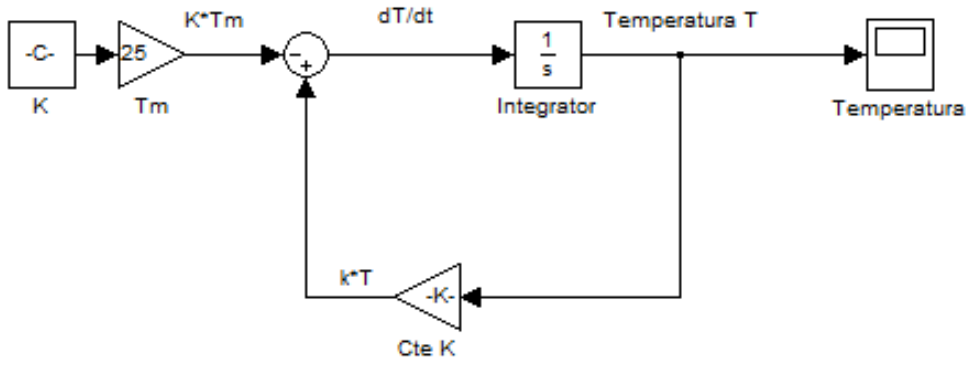


Figura 1. Conexión de bloques asociados a la ecuación (2)

El valor de *Stop Time* de *Configuration Parameters* debe ajustarse a 60 con el fin de establecer el tiempo requerido de la simulación. Finalmente en el menú *Simulación* se elige la opción *Start* para ejecutar la aplicación. Con esto, la figura (2) muestra la salida para T, luego de dar doble clic en el bloque *Scope.*

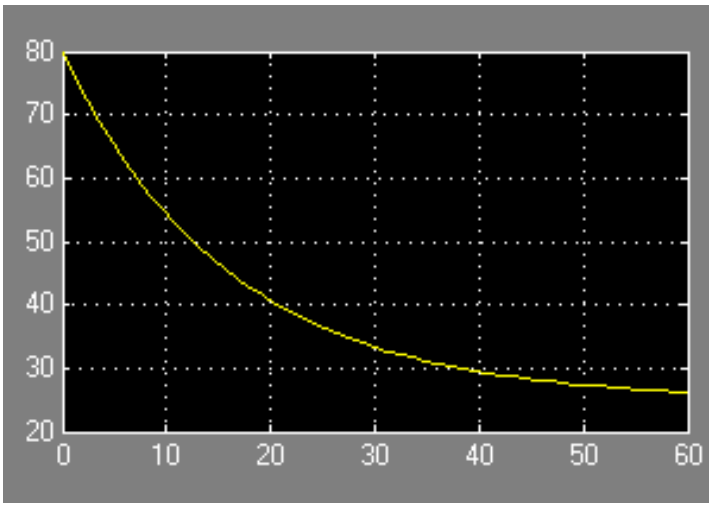


Figura 2. Evolución de la temperatura T.

Una vez implementada la aplicación, es posible realizar de manera sencilla cambios en los parámetros y condiciones iniciales preestablecidas. Con base en esta idea, se puede configurar una ruta de trabajo con estudiantes a manera de guion didáctico que, a través de preguntas e interrogantes puntuales, les permita realizar inferencias y planteamientos de nuevas situaciones. Esto con la intención de contrastar las hipótesis de base y con ello, la fundamentación teórica matemática del modelo.

De esta forma, y para el caso acá abordado, queda expuesto cómo los recursos informáticos interactivos hacen parte de la integración del uso de las tecnologías para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en tanto son susceptibles de convertirse en recursos para la mediación pedagógica. Finalmente se puede establecer que, con el uso de estas tecnologías digitales en el aula, se pretende mostrar una alternativa de trabajo teórico-práctico con los estudiantes que favorece el desarrollo de sus capacidades de resolución de problemas y con ello la fundamentación básica para explorar nuevas áreas de aplicación.

Referencias y bibliografía

Feuerstein, R., Klein, P., & Tannebaum, A. (1991). *Mediated Learning Experience (MLE): Theoretical Pschosocial and Learning implications*. England: Freund Publishing House Ltd.

Gil Rodriguez, M. (2003). Introducción rápida a Matlab y Simulink para Ciencia e Ingeniería. Madrid: Ediciones Díaz de Santos.

Hacking, I. (1983). Representing and intervening: introductory topics in the philosophy of natural science. Cambridge: Cambridge University Press.

Hartmann, S. (2005). *Models as a tool for theory construction: some strategies of preliminary physics.* Recuperado de http://philsci-archive.pitt.edu/archive/00002410/01/Models.pdf [Consultado el 26 de mayo de 2014].

Knuuttila, T. (2005a). *Models as epistemic artefacts: toward a non-representationalist account of scientific representation.* Recuperado de: http://ethesis.helsinki.fi/julkaisut/hum/filos/vk/knuuttila/modelsas.pdf [Consultado el 30 de abril de 2014].

Knuuttila, T., (2005b). Models, representation, and mediation. *Philosophy of Science*, 72, 1260-1271.

Molina García, J. C. (2009). Recursos didácticos con Matlab: Interfaz gráfica de usuario para caracterizar curvas en el espacio tridimensional. *Tecno Lógicas*, Edición Especial, 71-84.

Molina García, J. C., Ramírez Velasquez, I., & Madrigal Argaez, J. (2011). Mediadores para el Aprendizaje de las Ciencias Básicas a través de Interfaces Gráficas. *Entre Ciencia e Ingeniería*, *8*, 148-160.

Rivera, J., Galo, J., & Alcón, J. (2010). *Modelos de intervención con Descartes*. En XIII congreso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Septiembre, Córdoba, España.

Zill, D. G., & Cullen, M. R. (2008). *Matemáticas Avanzadas para Ingeniería* (3ªed, Vol. 1). Ecuaciones Diferenciales. México: McGraw Hill.

APOE y la generalización como estrategia cognitiva para el aprendizaje en técnicas de conteo

Isabel **Maturana** Peña
Instituto de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
Chile
isamatup@hotmail.com
Marcela **Parraguez** González
Instituto de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
Chile
marcela.parraguez@ucv.cl
Alejandro **Nettle** Valenzuela
Departamento de Matemática y Estadística, Facultad de CNE, Universidad de Playa Ancha.
Chile
anettle@upla.cl

Resumen

Basados en la teoría APOE, se propone en para el trabajo de taller, por una lado, una descomposición genética para interpretar estrategias cognitivas en el aprendizaje de los procesos de generalización, en tres situaciones de conteo a partir de configuraciones figurales, y por otro, construcción de una propuesta de enseñanza, con el propósito de modelar la problemática de aprendizaje referida a las técnicas de conteo. Se muestran algunos de los resultados obtenidos con nuestra propuesta aplicada a estudiantes de educación secundaria y superior.

Palabras clave: conteo, generalización, Teoría APOE.

Introducción

Con el propósito de modelar la problemática de aprendizaje referida a la generalización en técnicas de conteo, y usando como referente teórico la teoría APOE (Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros y Weller, 2014), se diseña una descomposición genética general para tres situaciones en las que la generalización del conteo ofrece características particulares de construcción, las que facilitan la reconstrucción de las estrategias cognitivas inmersas en el conteo.

Algunas de las evidencias obtenidas, sobre la problemática de enseñanza aprendizaje en relación a las estrategias de conteo, dan cuenta de la existencia de un problema de coordinación entre el conteo y el cardinal, surgen así propuestas de enseñanza, como la de Dubinsky y Fenton (1996) donde promueven el uso de la programación con ISETL como soporte en la enseñanza de problemas de conteo. Otra aproximación, sobre cómo enseñar técnicas de conteo, son las evidencias que obtienen Salgado & Trigueros (2009), en su investigación sobre conceptos básicos de conteo (ordenación y combinación) a partir de las cuales diseñaron y analizaron una propuesta didáctica basadas en el ciclo de enseñanza de la teoría APOE. Sierra & Rodríguez (2012), desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico, presentan una organización didáctica para el estudio del número y la numeración en la Educación Infantil.

En nuestro pais, el estudio de la combinatoria es propuesto por el Ministerio de Educación (MINEDUC, 1998) en segundo año medio (estudiantes entre 16 y 17 años de edad) en los planes de estudio de *Estadística y Probabilidad,* donde contempla la iteración de experimentos sencillos, por ejemplo: lanzamiento de una moneda, su relación con el triángulo de Pascal e interpretaciones combinatorias. Es así que se integra la combinatoria como parte de la educación general en Chile. Por otra parte, en los planes y programas de la mayoría de los cursos de álgebra en los primeros años en la educación superior universitaria chilena, para carreras como ingenierías, licenciaturas en ciencias, pedagogía en matemáticas y física, aparecen los conceptos de Combinatoria, formando parte de los contenidos para la enseñanza de los Números Naturales.

Teoría APOE

La teoría APOE –Acción, Proceso, Objeto, Esquema– toma como base la epistemología genética de Piaget. Según Kú, Trigueros y Oktaç (2008), esta teoría nace al estudiar el mecanismo de entendimiento de la Abstracción Reflexiva piagetiana, que se refiere a la reflexión sobre las acciones y procesos que se efectúan desde un objeto de conocimiento. Desde el punto de vista de la teoría APOE la construcción del conocimiento pasa por tres etapas básicas: acciones, procesos y objetos, las cuales no necesariamente son secuenciales. Una acción consiste en una transformación de un objeto que es percibida por el individuo como externa y se realiza como una reacción a sugerencias que proporcionan detalles de los pasos a seguir. "Las acciones son más limitadas que otras construcciones mentales, pero son el principio crucial en la construcción del conocimiento" (Dubinsky, 1996, p. 34). Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, puede interiorizarse en un proceso, es decir, se realiza una construcción interna que ejecuta la misma acción en la mente del individuo, pero ahora no necesariamente dirigida por un estímulo externo. Un individuo que tiene una concepción proceso de una transformación, puede reflexionar sobre ésta, describirla, o incluso revertir los pasos de la transformación sin realizar dichos pasos (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews & Thomas, 1996). Cuando un individuo reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones (ya sean acciones o procesos) que pueden actuar sobre él, y puede construir de hecho esas transformaciones, entonces está pensando en este proceso como un objeto. En este caso, decimos que el proceso ha sido encapsulado en un objeto" (Ibíd.). En resumen, el tránsito por las construcciones mentales desde APOE se puede ver de la siguiente manera: se dice que un individuo evidencia una concepción acción cuando solamente es capaz de realizar transformaciones a algún objeto motivado por estímulos externos y no por sí solo. Si este individuo reflexiona sobre estas acciones y las realiza conscientemente, se dice que las acciones se han interiorizado, por lo que muestra una concepción proceso. Dos o más procesos se pueden coordinar en un nuevo proceso. Cuando surge internamente la necesidad de transformar los procesos desarrollados, el individuo los encapsula en objetos, sobre los cuales puede volver a aplicar acciones. Los objetos se organizan en esquemas, que a su vez se relacionan con otros esquemas. El esquema, "es un nivel de mayor elaboración en la comprensión de un concepto matemático y está relacionado de manera coherente en la mente del estudiante." (Asiala et al, 1996, p. 12). Cuando un sujeto se encuentra frente a un problema específico en el ámbito de las matemáticas, evoca un esquema para tratarlo. Al hacerlo, pone en juego aquellos conceptos de los que dispone en ese momento y utiliza relaciones entre esos conceptos. En la Figura 1 se muestra un diagrama de las construcciones y la abstracción reflexiva.

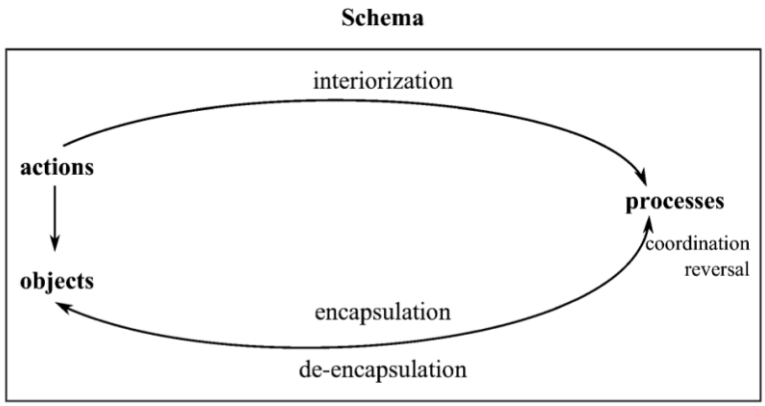


*Figura 1***.** Construcciones y mecanismos mentales para la construcción del conocimiento matemático (Arnon et al., 2014, p. 18).

Diseño metodológico

La experiencia se desarrolló como un estudio de casos (Stake, 2010), insertos en el periodo académico del primer semestre del 2014, con estudiantes correspondientes a un grupo heterogéneo de primer año de la carrera en pedagogía y licenciatura en matemática en dos universidades chilenas, etiquetas como casos de estudio (Universidad 1 y Universidad 2). Por otra parte, a los casos de estudios incrustamos el ciclo de investigación previsto en la teoría APOE, el cual establece: un análisis teórico, conocido como descomposición genética; un diseño, basado en la descomposición genética teórica, y aplicación de instrumentos; seguido de un análisis y verificación de datos (Arnon et al., 2014).

La descomposición genética

Proponemos el siguiente modelo de descomposición genética para la construcción de una técnica de conteo específica relacionada con problemas que requieran de representaciones figurales. Comenzaremos la descripción de la construcción considerando, la concepción mental acción como motor para la descripción de una estrategia de conteo, las acciones se realizan sobre las construcciones mentales objeto de regiones poligonales y de los números naturales, donde una construcción mental esquema tematizado del concepto sistema referencial, contiene a ambos objetos. Todos ellos son coordinados mediante una función inyectiva, que organiza el conteo iniciado; para continuar la repetición de estas acciones bajo variaciones controladas, permitiendo establecer lo invariante, como una construcción mental proceso, las que se transforman en concepciones mentales procesos generalizados mirados como un todo, técnicamente sustentado por APOE como un Totality (como una construcción mental, que concibe al proceso como un todo), que se encapsulan en un objeto que se rotula mediante una conjetura explícita.

La propuesta

Los evidencias que hemos obtenido confirman las problemáticas subyacentes en el aprendizaje de estrategias de conteo y sus generalizaciones; por esta razón separamos en tres situaciones los procesos de generalización: dos con una apariencia análoga basados en el conteo sobre geoplanos donde las estrategias de generalización tienen dos sentidos opuestos, uno mediante la incrustación sistemática de figuras para la construcción de la generalización y el otro, donde la generalización se obtiene de separar la totalidad externa de lo interno, para finalizar con una propuesta de conteo, donde su sencillez oculta los obstáculos en la simplificación necesaria para obtener la fórmula clásica de conteo.

Sostenemos como hipótesis en la formulación de este taller, que las tres situaciones que presentamos permiten la manipulación de objetos mediante la visualización (como representaciones figurales), e incorporamos la teoría APOE para identificar e interpretar las estructuras cognitivas involucradas en los procesos de generalización, las que ayudan a entender cómo contamos. En nuestro estudio es mediante acciones sobre objetos matemáticos, que describiremos en detalle la construcción de la generalización como fundamento del conteo.

Las actividades y sus análisis

Polígonos con vértices en un geoplano

El Geoplano fue inventado por el matemático y pedagogo egipcio Caleb Gattegno (1911-1988) para enseñar geometría a niños pequeños. Consiste en una superficie plana en la que se dispone, de manera regular, una serie de puntos. Dependiendo de cómo estén colocados estos puntos se distinguen varios tipos de Geoplanos, aunque los que más se utilizan son el Geoplano triangular, el cuadrado o cuadrangular y el circular.

El Geoplano es una herramienta, sencilla y eficaz, que permite a los estudiantes experimentar con modelos matemáticos y construir conceptos numéricos en diversos contextos. Por otra parte, en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, es empleado, entre otras cosas, para construir figuras geométricas y establecer regularidades en su construcción las que permitirían extraer sus características fundamentales; y es este nuestro propósito, para algunas de las situaciones que se plantean en el taller, calcular área y perímetro de polígonos, como una herramienta para la construcción de mecanismos y construcciones mentales asociados a la generalización como proceso cognitivo necesario en la matemática.

Presentación de las actividades con geoplanos

Un ***geoplano*** de malla cuadrada es una configuración rectangular de puntos de formas como las siguientes:

```
* * * * * *          * * *
* * * * * *          * * *
* * * * * *          * * *
* * * * * *
```

Los geoplanos de las figuras anteriores diremos que son del tipo 4×6 (4 filas y 6 columnas) y de tipo 3×3, respectivamente. En las actividades que siguen los geoplanos son de malla cuadrada.

Situación 1

Primer Desafío

Investigue cuál es el polígono de mayor cantidad de lados (o vértices) que pueden dibujarse, si los vértices son puntos de un geoplano de malla cuadrada de tipo $n\times n$, con $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$.

Segundo Desafío

Demuestre su descubrimiento por inducción.

Evidencias obtenidas de la Situación 1

Presentamos la primera situación a estudiantes de un establecimiento educacional chileno con edades entre 17 y 18 años, y sus respuestas, se transformaron en hacer varios intentos de dibujos para diferentes geoplanos de un mismo orden, y después proceder a contar sus lados, y ver cuál es el óptimo, por ejemplo, en la Figura 2 se ilustra lo comentado.

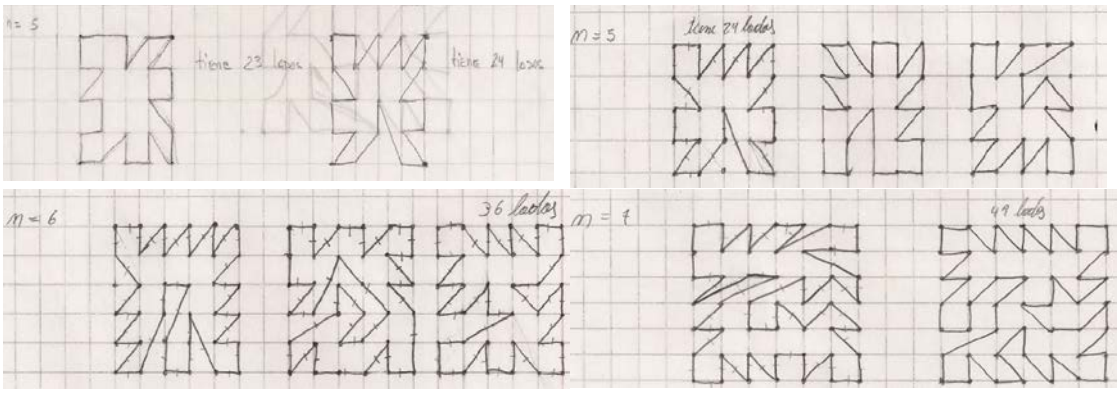


Figura 2. Respuestas de los estudiantes del Universidad 1.

Sin embargo, en este grupo de estudiantes no logramos obtener evidencias de estudiantes que incrustaran una figura dentro de otra, esto es por ejemplo suponer que para un geoplano de $n = 3$ tenemos la siguiente Figura 3, la cual la podemos incrustar en un geoplano de $n = 7$, obteniendo la Figura 4.

Figura 3.

Figura 4.

Esta forma de proceder de los estudiantes hizo que no alcanzaran una demostración por inducción. Por ello se propone un trabajo en etapas, desde la teoría APOE para el Taller, de tal forma que los asistentes alcancen la demostración por inducción de la conjetura que ellos propongan.

La Propuesta desde la perspectiva teórica de APOE

Se propone completar la Tabla 1, Tabla 2 y Tabla 3, para alcanzar la generalización de un proceso inductivo.

Tabla 1. *Desarrollo de la actividad del taller a partir de construcciones mentales acciones*.

Geoplano de malla cuadrada *n* x *n* puntos	**Polígono de mayor cantidad de lados construido**	**Número de lados del polígono construido**
Para $n = 2$		Polígono de 4 lados
Para $n = 3$		Polígono de 7 lados

Para $n = 4$		
Para $n = 5$		Polígono de 24 lados

Tabla 2. *Desarrollo de la actividad a partir de construcciones mentales procesos que se encapsulan.*

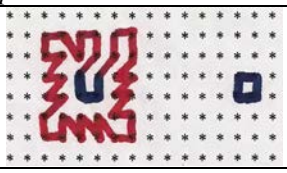
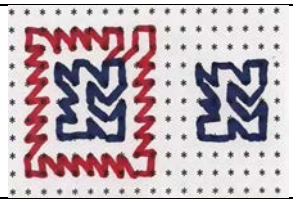
Para $n = 6$		
Para $n = 7$		Polígono de 47 lados
Para $n = 8$		Polígono de 64 lados
Para $n = 9$		

Tabla 3. *Desarrollo de la actividad a partir de construcciones mentales acciones sobre objetos.*

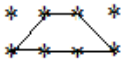
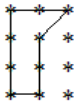
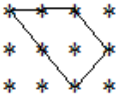
Para $n = 10$		Polígono de 100 lados

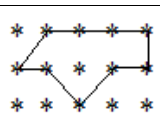
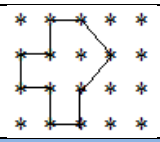
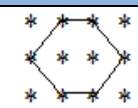
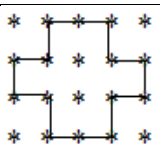
Situación 2

Primer Desafío

Complete la Tabla 4 y responda las preguntas que aparecen al final de ella.

Tabla 4. *Completar la información faltante.*

FIGURA	NÚMERO DE PUNTOS	ÁREA
	3	1/2
	4	1
		2
	9	
	12	5
	6	3

		
	10	
	8	4
	6	4
	14	
	13	8

Preguntas

- ¿Existe relación entre el número de puntos interiores del polígono y su área? Podría explicar.
- ¿Existe alguna relación entre el número de puntos en el geoplano y el área de un polígono? Podría explicar.

Segundo Desafío

Encuentre todos los polígonos de área ½ en un geoplano de 5 x 5 puntos.

Evidencias obtenidas de la Situación 2

Se realizó la experiencia con estudiantes universitarios y las evidencias obtenidas dan cuenta que no lograron establecer en forma explícita la fórmula de Pick (Sea *i* el número de puntos interiores del polígono y *B* el número de puntos en el borde del polígono, entonces el área *A* del polígono se puede calcular a partir de la fórmula $A = i + B/2 - 1$, no obstante lograron dar respuesta a lo concreto, esto es representaciones figurales adecuadas a las acciones pedidas, la Figura 5 es una evidencia de ello:

Figura 5. Producción de un estudiante de la Universidad 1 en la completación de la tabla.

En la Figura 6, es posible apreciar la estrategia, de un estudiante, para dar respuesta a una de las preguntas, la que no alcanza a transformarse en argumento.

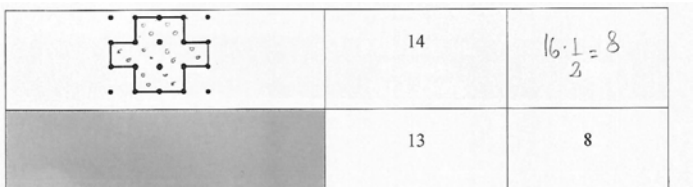


Figura 6. Producción de estudiante de la Universidad 2 en la completación de la tabla.

Podemos concluir que en ambas producciones (Figura 5 y Figura 6), no se dio sustento a los procesos de generalización necesarios para la construcción de la fórmula de Pick.

El Problema y su análisis. El Área en un Geoplano. Teorema De Pick

Basados la propuesta de Verdugo, Briseño, Vázquez y Palmas (2000) sobre el teorema de Pick; donde, desarrollan estrategias didácticas para la construcción de la fórmula de Pick con el propósito de aproximar el área de regiones poligonales sencillas. En su estudio realizan procesos de generalización en la búsqueda del teorema de Pick, por esta razón estudiamos los procesos dispuestos como un antecedente para nuestro modelo, la descomposición genética.

Por otra parte, hemos considerado pertinente que cada problema del taller, aborde diferentes perspectivas en los procesos de generalización para las técnicas de conteo que involucran planos figurales constructivos. En el segundo desafío de la situación 2, trataremos en el geoplano el concepto de área de figuras poligonales, en particular lo que se denomina la fórmula de Pick, la cual apareció en libro "Mathematical Snopshots" que recuperó el trabajo de Pick que había sido publicado en 1899.

La fórmula de Pick relaciona el área de un polígono simple cuyos vértices tienen coordenadas enteras con el número de puntos en su interior y en su borde. Existen dos versiones de ella, la primera relaciona sin puntos en el interior y la segunda con puntos en el interior.

Sea B el número de puntos en el borde del polígono, entonces el área A del polígono se puede calcular a partir de la fórmula: $A = \frac{B}{2} - 1$. Por otra parte, al considerar puntos interiores se tiene que: Sea i el número de puntos interiores del polígono y B el número de puntos en el borde del polígono, entonces el área A del polígono se puede calcular a partir de la fórmula: $A = i + \frac{B}{2} - 1$.

Algunas precisiones necesarias, para calcular algunas áreas, debemos aclarar que trabajaremos sólo con polígonos que no se intersectan a sí mismos, los cuales se llaman *simples*. En nuestro geoplano los únicos vértices admisibles para todos los polígonos que construyamos, serán los puntos. Como calcular el área de un polígono sin puntos interiores, las estrategias esperadas para la generalización son:

Cuadricular la figura y contar los cuadros en su interior, por ejemplo Figura 7.

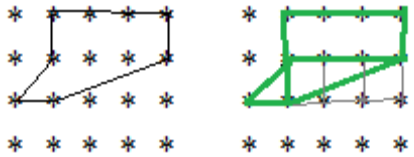


Figura 7. Separar la figura en 3 partes.

Bajo esta estrategia, se separa la figura en tres partes: un rectángulo de área 3, un triángulo de área igual a la mitad del área de un cuadrado unitario, y un segundo triángulo, cuya área se calcula separándolo en tres partes mediante segmentos verticales, donde la parte de la izquierda y la de la derecha se complementan para formar un cuadrado unitario, mientras que la parte central tiene área ½, de modo que el área de la figura original está dada por la suma 3 + ½ + 1 + ½ = 5.

Es posible reescribir esta suma de la siguiente forma: $(3\times1)+\left(1\times\frac{1}{2}\right)+\left(3\times\frac{1}{2}\right)=5$, la que describe como se calculan las áreas de cualquier polígono.

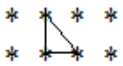
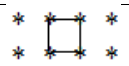
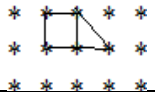
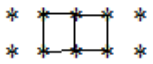
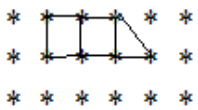
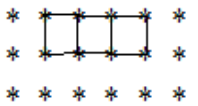
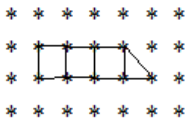
Una segunda estrategia, es completar la figura mediante figuras conocidas, por ejemplo Figura 8:

Figura 8. Completar mediante figuras conocidas.

Aquí, la figura inmediatamente anterior, es encerrada en un rectángulo, cuya área es 8. A dicha área le restamos el área de un cuadrado unitario y el área de dos triángulos. El primer triángulo es la mitad de un cuadrado unitario, y por tanto tiene área ½; el segundo es la mitad de un rectángulo de área 3, de modo que el triángulo tiene área 3/2; así, el área es 8 – 1- ½ - 3/2 = 5.

Bajo las estrategias antes escritas es posible reconstruir la fórmula de Pick para el cálculo del área de polígonos en un geoplano, pero queremos una descripción en términos que facilite su construcción como un proceso recursivo de generalización, para ello la descomposición genética propuesta a partir de acciones sobre ciertas construcciones mentales objeto estará dirigida por las siguientes preguntas: ¿Cuál es el área de un polígono de *n* puntos en la orilla y ninguno al interior? ¿Cuál es el área de un polígono de *n* puntos en la orilla y *m* en su interior?

La Propuesta desde la perspectiva teórica de APOE

Figura	Número de puntos	Área
Por ejemplo 	3	1/2
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
…	…	…
	n	

Situación 3
El Desafío

Considera la siguiente situación.

En el siguiente modelo de circunferencia verde, se posiciona una ficha azul alrededor de ella, como aparece en la Figura 9.

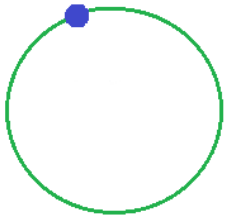


Figura 9. La situación.

Pregunta 1.- ¿De Cuántas maneras puedes posicionar esta ficha?
Pregunta 2.- Si, en la situacion anterior consideramos dos fichas,¿De cuántas maneras puedes posicionar estas fichas?
Pregunta 3.- Completa la siguiente tabla.

Número de fichas	**De cuántas maneras puedes posicionar estas fichas?**
1	
2	
3	
4	
5	
.	
.	
n	

Evidencias obtenidas de la Situación 3

Se planteó el desafío anterior a estudiantes universitarios de primer año, sin que hayan tenido una aproximación anterior al tema, ellos evidenciaron en sus respuestas, elementos externos a las variables matemáticas adecuadas para resolver el problema, entre las cuales se encuentran: problemáticas de abstracción de los elementos en juego, como considerar las cualidades físicas de los objetos a posicionar (tamaño, espesor, etc.), problemas con el sistema referencial. Un ejemplo de ello se aprecia en la Figura 10, los estudiantes que respondieron de esta forma constituyen una evidencia de las problemáticas antes señaladas. Desde la descomposición genética, podemos decir que la construcción mental de sistema referencial no es un esquema.

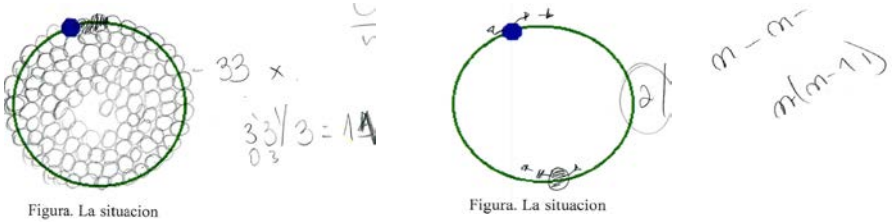


Figura 10. Producciones de los estudiantes de la Universidad 2.

El Problema y su análisis

El objetivo de esta actividad es proponer un análisis de un problema con elementos ordenados y permutados en un contexto circunferencial.

En este campo, sus particularidades y restricciones respecto de sus métodos y objetos de estudio. Específicamente; el problema está asociado al conjunto de los números naturales y axiomas de Peano, y a un clásico problema de conteo que considera establecer ordenamientos y permutaciones. La permutación puede estar referida a un arreglo con ordenamiento rectilíneo o, alternativamente, circular. Se considera que una permutación circular es una permutación que se aplica a conjuntos ordenados sobre una circunferencia, es decir, que no tienen principio ni final. Así; el uso de la noción de orden en este contexto matemático exige depurar el contexto distinguiendo sólo los elementos que son pertinentes al problema, lo que tensiona su resolución, y entonces surge una problemática que puede ser abordada desde la Didáctica.

El problema de la situación 3 que hemos establecido en este taller, es un clásico al interior de las unidades que tratan el saber asociado al conteo en matemática discreta, y hay diferentes registros de ello.

- *Siete muchachos forman una ronda. ¿De cuántas maneras distintas se pueden colocar en círculo?* (Vilenkin, 1972, p. 26).
- *Si seis personas, designadas como A, B, C, ... , F, se sientan entorno de una mesa redonda, ¿cuántas disposiciones circulares diferentes son posibles, si las disposiciones se consideran iguales cuando una puede obtenerse de la otra mediante una rotación?* (Grimaldi, 1997, p. 11).
- *Consideremos el alfabeto castellano reducido a 21* consonantes (no incluimos la ch, la ñ, ni la ll) y con 5 vocales (a, e , i, o, u). Suponga ahora que colocamos, por ejemplo, las letras del alfabeto en un arreglo circular (figura circunferencial constituida de 26 letras). Demuestre que debe haber 5 consonantes consecutivas en un arreglo de ese tipo. (Ross & Wright, 1990, p. 220).
- ¿De cuántas maneras se pueden sentar ocho personas alrededor de una mesa si dos formas se consideran la misma cuando una se puede obtener de la otra mediante una rotación? (Ross & Wright, 1990, p. 327).
- Encuentre las m formas en que 7 personas pueden sentarse: a) En una fila de sillas; b) alrededor de una mesa redonda (Lipschutz, 2009, p. 98). ¿De cuántas maneras se pueden sentar 5 personas alrededor *de una mesa redonda*? (Spiegel & Moyer, 2007, p. 295).

Entonces después de prestar atención a los problemas anteriores, el desafío se plantea para obtener el número de arreglos diferentes en que puede(n) posicionarse 1, 2, 3, 4, ... , *n* objetos alrededor de un círculo, sin que importe la posición absoluta de los objetos en el círculo, advirtiendo la posición relativa entre los objetos, es decir, dos permutaciones circulares serán

iguales si la posición relativa entre los n objetos es la misma, aunque la posición absoluta entre ellos sea diferente.

En el caso particular de la situación 3, el enfoque APOE también otorga una base teórica para analizar la forma en que se constituye la generalización en el conteo de situaciones que se interpretan a través de representaciones figurales no poligonales, las que construyen otros conceptos matemáticos y estudiar cómo ellos evolucionan en la mente de los estudiantes es todo un desafío.

A Modo de Conclusión

El desarrollo de este taller –a través de estas tres situaciones– permite construir un modelo explicativo de los procesos de generalización como estrategia cognitiva para el aprendizaje de técnicas de conteo mediante una descomposición genética, que desde acciones sobre construcciones mentales objetos posibilitan la generalización como proceso cognitivo necesario en la matemática.

Referencias y bibliografía

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. y Weller, K. (2014). *APOS Theory. A Framework for Research and Curriculum Development in Mathematics Education* New York: Springer.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). *A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education*. Research in Collegiate Mathematics Education, II. En J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.) CBMS Issues in Mathematics Education, 6, 1-32.

Dubinsky, E. y W. Fenton (1996), *Introduction to Discrete Mathematics with ISETL*, Nueva York, Springer Verlag.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer.

Grimaldi, R.P. (1997). *Matemáticas Discreta y Combinatoria*. México: Addison Wesley Iberoamericana, S.A.

Kú, D., Trigueros, M. & Oktaç, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática*, 20(2), 65-89.

Lipschutz, S. (2009). *Matemáticas Discreta*. México: McGraw Hill.

Ross, K.A. & Wright, Ch.R.B. (2009). *Matemáticas Discreta*. México: Prentice Hall.

Salgado, H., & Trigueros, M. (2009). Conteo: una propuesta didáctica y su análisis. *Educación Matemática*, 21 (1), 91-117.

Sierra, T. & Rodriguez, E. (2012). Una propuesta para la enseñanza del número en la Educación Infantil. Números. *Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 80 (12), pp. 25-52.

Stake, R.E. (2010). *Investigación con estudio de casos*. Barcelona: Labor.

Spiegel, M.R. & Moyer, R.E. (2007). *Algebra Superior*. México: McGraw Hill.

MINEDUC. (1998). Objetivos Fundamentales y Contenidos Mínimos Obligatorios de la Educación Media Ed. MINEDUC, Santiago de Chile.

Verdugo, J.; Briseño, L.; Vázquez, R.; & Palmas, O. (2000). *Área de figuras en el geoplano*. [en línea]. México: Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias / UNAM, Septiembre de 2014. Disponible en: <http:// www.cneq.unam.mx>.

Vilenkin, N. (1972). *¿De cuántas formas?: Combinatoria*. Moscú: MIR.

Articulação das tecnologias digitais aos processos de ensinar e aprender Geometria: perspectivas de abordagem no software GeoGebra

Andriceli **Richit**.
Instituto Federal Catarinense-Concórdia
Brasil
andricelirichit@gmail.com
Maria Margarete do Rosário **Farias**.
Universidade Estadual de Santa Cruz
Brasil
margarete333@hotmail.com
Adriana **Richit**.
Universidade Federal da Fronteira Sul-Erechim
Brasil
adrianarichit@gmail.com
Mauri Luís **Tomkelski**
Colégio Estadual Professor Mantovani
Brasil
mauriluis@gmail.com

Resumo

Nos processos de ensino e aprendizagem, a Geometria tem papel preponderante, pois ativa estruturas mentais no movimento que perpassa dados concretos e experimentais para processos que envolvem abstração e generalização de ideias e conceitos. Entretanto, a Geometria tem seguido uma abordagem predominantemente algébrica. Nesse sentido, entendemos que as tecnologias digitais constituem-se em importantes recursos para a discussão de atividades matemáticas. Além disso, consideramos que por meio das tecnologias digitais é possível remover um pouco o fardo algébrico intrínseco a Geometria. Ademais, as tecnologias digitais caracterizam-se como ferramentas úteis para criar um ambiente investigativo, na medida em que propiciam questionamentos, reflexões, análises e fazem com que a sala de aula se torne um lugar onde relações são estabelecidas, possibilitando ao estudante que, por meio de suas conjecturas, possa construir conhecimento sobre Geometria. Assim, nesta oficina, discutiremos alguns conceitos de Geometria em uma perspectiva de investigação matemática no Software GeoGebra.

Palavras chave: geometria, tecnologias digitais, representações gráficas, software Geogebra.

Introdução

Trazemos neste artigo, inicialmente, algumas considerações a respeito dos processos de ensinar a aprender Geometria, perpassando o movimento histórico de sua constituição e problemáticas relacionadas ao seu ensino e aprendizagem em diferentes níveis de ensino. Em um segundo momento discutimos as potencialidades das tecnologias digitais na abordagem da Geometria, em específico trabalhos que articulam as tecnologias digitais aos processos de ensinar e aprender Geometria. Para guiar nossas discussões trazemos resultados de algumas pesquisas que focam os aspectos supracitados. Assim, a proposta de oficina ora apresentada busca (a) promover junto aos participantes familiarização ou ampliação das potencialidades pedagógicas e matemáticas do software GeoGebra e (b) engajá-los em um contexto de investigação matemática em Geometria com o software GeoGebra.

Geometria: movimento histórico, problemáticas de ensino-aprendizagem e articulação as tecnologias digitais

Assim como ocorreu com outras subáreas da Matemática, a Geometria seguiu um movimento de constituição longo, marcado por divergências e períodos de estagnação. Tal movimento, considerado em sua essência, apresenta-se intimamente ligado ao aspecto visual. De acordo com Fillos (2006), a Geometria pode ser entendida como um corpo de conhecimentos fundamentais para que possamos compreender o mundo, além de propiciar a participação ativa do homem na sociedade, pois pode ser concretizada em todas as instâncias de nossas vidas.

Fillos (2006), fundamentado em Fainguelernt (1995), pontua que a Geometria tem papel preponderante no ensino, pois ativa estruturas mentais no movimento que perpassa dados concretos e experimentais para processos que envolvem abstração e generalização. Acrescentam, ainda, que a Geometria configura-se como um tema integrador entre diversos ramos da Matemática, "sendo a intuição, o formalismo, a abstração e a dedução constituintes de sua essência (Fillos, 2006, p. 2).

Analogamente ao que se observa em relação ao ensino do Cálculo Diferencial e Integral, a Geometria também vem se configurando como uma disciplina complicada, sobretudo pelo fato que se desdobrou em outras subáreas, tais como Geometria Analítica e Plana, e uma algebrização foi se instaurando em sua essência.

Teorizando a respeito da especificidade da Geometria, Kluppel e Brandt (2012, p.05) pontuam que esta:

> [...] exige um modo de processamento cognitivo autônomo, com características específicas, em relação a qualquer outra forma de funcionamento do raciocínio. Requer a utilização de registros figurais para designar as figuras e suas propriedades e registros em língua natural para enunciar definições, teoremas, hipóteses.

Em alguns momentos, ao longo da história da instituição desta subárea da Matemática no ambiente escolar, a mesma tem sido colocada em segundo plano devido as dificuldades inerentes aos seus processos de ensino e aprendizagem. Analisando esses aspectos Rosa (2009, p.24) afirma que "O ensino da Geometria no enfoque tradicional enfrenta grandes problemas, seja com relação à formação e conhecimento do professor, aos métodos utilizados, ou ainda as dificuldades encontradas em relacionar a abordagem axiomática e a Geometria prática [...]".

Destaca, ainda, que sem uma articulação dos aspectos algébricos do Ensino da Matemática aos geométricos, obstáculos acabam se criando e privando os estudantes de um desenvolvimento integral dos processos de pensamento (Rosa, 2009).

Ademais, destacar a relevância da Geometria não significa minimizar a importância da Álgebra, pois há a necessidade de desenvolver nos estudantes, tanto um pensamento de natureza visual, o qual é intrínseco e próprio da Geometria, quanto um pensamento de natureza sequencial, próprio da Álgebra. Nessa perspectiva Regina Pavanello (1989), pesquisadora brasileira, afirma que:

> A Geometria apresenta-se como um campo profícuo para o desenvolvimento da "capacidade de abstrair, generalizar, projetar, transcender, o que é imediatamente sensível", que é um dos objetivos do ensino da Matemática, oferecendo condições para que níveis sucessivos de abstração possam ser alcançados. Partindo de um nível inferior, no qual reconhece as figuras geométricas, embora percebendo-se como todas indivisíveis, o aluno passa, no nível posterior, a distinguir as propriedades dessas figuras; estabelece, num terceiro momento, relações entre as figuras e suas propriedades, para organizar, no nível seguinte, sequências parciais de afirmações, deduzindo cada afirmação de uma outra, até que, finalmente, atinge um nível de abstração tal que lhe permite desconsiderar a natureza dos objetos e do significado concreto das relações existentes entre eles (p.182).

Para além disso, a autora chama a atenção à postura do professor ao trabalhar com a Geometria, assinalando que este não trabalha "[...] as relações existentes entre as figuras, fato esse que não auxilia o aluno a progredir para um nível superior de compreensão de conceitos" (Pavanello, 2001, p. 183).

Na perspectiva dos entendimentos explicitados, discussões que envolvem as problemáticas dos processos de ensinar e aprender Geometria assumem orientações diversas que transitam entre questões pedagógicas e metodológicas do ensino. Nesse movimento vem se consolidando uma frente de pesquisas que tomam as tecnologias digitais como possibilidades de promover compreensões "[...] de relações geométricas sem a necessidade de memorização e utilização de estratégias rigorosamente elaboradas, ou técnicas de resolução analítica e, com as TI a experimentação passa a obter um papel importante na produção matemática (Santos, 2006, p. 24)".

Corroborando a autora supracitada, acreditamos que a utilização das tecnologias digitais podem deflagrar transformações no modo de pensar e produzir conhecimento, sobretudo no que diz respeito à Geometria, quer seja em nível fundamental, médio ou superior. A fim de ilustrar como as tecnologias digitais podem contribuir nos processos de ensinar e aprender Geometria, apresentamos agora os resultados de algumas pesquisas que focam a construção do conhecimento em ambientes permeados por recursos tecnológicos, tais como softwares de geometria dinâmica entre outros.

Santos (2006) investigou como se dá a exploração dos conceitos de Geometria Espacial em ambientes online (TelEduc), considerando aspectos como a verificação de propriedades, criação e validação de conjecturas, partindo do desenvolvimento de atividades investigativas por meio do uso do software Wingeom. Como resultados de sua investigação, a autora destaca que o conhecimento é algo produzido a partir de um coletivo intelectual, o qual é composto por humanos e mídias, num movimento de reorganização do pensamento.

Santos (2011), por sua vez, trabalhando em uma perspectiva de abordagem dinâmica a Geometria Analítica Plana, desenvolveu uma pesquisa que buscou entender como se constitui/se

caracteriza um ambiente de aprendizagem e exploração dos conceitos de Retas, Circunferências e Cônicas, a partir do desenvolvimento de atividades exploratório- investigativas no software GeoGebra com alunos do Curso de Licenciatura em Matemática. Como considerações acerca do trabalho desenvolvido, o autor aponta que estudar tópicos de Geometria Analítica Plana com o apoio do software GeoGebra contribuiu para a constituição/caracterização de um ambiente capaz de privilegiar as ações dos alunos na construção do conhecimento matemático, proporcionando ricas possibilidades de visualização de conceitos e propriedades, além de privilegiar a experimentação matemática e dar ênfase à interpretação de construções geométricas, que são difíceis de serem trabalhadas em sala de aula dispondo-se apenas de lousa e giz. Conclui o trabalho, destacando a importância de promover situações por meio das quais os estudantes possam construir o conhecimento de modo significativo e em consequência, contribuir com a formação inicial destes futuros professores. Destaca, ainda, que a experiência do trabalho de experimentação, visualização e conjecturação deverá ser lembrada em sua prática pedagógica quando em atividade docente.

Ainda sobre a utilização das tecnologias digitais no contexto da Geometria, Heitmann (2013) desenvolve uma pesquisa de mestrado que segue perspectivas semelhantes as já apresentadas. Tomando por contexto, a disciplina "Prática de Ensino III: Construções Geométricas" ofertado pelo Centro de Educação Aberta e a Distância da Universidade Federal de Ouro Preto (CEAD/ UFOP), na qual o pesquisador desenvolve em uma das aulas, ao longo da disciplina, uma atividade intitulada "Polígonos: Dobras, Cortes e Geometria Dinâmica". Essa atividade foi desenvolvida em ambiente online, direcionada por um roteiro de atividade, um editor de texto colaborativo, sala de bate papo e o Software GeoGebra. Como resultados, o autor destaca como fator preponderante no desenvolvimento de atividades nessa modalidade, a comunicação por meio de diversas interfaces, a participação coletiva no processo de investigação e o papel da Internet no coletivo pensante.

Os resultados apresentados por Heitmann (2013) revelam que algumas evoluções vêm ocorrendo nos processos de ensinar e aprender Geometria. Tomemos uma aula que não se considerasse as tecnologias digitais no desenvolvimento das atividades que ele propôs: será que haveria interação entre os estudantes e o conteúdo no desenvolvimento das atividades? Seria possível os estudantes observarem/vivenciarem diferentes possibilidades de exploração dos conceitos? Haveria o engajamento dos estudantes na atividade proposta?

Ressaltamos aqui que não estamos dizendo que há métodos de abordar determinados conceitos que são melhores ou piores que os outros. Apenas estamos destacando as potencialidades do trabalho pedagógico e investigativo que as tecnologias digitais possibilitam e as contribuições que trazem à construção de conceitos matemáticos.

Richit (2005), trabalhando na perspectiva construcionista e da pedagogia de projetos, engaja três duplas de estudantes da Licenciatura em Matemática, os quais desenvolvem atividades envolvendo Geometria Analítica usando o Geometricks, um software de geometria dinâmica. As atividades desenvolvidas pelos estudantes privilegiavam vetores, combinação linear, elipse, hipérbole, produto vetorial entre outros. Como resultados, a autora pontua a valorização do saber do aluno, pois muitos apresentavam dificuldades conceituais no desenvolvimento dos projetos em face do uso do software Geometricks, as quais foram desaparecendo na medida em que necessitavam repensar esses conceitos do ponto de vista da tecnologia. Assim, havia um movimento recíproco nesse processo: a tecnologia ajudava-os a entender a Geometria Analítica, ao tempo que a tecnologia demandava conhecimentos sobre

Geometria Analítica. Finalizando, a autora destaca a importância desse tipo de abordagem, tanto para a construção de conceitos que também são necessárias em outras disciplinas como Cálculo, Álgebra Linear, bem como para a futura atuação docente destes estudantes em sala de aula.

Bilac (2008) desenvolve uma pesquisa que se situa na inter-relação das tecnologias digitais aos processos de ensinar e aprender Geometria, em particular no que se refere às Transformações Geométricas Planas. Trabalhando na perspectiva de experimentos de ensino, envolveu alunos do 8º ano de uma escola privada em sequências didáticas envolvendo simetria axial e simetria de rotação, utilizando para o desenvolvimento das mesmas o software Cabri-Géometrè. A pretensão da autora em trabalhar nesta abordagem consistia em compreender se o desenvolvimento de atividades matemáticas, associado ao uso de um software, trazia contribuições aos alunos quanto à aprendizagem das transformações geométricas.

Com a realização dos experimentos de ensino, a autora evidenciou, por meio das interações dos alunos nestas atividades, importantes resultados, visto que os experimentos de ensino realizados favorecem interpretações cognitivas aos diferentes níveis de conhecimentos das noções geométricas: intrafigural, interfigural e transfigural, auxiliadas pelos recursos e ferramentas do software Cabri-Géometrè.

Por sua vez Rosa (2009) realiza uma investigação do tipo estado da arte, analisando teses e dissertações desenvolvidas no âmbito no Programa de Educação Matemática da PUC/SP, que se encontravam no movimento de articulação das tecnologias digitais aos processos de ensinar e aprender Geometria, no período de 1994 a 2007. Por meio dessa análise buscou evidenciar as tendências que configuram os trinta e dois trabalhos tomados para a análise. A partir das pesquisas analisadas Rosa (2009) diz que embora as tecnologias, em específico softwares de Geometria dinâmica possibilitem abordagens interessantíssimas aos conceitos de Geometria, estes não garantem a efetivação da aprendizagem dos estudantes, pois "O Ambiente Computacional pode ser algo motivador, mas não é dele o papel e responsabilidade do ensinar e aprender, e sim dos professores e alunos" (Rosa, 2009, p. 97-98).

Além disso, a literatura em Educação Matemática tem enfatizado as potencialidades das tecnologias digitais, as quais crescentemente têm se mostrado importantes na abordagem de ideias e conceitos matemáticos. Em especial, a Geometria e os softwares desenvolvidos para a abordagem dos seus conceitos possibilitam, por meio de,

> […] ferramentas de construção: desenhos de objetos e configurações geométricas, são feitos a partir das propriedades que os definem. Através de deslocamentos aplicados aos elementos que compõe o desenho, este se transforma, mantendo as relações geométricas que caracterizam a situação. Assim, para um dado objeto ou propriedade, temos associada uma coleção de "desenhos em movimento", e os invariantes que aí aparecem correspondem as propriedades geométricas intrínsecas ao problema. E este é o recurso didático importante oferecido: a variedade de desenhos estabelece harmonia entre os aspectos conceituais e figurais; configurações geométricas clássicas passam a ter multiplicidade de representações; propriedades geométricas são descobertas a partir dos invariantes no movimento (Gravina, 1996, p. 6)

Corroboramos a Andrade (2010) no que diz respeito à utilização das tecnologias digitais aos processos de ensinar e aprender Geometria, posto que esses recursos conferem um caráter geométrico à abordagem dos conceitos e que as abordagens com registros geométricos permitem a visualização de diferentes características dos objetos, as quais não são perceptíveis em outros tipos de registros como os de natureza algébrica.

Por exemplo, a abordagem de conceitos de Geometria, como o de lugar geométrico, no Software GeoGebra, pode propiciar a relação existente entre o lugar geométrico descrito por um ponto que se move sobre uma reta ou uma curva e sua equação, de acordo com o princípio da reciprocidade da Geometria Analítica. Muitas vezes, a noção de lugar geométrico segue uma abordagem algébrica apenas, não possibilitando que o estudante construa esquemas mentais que lhe permitam compreender a equação que representa o respectivo lugar geométrico. Por exemplo, qual o lugar geométrico do ponto cujas coordenadas são P (t+1, 2t)? De modo algébrico, estabelecendo as relações e escrevendo y em função de x, temos:

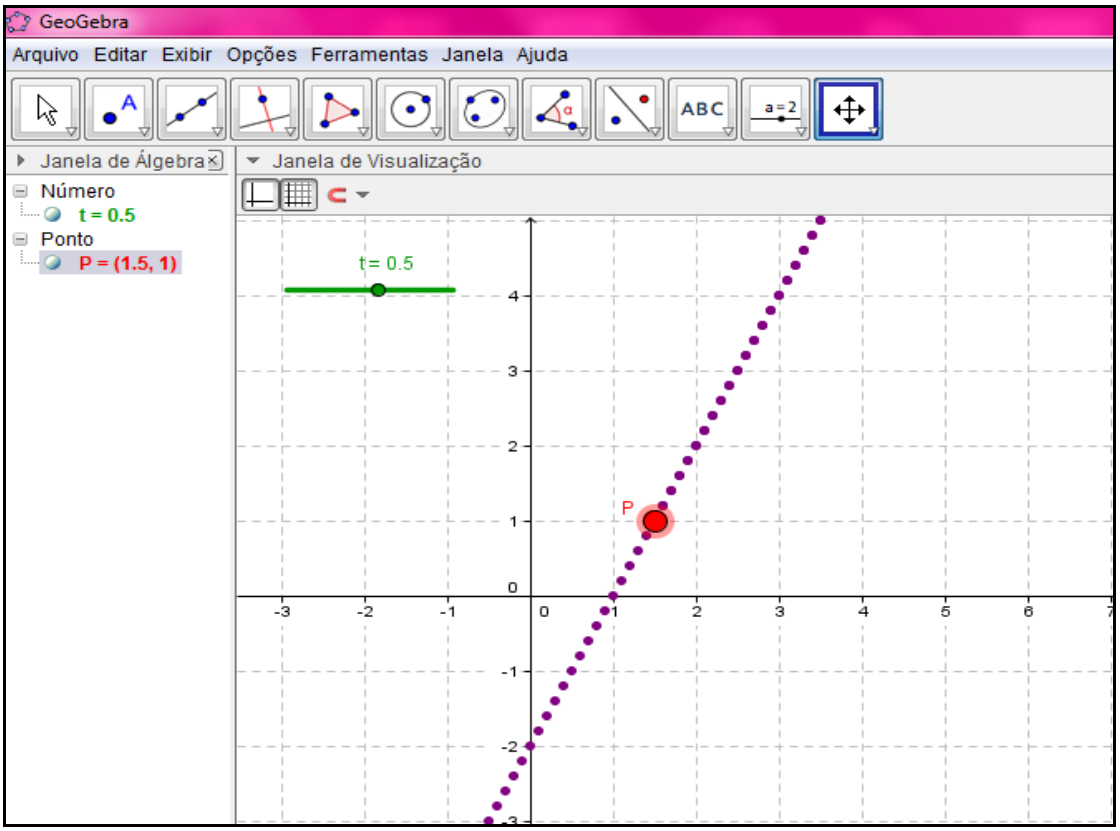
$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t \end{cases}.$$

Isolando t na primeira equação, temos t = x – 1. Substituindo t = x – 1 na segunda equação, temos: $y = 2(x-1) \Rightarrow y = 2x - 2$

Assim, o lugar geométrico associado ao conjunto de pontos genéricos do ponto P é a reta de equação: y = 2x – 2. Notemos que esta abordagem apenas possibilita ao estudante que encontre a equação da reta, mas a efetiva compreensão geométrica desta relação estabelecida apresenta-se falha e incompleta. Vejamos agora como esta mesma situação pode ser abordada considerando as potencialidades de um software. Aqui tomaremos o GeoGebra para explorarmos este conceito, conforme roteiro investigativo apresentado a seguir:

Atividade-explorando geometricamente a ideia de Reta (equação paramétrica)

1. Sejam x e y as coordenadas de um ponto P, expressas respectivamente por t + 1 e 2t.
2. Inicialmente, entre com o parâmetro t (também chamado controle deslizante). Para isso, digite no Campo Entrada do GeoGebra **t = 1** e tecle enter. Após, clique com o botão direito do mouse sobre o parâmetro t e selecione a opção exibir objeto. Feito isso, o parâmetro t aparecerá na janela gráfica do GeoGebra.
3. Explore propriedades, cor e estilo.
4. Agora, entre com um ponto P cuja abcissa é igual a t+1 e a ordenada igual a 2t. Para isso, digite no Campo Entrada do GeoGebra, **P=(t+1, 2t)** e tecle enter. Explore propriedades do ponto P.
5. Pretende-se que o ponto P deixe um rastro de forma a mostrar que a cada valor assumido pelo parâmetro t tenhamos coordenadas diferentes para P. Para isso clique com o botão direito do mouse sobre o ponto P ou na sua definição na janela algébrica e selecione a opção "Habilitar Rastro".
6. Anime o parâmetro t e anote o que acontece? A figura a seguir ilustra a representação solicitada na atividade.



7. O que determina esse conjunto de diferentes coordenadas relacionadas ao ponto genérico P?

8. Como fica esse rastro deixado pelo ponto P no plano?

9. Existe um modo de expressarmos matematicamente o rastro deixado pelo ponto P relacionado ao parâmetro t?

E a este tipo de abordagem que os conceitos deveriam assumir, de caráter investigativo, propiciando o pensar do estudante e dando a ele chances de pensar matematicamente e construir seu conhecimento.

Organização Metodológica da Oficina

A proposta de oficina ora apresentada será desenvolvida em Laboratório de Informática, com software GeoGebra devidamente instalado. No máximo vinte participantes serão aceitos, de modo que a interação entre participantes e ministrantes não seja prejudicada. Os participantes poderão ser alunos da Licenciatura/Bacharelado em Matemática, professores da Educação Básica ou Ensino Superior. A oficina dar-se-á em dois momentos: Em um primeiro momento, desenvolveremos uma atividade de familiarização junto aos participantes. Em um segundo momento prosseguiremos com atividades envolvendo alguns conceitos concernentes a Geometria, tais como Lugar Geométrico e Cônicas. Destacamos que durante o desenvolvimento da oficina trabalharemos em uma perspectiva de investigação matemática, lançando mão do software GeoGebra.

Referências

Andrade, J. P. G (2010). *Vetores: interações à distância para aprendizagem de Álgebra Linear.* Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Pernambuco, Recife, Brasil.

Bilac, C. U. (2008). *Possibilidades da aprendizagem de transformações geométricas com o uso do Cabri-Géomètre.* Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática), Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, São Paulo, Brasil.

Fainguelernt, E. K. (1995). O Ensino de Geometria no 1º e 2º Graus. *Educação Matemática em Revista*, 4, 45-52.

Fillos, L.M. (2006). O Ensino da Geometria: Depoimentos de Professores que fizeram História. En: *Anais do X Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática*. (pp.01-07). Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil.

Gravina, M. A. (1996). Geometria dinâmica uma nova abordagem para o aprendizado da geometria. In: *Anais do VII Simpósio Brasileiro de Informática na Educação*. Belo Horizonte, Minas Gerais, Brasil.

Heitmann, F. P. (2013). *Atividades investigativas em grupos online: possibilidades para a educação matemática a distância.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, São Paulo, Brasil.

Kluppel, G. T. & Brandt C. F. (2012). Reflexões sobre o ensino da geometria em livros didáticos à luz da teoria de representações semióticas segundo Raymond Duval. *En: Anais do IX Seminário de Pesquisa em Educação da Região Sul*. (p. 01-18). Caxias do Sul, Rio Grande do Sul, Brasil.

Pavanello, R. M. (1989). *O abandono do ensino da Geometria: uma visão histórica.* Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade de Campinas, Campinas, Brasil.

Pavanello, R.M. (2001). Geometria: Atuação de professores e aprendizagem nas séries iniciais. En: *Anais do I Simpósio Brasileiro de Psicologia da Educação Matemática*. (pp. 172-183). Curitiba, Paraná, Brasil.

Richit, A. (2005). *Projetos em Geometria Analítica Usando Software de Geometria Dinâmica: repensando a Formação Inicial Docente em Matemática*. Dissertação (Mestrado em Educação

Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, São Paulo, Brasil.

Rosa, K. C. (2009). *Ambientes computacionais no contexto da Geometria: Panorama das teses e dissertações do Programa de Educação Matemática da PUUC-SP de 1994 a 2007.* Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica, São Paulo, São Paulo, Brasil.

Santos, I. N. (2011). *Explorando conceitos de geometria analítica plana utilizando tecnologias da informação e comunicação: uma ponte do ensino médio para o ensino superior construída na formação inicial de professores de matemática.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Ciências Exatas e Biológicas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, Minas Gerais, Brasil.

Santos, S. C. (2006). *A Produção Matemática em um Ambiente Virtual de Aprendizagem: o caso da Geometria Euclidiana Espacial*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, São Paulo, Brasil.

Como um Matemático embrulha presentes gastando pouco material?

Juliana Cordeiro da **Cunha**
Universidade de Brasília
Brasil
julianapndeath@gmail.com
Raquel Carneiro **Dörr**
Universidade de Brasília
Brasil
raqueldoerr@gmail.com

Resumo

A partir de relações trigonométricas, concluir que, tendo uma caixa retangular sem tampa, com um volume fixo, a de menor área lateral é a de base quadrada. Em seguida, na perspectiva de embrulhar um presente, será calculado o comprimento do lado do papel de presente a partir de relações conhecidas na caixa de base quadrada. O objetivo das atividades será encontrar o formato do papel de presente de forma a obtermos o menor desperdício de material ao embrulhar a caixa. A metodologia usada será construir caixas de diversos formatos e em seguida, calcular a área lateral de cada uma. Comparando-se as áreas laterais das caixas se concluirá a respeito da menor área. Em seguida as caixas de bases quadradas serão embrulhadas de acordo com o cálculo do comprimento do lado do papel de presente.

Palavras chave: figuras planas, volume, áreas, semelhanças, trigonometria.

Como um matemático embrulha presentes?

As sequências didáticas desta oficina foram construídas com base no questionamento de como embrulhar um presente obtendo o menor desperdício possível de papel. A partir disso, o estudante deverá ser levado a pensar em formas diferentes de fazer o embrulho, e desta maneira, tirar conclusões a respeito do formato da caixa e da quantidade de papel usada para embrulhar o presente.

A construção da atividade foi baseada no artigo *"Como um Matemático Embrulha Presentes"* da Revista Cálculo (2012).

Os conteúdos teóricos auxiliares na execução dessa atividade são a definição, as propriedades e relações métricas no triângulo retângulo, bem como os Teoremas de congruência em triângulos retângulos e o Teorema de Pitágoras (Barbosa, 1995).

Justificativa

As atividades foram produzidas no âmbito de atuação do PIBID, Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência, do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, com o objetivo de serem aplicadas no ensino básico. A atuação dos licenciandos de Matemática no PIBID tem promovido a articulação de conteúdos teóricos com a prática em sala de aula, o

aprofundamento em assuntos escolhidos por eles para construção das atividades, mas sobretudo, tem possibilitado a construção de material didático inédito baseado na resolução de problemas para aplicação no ensino básico (Grebot, Gaspar, Dörr, 2013). Finalmente, as atividades poderão despertar o raciocínio lógico e a curiosidade dos participantes, servir de auxílio a professores do ensino básico em suas aulas, além de motivá-los à construção de suas próprias atividades didáticas.

O envolvimento dos participantes nas atividades propostas nesta oficina promove sua autonomia e eles serão induzidos à construção do conhecimento à medida que avançam na execução das tarefas. A metodologia é aplicada de modo que o grupo chegue às conclusões esperadas por meio da manipulação e observação do material construído e com a mediação do licenciando.

Os objetivos geométricos esperados serão alcançados por meio da construção prática de figuras geométricas. As questões propostas conduzirão os participantes a concluírem resultados que, se considerados desvinculados da prática, não tem significação para a aprendizagem e, portanto, não serão retidos pelos alunos.

Objetivo Geral

A partir de uma atividade prática, concluir que, tendo uma caixa retangular sem tampa, com um volume dado, a de menor área de superfície é a de base quadrada.

Objetivos Específicos

- Reforçar os conceitos de áreas de figuras planas;
- Trabalhar com manipulação de figuras espaciais de bases quadrada, triangular e retangular;
- Calcular áreas de superfícies de figuras espaciais;
- Observar padrões geométricos de figuras espaciais, a partir de situações práticas;
- Despertar e desenvolver o raciocínio lógico matemático.

Metodologia

Primeiramente será aplicada uma sequência de atividades que devem ser resolvidas e discutidas em grupo. Essas consistem inicialmente na construção de caixas de diversos formatos para as quais serão calculadas as respectivas áreas laterais. Em seguida, usando comparações entre suas áreas de superfícies, serão obtidas conclusões a respeito da menor área.

Finalizando as atividades, serão discutidos os temas e resultados que fundamentam geometricamente as conclusões obtidas nas atividades propostas.

Atividade I

Com o auxílio do papel cartão, construa uma caixa sem tampa em um dos seguintes modelos:

Tabela 1

Medidas das caixas de diferentes bases.

Bases	Comprimentos (cm)	
	Largura	Altura
Quadrada	10 x 10	5
Retangular	25 x 4	5
Triangular	15 x 15 x 15	5

Fonte: Atividades da oficina.

Calcule a área lateral da caixinha construída.

Usando a área lateral calculada e a de seus colegas, complete o quadro a seguir:

Tabela 2

Tabela para cálculo da área lateral e volume.

Bases	Valores (cm^2 e cm^3)	
	Área Lateral	Volume
Quadrada		
Retangular		
Triangular		

Fonte: Atividades da oficina.

A partir dos resultados da tabela, compare com o de seus colegas. O que se pode concluir?

Se fosse embrulhar, qual formato deveria ter a caixa para que se tenha o menor desperdício de papel? Explique o porquê da sua resposta.

Atividade II

Construa caixas quadradas de diferentes volumes.

Qual deverá ser o formato do papel de presente para embrulhar cada uma delas?

Como a caixa deverá ser posicionada no papel de presente, para que seja mais prático embrulhá-la e gastar menos papel possível?

Considere w a medida do lado, h a altura da sua caixa e c o comprimento do lado do papel de presente, conforme figura abaixo:

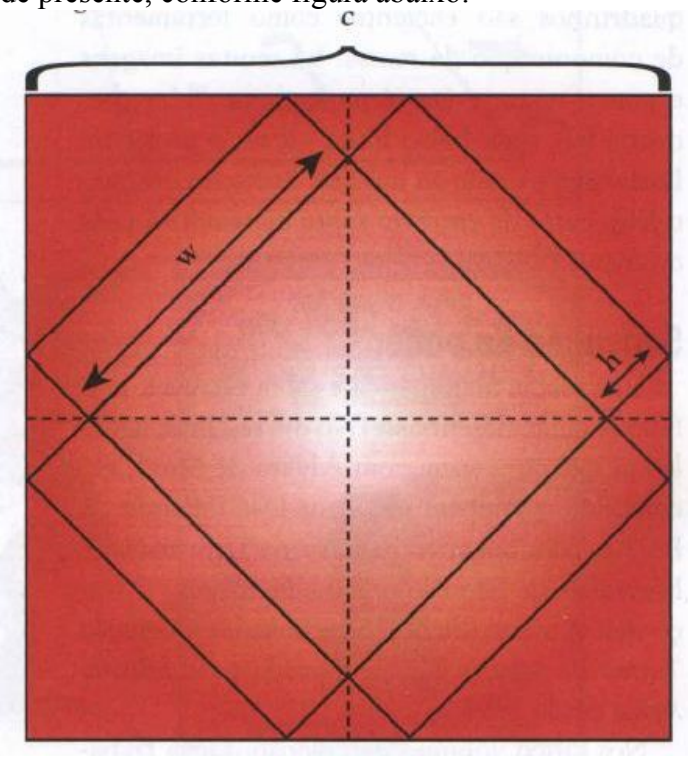


Figura 1. Caixa aberta sobre o papel de presente.
Fonte: Revista Cálculo 14, 2012

A partir desta figura calcule c em função de w e h.

Atividade III

Quanto mede os lados e a altura da sua caixa?
Quanto mede o lado do seu papel de presente?
Agora embrulhe sua caixa de presente.
O que você observa? Podemos concluir que houve o menor desperdício possível de material?

Conclusões Finais

As atividades propostas nesta oficina foram construídas para integrarem as atividades do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) no Departamento de Matemática da Universidade de Brasília. Esse programa visa o aperfeiçoamento e valorização da formação de professores para a educação básica e oferece bolsas aos participantes para atuarem em escolas de educação básica da rede pública de ensino.

Os projetos do PIBID contribuem para a inserção dos licenciandos no contexto das escolas públicas desde o início da sua formação acadêmica e consistem no desenvolvimento de atividades didático-pedagógicas sob a orientação de um docente da licenciatura da área e de um professor da escola. O projeto é fomentado pelo Ministério da Educação através da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)[1].

A implementação do PIBID na instituição de origem das autoras, tem produzido material pedagógico inédito para aplicação nos anos finais do ensino fundamental e ensino médio. Nesta oficina os participantes poderão conhecer na prática uma dessas produções que foi aplicada com sucesso em grupos de alunos do ensino médio de uma instituição pública de ensino.

Com relação aos conteúdos matemáticos abordados nas atividades apresentadas nesta oficina, devido à sua importância para estudantes dos anos citados, por meio da questão inicial, os professores que as utilizarem terão a oportunidade de apresentar aos seus alunos a geometria de uma forma instigante. Em seguida, com o uso de manipulações algébricas e conteúdos matemáticos acessíveis ao seu nível, poderão ser introduzidos ao formalismo matemático das demonstrações, caso acharem conveniente.

Na aplicação das atividades no PIBID, foi verificado que o licenciando pode experimentar o cotidiano da sala de aula de uma instituição pública, participou da elaboração de uma atividade pedagógica prática, articulando assim a teoria acadêmica com a prática, cumprindo com os objetivos do PIBID, mas principalmente, foi criada uma oportunidade de desenvolvimento desse licenciando não somente como estudante, mas sobretudo como futuro educador matemático. Tal experiência deve ser compartilhada tanto com professores que atuam em licenciaturas, quanto com licenciandos de matemática.

Uma vez que as atividades são realizadas em grupos, esperamos que haja maior envolvimento dos participantes na busca das soluções das situações problemas a fim de levarmos assim aos educadores participantes uma alternativa às aulas tradicionais de matemática.

A situação prática inicial proposta deverá instigar a curiosidade dos participantes e promover a criatividade e a descoberta dos resultados geométricos esperados.

Consideramos que determinados conteúdos em matemática devam ser introduzidos por meio do uso de situações problemas. Tal prática ajuda a desmistificar a matéria como sem utilidade e gera interesse pela disciplina.

---

[1]Informações sobre o PIBID: https://www.capes.gov.br/educacao-basica/capespibid

Para o bom andamento durante a aplicação das atividades, é importante a atenção e a interpretação dos enunciados. Assim, esta oficina também contribui para o desenvolvimento da leitura e interpretação de situações problemas.

Concluímos que as atividades propostas pela oficina cooperam para o alcance dos objetivos iniciais propostos e que elas poderão auxiliar educadores matemáticos que buscam alternativas para a aula tradicional por apresentar uma sugestão de trabalho que poderá ser aplicada em suas salas de aula. Esperamos que ao serem aplicadas, sejam motivadoras e os estimulem na construção de suas próprias atividades.

Referências e bibliografia

Barbosa, João Lucas Marques. (1995). *Geometria euclidiana plana*. Rio de janeiro: Soc. Bras. Mat. Coleção do professor de matemática.

Cálculo - Revista Cálculo - Matemática para Todos. (2012). Editora Segmento, SP, 14, 56-57.

Grebot, G, Gaspar, M. T. & Dörr, R. C. (2013). Experiências matemáticas e experiências com alunos na formação de professores: desdobramentos do programa PIBID/MAT da Universidade de Brasília, Atas VII CIBEM, Montevideo, Uruguai.

Apêndice A

Abordagem Geométrica do Problema

Temos a seguinte pergunta inicial:

"Havendo um presente dentro de uma caixa, como deveria ser embrulhada com o mínimo de desperdício de material?"

Sabendo que o formato da caixa é quadrado, pois assim obtemos o menor desperdício de papel, agora devemos pensar no papel de presente. Para isso, pegamos uma caixa quadrada qualquer, como mostra a figura a seguir:

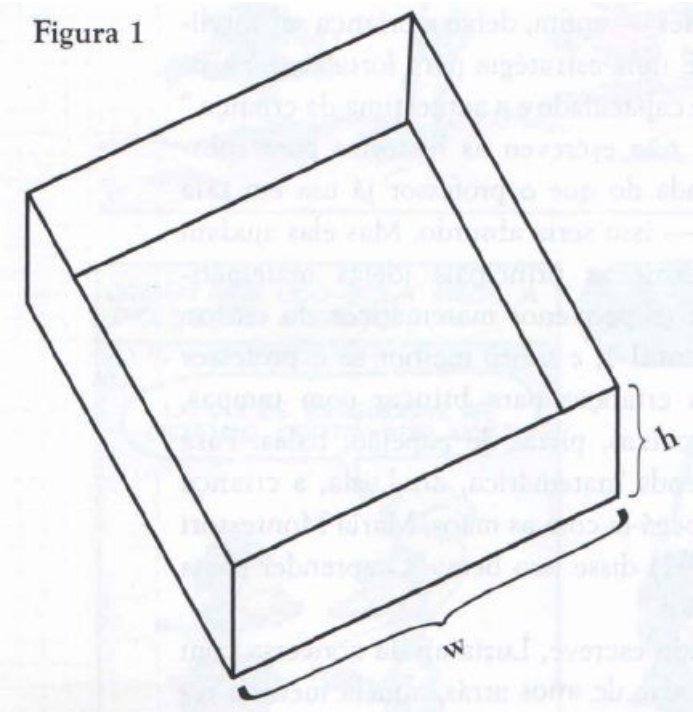


Figura 2. Caixa de base quadrada.
Fonte: Revista Cálculo 14, 2012

Que tamanho deve possuir o papel de presente?

Sabemos que tanto a caixa quanto o papel de presente devem ser quadrados. Posicionando a caixa aberta sobre o papel de presente, vamos obter a seguinte figura:

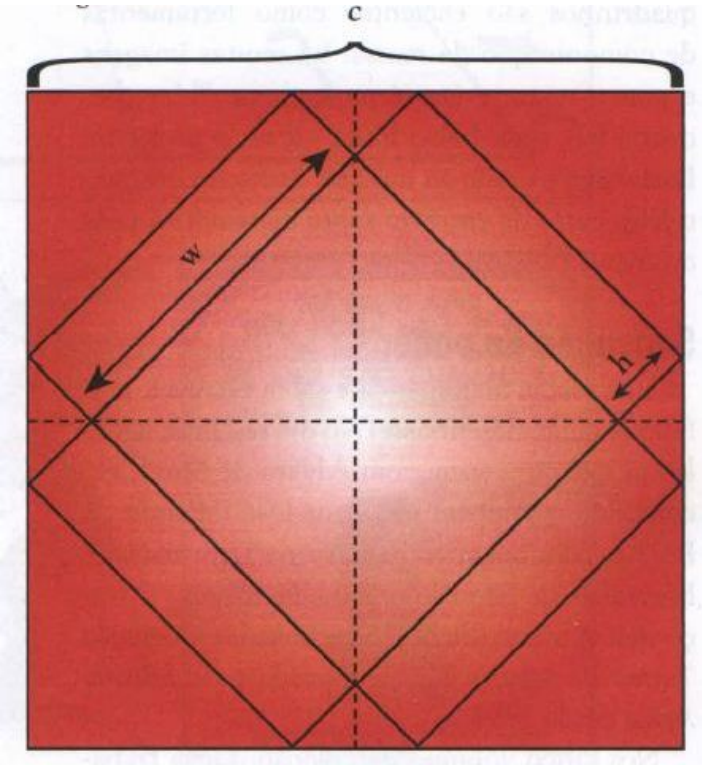


Figura 1. Caixa aberta sobre o papel de presente.
Fonte: Revista Cálculo Edição 14, 2012

Nosso objetivo será encontrar a medida do lado do papel de presente, que de acordo com a figura, chamaremos de c. Podemos perceber que a figura está dividida em quatro partes, concentremos nossa atenção na primeira parte do lado direito, a que contém a altura h. De posse de todos os elementos necessários para descobrir c, temos a seguinte figura da primeira parte em detalhes:

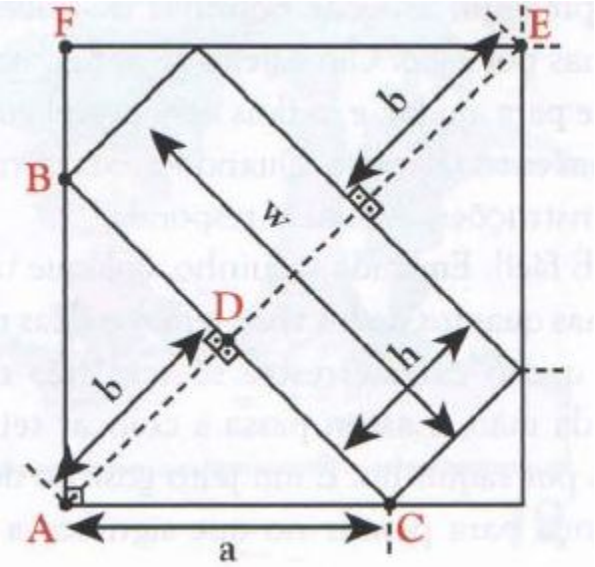


Figura 3. Primeira parte em detalhes.
Fonte: Revista Cálculo 14, 2012

Agora começaremos os cálculos, com o objetivo de encontrar o valor de c. Para isso, buscamos na figura relações conhecidas. Olhando para a, podemos perceber que ele é a metade da diagonal de um quadrado de lado igual a w, ou seja, $2a$ é a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos iguais a w. Com essas informações, podemos iniciar nossos cálculos:

$$(2a)^2 = w^2 + w^2$$
$$4a^2 = 2w^2$$
$$a^2 = \frac{2w^2}{4}$$
$$a = \sqrt{\frac{w^2}{2}} = \frac{w}{\sqrt{2}} = \frac{w\sqrt{2}}{2}$$
$$a = \frac{w\sqrt{2}}{2}$$

Assim encontramos o valor de a, pois ele é necessário para encontrarmos o valor de b, que é um cateto de um triângulo retângulo com hipotenusa igual a a e cateto oposto igual a metade de w. Assim, temos:

$$a^2 = b^2 + \left(\frac{w}{2}\right)^2$$
$$\left(\frac{w\sqrt{2}}{2}\right)^2 = b^2 + \frac{w^2}{4}$$
$$\frac{2w^2}{4} = b^2 + \frac{w^2}{4}$$
$$b^2 = \frac{2w^2}{4} - \frac{w^2}{4}$$
$$b = \sqrt{\frac{w^2}{4}} = \frac{w}{2}$$

Logo, obtemos o valor de b. Agora, olhando novamente para nossa figura podemos perceber como será usado o valor de b para o cálculo de c: $b + h + b$ é a hipotenusa do triângulo retângulo de catetos iguais à metade de c. Logo, sabemos como calcular o valor de c:

$$(2b + h)^2 = \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$$
$$(2b + h)^2 = 2\frac{c^2}{4}$$
$$c^2 = 2(2b + h)^2$$
$$c = \sqrt{2(2b + h)^2}$$
$$c = \sqrt{2}\,.\,(2b + h)$$
$$c = \sqrt{2}\,.\left(2\frac{w}{2} + h\right)$$
$$c = \sqrt{2}\,.\,(w + h)$$

Portanto, precisamos somente do comprimento do lado da caixa e sua altura para sabermos aproximadamente o tamanho do papel de presente que iremos usar. E se embrulharmos a caixa com papel de presente quadriculado ou com listras, eles irão coincidir perfeitamente. Assim, teremos um embrulho bonito e com o menor desperdício de papel possível.

Competencias matemáticas, diseño y selección de tareas para el aprendizaje de las matemáticas en ingeniería

Ana Alicia **Guzmán** Castro
Escuela Colombiana de Ingeniería
Colombia
ana.guzman@escuelaing.edu.co
Edgar **Obonaga** Garnica
Escuela Colombiana de Ingeniería
Colombia
edgar.obonaga@escuelaing.edu.co
Sandra Isabel **Gutiérrez** Otálora
Escuela Colombiana de Ingeniería
Colombia
sandra.gutierrez@escuelaing.edu.co

Resumen

En este trabajo se presentan algunos elementos, asociados al enfoque por competencias, que podrían ayudar a mejorar la práctica de la enseñanza de las Matemáticas en Ingeniería. Se avanza sobre un modelo, que identifica las expectativas de aprendizaje, en términos de objetivos específicos, competencias y tareas; basado en primera instancia en el Modelo Competencias Matemáticas, propuesto por Solar y otros (2011) y en segundo lugar en el Análisis Didáctico y Diseño Curricular en Matemáticas, propuesto por Gómez (2002). Esta propuestabrinda la posibilidad a los docentes de repensar los elementos involucrados en el proceso de enseñanza aprendizaje. También se mencionan algunas características importantes en el diseño y selección de tareas matemáticas, así como algunas implicaciones del enfoque por competencias. Mediante ejemplos se ilustra la propuesta.

Palabras clave: competencias, competencias matemáticas, educación matemática en ingeniería, tareas, niveles de complejidad.

Marco teórico que sustenta el proyecto

Contenidos, objetivos, competencias matemáticas, tareas y niveles de complejidad

El trabajo corresponde a una investigación sobre *Competencias Matemáticas en las carreras de la Escuela Colombiana de Ingeniería* (Obonaga E., Gutiérrez S., Guzmán A. y Álvarez C. 2012). En dicho trabajo asumimos la noción de competencia matemática planteada por el estudio Pisa: "… conjunto de capacidades (puestas en juego por los estudiantes) para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando resuelven o enuncian problemas *matemáticos en una variedad de situaciones y dominios incluyendo conceptos matemáticos cuantitativos,*

espaciales, probabilísticos o de otro tipo." (OCDE 2005 p.37), así como la de los Estándares Básicos de Competencias de Colombia*, conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socioafectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores (MEN, 2006, p. 49)*. Estas dos posturas recalcan el carácter funcional de las Matemáticas y permiten tener elementos que articulan la Educación Matemática escolar y universitaria.

Las competencias matemáticas, las interpretamos como procesos matemáticos en el sentido de que es el dominio de éstos lo que hace a una persona competente en matemáticas, dado que posibilita la interrelación de componentes cognitivos, procedimentales y actitudinales, que ayudan a los estudiantes a dar respuesta a los problemas a los que se enfrenten.

El grado de la competencia matemática de una persona se manifiesta en la forma como utiliza los conocimientos matemáticos y las destrezas matemáticas y, en los procesos matemáticos que emplea cuando se enfrenta con un problema. Se enfatiza más en lo que el estudiante puede hacer con sus conocimientos y habilidades, que en el dominio de los mismos.

Con el ánimo de dar sentido a los aprendizajes, de dotar al estudiante de herramientas de reflexión, de desarrollar habilidades para resolver problemas y de contribuir al desarrollo del perfil del estudiante universitario, que se propone la Escuela Colombiana de Ingeniería, en términos de un individuo que sea el centro del proceso de formación, se realizó una propuesta de organización de los contenidos programáticos en los cursos de primer año de Matemáticas, para las carreras de Ingeniería, basada en el enfoque por competencias.

Teniendo en cuenta esta noción y el Modelo de Competencia Matemática, desarrollado por H. Solar, F. Rojas y A. Ortiz(2011), se organizaron las asignaturas de Precálculo, Análisis Geométrico, Cálculo Diferencial y Álgebra Lineal, de acuerdo a los contenidos, los objetivos específicos correspondientes y los procesos matemáticos que se movilizan. Este trabajo inicial permitió en primer lugar determinar los procesos matemáticos privilegiados en cada unidad de las diferentes asignaturas y en segundo lugar evidenciar la necesidad de formular algunas tareas matemáticas que posibilitaran en el estudiante el desarrollo de las competencias matemáticas definidas en la investigación.

En el proceso de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas se establecen diferentes expectativas de aprendizaje, Rico y Lupiáñez (2008, p. 66), hacen referencia a este término para denominar *aquellas capacidades, competencias, conocimientos, saberes, aptitudes, habilidades, técnicas, destrezas, hábitos, valores y actitudes que, según diferentes instancias del currículo, se espera que logren, adquieran, desarrollen y utilicen los escolares*.

A través de las tareas y de las actividades se evidencia el cumplimiento de dichas expectativas de aprendizaje. Según Lupiáñez (2009), las tareas son demandas de actuación que el profesor da a los estudiantes y que movilizan el conocimiento de estos últimos sobre un concepto matemático. Las actividades se conforman con todo lo que realizan para el logro de una tarea, estudiantes y profesor.

Rico y Lupiáñez (2008), consideran dos niveles de expectativas de aprendizaje a nivel escolar: los objetivos específicos y las competencias. Consideramos que en el caso de los estudiantes universitarios, también son aplicables. Los objetivos específicos, enuncian lo que se espera que hagan los estudiantes en situaciones que demandan el uso de nociones y conceptos

matemáticos, se expresan mediante conductas observables, a través de tareas concretas, de diferente nivel y contexto. Así, los objetivos específicos conectan contenidos y tareas. Los objetivos específicos los vemos equivalentes a las *capacidade*s descritas por Lupiáñez y Gómez, están relacionados con lo que el estudiante puede hacer al proponerle tareas de un tema matemático particular.

Por otra parte, las competencias matemáticas, son expectativas de aprendizaje, que hacen referencia al actuar, se manifiestan en la forma como un estudiante utiliza los conocimientos matemáticos y las destrezas matemáticas cuando se enfrenta con un problema.

Rico y Lupiáñez, (2008),señalan que los objetivos específicos y las competencias se diferencian; los primeros hacen referencia a un contenido matemático concreto, y a las capacidades del estudiante sobre éste, que se ponen en juego a través de tareas, y en un corto plazo. Las competencias, integran y activan diferentes conocimientos, al abordar tareas, en diversas situaciones, estas competencias se desarrollan a largo plazo.

Así, el vínculo entre objetivos específicos y competencias matemáticas, son las tareas. Los objetivos específicos alcanzados por los estudiantes influirán en su actuar ante problemas matemáticos propuestos en diferentes tareas, es decir en su competencia matemática.

Las relaciones entre los objetivos de aprendizaje, considerados como objetivos específicos en esta investigación, las tareas (diseñadas o seleccionadas) y las competencias que se potencian se ilustran en la siguiente figura, propuesta por Lupiáñez (2005).

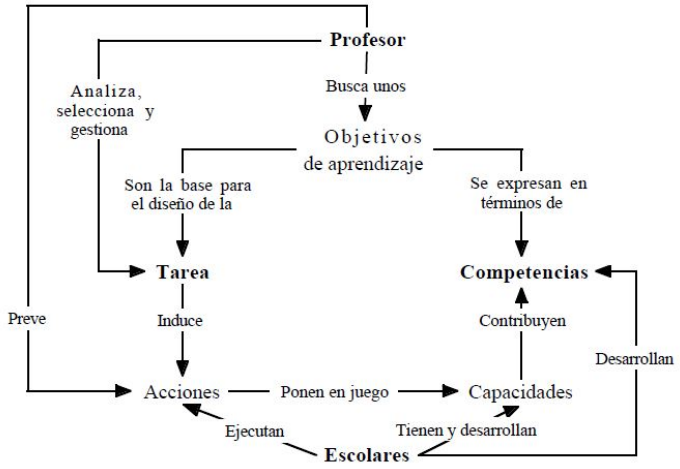


Figura 1. Relación entre competencias, capacidades y tareas.

Al estar inmersos en un currículo, surge la necesidad de plantear tareas en las que se pueda recurrir a unos contenidos específicos que posibiliten que los aprendizajes matemáticos deseables puedan desarrollarse. Las tareas varían desde los ejercicios o problemas propuestos en los textos escolares, con los que se pretende practicar o aplicar los conceptos o destrezasdesarrollados en los temas estudiados, hasta los problemas que tienen que ver con situaciones reales y en las que no hay indicaciones tan explícitas y el estudiante debe identificar los datos importantes y cómo aplicar los conocimientos para que resulten útiles en la solución.

La riqueza en las conexiones y la dificultad de los problemas, son elementos a través de los cuales se muestra el grado de aprendizaje, el dominio de los contenidos asociados y las competencias desarrolladas por los estudiantes.

Lupiáñez, Rico, Gómez y Marín (2005), proponen un modelo que permite organizar los objetivos específicos de un tema matemático, con las competencias matemáticas a las que contribuyen,señalando las competencias que más se favorecen. Siguiendo este modelo hemos organizado el contenido programático de los cursos de matemáticas de primer año de los programas de Ingeniería: Precálculo, Análisis Geométrico, Cálculo Diferencial y Álgebra Lineal, más adelante se muestra un ejemplo.

Por otra parte, a través de las tareas se pueden desarrollar, movilizar y evaluar los objetivos específicos adquiridos sobre un concepto matemático, el grado de dificultad en las mismas, evidenciará el conocimiento y uso de las matemáticas que un individuo puede tener.

Vale la pena señalar que con las tareas no se busca desarrollar las competencias por separado, en ocasiones una tarea hace necesario el uso de diferentes competencias, las cuales variarán de un estudiante a otro y contemplarán diferentes requisitos cognitivos para su resolución. Es así como el proyecto PISA (Marcos teóricos de PISA 2003, OCDE, 2005)propone involucrar indicadores de complejidad de las tareas, los cuales se presentan en el siguiente cuadro y que encontramos pertinente para este trabajo.

Tabla 1
Clasificación de tareas según la complejidad de las capacidades que movilizan

Reproducción	**Conexión**	**Reflexión**
• Contextos familiares • Conocimientos ya practicados • Aplicación de algoritmos estándar • Realización de operaciones sencillas • Uso de fórmulas elementales	• Contextos menos familiares • Interpretar y explicar • Manejar y relacionar diferentes sistemas de representación • Seleccionar y usar estrategias de resolución de problemas no rutinarios	• Tareas que requieren comprensión y reflexión • Creatividad • Ejemplificación y uso de conceptos • Relacionar conocimientos para resolver problemas complejos • Generalizar y justificar resultados obtenidos

Las tareas y procesos propuestos a los estudiantes deben plantear diferentes niveles de complejidad, desde los que demandan procedimientos rutinarios, sencillos, con los que de alguna manera ya se está familiarizado, a los que requieren establecer algunas conexiones no rutinarias aunque no del todo desconocidas y aún más, hasta aquellos que implican la puesta en escena de procesos de argumentación más complejos y el trabajo en contextos nuevos, no conocidos, a los que se debe dar un acercamiento, quizás, novedoso.

Las tareas del nivel de reproducción y conocimientos rutinarios, se basan en la reiteración de conocimientos practicados. Las del nivel de conexión están asociadas con la solución de problemas estándar, en contextos familiares o cercanos. Por último, las de reflexión, involucran razonamiento, argumentación, intuición y generalización para resolver problemas originales. Los niveles como lo señala Lupiáñez, no son independientes sino acumulativos, el dominio en un nivel implica el dominio de las capacidades de los niveles anteriores.

En la literatura (Marín, 2005; Marín, Gómez, Lupiáñez y Rico, 2007, citados por Rico y Lupiáñez, (2008)) se señala la importancia del diseño y selección de tareas en el proceso de planificación del profesor, así como su trascendencia en el logro de los objetivos específicos de

un tema. Estos autores proponen tener en cuenta en el diseño y selección de tareas, los siguientes criterios:

- Que sean compatibles con el análisis y la sección del contenido matemático que se está trabajando.
- Que contribuyan a lograr los objetivos específicos seleccionados y a superar dificultades o errores posibles de los escolares.
- Que permitan incorporar recursos y materiales que optimicen ese logro de los objetivos de aprendizaje seleccionados.
- Que sean compatibles con técnicas de gestión de la clase que optimicen ese logro de los objetivos de aprendizaje seleccionados.
- Que constituyan un conjunto coherente en la planificación de las secuencias de aprendizaje.

Estos criterios no sólo hacen referencia al diseño, sino también a la selección y a la adaptación de tareas. Como lo señalan Gómez y González (2009) los profesores al seleccionar o diseñar las tareas esperan que los estudiantes usen sus conocimientos y establezcan nuevas conexiones entre éstos y los propuestos en las tareas. Así mismo, cuando los estudiantes las resuelven, se entiende que van adquiriendo los procesos matemáticos implícitos en la misma o que han logrado el objetivo específico previsto ya en el currículo de la asignatura.

Metodología empleada

La primera parte de esta investigación integró dos metodologías, el Modelo Competencias Matemáticas, propuesto por Solar y otros (2011), que se fundamenta en las relaciones del sistema didáctico (currículo y aprendizaje) y, el EstudioDocumental, propuesto por Medina (2009).

Se asumió el concepto de competencia matemática a partir del estudio de las diferentes concepciones encontradas en la literatura, de donde se seleccionaron siete competencias matemáticas, que se presentaron a un grupo de profesores de Matemáticas y del área profesional(de las carreras que se tienen en la institución), para hacer el ajuste a las necesidades propias.

A continuación se describen las acciones asociadas a cada una de estas competencias, resultados de la revisión teórica y de los aportes de los profesores. Esta clasificación no pretende ser exhaustiva, ni excluyente.

Tabla 2
Descripción de las acciones asociadas a las competencias matemáticas

COMPETENCIA MATEMÁTICA	**DESCRIPCIÓN**
Razonamiento matemático (RM)	Capacidad para razonar matemáticamente. • Dar cuenta del proceso que se sigue para llegar a conclusiones. • Justificar las estrategias y los procedimientos empleados. • Sustentar conclusiones. • Distinguir entre diferentes tipos de enunciados (definiciones, teoremas, conjeturas, hipótesis, ejemplos, afirmaciones condicionales). • Formular hipótesis, hacer conjeturas. • Usar la argumentación, la prueba y la refutación, el ejemplo y el contraejemplo como medios de validar y rechazar conjeturas y avanzar en el camino hacia la demostración. • Seguir y evaluar cadenas de argumentos matemáticos. • Reflexionar sobre los argumentos matemáticos, explicar y justificar los resultados. • Encontrar regularidades, relaciones y patrones. • Hacer generalizaciones. • Demostrar proposiciones a partir de hipótesisdadas.
Comunicación matemática (C)	Capacidad para comunicary comprender las ideas matemáticas. • Comunicar las ideas matemáticas, tanto en forma oral como escrita. • Comprender la relación entre los lenguajes natural, simbólico y formal. • Formular definiciones matemáticas y expresar generalizaciones. • Leer comprensivamente textos matemáticos. • Comprender los enunciados orales o escritos acerca de temas matemáticos. • Decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y el formal, y comprender su relación con el lenguaje natural. • Traducir del lenguaje natural al simbólico y al formal. • Manejar enunciados y expresiones que contengan símbolos y fórmulas.
Construcción de modelos (CM)	Capacidad para construir modelos matemáticos. • Interpretar y modelar fenómenos físicos, naturales y económicos. • Traducir la “realidad” a estructuras matemáticas. • Trabajar con un modelo matemático. • Construir modelos. • Evaluar la unidad y coherencia que debe existir entre los datos del problema o la información del objeto a modelar y la solución que se busca. • Reflexionar, analizar y proporcionar críticas al modelo y sus resultados. • Validar el modelo. • Identificar las matemáticas como instrumento de modelación de fenómenos y su relación con las ciencias experimentales.
Representación (R)	Capacidad para usar diferentes registros de representación de las ideas matemáticas. • Utilizar diferentes registros de representación, (verbal, gráfico, simbólico…), para crear, expresar y representar ideas matemáticas. • Interpretar cuadros, tablas, gráficos, diagramas, dibujos y esquemas. • Elegir y cambiar entre diversas formas de representación de acuerdo con la situación y el propósito.

	• Apoyarse en ideas intuitivas e interpretaciones geométricas y físicas. • Decodificar e interpretar el lenguaje simbólico y el formal y comprender su relación con el lenguaje natural. • Traducir del lenguaje natural al simbólico y al formal. • Manejar enunciados y expresiones que contengan símbolos y fórmula.
Planteamiento ysolución de problemas (SP)	Capacidad para plantear y resolver problemas. • Interpretar el texto de un problema a partir de los datos dados, los que hay que encontrar y las relaciones entre ellos. • Plantear y resolver problemas. • Traducir el problema a un modelo matemático. • Resolver diversos tipos de problemas matemáticos de diferentes maneras. • Interpretar la solución obtenida al resolver un problema. • Aplicar vías alternativas para comprobar la solución de un problema realizado. • Comunicar el proceso y la solución de un problema. • Construir nuevas situaciones problemáticas. • Modificar condiciones sobre problemas dados, para crear nuevos problemas y resolverlos.
Procedimientos y algoritmos matemáticos (PA)	Capacidad para realizar procedimientos y algoritmos matemáticos. • Dominar las técnicas algebraicas. • Elegirel algoritmo indicado para realizar un cálculo. • Interpretar la solución obtenida al realizar un cálculo. • Aplicar vías alternativas para comprobar la solución de un cálculo realizado. • Emplear variables, resolver ecuaciones y llevar a cabo cálculos. • Aplicar rutinas memorizadas.
Herramientas de apoyo en las matemáticas (H)	Capacidad para usar las herramientas de apoyo en las matemáticas. • Saber acerca de y ser capaz de emplear diversos apoyos y herramientas que pueden ser de ayuda en las actividades relacionadas con las matemáticas. • Incorporar las nuevas tecnologías como herramientas en el trabajo con las matemáticas. • Saber sobre las limitaciones de dichos apoyos y herramientas.

Fuente: Obonaga E., et al.(2012). *Competencias matemáticas en las carreras de la Escuela Colombiana de Ingeniería*

Como resultado de la selección de competencias y teniendo en cuenta la propuestade Lupiáñez, Rico, Gómez y Marín (2005), se organizaron los contenidos programáticos de las asignaturas mencionadas. A continuación se presenta como ejemplo una de las unidades temáticas del curso de Precálculo. El cuadro presenta al aporte de los objetivos específicos del tema funciones al desarrollo de las competencias. Es de señalarque la vinculación del objetivo específico con la competencia, depende de la tarea propuesta. En estos términos los cuadros que aparecen se han construido pensando en las tareas que se proponen en los textos guía, utilizados actualmente en las asignaturas. Las abreviaturas hacen referencia a las competencias mencionadas en el cuadro anterior.

Tabla 3
Objetivos específicos de la función y su contribución al desarrollo de competencias

FUNCIONES	**Objetivo:** Estudiar las funciones básicas y sus características desde las representaciones algebraica y gráfica. Modelarsituaciones de cambio por medio de funciones.							
1. Sistema de coordenadas rectangulares. 2. Gráficas de ecuaciones. 3. Definición de función. Dominio, rango y gráfica. 4. Gráficas de funciones y transformaciones (polinómicas, a trozos, racionales). 5. Operaciones entre funciones (suma, diferencia, producto, cociente, composición) 6. Funciones inyectivas e inversas. 7. Funciones logarítmicas y exponenciales. 8. Funciones trigonométricas,hiperbólicas einversas.	**OBJETIVOS ESPECÍFICOS**	**COMPETENCIAS**						
		RM	**C**	**CM**	**SP**	**R**	**PA**	**H**
	Representar funciones de dos variablesen el plano cartesiano.	**x**				**x**		
	Identificar el dominio, rango, recorridos de una función.	**x**				**x**	**x**	
	Reconocer aspectos básicos de las funciones definidas a trozosy desplazar sus gráficos en el plano cartesiano.	**x**				**x**	**x**	
	Determinar eldominio y recorrido de funciones obtenidas medianteoperaciones entre funciones.	**x**				**x**	**x**	
	Determinar la inversa de una función.	**x**				**x**	**x**	
	Hallar la compuesta y la inversa de funciones trascendentes.	**x**				**x**	**x**	
	Solucionar problemas relacionados con la composición de funciones.	**x**	**x**		**x**	**x**	**x**	
	Modelar situaciones y problemas relacionados con situaciones que involucren la noción de variación.	**x**	**x**	**x**	**x**	**x**	**x**	**x**

La segunda parte de esta investigación tuvo en cuenta la propuesta de Gómez (2002), de análisis didáctico y diseño curricular en Matemáticas, que es un procedimiento que permite planificar la actividad docente. Se considera que a nivel universitario permitiría tener en cuenta aspectos útiles en el momento de llevar un tema matemático al aula, asociado particularmente con los objetivos específicos, las competencias que se pretenden desarrollar en los estudiantes y las tareas que se deben diseñar o seleccionar.

En el Análisis Didáctico, Gómez propone tener en cuenta diversas fases:

- *Análisis de contenido*, en el que se parte de identificar y organizar los múltiples significados de un concepto. Se establece su relación con otros y se seleccionan los fenómenos (contextos, situaciones o problemas) que pueden dar sentido a la tarea.

- *Análisis cognitivo,* retoma lainformación que surge del análisis de contenido, con el fin de explicitar las capacidades que los estudiantes pondrán en juego. Contempla la caracterización de las tareas que los estudiantes pueden y deberían resolver con lo que conocen, y prevé los errores al desarrollar la tarea, las dificultades asociadas a esos errores y los obstáculos en los que se originan.
- *Análisis de instrucción o de restricciones de aula.* Se seleccionan los elementos de apoyo tecnológicos, se define si se trabaja en grupos, entre otros aspectos.

Estos tres tipos de análisis son pertinentes ya que al hacer el desglose del contenido involucrado, aparecen las múltiples representaciones, los contenidos, los recursos de aula, se explicitan las capacidades y procesos, que para nada son evidentes a primera vista. Vale la pena aclarar que para este trabajo el análisis de instrucción no se desarrolló, ya que no se ha llevado a la práctica.

Integrando estas propuestas metodológicas se definieron los objetivos específicos de cada unidad temática, se explicitaron las competencias que cada objetivo moviliza, se determinaron cuáles competencias se privilegian en cada unidad temática, se analizóel cubrimiento de todas las competencias y se diseñaron y ajustaron algunos ejemplos de tareas, con diferentes niveles de complejidad, que movilizaran varias competencias de las propuestas.

Ejemplo de una tarea

A partir de la metodología seleccionada, se procedió al diseño, selección y adecuación de las tareas, teniendo en cuenta el análisis de contenido que permitió delimitar el temay el alcance de la tarea, y el análisis cognitivo el nivel de complejidad de la misma.

A continuación se presenta como ejemplo una de las tareas propuestas en este trabajo y su análisis. El contenido matemático corresponde a la asignatura de Precálculo, y al tema de funciones, en particular la función lineal desde la covariación de magnitudes. La tarea busca contribuir al desarrollo de la competencia de modelización, en la que los estudiantes deben analizar la situación inicial, seleccionar un registro de representación adecuado, responder las preguntas e interpretar los resultados.

Respecto al análisis cognitivo, la tarea se propuso a partir de la experiencia de los profesores involucrados en esta investigación, su conocimiento respecto a las dificultades, errores y obstáculos en esta temática. Se buscó que el estudiante pudiera elegir diferentes registros de representación y mediante la formulación de las preguntas llevarlo a tomar decisiones y acceder a diferentes niveles de complejidad.

El administrador de un edificio quiere desocupar uno de los tanques de reserva para hacerle mantenimiento, el cual tiene una capacidad de 90480 litros y se encuentra completamente lleno. Comienza a desocuparlo a razón constante de tal forma que al cabo de 2 horas quedan en el tanque 62640 litros de agua. En ese momento se da cuenta que debe desocuparlo en 3 horas menos de lo previsto, por lo cual decide abrir más la llave, manteniéndola abierta a esa razón.

a. Compare la cantidad de agua (en litros) que sale por hora antes y después de abrir más la llave.
b. Conociendo el volumen de agua que ha salido, ¿cómo podría determinar el tiempo que hace falta para que el tanque se desocupe completamente?
c. ¿En qué intervalo de tiempo la cantidad de agua que queda en el tanque cambia de 80400 litros a 25056 litros?
d. Si a las dos horas de haber empezado a desocupar el tanque, el administrador debe tomar una decisión para que el tiempo total de desocupado sea exactamente de 8 horas, ¿qué debe hacer?
e. Si el volumen del tanque fuera el doble y el administrador empieza a desocuparlo a razón constante, de tal forma que al cabo de 2 horas quedan los mismos 62640 litros de agua, ¿qué debe hacer para que el tanque se desocupe exactamente en el mismo tiempo descrito en la situación inicial?

La primera parte de la pregunta a) corresponde al grupo de problemas de reproducción porque se resuelve por un procedimiento estándar. La segunda parte de la pregunta requiere un cambio de representación entre el registro verbal y los otros, en donde el paso requiere una mayor exigencia en cuanto a razonamiento e interpretación. Así mismo, se requiere realizar comparaciones cualitativas o cuantitativas, entre la razón de desocupado en los dos tramos de la función que modela la situación, por lo que se considera concierne a los problemas de conexión.

El objetivo de la pregunta b) es explorar la forma en que el estudiante establece relaciones entre magnitudes que covarían, teniendo en cuenta los dos tramos de la función a trozos. Para establecer la relación el estudiante puede considerar el volumen de agua que queda en el tanque o el volumen de agua que ha salido y, a través de tratamientos responder la pregunta. Ésta presenta un alto grado de complejidad en la medida que la determinación de la relación inversa entre magnitudes obliga a realizar una interpretación global de la situación, que permita discriminar los dos momentos en que cambia la razón de desocupado para poder indagar por el valor del tiempo en cada punto del dominio de la función, por lo que se considera que corresponde a las actividades de conexión.

La pregunta c) indaga por el manejo de intervalos de covariación, que requieren la determinación de relaciones inversas. Los dos extremos del intervalo corresponden a diferentes momentos de desocupado, lo que conduce a una mayor interpretación del fenómeno de covariación, de ahí que corresponda a actividades de conexión.

La solución de la pregunta d) requiere de una interpretación global de la situación que le permita identificar el punto correspondiente al momento en que debe cambiar la razón de desocupado. Ésta requiere un grado de análisis alto, por lo que se considera que corresponde al grupo de reflexión.

El propósito de la pregunta e.es indagar si el estudiante reconoce la invarianza de la situación, dada por el instante en el que queda la misma cantidad de agua mencionada inicialmente. Al igual que en la pregunta d), se requiere de un grado de análisis alto, por lo que se cree que corresponde al grupo de reflexión.

Las competencias que se movilizan en estas preguntas son razonamiento matemático, comunicación, modelación, solución de problemas, representación y algoritmos.

En este tipo de problemas que no están tan direccionados se moviliza la mayor cantidad de competencias, el contexto en el que se propone la tarea es muy rico y posibilita que se den muchas conexiones, así como encontrar la solución de diversas maneras.

Conclusiones

- Los resultados de esta investigación se constituyen en un aporte para iniciar un trabajo curricular en el área de Matemáticas en la Educación Superior, con enfoque en el desarrollo de competencias, que contribuya a la articulación con la Educación Media, la cual tiene la misma orientación.
- Se definieron las competencias propias del área de Matemáticas, en programas de ingeniería, que permiten complementar las expectativas de aprendizaje.
- Otro aporte de este trabajo de investigación al definir las competencias matemáticas que se deben movilizar en los estudiantes de la Escuela, esla creación de un modelo en el ámbito universitario, que permita acercarse a identificar las expectativas de aprendizaje, no sólo en términos de contenidos, sino de habilidades, destrezas, actitudes, instrumento que posibilite a los docentes tener una mayor claridad de lo que se debe enseñar y evaluar.
- Con el fin de desarrollar las competencias propuestas, se hace necesario hacer una selección y ajuste adecuado de tareas, teniendo en cuenta diferentes contextos, niveles de exigencia, el carácter interdisciplinario, entre otros.
- En los programas de las asignaturas de Matemáticas de primer año, se evidenció que las competencias que se privilegian están asociadas con el razonamiento, la representación y los procedimientos algorítmicos.
- Las tareas deben buscar potenciar la mayor cantidad posible de competencias matemáticas que se pretenda desarrollar en los estudiantes. En este orden de ideas las catalogadas como de reflexión posibilitan esto.En los ejemplos propuestos se pudo observar que cuando se diseñaron tareas que tenían que ver con la construcción de un modelo matemático, se ponían en juego la mayoría de las competencias matemáticas definidas en esta investigación.
- Un enfoque basado en competencias implica repensar los contenidos, la metodología, la evaluación y los roles de los agentes involucrados en el proceso de enseñanza aprendizaje.

Referencias y bibliografía

Gómez, P. y González, M. (2009). Analyzing and selecting tasks for mathematics teaching: a heuristic. En Lerman, S.; Davis, B. (Eds.), *Mathematical action & structures of noticing: Studies on John Mason's Contribution to Mathematics Education* (pp. 179-188).

Gómez, P. (2002). Análisis didáctico y diseño curricular en Matemáticas. *Revista EMA, 7* (3), 251-292.

Lupiáñez, J. (2005). Objetivos y fines de la Educación Matemática. Capacidades y competencias matemáticas. *Seminario Análisis Didáctico en Educación Matemática*. Málaga.

Lupiáñez, J., Rico, L., Gómez, P. y Marín, A. (2005). Análisis cognitivo en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *V Congreso Ibero-americano de educasao matemática*. Oporto, Portugal.

Lupiáñez, J. (2009). *Expectativas de aprendizaje y planificación curricular en un programa de formación inicial de profesores de Matemáticas de secundaria.*Tesis doctoral. Universidad de Granada.

Marcos teóricos de PISA (2003). Recuperado de www.educacion.gob.es/dctm/ievaluacion/.../marcoteoricopisa2003.pdf?

Medina, A. (2009). Los proyectos de aula en la formación inicial de profesores de matemáticas.*Memorias 4° Congreso Internacional sobre Formación de Profesores de Ciencias*.Ministerio de Educación Nacional. (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas.

Obonaga, E., Gutiérrez, S., Guzmán A. y Álvarez, C. (2012). Competencias matemáticas en las carreras de la Escuela Colombiana de Ingeniería. *Memorias Reunión Nacional ACOFI 2012.La calidad en las facultades de ingeniería y su impacto en el desarrollo nacional.*

OCDE (2005). *Informe PISA (2003). Aprender para el mundo del mañana.* Madrid: Santillana.

Rico, L. y Lupiáñez, J. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular.* Madrid: Alianza Editorial S.A.

Solar, H., Rojas, F. & Ortiz, A. (2011). Competencias Matemáticas, una línea de investigación*XIII Conferencia interamericana de educacao matemática*.. Recife, Brasil.

Construcciones de videojuegos para el desarrollo del pensamiento espacial en educación básica

Marisol **Santacruz** Rodríguez
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional
México
msantacruzr@cinvestav.mx
Ana Isabel **Sacristán** Rock
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional
México
asacrist@cinvestav.mx
Angel **Pretelín-Ricárdez**
Instituto Politécnico Nacional, UPIITA
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional
México
apretelin@cinvestav.mx

Resumen

En este taller los participantes, profesores de matemáticas, diseñarán y programarán tareas relacionadas con el desarrollo del pensamiento espacial en un ambiente de aprendizaje dirigido a estudiantes entre los 6 y 8 años. Los participantes se organizaran en pequeños equipos para diseñar tareas dentro de un micromundo computacional creado en una plataforma denominada Scratch, la cual permite construir historias interactivas, animaciones y videojuegos 2D, utilizando programación gráfica. Las actividades propuestas seguirán una concepción construccionista, con tareas propias de los primeros niveles de escolaridad, aunque las ideas del taller pueden ser aplicables a cualquier nivel.

Palabras clave: construccionismo, micromundos, videojuegos, pensamiento espacial, educación básica, Scratch.

Introducción y antecedentes

Desde hace décadas, la investigación en Educación Matemática ha estado interesada en estudiar el papel de las tecnologías digitales en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Existe una alta diversidad de software, estudios especializados, propuestas didácticas y posturas teóricas que intentan comprender la complejidad subyacente en la integración de tecnologías digitales a la clase de matemáticas (Oldknow, 2009).

Tomando en cuenta lo anterior, en este taller se presenta un ambiente de aprendizaje que posibilite el desarrollo del pensamiento espacial (Arrieta, 2003) en estudiantes de los primeros niveles de escolaridad.

Dicho ambiente de aprendizaje se basa en una perspectiva construccionista. De acuerdo con Papert y Harel (1991), el construccionismo comparte con el constructivismo la concepción

del aprendizaje en la que se considera que los sujetos son los que construyen su propio conocimiento, pero es un paradigma que plantea que el aprendizaje se facilita a través de actividades de construcción de objetos externos y compartibles (i.e. objetos en el mundo – no sólo objetos físicos, sino también pueden ser algo como un programa de cómputo, un poema, una teoría, etc.). De esta manera se concibe una génesis del conocimiento, que no es ajena a los ambientes en los que el conocimiento se adquiere y los instrumentos que participan en dicha construcción.

En este sentido, el taller propuesto involucra utilizar y construir herramientas para explorar y resolver problemas en un ambiente de aprendizaje (o micromundo; cf. Hoyles & Noss, 2003), a través de actividades de programación de videojuegos. Papert (1981) considera que programar una computadora consiste en usar un lenguaje que permite que humano y máquina logren "comprenderse".

El tipo de tareas a proponer en este micromundo, recogen la experiencia señalada por Hoyles, Noss, Adamson y Lowe (2001) en su proyecto *Playground*, que estuvo dirigido a niños entre los 6 y 8 años de edad, y en el cual se utilizó la narrativa de un juego para hacer uso de distintos medios de expresión: computacional, hablado o escrito. Dicho proyecto mostró cómo los niños pueden llegar a expresar su pensamiento mediante la predicción, descripción y explicación de fenómenos relacionados con las matemáticas.

Respecto al papel de los videojuegos en Educación Matemática, Macías & Quintero (2011) proponen que los videojuegos pueden proveer una posibilidad potente para el desarrollo del pensamiento espacial en estudiantes de Educación Básica. En la investigación de dicho autores, éstos destacan que después de que estudiantes de Educación Básica se enfrentaron a una serie de tareas que usaban videojuegos y realizaban representaciones en un ambiente de lápiz y papel, estos alumnos lograron describir trayectos (de orientación espacial) con diferentes niveles de abstracción.

En nuestra propuesta intentamos ir más allá, al plantear que estudiantes de los primeros grados de escolaridad, no sólo usen videojuegos, sino que los diseñen y programen para favorecer el desarrollo de su pensamiento espacial, a través de una actividad altamente significativa para ellos.

Tradicionalmente, la enseñanza de la geometría en la escuela se reduce a la identificación de algunas figuras geométricas sin ahondar en sus propiedades, y sin considerar que la construcción del concepto de espacio en los niños requiere relacionar objetos bidimensionales y tridimensionales. Dicha relación puede desarrollarse a partir de la construcción de videojuegos bidimensionales, que pueden propiciar procesos cognitivos que ayuden al desarrollo del pensamiento espacial, por ejemplo, a través de la visualización (procesamiento visual e interpretación de información figurativa) (Bishop, 1983) y la orientación espacial (Macías & Quintero, 2011).

En nuestra propuesta se ofrecen este tipo de actividades mediante la construcción de videojuegos en el ambiente de programación Scratch 1.4 (descrito abajo).. En dicha propuesta se da prioridad a una modelación del espacio a partir del movimiento, donde se tiene la posibilidad de trabajar con un modelo interactivo. En este sentido, Kuzniak (2001) propone la idea de espacio de trabajo geométrico, como una categoría teórica que nos permite asociar el espacio intuitivo con un modelo matemático de espacio, dependiendo de la geometría de referencia; así, en el trabajo con Scratch, los niños tienen la posibilidad de discernir qué tan grandes, o

pequeños, y qué tan lejos, o cerca, están unos objetos de otros. Dicho diseño se enmarca dentro de un micromundo computacional que definimos a continuación.

El micromundo de aprendizaje y la metodología a seguir

La noción de micromundo (Papert, 1981) se entiende como un ambiente interactivo de aprendizaje que permite al usuario, restringido por las reglas internas del sistema, realizar operaciones sobre los objetos, subordinadas a un marco teórico particular; y que favorece que los estudiantes tengan mejores oportunidades para representar, construir, compartir ideas y conceptos, así como para experimentar con ellos, lo que los convierte en una incubadora de ideas.

Hoyles & Noss (1987) consideran que un *micromundo* tiene al menos cuatro componentes que interactúan entre sí (ver Figura 1): Componente técnico, componente pedagógico, componente contextual y componente estudiante A continuación se describen cada uno de dichos componentes en términos de cómo los concebimos para la propuesta de este taller.

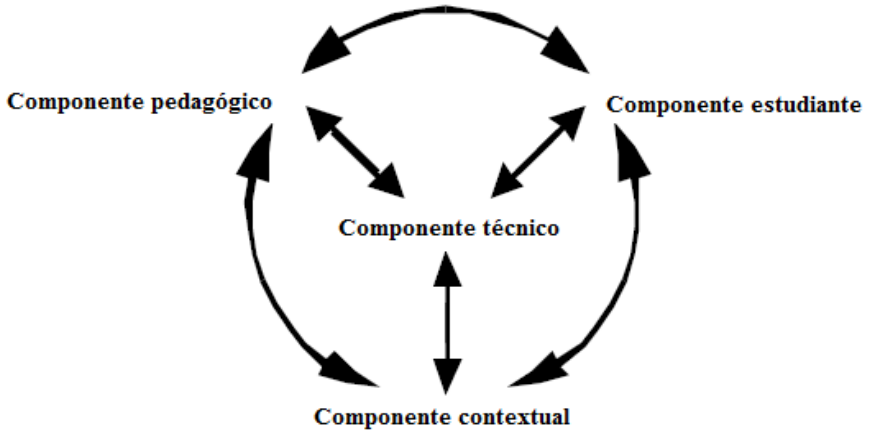


Figura 1. Componentes de un micromundo (Hoyles & Noss, 1987, p. 591).

El **componente técnico** es el software, programa o programas en el cual se enfoca la atención del estudiante sobre una idea o proceso específico (Hoyles & Noss, 1987), y que en este caso, es Scratch, el cual proveerá a los participantes con todas las herramientas necesarias para la construcción de un videojuego en 2D. Scratch es un entorno digital que permite crear animaciones, historias interactivas y videojuegos (Acerca de Scratch, s.f.) en una computadora personal (PC), a través de un lenguaje de programación gráfico de tipo *Drag and Drop* (Arrastrar y soltar), que permite que los productos creados por los participantes sean reconstruibles y modificables. Una de las ventajas que tiene Scratch, es que puede ser utilizado casi por cualquiera persona, pues no se requiere habilidades de diseño y programación específicas, para poder iniciar la construcción de un proyecto, lo que resulta ideal para las edades y el nivel educativo de nuestra propuesta. Mostramos una captura de pantalla de la interfaz de Scratch en la Figura 2.

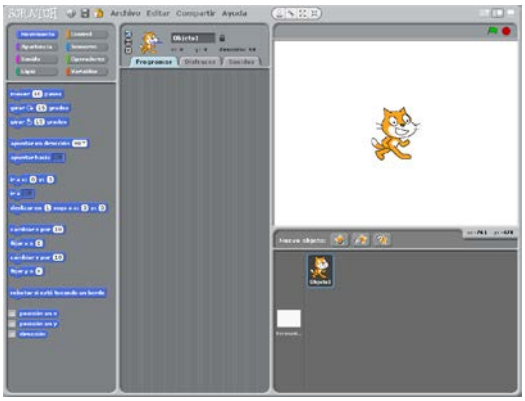


Figura 2. Interfaz de usuario de Scratch.

El **componente pedagógico**, es el encargado de estructurar y relacionar las actividades, de tal forma que se puedan explorar adecuadamente los conceptos involucrados en el componente técnico (Hoyles & Noss, 1987), incluye la planeación y diseño de las tareas que se proponen a los participantes. El diseño de las tareas, que se encuentran en cada una de las tarjetas de proyecto (Ver Figura 4), están condicionadas a las reglas internas del sistema, con el propósito explicito de movilizar pensamiento espacial de los participantes a través del desarrollo de habilidades espaciales y la visualización (Bishop, 1983, 1990).

Este componente estará conformado por los investigadores-instructores participantes, la secuencia de tareas mostrada en el sub apartado metodología, las tarjetas de proyecto, que indican lo que debe realizar cada equipo y las tarjetas de ayuda rápida (Ver Figura 3), para programación.

El **componente contextual**, son las situaciones sociales y culturales en las cuales las actividades de programación toman lugar, afectando el aprendizaje del estudiante (Hoyles & Noss, 1987), es decir, el ambiente social de la clase donde se integra el micromundo que proponemos. Para este taller, concebimos una organización de clase, retomando algunos elementos de la idea de orquestación instrumental (Trouche, 2012) en la cual se propone la configuración de un ambiente colaborativo, basado en la conformación de equipos de trabajo de tres integrantes (profesores en este caso), que trabajaran en una sola computadora, para favorecer el intercambio de ideas y el aprendizaje colaborativo.

El **componente del estudiante**, engloba aspectos cognitivos y afectivos (conocimientos previos e historia de los participante) que influyen en la forma en que las actividades son percibidas por los estudiantes, debido a su sistema de representaciones (Hoyles & Noss, 1987). En este caso los asistentes al XV CIAEM, tomarán el rol de estudiantes, por lo que tendremos una comunidad heterogénea, con diferentes formas de percibir cada una de las actividades debido a la realidad y problemáticas diversas, que se experimentan en cada región o país. Esto último permitirá enriquecer la reflexión final (mirada retrospectiva) que se propone al final de la secuencia de actividades, que se presenta en el siguiente apartado.

Es altamente pertinente explicitar que los participantes no requieren ser expertos en programación para participar del taller.

Metodología del taller

Esperamos recibir un grupo de 18 participantes, distribuidos en seis equipos de tres integrantes. Cada equipo colaborará en el diseño y programación de un videojuego, siguiendo un

conjunto de tareas, indicadas en una tarjeta de proyecto (Ver Figura 4) que se entregará a cada equipo.

En cada una de las tarjetas de proyecto, se especificará una problemática a resolver a través del cumplimiento de ciertos tareas, que estarán dirigidas al diseño y programación de un videojuego cuya mecánica principal será la exploración de terrenos 2D.

El diseño de las tareas, pretenden fundamentalmente, que los participantes entrenen su pensamiento espacial, involucrando procesos tales como, la orientación espacial mediante el uso de referentes (Macias, G., & Quintero R., 2011).

Después de que cada uno de los equipos haya terminado sus proyectos (videojuegos), éstos serán revisados (jugados) por los otros equipos, quienes validaran si cumplieron con los objetivos planteados en la tarjeta de proyecto y en un documento de diseño.

Para favorecer lo anterior, abordaremos el taller con la siguiente secuencia:

1.- Explicitar, de manera general, la propuesta de taller a los participantes (5 minutos).

Con esto, pretendemos situar a los participantes con el propósito general de la propuesta y particularmente del taller, explicando los alcances y limitaciones que puede tener, así como las reglas de operación del taller.

2.- Explicar las características y el funcionamiento del entorno de programación de los videojuegos, a través de un ejemplo guiado (20 minutos).

Pretendemos explicar el funcionamiento y características del entorno de programación Scratch, haciendo uso de las tarjetas de ayuda rápida, en un ejemplo guiado. En la Figura 3, mostramos el contenido de una de tarjeta de ayuda rápida, que indica como programar dos tipos de comportamiento en un personaje de un juego.

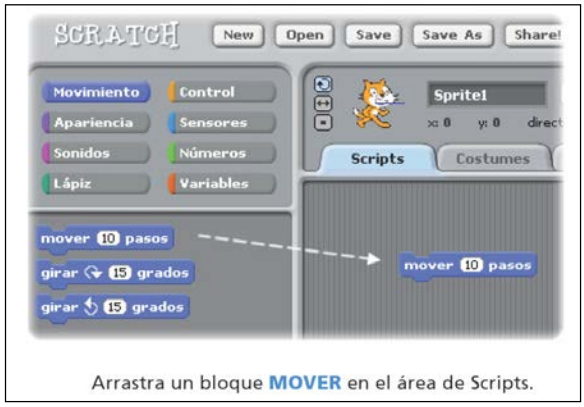


Figura 3. Ejemplo de tarjeta de ayuda rápida para programación, extraída de (Scratch, 2014).

3.- Diseño y programación de los videojuegos, siguiendo la problemática planteada en las tarjetas de proyecto (60 minutos).

Cada uno de las tarjetas de proyecto, está compuesta por los elementos, mostrados en la Figura 4: Imagen del terreno en 2D (Vista aérea), tareas (diseño, programación y reto experto) y notas. La idea de estas tareas es que el participante, pueda construir objetos tridimensionales a partir de una representación bidimensional, en un espacio de trabajo geométrico que toma como referente el espacio topológico (interior, exterior y frontera). Adicionalmente proporcionaremos hojas y lápices a cada equipo, para que puedan documentar el diseño del juego.

Tarjeta de Proyecto 1[i]

Tareas:
Diseño: Storyboard (Guión gráfico) del videojuego
1.- Crea una historia sencilla de no más de 150 palabras, relacionada con la imagen de la derecha.
2.- Adapta la historia anterior pata el diseño de un videojuego basado en la historia del objetivo 1, dónde el jugador tenga que interactuar con distintos personajes ((por lo menos cuatro)) que le ayuden a **explorar el terreno** y cumplir ciertas misiones. (Si es necesario describe el comportamiento o la función de cada personaje en el juego, así como una descripción más detallada de las zonas mostradas en la imagen)

Programación: Implementación en Scratch
3.- Construye el terreno similar mostrado en la imagen de la derecha, con Scratch
4.- programa lo necesario para implementar tu diseño.

Nota 1: Observa que la figura muestra una flecha indicando el norte, para guiarte en la construcción del terreno en Scratch.
Nota 2: Recuerda que este proyecto debe abordarse de forma colaborativa.

RETO EXPERTO: Diseña una mecánica de juego, donde se favorezca el pensamiento espacial del jugador, e impleméntala.

[i] La imagen de la vista aérea del parque, fue tomada de: http://arkcrisis.org/wordpress/wp-content/uploads/2013/02/Playground_Expansion_Plan.jpg y corresponde a un proyecto en proceso de construcción de un parque infantil.

Figura 4. Ejemplo de tarjeta de proyecto.

4.- Socialización de los videojuegos construidos por los participantes (15 minutos).

Este es el espacio, en que cada grupo de trabajo presentará sus proyectos terminados (ver Figura 5), con la intención de validarlos entre pares. En esta fase, los participantes verificarán si se cumplieron los propósitos planteados en la tarjeta de proyecto y en el documento de diseño de los otros equipos.

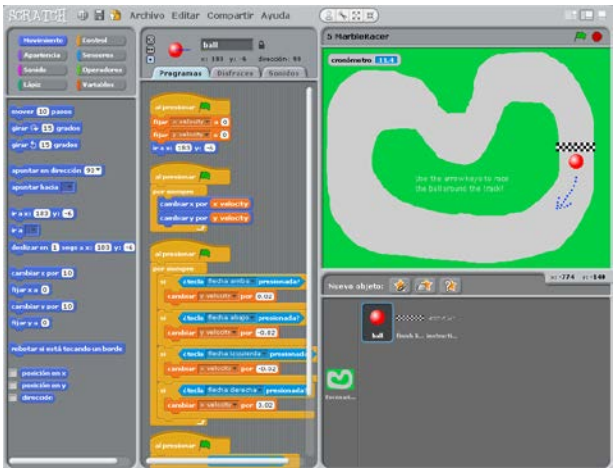


Figura 5. Ejemplo de proyecto finalizado.

5.- Mirada retrospectiva (15 minutos).

Para el análisis de los resultados del taller y el potencial didáctico del micromundo propuesto. Para movilizar la mirada retrospectiva de los participantes se va a proporcionar un instrumento de evaluación del micromundo de manera que se pueda documentar las reflexiones de los participantes.

6.- Cierre. (5 minutos).

En el momento final del taller proponemos recoger la experiencia de los participantes alrededor de una reflexión entorno al potencial de micromundos para la enseñanza de las matemáticas.

Resultados esperados

Fundamentalmente, este taller busca que los profesores de matemáticas participen de una propuesta didáctica que centra su atención en un campo altamente complejo: La génesis de concepto de espacio en el niño. Para ello, tendrán la oportunidad de interactuar con un ambiente de aprendizaje en el cual se promueve el acercamiento a un espacio de trabajo matemático para el desarrollo de pensamiento espacial.

Esperamos asimismo promover la reflexión respecto a la integración de tecnologías digitales (como los micromundos) en la enseñanza de las matemáticas en los primeros niveles de escolaridad, así como indagar las potencialidades, limitaciones y posibilidades de la integración de videojuegos en las clases de matemáticas.

Referencias y bibliografía

Acerca de Scratch (s.f.). Recuperado de http://scratch.mit.edu/about

Arrieta, M. (2003) Capacidad espacial y Educación Matemática: Tres problemas para el futuro de la investigación. Educación Matemática. 15, 3. 57-76.

Bishop, A. (1983). Spatial abilities and mathematical thinking. En Zweng y otros (ed). *Proceedings of the 4th ICME*. Boston: Birkhauser, 176 – 178.

Hoyles, C. & Noss, R. (1987). Synthesizing mathematical conceptions and their formalization through the construction of a Logo-base school mathematics curriculum. *International Journal of Mathematics education in science and technology*, 18(4), 581-595.

Hoyles, C. & Noss, R. (2003). What can digital technologies take from and bring to research in mathematics education? *Second International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer.

Hoyles, C., Noss, R., Adamson, R. & Lowe, S. (2001). Programming rules: What do children understand? *Proceedings of the 25th Conference of the Psychology of Mathematics Education* (Utrecht). 3, 169 – 176.

Kuzniak A. (2011) L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9–24.

Macias, G., & Quintero R. (2011) *Los videojuegos como una alternativa para el estudio y desarrollo de la orientación espacial*. En Marín, M., Fernández G., Blanco, J., & Palarea M. / Servicios Publicaciones Univesidad Castilla la Mancha y Sociedad Española de Investigación Educación Matemática (SEIEM) (Eds.), Investigación en Educación Matemática XV. pp. 405-415. Granada. ISBN 978-84-694-5590-6.

Noss, R. & Hoyles, C. (1996). *Windows on Mathematical Meanings. Learning cultures and computers.* Dordrecht: Kluwer Academic Press.

Oldknow, A. (2009). Their world, our world - bridging the divide. *Teaching Mathematics and its Applications.* 28, 180 – 195.

Papert, S. (1981). *Desafío a la mente*. Buenos Aires: Galápago.

Papert, S. & Harel, I. (1991). Situating Constructionism. En I. Harel & S. Papert (Eds.) *Constructionism*. Recuperado de http://www.papert.org/articles/SituatingConstructionism.html.

Scratch (Versión 1.4). [Software de programación]. Recuperado de http://scratch.mit.edu/scratch_1.4/

Trouche, L. (2002). Genèses instrumentales, aspects individuels et collectifs. En: Guin, D. & Trouche, D. (Ed) Calculatrices symboliques. En *Transformer un outil en un instrument du travail informatique: Un problème didactique*. Grenoble: La Pensée Sauvage Éditions.

Consumo consciente de água, a estatística e o AVALE-EB

Eliene Costa dos Santos **Amorim**
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, Universidade Estadual de Santa Cruz
Brasil
lnamorimios@yahoo.com.br
Irene Maurício **Cazorla**
Departamento de Ciências Exatas e Tecnológicas, Universidade Estadual de Santa Cruz
Brasil
icazorla@uol.com.br
Elaine Costa dos **Santos**
Departamento de Estatística, Universidade Federal da Bahia
Brasil
elaineios@yahoo.com.br

Resumo

O objetivo desta oficina é apresentar as potencialidades de uso do Ambiente Virtual de Apoio ao Letramento Estatístico(AVALE-EB) para os trabalhos no contexto da Educação Básica envolvendo dados e suas representações gráficas ou através de medidas estatísticas. O AVALE-EB é um ambiente de aprendizagem virtual, gratuito, que disponibiliza Sequências de Ensino (SE) para trabalhar tópicos de Probabilidade e Estatística. Pretende-se trabalhar com os participantes desta oficina, os aspectos teóricos e práticos da SE Planeta Água, envolvendo o uso de gráficos, medidas de tendência central e dispersão e noções de Cidadania e, simultaneamente verificar procedimentos estatísticos para tratar os dados de uma conta de consumo de água. As atividades serão desenvolvidas nos ambientes de aprendizagem: papel e lápis e virtual (computacional). Resultados de aplicações das SE utilizando o AVALE-EB em escolas, demonstraram que os alunos ficam motivados e envolvidos, dão significado aos conceitos, conseguindo fazer leituras e interpretação de gráficos, tirando conclusões estatísticas.

Palavras chave: Ensino de Estatística; Educação Básica, Cidadania, Consumo Consciente de Água.

Introdução

As reflexões em torno de questões referentes à sustentabilidade vêm nos sensibilizando a elaborar formas de contribuir com a preservação do meio ambiente e dos recursos naturais disponíveis a gerações futuras. Para esta oficina o enfoque será dado a um recurso em especial: a água, devido à sua grande importância no que diz respeito à perpetuação da espécie humana.

Por esta escolha, toda a estruturação das atividades a serem desenvolvidas, que corresponde a síntese de um trabalho que temos desenvolvido em sala de aula nas turmas da Educação Básica, perpassa por um roteiro que solicita o conhecimento de conceitos básicos da estatística, mas, que são utilizados como ferramentas para desenvolvimento de estratégias de consumo consciente desse líquido tão precioso.

Pretende-se com esta oficina, trabalhar conceitos estatísticos aplicados as análises do consumo familiar de água dos cursistas, e a partir das interpretações, delinear estratégias que visem minimizar seu desperdício. Para tanto, todas as atividades serão implementadas, no contexto do Ambiente Virtual de Apoio ao Letramento Estatístico para a Educação Básica (AVALE-EB).

O AVALE-EB é um ambiente de aprendizagem gratuito, que disponibiliza sequências de ensino (SE) para trabalhar tópicos de Probabilidade e Estatística na Educação Básica tanto em papel e lápis, como no virtual, tendo entre seus objetivos, contribuir para o letramento estatístico e formação científica dos alunos das escolas públicas, propiciando sua inserção em uma sociedade cada vez mais informatizada (Cazorla & Santana, 2010).

A SE Planeta Água a ser desenvolvida nos dois ambientes, encontra-se pautada nas recomendações propostas segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (Brasil, 1998, 2002), na perspectiva do pensamento científico e do letramento estatístico, que segundo Gal (2002) é definido como sendo a capacidade de ler, interpretar, comunicar e avaliar criticamente informações estatísticas,

A aplicação desta SE, utilizando o AVALE-EB, nas escolas mostra que os alunos ficam motivados e envolvidos, dão significado aos conceitos, conseguindo construir gráficos, ler e interpretar gráficos e tirar conclusões estatísticas.

O objetivo desta oficina é apresentar as potencialidades de uso do AVALE-EB no ensino de Estatística na escola, em seus aspectos teóricos e práticos, envolvendo variáveis ordenadas pelo tempo, leitura e interpretação de gráficos, medidas de tendência central e dispersão utilizando como instrumento, as etapas da SE Planeta Água.

Sequência de Ensino: "Planeta Água"

Essa é uma das sequências Estatísticas disponibilizada no AVALE- EB, para ensinar estatística e cidadania. Nela são apresentados alguns procedimentos para tratar os dados de uma conta de água, e assim sendo, pretende trabalhar conceitos estatísticos, simultaneamente contribuindo para o uso consciente desse recurso natural.

Como objetivos associados a esta sequência tem-se: apresentar o uso de conceitos e procedimentos estatístico na análise dos dados contidos na conta de água; apresentar as peculiaridades das variáveis ordenadas no tempo (séries temporais ou séries de tempo) e as implicações didáticas do seu tratamento e discutir diferentes medidas de tendência central.

Dentre os princípios que a regem, visa incentivar o uso de recursos tecnológicos e a participação ativa do sujeito em todas as etapas de uma pesquisa envolvendo a elaboração das questões, identificação das variáveis, coleta e tratamento dos dados e, comunicação dos resultados.

Desenvolvimento da Oficina

Esta oficina foi pensada para ser desenvolvida no laboratório de informática (com acesso a internet), contando com o envolvimento de vinte participantes, e atividades para serem desenvolvidas nos dois ambientes de aprendizagem, considerando que, no ensino e aprendizagem de Estatística é importante o trabalho tanto no ambiente papel e lápis onde os conceitos são trabalhados de maneira mais ampla e significativa, como no ambiente computacional onde serão potencializadas as análises.

Devido à quantidade de tempo disponível será feita uma adaptação da sequência original, bem sendo preservados, no entanto, os objetivos a que se propõe e os princípios que a regem, no sentido de incentivo ao uso de recursos tecnológicos e a desenvolvimento com estrutura de pesquisa científica, priorizando, as etapas do ambiente virtual.

Como recursos didáticos serão utilizados, vídeos e dados que chamem a atenção para a importância do uso racional da água, contas de água simulada para todos os integrantes, cartazes em papel madeira contendo planilha com os dados das contas de água organizadas para demonstração, papel quadriculado para a construção de gráficos, fichas para cálculo das medidas de tendência central, data show, computadores com acesso à internet disponibilizado, régua, lápis de cor e calculadora.

Descrição das atividades

Para facilitar o entendimento do que deve ocorrer durante a oficina descreveremos a seguir, seus passos, conforme seja o ambiente em questão.

No ambiente papel e lápis:

Suas atividades foram pensadas para serem desenvolvidas em quatro etapas, conforme descritas a seguir. Apenas salientamos que, a expomos para conhecimento, visto que, durante a apresentação, apenas as ilustraremos para o conhecimento de todos.

Etapa 1: **Sensibilização e estabelecimento de questões de pesquisa**

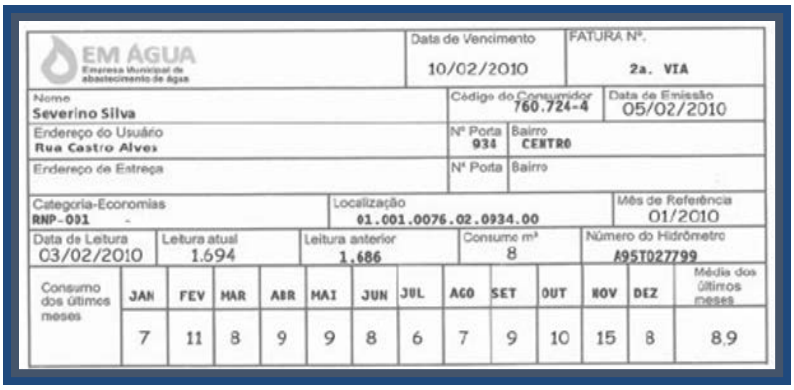
Nesta etapa ocorre a sensibilização para o tema com apresentação de vídeos, revistas ou outros materiais que chamem a atenção para a importância do uso racional da água, ponto de partida, para a elaboração de questionamentos a serem respondidos ao final das investigações.

Durante as apresentações, costumamos chamar a atenção para a quantidade de consumo per capita (litros de água/dia/pessoa) padronizado pela Organização das Nações Unidas (ONU, www.rts.org.br*)* como o ideal por pessoal de 110 litros diários, o que induz a questionamentos do tipo que os levem a investigar se a quantidade de água que os participantes da oficina consomem por dia corresponde às especificações da ONU. Outros questionamentos poderão surgir, e surgem entre os participantes da oficina, como por exemplo: Será que no verão o consumo de água das famílias é maior do que no inverno? Qual o consumo diário *per capita* dos alunos? Quão conscientes somos no uso da água? Qual é o consumo médio mensal de água das famílias dos alunos? Com base nas questões formuladas e visando uma solução viável para elas, passamos a uma próxima etapa.

Deve-se observar, no entanto se há coerência estatística em suas formulações, e que, estes questionamentos precisam ser respondidos ao final da dinâmica.

Etapa 2: Apresentação de simulações dos dados da conta de água e visualização de planilhas.

Para esta etapa, serão distribuídas, simulações de contas do consumo mensal de água, contendo o relatório dos gastos mensais durante um determinado ano, para uma família qualquer como, por exemplo, a que tem seu consumo de água discriminado na Figura 1.



EM ÁGUA
Empresa Municipal de abastecimento de água

	Data de Vencimento 10/02/2010	FATURA Nº. 2a. VIA
Nome Severino Silva	Código do Consumidor 760.724-4	Data de Emissão 05/02/2010
Endereço do Usuário Rua Castro Alves	Nº Porta 934	Bairro CENTRO
Endereço de Entreça	Nº Porta	Bairro
Categoria-Economias RNP-091 -	Localização 01.001.0076.02.0934.00	Mês de Referência 01/2010

Data de Leitura	Leitura atual	Leitura anterior	Consume m³	Número do Hidrômetro
03/02/2010	1.694	1.686	8	A95T027799

Consumo dos últimos meses	JAN	FEV	MAR	ABR	MAI	JUN	JUL	AGO	SET	OUT	NOV	DEZ	Média dos últimos meses
	7	11	8	9	9	8	6	7	9	10	15	8	8.9

Figura 1. Modelo de conta de consumo mensal de água de uma família no Brasil.

Além de realizar a análise dos consumos mensais de água, individualmente, os alunos preenchem a planilha em papel madeira, onde cada um é responsável por escrever seus dados, o que permite fazer comparações, por exemplo, de como ocorre a variação do consumo mês a mês por aluno, e entre alunos, ou se existe algum valor que se distância dos demais a ponto de chamar as suas atenções.

Figura 2. Aluna preenchendo o cartaz em papel madeira com os dados de sua conta de água.
Fonte: Cazorla e Santana (2010).

Etapa 3: Cálculo de medidas para a análise dos dados

Nesta etapa é solicitado aos alunos, que sejam feitos os cálculos de algumas medidas estatísticas de forma individual e coletiva, visando analisar os conteúdos das informações contidas nos dados.

Calculando o consumo anual por aluno. Este corresponde à soma de todos os valores mensais consumidos, registrados em suas contas de consumo.

Calculando a média ou consumo médio familiar mensal. Obtém-se este valor dividindo o consumo anual calculado anteriormente, por 12, que é a quantidade de meses.

Calculando o consumo *per capita* diário. Dividindo o consumo médio mensal familiar por 30 e pelo número de pessoas que moram na casa, obtemos o consumo *per capita* diário (consumo médio por pessoa diário).

Consumo *per capita:*

[Consumo médio familiar mensal] : [(30 dias)(Nº de pessoas da família)]

Convertendo m^3 em litros. Converte-se ao multiplicar o valor dado em metros cúbicos por mil.

Esta é uma boa oportunidade para refletir sobre o significado desta transformação

Comparando os resultados dos cálculos realizados por mais de um aluno em uma análise de dados coletiva. Para a discussão coletiva, deverão ser selecionados os resultados dos cálculos de medidas efetuadas por quatro alunos para efeito de análise comparativa. Por exemplo, o de maior consumo médio familiar e o outro com o menor; o que tem o maior número de pessoas na família, e outro que tem o menor para verificar que nem sempre famílias com maior consumo total familiar, correspondem às de maior consumo per capita e principalmente que a leitura de mundo depende da informação disponibilizada.

Calculando a mediana e a moda. Será solicitado aos cursistas que ordenem os consumos mensais familiares para em seguida calcular as medianas. Como a quantidade de meses em estudo é par ($n = 12$) a mediana será dada pela media aritmética entre os valores que ocupam a sexta ($n/2$) e a sétima ($n/2 + 1$) posição. A moda é o valor que mais aparece entre os consumos registrados mensalmente, podendo ocorrer mais de um valor.

Explorando o conceito de variabilidade. Nesta etapa pode-se iniciar a discussão sobre a variabilidade dos dados. Pode-se solicitar aos cursistas que observem como varia o consumo mensal ao longo do ano, o valor mínimo, o máximo, a amplitude como a diferença entre esses dois valores. A depender da turma na qual o cursista esteja trabalhando pode-se solicitar que calculem os desvios do consumo mensal em relação à média, bem como o cálculo da variância e o desvio padrão.

Etapa 4: Construção de gráficos de barras e linhas

Com os papeis quadriculados ou milimetrados, devem ser confeccionados gráficos, oportunidade para informar a respeito de uma particularidade na representação de variáveis descritas ao longo do tempo. Por convenção o eixo das abscissas é reservado à representação do tempo, nesse caso dado em meses. A opção pela utilização destes gráficos se dá pelo fato de serem eles os usados quando se deseja representar séries temporais.

A utilização dos recursos gráficos se torna viável, pois permite interpretar com maior rapidez as informações nele disponibilizadas, verificar tendências ou ocorrências sazonais. Permite fazer comparações entre perfis de consumos e variabilidade dos mesmos, envolvendo mais de uma família, lembrando que, para que esta comparação ocorra de forma adequada, deve ser preservado o padrão de construções dos gráficos.

No ambiente Virtual:

É neste ambiente que ocorre a potencialização das análises e, assim sendo, ainda, à luz dos questionamentos estabelecidos na fase inicial, novos passos são delineados.

Etapa 1: Acesso ao site e cadastro dos alunos

O Ambiente Virtual pode ser acessado através do site http://avale.iat.educacao.ba.gov.br, onde são disponibilizadas várias informações referentes ao mesmo, envolvendo objetivos, equipe etc. Há também informações referentes à Educação Estatística e, como não poderia deixar de ser, existem os tutoriais para cada uma das sequências disponíveis de Estatística e Probabilidade, inclusive a SE utilizada no desenvolvimento dessa oficina.

A tela inicial que é visualizada no momento em que se acessa o site em questão pode ser observada a seguir (Figura 3).

Figura 3. Tela inicial de entrada do AVALE-EB (http://avale.iat.educacao.ba.gov.br).

O ambiente virtual do AVALE – EB apresenta uma vantagem adicional sobre o uso das planilhas eletrônicas, além de gratuito, gera on-line e em tempo real, um banco de dados completo da turma, com a participação de cada aluno, que, ao realizar seu cadastro (Figura 4) e inserir seus dados no ambiente (Figura 5) contribui com a sua construção.

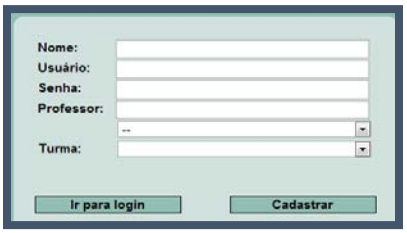


Figura 4. Tela de cadastro e entrada no AVALE-EB. *Figura 5*. Tela de inserção dos dados.

Etapa 2: Inserção dos dados

Cada cursista é responsável pela entrada de seus dados referentes ao consumo efetuado mês a mês (Figura 6) e pode conferir se os mesmos foram preenchidos corretamente, observando a legenda disponibilizada na tela.

Figura 6. Tela de entrada de dados das variáveis pelo cursista no AVALE-EB.

Etapa 3: Visualização do Banco de dados produzido pela turma

À medida que cada cursista vai entrando com seus dados e "enviando", um banco de dados geral contendo os dados de todos os cursistas é gerado em tempo real, como pode ser observado na Figura 7 que apresenta um recorte de um banco de dados gerado no AVALE-EB propiciado pelo preenchimento individual de alunos de uma turma já cadastrada como turma padrão.

Nome	Jan	Fev	Mar	Abr	Mai	Jun	Jul	Ago	Set	Out	Nov	Dez	Qtd pessoas
ademar	8	10	7	9	8	10	2	5	6	5	6	6	2
adriana	10	13	19	13	13	15	13	12	11	11	14	12	4
adriele	17	17	17	17	10	10	10	9	11	8	3	4	2
alba	10	13	19	13	13	15	13	12	11	11	14	12	3
ana	31	26	34	23	24	25	30	19	37	25	29	25	3
caio	20	11	18	12	11	11	26	23	27	27	21	23	6
felipe	8	12	10	11	8	9	8	10	8	9	9	10	4
gabriel	3	11	9	8	13	10	8	12	8	12	9	5	6
higor	14	12	14	13	14	14	15	16	14	12	14	12	3
joao	8	10	7	9	8	10	2	5	6	5	6	6	4
jomagson	3	5	9	8	10	13	8	10	9	4	8	12	4
juliana	7	6	6	4	7	9	12	15	6	6	4	4	5
laiane	10	10	10	10	10	10	10	4	12	10	10	10	5
laryssa	1	2	4	6	8	10	3	5	2	7	1	4	3

Figura 7. Fragmento de um banco de dados de uma turma cadastrada no AVALE-EB

É possível solicitar o cálculo de diversos tipos de medidas estatísticas por variável, tais como, média, mediana, moda, amplitude total (AT), valor mínimo, valor máximo, desvio padrão (DP), variância, coeficiente de variação (CV) e quantil.

O cursista, também, pode solicitar uma medida por vez para cada variável, ou obter, um resumo global (Figura 8) ou ainda, fazer simulações de gráficos variados.

Etapa 4: Visualização de alguns resultados

Planeta água

AVALE-EB Ambiente Virtual

Planeta Água

Sair

Global Aluno

Aluno	Soma	Media	Mediana	DP.1	CV	Minimo	Maximo	AT.2	Consumo.3	Qtd.Pessoas
ademar	82.00	6.83	6.50	2.25	32.93	2.00	10.00	8.00	113.89	2
adriana	156.00	13.00	13.00	2.26	17.36	10.00	19.00	9.00	108.33	4
adriele	133.00	11.08	10.00	4.81	43.42	3.00	17.00	14.00	184.72	2
alba	156.00	13.00	13.00	2.26	17.36	10.00	19.00	9.00	144.44	3
ana	328.00	27.33	25.50	4.86	17.79	19.00	37.00	18.00	303.70	3
caio	230.00	19.17	20.50	6.22	32.44	11.00	27.00	16.00	106.48	6
felipe	112.00	9.33	9.00	1.26	13.48	8.00	12.00	4.00	77.78	4
gabriel	108.00	9.00	9.00	2.82	31.38	3.00	13.00	10.00	50.00	6
higor	164.00	13.67	14.00	1.19	8.70	12.00	16.00	4.00	151.85	3
joao	82.00	6.83	6.50	2.25	32.93	2.00	10.00	8.00	56.94	4
jomagson	99.00	8.25	8.50	2.92	35.35	3.00	13.00	10.00	68.75	4
juliana	86.00	7.17	6.00	3.24	45.20	4.00	15.00	11.00	47.78	5

Figura 8. Resumo global de medidas referente ao consumo de água da por aluno (cursista).

É importante ressaltar que se os cálculos dessas medidas fossem realizados apenas no ambiente papel e lápis, essa tarefa demandaria muito tempo, uma vez que o valor de cada medida de uma variável quantitativa, por exemplo, teria que ser calculado de forma separada para a partir daí, fazer os comparativos com o grupo, dirigindo a atenção dos interessados para um enfoque nos cálculos tornando a tarefa cansativa, repetitiva, enfadonha e desviando-as do que é mais importante que é a formação dos conceitos e elaboração de respostas aos questionamentos iniciais.

Interpretação e comunicação de resultados

Durante o trabalho tanto no ambiente de aprendizagem papel e lápis, como no ambiente virtual do AVALE-EB, é importante que os alunos interpretem os resultados, visando responder as questões de pesquisa propostas inicialmente. Tais resultados devem ser socializados, para o conhecimento de todos e observações acerca da adequacidade das medidas tomadas para representação dos resultados.

Considerações Finais

De acordo com Kataoka e Cazorla (2010) e com nossas próprias observações, resultados de algumas aplicações das sequências de ensino utilizando o AVALE em escolas, demonstram que os alunos ficam motivados e envolvidos, dão significado aos conceitos, conseguindo fazer leituras e interpretação de gráficos e tirando conclusões estatísticas. Vale ressaltar que essas seqüências de ensino podem ser adaptadas para qualquer série escolar, uma vez que não necessariamente o professor precisa explorar todos os conteúdos estatísticos propostos.

Assim, trabalhando sequências de ensino estruturadas numa dimensão de pesquisa científica e prática social, estaremos contribuindo para o desenvolvimento do letramento estatístico, do espírito científico e para a formação de cidadãos críticos.

Bibliográfia e Referências

Brasil. Ministério da Educação. (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: Ministério da Educação/ Secretaria de Educação Fundamental.

Brasil (2002). *PCN+: Ensino Médio – Orientações Educacionais Complementaresaos Parâmetros Curriculares Nacionai*s. Brasília: MEC.

Cazorla, I. M.., & Kataoka, V. Y. (2010). Ambiente Virtual de Apoio ao Letramento Estatístico – AVALE. In I. M. Cazorla, & E. Santana (Orgs.), *Do Tratamento da Informação ao Letramento Estatístico* (pp. 145 -152). Itabuna: Via Litterarum.

Gal, I. (2002). *Adult's Statistical literacy: Meanings, Components, Responsibilities. International Statistical Review, 70*(1), 1-51.

Kataoka, V. Y. & Cazorla, I. M. (2010). Ambiente Virtual de Apoio ao Letramento Estatístico – AVALE. In I, Cazorla, & E. Santana (Orgs.), *Do Tratamento da Informação ao Letramento Estatístico.* Itabuna: Via Litterarum,

Kataoka, V. Y., & Hernandez, H. (2010). Perfil da Turma. In I. M. Cazorla, & E. Santana (Orgs.), *Do Tratamento da Informação ao Letramento Estatístico*. Itabuna: Via Litterarum.

Cotidiano e Matemática: desde os primórdios

Ademir **Basso**
Faculdade UNILAGOS e CEPACS
Brasil
ademir_basso@yahoo.com.br

Resumo

Esta oficina tem por objetivo mostrar a Matemática no cotidiano, desde os primórdios, indicando que o homem, desde seu surgimento, tem utilizado a Matemática para viver melhor e com isso evoluir. Durante a realização deste trabalho serão efetuadas tarefas que remontam a história do homem e da Matemática utilizada em cada época. As atividades remetem aos conteúdos/conhecimentos que cotidianamente o professor de Matemática ensina e em inúmeras ocasiões não consegue fazer uma relação da teoria com a prática. Dessa forma, no decorrer do trabalho, os participantes vão efetuar atividades que utilizam os conteúdos/conhecimentos matemáticos descobertos e/ou criados pelo homem através do tempo.

Palavras chave: matemática, ensino de matemática, matemática e cotidiano.

Matemática e a evolução do homem

Quando se trabalha com a ideia da antiguidade se visualiza que a Matemática é, provavelmente, a ciência mais antiga que se possa ter notícia, é fácil observar que ela está presente em toda a sociedade, seja nas construções feitas pelo homem, seja na natureza ou nos eventos naturais ou provocados pelo ser humano. Se buscar na história, muitos pensadores, matemáticos ou não, atribuíam à Matemática muitos eventos, nesse sentido, é fácil observar que ela está com a humanidade desde seu surgimento.

Por esta razão, nesta oficina, se trabalhará a Matemática do homem das cavernas à atualidade. Tendo este cenário como pano de fundo, se discute a criação do Homem – divina ou abra do acaso – sempre em um contexto matemático. A discussão passa pela ideia da criação do universo, por Deus ou pelo *Big Bang*. Quanto a questão cristã envolvida na história, a Bíblia, o livro sagrado dos cristãos, possui muita Matemática. No Gênesis, que é seu primeiro capítulo, esta ciência está presente, iniciando com a ideia que Deus criou o mundo em seis dias e no sétimo descansou, a ideia de número, de contagem, já inicia aí (Soares, 1967).

A Matemática continua quando se diz que Deus dividiu o tempo em dia e noite (a ideia de divisão ou fração), criou o elemento árido chamado Terra e chamou o conjunto das águas de mar, criou dois grandes luzeiros, o maior, o Sol para presidir o dia, o menor, a Lua, para presidir a noite, a ideia de tamanho. Há muita Matemática no Gênesis e também em outros capítulos, um deles em particular chama-se Números, é o quarto livro de Moisés, tem esse nome porque inicia com a enumeração ou censo dos Israelitas segundo suas tribos, famílias e ofícios e muita Matemática se passa nas páginas deste capítulo (Soares, 1967).

Por outro lado, na teoria científica, o surgimento deste planeta ocorreu com o *Big Bang*, também se tem muita Matemática, só o fato de dizer que tudo não passava de um pequeno condensado, uma forma esférica com pequenas dimensões (Laurence, 2005), mostra a Matemática das formas, o que se estuda hoje em Geometria, uma parte muito importante da Matemática. Uma pequena esfera condensada com um pequeno raio e uma diminuta superfície, tendo é claro, um pequeno volume, tudo perfeitamente calculável pela Matemática.

Nessa ideia científica a Terra, assim como os outros planetas, surgiu tempos depois da Grande Explosão. A Terra, a princípio incandescente, resfriou-se após um longo período de chuvas. O início da vida, segundo a ciência, foi dado pela combinação de moléculas que estavam na atmosfera, foi o chamado CHON da vida, um verdadeiro show de abertura da vida nesse planeta (Carvalho, 2002).

O CHON que deu origem à vida é na verdade uma Matemática simples. Simples no sentido de operação matemática, pois foi a combinação dos elementos químicos que é na verdade uma adição: Carbono + Hidrogênio + Oxigênio + Nitrogênio (C+H+O+N). A atmosfera terrestre primitiva continha, além destes elementos e vapor de água, outros três gases, a amônia (NH_3) o hidrogênio (H_2) e o metano (CH_4) (Carvalho, 2002). Com estes elementos também é possível efetuar adições. O caso da amônia é a soma de N + H + H + H, ou seja, de um átomo de nitrogênio com 3 átomos de hidrogênio. O gás hidrogênio é a soma de dois átomos de hidrogênio, já o metano é a soma de um átomo de carbono com 4 átomos de hidrogênio.

Segundo essa teoria, essa soma de elementos deu origem a microrganismos bastante simples que, com o passar do tempo foram evoluindo para seres unicelulares (uma célula) que sofreram evoluções sucessivas dando origem a seres pluricelulares, com o tempo, surgiram as primeiras plantas e animais marinhos que depois "migraram" para terra firme, com as sucessivas transformações surgiram os primatas, que mais tarde deram origem ao homem (Linhares & Gewandsznajder, 1992).

O homem primitivo, além de fazer seus desenhos em suas cavernas, o que pode ser considerado, de certa forma, um início para a Geometria, saía na busca de alimento, além de frutas, raízes, ele também caçava. Mesmo sem saber é claro, ele utilizava a Matemática nestas atividades de caça. A forma geométrica de sua arma, muito provavelmente, fazia toda a diferença no êxito da caçada. Não obstante, o ângulo da trajetória de suas lanças enquanto buscava arrebatar sua presa possui Matemática da mais avançada. Sabe-se hoje através de cálculos, qual seria o ângulo ideal para que essa lança atingisse a maior distância, se esse fosse o objetivo do caçador ou ainda, qual a altura máxima que poderia chegar uma lança dependendo do ângulo de inclinação e velocidade inicial de lançamento (Máximo & Alvarenga, 2005).

Com o passar do tempo, o homem aprendeu que poderia cultivar o alimento e criar animais e, com isso, deixou de ser nômade, nesse passo da evolução, o ser humano tinha no pastoreio uma das principais atividades de subsistência e, nesse momento, muita Matemática foi utilizada (Giovanni & Giovanni Jr., 2002), tanto que é possível, para o professor de Matemática explorar este período com a contagem, permutação, arranjos e combinação.

Com o tempo a sociedade foi evoluindo e com isso necessitavam de um sistema de cálculo melhorado para fazer jus às suas conquistas, necessitavam, portanto, de algo mais que riscos no solo, em pedras ou em ossos para calcular. A escrita dos mesopotâmios passou a ser feita através de símbolos cuneiformes, herança dos sumérios que também dominaram esta região. Com os

cones era possível subtrair, coisa que não era possível com os famosos riscos em ossos ou madeira, estava surgindo aí a Aritmética (Smole & Diniz, 2005).

Após iniciar a Aritmética com os cones, perceberam que o podiam fazer em larga escala, mas descobriram que podiam, em vez de contar cones, podiam escrever estes símbolos em algum outro local, ganhando tempo e espaço. Estes símbolos então eram escritos em tabletes de argila com uma cunha, dessa forma, uma marca para um objeto, duas marcas para dois objetos e assim por diante. Quando chegavam a dez objetos, o símbolo mudava e parecia o sinal de maior que se usa hoje, e assim sucessivamente. Quando chegavam a uma centena usavam uma combinação entre os símbolos das unidades e das dezenas (Smole & Diniz, 2005).

A evolução do homem segue seu curso sempre ancorado em muita Matemática. No Egito, uma grande civilização, se trabalhou muito essa ciência, tanto nas medições de terras inundadas pelas enchentes, quanto em suas magnificas construções, as famosas pirâmides, não teriam sido possíveis da forma que o foram sem a contribuição de muita Matemática. É importante recordar também da história de Tales de Mileto, que mediu a altura da Pirâmide de Quéops, evento este que passou no Egito (Giovanni & Giovanni Jr., 2002).

Nesta parte da história, o professor poderá explorar toda a ideia de áreas de figuras planas, as formas convencionais e as não convencionais, onde se pode estar usando integrais para o cálculo de uma área diferente. Além, é claro, de trabalhar com o Teorema de Tales, fazendo experiências com a sombra, mesmo método usado por Tales para descobrir a altura da famosa pirâmide. Ainda, neste ponto da história, é possível trabalhar os números egípcios, eles que eram representados por desenhos, do um que era um risco na vertical ou um bastão até o um milhão, que era representado por um homem de joelhos (Souza & Pataro, 2012).

Na corrida evolutiva do homem, a Grécia também foi fecundo à Matemática, lá encontra-se muito desta Ciência. Se deve aos gregos a Matemática de todas as coisas, ou seja, um deles em especial, o famoso Pitágoras de Samos, considerava que tudo era número, as cores tinham números, havia os números amigos, primos, havia o número de Deus, o número de ouro, a famosa proporção áurea e, inclusive, o número do Diabo. Os números dos gregos eram letras, utilizavam o alfabeto também como números, números que são utilizados ainda hoje em Matemática, o alfa, beta, etc. (Souza & Pataro, 2012).

Voltando ao número de ouro, relacionado com a beleza humana e com toda forma de construção humana e até da natureza, Leonardo Da Vinci o utilizou para fazer muitas de suas obras; a mais conhecida, a Mona Lisa possui esta relação em toda sua estrutura. Além das de Da Vinci, outras obras de arte que estão à disposição, também foram criadas a partir das proporções áureas, além das construções atuais que de uma forma ou de outra, trazem a proporção áurea em sua estrutura (Smole & Diniz, 2005).

Seguindo na história da humanidade, a Matemática também esteve presente no domínio romano que se estendeu por uma boa parte da Europa. Na verdade, os conquistados por Roma, tiveram suas culturas subjugadas pelos romanos e a eles foram-lhes imposto também seus números. Os números romanos, como é sabido, foram utilizados por muitos anos e são lembrados na atualidade como capítulos de livros ou de trabalhos acadêmicos e em alguns aparelhos de marcar o tempo, no entanto se percebe o quão limitados eram os mesmos, se comparados com os números usados atualmente (Souza & Pataro, 2012).

Além dos romanos, outra civilização muito importante deixou registros de sua Matemática, é a dos maias, uma civilização extinta, mas misteriosa, com seus números que não seguem uma "lógica" se comparados com os que se usam atualmente, mas que certamente serviam para suas atividades cotidianas. Eles deixaram um grande legado, obras de arquitetura magníficas, um sistema de irrigação digno de grandes engenheiros e também um sistema de numeração diferente, mas com características que, provavelmente, os ajudava em suas tarefas diárias (Smole & Diniz, 2005).

Segunda as mesmas autoras, para se ter uma ideia o número um dos maias era um ponto, o dois, dois pontos, e assim por diante até o cinco, já o cinco, era uma barra na horizontal, o seis uma barra com um ponto sobre ela, o sete uma barra com dois pontos sobre, e assim até o nove, o dez era representado por duas barras, uma sobre a outra e assim seguiam com seus símbolos estranhos, mas que tinham significados para essa civilização que é cercada, até hoje, de muitos mistérios.

No entanto, foi na Índia que gestou-se a maior evolução dos números, o que propiciou, sem sombra de dúvida, a evolução da humanidade. Estes números que foram inventados pelos Hindus e aperfeiçoados pelos árabes, chegaram à Europa por volta do século XIII e o impacto foi sem precedentes (D'Ambrosio, 2004), pois este sistema com apenas 10 algarismos propiciou ao homem calcular qualquer coisa e representar números infinitamente grandes e infinitamente pequenos o que não era possível com os outros sistemas numéricos anteriores.

Foram os números indo-arábicos que posteriormente inspiraram a mente brilhante de Leibniz a criar o sistema binário. Leibniz queria eliminar o erro e para isso acreditava que o um e o zero eram os únicos números que a humanidade precisava, com isso criou uma máquina de cálculo bastante rudimentar que era baseada na ideia de algo ou nada, ou seja, uns e zeros. Com essa ideia, tempos depois, foi criado o Colossus, o primeiro computador e daí em diante o sistema binário não parou mais. Dessa forma após a criação dos números indo-arábicos, a maior invenção foi o sistema binário, o mesmo que permitiu a maior evolução que o mundo já experimentou, a evolução tecnológica (Boyer & Merzbach, 2012).

Desenvolvimento de atividades

É importante destacar que, nesta oficina, se utilizará da História da Matemática como suporte, já que o contexto traz o cotidiano do homem em sua escalada evolutiva e também as descobertas matemáticas ao longo do tempo. No entanto, é a Matemática do cotidiano a principal fonte desta oficina, por isso, as atividades desenvolvidas intencionarão mostrar ao professor que a mesma está presente em toda obra ou evento humano e em todas as outras ciências, colaborando para que as mesmas existam e se desenvolvam.

Dessa forma, nesta oficina serão desenvolvidas atividades curtas e com o uso apenas do material que o professor tem em suas mãos como o caderno, lápis, caneta, régua, tesoura e cola. O professor terá a oportunidade, com este trabalho, de vivenciar e realizar pequenas práticas para serem utilizadas diretamente em sala de aula com seus alunos. Estas atividades, propiciadas pela oficina, darão subsídios para superar a ideia de que a Matemática é um disciplina abstrata, inumana e difícil.

Matemática nas ciências

Será discutido, nesta oficina, que todas as ciências necessitam da Matemática para mostrar e provar suas teorias ou definições e que a Matemática também depende de outras disciplinas,

como é o caso da língua materna. É possível observar com facilidade esta questão quando se mostra um exemplo que une Matemática e linguagem textual, neste exemplo, a vírgula é a peça chave. Observa-se na questão: **Qual é a metade de dois mais dois?** A resposta correta é naturalmente 2, pois 2 + 2 = 4, logo a metade de 4 é ele dividido por dois que vem a ter como resultado o valor numérico 2.

No entanto, se a questão fosse: **Qual é a metade de dois, mais dois?** A resposta já não é dois e sim três, pois a metade de 2 é ele dividido por 2 que vem a ser 1, esse resultado somado a dois, tem como resultado três. Ou seja, 2 : 2 = 1 + 2 = 3. Nesse caso a vírgula mudou toda a história, mostrando que a linguagem matemática e a linguagem escrita estão intimamente ligadas. Ainda na relação Matemática com Língua, será trabalhado a questão das sílabas, as mesmas são separadas em sílabas gramaticais. A separação silábica possui estreita ligação com o número de vogais que a palavra possui. Por exemplo, a palavra pé, possui uma vogal e uma sílaba, a palavra gato, possui duas vogais e duas sílabas, a palavra cavalo, possui três vogais e três sílabas, veja a relação matemática de uma vogal por uma sílaba.

Outra ciência que depende da Matemática é a Física, em qualquer uma de suas partes, esta ciência utiliza, além de seus conceitos, muita Matemática, acredita-se inclusive que é a ciência mais matematizada que existe, chegando a ser tida como uma Matemática aplicada. Nesse contexto, será destacada a questão das grandezas, tanto as escalares, quanto as vetoriais; as escalares ficam perfeitamente compreendidas com o módulo (valor numérico) seguido de sua unidade de medida, como exemplo, o comprimento de um corredor, ele pode ter 4,5 metros, veja uma grandeza que para ser compreendida precisa de Matemática, o módulo 4,5 e a unidade de medida, o metro (Máximo & Alvarenga, 2005).

As grandezas vetoriais, por sua vez, não ficam compreendidas somente com o módulo e sua respectiva unidade de medida, necessitam, além disso, a direção e o sentido. Como exemplo cita-se a força, ela para estar bem compreendida necessita de um valor, como exemplo uma força de 10 Newtons, mas necessita de direção que pode ser horizontal, vertical, inclinada em 30º e, por fim, essa grandeza necessita de sentido, no caso, para a direita, para a esquerda, para cima ou para baixo. Percebe-se aqui também a utilização de Matemática, tanto na questão numérica (módulo), na questão da direção (ângulos), e na questão do sentido (vetores). Além dos exemplos citados aqui, a Física como um todo utiliza-se da Matemática para provar suas definições e teorias. Há a parte teórica, com seus conceitos e definições e a parte das equações, das fórmulas que provam as teorias, neste momento a Matemática está presente em sua forma mais pura, em números.

Nesta oficina, irá se trabalhar a Matemática presente na Química, observa-se, por exemplo, no conteúdo de ligações químicas, estas ligações formam o mundo que é feito de matéria visível e não visível. Sabe-se que um dos componentes ideais para a vida em nosso planeta é a água, a mesma é resultado de uma ligação química e uma operação matemática. Não é segredo para ninguém que uma molécula de água é formada por duas de hidrogênio e uma de oxigênio. A molécula conhecida por H_2O nada mais é do que uma operação de adição, onde se adiciona H + H + O, ou seja, duas moléculas de hidrogênio e uma molécula de oxigênio.

Outro exemplo é o açúcar ou sacarose, componente que faz parte da alimentação do ser humano, que é essencial em toda mesa, mas gera muita preocupação por conta de seu consumo excessivo e sua relação com inúmeras doenças. A molécula deste produto também é uma soma de elementos químicos, sua fórmula é conhecida como $C_{12}H_{22}O_{11}$, que é a soma de 12 moléculas

de carbono com 22 moléculas de hidrogênio com 11 moléculas de oxigênio, ou seja, 12C + 22H + 11O.

Quanto às ciencias, se destacará, neste trabalho, a Matemática na Geografia e na História. As grandes navegações, conhecimentos que podem ser explorados pelas duas disciplinas, que propiciaram ao homem ganhar todo o planeta foram feitas através de inúmeros cálculos para sairem do velho mundo (Europa) e chegar ao novo mundo (América). Esses cálculos eram baseados em muita trigonometria, trabalhavam com os mapas, que na época eram bastante rudimentares, já que não conheciam o resto do mundo e utilizavam da Matemática para se localizarem (Mucelin, 2006).

Sem contar que para a compreensão de inúmeros conteúdos de Geografia se necessita da Matemática. O cálculo da densidade demográfica, da taxa de natalidade, da taxa de mortalidade, a renda per capita, tudo necessita de Matemática para se chegar nos resultados buscados. A História por sua vez, de maneira geral, é ensinada por períodos de tempo, um conteúdo matemático que pode ser relacionado são os intervalos em suas mais variadas formas.

Como não poderia deixar de ser, esta oficina, abordará a Matemática utilizada na Biologia. Esta ciência utiliza Matemática para explicar inúmeros eventos, tanto é que Carvalho (2002), diz que a estatística é uma ferramenta importante para todos os ramos do conhecimento quando se trabalha com experimentação, que é o caso da genética. Como se não bastasse, Mendes (2012, p. 46) diz que "um biólogo não consegue produzir conhecimentos científicos relevantes sem usar matemática à beça", ou seja, esta ciência é essencial neste campo de conhecimento.

Uma das constatações interessantes é a de que todo ser humano possui em sua formação genética inúmeros cromossomos, e os mesmos carregam toda carga hereditária, ou seja, as características dos pais que, de maneira geral, mostram como será o indivíduo. No momento da concepção 22 + 1 cromossomos que pertencem à mãe estão no óvulo fecundado e 22 + 1 cromossomos que pertencem ao pai estão no espermatozoide que fecundou o óvulo, caso não sejam gêmeos.

Para mais Matemática na Biologia, busca-se Santana e Fonseca (2009), os mesmos explicam as diferenças entre a composição da matéria em um carneiro, em um pé de milho e no homem, destacando cinco elementos, a água, os sais minerais, os carboidratos, os lipídios (gorduras) e as proteínas. O carneiro possui, por exemplo, 60% de água, 3,4% de sais minerais, 0,6% de carboidratos, 20% de gordura e 16% de proteínas. Um pé de milho, por sua vez, possui 75% de água, 1,7% de sais minerais, 18% de carboidratos, 0,8% de gordura e 4,5% de proteínas. E o homem possui cerca de 65% de água, 4,3% de sais minerais, 0,7% de carboidratos, 15% de gordura e 15% de proteínas. É pura Matemática em Ciências. Não é preciso destacar as outras ciências, o fato é que todas elas, de uma maneira ou de outra, necessitam da Matemática para evoluir e serão destacadas nas atividades desta oficina.

Matemática e cotidiano

Assim como a Matemática acompanhou o desenvolvimento da humanidade e a evolução do homem, ela também está presente no cotidiano próximo à escola, próximo ao professor e, é claro, próximo ao aluno. O professor de Matemática deve aproveitar esta oportunidade para trabalhar essa disciplina recorrendo aos eventos cotidianos que cercam essa realidade.

Como no exemplo que este trabalho utilizará, o de mostrar que a Matemática está no Futebol, tanto em suas jogadas, sua estrutura de campo, seus instrumentos, a venda e compra de

jogadores, público pagante e toda Matemática que gira em torno desse esporte que é paixão mundial. Outro contexto de Matemática no cotidiano, é o da música. Pitágoras descobriu que o som ficava harmonioso se fosse tocado na proporção 2 para 1. Com um instrumento primitivo, ele dividiu espaços em 2, depois 8/5, logo após uma de 4/3 e em seguida completou toda a escala que se conhece hoje até chegar a 1(Leite, 2006). Em outras palavras, usou de muita Matemática para criar a música tão importante para a diversão dos seres humanos.

A Matemática na música não para por aí, pode-se relacionar a mesma com o ritmo, que é a alternância de sons e silêncios. De acordo com a duração destes espaços é que se determina o compasso de uma música. A medida de tempo, neste caso, chama-se de semibreve e pode ser medida matematicamente pelo metrônomo com a forma chamada mensuralismo, utilizando-se de frações. Dessa forma pode-se ter 1 que se chama semibreve, que é integral, na sequência, tem-se frações da semibreve, como por exemplo a mínima que é 1/2 da semibreve, após tem-se a semínima que representa 1/4 da semibreve. A continuação se dá através da colcheia que é representada por 1/8, na sequência tem-se a semicolcheia que é 1/16 e, por fim, a fusa, que é representada matematicamente por 1/32 da semibreve. Um detalhe é importante recordar, esses nomes com suas respectivas notas (frações) são representadas por símbolos que somente os músicos entendem, um exemplo é o símbolo musical "o" chamado semibreve que é representado pelo número 1, ou um inteiro, outro símbolo é "♩" é a semínima, os outros símbolos são parecidos com a semínima e, como já foi dito, tem seus representantes numéricos.

Outro destaque que terá lugar nesta oficina, é a Matemática relacionada com o ser humano, tanto em sua estrutura física quanto a seus afazeres cotidianos. Além de trabalhar a questão da beleza humana relacionada com o número de ouro, é possível trabalhar a simetria que o corpo do homem mostra. Essa simetria pode ser trabalhada inclusive no plano cartesiano, trabalhando com coordenadas nos eixos x e y. Ainda nesta questão, Barreto Filho e Silva (2000), destacam que, em termos de comprimento, entre veias, artérias e capilares, um ser humano pode chegar aos impressionantes 97000 quilômetros. Outros números podem ser destacados sobre as artérias, as menores executam uma contração – contração e relaxamento - em um intervalo de tempo que vai de 2 e 8 segundos. Em termos de tempo, as plaquetas sanguíneas, que são as moléculas responsáveis pela coagulação, vivem em média dez dias.

Seguindo com a forma do ser humano, pode ser proposto o conteúdo de funções utilizando uma criança como modelo. Por exemplo, a altura de uma criança é uma função de sua idade, o que é chamado pelos pediatras de desenvolvimento estatural (de estatura). Há uma tabela usada pelos pediatras que indica a altura do menino e da menina com certa idade. Nesse caso, uma menina ao nascer deve ter suas medidas entre 45 a 54 centímetros aproximadamente, com 1 mês deve ter a altura entre 47 centímetros e 58 centímetros, com 2 meses deve medir entre 51 e 61 centímetros, com 3 meses deve estar entre 55 e 65 centímetros, com 4 meses deve medir de 57 e 67 centímetros, com 5 meses deve medir entre 58 centímetros e 69 centímetros aproximadamente, já com 10 meses, sua altura, deve estar entre 65 centímetros e 77 centímetros aproximadamente, com 12 meses (1 ano), sua medida deve estar entre 67 e 81 centímetros e com 18 meses sua altura deve estar entre 73 e 89 centímetros (Smole & Diniz, 2005).

Esta oficina trabalha ainda com a inesgotável fonte da Matemática nas ruas, nas construções, nos projetos civis, hidráulicos, elétricos, as funções no cotidiano, a Matemática no romance, no namoro, no casamento, trazendo os postulados e equações do amor. Não obstante, trabalha a Matemática na natureza, na cerveja e no humor, destacando conhecimentos matemáticos relacionados com a sociedade humana.

Conclusão

Como já amplamente discutido, esta oficina abordará a Matemática no cotidiano, utilizando elementos históricos, das ciências e toda obra, prática e eventos realizados pelo homem. Intenciona-se, com este trabalho, superar a ideia de que a Matemática é uma disciplina que possui pouca ou nenhuma aplicação real, ao contrário, mostrar que esta ciência é a base de todas as ciências e de toda a evolução experimentada pela humanidade.

Por isso, serão realizadas práticas como a de descobrir se um participante é bonito ou não matematicamente diante da relação áurea, nesse tópico, trabalhar o conteúdo de números irracionais e estender a discussão para a constante de Euler e para o π. Fazer cálculos como se fazia no passado, utilizando outros sistemas numéricos ou outras estratégias. Trabalhar a questão atual da saúde e a Matemática quando se recorre ao índice de massa corpórea.

Trabalhar com atividades que podem ser utilizadas no romance e no amor, tais como a confecção de bilhetes matemáticos para a conquista ou para o rompimento de uma relação. Trabalhar, nesse sentido, com a equação para encontrar a idade certa para que uma pessoa possa casar, baseado na idade com que iniciou o namoro e a idade com que pretende parar de namorar e casar.

Atividades que mostram que a Matemática pode ser facilmente entendida, que ela pode ser divertida e que até pode ser utilizada no humor. Se destacará o papel importantíssimo que a Matemática teve no decorrer da evolução do homem e aquela que fez com que a tecnologia avançasse tanto que hoje, em qualquer parte do mundo, é praticamente impossível viver sem a maquinaria eletrônica em todo empreendimento, tecnologia que não seria possível sem a Matemática.

Por fim, se destaca nesta oficina, que toda obra, evento ou conduta humana está relacionada com a Matemática, permitindo que o homem possa agir em seu cotidiano, compreendendo-o, transformando-o, tornando um lugar melhor de se viver e, por fim, deixando-o mais belo, ou seja, a Matemática permite organizar, dar forma e embelezar o ambiente, deixando-o mais humano possível.

Referências e bibliografia

Barreto Filho, B., Silva, C. X. da. (2000). *Matemática*: ensino médio. São Paulo: FTD.

Boyer, C. B., Merzbach, U. C. (2012). *História da matemática*. Tradução de Helena Castro. São Paulo: Blucher.

Carvalho, W. (2002). *Biologia em foco*. São Paulo: FTD.

D'Ambrosio, U. (2004). *Educação Matemática:* Da teoria à prática. 11. ed. Campinas-SP: Papirus.

Giovanni, J. R., Giovanni, J. R. J. (2002). *Matemática pensar e descobrir*: o + novo. São Paulo: FTD.

Laurence, J. (2005). *Biologia*: ensino médio. São Paulo: Nova Geração.

Leite, M. G. (2006). O som nosso de cada dia. *Arte Ensino Médio*. Curitiba: SEED-PR.

Linhares, S., Gewandsznajder, F. (1992). *Biologia hoje*: genética, evolução, ecologia. São Paulo: Ática.

Máximo, A., Alvarenga, B. (2005). *Física 1*: ensino médio. São Paulo: Scipione.

Mendes, R. (2012). A próxima fronteira da matemática. *Revista Cálculo matemática para todos*. Edição 15, ano 2, p. 46-52.

Mucelin, N. I. S. (2006). Venha navegar por outros mares. *Matemática Ensino Médio*. Curitiba: SEED-PR.

Santana, O. A., Fonseca, A. (2009). *Ciências naturais* 7º ano. 3. ed. São Paulo: Saraiva.

Smole, K. S., Diniz, M. I. (2005). *Matemática*: ensino médio. 5. ed. São Paulo: Editora Saraiva.

Soares, M. (1967). *Bíblia Sagrada.* 23 ed. São Paulo: Edições Paulinas.

Souza, J. R. de, Pataro, P. R. M. (2012). *Matemática* 6º ano. 2. ed. São Paulo: FTD.

Deducción de la fórmula del área del círculo en la formación inicial docente

Luis Antonio **Soto** Hernández
Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán
Honduras
luissotoh@yahoo.com.ar

Resumen

La fórmula para el cálculo del área de círculos ofrece resistencia en los estudiantes y docentes sino se experimenta a través de actividades concretas que permitan llegar a un descubrimiento o conclusión. Hay varias maneras de lograrlo, pero utilizando la estrategia de transformar el círculo en otras figuras a las que se les conoce su área se deduce la fórmula. Esto implica un proceso de aprendizaje para los estudiantes y de reflexión para los docentes. En este minicurso se desarrollarán actividades para ambos actores pero reflexionando desde el punto de vista de la formación inicial docente.

Palabras claves: Fórmula del área del círculo, Deducción del área del círculo, Formación inicial docente

Introducción

Los conceptos relacionados con el cálculo de área de círculos ofrecen resistencia en los estudiantes y docentes sino se experimentan a través de actividades concretas que utilizando los conocimientos previos permitan llegar a un descubrimiento o una conclusión, esto supone desarrollar la habilidad de pensar lógicamente y sentir satisfacción y alegría al hacer matemática.

En relación al aprendizaje de las matemáticas, el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos, NCTM por sus siglas en inglés, (2000) expresa que los estudiantes deben aprender las matemáticas entendiéndolas, reflexionando sobre su propio pensamiento y razonamiento, asimismo dice que si se alinean el conocimiento factual y las habilidades para manejar procedimientos con el conocimiento conceptual los estudiantes pueden transformarse en efectivos aprendices de las matemáticas. En este sentido, la memorización de las fórmulas en general, no debe ser el fin en sí mismo sino la deducción de las fórmulas a través de procesos que impliquen actividades que hagan que los estudiantes las comprendan para que puedan aplicarlas en la resolución de problemas.

La deducción de fórmulas implica una serie de elementos que requiere de mucha reflexión de parte de los docentes para que puedan abordarse con éxito con los estudiantes, entre éstos destacan: la secuencia curricular de los contenidos, los conocimientos previos de los estudiantes, la exposición a actividades concretas que faciliten el conocimiento y llamen la atención de los educandos y los inciten a la reflexión, y la habilidad del docente para aprovechar las ideas de los estudiantes (incluyendo sus errores) y convertirlas en conceptos matemáticos.

Una estimación del área del círculo se puede hacer comparándola con el área de los cuadrados inscritos y circunscritos a él, otra aproximación es cuadricular el círculo y su área será la suma de las áreas de los cuadrados internos más la mitad del área de los cuadrados que quedan en el borde. Estas formas aunque son interesantes no conducen a la deducción de la fórmula del área del círculo que en esencia es el fin último de la matemática en esta rama del conocimiento, así que habrá que buscar alguna manera que permita construir dicha fórmula y generalizarla.

Una de las estrategias que se puede utilizar en este propósito de la deducción de las fórmulas de las áreas de las figuras planas es la de transformar una figura en otra figura a la que se le conoce la fórmula de su área, en este sentido, habrá que buscar una manera en la que el círculo se pueda transformar en otras figuras a las que se les conoce la fórmula de su área permitiendo así deducirla y generalizarla al cálculo de área de los círculos.

Secuencia curricular en el estudio del área de las figuras planas

El estudio del área de figuras planas puede iniciarse con la comparación de las superficies de dos objetos diferentes. Para que puedan captar el concepto de área es necesario que los estudiantes descubran la forma de encontrarla por sí mismos exponiéndolos a las cuatro etapas de la comparación y la medición (comparación directa, comparación indirecta, medición con las unidades arbitrarias y la medición con las unidades oficiales) propuestas en las Guías para Maestros de la Secretaría de Educación de Honduras utilizadas en la enseñanza de las matemáticas. En un inicio la forma de encontrar el área será a través del conteo pero el propósito final será hallar el área mediante el cálculo, haciendo uso de las fórmulas. En matemática, memorizar las fórmulas no debe ser lo más importante sino el proceso para llegar a ellas. En ese proceso los estudiantes deben tener múltiples experiencias de resolución independiente que incluyan la utilización de los conocimientos previos, por lo que si olvidan las fórmulas puedan recurrir a sus experiencias pasadas y construirlas nuevamente. Cuando la matemática expone a los estudiantes a que hay diferentes procedimientos para llegar a un resultado desarrolla la capacidad de observar un fenómeno desde distintos puntos de vista y con una visión más amplia.

La deducción de las fórmulas del área de las figuras planas debe seguir una secuencia curricular basada en: la estructura interna de la matemática, el uso de los conocimientos previos de los estudiantes y el desarrollo cognitivo de los mismos. Por ejemplo, ¿en qué orden deben deducirse las fórmulas del área de las siguientes figuras: triángulo, cuadrado, círculo y rectángulo? Es evidente que el área del círculo sería la última en abordar debido a que la misma implica una serie de conceptos complejos como el número π y la circunferencia. El triángulo ofrece la dificultad que para deducir su fórmula hay que generalizarla para los distintos tipos de triángulos que existen: equiláteros, isósceles, escalenos, rectángulos, acutángulos y obtusángulos, además puede darse el inconveniente que al utilizar la técnica de la cuadrícula, no sea tan fácil ver que muchas de sus partes forman una unidad cuadrada. De acuerdo a las razones expuestas anteriormente se debe comenzar con la deducción de las fórmulas del área del cuadrado y del rectángulo, pero de estas dos figuras, ¿con cuál se debe iniciar? Ambas implican la fórmula *área = lado x lado*, con la salvedad que en el rectángulo se puede establecer la diferencia entre ambos lados, es decir, la fórmula puede verse como *área = largo x ancho*, así que la decisión de iniciar con una u otra figura dependerá de la intención del docente: quiere mayor diversidad de pensamiento de parte de los estudiantes, quiere seguir un camino seguro de deducción de la fórmula, quiere partir de un caso general para particularizarlo, etc. En la deducción de las fórmulas del área de las figuras planas hay que tomar en cuenta que lo importante es la experiencia de los estudiantes en la construcción de las mismas y el docente es el responsable de

exponer a los estudiantes a este tipo de prácticas que lo ayuden a desarrollar su pensamiento lógico. En la Figura 1 se presenta la secuencia curricular en la deducción de las fórmulas del cálculo de área de figuras planas.

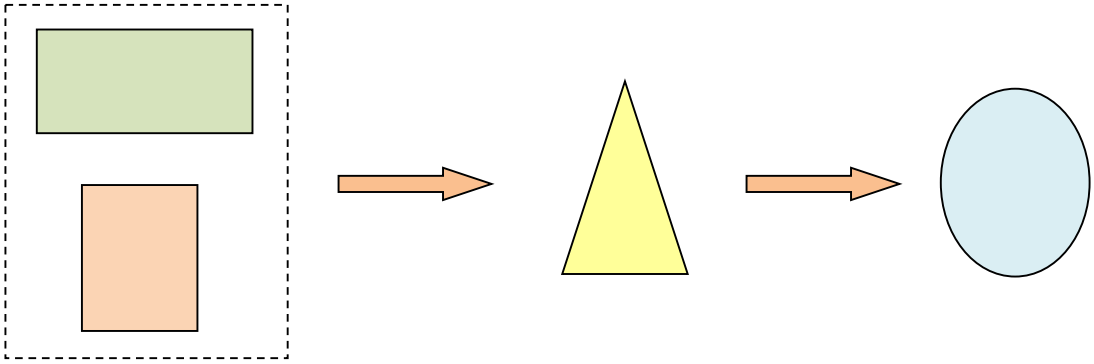


Figura 1. Secuencia curricular de la deducción de las fórmulas del área de figuras planas

Para comprender un poco más la importancia de la secuencia curricular en el proceso de deducción de las fórmulas de las áreas de las figuras planas a continuación se aborda el caso del área del triángulo para después continuar con la del círculo.

Deducción de la fórmula del área del triángulo

Existen diferentes tipos de triángulos, de acuerdo a la longitud de sus lados se clasifican en equiláteros, isósceles y escalenos, y de acuerdo a la medida de sus ángulos en rectángulos, acutángulos y obtusángulos. La fórmula para el cálculo del área es la misma para todos ellos, entonces ¿cuál es la secuencia que se debe seguir para que los estudiantes piensen por sí mismo en la forma de encontrar el área aplicando lo aprendido y que deduzcan dicha fórmula y puedan generalizarla a todo tipo de triángulos? Respetando el orden de enseñanza y el desarrollo del pensamiento del niño, podría introducirse con los triángulos rectángulos ya que se puede considera el área de este tipo de triángulo como la mitad del área del cuadrado o la mitad del área del rectángulo que lo contiene. Esta manera de cálculo va dando la idea que la fórmula del área de un triángulo es *base x altura ÷ 2* ya que el área de un rectángulo es *base x altura* y como se está considerando *el área del triángulo rectángulo como la mitad del área del rectángulo* (o del cuadrado) que lo contiene entonces se deduce que la fórmula para el cálculo del *área del triángulo rectángulo es base x altura ÷ 2*. Siguiendo esta forma de pensamiento la secuencia curricular para la deducción de la fórmula del área de triángulos sería: triángulos rectángulos → triángulos acutángulos → triángulos obtusángulos.

La deducción de las fórmulas para el cálculo del área de las figuras planas puede hacerse de varias formas:

a) Dividiendo la figura dada en figuras a las cuales se les conoce la fórmula para calcular su área

b) Dividiendo la figura dada y transformándola en otras figuras a las cuales se les conoce la fórmula para calcular su área.

Un ejemplo de esta situación se da en la deducción de la fórmula del área de los triángulos acutángulos, actividad propuesta en el Cuaderno de Trabajo para los estudiantes de quinto grado de la Secretaría de Educación de Honduras. En la Figura 2 se muestran varias estrategias.

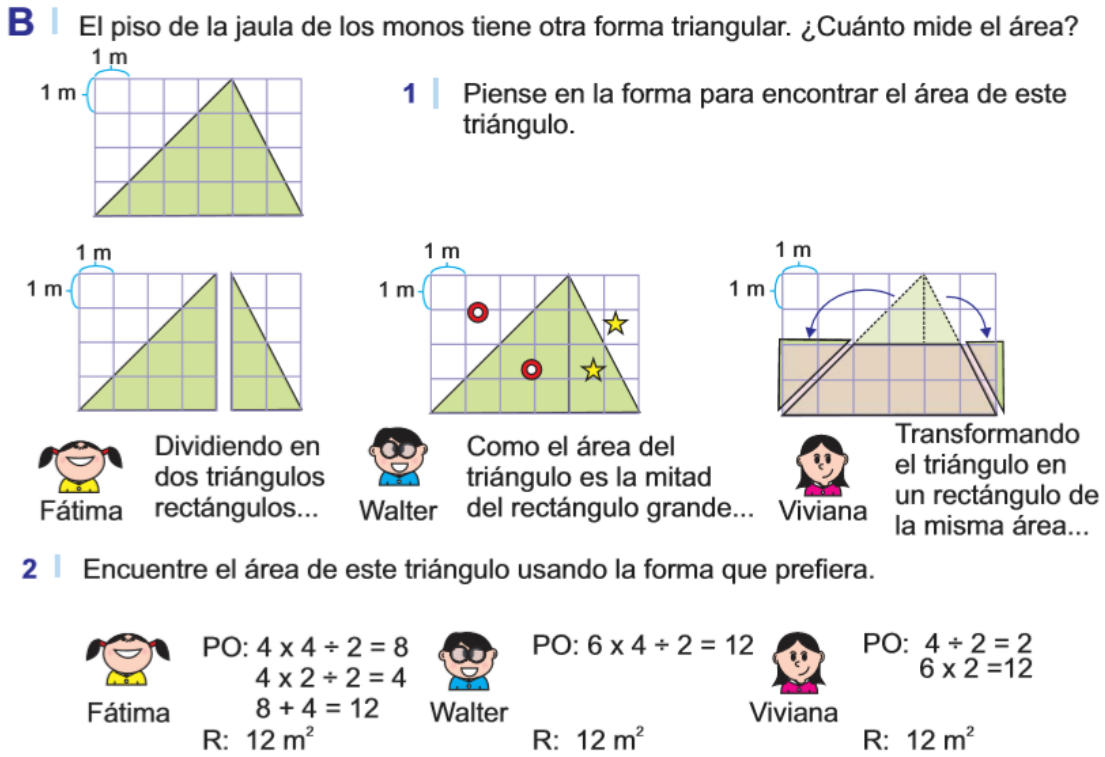


Figura 2. Estrategias para encontrar el área de un triángulo acutángulo

En el caso de Fátima se utiliza la primera estrategia (dividir la figura en figuras conocidas) y en el de Viviana la segunda (dividir la figura y transformarla en otras figuras conocidas). Es obvio que puede haber diferentes formas de encontrar el área de dicho triángulo aplicando estas estrategias, sin embargo no hay que caer en el hecho que los estudiantes dividan la figura dada en muchas figuras pequeñas (o las transformen en muchas figuras) que compliquen el cálculo y propicien la posibilidad de equivocarse. Lo ideal en matemáticas es buscar una forma comprensible, fácil, rápida y segura de cálculo.

La importancia de la fórmula del área del triángulo radica en que cuando se estudia el área de los cuadriláteros, éstos se pueden dividir en triángulos y así encontrar su área, generalizando esta idea, el área de cualquier polígono puede encontrarse dividiéndolo en triángulos.

Deducción de la fórmula del área del círculo

Haciendo trazos convenientes los polígonos pueden dividir en varias figuras y transformarse en otras figuras a las cuales se les conoce su fórmula para calcular su área, de esta manera al sumar sus áreas se encuentra el área del polígono dado. Esta estrategia se ha utilizado para deducir las fórmulas de los triángulos, algunos cuadriláteros (cuadrados, rectángulos, romboides, trapecios y rombos) y los polígonos regulares. Surge la siguiente pregunta: ¿se podrá utilizar esta estrategia de dividir el círculo en varias figuras y transformarlo en una figura a la cual se le conozca la fórmula para el área y deducir así la fórmula para el área del círculo?

A simple vista no parece haber una respuesta inmediata, surgen así más inquietudes: ¿en qué figuras se va a dividir el círculo?, ¿en semicírculos?, ¿cómo calculamos el área de un semicírculo?, ¿en qué figura se va a transformar las partes en que se ha dividido el círculo?

Para responder a estas interrogantes se puede pedir a los estudiantes que dibujen un círculo cualquiera y que lo dividan en varios sectores circulares iguales y que utilicen éstos como las piezas de un rompecabezas y que traten de formar una figura. La división en dos sectores circulares iguales no parece dar ninguna figura, sin embargo cuando se dividen en 4 sectores circulares iguales los estudiantes empiezan a ver que cada sector circular se asemeja a un triángulo y piensan que si encuentra la forma de calcular el área de dicho "triángulo" se puede calcular el área aproximada del círculo. Si se divide el círculo en 8 ó 16 sectores circulares iguales y se colocan adecuadamente se transformarán en una figura que se parece a un romboide, si el círculo se divide en más sectores circulares iguales, por ejemplo, 32 ó 64 sectores la figura se parecerá a un rectángulo, cuanto más se divida el círculo en sectores circulares la figura se transforma en un rectángulo. En la Figura 3 se presenta la situación anterior.

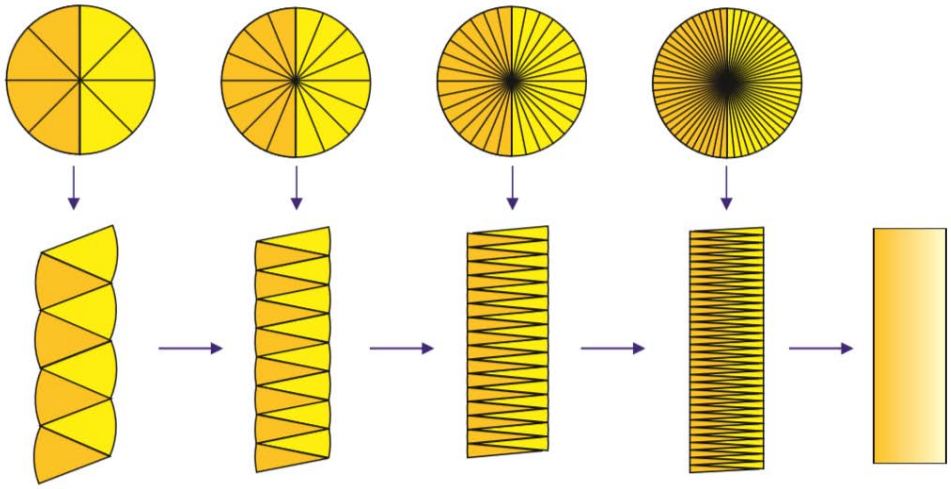


Figura 3. Transformación de un círculo en un rectángulo

Determinando las medidas necesarias y aplicando la fórmula del área del rectángulo se deduce que el área de un círculo es π x radio x radio. En la Figura 4 se muestra la forma de deducir el área del círculo.

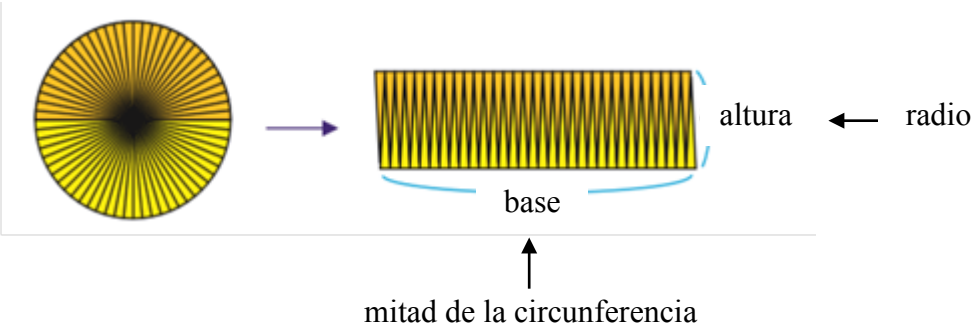


Figura 4. Deducción de la fórmula del área del círculo

De lo anterior se sabe que la base del rectángulo es la mitad de la circunferencia y que la altura del rectángulo es el radio de la circunferencia, sustituyendo estos datos en la fórmula del área del rectángulo se deduce la fórmula para calcular el área de un círculo. En el siguiente cuadro se presenta la deducción de la fórmula del área del círculo.

Área del rectángulo = base x altura
= mitad de la circunferencia x radio
= (2 x π x radio ÷ 2) x radio
= π x radio x radio

Área del círculo = π x radio x radio
= πr^2

En el caso del círculo, se aplicó la estrategia de "Dividir la figura dada y transformarla en otras figuras a las cuales se les conoce la fórmula para calcular su área", pero, ¿será el rectángulo y el romboide las únicas figuras en que se puede trasformar el círculo?, ¿en qué otras figuras se podrá transformar el círculo?, ¿será ese el único romboide en que se podrá transformar?, si este último fuera el caso ¿qué características tendría ese romboide?

Extensión de la deducción de la fórmula del área del círculo

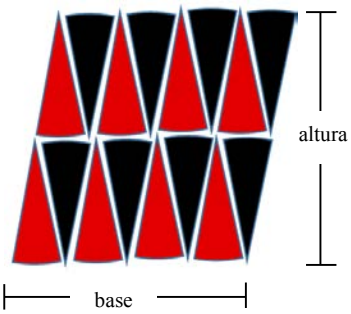
El currículo de muchos países incluye el estudio del área del círculo en quinto o sexto grado de la educación primaria, pensando en el desarrollo del pensamiento lógico de estos estudiantes, la estrategia aborda anteriormente puede servir para que ellos deduzcan y construyan por sí mismo la fórmula para el área del círculo ya que es fácil ver la relación entre los datos de la altura y la base del rectángulo formado con los datos del círculo. Una vez que se ha deducido la fórmula el objetivo que se pretendía está logrado, sin embargo, ¿qué pasaría si los estudiantes transforman el círculo en otras figuras?, ¿se podrá deducir la fórmula?, ¿se podrá establecer fácilmente la relación de los datos necesarios entre la figura formada y los datos correspondientes del círculo?, ¿qué tan conveniente será exponer a los estudiantes a este tipo de experiencias? Responder a las preguntas anteriores puede ser una situación compleja si se piensa en el nivel de desarrollo del pensamiento de los estudiantes, pero los docentes están en la obligación de conocer estas situaciones y saber la manera de abordarlas por si se presentan en el aula de clases.

La formación inicial de docentes en la mayoría de los países de Latinoamérica se está dando a nivel universitario por lo que los futuros docentes no sólo deben tener el dominio científico y metodológico de lo que van a enseñar a sus estudiantes sino que deben tener un conocimiento elevado y profundo de las matemáticas para que sean conscientes de su enseñanza y expongan a sus estudiantes a situaciones que les permitan por sí mismos construir sus nuevos conocimientos basados en sus experiencias anteriores, asimismo deben tener las herramientas necesarias para atender a aquellos estudiantes que muestran un potencial excepcional en matemáticas y que requieren actividades retadoras, no rutinarias y de alta complejidad matemática que sirvan para satisfacer sus necesidades e intereses en esta rama del saber. De esta manera las universidades deben exponerse a sus futuros docentes a este tipo de experiencias para que tengan prácticas que ayuden a desarrollar mejor su trabajo en los salones de clase en función de sus estudiantes, esto está en consonancia con lo que expresa Godino (2004): el aprendizaje de las matemáticas por parte de los estudiantes, su capacidad para usarla en la resolución de problemas y la confianza y disposición hacia la matemática está condicionada por la enseñanza que da el maestro.

A continuación se presentan algunas transformaciones que puede sufrir el círculo y que ayudan a ver las figuras desde otros puntos de vistas lo cual amplía el conocimiento matemático.

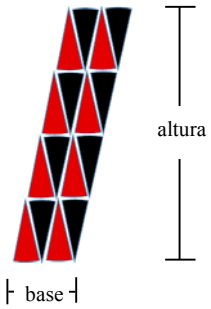
Transformación de un círculo en romboides

Extendiendo el pensamiento y utilizando la estrategia de dividir en 16 sectores circulares el círculo, éste se puede transformar en otros romboides que tienen cierta particularidad. Deduzca la fórmula del área del círculo de acuerdo a los romboides formados que se presentan en la Figura 5.



Área del romboide = base x altura
= 4/16 de la circunferencia x 2 veces el radio
= (4/16 x 2 x π x radio) x 2 radio
= π x radio x radio

Área del círculo = π x radio x radio
= πr^2



Área del romboide = base x altura
= 2/16 de la circunferencia x 4 veces el radio
= (2/16 x 2 x π x radio) x 4 radio
= π x radio x radio

Área del círculo = π x radio x radio
= πr^2

Figura 5. Transformación de un círculo en romboides

En el primer caso, puede decirse que el romboide está formado por dos niveles y que cada nivel representa una parte de la altura donde cada una coincide con el radio del círculo, es decir, que la altura es de 2 radios; y la base del romboide es 2/16 partes de la circunferencia. En el segundo caso, el romboide tiene 4 niveles que corresponde a la altura que sería de 4 radios y la base del romboide es 4/16 de la circunferencia. En ambos casos pueden considerarse las alturas externas. Haciendo los cálculos correspondientes se deduce que la fórmula para el área del círculo es πr^2.

Transformación de un círculo en un triángulo

Cuando el círculo se ha transformado en un rectángulo y en varios tipos de romboides surge la inquietud: ¿se podrá transformar en otras figuras a las cuales se le conoce la fórmula para el cálculo de su área? Seguramente la respuesta será que sí. En la Figura 6 se presenta la transformación del círculo en un triángulo.

Área del triángulo = base x altura ÷ 2
= 4/16 de la circunferencia x 4 veces el radio ÷ 2
= (4/16 x 2 x π x radio) x 4 radio ÷ 2
= π x radio x radio

Área del círculo = π x radio x radio
= πr^2

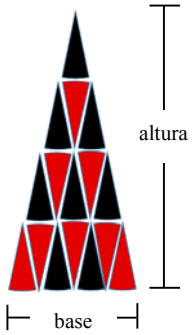
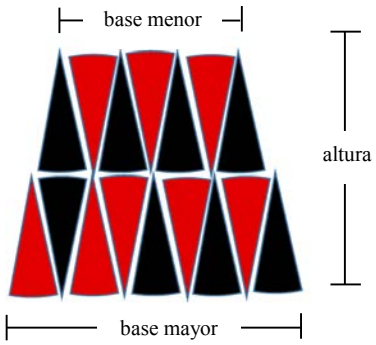


Figura 6. Transformación de un círculo en un triángulo

Transformación de un círculo en un trapecio

Transformado el círculo en rectángulos, romboides y triángulos, es tiempo de dejar volar la imaginación, poner en práctica la creatividad y experimentar con otros tipos de figuras. En la Figura 7 se presenta la transformación del círculo en un trapecio.



Área del trapecio = [(base mayor + base menor) x altura] ÷ 2
= [(5/16 x 2π r + 3/16 x 2π r) x 2r] ÷ 2
= π x radio x radio

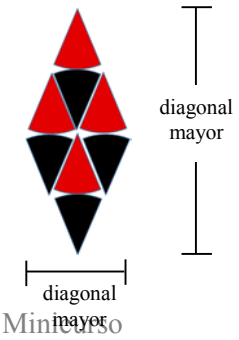
Área del círculo = π x radio x radio
= πr^2

Figura 7. Transformación de un círculo en un trapecio

Este tipo de actividad se puede incluir en el tipo de pensamiento creativo ya que se está tratando de reestructurar una idea en función de una idea ya estructurada, cumpliendo así con las características esenciales de este tipo de pensamiento: fluidez, flexibilidad, originalidad y elaboración.

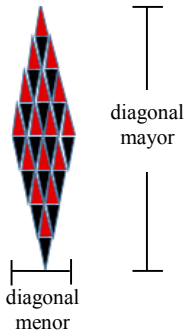
Transformación de un círculo en un rombo

En la Figura 8 se presenta la transformación del círculo en rombos. En el primer caso se considera el círculo dividido en 8 sectores circulares iguales, puede verse claramente que 4 de ellos forman un triángulo isósceles y con los 8 un rombo. En el segundo caso el círculo se dividió en 32 sectores circulares iguales, como en el caso anterior, con la mitad de los sectores circulares se forma un triángulo isósceles que corresponde a la mitad del rombo y con los otros se completa el rombo.



Área del rombo = (diagonal mayor x diagonal menor) ÷ 2
= [4r x (2/8 x 2π r)] ÷ 2
= π x radio x radio

Área del círculo = π x radio x radio
= πr^2



Área del rombo = (diagonal mayor x diagonal menor) ÷ 2
= [8r x (4/32 x 2π r)] ÷ 2
= π x radio x radio

Área del círculo = π x radio x radio
= πr^2

Figura 8. Transformación de un círculo en un rombo

Reflexión final

En las actividades anteriores, el círculo se transformó en varias figuras: romboides, rectángulos, triángulos, trapecios y rombos, todas ellas dieron paso para deducir que la fórmula para el área del círculo es πr^2. Entonces, ¿cuáles de ellas se pueden abordar con los estudiantes de la educación básica que por primera vez se enfrentan a este conocimiento?, ¿cuáles se pueden estudiar con los futuros docentes que forman parte de algún proceso de formación inicial de docentes que tendrán la responsabilidad de hacer que los estudiantes aprendan este conocimiento? Lo importante de esta actividad es ver que hay diferentes estrategias para abordan un mismo contenido y que todas contribuyen a desarrollar el pensamiento y ampliar el conocimiento matemático. Para los estudiantes habrá que utilizar aquellas que conduzcan a satisfacer sus necesidades e intereses de acuerdo a su nivel de pensamiento, actividades que a través del involucramiento en las mismas les permitan convertirse en protagonistas de su propio aprendizaje, disfrutar de las matemáticas y sentir la curiosidad de seguirlas estudiando. Para que esto se vuelva una realidad, los futuros docentes no sólo deben tener un conocimiento profundo de las matemáticas sino que han de poseer un amplio dominio de las técnicas de enseñanza, confiar en el potencial de sus estudiantes y crear un ambiente propicio para la construcción de un aprendizaje interactivo. Las instituciones encargadas de la formación inicial de docentes son las responsables que sus futuros egresados tengan la capacidad de realizar actividades que contribuyan a que los estudiantes desarrollen su pensamiento lógico, logren un dominio de la matemática y se vuelvan el centro de su propio aprendizaje, de esta manera, actividades de este tipo deben estar contempladas en su plan de estudio, pero más que eso, deben realizarse en los salones de clases y servir como punto de partida para la reflexión de la mejora continua de la enseñanza de las matemáticas.

Referencias bibliográficas

Godino, J. D. (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros*. Consultado el 10 de enero de 2015, de http://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/9_didactica_maestros.pdf

Monografía.com. *El pensamiento creativo*. Consultado el 20 de febrero de 2015, http://www.monografias.com/trabajos26/pensamiento-creativo/pensamiento-creativo.shtml#biblio

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática (Resumen Ejecutivo)*. Consultado el 25 de enero de 2015, de http://www.nctm.org/uploadedFiles/Math_Standards/Executive%20Summary%20_Spanish_e-Final.pdf

Proyecto para el Mejoramiento de la Enseñanza Técnica en el Área de Matemática PROMETAM Fase II. (2011). *Guía de Capacitación de Matemática*. Comayagüela. Honduras.

Secretaría de Educación. (2007). *Matemática Cuaderno de Trabajo. 1ro-6to grado*. Tegucigalpa. Honduras.

Secretaría de Educación. (2007). *Matemática: Guía para el Maestro. 1ro-6to grado*. Tegucigalpa. Honduras.

Desarrollo del sentido numérico para la construcción del concepto de número real

Omar **Hernández** Rodríguez
Facultad de Educación, Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras
Puerto Rico
omar.hernandez4@upr.edu
Jorge M. **López** Fernández
Departamento de Matemáticas, Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras
Puerto Rico
jorgemar.lopez@gmail.com
Ana Helvia **Quintero**
Departamento de Matemáticas, Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras
Puerto Rico
aquinter_2000@yahoo.com

Resumen

Desde el surgimiento del concepto de "sentido numérico", hace unos 25 años, los especialistas en educación matemática lo han estado estudiando. Sin embargo, y a pesar de los avances, al día de hoy no existen muchas herramientas eficaces para que los diseñadores de currículo y los maestros de nivel escolar puedan utilizar el sentido numérico para ayudar a sus estudiantes a construir el concepto de número real. En este taller se presenta una propuesta de taxonomía para el "sentido numérico" que permita el desarrollo de trayectorias hipotéticas de aprendizaje (THA) para el concepto de número real y sus múltiples representaciones, especialmente aquellas asociadas a la recta numérica.

Palabras clave: sentido numérico, aprendizaje de los números reales, matemática realista.

Introducción

Los profesores de matemáticas de nivel universitario se quejan de que los estudiantes recién admitidos no tienen las herramientas necesarias para tener éxito en los cursos de primer año.En cuanto a los contenidos, señalan que muchos de sus alumnos tienen dificultades en el conocimiento de los sistemas numéricos, específicamente de su representación en la recta numérica, lo cual dificulta la comprensión de conceptos relacionados al cálculo.

El estudio de los números reales se inicia en la escuela elemental y se espera que esté completado para los primeros grados de escuela intermedia, posiblemente en el grado noveno.La experiencia como formadores de maestros, nos indica que muchos maestros de nivel elemental tienen deficiencias en los contenidos asociados a los números racionales en sus diversas representaciones (fracciones, decimales, porcentajes, entre otras). Estas deficiencias son transmitidas a sus estudiantes quines las van cargando a medida que pasan de grado y generalmente no son atendidas debido a lo cargado del currículo.

En este taller, empezaremos con un recuento histórico del origen del concepto "sentido numérico" que permitirá al lector conocer los primeros desarrollos y el camino que lo ha llevado a lo que es en la actualidad. Posteriormente haremos un análisis de algunas de las múltiples definiciones del sentido numérico que permitirá resaltar las características de los modelos que se deben utilizar para desarrollar el sentido numérico. Luego, propondremos una taxonomía para los modelos de desarrollo del "sentido numérico" que permita construir una definición de sentido numérico en su versión más amplia y a la vez sea útil para la creación de trayectorias hipotéticas de aprendizaje y actividades didácticas.

Finalmente, se presentará una THA que atiende los aspectos epistémicos y cognitivos asociados al conjunto de números reales.En su elaboración, se tuvieron en cuenta los aportes de Hans Freudenthal y de todo el equipo de trabajo que ha venido desarrollando un cuerpo teórico fundamentado en la investigación y que se ha denominado Matemática Realista.Se espera que con esto se que ayude a mitigar los problemas numéricos de los estudiantes al entrar a la universidad.

Antecedentes

El origen de la expresión "sentido numérico" se remonta a los años ochenta del siglo pasado. En esa época, el National Council of Teachers of Mathematics[1] (NCTM) estaba desarrollando los estándares de currículo y evaluación para la educación matemática escolar. Casi simultáneamente, a principios de 1989, la National Science Foundation (NSF) organizó una conferencia sobre "sentido numérico" en el marco de la reunión anual de la American Eduacational Research Association (AERA) en San Diego, California.Uno de los propósitos de la reunión era establecer una definición para este concepto que emergía de las investigaciones sobre la estimación y el cómputo mental desarrolladas en la década de los ochenta.Además, como campo de estudio, se pretendían establecer las preguntas de investigación relacionadas al sentido numérico y los fundamentos teóricos para investigarlo (Sowder&Schapelle, 1989).Como era de esperarse, los participantes[2], reconocidos educadores matemáticos, sicólogos cognitivos y prestigiosos investigadores interesados en el tema, dedicaron gran parte del tiempo a definirlo.

En el proceso de concretizar el concepto de "sentido numérico", los participantes se encontraron limitados por las dificultades impuestas por los supuestos teóricos y las prácticas de la época. La rigurosidad de las especificaciones para la elaboración de las pruebas estandarizadas es un ejemplo de ello.En el informe de la conferencia, los autores reconocieron que les resultó muy difícil definir una competencia matemática que contemplara múltiples facetas, incluso algunas de ellas de tipo intuitivo y que pudiera ser operacionalizada de tal forma que consiguieran ser evaluada por ítems de selección múltiple. Por otra parte, aún a pesar de los avances en cuanto a la representación de los conceptos matemáticos que permitía la teoría del procesamiento de información, resultaba casi imposible precisar representaciones para procesos intuitivos que escapaban del ámbito cognitivo.

Resnick (1989) en su resumen de la conferencia, reconoce la pluralidad del concepto al describir algunas de sus características:"… tiende a ser complejo, no es algorítmico, en su

[1] El NCTM es la asociación más grande de maestros de matemáticas.Fue fundado en 1920 y agrupa principalmente maestros de matemáticas de Estados Unidos y Canadá.

[2] Algunos de los participantes fueron Lauren B. Resnick, Sandra P. Marshall, James G. Greeno, Robbie Case, Robert E. Reys, Harold L. Schoen, Barbara J. Reys, Paul R. Trafton, Zvia Markovits, James Hiebert, Merlyn J. Behr, Thomas Carpenter y Edward A. Silver.

implantación pueden ser utilizados múltiples criterios, está sujeto a interpretaciones y juicios sutiles, está sujeto a la imposición de significado, requiere de la autorregulación del proceso de pensar". Aclara que a pesar de la dificultad de precisarlo, se puede evaluar pero no con los medios disponibles sino con el seguimiento individualizado de los estudiantes.

James Greeno (1991) precisa una definición de "sentido numérico" en el primer artículo publicado sobre el tema en el Journal for Research in Mathematics Education (Greeno, 1991). Las contribuciones más destacadas de la definición de Greeno son, por una parte, el reconocimiento de la necesidad de la construcción de modelos de los objetos numéricos, de sus características y las propiedades de las operaciones que se pueden realizar con ellos, y,por la otra, el establecimiento del sentido numérico como una actividad social determinada por el contexto en el que se desenvuelve el estudiante. Complementando esta visión con la institucionalización de los saberes, se puede reconocer la importancia que cobra el sentido numérico en los distintos ámbitos de formación estudiantil.En esto han sido más protagónicos los investigadores de la educación matemática de escuela elemental, quizá influenciados por la definición de sentido numérico que estableció el NCTM en sus estándares de 1989,en los que se describen cinco componentes: desarrollo del significado de los números, exploración de relaciones numéricas con manipulativos, entendimiento de las relaciones de magnitud de los números, desarrollo intuitivo del efecto de las operaciones en los números y desarrollo de referentes para la medición de objetos y situaciones comunes (NCTM, 1989). Estas competencias generalmente se desarrollan en los primeros niveles de educación y es así como el sentido numérico es asociado principalmente a la escuela elemental. Esta visión es posteriormente refrendada en la definición de sentido numérico en los estándares del 2000: "habilidad para descomponer números naturalmente, uso de números particulares como 100 o ½ como referentes, uso de las relaciones entre las operaciones aritméticas para resolver problemas, entender el sistema numérico de base diez, estimar, tener sentido de los números y reconocer la magnitud relativa de los números" (NCTM, 2000).

Definición de sentido numérico

Es imperativo resaltar el carácter multidimensional del sentido numérico y su importancia para la formación matemática de los estudiantes de todos los niveles.Es posible que la definición de la NCTM haya centrado su atención en actividades que se desarrollan en los grados primarios, sin embargo, son muchos los investigadores que han dado sus definiciones atendiendo la proyección del "sentido numérico" a grados superiores y a otras áreas de las matemáticas.

Un análisis de varias definiciones nos permitió concluir que se distinguen cuatro niveles: conocimiento, aplicación, evaluación e invención (Aguilar, Navarro, Alcalde, & Marchena,2005; Berch, 2005; Bruno Castañeda, 2000; Case, 1998; Ministerio Nacional de Colombia, 1998). En el primer nivel, las acepciones de sentido numérico enfatizan en la importancia de conocer los números, las características de la base diez, sus propiedades, la magnitud relativa de los números, entre otros aspectos característicos de los números. Este conocimiento cobra importancia cuando se le concede un fin utilitario, generalmente para hacer cálculos o resolver problemas, en fin, de la aplicación de los números en diferentes ámbitos. La definición del NCTM indica algunas estrategias que pueden ser efectivas para resolver problemas: utilizar números particulares como referentes,usar las relaciones entre las operaciones aritméticas o establecer la magnitud relativa de los números (NCTM, 2000).

Otros autores le asignan importancia a la capacidad intuitiva de evaluar actividades numéricas como por ejemplo apreciar diversos niveles de exactitud al manejar los números, localizar errores aritmético, producir estimaciones razonables, saber elegir el procedimiento de cálculo más eficiente o reconocer modelos numéricos más sofisticados que otros (Bruno, 2000). En todas estas es evidente la capacidad del estudiante de justipreciar el proceso realizado.

En la serie de lineamientos curriculares del Ministerio Nacional de Colombia se establece que el sentido numérico supone una comprensión profunda del sistema de numeración decimal, no sólo para tener una idea de cantidad, de orden, de magnitud, de aproximación, de estimación y de las relaciones entre ellos, sino además para desarrollar estrategias propias de la resolución de problemas. De esta manera se le asigna importancia al conocimiento declarativo y procesal para establecer nuevos procedimientos que lleven a la solución de los problemas numéricos que se le plantean al estudiante.

Es importante anotar que el sentido numérico requiere de la comprensión de los distintos significados de los objetos numéricos, de las relaciones entre ellos y delas operaciones en diversos contextos.Estos objetos suelen ser sencillos a niveles escolares elementales pero se van volviendo más complejos a medida que se avanza en los contenidos.Por ejemplo, existe una diferencia en complejidad en la modelación de losnúmeros enteros en comparación con los números racionales. Para el desarrollo del pensamiento numérico se requiere del apoyo de sistemas matemáticos más allá de los numéricos como el geométrico, el métrico y el de datos (Ministerio de Educación de Colombia).

Berch (2005), al igual que Greeno, reconoce en su definición de sentido numérico la importancia de usar métodos para comunicar, procesar e interpretar información numérica.En el aspecto didáctico, es indudable el valor del desarrollo de modelos que permitan a los estudiantes transitar por el intrincado camino de los sistemas numéricos.En esto, los investigadores del Instituto Freudenthal han sido muy productivos.

Aportes de la Matemática Realista

Hans Freudenthal (1983) menciona las prácticas “anti-didácticas” de quienes, una vez resuelto un problema matemático, invierten su proceso lógico de solución, convirtiendo definiciones en proposiciones y proposiciones en definiciones, transformando así“la invención cálida de la matemática en una belleza álgida". Esta crítica es cónsona con su *principio de re-invención*, el cual afirma la necesidad del estudiante de *re-inventar* la matemática (con la ayuda de sus maestros) para poder llegar a comprenderla (Freudenthal, 1973). Claro está, es de esperar encontrar dificultades en el aprendizaje cuando se estudian sistemas matemáticos lógico-deductivos en los que se ocultan las motivaciones y las ideas seminales que les dieron origen y que generaron la cognición correspondiente. Freudenthal fue partidario del estudio de la evolución histórica de las estructuras matemáticas con el fin de forjar propuestas didácticas para fortalecer el proceso de re-invención.

En su monumental obra *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures de 1983*, Freudenthal aplica su método fenomenológico a la enseñanza de áreas específicas de la matemática, comenzando con el ejemplo de la fenomenología didáctica de la noción de longitud (la cual, como veremos, lleva al modelo de la recta métrica) e incluyendo áreas matemáticas de estudio como lo son los enteros, las fracciones, las razones y las proporciones, la geometría, el lenguaje algebraico y las funciones. Además, en su obra de 1973, *Mathematics as an Educational Task*, Freudenthal propone fenomenologías didácticas para el estudio del concepto

de número y de áreas matemáticas como los son las de conjuntos y funciones, la geometría, el análisis matemático, la probabilidad, la estadística y la lógica.

En la práctica didáctica, el principio de re-invención se hace realidad mediante el uso de *modelos* que sirven para incorporar los procesos en la estructura mental de la persona que construye el conocimiento matemático y que constituyen el objeto de estudio. Los modelos son representaciones de las situaciones en donde se reflejan aspectos esenciales de los conceptos, relaciones y procesos matemáticos.Además,ayudan a constituir las ideas integradoras de la matemática que sirven de vehículo para entender la abstracción. Nos apresuramos a apuntar que los modelos que se emplean para representar tales procesos en la matemática y en su didáctica tienen que estar necesariamente atemperados a las ventajas didácticas que puedan significar para el desarrollo de los conceptos, relaciones o procesos en las etapas de desarrollo matemático del estudiante.

También, es menester señalar la importancia de la semiótica en el estudio del desarrollo de los símbolos matemáticos que representan los procesos y los significados característicos del pensar matemático. Por consiguiente los modelos que consolidan el conocimiento matemático tienen ventajas didácticas variables de acuerdo a la etapa cognoscitiva del aprendizaje matemático del estudiante. Así como algunas etapas del desarrollo matemático surgieron en momentos relativamente tardíos del desarrollo del conocimiento matemático, así también las ideas integradoras de la didáctica de la matemática se deben utilizar de acuerdo al nivel de desarrollo cognoscitivo del estudiante y con atención a las ventajas didácticas que tales modelos pudieran suponer en el contexto del desarrollo matemático del alumno.

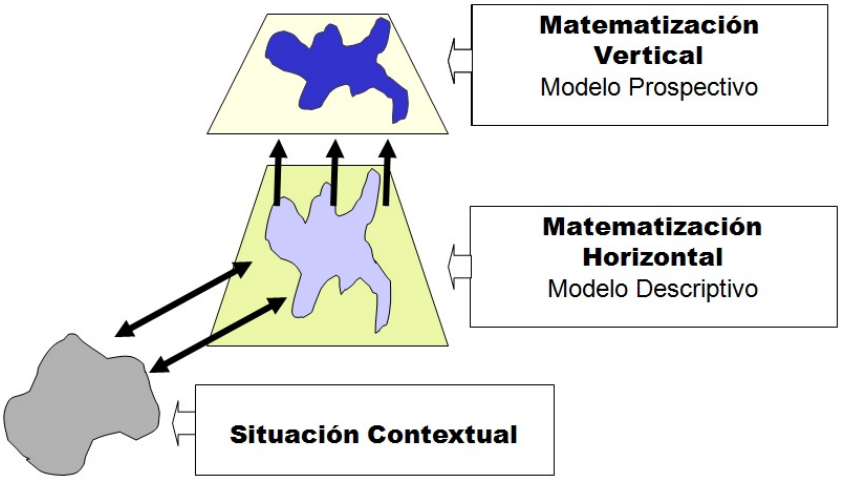


Figura 1. Matematización horizontal y vertical.

En la Figura 1 hemos representado un esquemático que ilustra el funcionamiento de los modelos en la educación matemática. Típicamente, el estudiante es expuesto a un problema matemático de tipo contextual, es decir, un problema que surge de los contextos que le son accesibles. Luego, se vale de un modelo, de su propia producción o de producción en grupos de cooperación con otros estudiantes y el maestro. En el diagrama, a este primer modelo se ha llamado *modelo descriptivo*, ya que su propósito es facilitar la comprensión de la situación propuesta. En esta etapa, el modelo no es sino un elemento simplificador para manejar mejor los datos y las operaciones del problema propuesto. Sin embargo, el análisis del modelo propiamente dicho, con frecuencia, sugiere alternativas de exploración que terminan convirtiéndose en

conocimiento matemático nuevo. Este proceso de generación de un *modelo prospectivo* se conoce como el proceso de matematización vertical. El modelo prospectivo sugiere problemas nuevos y, por ende, conocimiento nuevo.

Propuesta de una taxonomía para el sentido numérico

En el diccionario de la Real Academia Española aparece definida la palabra taxonomía como la ciencia que trata de los principios, métodos y fines de la clasificación o sencillamente la acción o el efecto de clasificar (DRAE, 2001).Una taxonomía es una regla de ordenamiento o una clasificación. En esta sección proponemos una clasificación de los temas del currículo matemático cuyo estudio da origen al tipo de conocimiento matemático que se toma como evidencia del sentido numérico. Como ocurre con todas las taxonomías, la organización temática implícita en nuestra propuesta facilita la organización de una discusión coherente sobre lo que constituyen las evidencias que dan fe del desarrollo de las acciones que se toman como indicativas de eso que se describe como "sentido numérico". En nuestro caso, como se verá, se propone una taxonomía que contiene un ordenamiento específico sobre la naturaleza del estudio de los números y sus operaciones en la matemática escolar. Proponemos, así, una taxonomía que clasifica los procesos matemáticos que tomamos como indicadores del sentido numérico de acuerdo a si tales procesos se refieren a:

1. las propiedades algebraicas de los sistemas numéricos;
2. las propiedades geométricas de los sistemas numéricos que se emplean para medir, y las propiedades geométricas del plano que sirven para describir relaciones numéricas que involucran relaciones, funciones y gráficas en general;
3. las propiedades de los números que se relacionan a la forma en que uno los cuenta y los clasifica (aspectos ``combinatorios''), y
4. a los aspectos formales asociados a la manera en que escribimos y empleamos protocolos para designar y dar nombres y representaciones a los números.

Desde luego, lo más que interesa en nuestra discusión no es la taxonomía propiamente dicha, sino, más bien, los procesos cognitivos que se generan en torno a ella y que se toman como evidencia fehaciente de eso que constituye el sentido numérico. La identificación de tales procesos es, a fin de cuentas, lo más importante para identificar formas de medir el sentido numérico ya que supone la identificación de los procesos matemáticos que se asocian a la comprensión de los números y sus aplicaciones. Veremos múltiples ejemplos de cómo la taxonomía propuesta sirve de marco para la discusión de los procesos matemáticos que asociamos al sentido numérico. Por ejemplo, la habilidad de un estudiante para la estimación de los resultados que se obtienen de la ejecución de varias operaciones numéricas sin necesidad de realizarlas en detalle se toma como indicativo de la adquisición de niveles significativos de su sentido numérico. Sin embargo, la "estimación" no figura como elemento de la taxonomía propuesta, ya que depende de la comprensión que se tenga de relaciones entre los números que pertenecen a categorías específicas del estudio de los números que se formulan explícitamente en nuestra taxonomía, en este caso, a la representación decimal de los números y a la estimación de tales números a base de sus dígitos decimales. Así pues, la taxonomía sobre sentido numérico propuesta en este escrito no es ni más ni menos que un marco de referencia conveniente para organizar la discusión de los procesos matemáticos que pasan a constituir el acervo de conocimiento que se describe mediante la frase "sentido numérico".

Para atender los asuntos sociales y culturales, reconocemos que el maestro debe estar muy atento al conocimiento que traen a la escuela los niñosdesde su casa y que muestra el influjo social en la construcción del conocimiento. Godino y sus colaboradores lo denominan sistema de prácticas operativas y discursivas, concepto que trata de describir el conocimiento informal que posee el estudiante y que demuestra a través de sus acciones y del lenguaje que utiliza para comunicar sus nociones rudimentarias de los números (Godino, Font, Wilelmi, & Arreche, 2009). Aprovechando ese bagaje cultural asociado a los números, el maestro debe continuar presentando actividades que ayuden al estudiante a construir el conocimiento matemático que ciertamente se inicia con la sucesión de contar, la cual los niños traen a la escuela de sus hogares. De esta sucesión de enteros surgen las operaciones numéricas como estrategias de contar.

A continuación, presentamos una taxonomía sobre los aspectos que, a nuestro juicio, se deben considerar en la definición y la medición del sentido numérico. Esta taxonomía puede ser útil, por una parte, para comprender el conjunto de números reales y, por la otra, para elaborar trayectorias de aprendizaje y actividades didácticas que capitalicen de las descripciones de las características utilizadas para elaborar la clasificación que se propone .En su elaboración, se tuvieron en cuenta los aportes de Hans Freudenthal y todo el equipo de trabajo que ha venido desarrollando un cuerpo teórico fundamentado en la investigación y que se ha denominado Matemáticas Realista.

1. Razonamiento algebraico en los sistemas numéricos
   a. Nociones informales de los números: sucesión de contar, números de referencia, la "numerosidad" (o la cardinalidad) de colecciones de objetos, los números para medir
   b. Rectas vacías en la resolución de problemas aritméticos
   c. Transición de la aritmética al álgebra
   d. Estrategias de contar como antesala de principios algebraicos
   e. Transición de la observación de patrones a fórmulas y ecuaciones
   f. Álgebra del nivel intermedio y superior
2. Razonamiento geométrico en los sistemas numéricos
   a. Primera parte: geometría de la recta numérica
      i. Geometría implícita en el ordenamiento y la distancia de la recta numérica
      ii. Razonamiento proporcional
         1. Tablas de proporciones
         2. Por cientos
         3. Decimales
         4. Fracciones
         5. Rectas dobles
      iii. Representación decimal de los números reales
         1. Ubicación de los números en la recta numérica
         2. Densidad de los decimales en la recta
         3. Densidad de los números racionales en la recta
         4. Números irracionales
   b. Segunda parte: la geometría del plano
      i. Razonamiento variacional
         1. Relaciones, funciones y gráficas
         2. Gráficas para la representación de relaciones numéricas
         3. Traslaciones, contracciones, periodicidad y simetrías de gráficas
         3. Razonamiento combinatorio

4. Razonamiento numérico formal
   i. Convenciones sobre las representaciones numéricas: notación decimal
   ii. La asignación de nombres a los números
   iii. La idea de cardinalidad y la insuficiencia de los alfabetos finitos para la designación de los números

Modelos para la construcción del concepto de número real

Un componente importante de esta estructura conceptual de número real es la línea recta vacía, que utilizada apropiadamente puede ayudar a comprender la magnitud de los números y a desarrollar estrategias para el cómputo de las operaciones.La recta vacía se va desarrollando desde una sarta de cuentas, pasando por una recta algebraica que permite desarrollar estrategias de contar y hacer operaciones, para convertirse en una recta métrica que permite establecer otras propiedades de los números y que también permite comprender propiedades de los intervalos de números para afianzar propiedades de orden y de densidad de los números.Posteriormente, los modelos de recta se convierten en rectas dobles que permitirá el desarrollo del pensamiento proporcional y el estudio de los decimales y los porcentajes.

A continuación se presenta una serie de modelos que van ilustrando una posible THA para el desarrollo del concepto de número real.

Figura 2. Primeros pasos en el desarrollo del sentido numérico: sarta de cuentas.

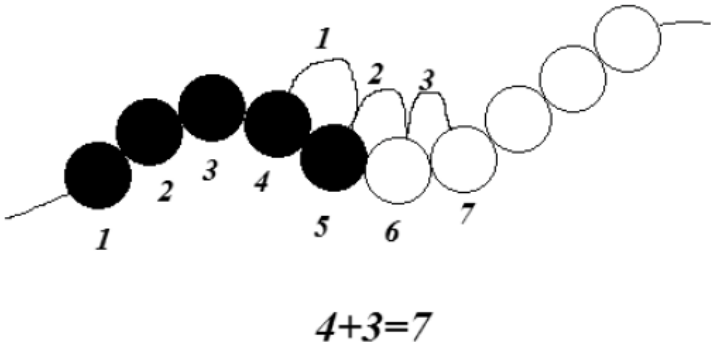


Figura 3. Uso de la sarta de cuentas para sumar.

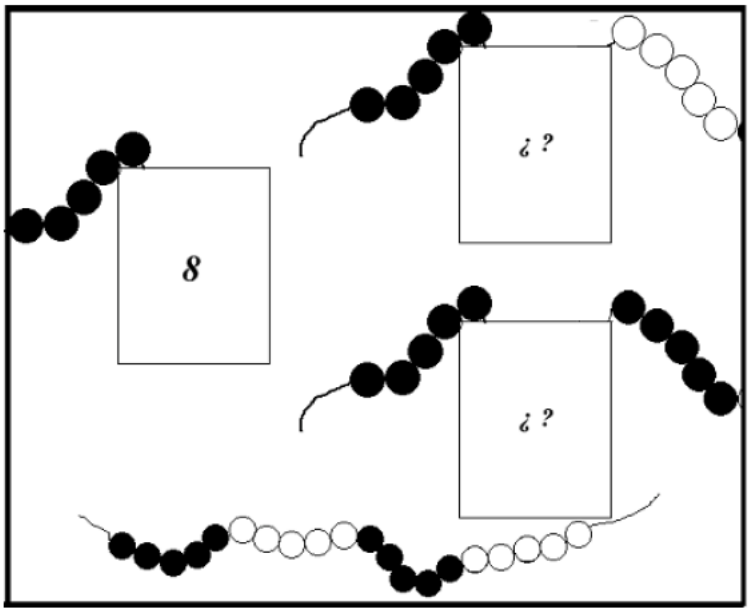


Figura 4. Desarrollo de la intuición con sarta de cuentas.

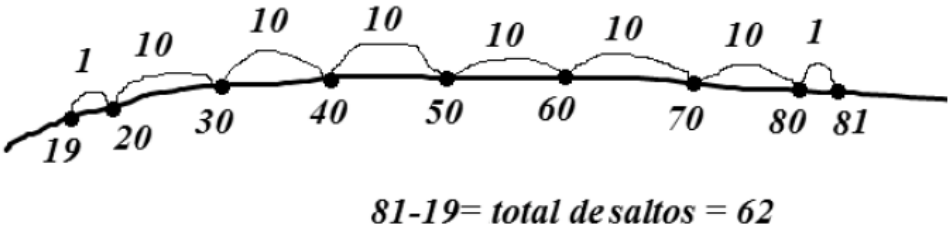


Figura 5. Saltos en la recta vacía para resolver problemas de substracción.

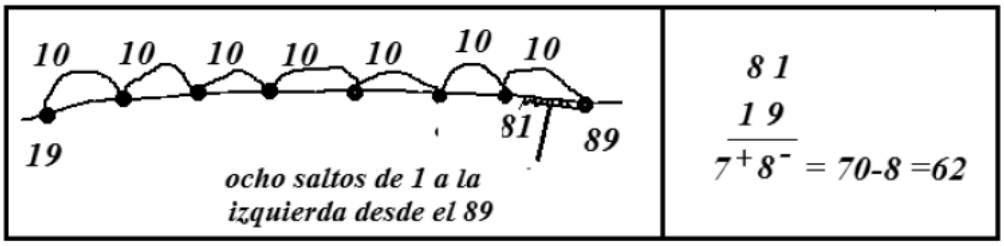


Figura 6. Saltos en la recta y un nuevo algoritmo para la substracción.

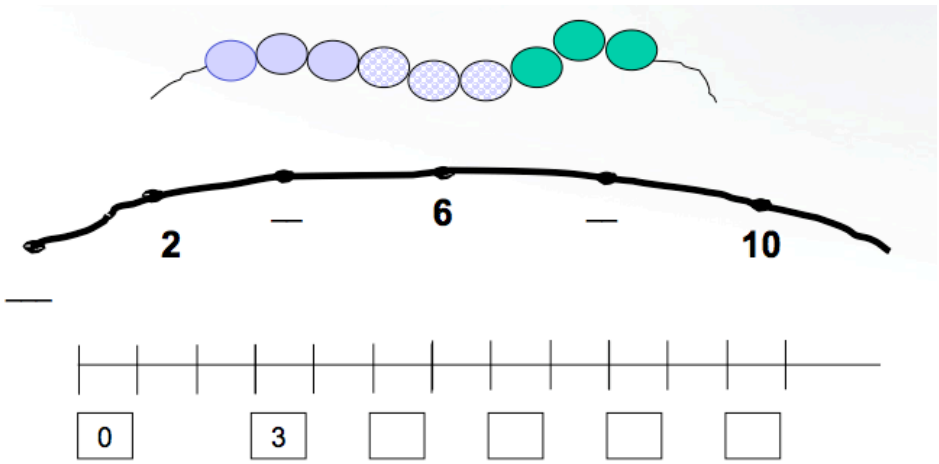


Figura 7. Sartas de cuentas y la recta métrica.

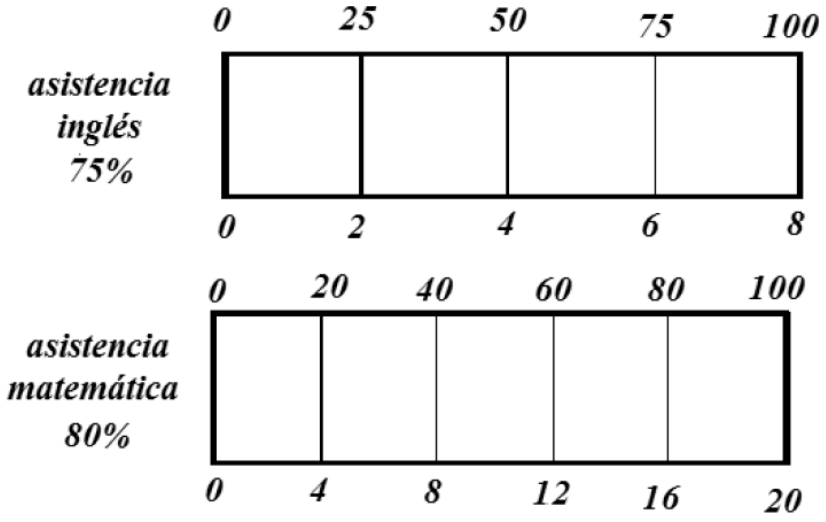


Figura 8. Rectas dobles para resolver problemas de porcentajes.

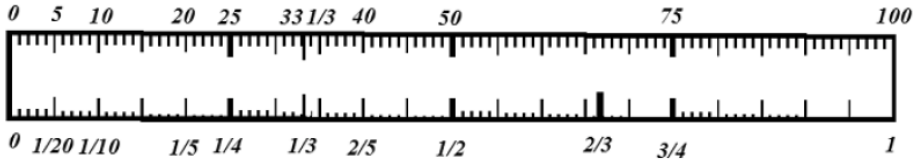


Figura 9. Rectas dobles para modelar la relación entre porcentajes y fracciones.

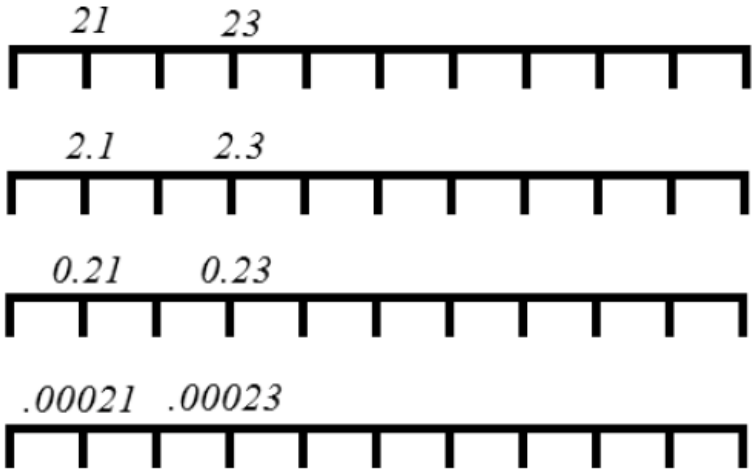


Figura 10. Uso de escalas para modelas la densidad de los números decimales.

Una vez el estudiante pueda ubicar un número decimal en la recta numérica, esté familiarizado con el orden de los números decimales, pueda convertir una fracción en decimal[3], y se convenza de la posibilidad de la existencia de otro tipo de números que admiten expansiones decimales infinitas no periódicas, está cerca de comprender los números reales. Claro está que llenar ese vacío es un poco complicado porque hace falta la propiedad de completitud.Propondremos que la propiedad de completitud de los números reales es equivalente a indicar que toda expansión decimal (finita o infinita) representa, en efecto, un número real.Sin embargo, para hacer la demostración se necesita el concepto de límite, que no es central en la mayoría de currículos escolares, lo cual impide que se formalice el concepto de número real en este nivel.

Presentamos a continuación una alternativa que permite que los estudiantes de nivel escolar se familiaricen con las ideas matemáticas que son necesarias para completar el concepto de número real.Supondremos que los números reales satisfacen todas las propiedades algebraicas de los números racionales y que también satisfacen las siguientes dos propiedades adicionales[4]:

Propiedad Arquimediana: Para todo número real$x$, si $|x| \leq 1/10^n$para todo entero$n \geq 1$, entonces $x = 0$.

Principio de Completitud: Para todo número real $x \geq 0$ existe un entero $N \geq 0$ y una sucesión de dígitos (es decir, números del 0al 9, ambos inclusive) $d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots$, tal que, para cada entero$n \geq 1$,

[3]El algoritmo que generalmente se discute en la escuela es el de división larga y con esto el estudiante se convence que toda fracción se puede escribir como un decimal finito o infinito periódico.

[4]La forma clásica de enunciar estas propiedades son las siguientes. Para la Propiedad Arquimediana: Si a, b son números reales con $a > 0$, entonces, existe un entero n, tal que, $na > b$. Para el Principio de Completitud: Todo conjunto no vacío de números reales acotado superiormente, tiene una cota superior mínima. Claro, estas aseveraciones son equivalentes a las nuestras. Los números racionales satisfacen el Propiedad Arquimediana pero no el Principio de completitud. Nuestras aseveraciones se dan en el marco de un cuerpo ordenado.

(1) y$N + \frac{d_1}{10} + \cdots + \frac{d_n}{10^n} \leq x \leq N + \frac{d_1}{10} + \cdots \frac{d_n}{10^1} + \frac{1}{10^n}$

En este caso decimos que $N{+}.\, d_1 d_2 \ldots d_n \ldots$ es una *representación decimal* del número real x. Decimos, además, que esta representación decimal es *finita* si para algún índice n_0, tenemos$d_k = 0$, para todo$k \geq n_0$, es decir, si la expansión sólo tiene un número finito de dígitos distintos de cero. Si una representación decimal de un número real no es finita, decimos que es *infinita*. Esto último, significa que para todo índice n, existe algún índice k, tal que, $k > n$ y$d_k \neq 0$.

Observamos de inmediato que si x, y son dos números reales no negativos con la misma expansión decimal, $N{+}.\, d_1 d_2 \ldots d_n \ldots$, entonces la relación (1) dice que los números x y $y$pertenecen ambos al intervalo definido por los extremos de la desigualdad y, por tanto, la distancia entre x y y no es mayor que la longitud de tal intervalo, es decir,$|x - y| < 1/10^n$. Como esto es válido para todo entero positivo$n$, por la Propiedad Arquimediana, tenemos que $|x - y| = 0$, es decir, $x = y$.

Por otro lado, hay números reales que tienen más de una expansión decimal. En efecto si$x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$son dígitos con $x_{n_0} \neq 0$ y $x = N + x_1/10 + \cdots + x_{n_0}/10^n$, entonces, se puede demostrar que $x$también tiene la expansión decimal $x = N + y_1/10 + \cdots + y_{n_0}/10^n$ ...donde $y_k = x_k$ para $1 \leq k \leq n_0 - 1$, $y_{n_0} = x_{n_0} - 1$y$y_k = 9$para todo $K > n_0$.Esto sigue directamente de la relación (1) para N y los dígitos y_k recién definidos. El lector interesado puede verificar que si$x = 1$, entonces, $N = 1$y $d_n = 0$ para todo $n \geq 1$es una expansión decimal de 1ya que satisface (1). De igual forma, la expansión $N = 0$ y $d_n = 9$, para todo$n \geq 1$, también satisface (1). En efecto, se puede demostrar que un número real puede tener, a lo sumo, dos expansiones decimales distintas[5], las cuales son, típicamente, muy parecidas a las de los ejemplos que hemos dado. Otros ejemplos son 2.34211 y $2.34210\overline{9}$ o 0.03 y $0.02\overline{9}$, etc. En efecto, los únicos números reales que pueden tener dos representaciones decimales distintas son las llamadas fracciones decimales, es decir, los números reales de la forma$N + d_1/10 + \cdots + d_n/10^n$para algún entero $N \geq 0$y algún entero $n \geq 1$.

De la relación (1) se aprecia que hay un límite implícito en las aproximaciones decimales de los números reales cuando éstas son infinitas. En efecto, si es un número real con expansión decimal infinita $N{+}.\, d_1 d_2 \ldots d_n \ldots$entonces para cada$n \geq 1$, existe algún número real $\theta_n$con$0 \leq \theta_n \leq 1$, tal que$N + d_1/10 + \cdots + d_n/10^n + \theta_n/10^n$y tenemos

$$x = \lim_{n\to\infty} \left(N{+}.\, d_1 d_2 \ldots d_n + \frac{\theta_n}{10^n} \right)$$

(2)$= \lim_{n\to\infty} (N{+}.\, d_1 d_2 \ldots d_n)$

ya que, $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{\theta_n}{10^n}\right) = 0$. La relación (2) dice que todos los números reales son límites de decimales finitos o límites de fracciones.

[5]Si en (1) se toma la desigualdad de la derecha como estricta, entonces, de acuerdo a la definición que resulta, no habría decimales infinitos que terminen con un número infinito de nueves, ya que tales expansiones no satisfacen la versión revisada propuesta del Principio de Completitud.

Referencias

Aguilar, M., Navarro, J. I., Alcalde, C., & Marchena, E. (2005). El constructo "conciencia numérica". Su importancia en la detección y prevención de las dificultades de aprendizaje de las matemáticas. *Tavira: Revista de Ciencias de la Educación, 21*, 55-78.

Berch, D. B. (2005). Making sense of number sense: Implications for children with mathematical disabilities. *Journal of Learning Disabilities, 38*(4), 333-345. doi: 10.1177/00222194050380040901.

Bruno Castañeda, A. (2000). Sentido numérico. *Números 43-44*, 267-270.

Case, R. (1998). *A psychological model of number sense and its development*. Paper presented at the annual meeting of the American Educational Research Association, San Diego

Gersten, R., & Chard, D. (1999). Number sense: Rethinking arithmetic instruction for students with mathematical disabilities. *Journal of Special Education, 33*(1), 18-28.

Greeno, J. G. (1991). Number sense as situated knowing in a conceptual domain. *Journal for Research in Mathematics Education 22*(3), 170-218.

Ministerior Nacional de Colombia. (1998). *Serie lineamientos curriculares*. Bogotá, D.C., Colombia: Autor.

Resnick, L. B. (1989). Defining, Assessing, and Teaching Number Sense. In J. T. Sowder & B. P. Schapelle (Eds.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a Conference* (pp. 35-39). ERIC document ED317413.

Sowder, J. T., &Schapelle, B. P. (1989). *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a Conference*. ERIC documentED317413.

Desenvolvimento do conceito de equação a partir da exploração do princípio da alavanca em balança de pratos

Eduardo **Sarquis** Soares
Universidade Federal de São João Del Rei-Alto Paraopeba
Brasil
esarquis@gmail.com
Grace Marisa Miranda **de Paula**
Rede Municipal de Ensino de Ouro Branco
Brasil
gracemarisa40@gmail.com

Resumo

A relevância de se aprender significado das equações é amplamente reconhecida e, no entanto, o tratamento desse conceito desafia os professores do ensino fundamental devido à sua inerente complexidade e correlatas capacidades cognitivas exigidas dos alunos. Algumas pesquisas sobre o assunto fornecem indicadores daquilo que se pode esperar dos aprendizes; outras identificam estratégias adotadas por professores no esforço de trabalhar o conceito. Nesta oficina, desenvolvemos uma proposta original de abordagem das equações a partir da exploração do princípio da alavanca associado à balança de pratos. Nos trabalhos práticos, os participantes poderão verificar como a proposta é apresentada aos estudantes. Serão exibidos episódios de um experimento registrado em vídeo com alunos do ensino fundamental. Os participantes serão convidados a analisar coletivamente tais episódios e avaliar eventuais avanços e questões associados à proposta didática apresentada.

Palavras chave: álgebra, ensino de equações, formação de professores, balança de pratos e equações.

Questões associadas ao ensino de equações

A proposta desta oficina foi formulada a partir de um trabalho de pesquisa que envolve professores do ensino fundamental do município de Ouro Branco, MG, Brasil. Esse grupo vem estudando e experimentando metodologias para o ensino de ciências e matemática com o intuito de obter um aprimoramento de seu trabalho. O grupo, composto por quatro profissionais, reúne-se semanalmente e desenvolve planejamentos conforme as necessidades apresentadas por cada participante. As aulas são compartilhadas por dois ou mais professores e são registradas em vídeo para posteriores análises. Aqui será apresentada uma análise sucinta de questões relativas ao ensino de equações e, posteriormente, será discutida uma metodologia proposta pelo grupo e já experimentada em duas ocasiões, uma em 2013 e outra em 2014, ambas envolvendo, de cada vez, uma turma de estudantes do sétimo ano do ensino fundamental.

Pode-se observar, em artigos separados no tempo, um certo consenso entre os pesquisadores quando reconhecem a necessidade de se compreender as equações para o desenvolvimento

da aprendizagem da álgebra em geral (confere, por exemplo, Steinberg, Sleeman e Ktorza, 1990; MacGregor & Stacey, 1997; Huntley et al., 2007, Rittle-Johson et al., 2011, Andrews & Sayers, 2012). Todavia, a tarefa de ensinar equações, ou prover acesso aos fundamentos da álgebra, apresenta uma série de desafios e requer o desenvolvimento de competências específicas por parte dos professores. Importa que, durante o planejamento da ação didática, sejam levados em conta, por exemplo, aspectos do desenvolvimento cognitivo dos alunos e o que se pode esperar deles tendo-se em mente sua faixa etária e desenvolvimentos curriculares anteriores.

Importa também que o meio cultural de origem dos alunos seja considerado no planejamento, uma vez que, para alguns, a associação de imagens abstratas a expressões algébricas pode ser bem mais fácil do que para outros. Em alguns casos, por exemplo, a imagem de uma balança de pratos pode ser facilmente evocada com o objetivo de se compreender como o sinal de igualdade pode estar associado ao equilíbrio da balança. Acréscimos ou retiradas de pesos de um prato têm de ser compensados por acréscimos ou retiradas iguais do outro prato. Andrews & Sayers (2012), por exemplo, conduzem um estudo no qual acompanham três professores de países diferentes enquanto ensinam as primeiras lições sobre equações: na Finlândia, na Bélgica e na Hungria. Em todos esses casos, faz-se menção explícita à metáfora da balança e em nenhum deles a balança como objeto manipulável entra em cena.

Aqueles autores não discutem efeitos, nos alunos, associados à evocação da imagem da balança. No entanto, é preciso questionar a efetividade da utilização de tal imagem especialmente quando a cultura de origem dos alunos tende a facilitar a aprendizagem pela manipulação de objetos. É esse nosso caso, uma vez que desenvolvemos trabalhos com alunos oriundos de populações de camadas socialmente desfavorecidas. O grupo de professores foi unânime em reconhecer a necessidade de se proporcionar aos alunos oportunidades de manipulação de objetos nas aulas de matemática. No trabalho com equações, considerou-se que a evocação da balança como simples imagem não seria produtiva. Tal percepção advém da prática profissional. A título de exemplo, a professora que conduziu o trabalho sobre equações relatou que, ao falar para seus alunos do oitavo ano do ensino fundamental sobre semelhanças entre manipulações nas equações e tratamento de pesos em balança de pratos, nenhum deles soube reconhecer a que a professora estava se referindo. Contudo, a imagem da balança havia sido evocada no ano anterior como parte da abordagem sobre equações nas aulas de matemática.

A partir desse posicionamento dos professores, constatou-se a necessidade de se experimentar metodicamente uma atividade com a balança de pratos associada ao ensino de equações e verificar o que poderia ser obtido a partir dessa atividade. Mais adiante serão apresentados e comentados alguns tópicos do experimento realizado. Antes porém serão mencionados aspectos do desenvolvimento cognitivo dos sujeitos enquanto aprendem o conceito de equação, como podem ser encontrados na literatura acadêmica.

Desafios cognitivos para aquisição do conceito de equação

Basicamente são de quatro ordens os desafios cognitivos que precisam ser superados para uma compreensão mais profunda do conceito de equação (Andrews & Sayers, 2012): expandir o significado do sinal de igualdade, distinguir equações aritméticas de equações algébricas, associar equações à modelagem de problemas com enredo e dominar maneiras de conferir resultados obtidos.

Em fases preliminares da aprendizagem, o sinal de igualdade tende a ser interpretado com o mesmo significado que lhe é atribuído na execução de operações, ou seja, como uma indicação

para que se realize a operação que se encontra à esquerda. Warren & Cooper (2005) indicam quatro interpretações usuais: o sinal de igualdade como resultado de uma operação, como indicação de igualdade entre quantidades (5-1 = 7-3), como afirmação de que algo é verdadeiro para todos valores de uma ou mais variáveis (x + y = y + x) e como a afirmativa que associa um valor a uma nova variável (a + b = c). Parece razoável, então, aceitar a ideia de que essa diversidade de significados para o mesmo sinal seja conquistada gradativamente pelos aprendizes.

Equações aritméticas são aquelas em que o número desconhecido (a variável) aparece em apenas um lado da igualdade. Nesse caso, operações realizadas apenas com números permitem que se descubra o valor da variável. Nas equações algébricas, a variável aparece em ambos os lados da igualdade. Isso exige que se manipule a variável para que a solução seja encontrada. A variável tem de ser reconhecida pelos aprendizes como uma entidade matemática, o que constitui uma exigência de desenvolvimento cognitivo. Pesquisadores debatem dificuldades encontradas na compreensão de equações algébricas: tais dificuldades deveriam ser interpretadas como sinais de obstáculos cognitivos (posição prevalecente, adotada por Christou & Vosniadou, 2012, por exemplo) ou surgiriam devido a lacunas no próprio ensino oferecido pelos professores (posição de Filloy & Rojano, 1989).

A aprendizagem de equações supõe dois aspectos interdependentes – a manipulação de símbolos e a atribuição de significados a esses símbolos. Os significados dependem de associações entre situações contextualizadas e a representação matemática de problemas associados a essas situações. Assim, a modelagem de um problema requer que o aprendiz compreenda como símbolos algébricos representam elementos constituintes desse problema e podem conduzir à sua solução. A solução, por seu lado, depende da manipulação adequada dos símbolos; daí a interdependência dos dois aspectos.

Quanto à conferência de resultados obtidos, ao mesmo tempo em que é reconhecidamente necessária, os pesquisadores, de uma maneira geral, constatam uma grande dificuldade em estimular os estudantes a adquirirem essa prática (Andrews & Sayers, 2012, p. 478).

A metodologia desenvolvida para a apresentação do conceito de equação levou em conta os desafios acima apresentados e será apresentada em seguir.

Princípio da alavanca, balança de pratos e desenvolvimento de registros

Prós e contras a utilização da balança de pratos no ensino inicial de equações são discutidos na literatura acadêmica (confere em Andrews & Sayers, 2012, p.479). Há os que defendem a balança como metáfora bastante próxima das equações, dada a necessidade de equilíbrio entre os dois pratos, os quais representariam os dois lados da equação. Há também os que criticam a utilização desse recurso sob alegação de que balanças de prato não são mais parte do cotidiano dos alunos, hoje mais acostumados com balanças eletrônicas. Alega-se, também, que as balanças de pratos não permitem investigações sobre números negativos. Há que se considerar ainda que, como foi mencionado acima no depoimento da professora, se há a pretensão de que os alunos associem a ideia da manipulação das equações com a imagem da obtenção do equilíbrio em balanças de prato, essa associação pode facilmente se perder na memória, especialmente quando as balanças aparecem apenas virtualmente.

O grupo de trabalho que experimentou a utilização da balança como recurso tomou como princípio a necessidade de se levar balanças reais para a sala de aula em vez de apenas se fazer

menções a elas. Além disso, decidiu-se pela construção de uma balança com 4 ganchos para fixação de pesos de cada lado da haste. Foram produzidos conjuntos de 16 pesos de madeira. O nome mais adequado seria "massas de madeira", porém usualmente usa-se o termo "peso" quando seria mais correto usar o termo "massa". Cada grupo recebeu, além de uma balança, um conjunto de pesos em 4 tamanhos diferentes, correspondentes a 4 massas com quantidades proporcionais a 1, 2, 3 e 4 (Figura 1 e detalhes da construção no anexo 1).

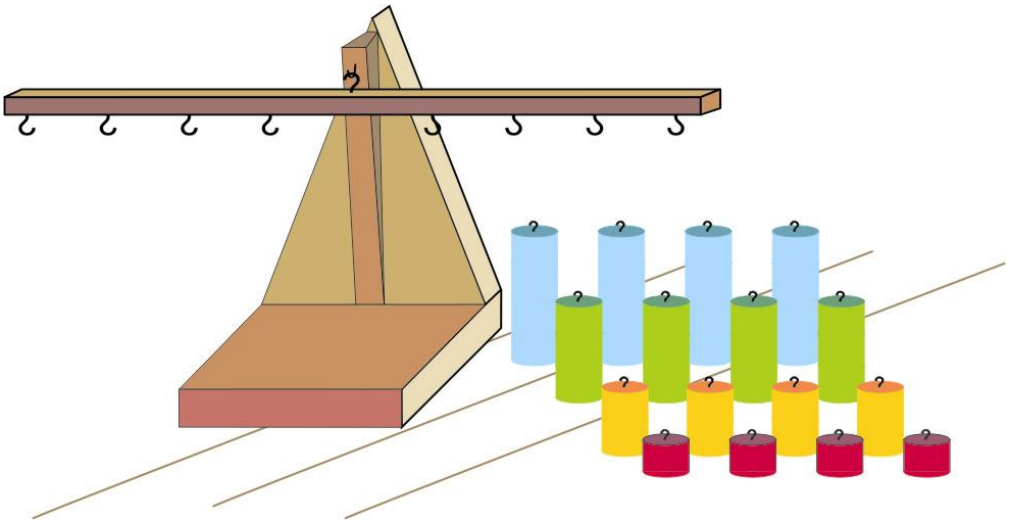


Figura 1. A balança e os pesos.

Os ganchos foram fixados em distâncias ao centro da haste proporcionais a 1, 2, 3 e 4. Com isso, ampliaram-se as possibilidades de utilização da balança como recurso. Nas balanças convencionais, o equilíbrio é afetado apenas a partir das massas depositadas em cada prato. Nessa outra balança, duas grandezas passam a influenciar o equilíbrio: o peso e a posição na qual ele é aplicado. Então, considerando como A e B os lados da haste, "p" como peso e "d" como a distância do ponto de aplicação do peso ao centro da haste, o equilíbrio acontece quando o somatório da multiplicação p x d todos os pesos afixados no lado A é igual ao mesmo somatório aplicado no lado B. Isso decorre da aplicação direta do princípio da alavanca: a tendência à rotação da haste em qualquer sentido (que poderíamos associar ao conceito de torque) é controlada pela aplicação das forças (pesos) e a ação de cada força depende da distância entre seu ponto de aplicação e o ponto de apoio da haste.

Não é necessário que os alunos compreendam os fundamentos físicos que subjazem a situação de equilíbrio à balança. Devidamente guiados pela professora, eles são capazes de verificar experimentalmente que a condição de equilíbrio não depende somente da colocação de pesos em cada lado da haste, mas que também o gancho no qual se dependura o peso tem influência nesse equilíbrio. A atividade com alunos supõe, portanto, a produção de desafios com o objetivo de fazê-los compreender essa dupla dependência para estabelecimento da condição de equilíbrio. É possível, por exemplo, lançar desafios como: equilibrar o peso 1 de um lado da haste com o peso 4 do outro lado da haste. Ainda que seja por meio de uma série de tentativas, os alunos acabam verificando que o equilíbrio se estabelece quando o peso 1 é aplicado à posição 4 e, inversamente, o peso 4 é aplicado à posição 1 do outro lado da haste (Figura 2).

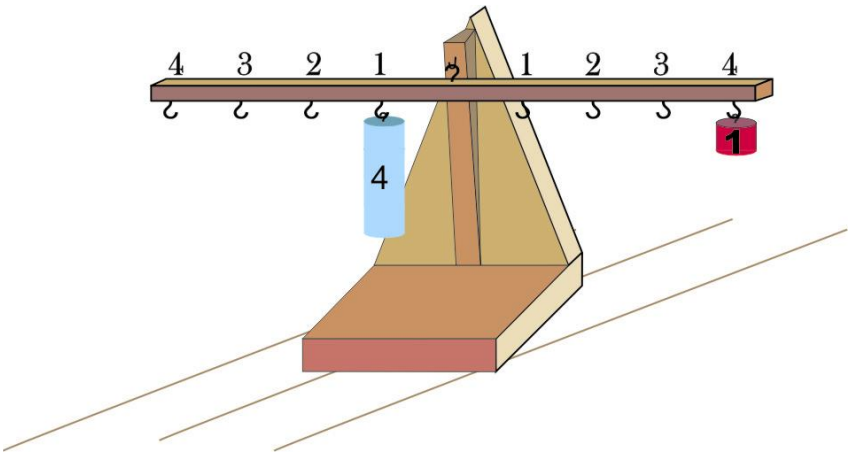


Figura 2. O princípio da alavanca verificado de maneira prática.

A condição de equilíbrio formalmente expressa pode ser ensinada pela professora no momento em que ela considerar apropriado. Qualquer situação obtida na balança pode ser expressa por meio de um desenho no qual as quadrículas representam as posições nas quais os pesos são colocados e os números representam os pesos colocados nessas posições. Uma barra colocada entre as quadrículas representa a separação da haste em dois braços (figura 3).

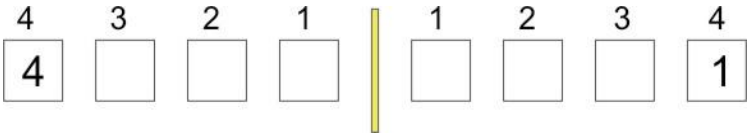


Figura 3. Representação de uma situação de equilíbrio na balança.

Essa representação pode evoluir para desafios, nos quais o aluno deve encontrar o valor de um peso desconhecido, como na figura 4.

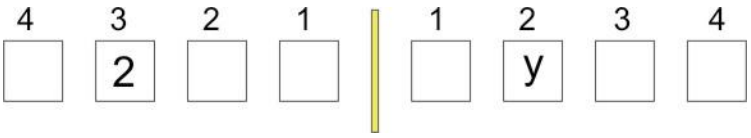


Figura 4. Representação de um desafio.

Os desafios vão evoluindo com graus de dificuldade cada vez maiores. Podem ser apresentadas condições nas quais valores inteiros não permitem obter o equilíbrio, o que conduz à solução por decimais. A representação da balança pode se ampliar, aumentando-se o número de quadrículas de cada lado, agora representando balanças que teriam mais de 4 ganchos. Uma outra evolução no grau de dificuldade consiste em se produzir desafios com variáveis em ambos os lados da representação da haste. Todos esses desafios abrem espaço para que se apresentem aos alunos oportunidades de aprender como resolver equações aritméticas bem como equações algébricas. Em determinado momento, essa representação vai sendo substituída pela representação algébrica convencional. Um caso particularmente interessante corresponde à introdução de números negativos em desafios como este representado na figura 5.

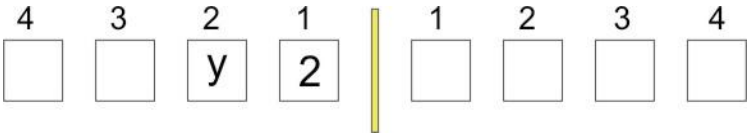


Figura 5. Introdução do número negativo em um desafio.

Em um caso como esse evidencia-se o fato de que nenhum peso até então conhecido, mesmo que repartido em partes menores, pode resolver o desafio. No entanto, é possível discutir duas soluções. A primeira, mais fácil de ser visualizada corresponde à ideia de se imaginar que peso poderia ser colocado na posição 2 do lado direito da balança e que produziria o equilíbrio. Então, o sinal negativo ganha um significado: ele indica que o número a ser substituído pela letra "y" provocaria o equilíbrio representando um peso colocado do outro lado da haste. Em uma solução alternativa, o número a substituir o "y" equivaleria a uma força que promoveria o equilíbrio da balança. A diferença entre essa força e o peso dos toquinhos de madeira se dá pelo fato de que essa força teria de ser aplicada no sentido contrário ao peso, ou seja, na vertical apontando para cima. Essa percepção mostra-se bem mais complexa do que a primeira alternativa. De todo jeito, essa situação promove significados para o número negativo, o que contraria críticas endereçadas à utilização da balança como recurso para se aprender a solucionar equações.

As situações ilustradas acima permitem que se explore com os alunos significados para o conceito de equação, assim como alternativas de solução de situações diversificadas, com introdução de soluções baseadas em números decimais bem como de outras baseadas em números negativos. Apesar de se verificar que situações com a balança podem ser propostas em enredos de problemas, há que se reconhecer que esse é apenas um começo para se enfrentar o desafio de trabalhar a modelagem de problemas diversificados com representações algébricas. Esse assunto não será plenamente explorado nesta apresentação porque exige um trabalho de maior duração que o tempo de uma oficina.

A ideia de desenvolver a oficina aqui proposta consiste, basicamente em apresentar aos participantes oportunidades de compreender a proposta, experimentar situações com balanças, propor atividades e observar alguns episódios com vídeos de aulas efetivamente lecionadas com utilização desse recurso.

Metodologia da oficina

1. Apresentação inicial dos desafios enfrentados quando se ensina equações.
2. Exploração da balança e suas possibilidades – princípio da alavanca envolvido na balança e em outros mecanismos.
3. Desenvolvimento de registros.
4. Convite aos participantes no sentido de propor desafios relacionados à utilização da balança e o ensino de equações.
5. Mostra de vídeo com episódios de sala de aula.
6. Avaliação da viabilidade de desenvolvimento de metodologias semelhantes conforme as realidades conhecidas pelos participantes da oficina.

Agradecimento

Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais – FAPEMIG – pelo financiamento da pesquisa que gerou este trabalho.

Referências e bibliografia

Andrews, P., & Sayers, J. (2012). Teaching linear equations: Case studies from Finland, Flanders and Hungary. *Journal of Mathematical Behavior*, *31*, 476-488.

Christiou, K. P., & Vosniadou, S. (2012). What kinds of numbers do students assign to literal symbols? Aspects of the transition from arithmetic to algebra. *Mathematical Thinking and Learning*, *14*, 1-27.

Filloy, E., & Rojano, T. (1989). Solving equations: the transition from arithmetic to algebra. *For the learning of Mathematics*, *9*(2), 19-25.

Huntley, M. A., Marcus, R., Kahan, J., & Miller, J. L. (2007). Investigating high-school students' reasoning strategies when they solve linear equations. *Journal of Mathematical Behavior*, *26*, 115-139.

MacGregor, M. & Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics*, *33*, 1-19.

Rittle-Johnson, B., Matthews, P.G., Taylor, R. S., & McEldoon, K. L. (2011). Assessing Knowledge of Mathematical Equivalence: A construct-modeling approach. *Journal of Educational Psychology*, *103*(1), 85-104.

Steinberg, R.M., Sleeman, D. H., & Ktorza, D. (1990). Algebra students' knowledge of equivalence equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *22*, 112-121.

Warren, E. & Cooper, T. J. (2005). Young Children's ability to use the balance strategy to solve for unknowns. *Mathematics Education R*

Apêndice A

Construção da balança de pratos e exemplos de possibilidades de exploração

A balança de pratos aqui sugerida tem 4 ganchos de cada lado da haste e é acompanhada de 16 toquinhos (pesos) em 4 massas diferentes.

Material para construção:

1. Peças de madeira todas de 1,5 cm de espessura:

uma base retangular de 12,0 cm x 20,0 cm - **A**

um triângulo isósceles de 20,0 cm de base e 25,0 cm de altura - **B**

um trapézio de base maior 23,5 cm; base menor 6 cm e altura 4 cm - **C**

uma haste de 50,0 cm de comprimento e 2,0 cm de largura. - **D**

2. Um cilindro de madeira, como, por exemplo, um cabo de vassoura, para construção dos toquinhos.

3. Ganchos para fixação de toquinhos (pitões): 26

Depois da montagem das peças a balança fica com este aspecto:

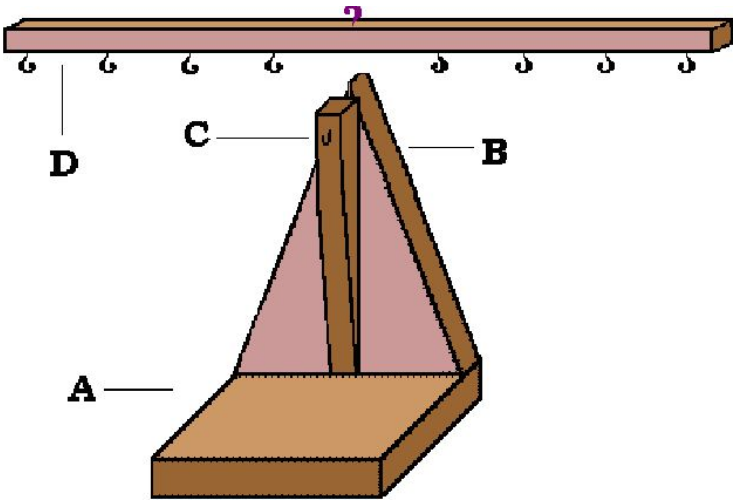


Figura 1. Aspecto da balança depois de construída.

Raramente a madeira apresenta uma densidade homogênea. É de se esperar que, depois de pronta, a haste fique inclinada para um dos lados. O problema pode ser corrigido com um contrapeso, o qual pode ser uma goma elástica ou uma fita adesiva. O contrapeso deve ser usado para equilibrar a haste, quando presa à balança e sem nenhum peso. Esse contrapeso nunca é retirado. Na figura 2, está representado em rosa.

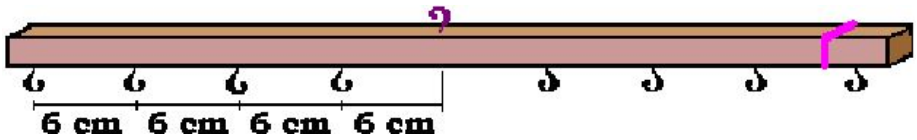


Figura 2. Distância entre os pitões e contrapeso.

A distância de 6cm que separa os ganchos é apenas uma sugestão. Importa que a distância seja rigorosamente a mesma entre cada par de ganchos.

Os toquinhos são 16, em 4 tamanhos e 4 massas:

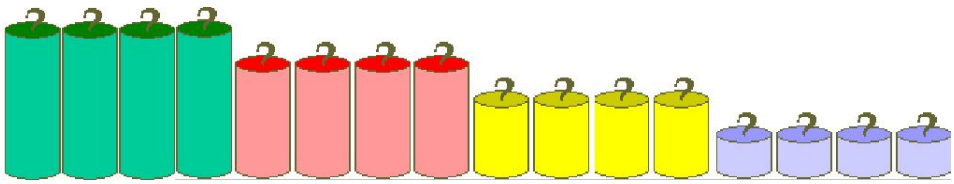


Figura 3. As massas que compõem o conjunto.

As medidas das massas devem ser rigorosas e as relações entre elas são as seguintes:

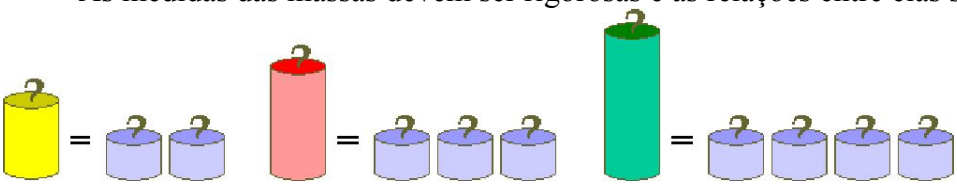


Figura 4. Relações entre as massas.

Para calibrar as massas, pode-se prender dois copos de plástico iguais, um de cada lado da balança, e colocar os toquinhos que se quer calibrar dentro desses copos. Deve-se iniciar pelos toquinhos menores: equilibrar um por um até que suas massas se igualem. Para igualar as massas, pode-se usar pequenos pedaços de prego que serão, posteriormente, fixados ao toquinho que se que aumentar a massa; ou pode-se lixar um toquinho quando se deseja diminuir sua massa.

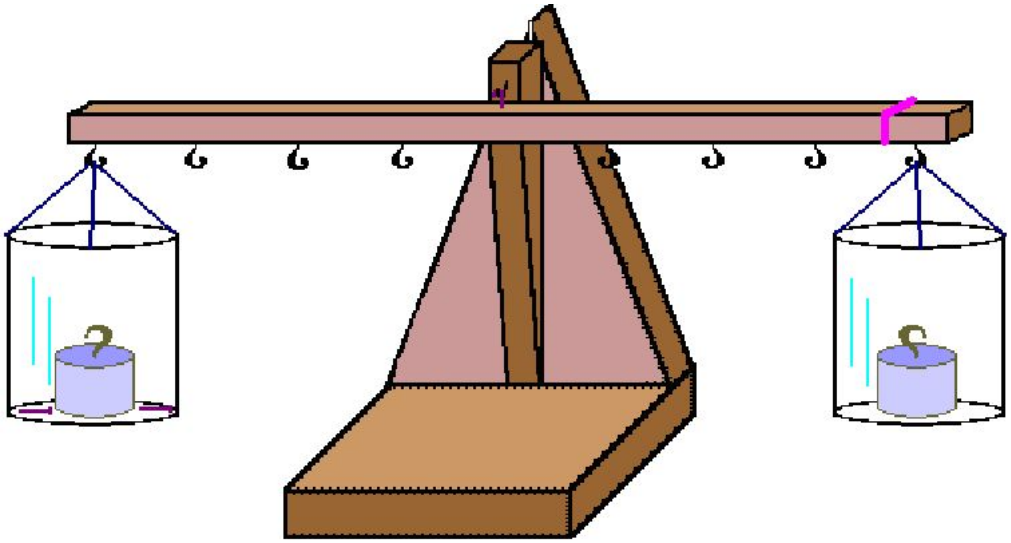


Figura 5. Calibração dos toquinhos.

Utilização

Esta balança pode ser utilizada de diversas maneiras. Existe uma relação matemática que estabelece condições para o equilíbrio, envolvendo pesos e suas posições. Essa relação pode ser colocada no final de um processo, o qual pode se iniciar com desafios do tipo:

1. Equilibre a balança, colocando os toquinhos necessários no lado direito:

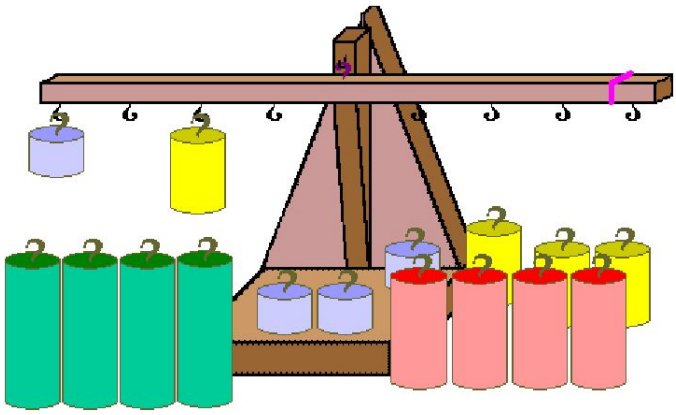


Figura 6. Desafios – exemplo 1.

2. Equilibre o toquinho maior e o toquinho menor, um de cada lado da balança.

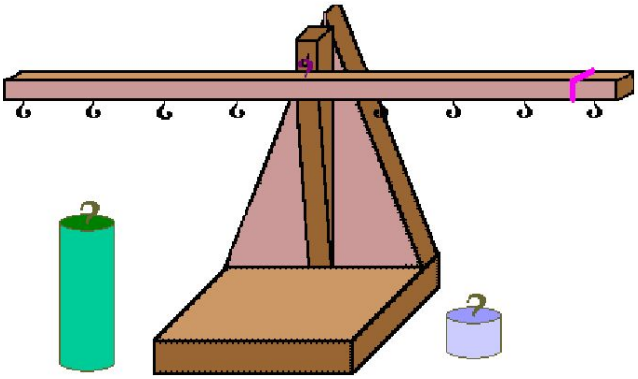


Figura 7. Desafios – exemplo 2.

Relação matemática entre pesos e posições no equilíbrio

Para expressar a relação matemática, podemos pensar os pesos e as posições numerados como na figura 8.

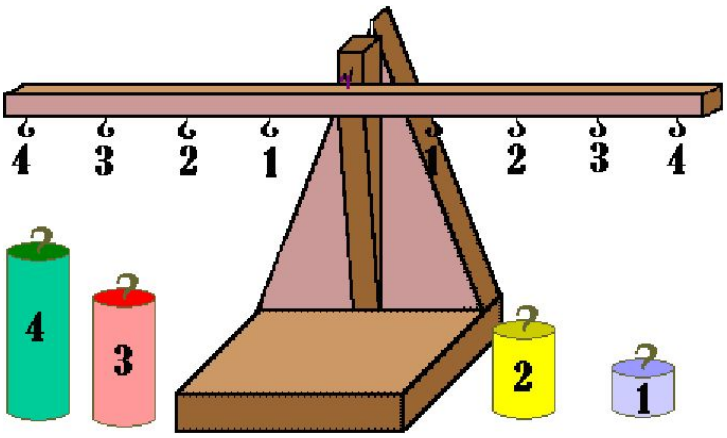


Figura 8. Numeração dos pesos e das posições na haste.

O equilíbrio será atingido se o somatório das multiplicações dos pesos pelas suas respectivas posições em cada lado for o mesmo. Verificando a figura 9, por exemplo, esse somatório se expressa assim:

Do lado esquerdo temos:

Peso 4 na posição 1 $\rightarrow$ $4 \cdot 1 = 4$; Peso 1 na posição 2 $\rightarrow$ $1 \cdot 2 = 2$;

Peso 2 na posição 3 $\rightarrow$ $2 \cdot 3 = 6$ e Peso 3 na posição 4 $\rightarrow$ $3 \cdot 4 = 12$

Somando os resultados das multiplicações: $4 + 2 + 6 + 12 = 24$

Do lado direito temos:

Peso 4 na posição 2 $\rightarrow$ $4 \cdot 2 = 8$ e Peso 4 na posição 4 $\rightarrow$ $4 \cdot 4 = 16$.

Somando os resultados das multiplicações: $8 + 16 = 24$. Portanto, a balança ficará equilibrada nessas condições.

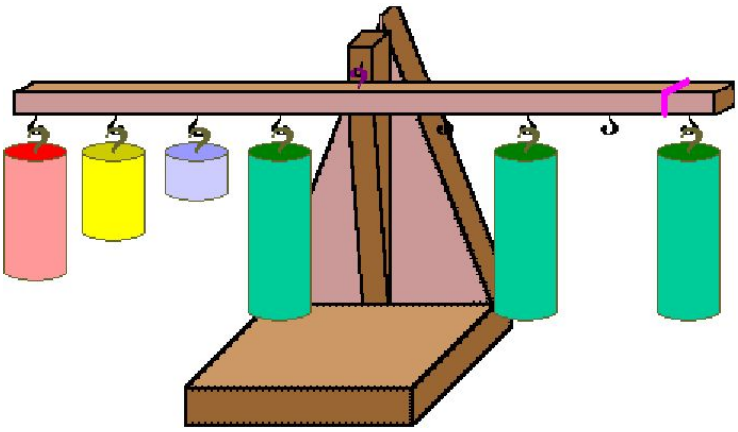


Figura 9. Exemplo de equilíbrio com vários pesos.

Representação gráfica das condições da balança

A situação da balança na configurada como na figura 9 pode ser representada por meio de um diagrama como este da figura 10:

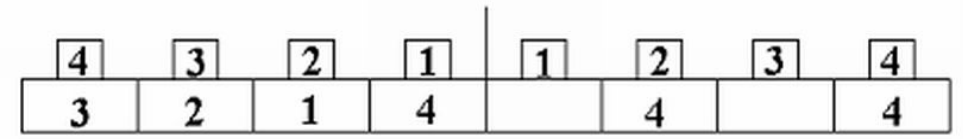


Figura 10. Representação gráfica de pesos e posições.

Uma vez que os usuários compreendam a lógica desse diagrama, podem ser desafiados a resolver um diagrama qualquer antes de conferir suas hipóteses na balança, como no exemplo que segue:

Indique os pesos e as posições que devem ser colocados no lado direito para equilibrar a balança conforme o diagrama da figura 11. Resolva no diagrama e, depois, teste suas hipóteses na balança.

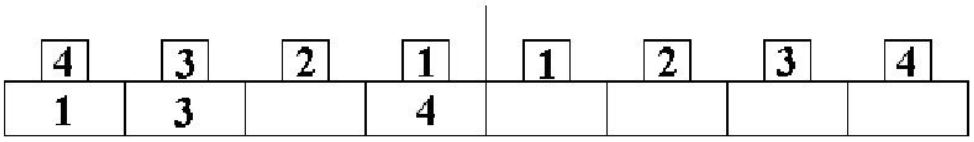


Figura 11. Diagrama propondo um desafio.

Esses desafios podem ser enfrentados mesmo antes dos usuários conhecerem a relação matemática explicitada acima. Além disso, depois de se acostumarem com essa representação, podem enfrentar desafios de uma balança "virtual", com mais pesos e mais posições. Este seria um exemplo:

Indique os pesos e as posições que devem ser colocados no lado direito para equilibrar a balança representada na figura 12.

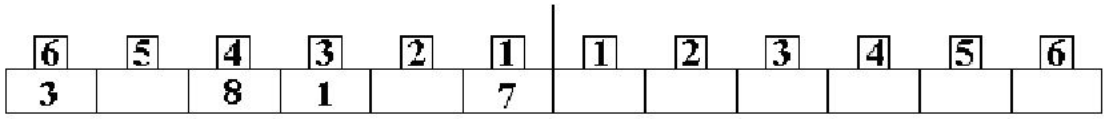


Figura 12. Representação de balança com 6 ganchos de cada lado da haste.

El continuo numérico en el último siglo: de las axiomáticas a los estructuralismos

Maribel **Anacona**
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
maribel.anacona@correounivalle.edu.co
Guillermo **Ortiz** Rico
Departamento de Matemáticas, Universidad del Valle
Colombia
guillermo.ortiz@correounivalle.edu.co
Luis Carlos **Arboleda**
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
luis.carlos.arboleda@correounivalle.edu.co

Resumen

El propósito fundamental del presente taller es presentar algunos de los aspectos más relevantes del proceso de constitución de los números reales como objeto matemático durante el último siglo. En este ambicioso proyecto, hemos identificado tres momentos claves que van desde la presentación axiomática de los reales por Hilbert hasta su construcción en el marco de los estructuralismos de las matemáticas modernas y contemporáneas. En la primera parte del taller mostraremos cómo se aborda el continuo en cada momento histórico, determinando las técnicas y métodos más relevantes que garantizan la completez del conjunto de los números reales. En la segunda parte, se trabajará con los asistentes en unas preguntas específicas, direccionadas a identificar conjuntamente algunas de las ventajas y limitaciones que ofrece cada momento histórico de constitución, con sus técnicas y métodos propios, en la enseñanza de los números reales.

Palabras clave: continuo numérico, números reales, axiomática, estructuralismo, análisis real, topología, teoría de categorías, enseñanza universitaria, educación matemática.

Introducción

La problemática alrededor de la enseñanza de los números reales es un tema de gran sensibilidad y actualidad en la comunidad educativa a nivel internacional. Pocos aspectos de su extenso y productivo proceso de constitución como objeto matemático se pueden dilucidar en las propuestas de enseñanza de los primeros años de universidad. Por tanto, consideramos de suma importancia que los profesores de matemáticas reconozcan algunos de los momentos más relevantes del proceso de constitución del conjunto de los números reales como objeto matemático durante el último siglo; y puedan identificar en el marco de esta reflexión histórico-epistemológica algunas de las dificultades inherentes a su enseñanza; así como posibles aportes en la elaboración de experiencias de aula.

En nuestra propuesta investigativa hemos fijado como un primer momento de estudio, el conformado por las tres primeras décadas del siglo XX. Este período inicia con la presentación axiomática de los números reales por Hilbert en 1900, cuya noción de completez aparece fuertemente influenciada por la obra de Dedekind y el pensamiento filosófico de la época, muy particularmente de Husserl. La axiomática de Hilbert marca un derrotero y un nuevo estilo de hacer matemáticas, que posteriormente da lugar a la aparición de las teorías axiomáticas. Entre estas teorías se destaca la teoría de conjuntos de Zermelo-Fraenkel y la axiomatización abstracta de los espacios de convergencia, en los años 1920 por Hausdorff y Frechet. Como se conoce, esta axiomatización posibilita el surgimiento de los espacios topológicos. De forma paralela, en este período se consolida el álgebra moderna, a través de la obra de van der Waerden, en los años 1930.

Los años 1940-1970 constituyen un segundo período. En esta época el grupo Bourbaki presenta su programa uniformador de las matemáticas introduciendo las denominadas *estructuras madres* en el interior de las axiomáticas básicas. La construcción de los números reales por Bourbaki, constituye una generalización de los reales por Cantor en el entrecruce de cuatro estructuras. Mientras Cantor completa el cuerpo **Q** de los racionales, Bourbaki completa el grupo topológico **Q** dotado de una estructura uniforme. En ambos procesos se requiere del concepto de convergencia. Mientras en Cantor se trata de la convergencia de sucesiones de Cauchy de números racionales, en Bourbaki se trata de la convergencia de filtros de Cauchy sobre **Q**. En ambos procesos se requiere del concepto de convergencia. Mientras en Cantor se trata de la convergencia de sucesiones de Cauchy de números racionales, en Bourbaki se trata de la convergencia de filtros de Cauchy. Es importante recordar que los filtros se definen en espacios topológicos y los filtros de Cauchy se establecen en espacios uniformes. Por tanto las estructuras topológicas y uniformes ocupan un papel sustancial en la construcción.

Desde los años 1970 hasta los albores del siglo XXI, se identifica un tercer momento, caracterizado por la emergencia de diversos estructuralismos que posibilitan el desarrollo de aspectos matemáticos que no necesariamente se fundamentan en la teoría de conjuntos. Se trata fundamentalmente de la teoría de la teoría de categorías de MacLane que encontró seguidores cercanos al grupo Bourbaki como Eilenberg y Grothendieck. En los últimos años la teoría de categorías se entrecruza con el álgebra universal, a través de la noción de coálgebra, la cual constituye un novedoso formalismo que permite caracterizar los números reales como coálgebras finales.

Estos tres momentos muestran que las matemáticas se han desarrollado a la luz de paradigmas axiomáticos y estructuralistas, con un énfasis muy fuerte en los estructuralismos desde mediados del siglo pasado. Se trata entonces de identificar los aspectos conceptuales y metodológicos más relevantes en cada período, en aras de aportar a una reflexión de carácter educativo.

Los tres momentos históricos de constitución de los reales

Los tres momentos históricos de constitución de los reales en el último siglo, se resumen en los siguientes: i) la presentación axiomática de Hilbert en 1900 y la contribución de Fréchet al análisis general y a los fundamentos del análisis funcional (1903-1928); ii) la importancia de la incorporación de las estructuras uniforme y topológica en la construcción de Bourbaki de los números reales; y iii) los desarrollos del álgebra universal y la teoría de categorías durante los últimos años, a fin de estudiar las caracterizaciones co-algebraicas de los números reales.

Primer momento: las axiomáticas como marco fundacional de los reales

Los reales de Hilbert (1900) constituyen la gran síntesis de las construcciones de los números reales realizadas en el siglo XIX: su exhibición axiomática da cuenta del concepto de estructura en **R**. Hilbert exhibe los axiomas de conexión, axiomas para las operaciones y axiomas de orden para objetos de naturaleza cualquiera. Estos son los axiomas que satisface una estructura de cuerpo totalmente ordenado. Con el axioma de Arquímedes y el axioma de completitud, denominados axiomas de continuidad, garantiza que este conjunto de objetos sea completo. Es decir, Hilbert parte de los cuerpos arquimedianos totalmente ordenados y desde allí captura la estructura de **R** como el objeto más grande (salvo isomorfismos) que verifica los axiomas enunciados.

La axiomatización de la topología de espacios abstractos constituye otro instante significativo del desarrollo de las matemáticas del siglo XX. En el presente taller se examinarán comparativamente dos momentos históricos decisivos: la introducción en los trabajos de Fréchet preparatorios de su tesis doctoral (1904-1906) y las primeras estructuras topológicas determinadas por la convergencia de sucesiones y la métrica, así como la caracterización de la topología del espacio abstracto por la axiomática de las vecindades (Arboleda, 2012), la cual es formulada por Hausdorff en sus conferencias de Bonn de 1912 y finalmente en su célebre obra *Mengenlehre* de 1914.

En el caso de Fréchet nos interesa caracterizar el enfoque estructural propio al análisis general (Arboleda, 1980); es decir, el programa de la escuela de Hadamard que consistía en extender las propiedades fundamentales del cálculo infinitesimal al dominio de las funciones generalizadas o funcionales. Se intentará explorar la hipótesis que el mismo Fréchet formula sobre la influencia filosófica de la analiticidad"leibniziana en lo que podría llamarse la categoricidad de los espacios abstractos en Fréchet (Fréchet, 1928).

En cuanto a Hausdorff se refiere, se examinarán las condiciones de formación del estilo estructural moderno de los *Mengenlehre* en sus trabajos filosóficos tempranos (Hausdorff, 1904), y en su determinación de escoger, entre varias presentaciones generales de la topología del espacio, aquélla con la axiomática más sencilla y menos redundante posible. Este programa conducirá a Hausdorff (y curiosamente al mismo Fréchet y otros matemáticos) a preferir las vecindades porque le permiten desembarazarse de las dificultades de lo numerable que conlleva el uso de la convergencia secuencial. Se mostrará que este punto de vista fue adoptado por Bourbaki para seleccionar y organizar las estructuras de la topología general que mejor convenían al estudio fecundo de los problemas más importantes de la teoría de funciones.

En las cercanías de Artin y Noether aparece Oystein Ore, quien después de participar junto a Noether en la recopilación de los trabajos sobre *ideales* de Dedekind, propone un nuevo estructuralismo en las matemáticas. La teoría de estructuras que aparece en manos de Birkhoff en 1940 como la teoría de *lattices* (retículos). El desarrollo del álgebra moderna como estudio de estructuras algebraicas en sí mismas y la axiomatización de los espacios topológicos, influenciaron enormemente el punto de vista de Bourbaki, quien explícitamente expuso una versión conjuntista del estructuralismo. Este tipo de estructuralismo, especialmente orientado hacia una suerte de estructuralismo algebraico, ha sido ampliamente estudiado por Corry (2004) y por Krömer (2007).

Segundo momento: los reales en el estructuralismo bourbakista

Bourbaki constituye no sólo un referente epistemológico fundamental para las matemáticas del siglo XX, sino que además su propuesta estructuralista de construcción de los reales, realza precisamente aquello que se esconde en las exposiciones axiomáticas: la topología. En las presentaciones tradicionales de **R**, se parte de **Q** como cuerpo ordenado y se completa con el axioma de continuidad, para llenar las "lagunas" algebraicas y topológicas. Bourbaki escoge otro camino, en primer lugar define una topología sobre **Q** compatible con su estructura de grupo aditivo, y completa este grupo topológico a través de la estructura uniforme; sólo al final hace la extensión algebraica de grupo a cuerpo. Esta apuesta en la que ingresa primero lo topológico y se deja para el final lo algebraico, es la que consideramos merece ser analizada para efectos educativos.

Bourbaki parte de la consideración de **Q** como grupo aditivo, en el cual se define una relación de orden compatible con la estructura de grupo. Es decir, una relación que verifique la siguiente condición: $x \leq y \leftrightarrow x + z \leq y + z, \ \forall z \in \mathbf{Q}$. Esto significa que el orden es invariante bajo traslación. Tenemos entonces los racionales con las estructuras de grupo y de orden compatibles entre sí. En símbolos: $\langle \mathbf{Q}, +, \leq \rangle$. Con esta relación de orden, Bourbaki define sobre **Q** una topología compatible con su estructura de grupo aditivo, a través de un *sistema fundamental de vecindades* alrededor del origen, que identificamos por $\tau = \{(-a, a): a \in \mathbf{Q}^+\}$. Con la introducción de la topología Bourbaki está garantizando el tratamiento matemático de todos los conceptos relacionados con la noción de proximidad a un punto fijo, tales como continuidad puntual, filtro y convergencia, claves en la construcción de los reales.

Posteriormente, Bourbaki define una estructura uniforme sobre el grupo topológico **Q**, a través del *sistema fundamental de entornos* $\mathcal{U} = \{U_a: a \in \mathbf{Q}^+\}$, donde $U_a = \{(x, y) \in \mathbf{Q} \times \mathbf{Q}: |x-y| < a, a \in \mathbf{Q}^+\}$. Estos *entornos* formalizan la noción de cercanía entre dos puntos cualesquiera del espacio. Con ellos podemos expresar formalmente la idea de que "x_1 está tan cerca de x_2 como y_1 lo está de y_2". Con la introducción de las estructuras uniformes Bourbaki garantiza el tratamiento de los conceptos relacionados con la "cercanía" entre puntos dos a dos, tales como continuidad uniforme, filtros de Cauchy y convergencia de filtros de Cauchy; conceptos esenciales en la construcción de los reales. Las estructuras uniformes son una generalización de la noción de distancia y dotan de una especie de seudométrica a los espacios topológicos. Un espacio uniforme tiene por tanto una estructura más débil que una estructura métrica, pero más rica que una estructura topológica. En símbolos, se tiene el espacio topológico uniforme $\langle \mathbf{Q}, +, \leq, \tau, \mathcal{U} \rangle$.

Una vez **Q** está dotado de estas dos estructuras, Bourbaki completa el conjunto **Q**, a través de los filtros minimales de Cauchy; y finalmente extiende las propiedades algebraicas de grupo a cuerpo, para obtener el cuerpo completo **R**. (Bourbaki, 1965).

El estudio de las estructuras topológicas y uniformes de Bourbaki es fundamental en esta propuesta. El análisis de varias proposiciones y teoremas en Bourbaki (1965), permitirá no sólo disponer del soporte matemático sobre el cual se construyen los reales sino identificar elementos de orden epistemológico que nos permitan diferenciar claramente el lugar y el papel de estas estructuras en la propuesta bourbakista. Particularmente se revisarán muy rápidamente los conceptos de filtro y ultrafiltro introducidos de manera novedosa por H. Cartan, como vehículos para definir la convergencia sin depender de la numerabilidad de las sucesiones; y los espacios uniformes introducidos por A. Weil, sobre los cuales se puede definir la continuidad uniforme y los filtros de Cauchy, claves para establecer la completez. Así mismo, haremos particular

diferencia entre las nociones de vecindad (topología) y entorno (uniformidad), y analizaremos la relación que sostienen entre lo abstracto de la formulación conceptual y lo intuitivo de su significado, en pro de encontrar luces para una mejor comprensión de los números reales. Intentamos mostrar que desde el nivel de abstracción y generalidad, característico de la práctica matemática de Bourbaki, es posible identificar el papel que desempeñan ciertos conceptos en la constitución de **R**; lo cual es difícil de observar desde espacios muy particulares.

Tercer momento: los reales y los diversos estructuralismos contemporáneos

Aunque los números reales se caracterizan de manera estructural a través de los desarrollos de Bourbaki para lograr su completación por medio de las estructuras uniformes, o bien, mediante la caracterización de Hilbert, se relega a un estatuto menor su presentación categorial. Sin embargo, en el marco de la teoría de categorías tenemos tratamientos co-algebraicos en los cuales se caracteriza el continuo matemático como objeto final de ciertas categorías co-algebraicas.

Otros estructuralismos a considerar son los topoi. Entre éstos el dado mediante haces por Dubuc (1986), donde a través de las generalizaciones de cortaduras de Tierney-Joyal se reescribe la construcción de los reales y se muestra que sus puntos son cortaduras de Dedekind, exhibiendo a los topos como interesantes universos para las matemáticas.

De la herencia de la teoría de retículos surge la denominada álgebra universal que se consolida en los años 80 con el texto de Burris y Sankappanavar (1981); teoría que se entrecruza con la teoría de categorías a través de las co-álgebras para proporcionarnos caracterizaciones del continuo matemático como objeto final, al estilo Hilbert, entre las que podemos mencionar (Pavlovic y Pratt, 2002) y (Escardo y Simpson, 2001). Esto nos permitirá acercarnos a los números reales a través de procesos coinductivos**.**

Marco conceptual y consideraciones finales

Recientemente, en filosofía de las matemáticas, varios autores (Benacerraf, Resnik, Shapiro, Chihara, Hellman, Parsons, McLarty, Landry, entre muchos otros) han presentado sus puntos de vista estructuralistas sobre las matemáticas y, sus argumentos a favor y en contra respecto a la toma de partido por algún tipo de estructuralismo particular. Debido a esto, el estructuralismo como corriente en la filosofía de las matemáticas contemporáneas ha ido adquiriendo un papel paradigmático, posicionándose paulatinamente de modo relevante en las discusiones sobre los fundamentos de las matemáticas; aunque la dificultad de definir estructura, ha sido el talón de Aquiles del estructuralismo. De modo muy panorámico, el estructuralismo matemático considera que el objeto de estudio de las matemáticas son las estructuras, considerando estas como una colección (no necesariamente un conjunto) de objetos (estáticos o dinámicos) y una colección de relaciones mutuas que cumplen dichos objetos. El estructuralismo se pregunta entonces qué son las estructuras y cómo se puede entender la ontología de éstas.

El estructuralismo puede ser rastreado desde la obra de Dedekind (1998), cuando introduce lo que es un sistema simplemente infinito. Luego, sin importar la naturaleza de los elementos de un dominio que cumple los axiomas de Dedekind-Peano, estos tienen derecho a ser llamados números naturales, puesto que lo más relevante son las relaciones mutuas que cumplen estos objetos y, no los objetos en sí mismos. En (Ortiz y Valencia, 2010) se explicita que es posible rastrear una suerte de estructuralismo cercano al de Dedekind en Hilbert (1900), a través de la

caracterización de los reales como el objeto final de la categoría de los cuerpos totalmente ordenados arquimedianos.

A partir de los años 1930, los *Grundlagen der Analysis* de Edmund Landau, se destaca como uno de los libros más influyentes en la difusión del enfoque estructuralista de Dedekind y del formalismo de Hilbert sobre los sistemas numéricos. Publicado originalmente en 1930 y traducido en 1951 como *Foundations of Analysis* (Landau, 1951), los *Grundlagen* sistematiza las notas de enseñanza de Landau en Göttingen al lado de Hilbert a partir de 1909. Existe una discusión internacional sobre el carácter pedagógico de esta obra con base en los dos prólogos originales de Landau para el profesor y el alumno. Otra referencia obligada la constituye el libro de *Algebra Moderna* de van der Waerden de 1930, por considerarse el primer gran estructuralismo de las matemáticas (van der Waerden, 1949). Este texto surge del interés de recopilar, organizar y exponer sistemáticamente las contribuciones en álgebra, adelantadas por E. Noether y E. Artin, relacionadas fundamentalmente con teoría de anillos e ideales, sistemas hipercomplejos y números p-ádicos. Es también un texto que tiene como propósito actualizar la enseñanza del álgebra e incorporar los últimos resultados obtenidos. Este libro presenta los reales al estilo de Landau. El impacto y la imagen del álgebra producida por este libro son ampliamente analizados por Corry (2004).

Desde la perspectiva actual, se puede rastrear el estructuralismo matemático en Benacerraf (1965), en respuesta al dilema de cómo acceder a los objetos matemáticos si se adopta una postura, o bien realista, o bien idealista. Hellman (1989) considera que las matemáticas se encargan principalmente de la investigación de estructuras de diversos tipos, las cuales resultan de una completa abstracción de la naturaleza de los objetos individuales que se enmarcan en dichas estructuras. Para Parsons (1990), el punto de vista estructuralista de las matemáticas significa que los objetos matemáticos se enmarcan siempre en el contexto de alguna estructura de fondo y, más aún, que los objetos matemáticos son solo aquellos que son expresables en términos de relaciones básicas de una estructura.

No obstante, como menciona Zalamea (2009) la gran mayoría de los trabajos de filosofía de las matemáticas se reducen a filosofía analítica de los fundamentos de las matemáticas en la primera mitad del siglo XX y, el estructuralismo como corriente emergente, no está exento de dicho tratamiento: las diversas alternativas estructuralistas predominantes dependen de la toma de la dicotomía realismo/idealismo presente en la filosofía analítica tanto a nivel ontológico como epistemológico. Quizá el estructuralismo categorial provee una caracterización que, aunque anglosajona, se aleja de diversas tradiciones que han impedido, según Zalamea, la emergencia de nuevas filosofías de las matemáticas. Por otro lado, Zalamea considera que, en efecto, el estructuralismo de Lautman en concatenación con una fundamentación categorial (en el marco de ciertos topoi) brinda una nueva alternativa a la caracterización clásica de la filosofía de las matemáticas y, por ende al estructuralismo predominante (representado por las posturas de Resnik (1997), Parsons (2004), Shapiro (1997) y Chihara (2004)).

La anterior observación cobra sentido en la medida que las caracterizaciones estructuralistas predominantes de los números reales han apelado al estructuralismo conjuntista desde una perspectiva de la filosofía analítica. Se hace imperioso el considerar que en el marco de las diferentes vertientes estructuralistas en matemáticas (teoría de categorías, álgebra universal, estructuralismo bourbakista, teoría de retículos, etc.) se han efectuado desarrollos de gran importancia, aunque casi desconocidos, debido en parte a las visiones predominantes en filosofía de las matemáticas.

Finalmente, es importante manifestar que los estudios históricos y epistemológicos sobre el estructuralismo constituyen uno de los campos de mayor interés en las investigaciones contemporáneas: propician el análisis del que hacer matemático, la constitución de teorías científicas y el análisis de objetos matemáticos a la luz de sus relaciones intrínsecas. A nivel internacional, existen en la actualidad investigaciones de punta sobre la incidencia del estructuralismo en la constitución y consolidación de las matemáticas, como la de Detlfesen-Panza (Universidad de París 7), y sobre posturas opuestas al estructuralismo como la de los neo-fregeanos Hale-Wrigth. Sin embargo, se reconoce que casi todos los desarrollos matemáticos del siglo XX e inicios del XXI están a la luz de las propuestas estructuralistas. Las investigaciones en esta área son relevantes en tanto que dan cuenta de los fundamentos de las matemáticas.

Metodología del taller

En la primera parte del taller (60 minutos aproximadamente), se hace una presentación de los aspectos teóricos y metodológicos más relevantes de los tres momentos históricos escogidos, en el proceso de constitución de los reales durante el último siglo. La segunda parte del taller está destinada a la interacción con los asistentes. La propuesta es identificar, alrededor de unas cuantas preguntas, los conceptos y métodos que caracterizan la construcción de los reales en cada momento histórico. De igual manera se pretende que, de manera conjunta, se identifiquen las ventajas y limitaciones de cada propuesta para la enseñanza de las matemáticas a nivel universitario. Las preguntas se entregan a los asistentes para que sean discutidas en pequeños grupos (30 minutos). Durante este tiempo se interactúa con cada grupo de trabajo resolviendo inquietudes y orientando cada una de las preguntas. Posteriormente, se realiza una plenaria (30 minutos) para socializar el análisis y las reflexiones de los grupos de trabajo. Al final se recogen las conclusiones y recomendaciones generales.

Referencias y bibliografía

Arboleda, L. C. (1980). Las primeras investigaciones sobre los espacios topológicos. *X Coloquio colombiano de matemáticas*. Paipa: Sociedad colombiana de matemáticas.

Arboleda, L.C. (2012). Objetos matemáticos y prácticas constitutivas: La génesis de la topología de vecindades. *Notae Philosophicae Scientiae Formalis*, 1(1), 32-44.

Benacerraf, P. (1965). What Numbers Could Not Be. *The Philosophical Review*, 74, 47-73.

Bourbaki, N. (1965). Topologie Générale. *Éléments de mathématique*. Chapitre 1-4. Paris: Hermann.

Burris, S., & Sankappanavar, H. P (1981). A Course in Universal Algebra. New York: Springer-Verlarg.

Chihara, C. S. (2004). *A structural account of mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

Corry, L. (2004). *Modern algebra and the rise of mathematical structures. Second revised edition*. Berlin: Birkhäuser Verlag.

Dedekind, R.(1998). *¿Qué son y para qué sirven los números? Y otros escritos sobre los fundamentos de las matemáticas.* Edición e introducción a cargo de José Ferreirós. Madrid: Alianza Editorial.

Dubuc, E. (1986). Logical opens and real numbers in topoi. *Journal of pure and applied algebra*, 43, 129-143.

Escardo, M., & Simpson, A. (2001). A universal characterization of the closed Euclidean interval. *Proceedings of the 16th annual IEEE symposium on logic in computer science*,115-125.

Fréchet, M. (1928). Les espaces abstraits. Paris: Gauthier-Villars.

Hellman, G. (1989). *Mathematics without numbers: Towards a modal-structural interpretation*. Oxford: University Press.

Hilbert, D. (1900). On the concept of number. En W. Ewald (Ed.), *From Kant to Hilbert. A source book in the foundations of mathematics* (Vol. II, pp. 1089-1095). New York: Oxford University Press.

Hausdorff, F. (1904). Der Potenzbegriff in der Mengenlehre. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung,* 13, 569–571.

Krömer, R. (2007) *Tool and object: A history and philosophy of category theory*. Berlin: Birkhäuser.

Landau, E. (1951). *Foundations of analysis. The arithmetic of whole, rational, irrational and complex numbers. A Supplement to Text-Books on the Differential and Integral Calculus*. Translated by F. Steinhardt. Columbia University: Chelsea Publishing Company.

Ortiz, G., & Valencia, S. (2010). La categoricidad de los reales en Hilbert. *Revista Brasileira de Historia da Matemática,* 10 (19), 39-35.

Parsons, Ch. (1990). The Structuralist View of Mathematical Objects. *Synthese*, 84, 303–346.

Parsons, Ch. (2004). Structuralism and Metaphysics. *The Philosophical Quarterly*, 54 (214), 56-77.

Pavlovic, D., & Pratt, V. (2002). The continuum as a final coalgebra. *Journal theoretical computer science*, 280 (1-2), 105-122.

Resnik, M. (1997). *Mathematics as a Science of Patterns*. Oxford: Oxford University Press.

Shapiro, S. (1997). Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology, Oxford: Oxford University Press. Shapiro, Stuart (ed.) (2005). *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*. Oxford: Oxford University Press.

van der Waerden, B. L. (1949). *Modern Álgebra*. New York: Frederick Ungar Publishing Co.

Zalamea, F. (2009). *Filosofía Sintética de las Matemáticas Contemporáneas*. Bogotá: Editorial Universidad Nacional de Colombia.

Apéndice

Preguntas para el taller sobre el continuo numérico

Las siguientes preguntas se entregan a los asistentes para que sean discutidas en pequeños grupos (30 minutos). Posteriormente, se realiza una plenaria (30 minutos) para socializar el análisis y las reflexiones de los grupos de trabajo. Al final se recogen las conclusiones y recomendaciones generales.

i) ¿De qué manera la extensión de ciertos teoremas del análisis real condujo a la necesidad de dotar de una topología a los espacios abstractos? ¿Cuál es la razón de ser de esta generalización?

ii) Mencione una característica de los reales por Bourbaki, ya sea conceptual o metodológica, que se constituya en un elemento distinto y sustancial de la construcción.

iii) ¿Ofrece alguna ventaja de orden pedagógico?

iv) Muestre que el teorema fundamental del cálculo y/o la serie de Taylor constituyen ejemplos de la naturaleza coinductiva del análisis real.

Enseñanza del Álgebra Lineal basada en el uso del paquete *VilGebra*

Enrique **Vílchez** Quesada
Escuela de Informática, Universidad Nacional
Costa Rica
enrique.vilchez.quesada@una.ac.cr

Resumen

El taller pretende mostrar la funcionalidad de un paquete elaborado por el autor de esta propuesta, titulado "*VilGebra*", con la intención de trabajar en el campo del álgebra lineal utilizando como apoyo el conocido software comercial *Mathematica*. *VilGebra* desarrolla una serie de funciones que por defecto no están integradas en *Mathematica* en las principales áreas de contenido de un curso clásico de álgebra lineal para ingeniería, es decir: ecuaciones lineales y matrices, determinantes, vectores, rectas y planos, espacios vectoriales, proyecciones ortogonales, transformaciones lineales, diagonalización de matrices y programación lineal. Desde un punto de vista didáctico, el paquete puede ser utilizado como una herramienta de verificación de resultados, o bien, como un medio para profundizar el ambiente de programación del software, implementando métodos de solución automatizados en un campo de conocimiento, muchas veces catalogado como abstracto.

Palabras clave: enseñanza, aprendizaje, álgebra, lineal, software.

Introducción

El paquete *VilGebra* ha sido desarrollado como un medio de resolución de problemas vinculados con el álgebra lineal a través del uso de software.

En la experiencia docente acumulada por el autor de este taller impartiendo cursos de álgebra lineal con una metodología asistida por computadora, surgió la necesidad de contar con una serie de funciones no incluidas por defecto en *Mathematica*, que implementaran una serie de procesos tradicionales como técnicas de resolución a problemas frecuentes en este campo.

Prerrequisitos

Manejo básico del software *Mathematica*.

Objetivos

- Mostrar el paquete *VilGebra* como medio de resolución de problemas vinculados con el área cognitiva del álgebra lineal.
- Comprender el contenido de cada una de las funciones integradas en *VilGebra*.
- Utilizar *VilGebra* como un recurso de resolución de problemas tradicionales a través del uso de software.
- Analizar las aplicaciones del paquete *VilGebra* desde un punto de vista didáctico.

Contenido

Se desarrollará en el taller ejemplos de uso de distintos comandos integrados en el paquete *VilGebra* en los ejes de contenido principales de un curso de álgebra lineal para ingeniería. Dentro de las funciones más importantes implementadas en *VilGebra* se encuentran:

1. IntercambiaFila: intercambia dos filas en una matriz.
2. MultiFila: multiplica un escalar a una fila de una matriz.
3. SumaFila: suma el múltiplo escalar de una fila en una matriz a otra fila dada.
4. RowReduceComplete: función que determina paso a paso la matriz escalonada de otra, recibida como parámetro.
5. InversaSP: encuentra paso a paso la matriz inversa de otra que no contiene ningún parámetro.
6. InversaCP: encuentra paso a paso la matriz inversa de otra que contiene parámetros.
7. Determinante: función que calcula el determinante de una matriz cuadrada desarrollando por cofactores de acuerdo a los elementos de la primera fila.
8. InversaAdjunta: calcula la inversa por el método de la adjunta donde cada uno de los cofactores son hallados a pie.
9. LinearSolveCompleteSP: resuelve un sistema de ecuaciones lineales sin parámetros paso a paso.
10. LinearSolveCompleteCCP: resuelve un sistema de ecuaciones lineales cuadrado con parámetros paso a paso.
11. Cramer: resuelve un sistema de ecuaciones lineales cuadrado a partir de la regla de *Cramer*.
12. CombiLinealQ: determina si un vector es combinación lineal de un conjunto de vectores dados, retornando True o False en cada caso.
13. LiLd: establece si un conjunto de vectores son linealmente independientes o linealmente dependientes.
14. GraficaVectores2D: grafica vectores en el plano.
15. GraficaPuntos2D: grafica puntos en el plano, los vectores se añaden como filas de una matriz *nx2*.
16. GraficaVectores3D: grafica vectores en el espacio tridimensional.
17. GraficaPuntos3D: grafica puntos en el espacio, los vectores se añaden como filas de una matriz *nx3*.
18. VectoresParalelosQ: determina si dos vectores son paralelos retornando True o False según corresponda.
19. ProducMixto: calcula el producto mixto entre tres vectores con tres componentes.
20. AreaParalelogramo2: calcula el área de un paralelogramo formado por dos vectores.
21. AreaTriangulo2: calcula el área de un triángulo formado por dos vectores.

22. AreaParalelogramo3: calcula el área de un paralelogramo formado por tres vectores, uno de ellos funciona como anclado.
23. AreaTriangulo3: calcula el área de un triángulo formado por tres vectores, uno de ellos funciona como anclado.
24. VolumenParalelepipedo3: calcula el volumen de un paralelepípedo formado por tres vectores.
25. VolumenTetraedro3: calcula el volumen de un tetraedro formado por tres vectores.
26. VolumenParalelepipedo4: calcula el volumen de un paralelepípedo formado por cuatro vectores.
27. VolumenTetrahedro4: calcula el volumen de un tetraedro formado por cuatro vectores.
28. PerteneceRectaQ: determina si un punto Q pertenece a una recta, dado un punto P y su vector director.
29. ColinealesQ: retorna True si tres puntos recibidos como parámetros son colineales y False en caso contrario.
30. EcuacRectaPuntos: encuentra la ecuación vectorial de una recta dados dos puntos *n*-dimensionales.
31. NSecar: encuentra las coordenadas de los puntos que *n*-secan a un segmento de recta en cualquier dimensión.
32. NSecar2D: encuentra las coordenadas de los puntos que *n*-secan a un segmento de recta en el plano con extremos P y Q, y grafica el segmento y los puntos.
33. NSecar3D: encuentra las coordenadas de los puntos que *n*-secan a un segmento de recta en el espacio con extremos P y Q, y grafica el segmento y los puntos.
34. EcuacVecToSime: encuentra las ecuaciones simétricas o ecuación simétrica de una recta dada su ecuación vectorial.
35. EcuacSimeToVec: encuentra la ecuación vectorial de una recta dadas sus ecuaciones simétricas o ecuación simétrica.
36. DistanciaP1Recta: determina la distancia de un punto a una recta, dada la recta a través de un punto y su vector director.
37. DistanciaP2Recta: determina la distancia de un punto a una recta, dada la recta por medio de dos puntos.
38. GraficaRectas2D: grafica un conjunto de rectas en el plano dadas sus ecuaciones paramétricas.
39. InterRectas2D: encuentra el punto de intersección entre dos rectas en el plano cartesiano y grafica el punto y las rectas.
40. GraficaRectas3D: grafica un conjunto de rectas en el espacio dadas sus ecuaciones paramétricas.
41. InterRectas3D: encuentra el punto de intersección entre dos rectas en el espacio y grafica el punto y las rectas.

42. GraficaRectasPuntos2D: grafica un conjunto de rectas y puntos en el plano cartesiano, dadas sus ecuaciones paramétricas y la lista de vectores respectivamente.
43. GraficaRectasPuntos3D: grafica un conjunto de rectas y puntos en el espacio, dadas sus ecuaciones paramétricas y la lista de vectores respectivamente.
44. PuntoRectaQ: retorna True si un punto "*n*" dimensional pertenece a una recta L en dicha dimensión y False en caso contrario.
45. RectaPuntos: encuentra "*n*" puntos que pertenecen a una recta dada.
46. GraficaPlanos1: grafica un conjunto de planos dadas sus ecuaciones cartesianas.
47. GraficaPlanos2: grafica un conjunto de planos dado un sistema de ecuaciones lineales.
48. PuntoPlanoQ: retorna True si un punto "*n*" dimensional pertenece a un plano en dicha dimensión y False en caso contrario.
49. PlanoPuntos: encuentra "*n*" puntos que pertenecen a un plano dado.
50. GraficaPlanosPuntos: grafica un conjunto planos y puntos, dadas sus ecuaciones cartesianas y la lista de vectores respectivamente.
51. GraficaRectasPlanos: grafica un conjunto de rectas y planos dadas sus ecuaciones paramétricas y cartesianas respectivamente.
52. GraficaRectasPlanosPuntos: grafica un conjunto de rectas, planos y puntos, dadas sus ecuaciones paramétricas, cartesianas y la lista de vectores respectivamente.
53. EcuacCartPuntoGene: retorna la ecuación cartesiana de un plano en el espacio, conociendo un punto y sus vectores generadores.
54. EcuacCartPuntos: retorna la ecuación cartesiana de un plano en el espacio, conociendo tres puntos del plano no colineales.
55. RectaPlanos: determina la ecuación vectorial de una recta de intersección entre dos planos en la dimensión 3 y dibuja la recta y los planos.
56. DistanciaPuntoPlano: determina la distancia de un punto a un plano en la tercera dimensión.
57. DistanciaPlanos: encuentra la distancia entre dos planos paralelos.
58. CompletandoBase: completa una familia libre para formar una base de un espacio vectorial de dimensión finita.
59. VectorCoordenadas: determina el vector de coordenadas de uno dado, recibiendo la base correspondiente.
60. MGS: aplica paso a paso el método de *Gram Schmidt*.
61. PrOt: calcula la proyección ortogonal de un vector sobre un subespacio de IR^n.
62. ComplementOt: calcula el complemento de un vector ortogonal a un subespacio de IR^n.
63. TLQ: devuelve True si dada una función ella constituye una transformación lineal y False en caso contrario, si la función no es aplicación lineal brinda un contraejemplo.

64. Nucleo: determina como un conjunto generado el núcleo de una transformación lineal de IR^n a IR^m. Además, indica si la aplicación es inyectiva.
65. Imagen: determina como un conjunto generado la imagen de una transformación lineal de IR^n a IR^m. Además, indica si la aplicación es sobreyectiva.
66. TL: encuentra el criterio de una aplicación lineal dadas algunas imágenes cuyas preimágenes forman una base del dominio.
67. MatrizRepreTL: determina la matriz representativa de una transformación lineal.
68. TLMatrizRepre: encuentra el criterio de una aplicación lineal dada una matriz representativa.
69. MatrizPasaje: encuentra una matriz de pasaje o de cambio de base.
70. TLComposicion: determina el criterio de la composición entre dos transformaciones lineales en IR^n.
71. MatrizRepreTLCB: aplica el teorema de cambio de bases.
72. TLInversa: determina si una aplicación lineal es invertible y encuentra su criterio, siempre y cuando la dimensión del espacio vectorial dominio sea igual a la dimensión del espacio vectorial codominio.
73. DiagonalizacionQ: retorna True si una matriz cuadrada es diagonalizable y False en caso contrario.
74. Diagonalizacion: diagonaliza una matriz diagonalizable.
75. DiagonalizacionOrtogonal: diagonaliza ortogonalmente una matriz simétrica.
76. PotenciaNMatriz: calcula la potencia *n*-ésima de una matriz diagonalizable.
77. EigensystemOL: función Eigensystem para un operador lineal.
78. DiagonalizacionFC2D: diagonaliza una forma cuadrática en el plano.
79. DiagonalizacionFC3D: diagonaliza una forma cuadrática en el espacio.
80. PLMG1: resuelve un problema de programación lineal utilizando el método gráfico siempre y cuando la región factible sea acotada. Recibe la función objetivo y las restricciones de manera directa.
81. PLMG2: resuelve un problema de programación lineal utilizando el método gráfico. La función objetivo y las restricciones se reciben como matrices.
82. OptiFunc1: optimiza una función lineal recurriendo al comando LinearProgramming de *Mathematica*.
83. OptiFunc2: optimiza una función lineal recurriendo a los comandos Maximize y Minimize de *Mathematica*.
84. SimplexVH: aplica el método símplex para maximizar o minimizar una función lineal donde no existen variables artificiales (solo de holgura) y soluciones degeneradas. No resuelve problemas con soluciones múltiples.

85. SimplexVA: aplica el método símplex para maximizar o minimizar una función lineal donde existen variables artificiales, sin soluciones degeneradas. No resuelve problemas con soluciones múltiples.
86. Dual: retorna el dual del problema primal ingresado.

Metodología

La metodología se fundamentará en una explicación magistral de las principales características del paquete *VilGebra* y la resolución por parte de los participantes de distintos ejemplos de ejecución. Se entregará un CD con los contenidos necesarios para el desarrollo de cada una de las prácticas.

Conclusiones

El paquete *VilGebra* representa un esfuerzo docente con miras a sistematizar una metodología asistida por computadora en cursos de álgebra lineal para ingeniería. Su aporte principal reside en dotar al software *Mathematica* de una serie de nuevos comandos en un área específica de estudio, compartida por el currículo de distintas carreras universitarias en todo Latinoamérica.

Bibliografía y referencias

Arce, C, Castillo, W., & González, J. (2004). *Álgebra lineal.* San José: Editorial de la Universidad de Costa Rica.

Kolman, B. (1997). *Álgebra lineal con aplicaciones y Matlab.* México: Editorial Pearson.

Shiskowski, K., & Frinkle, K. (2011). *Principles of Linear Algebra with Mathematica.* USA: Editorial Wiley.

Vílchez, E. (2012). *Álgebra lineal apoyada con Mathematica.* Costa Rica: Editorial Tecnológica.

Escenarios de aprendizaje para la solución de problemas apoyados con matemática dinámica.

Alfonso **Meléndez** Acuña
Escuela Colombiana de Ingeniería, Bogotá
Colombia
alfonso.melendez@escuelaing.edu.co

Resumen

Problem solving has been investigated in mathematics education for more than 60 years ago since the pioneering work of George Polya (Polya , 1965). His four step method: understand the problem, devise a plan , carry it out and look back , still apply as a general framework. In recent years the emergence of dynamic mathematics has scaffolded this and other methods of solving mathematical problems (Christou , Mousoulides , Pittalis & Pitta - Pantazi , 2005) , this has generated great interest in new ways of teaching and learning mathematics and in building dynamic learning scenarios to support the different stages of problem solving. A teaching-learning approach for problem based learning, based on the construction of dynamic learning scenarios and the notion of co-action is discussed and presented in this article.

Palabras claves: Dynamic mathematics, GeoGebra, problem solving, Polya, education, mathematics

Objeto de estudio

La solución de problemas es un tema importante en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Los educadores y matemáticos George Polya (1887-1985) y Alan H. Schoenfeld (1943-), con sus continuos e importantes aportes en esta área han destacado dos aspectos en los cuales haremos énfasis en el Taller. El elemento integrador de diferentes áreas matemáticas y el aspecto formativo, en lo que tiene que ver con el desarrollo de habilidades creativas y estrategias heurísticas.

El surgimiento de la matemática dinámica[1] ha contribuido a la creación de ambientes educativos computacionales de apoyo a la solución de problemas en sus diferentes etapas (comprensión, exploración /descubrimiento, justificación/validación) y ha permitido potenciar las capacidades creativas y heurísticas del estudiante y la percepción de una matemática integrada en sus diferentes disciplinas (geometría, álgebra, etc.).

En el Taller se discutirán escenarios de aprendizaje en GeoGebra para apoyar las diferentes etapas del proceso de solución de problemas. Estos escenarios servirán de base para generar reflexión y discusión por parte de los asistentes sobre el rol de la matemática dinámica en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

[1] *Colette Laborde (Cabri), Markus HohenWarter (GeoGebra).*

Antecedentes

> La principal razón de existir del matemático es resolver problemas y, por lo tanto, en lo que realmente consisten las matemáticas es en problemas y soluciones. Paul R. Halmos

Desde el año 2012 se viene trabajando a nivel teórico y práctico en la integración entre la matemática dinámica y la solución de problemas con el fin de mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Inicialmente se comenzó en cursos de cálculo para estudiantes de primeros semestres de ingeniería. La primera propuesta metodológica se presentó en el Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, CIBEM 2013[2], realizado en Montevideo, Uruguay, en septiembre de 2013. A partir de este momento se vio la necesidad de trabajar no sólo con estudiantes sino también con profesores de matemáticas, para lo cual se diseñó un curso que fue dictado a maestros de colegios como parte de la Maestría en Enseñanza de las Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de Colombia. El resultado de esta nueva experiencia se documentó y se escribió un artículo para el congreso Frontiers in Mathematics and Science Education, FISER 2014[3], realizado en Famagusta, Turquía, en febrero de 2014. Este mismo artículo se publicó luego en el European Journal of Science and Mathematics Education. Finalmente, con algunas mejoras en la metodología se presentará en el Congreso internacional de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas mediadas por TIC, CIMATIC 2014, que se llevará a cabo del 6 al 8 de octubre en Armenia, Colombia.

Fundamentación teórica

> First, guess; then prove... Finished mathematics consists of proofs, but mathematics in the making consists of guesses (Pólya*,* 1965)

El uso de herramientas (tanto tradicionales como digitales) es un componente esencial en el aprendizaje de las matemáticas. A medida que se emplean facilitan las actividades del aprendiz, van configurando su espacio mental y, con el tiempo, se constituyen en herramientas psicológicas mediadoras de los procesos de pensamiento (Vygotsky, 1978). Luis Moreno-Armella, Stephen, J. Hegedus y James J. Kaput distinguen cinco etapas en la evolución de las herramientas simbólicas, que van "desde inscripciones estáticas e inertes a objetos dinámicos o diagramas que son construíbles, *m*anipulables e interactivos" (Moreno-Armella & Kaput, 2008). Estas últimas herramientas simbólicas, que hoy en día reciben el nombre de matemática dinámica, han venido revolucionando la educación matemática en los últimos años, entre otros aspectos porque proveen "facilidad y rapidez para transformar las construcciones hechas en la pantalla, realizar mediciones y disponer de un gran número de ejemplos tan variados como quieran. Esto da a los estudiantes la posibilidad de realizar experimentaciones que les permitan plantear y verificar conjeturas o encontrar propiedades matemáticas no evidentes con las que abordar la resolución del problema planteado" (Gutiérrez & Boero, 2006).

Algunos autores han planteado una nueva manera de interacción con los objetos matemáticos, llamado co-acción: "Consideremos lo que llamamos objetos de **frontera** que son esenciales para que ocurra la co-acción. Estos son encarnaciones digitales y dinámicas de objetos matemáticos que son definidos inicialmente en un ambiente de lápiz y papel y que pueden ser explorados de manera significativa en estos nuevos ambientes. Esta encarnación no es sólo un cambio semiótico de representación dentro del mismo medio, el medio estático. De hecho, una

[2] http://www.cibem.org/home.php
[3] http://fiser.emu.edu.tr

representación digital semiótica de un objeto de **frontera** posee una cualidad que no está presente en la representación de lápiz y papel: la ejecutabilidad de su representación (Moreno-Armella et al., 2008). Esta cualidad puede transformar **la clase de interacción que un estudiante tiene con las matemáticas**, por ejemplo, cuando dentro de un entorno como GeoGebra o Cabri un estudiante se encuentra explorando las propiedades de un triángulo y mueve uno de sus vértices con el ratón o usando un deslizador, el entorno reacciona creando un nuevo triángulo que conserva ciertas propiedades del original, esto estimula mentalmente al estudiante permitiéndole observar alguna regularidad. Esta interacción entorno-usuario al ser iterada produce la llamada co-acción.

Metodología

En el caso de la metodología de solución de problemas propuesta por Polya, la interacción del estudiante con un entorno dinámico permite que la co-acción se produzca en cada etapa del proceso de solución, el reto consiste en construir los entornos dinámicos adecuados para que se llegue a una solución. Veamos un ejemplo:

> *Hay dos postes clavados en la tierra, uno mide 6 metros de alto y el otro 3. Los postes se encuentran separados por una distancia d. La parte superior de cada poste está atada con un lazo a la base del otro poste. ¿Cuál es la altura mínima del punto Q? (Diagrama 1)*

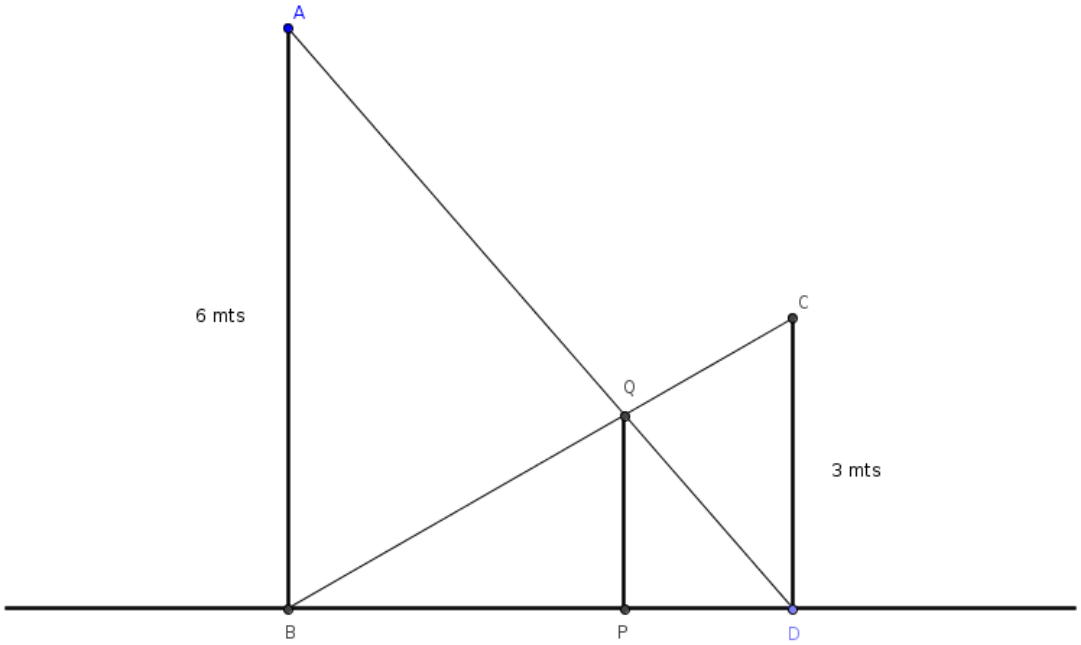


Diagrama 1: El modelo de los postes

1. Comprensión del problema

Una simulación física revela algunos detalles del problema, pero tiene limitaciones: los estudiantes no pueden manipular fácilmente el problema o extender y modificar sus parámetros. Al solicitarles la construcción de un modelo en matemática dinámica (en este caso GeoGebra), la mayoría de estudiantes, en una etapa inicial, utiliza líneas y segmentos sin atender a las relaciones geométricas del problema. Al realizar la prueba del arrastre el modelo colapsa. Este es un "buen" error, ya que lo motiva a entender las limitaciones de un modelo visual y lo lleva a

observar la relación entre los datos y la incógnita (las condiciones del problema), o sea los aspectos geométricos del problema.

Luego de obtener un modelo "matemático" en GeoGebra, donde están plasmadas las relaciones entre los datos del problema, se puede entablar una breve conversación inicial con el modelo (co-acción) para lograr un entendimiento del problema y luego con los compañeros de clase y, posiblemente, con el profesor para validar "socialmente" el modelo. Esto conduce rápidamente a la observación de que, por ejemplo, los postes deben ser perpendiculares al piso y que éste no necesariamente debe estar horizontal en un modelo matemático dinámico.

2. Diseño de un plan

Una vez se logra "expresar" en GeoGebra la estructura geométrica del problema y se tiene una discusión sobre su validez, se puede resolver la pregunta planteada: ¿A qué altura está el punto Q? Empleando el modelo se puede observar que el punto Q está a una altura de 2 metros del piso (**Diagrama 2**). Una exploración posterior permite determinar que la distancia entre los postes es irrelevante, incluso la altura se mantiene si el piso no es horizontal. Arrastrando el punto Q el modelo le informa al estudiante que su altura es invariante, en este caso la altura del punto siempre es 2. Esto explica de inmediato por qué esta altura siempre es igual. Los estudiantes son "inducidos" por el modelo dinámico al siguiente nivel de exploración: ¿Cómo está relacionada la altura del punto Q con la de los dos postes? Muchos estudiantes se aventuran rápidamente a formular una hipótesis:

La altura de P es el cociente entre las longitudes del poste más largo y el más corto.

Numéricamente esta hipótesis es cierta para el enunciado del problema, pero inmediatamente se puede pasar a la co-acción e investigar y determinar (cambiando la longitud de los postes) que esta propiedad no se cumple y surge el siguiente plan: encontrar una relación general entre la altura de los postes y la altura del punto Q.

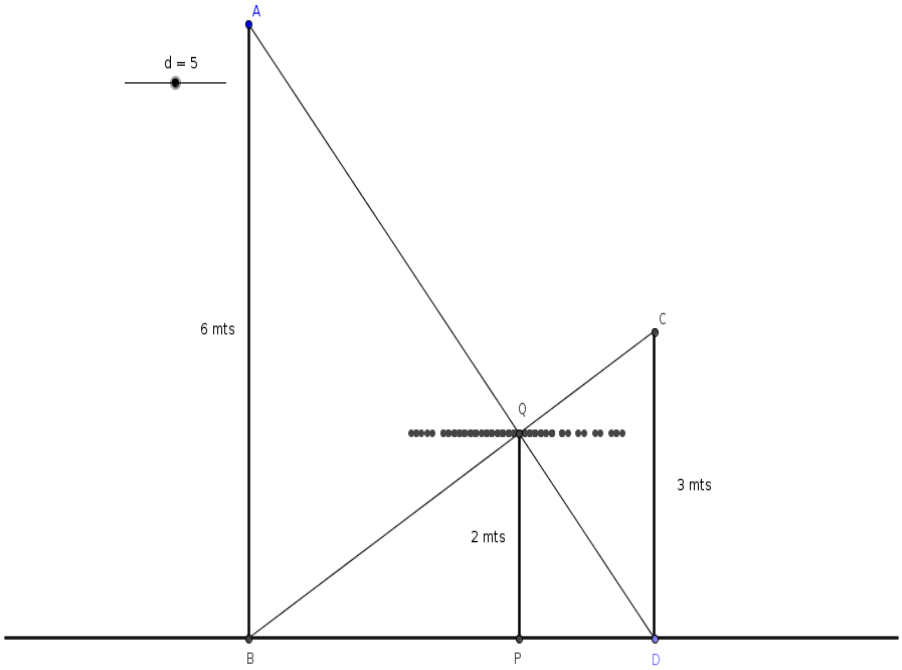


Diagrama 2: Diseño de un Plan

3. Ejecución del plan

Se debe encontrar una relación general entre la altura de los postes y la altura del punto Q. En experiencias de aula con estudiantes y profesores la ejecución normal del plan involucra proporcionalidades de triángulos; sin embargo, teniendo en cuenta que tenemos un ambiente dinámico que fomenta la integración entre diferentes ramas de la matemática, puede surgir el siguiente plan de ejecución para resolver el problema:

Mirar qué pasa cuando la distancia entre los postes tiende a cero.

Si construimos un escenario donde se pueda ejecutar este plan podríamos tener algo como lo siguiente (*Diagrama 3*):

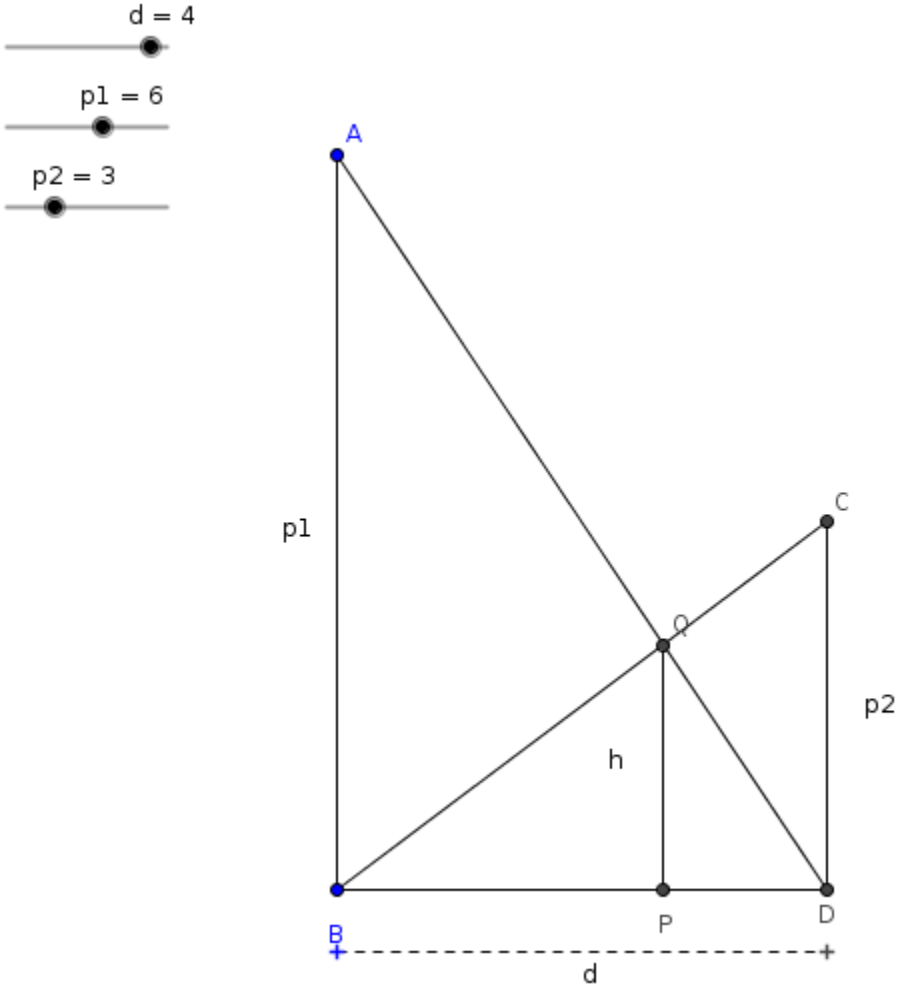


Diagrama 3: Escenario simplificado

Cuando d tiende a cero hay tres segmentos que quedan iguales: BQ, PQ y DQ, esto nos induce a tratar de encontrar relaciones de proporcionalidad entre estos segmentos. Surge entonces la siguiente fórmula:

BQ/CQ = AQ/DQ [1]

Y al deslizar d hacia 0, obtenemos (*Diagrama 4):*

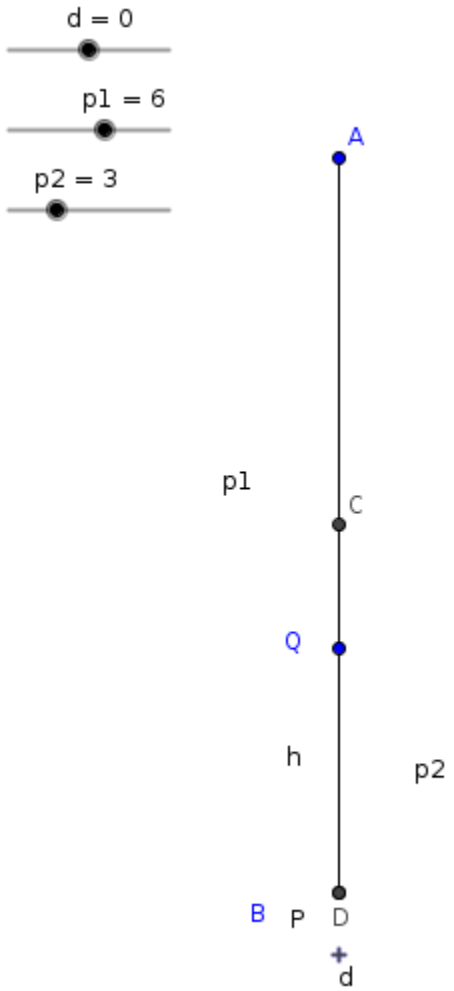


Diagrama 4: Reducción de distancia a cero.

en este caso límite, BQ=PQ=DQ=h, QC=p2-h, AQ=p1-h y obtenemos de [1]:

h/(p2-h)=(p1-h)/h [2]

resolviendo para h, encontramos fácilmente que h= pi*p2/(p1+p2), o sea que h es la media armónica de p1 y p2.

Conclusiones

Aunque descubrir la solución a un problema es interesante, lo más importante es la experiencia holística que ayuda a los estudiantes a apreciar las formas matemáticas de razonamiento y la "racionalidad" detrás de las leyes matemáticas. A lo largo del aprendizaje, la co-acción permite desarrollar una gran variedad de roles cognitivos, como los siguientes:

1. Ayuda a los estudiantes a entender el problema y a identificar falencias en su conocimiento matemático.
2. Ayuda a resolver el problema original y abre la puerta a futuras exploraciones.
3. Ayuda al estudiante a razonar paralelamente con el modelo, formulando y rechazando hipótesis.

4. Sirve como un modelo conceptual para el razonamiento, que eventualmente se puede incorporar en un modelo mental del estudiante, útil en un posible encuentro con modelos similares.
5. Por último, muestra cómo las herramientas soportan y limitan nuestra percepción de los procesos matemáticos.

Bibliográfía

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Christou, C., Mousoulides, N., Pittalis M. & Pitta-Pantazi, D. (2005). Problem solving and problem posing in a dynamic geometry environment. The Montana Mathematics Enthusiast, 2(2), 125–143.

Vygotsky, L.S. & Cole, M. (1980). *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes* (New Ed edition.). Cambridge: Harvard University Press.

Moreno-Armella, L., Hegedus, S.J. & Kaput, J. J. (2008). From Static to Dynamic Mathematics: Historical and Representational Perspectives. Educstudmath Educational Studies in Mathematics, 68(2), 99-111.

Gutiérrez, A. & Boero, P. (2006). *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future*. Rotterdam: Sense Publishers.

Moreno-Armella, L. & Hegedus, S. J. (2009). *Co-action with digital technologies*. ZDM, 41(4), 505-519.

ETM de la noción de tangente en un ámbito grafico Cambios de dominios y de puntos de vista[1]

Elizabeth **Montoya** Delgadillo
Instituto de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica-Valparaíso
Chile
emontoya@ucv.cl
Laurent **Vivier**
Laboratoire de Didactique André Revuz, Université Paris Diderot
France
laurent.viver@univ-paris-diderot.fr

Resumen

En esta investigación presentamos la concepción de tangente desde un enfoque gráfico que poseen estudiantes chilenos de primer año universitario en una carrera de Matemáticas, y una vez que ellos han inicializado sus estudios de derivada. Confrontamos estos resultados con los puntos de vista local, global y puntual, perspectiva característica en la enseñanza del análisis. Mostraremos resultados que la concepción intuitiva que poseen los estudiantes de tangente no basta para construir el concepto de derivada, la cual es una noción fundamental en el análisis y por sobre la cual reposa esta noción a nivel de enseñanza. Los análisis se sustentan con el modelo de los Espacios de Trabajo Matemático (Kuzniak, 2011) y serán discutidos y confrontados en un taller, incluyendo un análisis implicativo entre variables involucradas.

Palabras clave: tangente, derivada, local-global.

Introducción

La Enseñanza del Cálculo (o Análisis para algunos países) comienza a fines del liceo por lo general con un énfasis en lo calculatorio, pero en la universidad es donde se estudian con mayor profundidad conceptos basales de este dominio de la matemática como límite, continuidad, derivadas, integrales, y las respectivas extensiones cuando se pasa a $\mathbf{R}^n$ u otros conjuntos. Sin embargo, el pasaje que realizan los estudiantes de una institución a otra, el grado de abstracción que se aborda al dejar enfoques algoritmizados, y en definitiva las "discontinuidades" entre nociones matemáticas hacen entre otros elementos que existan verdaderos obstáculos y fracasos en el aprendizaje del Cálculo.

Diversas investigaciones (ver por ejemplo Tall, 1991; Artigue, 1998) y con distintas aproximaciones teóricas han dado cuenta de la dificultad en el aprendizaje en el dominio del Análisis. Al respecto, ya hace 15 años atrás Artigue (1998) categorizó la existencia de dificultades persistentes de los estudiantes en el campo conceptual del Análisis, distinguiendo: dificultades ligadas a la complejidad matemática de los objetos básicos de este campo conceptual, las dificultades ligadas a la conceptualización de la noción de límite, que es la noción

[1] Este trabajo está bajo el sustento del proyecto ECOS-Sud C13H03.

central del campo, y a su dominio técnico; dificultades ligadas a la necesaria ruptura con modos característicos de pensamiento del funcionamiento algebraico.

Es justamente en esta última categoría de dificultades donde nosotros hemos identificado una ruptura en el aprendizaje del análisis, y se refiere a la reconstrucción de objetos matemáticos en los que se tiene un conocimiento empírico y mediante el cual se sustentan en la enseñanza otros objetos matemáticos centrales del análisis como lo es la derivada. Explícitamente, nos referimos a la tangente, objeto matemático que se introduce en el nivel 8 (13 años) en la escuela en Chile.

Nos parece un fenómeno interesante de estudio, que la derivada reposa sobre la idea geométrica de la recta tangente, noción que se estudia empíricamente como un elemento auxiliar de la circunferencia, en el cual existe la idea "intuitiva" que la recta tangente solo tiene un punto en común con la curva (una famosa concepción, conocida desde mucho tiempo, ver por ejemplo (Sierpinska 1985)).

Retomando los trabajos de Vinner (1991) y de Castela (1995), la investigación de Páez y Vivier (2013) ha permitido identificar las diferentes concepciones de la noción de tangente, incluso concepciones globales y locales que constituyen una dialéctica característica del dominio del análisis introducida por Maschietto (2002) para la ingeniera didáctica realizada. Sin embargo, en esta investigación analizaremos la concepción del estudiante frente a la noción de tangente en el momento que ellos estudian el concepto de derivada en la universidad en un curso de Cálculo. En este estudio, el referente teórico es el Espacio de Trabajo Matemático, ETM, propuesto por Kuzniak (2011), y enriquecemos el modelo de Kuzniak con los *puntos de vistas* de Vandebrouck (2011) para las funciones que extendemos a otros objetos del análisis (Estrella y al. 2015).

En el Análisis muchas veces se trabaja con propiedades locales que se contrapone al pensamiento algebraico, pero en este trabajo, introducimos el tratamiento de la dialéctica global/local desde un dominio geométrico en un registro gráfico para el caso de las tangentes con una atención a los cambios de dominios (Montoya y Vivier 2014), específicamente en el dominio del análisis con las funciones.

Presentación del ámbito de los ETM

Esta investigación se inscribe en la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático, ETM (Kuzniak, 2011) que en sus inicios fue conocida como teoría de Paradigmas y Espacio de Trabajo Geométrico (Houdement & Kuzniak, 2006). En la actualidad, este constructo considera un ETM que depende de un dominio matemático (Kuzniak, 2011) como el análisis, la geometría, el álgebra, las probabilidades, etc. Los paradigmas son la caracterización del ETM en un dominio específico, esto es, hablaremos de los paradigmas geométricos, los paradigmas del análisis, etc, (ibid.).

Se distinguen tres tipos de ETM, a saber: el **ETM de referencia**, que está definido según la relación con el saber, idealmente bajo criterios matemáticos; un **ETM idóneo**, el cual depende de una institución, y que es definido según la manera que este saber se enseña en la institución con una función específica; **un ETM personal** que depende del individuo y definido para la manera que el individuo se enfrenta a un problema matemático, con sus propios conocimientos y capacidades cognitivas.

En el ETM se concibe la reflexión como el fruto de la interacción entre un individuo y los problemas en geometría (o análisis, álgebra, etc.) es un ambiente organizado por y para el

geómetra o algebrista, etc. mediante la articulación de dos planos: el epistemológico y el cognitivo (Kuzniak, 2011).

El *plano epistemológico* está compuesto por tres polos, a saber: el *referencial* que está constituido por las propiedades, los teoremas, las definiciones, el *representamen* (signos semióticos), y los *artefactos* (elementos materiales o simbólicos). El *plano cognitivo* se compone de los procesos de *visualización, construcción y prueba*. Los planos se articulan mediante tres génesis como se observa en la figura 1: una *génesis semiótica* basada sobre los registros de representación semiótica que confiere a los objetos tangibles del ETM un estatus de objeto matemático operacional; una *génesis instrumental* que permite de operacionalizar los artefactos en el proceso de de construcción; una *génesis discursiva* de la prueba que da sentido a las propiedades para dejarlo al servicio del razonamiento matemático.

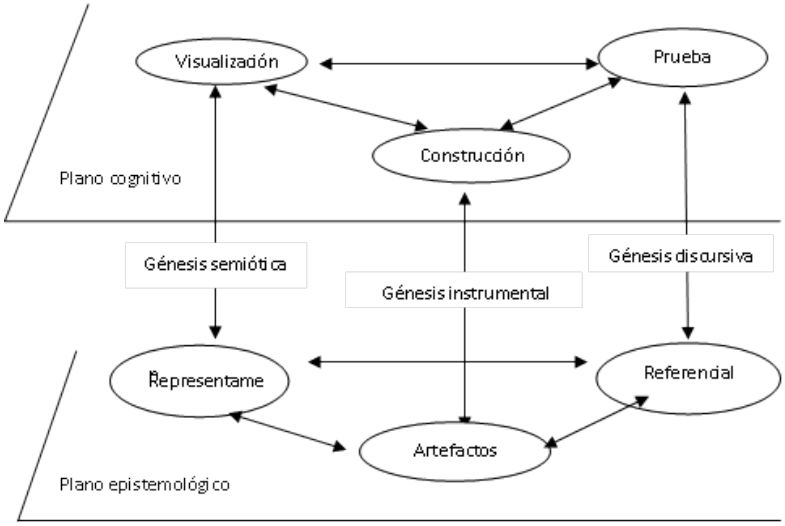


Figura 1. El espacio de trabajo Matemático y sus génesis (Kuzniak, 2011).

Esta articulación no debe ser entendida como la unión individual entre las componentes de los planos epistemológico y cognitivo, sino más bien como una relación activa conjuntamente por dos o incluso tres génesis (Kuzniak y Richard (2015) identificaron tres planos *verticales*).

Para el investigador, es importante identificar la génesis activada por un profesor (ETM-idóneo), o las génesis privilegiadas por un alumno en la realización de una tarea matemática (ETM-personal) para entender el trabajo matemático.

El ETM de referencia del Análisis (ETM_A) es guiado globalmente por el Análisis estándar, y caracterizado con los tres paradigmas siguientes identificados en (Estrella y al. 2015):

Análisis-Geométrico/Aritmético (**AG**) que permite interpretaciones, con implícitos, nacidas de la geometría, del cálculo aritmético o del mundo real.

Análisis-Calculatorio (**AC**) donde las reglas de cálculo son definidas, más o menos explícitamente, y se aplican independientemente de la reflexión de la existencia y naturaleza de los objetos introducidos.

Análisis-Infinitesimal (**AI**) es caracterizado por un trabajo de aproximación y de proximidad: cotas, una entrada a trabajos de proximidad (o una entrada más topológica): "cerca de ε", “lo despreciable”.

Vandebrouck (2011) identificó tres puntos de vista que juegan un rol importante en el trabajo sobre funciones: puntuales, locales y globales. En este sentido, nosotros nos apoyamos en el punto de vista de Vandebrouck para el objeto tangente.

El punto de *vista puntual* asociado a un punto de la tangente (una correspondencia $M \rightarrow T_M$). Esto es lo que uno puede ver si existe la derivada en un punto (calcular la ecuación de la recta tangente con $f(x_0)$ y $f'(x_0)$ en un paradigma AC), por ejemplo cuando se "pulsa" sobre el botón "tangente" de Geogebra sobre el punto de la curva en cuestión o cuando se considera la "perpendicular al radio" para el caso de un círculo. El punto esencial es que la tangente pasa por un punto, y se puede añadir una propiedad que *encapsula* un otro punto de vista sin que sea explícito.

El punto de *vista global*, es la percepción de la tangente como una recta con una ecuación (paradigma AC) o una traza gráfica rectilínea (paradigma AG).

El punto de *vista local* está más relacionado con el paradigma de la AI, que se basa en el hecho de que la tangente y la curva son localmente fusionados (propiedad de micro-linealidad de Maschietto (2002), también con claros vínculos con el análisis no estándar), posiblemente con una aproximación tomando dos puntos cercanos. También se puede pensar en que se "pegan" o "tocan", aunque esto también puede estar asociado a un punto de vista puntual de un punto crítico.

Es pertinente considerar que para definir la tangente, es necesario considerar estas tres perspectivas, cada uno centrado en distintos aspectos. Específicamente, cada punto de vista, activa diferentes génesis del ETM y es frecuentemente necesario pasar por estos tres puntos de vistas para determinar una tangente.

Por ejemplo, una tarea en el registro gráfico como es lo que estamos estudiando, la génesis semiótica se activa de forma diferente y, específicamente, a través de: (1) el punto de vista global por la visualización de una traza gráfica rectilínea que se *prolonga infinitamente* (notemos también que se activa la génesis instrumental con el artefacto "regla"); (2) el punto de vista local por la visualización sobre una pequeña porción de la curva; (3) el punto de vista puntual al considerar el punto donde debemos determinar la tangente.

Es posible que un punto de vista esté ausente o defectuoso, provocando oposición o dificultades para resolver una determinada tarea en un dominio específico. A continuación, se espera que en estos casos, los cambios de dominio (Montoya y Vivier 2014) posean recursos de *puntos de vistas* disponibles en el nuevo dominio, que pueden estar vinculados a diferentes paradigmas (y que eventualmente los nuevos puntos de vista también pueden ser débiles). En nuestro estudio, específicamente esperamos cambios de dominio de la geometría para el análisis (paradigma AC principalmente para la población de estudio).

Análisis a priori

Tomamos las ideas principales de tangente realizadas en otros estudios (Castela, 1995; Páez y Vivier, 2013; Vinner 1991; Sierpinska 1985). En particular, la concepción global es bien conocida y nosotros esperamos encontrar algunas respuestas. Esto está relacionado con una percepción antigua de tangente, válida al menos para las cónicas: una tangente es una recta que tiene un único punto de intersección con la curva. También se puede interpretar como una depreciación del punto de vista local y una preponderancia de los otros dos puntos de vista con una especie de inyectividad de la correspondencia $M \rightarrow T_M$ del punto de vista puntual.

Presentamos a continuación los criterios de nuestra codificación en conjunto con un análisis a priori de la curvas Las curvas sin respuesta se codifica NR por *No Respuesta*. Además, se usan: **ne** por la respuesta *no existencia*, y **O**, por *Otro* para designar una respuesta que no aparece en los otros códigos, o en el caso de respuestas ambiguas (como A19 #8) o con una alternativa (como A25 #8 y #10). Por último, los estudiantes se identifican con A1 a A49 y las curvas de #1 a #12.

Nosotros planteamos como hipótesis que si hay un cambio de dominio es por encontrar argumentos para apoyar una conjetura proveniente de una percepción visual. Cabe señalar que los estudiantes a menudo perciben que hay una tangente, pero la situación específica planteada en las curvas los puede hacer errar o dudar en sus respuestas.

En las situaciones propuestas, la visualización juega un rol preponderante. La *visualización* es el primer proceso que es seguido por una *construcción* (principalmente para la existencia) o sea por una *prueba* (por una no-existencia). Una *prueba* es solicitada principalmente en una respuesta de no existencia, por ejemplo, con una concepción global o bien en un cambio de dominio se afirma la no diferenciabilidad. Sin embargo, una génesis discursiva se puede activar en el caso de una situación problemática como en las curvas localmente rectilíneas.

Curvas #1, #3 y #7

Estas curvas no deberían tener ningún problema, ellas no permiten identificar la concepción global, las curvas son regulares en cada uno de sus puntos - esperamos un 100% de éxito en las respuestas de la población de estudio. La #1 es la curva representativa de una función si nos imaginamos los ejes como se representan habitualmente (un eje horizontal y un eje vertical). El #2 no es representativo de una función, pero es un círculo, la primera curva por la cual se enseña la tangente. Es posible que se muestre el centro y radio del círculo reducida a la definición geométrica *perpendicular al radio* (rol del polo teórico). La #3 es una elipse, similar al caso del círculo así que no esperamos alguna respuesta en particular.

Estas tres curvas están presentes básicamente para que los estudiantes tengan confianza, consideren lo que ellos saben y lo más importante, desde la perspectiva del investigador, para servir de apoyo para el análisis de otras respuestas, sabiendo que estas curvas no plantean problema alguno (hipótesis).

Curvas #2 y #10

Por estas curvas, la concepción global estricta debería conducir a la no existencia de una tangente en el punto indicado ya que la recta « cortaría » la curva. Este tipo de respuestas pueden eventualmente ir acompañada de una marca (o traza) gráfica, para indicar el segundo punto de intersección. Codificamos las respuestas por **G** por *Global*.

Trazar una recta tangente en un punto indicado que corta claramente la curva es un claro signo de una percepción local de lo que es una tangente, por lo que puede intersecar la curva sin problemas. Esta es una fuerte intención del sujeto en precisar que una tangente es un objeto global (una recta) cuya definición es local (también podemos ver una flexibilidad entre las perspectivas locales y globales). Nosotros codificamos estas respuestas con una **L** de *Local*. Posteriormente, no detallaremos las respuestas codificadas por L a aquellas que posean una traza gráfica de la(s) tangente(s) dado que nos parece claro el punto de vista local.

Respuestas intermedias pueden aparecer: ya sea porque la concepción local no permite trazar una recta que cruce la curva (descrito anteriormente), o por una concepción global (menos

estricta) que se adapta a la situación mediante la restricción del *dominio de definición* de una tangente que es solo una parte conexa de una recta (esta concepción se desarrolla alrededor de los puntos de vista local y puntual, pero la inyectividad supone que $M \rightarrow T_M$ y genere un débil punto de vista global). Es difícil decidir entre las dos interpretaciones con un solo registro que es el gráfico, salvo que la traza se detenga justo antes de cortar o "cruzar" la curva. También es posible que existan indicaciones verbales de la restricción. Codificamos estas respuestas con **Gloc**.

Por estas dos curvas, es posible ver un cambio de dominio ya sea para justificar la existencia o no existencia (para #2, ya que no es una representación habitual de un gráfico de una función y #10 no es la gráfica de una función con la propiedad que solo las curvas de las funciones poseen tangentes. Sin embargo, la distinción G / L / Gloc debería ser suficiente para responder y estos cambios de dominio deberían ser limitados.

Curva #4

Esta curva es un caso particular (cf. la curva #2) y especialmente se solicita la tangente en el punto singular (como un punto estacionario de una cicloide). La tangente existe y es vertical, pero es posible que este caso nunca sea encontrado por los estudiantes. Aquí, se espera cambios de dominio al tratar de tomar información en términos de la derivada (ya sea por la existencia o, más probablemente, la inexistencia de una diferenciabilidad o un número derivado infinito - así la codificación es **One**). Aquí, el cambio de dominio es causado por el proceso de visualización y la no apropiación del referencial teórico que en este caso da soporte a la respuesta.

Es también posible (Páez y Vivier 2013) que la concepción global requiera de trazar rectas que pasan por el punto, pero no son tangentes: estas rectas tienen, de hecho, solo un punto común con la curva a pesar de la gran distancia con la imagen mental que se tiene de una tangente - pero aquí la respuesta puede ser promovida por la curva que no es habitual. La concepción débil del punto de vista local en la interpretación de la concepción global está mucho más tensionado aquí y conduce a la desaparición del punto de vista local. Estas rectas concurrentes pasan por el punto indicado y las codificamos por **RC,** *rectas concurrentes.* Esta respuesta puede ser positiva debido a la existencia de una (o muchas) tangente(s), y será negativa porque hay muchas rectas y falla la unicidad de la tangente. Cuando existen muchas rectas trazadas como solución, las codificamos por **RC+**. Aquí, los puntos de vista puntuales activan la génesis discursiva (polo teórico) que sugiere la existencia de otras rectas. RC no es una respuesta esperada en estas curvas. Nosotros postulamos que RC solo puede aparecer, esencialmente, para las curvas no regulares.

El punto de vista global puede ser suficiente para una respuesta correcta, pero la tangente corta la curva y puede que la recta no sea considerada como la tangente.

Hay que tomar en cuenta que un cambio de dominio hacia la cinemática puede conducir a la no existencia ya que este punto es estacionario (el vector velocidad es cero y no puede dirigir ninguna recta). Este cambio de dominio puede darse al considerar las trazas (o signos) que describen la trayectoria.

Curvas #5 y #9

La concepción local (L) conduce simplemente a una línea recta idéntica (es posible que algunas respuestas solo sean la manifestación de una concepción local, porque *no hay nada que dibujar!* Aunque en este caso, se espera una explicación verbal de tipo: *la misma recta!*). Una

concepción global (G) es posible, estrictamente hablando o bien del tipo Gloc (como en #2), y dar una respuesta de no existencia porque hay un número infinito de puntos en común (el debilitamiento del punto de vista global ya no es suficiente y se opone a la inyectividad $M \rightarrow T_M$.) También podemos encontrar respuestas del tipo RC, con la existencia (o no existencia RC+ cuando se combina con la propiedad de unicidad).

Sin embargo, la recta es una representación gráfica de una función que es conocida por casi 5 años por los estudiantes de esta investigación. Aquí, el cambio de dominio puede ser beneficioso porque hay una función afín y sabemos que estas funciones son funciones diferenciables. Este cambio de dominio debe dar lugar a la existencia de una tangente (recordemos sin embargo, que este argumento surge después de una hora de trabajo, individual y en parejas, seguida de un debate entre los profesores de matemáticas en México (Páez et Vivier 2013)).

Por la curva 9 también se pregunta una tangente a una parte o porción rectilínea, pero en este caso la curva no es identificable y puede haber diferencias en las respuestas.

Curvas #6 y #8

Las tangentes a estas curvas son los puntos de inflexión y la tangente cruza (o *atraviesa)* la curva porque hay un cambio de concavidad. Aquí, el hecho de que la segunda derivada sea cero puede conducir a la percepción de que la curva es localmente una recta, y también una situación similar a las curvas #5 y #9. Esperamos específicamente tener respuestas negativas del estilo "no, porque la tangente cruza la curva", codificada por **C** de *cruzar*.

Para la curva #6 esperamos un cambio de dominio al declarar que la curva no tiene tangente en este punto (la función no es diferenciable, o « derivada infinita »), y similarmente para la curva #8 (esta curva no es representativa de la gráfica de una función), pero es probable que sea la concepción global (G) que “masivamente” lleve a responder la inexistencia de la tangente en la curva #8.

Curva #11

Esta curva tiene dos posibles respuestas para la tangente en el punto, pues tiene multiplicidad dos (considerando coordenadas paramétricas). Para responder de manera positiva, es necesario hacer caso omiso de la propiedad de unicidad. Un cambio del dominio de la cinemática (gestos) es aquí operacional y puede conducir a la existencia de dos tangentes, distinguiendo temporalmente. Sin embargo, no esperamos argumentos relacionados con curvas paramétricas para esta población de estudiantes.

Los dos tangentes no cruzan la curva y podrían ser compatibles con la concepción global, pero el hecho es que estas dos rectas pueden ser percibidos como que atraviesan la curva (cf. **C**). La no unicidad de las tangentes puede dar lugar a la no existencia de la traza de una de las dos tangentes.

Curva #12

Se puede concluir como en #11 donde se invoca la propiedad de unicidad ya que podemos percibir dos tangentes (o dos medias tangentes). También podemos esperar respuestas del tipo RC como en la curva #4. Un cambio de dominio es operacional porque tiene dos derivadas diferentes, a la derecha y a la izquierda.

Esta curva tiene una forma que parece claramente desigual. La génesis semiótica es esencial en este caso y el proceso de visualización lleva a una interpretación de una curva que es de primordial importancia: la curva es regular o no? Cabe señalar que en todas las curvas presentadas, esta pregunta es válida, pero la pregunta puede ser más probable que se realice en #12 debido a la traza propuesta. Podemos decir que la curva es regular ("suave"), sin que uno está realmente en condiciones de decir cuál es la tangente, porque tenemos una percepción global de la curva en esa traza propuesta, o porque hay una tangente porque la curva no es regular, pero no se ve con la traza propuesta debido a que no es lo suficientemente específica. De hecho, la traza no dice nada sobre el comportamiento local de la curva y la única respuesta verídica (o exacta) es que no se puede responder.

Resultados[2]

El estudio experimental fue realizado a 44 estudiantes chilenos de segundo semestre de un curso de Calculo II durante el año universitario 2014. Cabe señalar que la noción de derivación no se aborda en el liceo (obligatoriamente) y que la tangente es mostrada como un elemento auxiliar de la circunferencia al final de la escuela chilena primaria (grado 8, 13 años). En general, los estudiantes encuentran estas nociones en el primer año en los cursos de Cálculo, las curvas en otras coordenadas (paramétricas y polares son parte del estudio en estos cursos) y poseen conocimientos elementales de cinemática a nivel del liceo. En los cursos de cálculo se sigue con el estudio habitual de derivada desde una perspectiva geométrica, y reposando esencialmente sobre los puntos de vista local y global del "límite de una secante", noción que se observa o desarrolla principalmente en el paradigma de AC y sobre todo con una idea intuitiva e icónica de tangente.

Estudio general con los indicadores

Como era de esperar, las curvas 1, 3 y 7 no presentaron problema y se obtuvieron respuestas con un éxito completo, excepto en la curva 7 para A24 que no responde (tampoco A24 responde a las curvas 8, 10, 11 y 12 y muestra una gran inestabilidad en sus respuestas). A continuación, se muestras respuestas de otras curvas donde hemos puesto atención a la relación entre ellas y los indicadores utilizados. Los resultados que se encuentran en la tabla 1 no arrojan este análisis.

Tabla 1

Resultados generales de 44 estudiantes chilenos de primer año universitario

	#2	#4	#5	#6	#8	#9	#10	#11	#12
NR	0	1	5	8	8	2	5	14	3
L	10	1	19	9	12	18	8	3	0
G	18	1	6	10	15	10	14	3	2
Gloc	13	0	0	1	0	0	12	0	0
RC(RC+)	1	22(5)	12(2)	8(1)	2	7	0	11	23(2)
One(C)	1	19	2	8(4)	5	5	3	12	16
O	1	0	0	0	2	2	2	1	0

[2] Nos apoyamos en la evidencia escrita para nuestro análisis, pero señalamos que nada decimos sobre lo que realmente pensaba el estudiante.

Se obtuvieron 13 respuestas de tipo L comunes a #5 y #9 (incluyendo 8 estudiantes dieron la misma respuesta L para las curvas 5, 6, 8 y 9). Sin duda, podemos identificar de manera más bien evidente, un punto de vista local. Sin embargo, entre estos estudiantes, esto no es siempre el punto de vista local que domina, especialmente para las curvas inusuales: A33 y A34 dan respuestas de tipo RC en #4 y #12 y A29 da una respuesta RC a #11 (dibuja una línea vertical), mientras que todas las otras respuestas son de tipo L

No es sorprendente que el número de respuestas basado en la concepción global (respuestas G) sea importante para todas las curvas donde la tangente corta a la curva (#2, #8 y #10) y para las curvas localmente rectilíneas (#9 y #5). Es lo mismo para #6 con la posibilidad de visualizar una curva local rectilínea, como lo fue para 5 estudiantes de los diez que respondieron G en #6, y que también proporcionaron la misma respuesta G en #9.

Los 13 estudiantes que respondieron Gloc en #2, 8 respondieron Gloc en #10. Esta disposición es coherente para muchos estudiantes - algunos son más cercanos a "G" como A39 o más aun de estudiantes que responden « L » como A7. El estudiante A25 expresa claramente la existencia de una tangente local en #8 y #10, el punto de vista global es en gran medida depreciado.

Como era de esperar, RC es más importante para las curvas #4 y #12. Pero nos parece más sorprendente la fuerte presencia de este tipo de respuestas para curvas localmente rectilíneas como en #5 y #9 y también #6. Esto permite validar nuevamente la relación visual entre las curvas localmente rectilíneas y las curvas que presentan un punto de inflexión. La diferencia con el pequeño número de respuesta RC en #8 se explica por la *concurrencia* de la concepción global para este tipo de curvas que resultan, tal vez, más convincente para los individuos en cuestión, a la no-existencia.

Otras respuestas de inexistencia (One), son importantes para #4, #11 y #12 (no estamos hablando aquí de #6, que es particular, con el argumento de "la recta a atraviesa la curva"). Cabe señalar que cada uno de los puntos son en realidad puntos en los que hay un problema de diferenciabilidad (derivada infinita o velocidad nula para #4, gradiente cero para #11 y no diferenciabilidad para #12). De hecho, los argumentos son a menudo utilizando diferenciabilidad en #4 y #12, entonces con un cambio de dominio: 13 argumentos sobre 19 para #4 y 9 argumentos sobre 16 para #12. Los otros argumentos son la no unicidad, especialmente para #11 y #12, y que la curva no representa una función.

Es interesante constatar que de las 71 respuestas One, 29 respuestas relacionan directamente con la no diferenciabilidad, 2 con la continuidad (no se especifique lo contrario), 9 sobre pendientes, 5 sobre la no unicidad de la tangente y otros 3 sobre funciones. Por lo tanto, 48 argumentos sobre 71 que están relacionados más o menos directamente a la noción de función, lo que valida, al menos parcialmente, nuestra hipótesis sobre cambios de dominio.

Cabe señalar que solo los estudiantes A9 y A23 tienen un puntos de vista local en el dominio del análisis (paradigma AI) evocando el límite en #4 y #12. Todos los otros cambios de dominio se inscriben en el paradigma AC.

Estudios complementarios (desarrollo en el taller)

Un estudio con el Análisis Estadístico Implicativo con software CHIC muestra una coherencia estadística de las variables, ya sea en árboles de similitud (o cohesitivo) o en el gráfico implicativo. Se distingue claramente los bloques de L, G, RC y NR. No es presentamos

aquí el desarrollo de estos análisis, pero los gráficos estadísticos constituirán un trabajo específico en el taller.

Se identificaron tres perfiles "típicos": estudiantes que tienen un perfil G (como A17), estudiantes que tienen perfil RC (como A10 y A14), y estudiantes con un perfil L (A28 , A29, A33). Además, dos estudiantes (A6, A12) tienen un ETM principalmente guiado por las funciones pues frecuentemente cambian de dominio, y por último A18, A19, A41 los consideramos como casos atípicos. El estudiante A10 tiene un perfil interesante casi totalmente guiado por las visiones globales y puntuales.

Conclusión

Lo que se desprende de este estudio es, en primer lugar, la dificultad del concepto de la tangente y la inestabilidad de este concepto entre los estudiantes en una tarea aparentemente simple en el registro gráfico. Esta inestabilidad del conocimiento se refleja en particular en la adaptación a diferentes curvas, el estudiante es guiado por la visualización sin el control epistemológico. Esto confirma las conclusiones de Tall y Vinner (1981, p 152): *different stimuli can activate different parts of the concept image, developing them in a way which need not make a coherent whole*. Muchas de las respuestas son incorrectas, a veces fuertemente como las respuestas RC, y algunos estudiantes tienen respuestas incoherentes. A menudo, la causa es un defecto en la perspectiva local y, en menor medida, desde el punto de vista global.

También observamos un cambio de dominio frecuente, en particular, pero no exclusivo, para afirmar una no-existencia. Los estudiantes se apoyan efectivamente de su solo conocimiento sobre la tangente que está relacionado o conectado a las funciones diferenciables persuadidas por la misma unicidad de la tangente. El trabajo con la diferenciabilidad esconde el punto de vista local sobre la tangente en el dominio inicial o fuente, la geometría, con un paradigma en AC, pues no se necesita un punto de vista local en el dominio de las funciones. Estos cambios de dominio rara vez permiten entregar una respuesta correcta porque en el dominio de las funciones enseñado es demasiado restrictivo para comprender el concepto de tangente. Entonces, ¿qué representaciones privilegiamos en la enseñanza y qué conocimiento sobre la tangente pueden tener los estudiantes? ¿Podemos realmente apoyarnos sobre la noción de tangente para introducir el concepto de derivación?, noción por lo demás tan gravitante en los cursos de cálculo.

Nosotros postulamos, que se requieren los tres puntos de vistas, global, local y puntual, para realizar la tarea gráfica, el defecto o la reducción de uno de ellos conduce respuestas incompletas y, a menudo incorrectas, produciendo a veces una producción (respuesta) alejada a la de una tangente – sin embargo, notamos que el punto de vista puntual está siempre utilizado. Bajo la perspectiva del ETM, la tangente que puede instrumentalizar la noción de derivada no se logra pues la misma tangente no ha sido desarrollada en este ETM, ni menos aun, se han activado las tres génesis que articulan epistemológicamente y cognitivamente esta noción.

Por otro lado, hemos observado que este tipo de respuestas se encuentran en otros contextos institucionales, tales como en profesores en México (Páez y Vivier, 2013), en estudiantes-profesores en Francia (Vivier 2013), e incluso pero menos sorprendente en estudiantes de secundaria (grado 11, 17 años) en Francia pero antes de la enseñanza de la derivación (Vivier, 2010).

Por supuesto, trabajar sobre la tangente, no puede restringirse a un trabajo gráfico exclusivamente. Es necesario complementarla mediante el trabajo con expresiones formales (funciones, ecuaciones de curva) y de trabajar la noción en el dominio del análisis (o del álgebra)

confrontando las definiciones y propiedades que enriquecen la simple percepción, y donde incluso el uso de tecnología (u otro artefacto) robustecería una noción tan basal (como lo es la tangente) para la construcción de otras nociones en análisis.

Referencias y bibliografía

Artigue, M. (1998), Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *1*(1), 41-56.

Castela, C. (1995). Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *15*(1), 7-47.

Estrella, S., Kuzniak, A., Montoya, E., & Vivier, L. (2015). El trabajo matemático en el Análisis: una aproximación A los ETM en Francia y Chile. *Actes du colloque ETM4*. 30 juin-04 juillet 2014, Madrid, Espagne.

Houdement C., & Kuzniak A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *11*, 175-193.

Kuzniak, A. (2011). L'espace de travail mathématique et ses genèses. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 9 – 24.

Maschietto, M. (2002). L'enseignement de l'analyse au lycée : les débuts du jeu global / local dans l'environnement de calculatrices (Thèse de doctorat). Université Paris 7.

Montoya, E., & Vivier, L. (2014). Les changements de domaine dans le cadre des Espaces de Travail Mathématique. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 19*, 73-101.

Páez Murillo, R. E., & Vivier, L. (2013). Evolution of teachers' conceptions of tangent line. *Journal of Mathematical Behavior*, *32*, 209– 229.

Richard, P.R. & Kuzniak, A. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas, *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *17*(3) (sous presse).

Sierpinska, A. (1985). Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, *6*(1).

Tall, D. O. (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer, London.

Tall, D. O., & Vinner, S. (1981). Concept image and conception definition in mathematics, with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12,* 151–169.

Vandebrouck, F. (2011). Perspectives et domaines de travail pour l'étude des fonctions. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 149 – 185.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. O. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 65-81). Mathematics Education Library, Kluwer, Academic Publishers.

Vivier, L. (2013). Without derivatives or limits: from visual and geometrical points of view to algebraic methods for identifying tangent lines. *International Journal of Mathematic Education in Science and Technology*, *44*(5), 711-717.

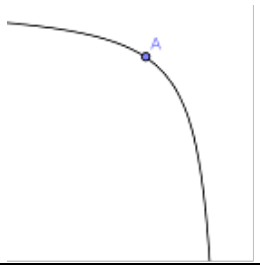
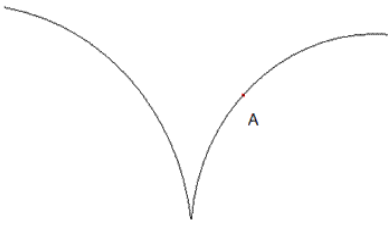
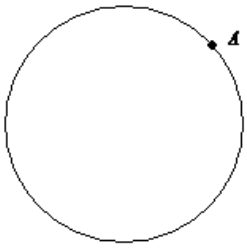
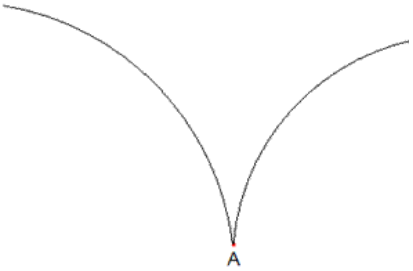
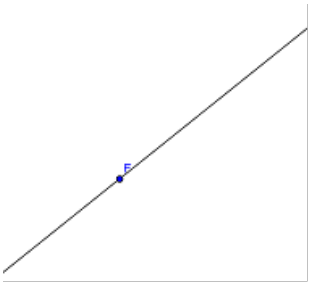
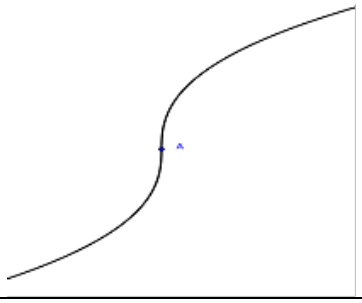
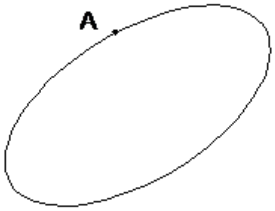
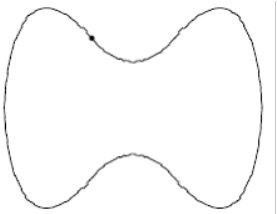
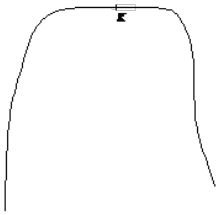
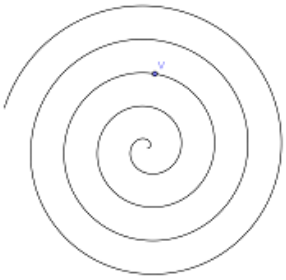
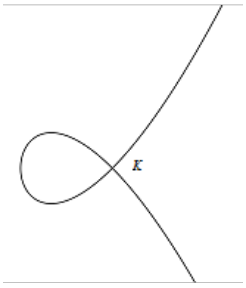
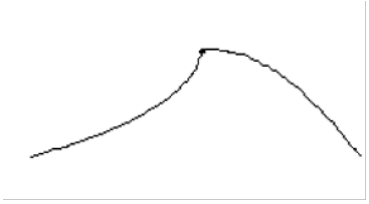
Vivier, L. (2010). La noción de tangente en la educación media superior. *El cálculo y su enseñanza*, Vol. II, México.

Apéndice A

Curvas del cuestionario (las curvas están reducidas en un 50%)

Instrucciones:

Para las siguientes gráficas, dibuja una tangente en el punto señalado en caso que la tangente exista o brindar una explicación en el caso de que no exista.

Gráfica No. 1 	Gráfica No. 2 	Gráfica No. 3 
Gráfica No. 4 	Gráfica No. 5 	Gráfica No. 6 
Gráfica No. 7 	Gráfica No. 8 	Gráfica No. 9 
Gráfica No. 10 	Gráfica No. 11 	Gráfica No. 12 

Etnomatemática y Geometría Dinámica

María del Carmen **Bonilla** Tumialán
Facultad de Educación, Universidad Peruana Cayetano Heredia
Perú
maria.bonilla.t@upch.pe

Resumen

El minicurso tiene como objetivo dar a conocer una propuesta desarrollada en la formación inicial de estudiantes quechuas, aymaras y shipibos del Programa de Educación Intercultural Bilingüe. La meta de aprendizaje está relacionada con la capacidad de construir diseños de sus culturas aplicando los conceptos elementales de la geometría plana y las transformaciones geométricas, utilizando como medio didáctico el entorno de la geometría dinámica de Cabri II Plus. Los trabajos dan a conocer la belleza de los diseños de las culturas originarias peruanas, y la destreza de los estudiantes en el manejo de un software, que requiere para su uso el conocimiento de conceptos y propiedades matemáticas.

Palabras clave: etnomatemática, formación docente en Educación Intercultural Bilingüe, geometría dinámica, transformaciones geométricas, quechua, aymara, shipibo.

Fundamentación

Etnomatemática

La Etnomatemática como disciplina científica considera que existen cuerpos de conocimiento entendidos como sistemas de explicaciones y como maneras de hacer, que han sido acumulados a través de las generaciones en ambientes naturales y culturales distintos, y que han sido derivados de las prácticas cuantitativas y cualitativas, de cómo se compara, clasifica, ordena, cuantifica, infiere, mide…. (D'Ambrosio, 2000). Dentro de la misma línea, estudios realizados en algunas comunidades originarias peruanas confirman la tesis del investigador Alan Bishop respecto a la importancia de las actividades: contar, medir, localizar, diseñar, jugar y explicar, en el desarrollo de las ideas matemáticas de toda sociedad (Minedu, 2013). En el presente trabajo se aborda la práctica del diseño geométrico aplicado por estudiantes quechuas, aymaras y shipibos.

La Etnomatemática es un programa de investigación que defiende y respeta la diferencia, impulsando a través de sus trabajos los sentimientos de solidaridad y cooperación, así como la construcción de un diálogo entre los pueblos, cuestionando el carácter universal de la matemática, considerándola como una construcción cultural contextualizada. Lo que se persigue en este campo de investigación, no sólo es la descripción e interpretación de saberes matemáticos presentes en objetos culturales o prácticas sociales, sino también la transformación de realidades educativas y sociales, a partir de la reinvindicación, reconocimiento, legitimación y democratización de los saberes propios de las comunidades (Fuentes, 2014).

Geometría Dinámica

Las figuras de un Sistema de Geometría Dinámica son el resultado de un proceso de construcción obtenido por el uso de herramientas disponibles en una barra, y que pueden ser manipuladas directamente, pues son concebidas en término de la lógica incorporada al sistema, la Geometría Euclidiana. Se podría decir que hay una correspondencia entre el mundo del SGD y el mundo teórico de la Geometría Euclidiana, una Transposición Informática, desde la visión de Yves Chevallard (Balacheff, 1994). En la presente propuesta se empleó la Geometría Dinámica del software Cabri II Plus como medio didáctico a través del cual los estudiantes de EIB utilizan elementos y conceptos de la Geometría para dibujar los diseños de sus culturas. Lo que se espera con el Sistema de Geometría Dinámica, como medio didáctico, es que se creen condiciones favorables para que el estudiante construya conocimientos relacionados a la Geometría y otras áreas del conocimiento. En este caso en específico, se elaboran los diseños empleando rectas, segmentos, polígonos, así como ejes de simetría y vectores para aplicar la simetría axial y la traslación, respectivamente.

Desarrollo de la Propuesta

Matemática y Etnomatemática

El curso "Matemática y Etnomatemática" del año de Nivelación del Programa de Educación Intercultural Bilingüe desarrollado el ciclo 2014-2 en la ciudad de Lima, estuvo dirigido a estudiantes becados por el gobierno peruano que provienen de las comunidades originarias aymara, quechua y shipiba de los departamentos de Puno, Cuzco y Ucayali, y que pertenecen a familias en condiciones de pobreza o extrema pobreza. Lo que se busca, en primer lugar, es acceder, a través de los estudiantes, a los cuerpos de conocimientos matemáticos acumulados por las comunidades originarias mencionadas, y en segundo lugar, se quiere lograr en los estudiantes, que esos cuerpos de conocimientos pasen de un plano inconsciente a un plano consciente. Esto último implica pasar de la actividad práctica a la abstracción.

La pregunta que motivó la propuesta es la siguiente: ¿Cómo conseguir que los estudiantes del Programa de EIB utilicen y reconozcan los elementos y conceptos fundamentales de la geometría, así como la simetría axial y la traslación, para construir los diseños que pertenecen a sus culturas? Desde el marco teórico de la Etnomatemática y la Geometría Dinámica, resolver el problema planteado implica hacer emerger los conceptos geométricos que subyacen en los cuerpos de conocimientos de cada cultura, a través de la construcción de los diseños en un medio didáctico dinámico e interactivo que obliga a utilizar la propiedades matemáticas, elevándose la actividad práctica a un nivel de abstracción que implique un cambio epistemológico y un nuevo aprendizaje.

Proceso de Construcción

Plantilla. Para desarrollar el proceso de construcción en un entorno de Geometría Dinámica se utiliza una plantilla elaborada con Cabri II Plus. El software tiene una barra de herramientas compuesta de 11 cajas. La plantilla es construida con rectas paralelas y perpendiculares, intentando reproducir el formato de una hoja cuadriculada. Para el caso de los diseños andinos: quechuas y aymaras, la cuadrícula tiene aproximadamente 60 x 30 cuadrados (Figura 1). Los diseños shipibos se construyen con una plantilla que tiene el doble de cuadrados, 120 x 60, en tanto las características de los diseños así lo requieren (Figura 2).

Si bien es cierto que en Cabri II Plus existe una herramienta llamada rejilla, que podría ayudar a construir los diseños, dicha herramienta no permite aumentar la cantidad de cuadrados necesarios. La plantilla se construye con la herramienta recta, tercera caja de izquierda a derecha. A continuación se traza una recta paralela (quinta caja). Se puede continuar construyendo más rectas paralelas con simetría axial (sexta caja), considerando la última recta como eje de simetría. Se traza la recta perpendicular (quinta caja) y las demás con simetría axial.

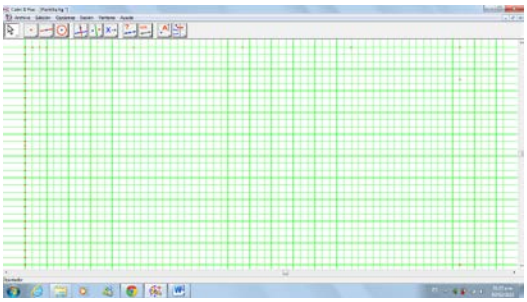


Figura 1. Plantilla andina

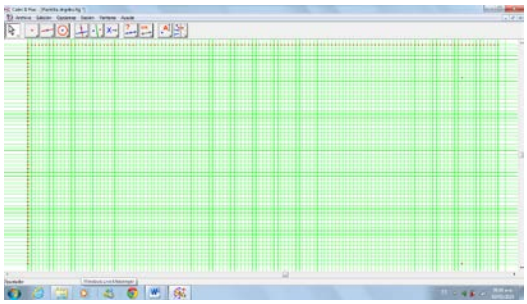


Figura 2. Plantilla shipiba

Diseños andinos: quechuas y aymaras. En primer lugar se elabora el diseño original en una hoja de papel cuadriculado. Para construir el diseño en Cabri II Plus se trabaja en la plantilla utilizando las herramientas punto, segmento, polígono (segunda y tercera caja). En este caso se ha rellenado el polígono con la herramienta color (última caja). De acuerdo al diseño los polígonos pueden ser reproducidos empleando un vector (tercera caja) de traslación (sexta caja) (Figura 3). En la Figura 4 se puede visualizar como se ha reproducido el rombo utilizando un vector que señala módulo, dirección y sentido. De acuerdo al diseño se puede utilizar ejes de simetría para aplicar la herramienta simetría axial (Figura 5 y Figura 6) en la construcción de los polígonos. Es posible reproducir los polígonos utilizando otras herramientas de la sexta caja, transformaciones geométricas.

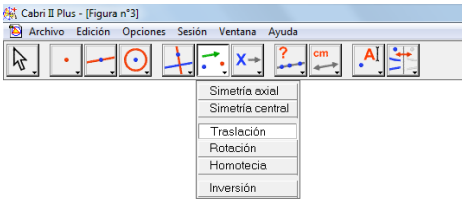


Figura 3. Herramienta Traslación

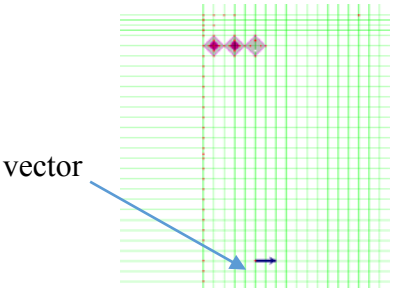


Figura 4. Traslación del rombo

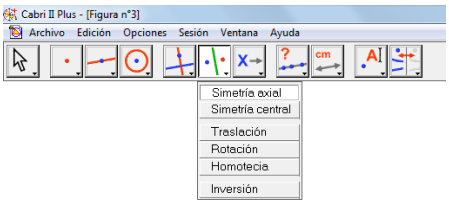


Figura 5. Herramienta Simetría axial

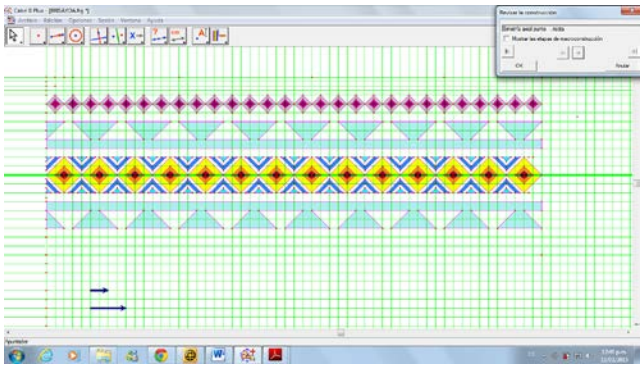


Figura 6. Simetría de polígonos

Otro camino que se puede emplear es el de elaborar los diseños dibujando los polígonos sin rellenarlos con colores. En este caso se aplican los colores al terminar de construir el diseño (Figura 7). En el diseño final se ocultan las rectas con la herramienta ocultar/mostrar de la última caja (Figura 8).

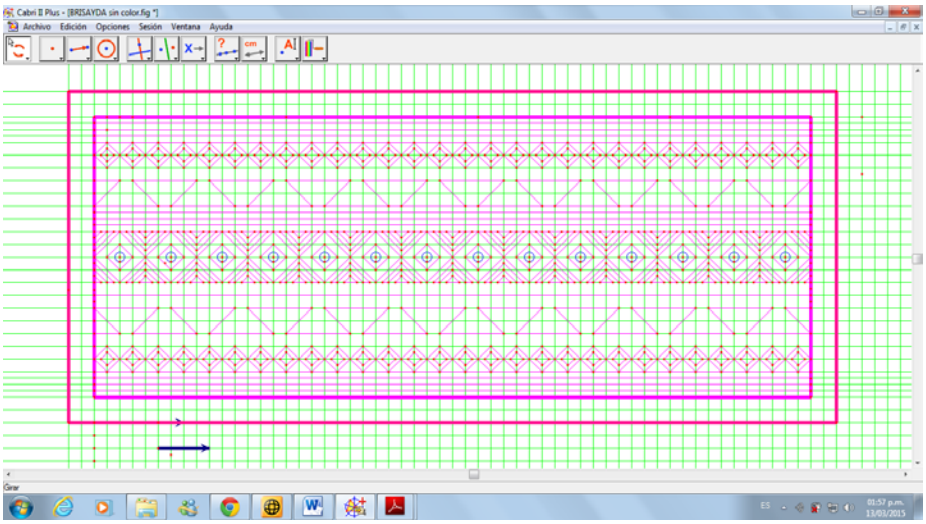


Figura 7

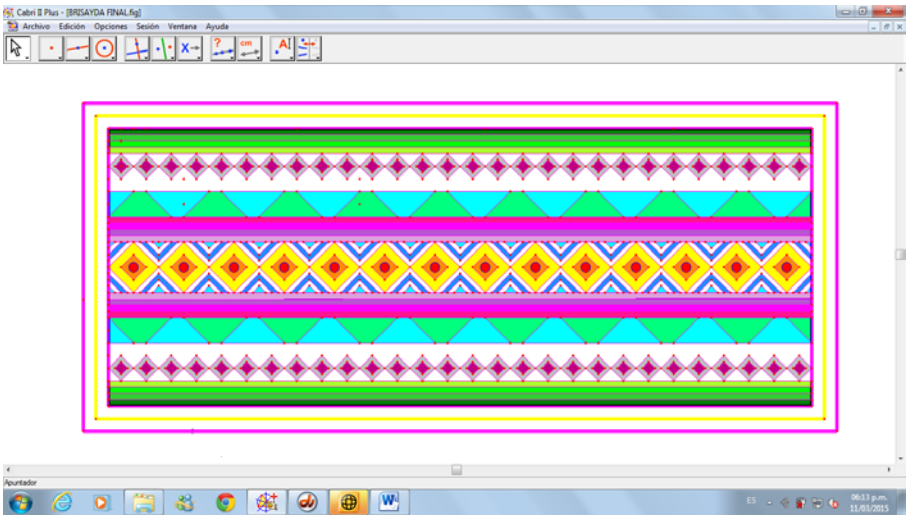


Figura 8. Diseño andino final

Figura 9. Diseños andinos

Diseños shipibos A diferencia de los diseños andinos en donde se emplean principalmente polígonos, en los diseños shipibos también se utilizan segmentos y curvas. En estos diseños siempre es necesario ubicar los ejes de simetría para así reproducir los segmentos, polígonos o curvas aplicando la simetría axial (Fig 11 y 12). Las curvas son elaboradas con la herramienta arco que se encuentra en la cuarta caja (Figura 13 y 14).

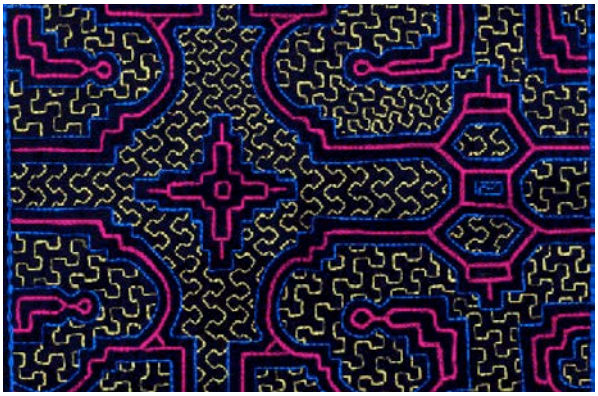


Figura 10. Diseño kené

Según el pensamiento shipibo-konibo, todos los diseños de todo lo existente se originan en las manchas de la piel de la anaconda, una serpiente de la región amazónica. Las líneas curvas de los diseños kené (Figura 10) que reproducen las manchas de la piel de la anaconda son plasmados con precisión sobre la piel, las telas, las cerámicas y la madera.

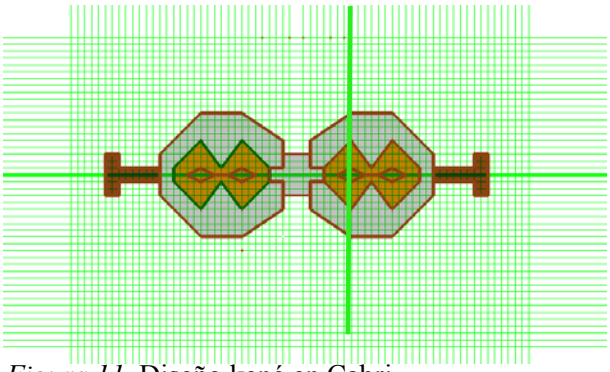


Figura 11. Diseño kené en Cabri

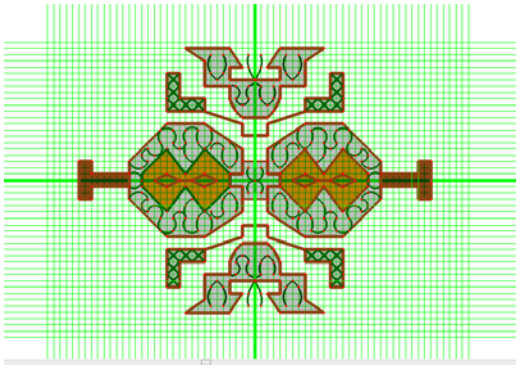


Figura 12. Diseño kené en Cabri

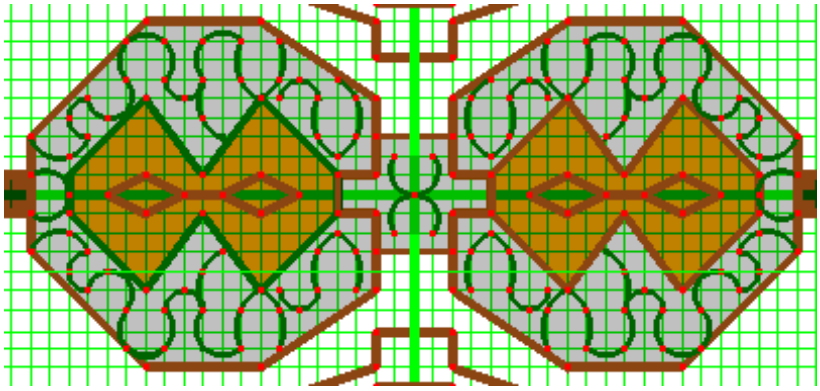


Figura 13. Detalle de las curvas

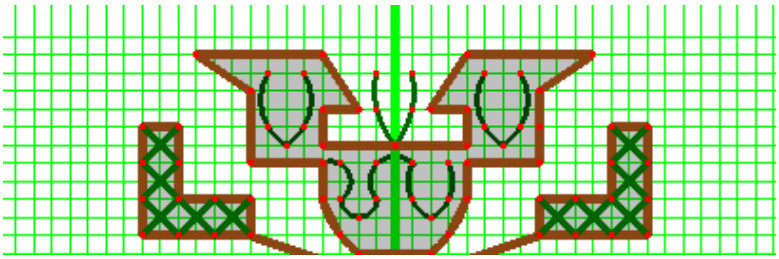


Figura 14. Detalle de las curvas

Finalmente se ocultan las rectas de la cuadrícula para terminar el diseño con la herramienta ocultar/mostrar de la última caja (Figura 15).

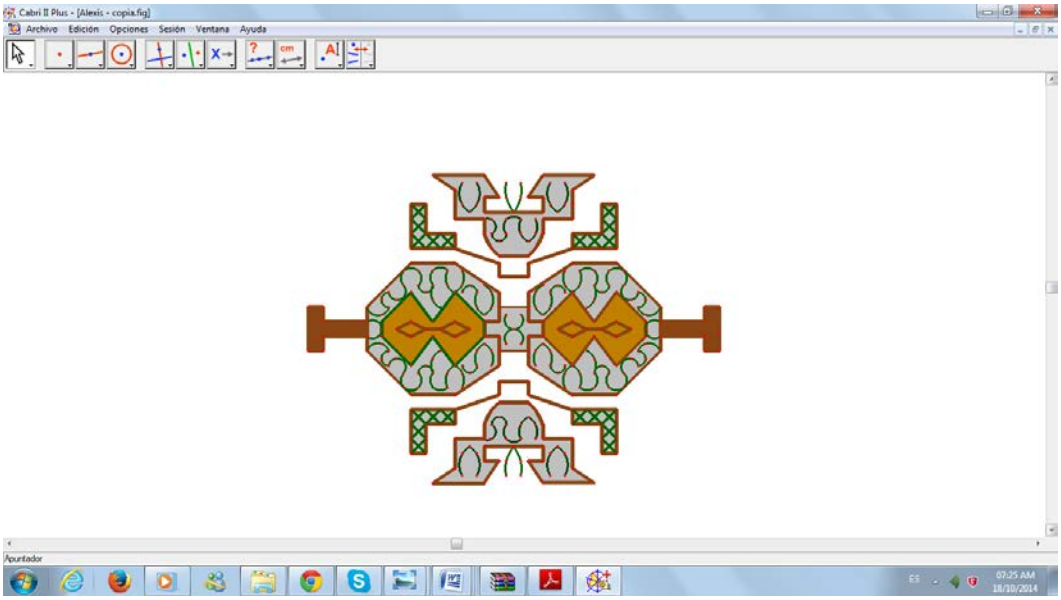


Figura 15. Diseño shipibo final

Referencias y bibliografía

Balacheff, N. (1994). Didactique et Intelligence Artificielle. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 14*(1-2), 9-42.

Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Editorial Paidós.

D'Ambrosio, U. (2000). Las Dimensiones políticas y educacionales de la Etnomatemática. *Números, 43-44*, 439-444.

Fuentes, C. (2014). Algunos enfoques de investigación en Etnomatemática. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática, 7*(1), 155-170.

Ministerio de Educación del Perú. (2013). *Matemáticas en Educación Intercultural Bilingüe. Orientaciones pedagógicas.* Lima: Corporación Gráfica Navarrete. Recuperado el 01/02/2015 de: http://www.digeibir.gob.pe/sites/default/files/Interiores%20Matematica%201-88%20&%20Iten%2084%20WEB.pdf

Apéndice A: Diseños andinos y shipibos

Los estudiantes de Educación Intercultural Bilingüe elaboraron los siguientes diseños en Cabri II Plus aplicando la técnica mostrada anteriormente. Las figuras 16 a 25 corresponden a diseños andinos y las figuras 26 a 29 son diseños shipibos, de la amazonía peruana.

Los trabajos se pueden apreciar con mayor detalle en el siguiente enlace: https://www.flickr.com/photos/63485986@N02/sets/72157649003841112/#

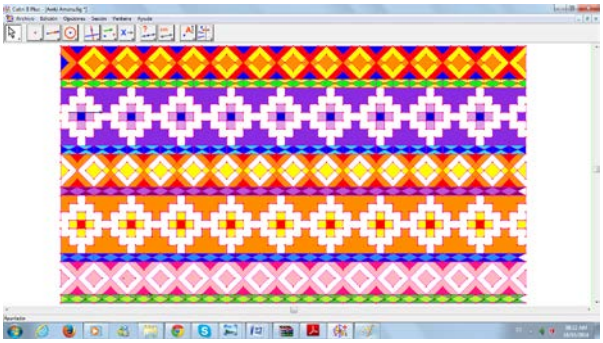


Figura 16

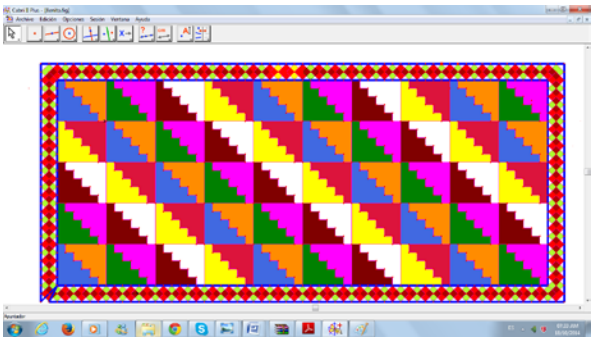


Figura 17

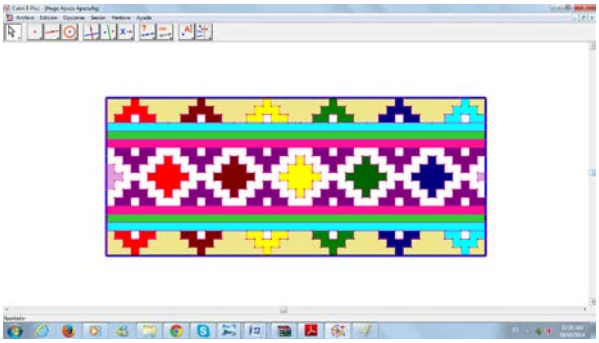


Figura 18

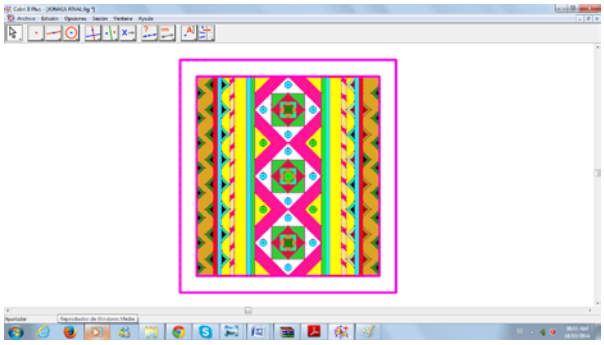


Figura 19

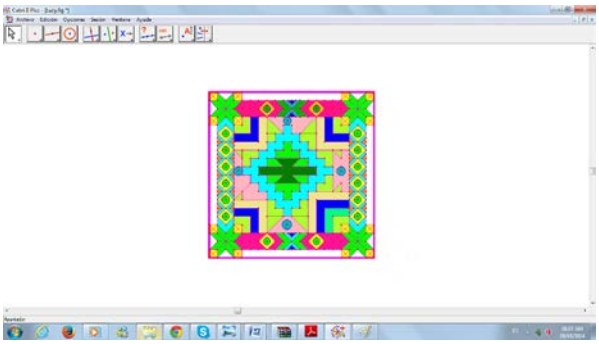


Figura 20

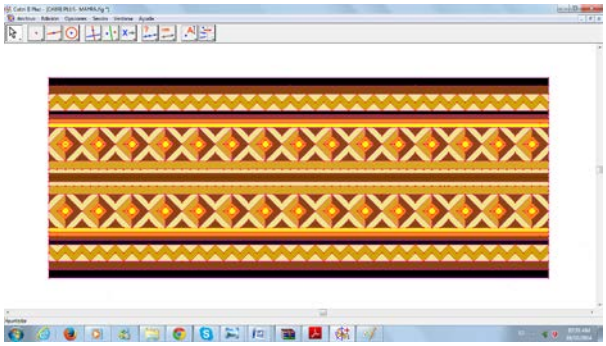


Figura 21

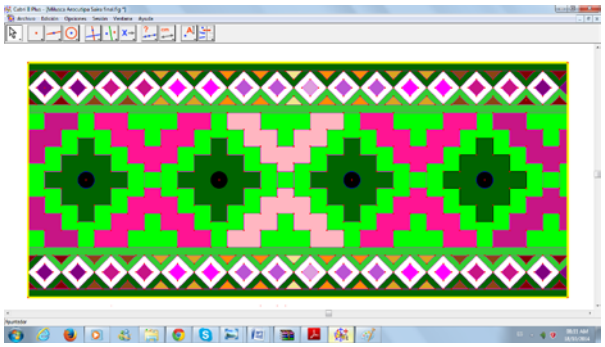


Figura 22

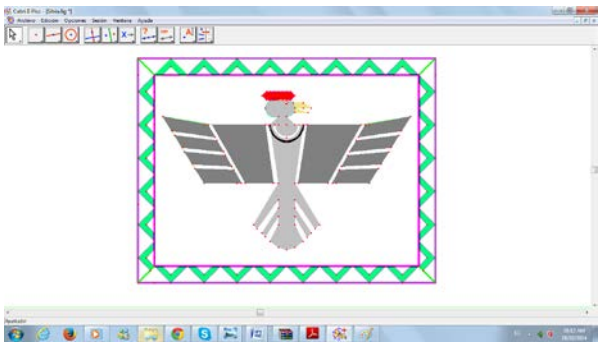


Figura 23

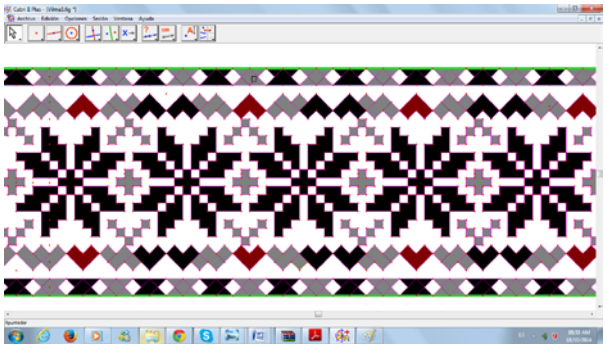


Figura 24

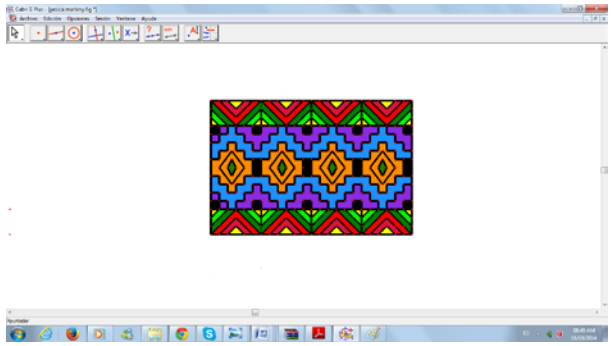


Figura 25

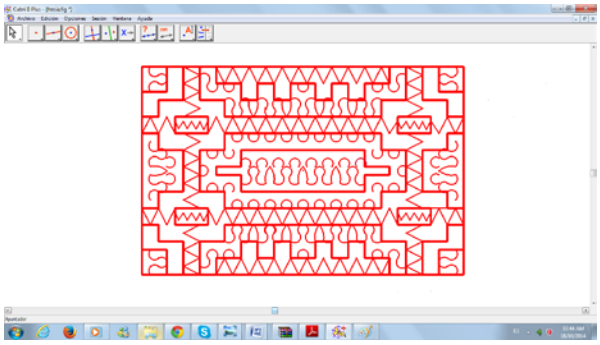


Figura 26

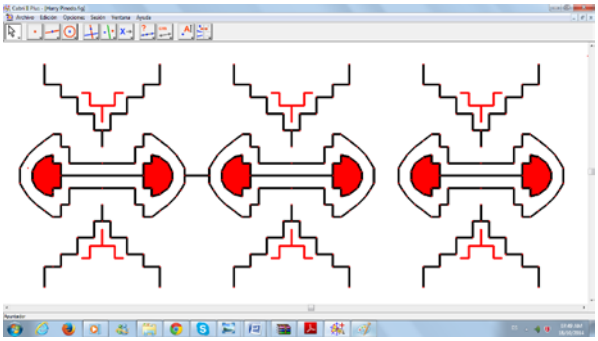


Figura 27

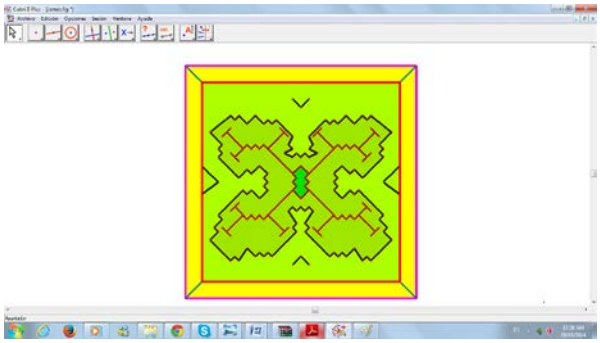


Figura 28

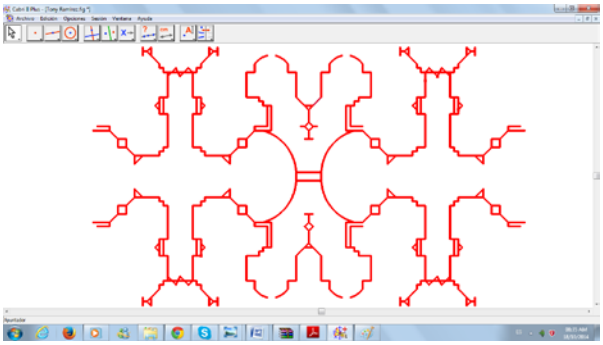


Figura 29

Figuras dinámicas y funciones: representaciones vinculadas en la pantalla de Geogebra

Enrique **Di Rico**
Universidad Pedagógica de Buenos Aires
Argentina
enrique.dirico@ba.unipe.edu.ar
Cecilia **Lamela**
Universidad Pedagógica de Buenos Aires
Argentina
cecilia.lamela@ba.unipe.edu.ar
Juan Pablo **Luna**
Universidad Pedagógica de Buenos Aires
Argentina
juan.luna@ba.unipe.edu.ar
Carmen **Sessa**
Universidad Pedagógica de Buenos Aires
Argentina
carmen.sessa@ba.unipe.edu.ar

Resumen

En este taller compartiremos una experiencia educativa llevada a cabo en varias oportunidades con estudiantes del profesorado y profesores de matemática. La propuesta didáctica consiste en estudiar magnitudes variables en una familia de figuras geométricas y relacionar algunas de esas variables por medio de funciones que permitan estudiarlas. Este trabajo se realiza utilizando el programa Geogebra ya que permite construir un modelo dinámico de la familia de figuras estudiadas. Además, al definir una función, permite vincular de un modo particular, la pantalla del gráfico funcional y la de la figura dinámica. Esta propuesta plantea definir varias funciones, cambiando la variable independiente, que al ponerlas en relación permite obtener nueva información de la situación geométrica. Estas experiencias nos permiten afirmar que esta propuesta resultar ser un medio favorable para la formulación de preguntas y el establecimiento de conjeturas, otorgando elementos para su validación.

Palabras clave: educación matemática, figuras dinámicas, gráfico de funciones en Geogebra, formación docente.

Introducción

El objetivo de este taller es compartir con colegas una experiencia educativa llevada a cabo en varias oportunidades con estudiantes del profesorado de matemática y profesores en ejercicio. Para ello presentaremos las actividades que componen la experiencia así como algunas producciones de los estudiantes y profesores que trabajaron con ellas y las discusiones que se generaron a partir de estas producciones.

El diseño y gestión de esta experiencia conlleva una fuerte presencia de entornos tecnológicos, no solo por el trabajo con computadoras de cada participante sino también por el uso de un proyector que permite hacer público en el aula cada pantalla. Esto nos obligó a tomar en cuenta cambios en el tipo de trabajo matemático en el que pretendíamos involucrar a los profesores (en formación y formados), no solo en relación a las tareas propuestas sino también a las formas de abordarlas y al papel que jugarían las representaciones en la pantalla en los procesos de validación implicados.

Por otro lado, nuestro trabajo como docentes también nos implicó en nuevas decisiones tanto para la planificación como para la gestión de la experiencia. La noción de *orquestación instrumental* (Trouche, 2004) toma en cuenta estos espacios de decisión docente cuando se trabaja con la inclusión de las computadoras, abarcando tanto aquellos vinculados a las tareas y las maneras de realizarlas como a los relacionados a los instrumentos y su organización para el trabajo individual y grupal.

La propuesta didáctica consiste en estudiar magnitudes variables en una familia de figuras geométricas y con ese objetivo se propone ligar variables para definir funciones. Tanto la situación geométrica inicial como las funciones que se definieron para estudiarla son abordadas con el programa Geogebra.

El recurso informático permite en primer lugar, construir un modelo dinámico de la familia de figuras estudiada. En segundo lugar, al definir una función, el programa Geogebra permite vincular de un modo particular la pantalla del gráfico funcional y la de la figura dinámica. Este nuevo "artefacto" abre posibilidades a un tipo de trabajo potente que se pretende explorar con los docentes y estudiantes.

Nuestra propuesta se encuentra en la línea de lo presentado en Arcavi y Hadas (2000). Ellos tratan allí la vinculación entre entornos de geometría dinámica (trabajando con el programa Geometry Inventor, 1994) y entornos gráfico-funcionales, mostrando la potencialidad del acceso, la visualización y el estudio de una situación geométrica a través de modelos funcionales, fundamentalmente de su representación gráfica. De este artículo nos interesa retener la mención que hacen los autores sobre la comparación y contraste ─que posibilita el software─ entre los cambios en los estados del modelo dinámico de la situación geométrica y el movimiento de un punto en el gráfico de la función.

Las experiencias realizadas nos permiten afirmar que se trata de un medio favorable para la formulación de preguntas y para el establecimiento de conjeturas, otorgando elementos para la validación de las mismas.

Preguntas y conjeturas en torno a una familia de trapecios

En la experiencia se trata de estudiar una familia dinámica de trapecios rectángulos que se construye en el programa Geogebra a partir de un triángulo equilátero fijo de lado 10.

Para un triángulo equilátero ABC, la familia de trapecios rectángulos EFGB verifica que G se encuentra en la altura CD del triángulo, el vértice F pertenece al lado AC, el vértice E al segmento AD y los ángulos F y E son rectos.

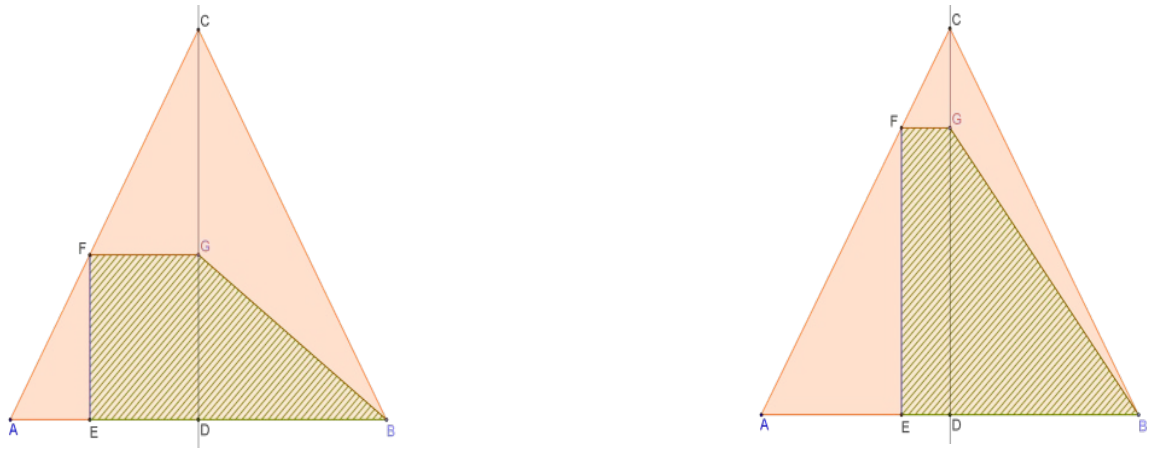


Figura 1. Imágenes de dos trapecios miembros de la familia.

La primera actividad consistió en la construcción de la familia dinámica de trapecios en la pantalla de cada asistente. A partir de esta construcción y como **segunda actividad**, los profesores y estudiantes fueron invitados a plantear en el aula afirmaciones y preguntas referidas a las características de estos trapecios. En diferentes experiencias se plantearon: *el lado EB varía entre 5 y 10, el lado FE varía entre 0 y 5, el lado GB entre 5 y* $5\sqrt{3}$ *. En la posición límite de E=D el área del trapecio es* $\frac{25\sqrt{3}}{2}$ *. ¿El área del trapecio varía entre 0 y* $\frac{25\sqrt{3}}{2}$ *?*

Estas afirmaciones y preguntas nos permitieron poner en relieve que entre todas las magnitudes asociadas a la familia de trapecios algunas cambian y otras no al considerar diferentes miembros. Invitados a identificar magnitudes que cambian mencionaron las siguientes: *el área del trapecio; la longitud de los 4 lados; la medida de los segmentos AF , FC, CG; la medida de dos de los ángulos (los otros son siempre rectos); el perímetro del trapecio; la medida de la diagonal EG, ya que varía entre 5 y 10, y la medida de la otra diagonal BE (primero se identificó que en los dos trapecios límite de la familia esta diagonal mide lo mismo, 10, pero luego se argumentó que esta medida no puede ser constante en toda la familia porque B está fijo, y entonces E debería describir una circunferencia, y en la situación describe un segmento).* Entre los invariantes se identificaron algunas relaciones entre medidas: *medida del lado EB - medida del lado FG = 5; medida del segmento AF + medida del segmento FC = 10, medida del segmento AE + medida del lado EB = 10; medida del segmento CG + medida del lado GD =* $5\sqrt{3}$.

Como **tercera actividad** propusimos centrarnos en la magnitud "área del trapecio". *¿Qué podemos decir acerca de esa magnitud? Sabemos que cambia al mover nuestra figura dinámica, ¿qué podemos decir de ese cambio?*

Algunas conjeturas que se formularon fueron: *"algo pasa" cuando FEGD es un cuadrado; el área "baja y sube" y parece que "la variación es cuadrática"; no es cierto que el rango de variación sea entre 0 y* $\frac{25}{2}\sqrt{3}$ *sino que en algunos momentos toma valores mayores a* $\frac{25}{2}\sqrt{3}$*; cuando F es el punto medio del lado el área del trapecio es igual a la mitad del área del triángulo ABC; el área máxima está cuando F se mueva de la mitad para arriba; si tenemos distintos puntos libres influye en cómo se mueve la familia y no en cuáles son las magnitudes que varían ni en su rango de variación.*

Estas afirmaciones quedaron planteadas como conjeturas y propusimos considerar el área en función de alguna otra variable para estudiarlas. Queremos resaltar que la conjetura *parece que "la variación es cuadrática"* recién tiene un significado al considerar el área como variable dependiente en una relación funcional. Estos asuntos fueron discutidos más adelante en el aula.

Definir una función para estudiar el comportamiento de una magnitud variable

En la experiencia estudiamos las funciones aprovechando herramientas del programa Geogebra. En la quinta actividad se va a proponer a los participantes que elijan diferentes magnitudes como variables independientes. Pero antes nosotros propusimos para comenzar una en particular.

Enunciado de la **cuarta actividad**: *Cada uno, con su propio trapecio dinámico realice el gráfico del área en función de la medida del segmento ED. Para ello defina un punto P, en "vista gráfica 2", con abscisa = medida de ED y ordenada = área del trapecio y luego utilice la instrucción lugar geométrico para lograr el dibujo de la curva.*

Señalemos que, de este modo, no solamente se obtiene el gráfico de la función sino que, además, el punto P definido se mueve sobre la curva en estrecho vínculo con la figura dinámica: para cualquier estado de la familia, el punto retiene en sus coordenadas tanto la medida de ED como el área de ese trapecio particular que estamos viendo en la otra vista.

Una vez realizada la construcción les propusimos retomar las conjeturas y formular nuevas preguntas tanto de la función como de la situación geométrica.

Comenzó en ese momento un trabajo interesante que partía de la visualización de informaciones que proveía el complejo dinámico (las dos vistas gráficas con el punto P que las vincula). Estas informaciones se expresaban a veces en término de afirmaciones y otras veces en términos de preguntas, que en un juego entre lo individual y lo colectivo se precisaban, se descartaban, se reformulaban y en muchos casos se buscaba una validación en términos de propiedades geométricas de las figuras involucradas.

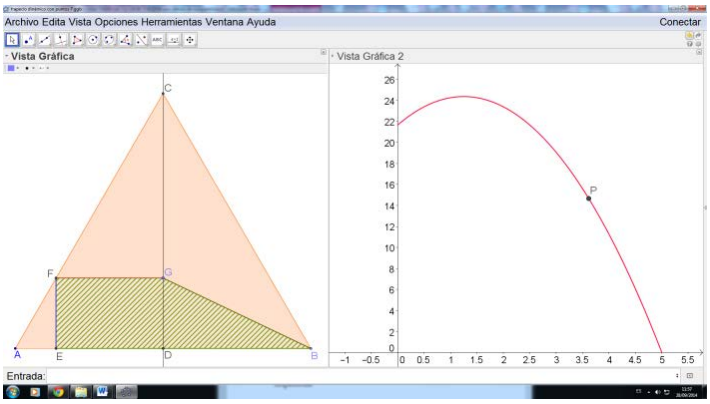


Figura 2. Gráfico de la función con el punto P correspondiente al trapecio de la izquierda.

Algunas de las preguntas y conclusiones que se sacaron en estas experiencias fueron:

– La ordenada al origen de esta función es $\frac{25}{2}\sqrt{3}$. Ese valor de ordenada se corresponde al área del "trapecio BCD" justamente porque en ese punto la abscisa es 0 y el "trapecio BCD" es el que se formaría con ED=0 (no queda trapecio sino que es el triángulo que coincide con la mitad del triángulo equilátero).

– La "curva pega la vuelta", "hay valores de la ordenada (el área) que se corresponden con un par de valores de ED diferentes (dos trapecios diferentes con igual área), pero a partir de un determinado valor de área, estas se corresponden con un único valor de ED". Formulado esto, aparecieron las siguientes preguntas: ¿Cuál es ese valor de ED a partir del cual empieza a haber solo un trapecio para cada área? Se estableció como conjetura que eso ocurría cuando ED=2,5 punto medio de AD. El área de este trapecio es igual al del trapecio con ED=0, hecho que fue validado comparando las áreas de ambos.

En algunas oportunidades en el aula se precisó la conjetura sobre el trapecio de área máxima: ese trapecio se correspondía con un valor de ED = 5/4 (1/4 de AD), también formulado como "FC mide la cuarta parte de AC". Estas conjeturas surgían de asumir una cierta simetría en una parte del gráfico y de verificar geométricamente que el área del triángulo CDB= área del trapecio cuyo vértice F se encuentra en el punto medio de AC. A menudo los participantes querían hallar la fórmula del área en función de ED para validar esta conjetura algebraicamente. Nosotros no privilegiamos esta estrategia ya que la intención de la experiencia era involucrarlos en un juego de coordinación entre la representación gráfica de la función y la situación geométrica que ésta estaba modelizando. Invitamos a buscar una validación de la conjetura con argumentos geométricos pero no tomamos este asunto como tema en la continuación de las experiencias.

La variación del área a partir de otra variable independiente

El estudio del área continuó, en las experiencias, proponiendo como **quinta actividad**: *Ya tenemos el gráfico del área en función de ED; por grupo elijan otra variable independiente y realicen el gráfico del área en función de ella en el mismo sistema de coordenadas y sin borrar el gráfico anterior.*

¿Qué preguntas les surgen, tanto de la función como de la situación geométrica, a partir de este nuevo gráfico? ¿Cuáles pueden plantear relacionando los gráficos de las dos funciones entre sí?

En este momento podían surgir varias posibilidades de relaciones entre funciones, tomando diferentes variables independientes como ser: ángulo GBD, altura DG o EF, longitud de EB, longitud de AE, y otras. En particular nos interesa compartir las reflexiones que se generaron en las experiencias al estudiar de manera conjunta la variación del área en función de ED (primer gráfico realizado) y en función de la altura del trapecio EF.

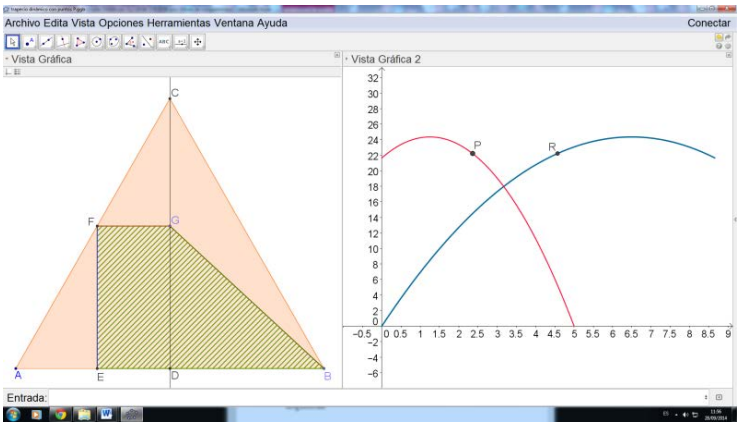


Figura 3. Los dos gráficos con sus puntos marcados.

Destacamos entre los asuntos que surgieron:

Las funciones tienen distintos dominios. Se diferenciaron los dominios de ambas funciones. Son intervalos diferentes y con distinta amplitud, y esto fue explicado viendo que para un mismo movimiento del punto libre una variable independiente se mueve a "mayor velocidad" que la otra variable independiente, es decir, recorre un intervalo de mayor longitud.

Los gráficos de las funciones tienen "distinto sentido de circulación" de los puntos sobre las gráficas. En estos gráficos en particular, los puntos P y R recorren cada curva en sentido contrario: a medida que la abscisa de uno de los puntos aumenta, en el otro punto la abscisa disminuye (siempre considerando el mismo trapecio). Además los puntos se mueven sobre las curvas manteniendo siempre la distancia entre ellos.

Los puntos de intersección de ambas curvas. Mirando la intersección de estas dos funciones surgieron varias preguntas sobre qué significa ese punto de intersección. En particular se observó que al mover la figura dinámica, los puntos P y R coincidían sobre la intersección. Se buscó una explicación de esto diciendo que había un trapecio con medida de ED = medida de EF; es decir el trapecio cuya "parte rectangular" DEFG era cuadrado. Para ese trapecio las dos variables independientes estudiadas valían lo mismo por lo tanto las coordenadas de los puntos P y R coinciden.

Otra variable independiente considerada fue CF (que no es un elemento del trapecio) y nuevamente se comparó con el gráfico de la función con variable independiente ED.

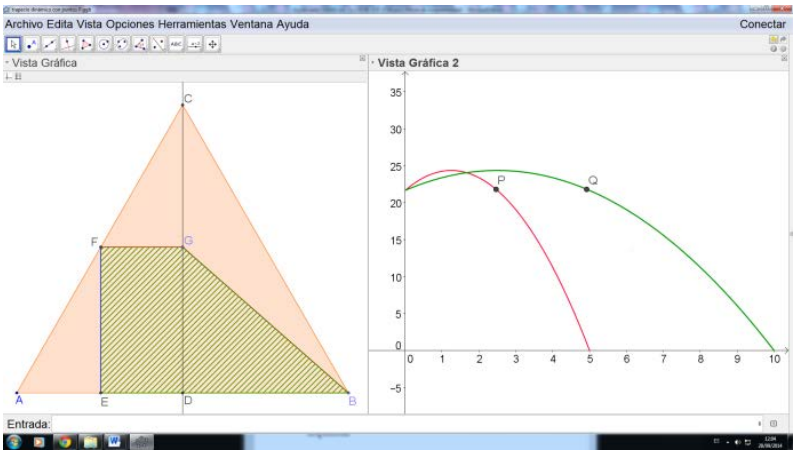


Figura 4. Los gráficos del área en función de CF y ED.

Compartimos ahora las reflexiones que surgieron en las experiencias al considerar esta nueva variable independiente.

– Al igual que en el la comparación anterior se analizaron los dominios de ambas funciones y se dio una explicación del porqué uno tiene el doble de amplitud que el otro.

– Para estudiar la intersección de estas dos curvas al mover la figura dinámica se notó que los puntos P y Q del gráfico no pasaban al mismo tiempo por el punto intersección, a diferencia de lo que ocurría con las funciones anteriores. Esto llevó a concluir que había dos trapecios diferentes T1 y T2 con igual área y con la medida de ED en T1igual a la medida de CF en T2.

Se vio además que la medida de ED del trapecio T2 es la mitad de la medida de ED del trapecio T1 (en la figura 5 este último segmento se llama E1D). Se dieron argumentos geométricos considerando el triángulo equilátero CFH (ver en la figura 5); en ese triángulo FG es la mitad de CF, que a su vez es igual a E1D.

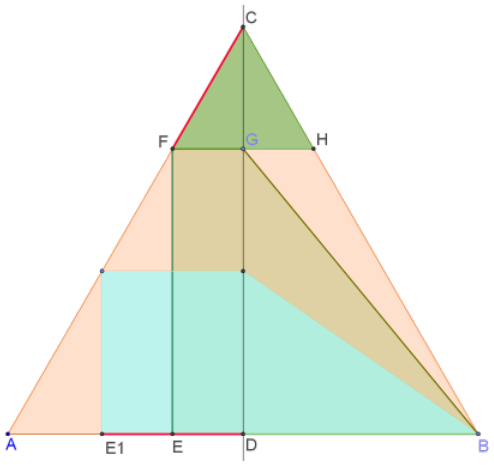


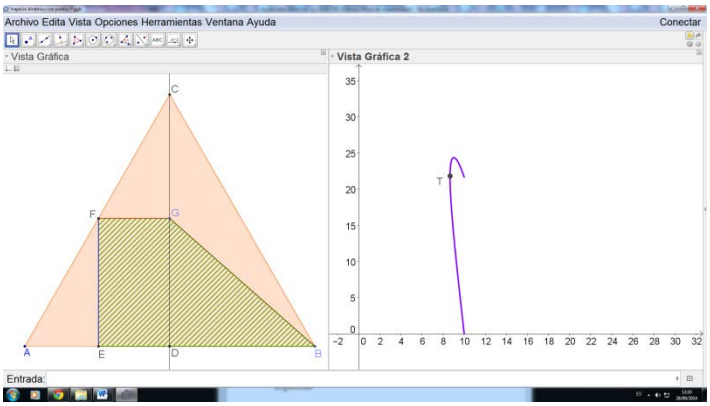
Figura 5. Comparando los trapecios T1 y T2

Hasta aquí quisimos detenernos en el análisis de algunas reflexiones que aparecieron en las experiencias realizadas al considerar distintas variables independientes para estudiar la variación del área de los trapecios. Fueron consideradas otros pares de variables sobre las cuales no vamos a detenernos en este escrito.

El trabajo matemático para hacer a partir de una relación que no es función

Posteriormente, en la **sexta actividad**, planteamos considerar otras variables que iban a dar lugar a fenómenos diferentes: *Les proponemos estudiar la variación del área en función de la diagonal FB.*

El gráfico de la relación causó mucha sorpresa. Algunos dudaron si era correcto y otros lo calificaron de "feo". En un caso un profesor lo borró inmediatamente después de haberlo obtenido.



*F*igura 6. Gráfico de la relación entre la medida de la diagonal FB y el área del trapecio.

Sin embargo, estudiar la variación del área en relación a la variación de la diagonal, llevó a formular nuevas preguntas sobre la gráfica y sobre la situación geométrica. Así no preguntamos: *¿Qué significa que no sea función en términos de la situación geométrica?* Se llegó a formular

que esto informaba que para todos los valores de la medida de la diagonal (menos 1) hay dos trapecios de la familia con diagonales que miden eso y áreas diferentes.

Se formularon también las preguntas *¿Cuál es el rango de variación de la "no función"? ¿A qué trapecio corresponde el punto más a la izquierda en el gráfico? ¿Cuánto mide su diagonal?*

En una de nuestras experiencias los profesores dieron interesantes argumentos para validar que el trapecio buscado es el que tiene el vértice F en la mitad de AC. Uno de los profesores se fijó en el punto F para decir que la menor longitud de la diagonal FB (que correspondía al punto más a la izquierda en el gráfico), se alcanzaba cuando FB es perpendicular a AC (por la propia definición de distancia de un punto a una recta). Y que entonces FB era la altura del triángulo ABC relativa al lado AC.

Otra profesora, explorando en el gráfico cartesiano, trazaba rectas perpendiculares al eje x para poder localizar, en la figura dinámica, los dos trapecios con la misma medida de la diagonal. Esta estrategia la llevó a trazar una circunferencia dinámica con centro en B y radio FB (que cambia al cambiar el trapecio de la familia) y marcar la intersección de ésta con el lado AC .Uno de los puntos es el vértice F y el otro punto permite determinar otro trapecio con la misma medida de diagonal. Ella se preguntaba cuándo estos dos puntos coinciden y llegó a la conclusión de que la circunferencia tiene que ser tangente al lado AC, y esto pasa si la diagonal FB es perpendicular al lado AC.

Estas consideraciones permitieron determinar que la medida de la diagonal buscada es $5\sqrt{3}$.

Los anteriores son un ejemplo de cómo la visualización de algunas características del gráfico, genera preguntas y conjeturas. Y de qué manera el trabajo sobre la figura dinámica permite contestar y dar argumentos geométricos para validar esas conjeturas.

Destaquemos que ciertas informaciones se toman del gráfico y no se plantea la necesidad de validarlas. Por ejemplo que los dos trapecios con diagonales de la misma medida tienen efectivamente distinta área. Otras informaciones que se leen en el gráfico se toman como conjeturas que necesitan ser validadas. Estos diferentes estatutos de las informaciones que provee el gráfico fueron compartidos con los participantes, muchas veces de manera implícita.

En otra experiencia en la cual la mayoría de los asistentes eran profesores universitarios, ellos interpretaban que el punto que se encuentra más a la izquierda en el gráfico cartesiano, permite dividir la curva en los gráficos de dos funciones. Cada una corresponde a una parte de la familia de trapecios. Evocaron la imagen de una circunferencia y las dos funciones que se pueden definir a partir de ella. Llegaron a definirlas:

G1 es la función que para cada valor de la diagonal entre $5\sqrt{3}$ y 10, devuelve el área del trapecio con esa diagonal y altura menor que $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.

G2 es la función que para cada valor de la diagonal entre $5\sqrt{3}$ y 10, devuelve el área del trapecio con esa diagonal y altura entre $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ y $5\sqrt{3}$.

Finalmente, como última actividad, planteamos el estudio del área en relación con la otra diagonal EG y la producción del nuevo gráfico en el mismo sistema de coordenadas, sin borrar el gráfico anterior. Nuevamente invitamos a la formulación de preguntas y conjeturas.

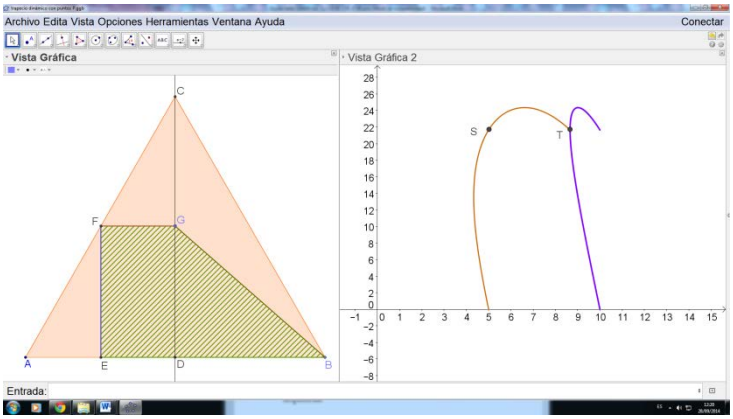


Figura 7. Las dos no funciones que relacionan área con diagonales.

Aparecen en las experiencias preguntas centradas en la situación geométrica y otras en el gráfico de la relación. Por ejemplo, la pregunta que apareció recurrentemente, *¿Cuál es el valor mínimo de diagonal EG para estos trapecios?,* es una pregunta sobre los trapecios. En cambio, este mismo asunto fue formulado considerando el gráfico, *¿Hasta dónde llega hacia la izquierda el gráfico?*

A diferencia de lo que pasaba con la diagonal FB, el nuevo gráfico dejaba leer que no todos los trapecios tendrían otro con la misma medida de la diagonal EG y diferente área. Se formuló entonces *¿Cuáles son aquellos valores de la diagonal para los cuales hay dos trapecios con distintas áreas y cuáles son aquellos valores que no?*

Se establece la conjetura: *Para todos los trapecios cuyo lado EF mida mayor que la mitad de la altura del triángulo ABC, no hay otro con la misma medida de la diagonal EG. Para el resto siempre, salvo en un punto, hay otro con la misma medida de la diagonal y ese otro tiene diferente área.*

Para estudiar la relación del área con la diagonal EG, lo primero que se establece es que esa diagonal siempre mide lo mismo que el segmento FD. La ventaja de esto último es que el extremo D no cambia al mover los trapecios de la familia.

Se elabora a partir de esto una estrategia para probar la conjetura, similar a la desplegada por la profesora en la actividad 6: trazar circunferencia dinámicas con centro en D (fijo) y radio FD (que cambia con el trapecio). La intersección de esta circunferencia con el lado AC resulta ser un punto (doble), cuando FD es perpendicular a AC y un punto (simple) a partir de la medida 5 para el radio. Para todas las otras posiciones de F, todo trapecio tendrá otro con la misma media de la diagonal y diferente área.

Las visualizaciones dinámicas de trapecios y circunferencias en la vista gráfica 1, así como la posibilidad de ver ligado a este dinamismo el gráfico de la relación con un punto marcado, fueron marcos potentes para las ideas que desplegaron los profesores en sus conjeturas y en sus validaciones.

Cuando las dos gráficas de las relaciones son tomadas en forma conjunta aparece la pregunta por el punto en que se tocan.

Recorriendo la familia de trapecios por medio de la figura dinámica y analizando los gráficos y las posiciones de sendos puntos móviles, los participantes pudieron leer casi inmediatamente -ya lo habíamos discutido en el estudio de otras intersecciones- que no corresponde a un solo trapecio con igual medida en sus dos diagonales dado que los puntos que recorren cada curva no coinciden en la intersección. Es decir, hay dos trapecios diferentes donde la diagonal FB de uno tiene la misma medida que la diagonal EG del otro y, además, tienen la misma área.

En un primer momento se conjeturó que uno de los trapecios es el que tiene la diagonal FB mínima, ya que el punto de intersección se ubica en el extremo izquierdo de la curva. Este trapecio, como se había visto antes, tienen su vértice F en la mitad del lado AC y la diagonal FB coincide con la altura del triángulo ABC relativa a este lado .

El otro trapecio se encontró al hacer coincidir la intersección de las curvas con el punto móvil que corresponde a la diagonal EG. Se llegó a visualizar que esto corresponde al "trapecio" con medida ED=0.

Que ambas diagonales tienen la misma medida se validó por el hecho de que la diagonal EG coincide con CD, la altura del triángulo equilátero de lado 10. Que ambos "trapecios" tienen la misma área ya se sabía desde la cuarta actividad.

A modo de cierre

En estas experiencias planteamos a los profesores (en formación y ya formados) un trabajo que se ubica en la coordinación entre una situación geométrica y la determinación de funciones que nos permitan estudiarla. El recurso de Geogebra nos permitió producir el gráfico de una función sin determinar una fórmula algebraica que la expresara. De este modo se favoreció la visualización, comparando y contrastando los cambios entre el fenómeno geométrico y el gráfico en el plano cartesiano.

La propuesta de definir funciones "área" cambiando la variable independiente, y aún relaciones no funcionales que involucraran el área, permitió el planteo de preguntas y de conjeturas tanto sobre la situación geométrica como sobre los gráficos.

Muchas afirmaciones acerca del crecimiento o el comportamiento de la variación del área cobraron otro sentido cuando fueron estudiadas en relación a variables independientes diferentes. De este modo entendemos que el mismo concepto de función fue revisitado.

Propusimos un trabajo atípico sobre las no-funciones en relación a lo que se trabaja tradicionalmente en la escuela y en la universidad, dónde solo aparecen para ser descartadas. Estudiamos la situación desde la información que portan los gráficos sin importar si son de relaciones funcionales o no. Las relaciones no-funcionales fueron una herramienta que permitió plantearse otras preguntas sobre la familia de trapecios. En ese sentido es un trabajo que permite volver sobre lo funcional, entenderlo, completarlo, matizarlo.

En todas nuestras experiencias los profesores valoraron volver sobre lo que sabían en un ambiente experimental y en interacción con otros colegas. Algunos participantes manifestaban, al final del taller, "haber dudado" de aquello que dominaban. Dudar es un buen motor para volver a aprender.

Referencias y bibliografía

Arcavi, A. & Hadas, N. (2000). Computer mediated learning: An example of an approach. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 5, 25-45.

Borsani, V., Cedrón, M., Cicala, R., Di Rico, E., Duarte, B. & Sessa, C. (2013). La integración de programas de geometría dinámica para el estudio de la variación de magnitudes geométricas: nuevos asuntos para la didáctica. En *Actas del VII CIBEM* (pp. 6901-6908). Recuperado el 11 de agosto de 2014, de: http://www.cibem.org/7/actas/pdfs/643.pdf.

Borsani, V., Cedrón, M., Cicala, R., Di Rico, E., Duarte, B. & Sessa, C. (en prensa). Un diseño colectivo para la función cuadrática con Tic. Transformaciones en el aula. *Prácticas pedagógicas y políticas educativas. Investigaciones en el territorio bonaerense.* Buenos Aires: UNIPE: Editorial Universitaria.

Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning,* 9, 281-307.

Formación de maestros desde Numerario: una experiencia con fracciones

Gabriela **Builes** Gil
Universidad de Antioquia
Colombia
gabriela.builes@gmail.com
Luz Marina **Díaz** Gaviria
Universidad de Antioquia
Colombia
lmdiazgaviria@hotmail.com
Yolanda **Beltrán** de Covaleda
Universidad de Antioquia
Colombia
ybeltrand@gmail.com

Resumen

El propósito de este taller es visibilizar, desde el proyecto "de Numerario", la importancia de los procesos de formación diseñados para maestros de Educación básica primaria, especialmente, en didáctica de las matemáticas; a través del desarrollo de una experiencia con las fracciones desde su origen en los proceso de medición. Con dicha experiencia se posibilita la reflexión con los maestros sobre metodologías que favorezcan los procesos de enseñanza y de aprendizaje de las matemáticas, contextualizando el conocimiento en diferentes niveles de complejidad desde las prácticas cotidianas.

Palabras claves: escuela, interacción, maestro, procesos, estrategia, aprendizaje, partes de magnitud.

Dar por hecho que todo en el mundo ya está creado es negar las posibilidades de asombrarse de lo que podamos descubrir, interpretar, proponer, disfrutar y sobre todo facilitarlo para los niños y las niñas; en el mundo de la vida están las matemáticas, dejemos que nuestros niños la toquen, lo sientan, lo vivan, lo descubran.[1]

Introducción

El proyecto de Numerario está inscrito como un programa de formación continuada de maestros de preescolar y básica primaria en la didáctica de la educación matemática. Con el desarrollo de este proyecto se busca transformar las prácticas pedagógicas de los maestros participantes, a partir de la reflexión y el diálogo entre los saberes derivados de la experiencia de los maestros, los saberes propios del campo disciplinar, la propuesta y desarrollo de

[1] Reflexión hecha por una maestra del corregimiento de Santa Elena en 2013, que si bien refleja una epistemología empírica de las matemáticas, de los maestros de básica primaria, es un momento importante en el proceso de reflexión en los encuentros de formación, en que los maestros reconocen la cotidianidad como punto de partida para darle sentido a las matemáticas en confrontación con las prácticas de comenzar por lo simbólico.

estrategias para la enseñanza y la interpretación de los procesos de aprendizaje de las matemáticas. En el proyecto participan los maestros de Instituciones Educativas del sector público y es un buen ejemplo de alianza entre el sector público y privado para promover el desarrollo educativo en las comunidades y regiones, además, se implementa desde el año 2009 en diferentes regiones.

Por otra parte, desde el proyecto se promueven diferentes espacios de formación, no solo con los maestros, sino desde la participación de los padres de familia de los estudiantes en algunos talleres y de igual manera, la participación de coordinadores y directivos como veedores y dinamizadores de estos procesos en sus propias instituciones.

De igual forma, desde los ejes misionales, la Universidad logra vincularse y proyectarse en la sociedad. Esto, a través de la investigación y la docencia puestas al servicio de la extensión y de la realización de alianzas que permitan el desarrollo de proyectos, como es el caso del proyecto Numerario, que posibilita la interacción entre la empresa privada, la Universidad y la escuela pública.

Los procesos de formación de maestros que enseñan matemáticas se centran en dos espacios bien diferenciados a saber: formación de maestros en formación, en las licenciaturas de las diferentes universidades y formación continuada de maestros para los maestros en ejercicio, siendo esta última, la formación que se viene realizando desde el proyecto Numerario.

Los encuentros de formación con los maestros tienen como propósito la reflexión sobre estrategias didácticas que posibiliten desarrollar de manera integrada los contenidos conceptuales, procedimentales y actitudinales desde la interrelación de los pensamientos matemáticos, en los diferentes grados de la básica primaria, y con base en dicha reflexión alrededor de las prácticas pedagógicas de los maestros, propiciar una transformación de ellas, de forma que posibilite que en el aula circulen otros sentidos y significados de las matemáticas.

Las actividades propuestas para los encuentros de formación se enmarcan en situaciones problema que generan la necesidad de poner en acción el saber matemático con sentido y de forma significativa. Esta estrategia favorece un diálogo de confrontación, por una parte, con los saberes propios del campo disciplinar de las matemáticas y por otra parte, con las estrategias metodológicas empleadas en los procesos de enseñanza y las maneras de interpretar los procesos de aprendizaje en los estudiantes.

Referentes teóricos

La formación de maestros

Numerario es un proyecto de formación continuada de maestros que enseñan matemáticas, desde el cual se posibilita espacios de reflexión, con los maestros en ejercicio, sobre sus prácticas pedagógicas, sobre las relaciones que se tejen en el aula de clase entre el maestro, el estudiante y el conocimiento matemático.

Los marcos legales del MEN proponen generar proyectos de formación de maestros que favorezcan la reflexión en torno a sus prácticas pedagógicas, su formación disciplinar y didáctica, teniendo en cuenta los contextos y los sujetos que conforman las comunidades educativas. Al respecto, en los mismos Lineamientos curriculares de matemáticas (MEN, 1998) se plantea:

> La formación de maestros debe descansar no sólo sobre una base metodológica firme que garantice la obtención de la cobertura y calidad apropiada, sino que ésta debe subyacer sobre una propuesta conceptual que permita a los maestros desplegar la educación que necesita la sociedad colombiana del nuevo milenio (p.121).

En investigaciones sobre Educación Matemática se viene planteando otra concepción de formación, la formación de un maestro reflexivo, dador de sentidos desde sus creencias, motivos, acciones e historias, que sea capaz de pensarse como un maestro investigador, transformador de su práctica pedagógica, entendida como lo plantea Jaramillo (2003), citando a Larrosa, como un proceso vivido por cada uno, con base en su propio saber de experiencias y en una continua dialéctica entre sí mismo y los otros (los otros maestros, los otros directivos, los otros estudiantes, la institución, la familia y el contexto, entre otros). Favoreciendo de esta forma, que el maestro en formación, se sienta sujeto protagónico y al mismo tiempo, creador de saberes encaminados hacia su profesión.

Son diversas las formas como enseñan matemáticas los maestros de la educación básica primaria. En nuestras Instituciones educativas se ha venido visibilizando, entre otros, dos tipos de maestros: uno, el maestro que transmite a los niños un concepto, simplemente para que sea repetido y memorizado y el otro, que orienta la construcción de conceptos con sentido y significado, utilizando estrategias metodológicas que favorecen la relación entre la didáctica, el saber matemático y el saber matemático escolar, mediado en ocasiones por lo lúdico y lo afectivo. Es entonces, la apuesta desde el proyecto Numerario, formar un maestro crítico, capaz de desarrollar pensamiento matemático en los niños de básica primaria, desde la resolución de problemas de la cotidianidad, con procesos creativos, de representación y argumentación.

Así, cobra importancia la formación de maestros reflexivos, críticos, innovadores e investigadores que provoquen cambios y transformaciones significativos en la comunidad educativa. Al respecto Da Rocha Migueis y Da Graça Acevedo (2007) proponen que:

> Debe ser, entonces, considerado como un proceso continuo, que pretende la mejoría de las prácticas docentes, centrado en el educador o en un grupo de educadores en interacción, incluyendo momentos formales y no formales, de reflexiones no solo de las prácticas sino también de los contextos en que estas ocurren, con la preocupación de propiciar cambios educativos en beneficio de los educadores, los alumnos, las familias y las comunidades (p. 22).

El trabajo colaborativo es un aspecto primordial que se destaca en este proyecto puesto que participan diferentes actores a saber: el equipo de profesores la Universidad, los maestros, los niños, los directivos de las instituciones educativas y los padres de familia. Todos participan e interactúan de una u otra manera desde su lugar como personas y desde su propia experiencia, en procura de movimientos y transformaciones en los procesos que se desarrollan en el aula de clase. Esta idea se complementa con las propuestas de Boavida y Ponte (2002) quienes plantean que:

> La colaboración puede desarrollarse entre pares, por ejemplo entre profesores que trabajan un mismo proyecto; sin embargo, la colaboración puede también tener lugar entre actores con estatus y papeles diferenciados, por ejemplo entre profesores e investigadores, entre profesores y alumnos, entre profesores y encargados de la educación... (p. 4).

Por otro lado cabe destacar la continuidad que se ha venido dando en el proyecto a partir de su fundamentación y las concepciones que le dan soporte; lo cual ha favorecido que se comiencen a identificar algunos cambios en las aulas de clase de primaria, acordes con las

expectativas que tiene del proyecto la comunidad académica involucrada en él; según Boavida y Ponte (2002): "[…] la verdad es que, en muchos casos, la concretización, con éxito, de proyectos realmente ambiciosos e interesantes, solo es posible con la constitución de equipos colaborativos"(p. 6).

El saber disciplinar en la educación matemática

Investigaciones en Educación matemática (Dickson, Brown, & Gibson, 1991; Godino & Batanero, 2002; Llinares, 2006; Obando, 2003) han venido mostrando que los conocimientos relacionados con las fracciones provienen de múltiples situaciones de la cotidianidad. A partir de éstas, los maestros de básica primaria pueden generar estrategias que posibiliten a los estudiantes desarrollar procesos intuitivos iniciales, que favorezcan ir construyendo sentidos y significados del uso de las fracciones en diferentes contextos; para luego, ir avanzando en la conceptualización de los racionales.

En este sentido Godino y Batanero (2002) proponen las siguientes situaciones de uso de fracciones y razones como se muestra en la Tabla 1, donde los ejemplos que se presentan son análogos a los propuestos por el autor pero contextualizados a nuestro medio escolar Colombiano.

Tabla 1
Situaciones de uso de las fracciones

Situaciones de uso de las fracciones		Ejemplo
Situaciones de reparto	Partición de un todo	Si repartimos un pastel entre tres personas decimos que cada una de ellas recibe 1/3. (todo continuo) En una bolsa hay 4 fichas blancas y 3 negras. Decimos que la probabilidad de obtener una ficha blanca es 4/7, porque los casos favorables son 4 de los 7 posibles (todo discreto)
	Reparto equitativo en las que el número de objetos a repartir no es múltiplo del número de individuos entre los que se efectúa el reparto.	Se desea repartir, de manera equitativa, 3 panes entre 5 niños. Cada pan se divide en cinco porciones iguales y se dan tres de ellas a cada niño. El resultado del reparto se expresa con la con la escritura, 3/5.
	Reparto proporcional de una cierta cantidad en partes que guardan una cierta relación.	Este tipo de reparto se usa en el muestreo proporcional. Por ejemplo, si en una población de jóvenes la proporción de deportistas es el 40% del total de jóvenes, al elegir una muestra de 1000 jóvenes se incluirá en la misma 400 deportistas.
Situaciones de medida	Por fraccionamiento de la unidad	Cuando decimos que un vaso de leche tiene 250/1000 litros, es decir, ¼ litro
	Por conmensurabilidad	Cuando decimos que en un grado5º hay 3 niños por cada 7 niñas. La razón entre el número de niños y niñas es 3/7. La similitud con la conmensurabilidad se ve teniendo en cuenta que si tomamos 7 grupos de 3 niños obtenemos la misma cantidad de personas que si tomados 3 grupos de 7 niñas. En los dos casos se obtiene 21 personas.

Situaciones de trueque, en las que dos individuos intercambian mercancías de distintos tipos.	Cuando compramos una bolsa de limones de 2 libras por 3000 pesos. En este caso podemos decir que el trueque es 3000: 2 pesos la libra o, alternativamente que el precio unitario de la libra de limones es 3000/2 de pesos.
Situaciones de transformación	Cuando se dice que el tasa de morbilidad de una población es del 10 por ciento o que el precio de las acciones de una empresa se ha reducido a los ½ de su valor.
Situaciones de división no entera	En el contexto algebraico, la solución de la ecuación a = bx, con a y b enteros y cuando b no es un divisor de a y distinto de 0, se expresa mediante la fracción a/b, dejando indicado el cociente entre los números a y b (Godino, Cid, & Batanero, 2002).

Al resolver situaciones prácticas, concretas, en educación primaria, como las propuestas en los ejemplos, se va avanzando hacia la expresión del cociente de dos números naturales. Esto conduce a la idea de fracción y a medida que se avanza en los primeros grados de educación secundaria, tras un proceso de abstracción, a la introducción de los números racionales.

Para este taller el saber disciplinar específico está relacionado con "Las fracciones", propuestas desde tres aspectos fundamentales: su origen en procesos de medición, las fracciones en el aula de clase y la importancia de las equivalencias, como se plantea en Universidad de Antioquia (2012).

Históricamente, los procesos de medición fueron una necesidad del hombre para contar sus rebaños, para delimitar sus tierras y cuantificar cualidades de objetos que hacían parte de su vida cotidiana. Al contar determinaban un número exacto de objetos (cantidades discretas) tomando uno de dichos objetos como unidad natural, pero, para cuantificar, por ejemplo la tierra, crearon unidades artificiales como rectángulos, así con esta unidad debían saber cuántas veces estaba contenido el rectángulo unidad en el terreno a medir (magnitudes continuas) y generalmente no estaba contenido un número entero de veces. Los egipcios crearon unidades artificiales, relacionadas con partes del cuerpo humano, como el palmo y el cúbito. Otros pueblos crearon unidades diferentes. Los romanos, la milla, que equivalía a mil pasos de un legionario. Los franceses, la brazada, que equivale a la longitud de la punta de una palma a la otra, con los brazos abiertos. Los ingleses, la pulgada, el pie y la yarda.

Sin embargo, en la mayoría de situaciones de la vida cotidiana, en las mediciones de magnitudes continuas, la unidad de medida no suele estar contenida un número entero de veces en la cantidad de magnitud, por lo cual se hace necesario fraccionar la unidad de medida. Al respecto Universidad de Antioquia. Facultad de Educación. Departamento de Extensión, (2012), citando a Aleksandrov, Kolmogorov y Laurentiev, afirman:

> En el proceso de medida generalmente ocurre que la unidad elegida no está contenida un número entero de veces en la magnitud a medir, por lo que el simple cálculo del número de unidades no es suficiente. Surge entonces la necesidad de fraccionar la unidad de medida para poder expresar la magnitud con mayor exactitud en partes de la unidad; esto es, no mediante números enteros sino por medio de fracciones. Fue así como surgieron realmente las fracciones, hecho que se ha demostrado con el análisis de datos históricos y de otro tipo. Surgieron de la división y comparación de las magnitudes continuas; en otras palabras, de las mediciones (p. 58).

Para estos matemáticos la interacción entre la aritmética y la geometría condujo a la aparición de la fracción, como extensión de los números enteros a los fraccionarios.

Ahora, la enseñanza de las fracciones en la escuela primaria se ha centrado, tradicionalmente, en el desarrollo de procedimientos de carácter simbólico, gráfico, algorítmico, desprovistos de sentidos y significados. Es por esto que en este taller se propone crear contextos que posibiliten la apropiación y el uso de las fracciones desde procesos de medición.

Un aspecto de suma importancia a la hora de resolver problemas que contengan fracciones es la equivalencia, entendiéndose que dos fracciones son equivalentes si representan la misma cantidad de magnitud. Así, la equivalencia de fracciones se convierte en una herramienta significativa cuando se solucionan problemas en los que se realizan operaciones que incluyen números fraccionarios, por ejemplo, para la suma y la resta de fracciones heterogéneas; de igual manera para la división de fracciones.

Es importante mencionar que muchas investigaciones muestran las dificultades que tienen los niños en el aprendizaje de las fracciones equivalentes. En el ámbito escolar se podrían plantear las siguientes preguntas: ¿A qué se refiere cuando se habla de las fracciones equivalentes? ¿equivalentes en qué? ¿en la forma? ¿en la cantidad? ¿en relaciones de tipo cuantitativo? Son preguntas sobre las que los maestros deben reflexionar y propiciar actividades que tengan sentido para los niños en el manejo de las equivalencias de fracciones.

Encuentros de formación de maestros

Los encuentros de formación de maestros en el proyecto Numerario son los espacios que posibilitan interacciones hacia una actitud crítica, reflexiva y transformadora en relación con la práctica de enseñanza de las matemáticas, haciendo énfasis en las relaciones que se establecen entre los saberes matemáticos y su didáctica específica, a través de situaciones problema como estrategia metodológica que permite dotar de sentido los procesos de enseñanza y los procesos de aprendizaje de las matemáticas en la educación preescolar y básica primaria.

El Gráfico 1 muestra las relaciones que se han venido tejiendo desde los encuentros de formación con los maestros que participan en el proyecto Numerario. Muestra los elementos que componen el proyecto: en primer plano los propósitos que se materializan en un proyecto de formación continuada que implica, repensar los procesos - de enseñanza y de aprendizaje- desde diferentes contextos y que se concretizan y movilizan en cada uno de los talleres desarrollados en los encuentros de formación a través de la participación y la reflexión en las diferentes actividades propuestas.

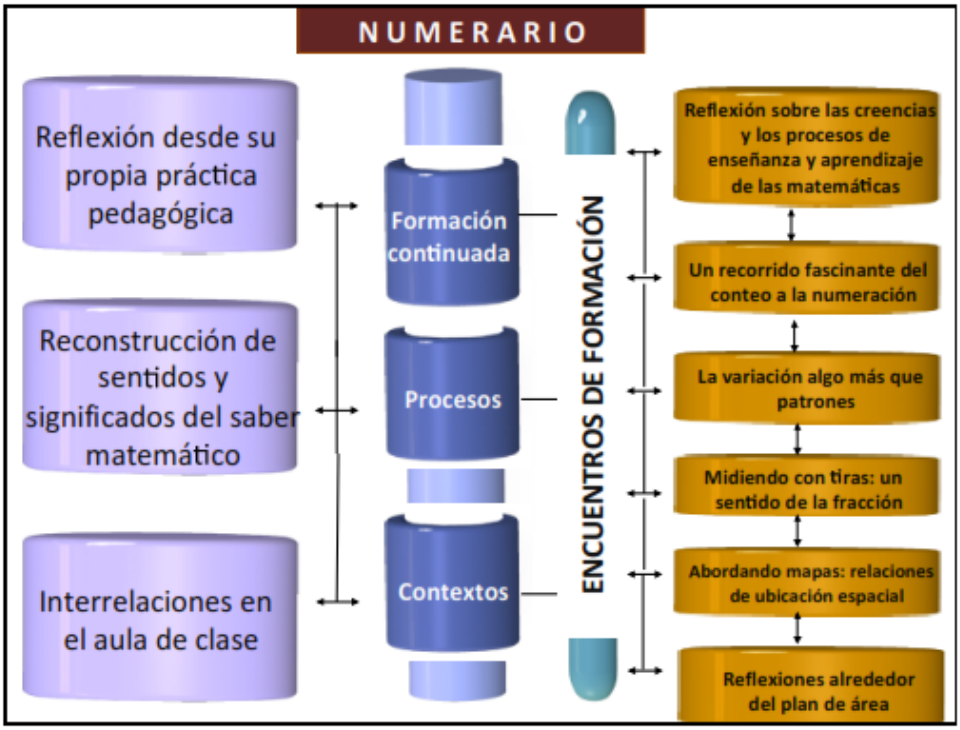


Gráfico 1. Relaciones en los encuentros de formación

Es así como en los encuentros de formación se evidencia el propósito general del proyecto Numerario: Construir con los maestros de preescolar y básica primaria, estrategias didácticas para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, que movilicen el pensamiento matemático, en los niños y niñas, generando diferentes habilidades y actitudes que posibiliten la resolución de problemas en diferentes contextos, a través de la participación y reflexión en encuentros de formación.

Metodología

Las situaciones diseñadas para compartir con los maestros en los encuentros de formación, se proponen con la intencionalidad de visibilizar maneras de integrar los pensamientos matemáticos, de tal manera que se movilicen conocimientos, formas de enseñar, establecimiento de relaciones con la cotidianidad, concepciones de las matemáticas, prácticas de aula y concepciones de los niños desde sus procesos de aprendizaje.

El desarrollo de los encuentros de formación con los maestros tiene la siguiente estructura como se ilustra en el gráfico 2: Un primer momento es indagar las creencias y saberes previos que tiene el maestro frente a la temática a abordar, tanto desde lo conceptual como desde lo metodológico. En un segundo momento se desarrolla una situación de aprendizaje que de cuenta de los conceptos, las relaciones y las estrategias sobre los que se pretende generar análisis y discusión. Luego, en el tercer momento se hace la lectura de un documento sobre el tema, haciendo énfasis en los conceptos, relaciones y estrategias más relevantes para ponerlos en diálogo con con las creencias planteadas inicialmente por los maestros, y con los aprendizajes alcanzados en el desarrollo de la situación, lo cual facilita la confrontación con las prácticas pedagógicas. Para finalizar, en el cuarto momento se estimula a los asistentes al encuentro a diseñar situaciones, acordes con los diferentes niveles de complejidad, según los distintos

grados de la básica primaria, que recojan los elementos conceptuales y metodológicos reflexionados y confrontados (Builes, Díaz, & Beltrán, 2012)

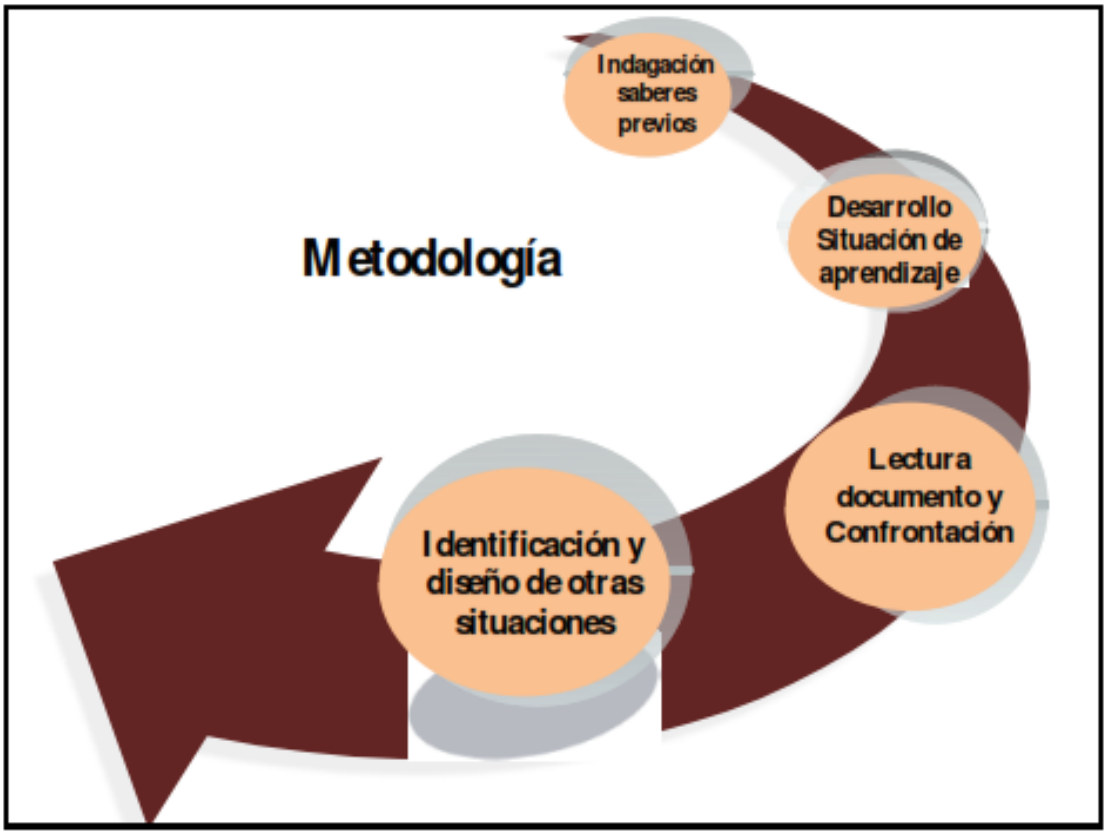


Grafico 2. Metodología en los encuentros de formación en el proyecto Numerario

Es importante a la hora de planear situaciones de aprendizaje para desarrollar en los encuentros de formación, que los maestros diferencien los contenidos conceptuales procedimentales y actitudinales para que sea tenido en cuenta como algo fundamental en el diseño de las mallas curriculares de los planes de área[2]. Con esta intención se propone la Tabla 2: "Tabla de contenidos" para llenar en las diferentes situaciones que se realizan con los maestros en los encuentros de formación.

Tabla 2
Tabla de contenidos para cada situación desarrollada

Situación				
Contenidos conceptuales que se pueden abordar desde cada pensamiento matemático (EL QUÉ)				
Pensamiento numérico	Pensamiento espacial	Pensamiento métrico	Pensamiento variacional	Pensamiento aleatorio
Contenidos procedimentales (EL CÓMO)		Contenidos actitudinales (EL PARA QUÉ)		

[2] Presupuesto teórico tomado del proyecto de Recontextualización de los Planes de Área. Convenio Secretaría de Educación de Medellín con la Universidad de Antioquia, 2006-2012.

Metodología del taller

En el taller que estamos proponiendo, en un espacio de dos horas, no pretendemos desarrollar todos los usos de las fracciones presentadas en los referentes teóricos, nos centraremos de manera especial en el sentido de la fracción desde la medida, de tal manera que se movilicen conocimientos, formas de enseñar, especialmente la división de fracciones, establecimiento de relaciones con la cotidianidad, creencias de los maestros frente a la enseñanza de éste y a su vez genere nuevas estrategias para el trabajo con sus estudiantes en el aula.

Compartiremos el componente metodológico del proyecto Numerario en doble vía, primero, se socializará, con una presentación, la fundamentación metodológica del proyecto y segundo, se vivenciará con los participantes cada uno de los momentos de la metodología planteados en el Gráfico 2. Finalmente, la tabla 3 visibiliza cada uno de estos componentes de la temática de las fracciones que se van abordar.

Tabla 3
Tabla de momentos en la metodología del taller

MOMENTOS	ACTIVIDADES
1	Indagación de saberes previos sobre el sentido de las fracciones y las estrategias metodológicas para su enseñanza, a través de un cuestionario escrito.
2	Desarrollo de algunas situaciones de aprendizaje: Midiendo con tiras y acoplamientos.
3	Lectura de los documentos: "El origen de la fracción" y "La división de fracciones: ruptura o dolor de cabeza" reflexión y confrontación con los saberes previos y los aprendizajes en el desarrollo de las situaciones.
4	Diseño de otras situaciones de aprendizaje.

Referencias y bibliografía

Boavida, A.M., & Ponte, J. P. (2002). Investigaçao Colaborativa: Potencialidades e problemas. In GTI (Org), *Reflectier e investigar sobre práctica profesional.* Lisboa: APM.

Builes, G., Díaz, L. M.,& Beltrán Y. (2012). La variación, algo más que patrones: una experiencia desde el proyecto Numerario. En *Memorias del XII Encuentro colombiano de Matemática Educativa*, Asocolme. Medellín.

Da Rocha, M, M., & Da Graça, A, M. (2007). *Educaçao Matemática na Infancia. Abordagens y desafíos*. Rio de Janeiro. Brasil: Ediciones Gailivro.

Dickson, L., Brown, M., & Gibson, O. (1991) *El aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona: Editorial Labor.

Godino, J.D., Cid, E., & Batanero, C. (2002). *Sistemas numéricos y su didáctica para maestros.* Distribución en Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/ Impresión: ReproDigital. Facultad de Ciencias Avda. Fuentenueva s/n. 18071 Granada.

Jaramillo, D. (2003). *(Re)constituição do ideário de futuros professores de matemática num contexto de investigação sobre a prática pedagógica* (Tesis Doctoral). Brasil

Linares, S. (2006). Fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte – todo al razonamiento proporcional. En M Chamorro (Coord.), *Didáctica de las Matemáticas para primaria* (pp. 187 – 220). Madrid: Pearson Educación.

MEN. (1998). *Lineamientos Curriculares de Matemáticas*. Bogotá.

Obando, G. (2003). *La Enseñanza de los Números Racionales a Partir de la Relación Parte – Todo*. Revista *EMA*, *8*(2), 1-27.

Universidad de Antioquia. Facultad de Educación. Departamento de Extensión, (2012) Programa para la transformación de la calidad educativa TODOS A APRENDER. Módulo de matemáticas. Medellín.

Geogebra: programando interações em objetos geométricos

Agostinho Iaqchan Ryokiti **Homa**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
iaqchan@hotmail.com

Resumo

O minicurso tem como objetivo desenvolver objetos de aprendizagem interativos através da programação de ações de movimentos em objetos geométricos no software Geogebra. A atividade consistirá no desenvolvimento de um modelo de Tangram, com seus objetos geométricos (triângulo, quadrado, paralelogramo) construídos utilizando representação polar e a inclusão de ações de rotação, translação e simetria desses. As atividades desenvolvidas possibilitarão, aos participantes, a reflexão, discussão e planejamento de outras atividades interativas em objetos de aprendizagem ou jogos educativos.

Palavras chave: Geogebra, tecnologias digitais, ensino e aprendizagem, matemática.

Tecnologias digitais na educação

A interação do ser humano com o mundo vem mudando com o uso das tecnologias. Nesse período de informatização massiva, no qual as atividades têm migrado para o formato digital, a educação também vem se adequando às atuais tecnologias.

Nessa realidade de avanços tecnológicos, a diminuição dos custos envolvido tem facilitado o acesso à tecnologia. Estar inserido na sociedade da informação, não significa ter acesso à tecnologia de informação e comunicação (TIC), mas saber utilizar a tecnologia para resolver os problemas do cotidiano, compreender o mundo e atuar na sua transformação (Brasil, 2013).

Segundo Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (Brasil, 1996) a Educação Nacional, tem por finalidade o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o trabalho. Deste modo a educação e a inserção na sociedade digital implica em uma adequação da sala de aula à realidade da tecnológica.

O uso da tecnologia pelos docentes não é uma ação individual, sem metodologias e sem análise das consequências, como quem resolve mudar seu trajeto para o trabalho ou a escola sem avaliar a nova distância a ser percorrida, se o tempo disponível é adequado ao novo caminho e, quais os ganhos e perdas estão envolvidos.

Para dar auxiliar no suporte aos professores, o uso das tecnologias na educação é tema de pesquisas desde a década de 60. No início, as pesquisas eram fomentadas por empresas como IBM, RCA e Digital e realizadas principalmente nas universidades, que desenvolveram a instrução auxiliada por computador ou *Computer-Aided Instruction* (CAI).

Com o surgimento dos computadores pessoais nos anos 80, houve uma diversificação das pesquisas em especial as experiências sobre o uso do *Logo* na educação. Os resultados dessas pesquisas foram aquém do esperado, devido ao uso do Logo baseado no aprendizado por

descoberta no qual bastava o aluno resolver problemas através do Logo para que as "ideias poderosas" fossem adquiridas de maneira natural (Valente, 1995).

Da década de 80 até momento, foram realizadas várias pesquisas sobre a TIC na educação com resultados que apontam para a necessidade da capacitação do professor para o uso das TIC na idealização de atividades didáticas com foco na aprendizagem.

Para a aprendizagem em determinado campo do conhecimento, o docente realiza a organização dos conteúdos, a partir da articulação entre os conceitos e procedimentos a serem desenvolvidos, com atividades didáticas planejadas para esse fim.

Segundo Zabala (1998, p. 18), sequências didáticas são "[...] um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que tem um princípio e um fim conhecido, tanto pelos professores como pelos alunos". Dolz e Schneuwly (2004) consideram que as sequências didáticas são organizadas pelo professor com o objetivo de alcançar a aprendizagem de seus alunos, e envolvem atividades de aprendizagem e avaliação.

Na organização das sequências didáticas com TIC, faz-se uso dos objetos de aprendizagem que, segundo Wiley (2000) são recursos digitais que possam ser reutilizados para o suporte ao ensino. Para o IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers, 2002) os objetos de aprendizagem são qualquer entidade, digital ou não, que pode ser utilizada, reutilizada ou referenciada durante o processo de aprendizagem que utilize tecnologia.

Ressalta-se que dentro de um enfoque pedagógico, Merril (2002) afirma que objetos sem um design instrucional são somente objetos de conhecimento, ou seja, tem um caráter mais informativo. Tal preocupação tem levado aos desenvolvedores a adotarem uma postura construtivista com atividades de interação que permitam a ação do aluno.

Essas interações do aluno com o objeto de aprendizagem são possíveis somente em aplicações com suporte a tais ações. Como a maioria dos docentes não tem uma formação técnica para desenvolver programas interativos para suas sequencias didáticas, a alternativa é utilizar programas que aceitem ações interativas e organizar atividades diversas em tais programas.

Geogebra

O Geogebra é um programa *opensource*, sob o GNU (*General Public License*) dispovível em www.geogebra.org, que agrega as funcionalidades de um Sistema de Geometria Dinâmica (DGS-*Dynamic Geometry System*) e de um Sistema de Computação Algébrica (CAS-*Computer Algebric System*) no plano, sendo então denominado como um Programa de Matemática Dinâmica (DMS-*Dynamic Mathematics Software*) para Geometria, Álgebra e Cálculo (Hohenwarter & Preiner, 2007).

Segundo Hohenwater e Fuchs (2004):

> Geogebra é um *software* de Geometria interativa que também fornece possibilidades algébricas como entrar diretamente com equações. Ele é direcionado aos estudantes (10 a 18 anos) e professores do Ensino Médio. O *software* incentiva os estudantes a abordarem a matemática de maneira experimental (tradução nossa).

Como um DGS o Geogebra permite a construção de objetos geométricos através do menu de ferramentas ou por comandos. O menu de ferramentas está organizado com submenus para ações relacionados basicamente ao ponto; retas e semirretas; círculo e arcos; cônicas; ângulos; texto; controles; exibição de objetos. Com exceção do submenu de exibição e algumas poucas

ferramentas todas as ações do Geogebra podem ser realizadas através de comandos inseridos em Campo de Entrada (*Input Bar*).

Os Comandos são definidos por categorias (Anexo 1), e sua notação é no idioma inglês ou no idioma de trabalho selecionado para a interface do Geogebra. A maioria dos comandos requer um ou mais argumentos para sua execução.

Para o ensino de Geometria, o Geogebra é uma poderosa ferramenta de aprendizagem, sendo necessária a organização de atividades em uma sequência de acordo com o objetivo instrucional utilizando o menu de ferramentas para construções geométricas. Também é possível organizar uma sequência didática utilizando construções geométricas prontas, com interações através dos botões deslizantes ou caixas de entrada de valor, objetivando a aprendizagem através da experimentação, discussão, reflexão e generalização de conceitos explorados nas atividades.

Várias dessas atividades estão disponíveis no site de materiais do Geogebra em http://tube.geogebra.org/. Por vezes o educador que deseja customizar alguma atividade ou até mesmo desenvolver a sua própria se depara com o problema de como programar uma determinada ação ou como criar um botão de ação pré-fixada.

Por exemplo, o Tangram é composto de cinco triângulo retângulos isósceles, um quadrado e um paralelogramo, mas para monta-lo o aluno tem que organizar as peças com ações de rotação e reflexão. Enquanto objeto concreto (Figura 1) essas ações são realizadas sem maiores problemas, mas a mesma atividade em um meio digital necessita que as mesmas ações sejam realizadas com um click do mouse, deste modo é preciso que sejam programadas ações nos objetos geométricos a serem manipulados.

Figura 1. Tangram de papel

Atividades propostas

O minicurso destina-se a capacitar o docente a utilizar os comandos de construção geométrica e a programação de ações nos objetos geométricos visando o desenvolvimento de atividades interativas.

Para o desenvolvimento dessa atividade analisar-se-á as interações possíveis para o planejamento prévio das ações de programação previstas nos objetos geométricos e suas dimensões para construção dos mesmos através de comandos. No caso do Tangram e considerando os objetos geométricos, temos as ações de reflexão horizontal e vertical, e rotações de 45° em 45°.

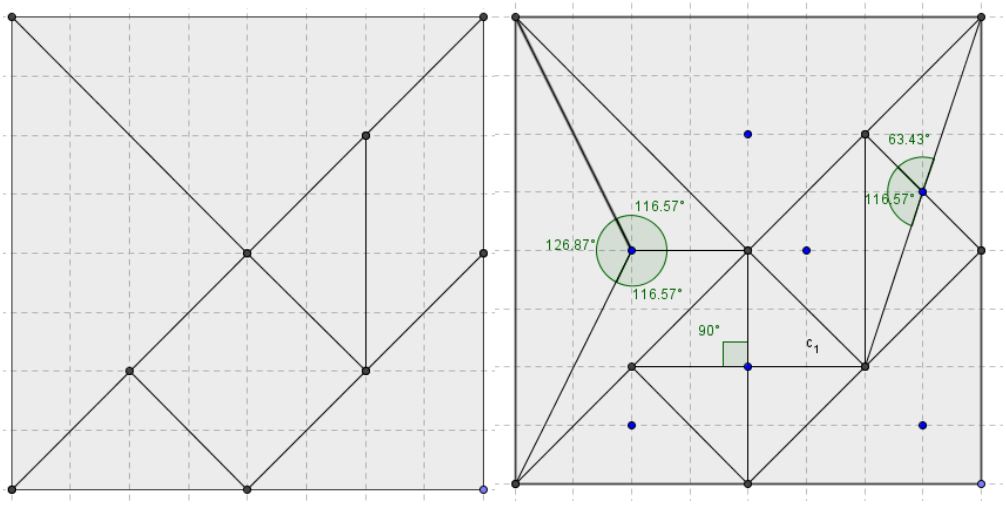


Figura 2. Tangram digital

Para um Tangram, conforme Figura 3, tem-se um quadrado com lado de medida $8u$, e os seguintes objetos geométricos:

- 2 triângulos retângulo isósceles com lados $8u$, $4\sqrt{2}u$ e $4\sqrt{2}u$;
- 2 triângulos retângulo isósceles com lados $4u$, $2\sqrt{2}u$ e $2\sqrt{2}u$;
- 1 triângulo retângulo isósceles com lados $4\sqrt{2}u$, 4 e 4;
- 1 quadrado de lado $2\sqrt{2}u$;
- 1 paralelogramo com altura $2u$, a partir do lado maior, e 2 pares de lados paralelos de $4u$ e $2\sqrt{2}u$ respectivamente.

Devido às ações de rotação para a construção dos objetos do Tangram, serão utilizadas coordenadas polares para definir os vértices dos polígonos, para isso adotar-se-á pontos, de acordo com a Figura 2, que serão usados como referência para a definição dos vértices. As construções serão realizadas digitando os comandos no *campo de entrada* que são apresentados na Figura 3 e Figura 4.

Construindo os triângulos retângulo isósceles:

Definição do objeto geométrico	**Comando**
ponto de referência $A1$	$A1 = (4,6)$
ângulo de giro $\alpha 1$	$\alpha 1 = 0°$
lista com os vértices $T1$	$T1 = \{A1 + (2; \alpha 1), A1 + (4.47214; \alpha 1 + 116.57°), A1 + (4.47214; \alpha 1 - 116.57°)\}$
Triângulo 1	$Pol1 = Polígono[T1]$
ponto de referência $A2$	$A2 = (2,4)$
ângulo de giro $\alpha 2$	$\alpha 2 = 0°$
lista com os vértices $T2$	$T2 = \{A2 + (2; \alpha 2 - 90°), A2 + (4.47214; \alpha 2 + 26.57°), A2 + (4.47214; \alpha 2 - 206.57°)\}$
Triângulo 2	$Pol2 = Polígono[T2]$
ponto de referência $A3$	$A3 = (2,1)$
ângulo de giro $\alpha 3$	$\alpha 3 = 0°$
lista com os vértices $T3$	$T3 = \{A3 + (1; \alpha 3 + 90°), A3 + (2.23607; \alpha 3 - 26.57°), A3 + (2.23607; \alpha 3 + 206.57°)\}$

Triângulo 3	$Pol3 = Polígono[T3]$
ponto de referência $A4$	$A4 = (2,1)$
ângulo de giro $\alpha 4$	$\alpha 4 = 0°$
lista com os vértices $T4$	$T4 = \{A4 + (1; \alpha 4 + 180°), A4 + (2.23607; \alpha 4 + 63.43°), A4 + (2.23607; \alpha 4 - 63.43°)\}$
Triângulo 4	$Pol4 = Polígono[T4]$
ponto de referência $A5$	$A5 = (2,1)$
ângulo de giro $\alpha 5$	$\alpha 5 = 0°$
lista com os vértices $T5$	$T5 = \{A5 + (1.4142; \alpha 5 + (-45)°), A5 + (3.16228; \alpha 5 - 161.57°), A5 + (3.16228; \alpha 5 + 71.57°)\}$
Triângulo 5	$Pol5 = Polígono[T5]$

Figura 3. Comandos para construção dos triângulos retângulo isósceles

Identifica-se que todos os objetos geométricos têm a ação de rotação, mas para o paralelogramo é necessária, além da rotação, a ação de reflexão. Como as ações são vinculadas aos objetos é necessário que o paralelogramo seja construído com dois objetos, no caso, dois triângulos retângulo isósceles.

Construindo quadrado e o paralelogramo:

Definição do objeto geométrico	**Comando**
ponto de referência $A6$	$A6 = (4,2)$
ângulo de giro $\alpha 6$	$\alpha 6 = 0°$
lista com os vértices $T6$	$T6 = \{A6 + (2; \alpha 6), A6 + (2; \alpha 6 + 90°), A6 + (2; \alpha 6 + 180°), A6 + (2; \alpha 6 + 270°)\}$
Quadrado	$Pol6 = Polígono[T6]$
ponto de referência $A7$	$A1 = (7,5)$
ângulo de giro $\alpha 7$	$\alpha 7 = 0°$
Marcador de reflexão	$rf = -1$
lista com os vértices $T7$	$T7 = \{A7 + (1.4142; rf(\alpha 7 - 45°)), A7 + (1.4142; rf(\alpha 7 + 135°)), A7 + (3.16228; rf(\alpha 7 - 108.43°))\}$
Triângulo 1 do paralelogramo	$Pol7 = Polígono[T7]$
lista com os vértices $T8$	$T8 = \{A7 + (1.4142; rf(\alpha 7 - 45°)), A7 + (1.4142; rf(\alpha 7 + 135°)), A7 + (3.16228; rf(\alpha 7 + 71.43°))\}$
Triângulo 2 do paralelogramo	$Pol8 = Polígono[T8]$

Figura 4 – Comandos para construção do quadrado e dos 2 triângulos do paralelogramo

Considerando a reflexão do paralelogramo em relação a seu eixo horizontal, temos que utilizar um marcador de reflexão que altera de $(+1)$ para (-1) que será utilizado como um fator de para alterar os ângulos dos vetores para a ação de reflexão.

Como os polígonos são construídos utilizando os pontos de referência, a movimentação dos mesmos ocorre somente pela translação dos pontos. Para facilitar essa ação, será aumentado o tamanho dos pontos de referência dos polígonos alterando as propriedades, na aba Estilo, para nove.

Para inserir a ação de rotação nos objetos geométricos selecione o polígono desejado, abrir a janela de propriedades do objeto, a seguir a aba *Programação*, aba *Ao Clicar* e digita-se o comando que somará 45° aos ângulos de rotação α. A seguir apresenta-se um exemplo para o

triângulo denominado Pol1, nesse comando além de somar os 45° há um controle para que o mesmo fique entre 0° e 360°

$$\alpha 1 = \alpha 1 + 45°]$$

$$\alpha 1 = Se[\alpha 1 > 360°, 45°, \alpha 1]$$

Quando as ações para o comando *Se* (*If*), forem a valoração de uma variável, deve-se utilizar a notação $var = Se[< condição >, < valor1 >, < valor2 >]$.

Para o paralelogramo, o comando de rotação deve ser vinculado a um dos triângulos e o de reflexão ao outro. Para inserir a ação de reflexão, digitar na aba *Ao Clicar* o comando: $rf = Se[rf == -1,1,-1]$.

Cabe aqui ressaltar a notação '==' que é uma operação de teste de igualdade que retorna um valor falso ou verdadeiro, enquanto a notação '=' deve ser utilizada para valorar uma variável.

O planejamento de uma atividade interativa requer o planejamento das ações e definição dos parâmetros que serão alterados nos objetos geométricos que por sua vez devem ser construídos baseados nesses parâmetros e não pelas ferramentas de construção geométrica do Geogebra.

Com a realização dessas atividades espera-se que o docente entenda como construir objetos geométricos através de linhas de comando se utilizando de variáveis de controle que serão manipuladas por comandos de programação e controles lógicos.

Referências bibliográficas

Brasil (1996). *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional.* http://doi.org/10.1002/job

Brasil (2013). *Guia de Tecnologias Educacionais da Educação Integral e Integrada e da Articulação da Escola com seu Território.* Retrieved from http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=13018&Itemid=948

Dolz, J., & Schneuwly, B. (2004). *Gêneros orais e escritos na escola*. Campinas: Mercado da Letras.

Hodgins, H. W. (2002). The Future of Learning Objects. In J. R. Lohmann & M. L. Corradini (Eds.), *e-Technologies in Engineering Education Learning Outcomes Providing Future Possibilities* (pp. 76–82). a. Retrieved from http://dc.engconfintl.org/etechnologies/11

Hohenwarter, M., & Fuchs, K. (2004). *Combination of dynamic geometry , algebra and calculus in the software system GeoGebra*. Retrieved from http://www.geogebra.org/publications/pecs_2004.pdf

Hohenwarter, M., & Preiner, J. (2007). Dynamic Mathematics with GeoGebra. *The Journal of Online Mathematics and Its Applications*, *7*. Retrieved from http://www.maa.org/external_archive/joma/Volume7/Hohenwarter/index.html

Institute of Electrical and Electronics Engineers (2002). IEEE Standard For Learning Object Metadata. Retrieved March 5, 2013, from http://grouper.ieee.org/groups/ltsc/wg12/

Merrill, D. (2002). Position statement and questions on learning objects research and practice. In *Learning objects technology: Implications for educational research and practice, AERA*. New Orleans. Retrieved from http://www.learndev.org/LearningObjectsAERA2002.html

Valente, J. A. (1995). *O professor no ambiente logo: Formação e Atuação*. Retrieved from http://www.nied.unicamp.br/?q=system/files/O Professor no Ambiente Logo.pdf

Wiley, D. A. (2000). Connecting learning objects to instructional design theory: A definition, a metaphor, and a taxonomy. *The Instructional Use of Learning Objects*. Retrieved from http://reusability.org/read/chapters/wiley.doc

Zabala, A. (1998). *A prática educativa: como ensinar*. Porto Alegre: Artmed.

Anexo 1

Comandos do geogebra organizados por categoria

Quadro 1. Comandos do Geogebra

Categoria	Comando
Algebra	Div, Mod; Expand; Factor; GCD, LCM; Min, Max; PrimeFactors; Product; Simplify
Chart	BarChart; BoxPlot; DotPlot; FrequencyPolygon; Histogram; HistogramRight; NormalQuantilePlot; ResidualPlot; StemPlot
Conic	Asymptote; CompleteSquare; Coefficients; ComplexRoot; Curvature; CurvatureVector; Curve; Degree; Denominator; Derivative; Extremum; Factors; Function; ImplicitCurve; InflectionPoint; Integral; IntegralBetween; Intersect; Iteration; IterationList; LeftSum; Limit; LimitAbove; LimitBelow; LowerSum; Numerator; OsculatingCircle; PartialFractions; PathParameter; Polynomial; RectangleSum; Root; RootList; Roots; SolveODE; TaylorPolynomial; TrapezoidalSum; TrigCombine; TrigExpand; TrigSimplify; UpperSum/
Discrete Math	Convex hull; DelaunayTriangulation; Hull; MinimumSpanningTree; ShortestDistance; Travelling Salesman; Voronoi
Function	Asymptote; CompleteSquare; Coefficients; ComplexRoot; Curvature; CurvatureVector; Curve; Degree; Denominator; Derivative; Extremum; Factors; Function; ImplicitCurve; InflectionPoint; Integral; IntegralBetween; Intersect; Iteration; IterationList; LeftSum; Limit; LimitAbove; LimitBelow; LowerSum; Numerator; OsculatingCircle; PartialFractions; PathParameter; Polynomial; RectangleSum; Root; RootList; Roots; SolveODE; TaylorPolynomial; TrapezoidalSum; TrigCombine; TrigExpand; TrigSimplify; UpperSum
Geometry	AffineRatio; Angle; AngleBisector; Arc; Area; Centroid; CircularArc; CircularSector; CircumcircularArc; CircumcircularSector; Circumference; ClosestPoint; CrossRatio; Direction; Distance; Incircle; Intersect; IntersectRegion; Length; Line; Locus; Midpoint; Perimeter; PerpendicularBisector; PerpendicularLine; Point; PointIn; Polygon; PolyLine; Radius; ay; RigidPolygon; Sector; Segment; Slope; Tangent; Vertex
GeoGebra	AxisStepX; AxisStepY; ClosestPoint; ConstructionStep; Corner; DynamicCoordinates; Name; Object; SlowPlot; ToolImage
List	Append; Classes; Element; First; Frequency; IndexOf; Insert; Intersection; IterationList; Join; Last; OrdinalRank; PointList; Product; RandomElement; RemoveUndefined; Reverse; RootList; SelectedElement; SelectedIndex; Sequence; Sort; Take; TiedRank; Union; Unique; Zip
Logical	CountIf; If; IsDefined; IsInRegion; IsInteger; KeepIf; Relation; AreParallel; AreEqual; ArePerpendicular; AreConcurrent; AreConcyclic
Optimization	Maximize; Minimize
Probability	Bernoulli;BinomialDist; BinomialCoefficient; Cauchy; ChiSquared; Erlang; Exponential; FDistribution; Gamma; HyperGeometric; InverseBinomial; InverseCauchy; InverseChiSquared; InverseExponential; InverseFDistribution; InverseGamma; InverseHyperGeometric; InverseNormal; InversePascal; InversePoisson; InverseTDistribution; InverseWeibull; InverseZipf; Logistic; LogNormal; Normal; Pascal; Poisson; RandomBetween; RandomBinomial; RandomNormal; RandomPoisson; RandomUniform; TDistribution; Triangular; Uniform; Weibull; Zipf
Scripting	AttachCopyToView; Button; CenterView; Checkbox; CopyFreeObject; Delete; Execute; GetTime; HideLayer; InputBox; Pan; ParseToFunction; ParseToNumber; PlaySound; Rename; SelectObjects; SetActiveView; SetAxesRatio; SetBackgroundColor; SetCaption; SetColor; SetConditionToShowObject; SetCoords; SetDynamicColor; SetFilling; SetFixed; SetLabelMode; SetLayer; SetLineStyle; SetLineThickness; SetPointSize; SetPointStyle; SetSeed; SetTooltipMode; SetTrace; SetValue; SetVisibleInView; ShowAxes; ShowGrid; ShowLabel; ShowLayer; Slider; StartAnimation; UpdateConstruction; ZoomIn; ZoomOut
Spreadsheet	Cell; CellRange; Column; ColumnName; FillCells; FillColumn; FillRow; Row
Statistics	ANOVA; Classes; CorrelationCoefficient; Covariance; Fit; FitExp; FitGrowth; FitLine; FitLineX; FitLog; FitLogistic; FitPoly; FitPow; FitSin; Frequency; FrequencyTable; GeometricMean; HarmonicMean; Mean; MeanX; MeanY; Median; Mode; Percentile; Q1; Q3; RootMeanSquare; RSquare; Sample; SampleSD; SampleSDX; SampleSDY; SampleVariance; SD; SDX; SDY; Shuffle; SigmaXX; SigmaXY; SigmaYY; Spearman; Sum; SumSquaredErrors; Sxx; Sxy; Syy; TMeanEstimate; TMean2Estimate; TTest; TTest2; TTestPaired; Variance
Financial	FutureValue Command; PresentValue Command; Periods Command; Rate Command; Payment Command
Text	ContinuedFraction; FormulaText; FractionText; LetterToUnicode; Ordinal; RotateText; StandardForm; SurdText; TableText; Text; TextToUnicode; UnicodeToLetter; UnicodeToText; VerticalText
Transformation	Dilate (Enlarge); Reflect; Rotate; Shear; Stretch; Translate
Vector and Matrix	ApplyMatrix; CurvatureVector; Determinant; Identity; Invert; PerpendicularVector; ReducedRowEchelonForm; Transpose; UnitPerpendicularVector; UnitVector; Vector
CAS Specific	BinomialCoefficient; BinomialDist; CFactor; CSolutions; CSolve; Cauchy; ChiSquared; Coefficients; CommonDenominator; Covariance; Cross; Degree; Delete; Denominator; Derivative; Determinant; Dimension; Div; Division; Divisors; DivisorsList; DivisorsSum; Dot; Element; Expand; Exponential; FDistribution; Factor; Factors; First; FitExp; FitLog; FitPoly; FitPow; FitSin; GCD; Gamma; HyperGeometric; Identity; ImplicitDerivative; Integral; IntegralBetween; Intersect; Invert; IsPrime; Last; LCM; LeftSide; Length; Limit; LimitAbove; LimitBelow; Max; Mean; Median; Min; MixedNumber; Mod; NIntegral; nPr; NSolutions; NSolve; NextPrime; Normal; Numerator; Numeric; PartialFractions; Pascal; PerpendicularVector; Poisson; PreviousPrime; PrimeFactors; Product; RandomBetween; RandomBinomial; RandomElement; RandomNormal; RandomPoisson; RandomPolynomial; Rationalize; ReducedRowEchelonForm; RightSide; Root; SD; Sample; SampleSD; SampleVariance; Sequence; Shuffle; Simplify; Solutions; Solve; SolveODE; Substitute; Sum; TDistribution; Take; TaylorPolynomial; ToComplex; ToExponential; ToPoint; ToPolar; Transpose; Unique; UnitPerpendicularVector; UnitVector; Variance; Weibull; Zipf

Homeomorfismos: da intuição à visualização em construções geométricas

José Carlos Pinto **Leivas**
Centro Universitário Franciscano
Brasil
leivasjc@unifra.br
Rosvita Fuelber **Franke**
Universidade do Vale do Rio dos Sinos
Brasil
rosvitaf@unisinos.br

Resumo

Neste artigo, propomos abordar um assunto relevante para o ramo da Geometria, denominado Topologia, um dos mais atuais em seu desenvolvimento ao longo da história. É nosso objetivo utilizar intuição e visualização para desencadear o tema, usando diversos recursos didáticos, como folhas de papel dupla face coloridos. Abordaremos alguns homeomorfismos entre figuras planas e espaciais, buscando conexões com as diversas áreas matemáticas, como, por exemplo, o Cálculo e a Geometria Analítica, em nível elementar e acessível a um pré-universitário ou até mesmo a alunos de anos iniciais de uma licenciatura em Matemática, bem como a professores que atuam na escola básica. Culminaremos o trabalho ilustrando a importante função projeção estereográfica e a construção de superfícies homeomorfas em papel.

Palavras chave: homeomorfismos, visualização, intuição, construções geométricas.

Introdução

Em geral, em diversos níveis de ensino, em vários países, os cursos de Geometria tratam dos assuntos de Geometria Plana e de Geometria Espacial, muitas vezes, de forma axiomática e sem conexões com outras áreas do conhecimento matemático. Abordam-na, ainda, sob o formato de Euclides. Poucos são aqueles que distinguem esse tratamento daquele dado por Hilbert (2003). Queremos dizer com isso que a Geometria se desenvolveu ao longo dos milênios, séculos e até mesmo décadas, especialmente a partir do final do século XVIII e início do XIX, com a construção das Geometrias Não-Euclidianas de Bolyai e de Lobachevscky. No presente século, o grau de desenvolvimento dessa área do conhecimento é muito grande e novas geometrias, que denominamos não euclidianas foram criadas e mostram um grau enorme de generalidade comparativamente a outros ramos da Matemática. Por exemplo, Geometria Fractal, Geometria Sintética e a Geometria Topológica proporcionam um novo fazer geométrico que, em nossa opinião, devem ser incorporados à formação inicial ou continuada dos professores que irão atuar nos diversos níveis de escolaridade.

Piaget e Inhelder (1993) constataram, em suas pesquisas, que a primeira representação de espaço na criança é de natureza topológica e não euclidiana, por não depender de medidas. Para os autores,

> a percepção é o conhecimento dos objetos resultante de um contato direto com eles. A representação consiste, ao contrário - seja ao evocar objetos em sua ausência, seja quando duplica a percepção em sua presença - em completar seu conhecimento perceptivo referindo-se a outros objetos não atualmente percebidos (Piaget; Inhelder, 1993, p. 32).

Segundo eles, a representação do espaço não é dada de antemão, é construída. Para que ocorra, consideramos que desenvolver a habilidade de visualização é de fundamental relevância. Entendemos essa habilidade como um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos. Conforme Arcavi (1999),

> visualização é a habilidade, o processo e o produto de criação, interpretação, uso e comentário sobre figuras, imagens, diagramas, em nossas mentes, em papel ou com ferramentas tecnológicas, com a finalidade de desenhar e comunicar informações, pensar sobre e desenvolver ideias não conhecidas e avançar na compreensão. (p. 217, trad. nossa)

Por sua vez, Fischbein (1987) identifica visualização com um conhecimento intuitivo, uma vez que intuições são imediatas e aparentemente são autoevidentes. "É uma afirmação trivial que se tende, naturalmente, a pensar em termos de imagens visuais e que o que não se pode imaginar visualmente é difícil de conceber mentalmente". (p. 103)

A Topologia é considerada pelos estudantes de Matemática, no Brasil, segundo nossa experiência profissional, como uma disciplina teórica, de difícil compreensão, abstrata, haja vista que a mesma aborda, eminentemente, o estudo de funções contínuas, o que é tratado nos cursos de Cálculo, meramente, pelos aspectos algébricos. Entretanto, ao tratarmos a mesma a partir das propriedades das figuras geométricas que se mantêm invariantes por transformações topológicas, utilizando habilidades visuais, entendemos que o tema pode se tornar agradável e com significado para os estudantes. Já comprovamos isso em disciplinas que temos ministrado para estudantes, tanto da Licenciatura em Matemática quanto para os de Pós-Graduação. Cabe salientar que consideramos como transformação topológica toda função contínua, bijetora com inversa contínua.

De acordo com Eves (1969), uma figura geométrica é "um conjunto de pontos do espaço tridimensional (ou em qualquer espaço de maior dimensão); uma transformação contínua e bijetora é aquela que, dado um sistema de coordenadas cartesianas no espaço, pode ser representada por funções coordenadas contínuas e bijetoras" (p. 337, trad. nossa). Por sua vez, ao se constituir um conjunto com todas essas transformações topológicas de uma determinada figura geométrica, fica constituído um grupo de transformações e a Topologia pode ser vista como uma geometria kleiniana, segundo Eves (1969), aquela definida no Programa Erlangen de Félix Klein.

Nesse sentido, se propriedades geométricas de uma dada figura se mantêm invariantes, mediante uma dessas transformações topológicas, então elas são denominadas de propriedades topológicas da figura. Como exemplo de propriedades elementares, segundo Piaget e Inhelder (1993), temos: relação de vizinhança, separação, ordem, circunscrição, continuidade e outras. Em Leivas (2008), encontramos atividades exploratórias que ilustram tais propriedades e que podem ser utilizadas para a organização do espaço na criança por caminhos topológicos. Por sua vez, se uma figura pode ser transformada topologicamente em outra, então as duas figuras se dizem homeomorfas ou topologicamente equivalentes.

Para obtermos superfícies homeomorfas, são empregadas funções que recebem o nome de homeomorfismos, as quais são o objeto da oficina que estamos apresentando. Essa oficina

aborda características visuais dessas funções e sua importância na formação do professor de Matemática que, dessa forma, poderá desenvolvê-las com os estudantes desde a escola básica, na medida que é desenvolvido o conteúdo de funções, constante dos currículos dos diversos níveis de escolaridade.

Muito embora o título e o tema possam parecer ao leitor de nível elevado, basta que os participantes da oficina tenham alguns conhecimentos básicos de Cálculo Diferencial, a saber, noções básicas de funções, de continuidade e de espaços vetoriais, oriundos de formação pré universitária.

Intuição e visualização na geometria dos homeomorfismos

Intuição, em Geometria, é importante para o desenvolvimento de um pensamento geométrico, especialmente, no que diz respeito a habilidades visuais. Ela foi estudada tanto na Matemática como em outras ciências. Para Granger (1974, p. 62),

> [...] a intuição espacial, que unia os antigos e, como diz Descartes, causava-lhes 'escrúpulo em usar termos da Aritmética na Geometria', achava-se conjurada. Todas as operações da análise algébrica – que Descartes sistematiza – estão, desde então, disponíveis para exprimir as propriedades geométricas... A noção confusa e imaginativa de dimensão de uma figura é substituída por outra noção clara e distinta: a de grau de uma equação.

Considerando que, na Topologia, os objetos podem apresentar dimensões além das euclidianas, convencionais, o papel da intuição, filosoficamente, para nós, é imprescindível ao buscarmos conexões entre a conceituação teórica de um homeomorfismo e a representação geométrica, corroborando o que o autor afirma, pois devemos, sim, associar aos aspectos algébricos de uma função, os aspectos geométricos a eles associados. Apoiamo-nos em Hilbert e Cohn-Vossen (1932), no prefácio de seu livro *Geometry and the Imagination,* para traçarmos nosso objetivo de desenvolver o conteúdo homeomorfismos numa oficina:

> [...] é nosso objetivo dar uma apresentação da Geometria, tal como está hoje, em seus aspectos visual e intuitivo. Com a ajuda da imaginação visual, podemos iluminar a variedade de fatos e de problemas de Geometria e, além disso, é possível, em muitos casos, retratar o esboço geométrico dos métodos de investigação e demonstração, sem necessariamente entrar em pormenores relacionados com a estrita definição de conceitos e com cálculos reais.(p. iii, trad. nossa)

Dessa forma, acreditamos que, partindo dos aspectos intuitivos de uma ideia, podemos desenvolver conhecimento, pois, segundo Fischbein (1987), intuição ou conhecimento intuitivo é um tipo de cognição que se refere às afirmações auto evidentes, as quais ultrapassam fatos observados, o que o diferencia de percepção, algo como uma cognição imediata, não necessitando de prova para sua existência. O autor entende por cognição as componentes estruturais de qualquer comportamento adaptativo: "o papel essencial da intuição é conferir às componentes conceituais de um esforço intelectual as mesmas propriedades as quais garantem a produtividade e a eficiência adaptativa de um comportamento prático." (Fischbein, 1987, p. 19), enquanto que "o principal atributo do conhecimento intuitivo é o sentimento de uma certeza direta e este é produzido, em primeiro lugar, pela impressão de auto evidência." (Ibid., p. 21).

Buscamos, neste trabalho, utilizar intuição como um processo de construção de estruturas mentais para a formação de um determinado conceito matemático-geométrico, a partir de experiências concretas dos indivíduos com um determinado objeto. O conceito deve ser formado de forma reflexiva, consciente, produzindo sentimento de certeza a partir da auto evidência.

Dessa forma, intuitivamente, dizemos que duas superfícies são homeomorfas ou topologicamente equivalentes, se for possível passar de uma para outra por meio de alguma contração, flexão, torção, sem que ocorra nenhuma ruptura e, no caso de algum corte que desejamos efetuar, as extremidades de cada corte se reúnam da mesma forma que antes de realizá-lo.

Seja B(p, ε) a bola de centro p e raio ε no R^2 [essa região do plano é denominada de círculo]. Tome, também, a bola $B(0, 1) \subset R^2$. Define-se

$$f: B(p, \varepsilon) \rightarrow B(0, 1) \subset R^2 \text{ por } f(u) = \frac{1}{\varepsilon}(u - p),\ \forall u \in B(p, \varepsilon).$$

Observamos que g(u) = u – p é uma translação, logo é uma função contínua em seu domínio, enquanto que $h(v) = \frac{1}{\varepsilon}v$ é uma homotetia, também contínua. Dessa forma, f é uma função contínua, por ser composta de uma translação e de uma homotetia. Como $f(u_1)=f(u_2) \Rightarrow u_1=u_2$, $\forall\ u_1,u_2 \in B(p, \varepsilon)$, f é injetora.

Além disso, por $||f(u)|| = ||\frac{1}{\varepsilon}(u-p)|| = \frac{1}{\varepsilon}||u-p|| < \frac{1}{\varepsilon}.\varepsilon = 1$, segue que

$$Im(f) = B(0, 1) \text{ e f é sobrejetora.}$$

Dessa forma, $f: B(p, \varepsilon) \rightarrow B(0, 1)$ é uma função contínua e bijetora e sua inversa é dada por:

$$f^{-1} : B(0, 1) \rightarrow B(p, \varepsilon) \text{ levando } f^{-1}(u) = \varepsilon u + p, \text{ que também é contínua.}$$

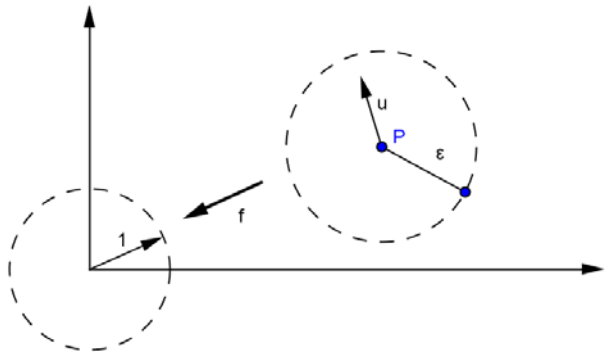


Figura 1. Homeomorfismo entre duas bolas (discos) no plano.

A função f, exemplificada acima e representada na figura 1, é um exemplo de homeomorfismo. Observamos que não é necessário exigir o formalismo matemático para a compreensão do exemplo, apenas é explorada a intuição de que é possível transformar uma bola com um dado raio numa bola de raio maior ou menor do que a inicial. Isso pode ser feito utilizando um tipo de material concreto flexível que possa ser alongado ou comprimido sem perder a forma circular. Dessa forma, levamos um ponto de uma em um único ponto da outra e vice versa, sem deixar nenhum deles de fora dessa correspondência.

Um segundo exemplo de homeomorfismo que pode ser obtido intuitivamente consiste na transformação da circunferência unitária $S^1 = \{(x, y) \in R^2: x^2 + y^2 = 1\}$, no plano euclidiano, em uma curva fechada, no mesmo plano, como ilustrado na figura 2, a seguir. A segunda figura é denominada de Curva de Jordan.

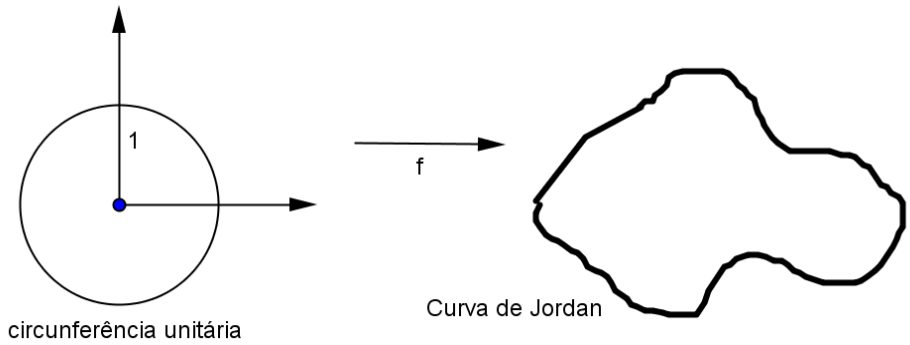


Figura 2. Homeomorfismo entre a circunferência e a Curva de Jordan.

Sem maior esforço matemático, ou seja, sem realizar demonstração rigorosa, como no exemplo precedente, apenas utilizando a intuição no sentido apontado por Fischbein (1987), é possível adquirir um conhecimento intuitivo e da percepção dos objetos pelo contato direto com eles, como apontado por Piaget e Inhelder (1993). Além disso, a visualização como habilidade e processo, indicado por Arcavi (1999) no tratamento de figuras, vem a desenvolver ideias ainda não conhecidas e que avancem na compreensão de um conceito.

A intuição pode ser utilizada para produzir conhecimento de arco de curva no plano ao tomarmos um pequeno fio flexível de comprimento unitário. Ao flexionar o fio, obtemos um arco sem perder nenhuma parte e, de forma recíproca, podemos considerar tal arco e deixá-lo retilíneo novamente. Com isso o conhecimento intuitivo, citado por Fischbein (1987), como um tipo de cognição, a qual está referida a afirmações auto evidentes, pode ser matematizada no seguinte sentido: consideramos o fio flexível unitário como uma representação do intervalo fechado de números reais $[0,1] \subset R$, o que, geometricamente, corresponde a um segmento de reta. O ato de transformar esse segmento de reta num arco de curva (de Jordan ou outra qualquer) é um homeomorfismo que leva um segmento de reta em um arco ou vice-versa (figura 3).

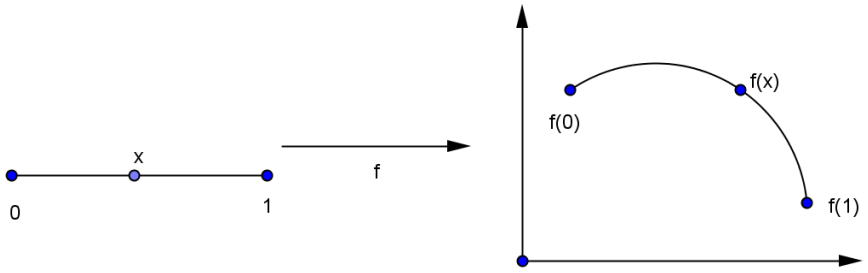


Figura 3. Homeomorfismo entre um segmento de reta e um arco de curva.

Os exemplos apresentados nos mostram a importância do papel que desempenha a intuição para a aquisição e desenvolvimento da habilidade de visualização, indicada por Arcavi (1999) como um processo, criação, interpretação e comentários sobre imagens. Entretanto, podemos ir mais além do que afirmações triviais, como dito por Fischbein (1987), para caracterizar essa habilidade, sem a qual é difícil conceber mentalmente conceitos dados em outras representações.

No nosso próximo exemplo, consideremos a circunferência unitária $S^1 = \{(x, y) \in R^2: x^2 + y^2 = 1\}$ e o quadrado $Q = \{(x, y) \in R^2: |x| + |y| = 1\}$, ambos no plano. As duas figuras geométricas são homeomorfas, como podemos comprovar. De fato, consideremos a função

f: Q → S^1 definida por $f((x, y)) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)$.

Ela é uma função contínua, uma vez que o denominador não se anula em nenhuma das duas coordenadas e é o quociente de duas funções contínuas. Por outro lado, não é difícil mostrar que a função é bijetora. A figura 4 dá uma visualização desse homeomorfismo, o qual também pode ser percebido intuitivamente, dispondo as duas figuras concentricamente e ligando os pontos de uma e de outra por vetores com origen no centro e extremidade na circunferência. Cada vetor corta o quadrado num único ponto e a correspência 1-1 fica perfeitamente definida, como ilustra a figura 5.

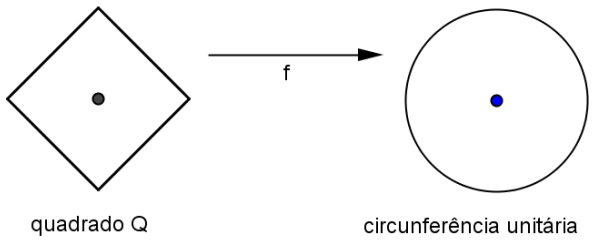


Figura 4. Homeomorfismo entre o quadrado e a circunferência.

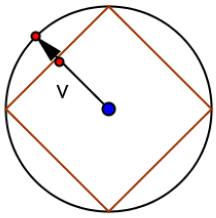


Figura 5. Correspondência 1-1 entre pontos do quadrado e da circunferência.

A partir do último exemplo de homeomorfismo vamos, por analogía, visualizar, intuitivamente, o homeomorfismo entre uma esfera no espaço e um cubo, como na figura 6. Observamos a inscrição de cubo na esfera, um vetor de origen no seu centro, que é comum ao centro do cubo e extremidade no ponto P da esfera. Para cada ponto P, o vetor intersecciona uma face do cubo num ponto Q. Assim, a correspondência 1-1 fica estabelecida.

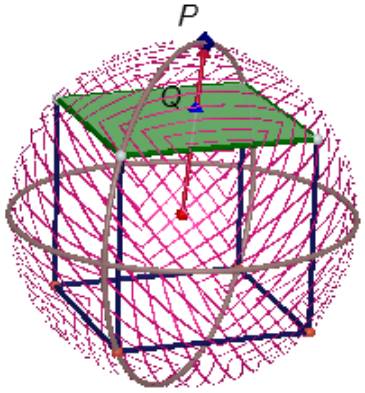


Figura 6. Correspondência 1-1 entre pontos do cubo e da esfera.

Podemos, ainda, explorar intuição ao considerarmos um fio elástico, de comprimento unitário, o qual pode ser esticado, sem se romper, até ser transformado, de modo a ficar com um comprimento igual ao dobro do inicial. Dessa forma, o fio, que pode ser pensado como um segmento de reta com um comprimento dado, se transforma em outro com o dobro desse. Com isso há uma transformação contínua, que faz corresponder a cada ponto de um, um único ponto do outro e vice-versa, caracterizando um homeomorfismo. Esse pode ser visualizado na figura 7, a seguir.

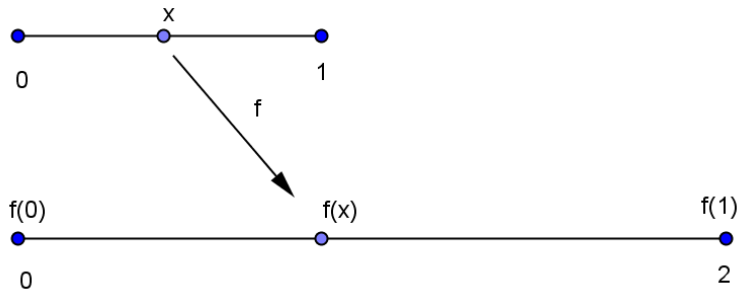


Figura 7. Homeomorfismo entre segmentos de amplitudes distintas.

Podemos facilmente sair do plano intuitivo e imaginativo e articular a construção matemática correspondente. Para tal, vamos verificar que a função $f(x) = 2x$ define o homeomorfismo visualizado na figura 7, quando $x \in [0,1]$ e $f(x) \in [0,2]$. É necessário, pois, verificar que essa função é contínua, bijetiva e sua inversa também é contínua. Em primeiro lugar, toda função de primeiro grau, como a dada, é contínua trivialmente. Tomando $f(x_1)= f(x_2)$, isso implica em $x_1 = x_2$, $\forall\ x_1, x_2 \in[0,1]$, logo temos uma função injetiva. Por outro lado, consideramos que $\forall k\in[0,2]$, $\exists! x\in[0,1]$, de modo que $k=f(x)$. De fato, $k=2x$ acarreta em $x= k/2$. Assim, a função f é sobrejetora. Portanto, é bijetora. Por fim, a função inversa de f, dada por $f^{-1}(x) = x/2$ também é uma função contínua.

Tomemos uma função $f: M \rightarrow N$ contínua, definida num espaço real M, com valores reais em N. O conjunto

$$G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in M\}$$

é chamado gráfico da função f. Os conjuntos M e G(f) são denominados homeomorfos. Esse exemplo abre um leque grande de possibilidade de obtenção de homeomorfismos. Nos cursos de Cálculo e Geometria Analítica, há um conflito cognitivo ao estudar função real de variável real, isto é, conjunto imagem, nessa situação, é um subconjunto dos números reais, sendo confundido com o grafico da função, o qual é subconjunto do R^2.

Por exemplo, seja f: $\mathbf{[0,1]} \rightarrow \mathbf{[0,2]}$ a função analisada no último exemplo (figura 7), a qual associa a cada $x \in \mathbf{[0,1]} \subset \mathbf{R}$ um único $y = 2x \in \mathbf{[0,2]} \subset \mathbf{R}$. Por abuso de simbologia representamos no eixo horizontal os valores do domínio da função e, no eixo vertical, os valores das imagens da função, muito a contramão de quando representamos funções por diagramas sagitais. Assim, a figura 8, a seguir, representa a função f, cujo domínio é $\mathbf{[0,1]} \subset \mathbf{R}$ e conjunto imagem $Im(f)=f(\mathbf{[0,1]})= \mathbf{[0,2]}$ de uma forma diferente daquela. Na figura 9, está representado o Graf(f), claramente um conjunto de pontos distintos do anterior.

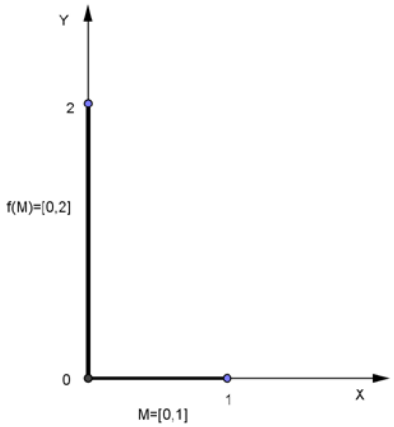


Figura 8. Representação da função f.

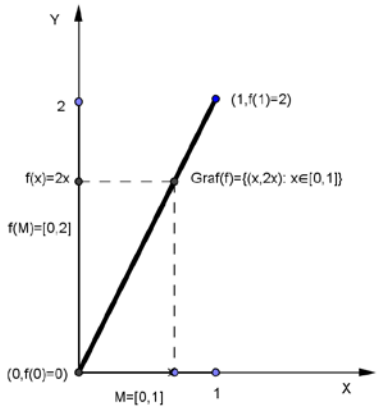


Figura 9. Gráfico da função f.

Portanto, uma função e um gráfico não são sinônimos, como algumas vezes são considerados.

O conjunto $X = \{(x, y) \in R^2: x \neq 0 \text{ e } y \neq 0\}$ é o plano euclidiano sem o ponto (0,0), plano perfurado, enquanto que $S^2 = \{(x, y, z) \in R^3: x^2 + y^2 = 1\}$ é o cilindro circular reto de eixo OZ. Os dois espaços geométricos são homeomorfos, ou seja, topologicamente equivalentes, uma vez que a função

$$f(x, y, z) = (xe^z, ye^z)$$

é contínua, bijetora e com inversa contínua.

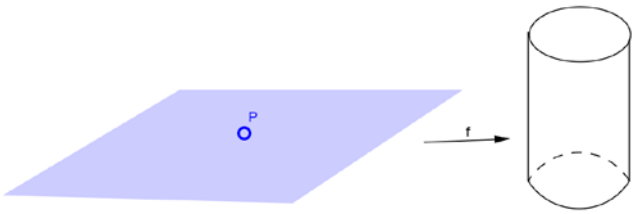


Figura 10. Homeomorfismo entre o plano perfurado e o cilindro circular reto.

Um exemplo interessante de homeomorfismo é o denominado projeção estereográfica da esfera unitária $S^2 = \{(x, y, z) \in R^3 : x^2 + y^2 + z^2= 1\}$ do R^3, sem o seu polo norte, isto é, o ponto P(0,0,1) e R^2 sobre o plano euclidiano. A função

$$f: S^2 - \{P\} \rightarrow R^2 \text{ definida por } f(x,y,z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right)$$

é a função que define esse homeomorfismo.

Notamos que f é contínua uma vez que as funções coordenadas que definem a figura geométrica

$(x,y,z) \rightarrow x$; $(x,y,z) \rightarrow 1$; $(x,y,z) \rightarrow z$ e $(x,y,z) \rightarrow 1-z$ são todas contínuas.

Além disso, $1-z \neq 0$ para todo $z \neq 1$, o que leva $(x,y,z) \rightarrow \frac{x}{1-z}$ e $(x,y,z) \rightarrow \frac{y}{1-z}$ a serem contínuas. Na figura 11, o homeomorfismo é visualizado, na qual podemos verificar a relação 1-

1 que faz corresponder a cada ponto M da esfera um único ponto M' do plano e vice-versa. A construção desse homeomorfismo, utilizando software de Geometria Dinâmica, torna-se muito interessante para o ensino e aprendizagem, especialmente para o desenvolvimento da habilidade de visualização por meio de ferramentas tecnológicas como indicou Arcavi (1999).

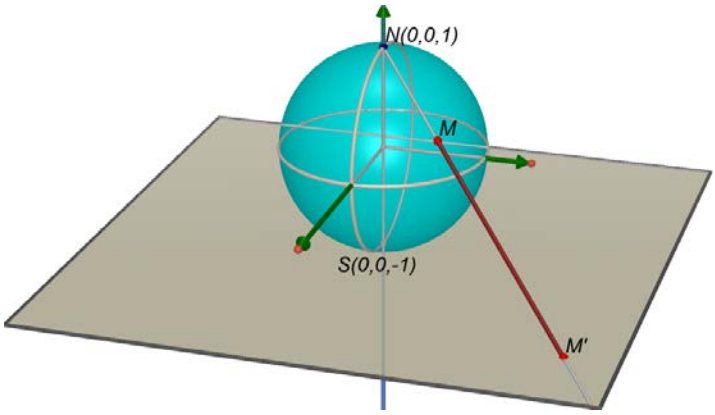


Figura 11. Projeção estereográfica da esfera menos um ponto sobre o plano.

A fim de concluir nosso trabalho, buscaremos ilustrá-lo com mais dois exemplos, cujas construções poderemos realizar utilizando o material concreto papel, um daqueles recursos indicados por Arcavi (1999) para desenvolver visualização. Para o primeiro, tomemos uma pequena tira de papel dupla face, com aproximadamente 2cm de largura e 10cm de comprimento, como indicado na figura 12. Realizemos uma torção na tira, de modo que façamos coincidir os pontos A com B' e B com A'.

Essa superfície, característica da Topologia, é denominada Faixa de Möebius. Como ela foi um dos embriões que deram origem à Topologia, sua importância reside, por exemplo, no fato de que é uma superfície sem fronteiras, ou seja, de um único lado. Ela tem aplicações na Astronomia associada a espaços não orientáveis, nos quais podemos entrar e sair sem que seja necessário dar volta. Também foi utilizada por Lacan para associar determinados estados da psique humana, ou seja, quando um indivíduo já não conhece seu interior, que se confunde com o exterior, já que a faixa não possui nem um e nem outro.

Ela foi originada a partir de uma superfície que apresenta duas faces, a tira de papel. Como falamos antes, o homeomorfismo não é global, uma vez que nos pontos onde há a colagem dos pontos, perde-se a injetividade. Afora isso, nossa intuição indica as demais condições para que as duas superfícies sejam homeomorfas.

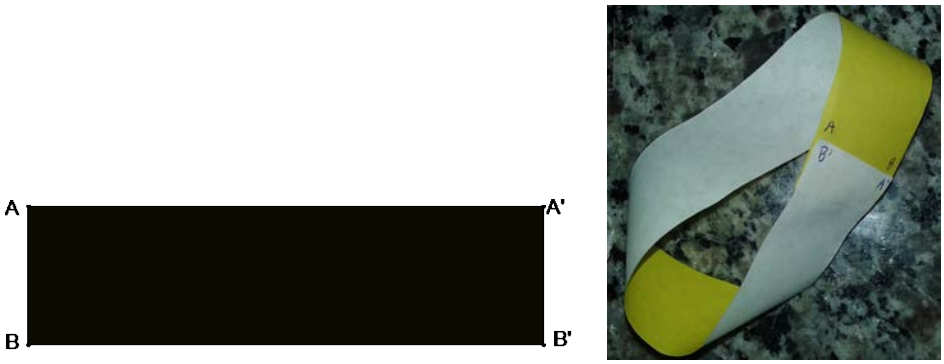


Figura 12. Faixa de Mõebius. Construção dos autores.

Outra construção em papel que podemos elaborar consiste em tomar duas faixas de papel semelhantes a anterior e, a partir de uma delas, construir uma nova superficie, colando a fronteira AB com A'B' mas, antes, dando uma torção de 360º na faixa. Com a outra, construímos uma superficie cilíndrica. Segundo Eves (1969), as duas superficies não são globalmente homeomorfas, não podemos transformar diretamente uma na outra, mas os pontos da superficie cilíndrica podem transformar-se bijetivamente e de forma contínua em pontos da outra superficie. Isso significa que a relação homeomórfica depende dos pontos e não do espaço em que as duas superfícies se encontram, no caso, R^3. O autor afirma que

> a diferença entre eles desapareceria, se o espaço tridimensional pudesse ser considerado como um subespaço de um tetradimensional e se o alongamento, a contração e a flexão fossem admissíveis nesse espaço de quatro dimensões pois então, o cilíndrico e a tira torcida poderiam ser deformadas, convertendo-se uma na outra, sem qualquer corte ou auto intersecção. (Eves, 1969, p.343, trad. nossa)

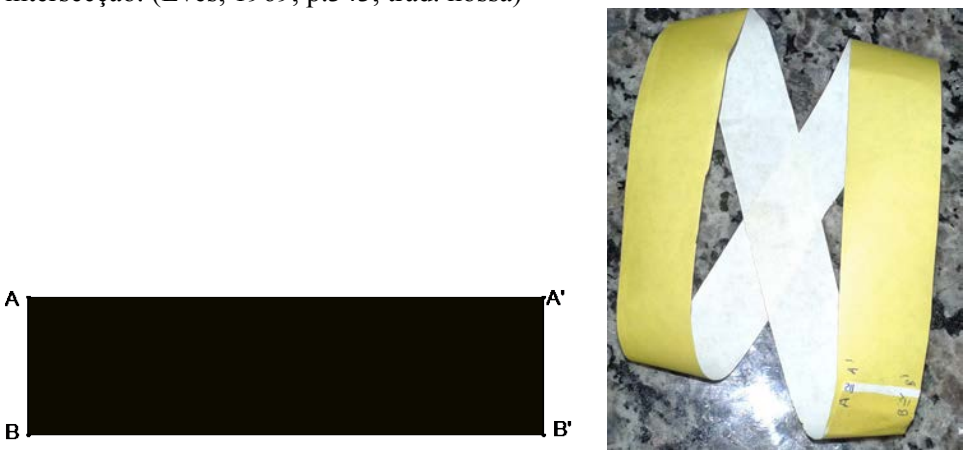


Figura 13. Faixa e superfície. Construção dos autores.

Finalizando

Nessa oficina, utilizamos intuição como forma de construção de conhecimento matemático para, juntamente com visualização, dar um tratamento aos homeomorfismos pelos aspectos geométricos visuais intuitivos. Não nos preocupamos com demonstrações matemáticas rigorosas, mas buscamos fazer analogias e estabelecer conexões com conteúdos geométricos em nível intermediário, de modo que o professor e os futuros professores possam adquirir habilidades e conhecimentos geométricos que julgamos relevantes para desenvolver pensamento geométrico atual.

Nesse sentido, abordar um conteúdo avançado de uma geometria, como a Topológica, de forma acessível a um aluno ingressante de uma Licenciatura em Matemática, por exemplo, constitui um desafio para todo formador. Em particular, nossas pesquisas têm apontado que imaginação, intuição e visualização podem ser aliados poderosos nessa tarefa e que proporcionam novos pontos de vista sobre Geometria, como indicado por Félix Klein em seu Programa de Erlangen: "se define geometria como a teoria dos invariantes de um grupo de transformações." (Eves, 1969, p. 434, trad. nossa).

Deixamos de considerar, neste trabalho, demonstrações matemáticas mais rigorosas com o objetivo de despertar os participantes da oficina e o leitor a aprofundar estudos relacionados ao tema.

Referências e bibliografia

Arcavi, A. (1999). The role of visual representation in the learning of mathematics. *North American Chapter of the PME,* 1999. Proceedings… Disponível em: http://www.clab.edc.uoc.gr/aestit/4th/PDF/26.pdf . Acesso em: 30 set. 2008.

Eves, H. (1969). *Estudio de las geometrias*. UTHEHA: México.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Dordrecht: Reidel.

Granger, G. F. (1974). *Filosofia do Estilo*. São Paulo: Perspectiva, Editora da USP.

Hilbert, D. (2003). *Fundamentos da geometria*. Lisboa: Gradiva.

Hilbert, D.,& Cohn-Vossen, S. (1932). *Geometry and the imagination*. New York: Chelsea Publishing Company,

Leivas, J.C.P. (2008). Organizando o espaço por caminhos topológicos. *Revista Vidya*, 28, n. 2, 59-71.

Piaget, J., & Inhelder, B. (1993). *A representação do espaço na criança*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Introducción de conceptos básicos de Matemáticas desde la primaria: el caso del currículo en Costa Rica

Ricardo **Poveda** Vásquez
Universidad Nacional de Costa Rica
Comisión "Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica"
Costa Rica
ricardo.poveda.vasquez@una.cr

Resumen

Algunos conceptos básicos de matemáticas como: variable, probabilidad, geometría analítica, entre otros, tradicionalmente se enseñen sin la construcción previa de conocimientos necesarios desde la primaria. Esto ocasiona vacíos cognitivos en los estudiantes y por ende un aprendizaje superficial de estos (y otros) conceptos elementales. Este minicurso busca trabajar conceptos fundamentales de las áreas de Relaciones y Álgebra, Geometría y Probabilidad y Estadística siempre desde la perspectiva de la Resolución de Problemas como estrategia pedagógica para la Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, tal y como se plantea en el nuevo currículo de Costa Rica.

Palabras claves: currículo, resolución de problemas, conceptos básicos en primaria. Geometría. Estadística y Probabilidad. Relaciones y álgebra.

Introducción: El currículo de Matemáticas de Costa Rica

En el 2012 el Ministerio de Educación Pública de Costa Rica aprobó un nuevo currículo en Matemáticas e implementarlo a partir del año 2013. Estos programas plantean la Resolución de Problemas con énfasis en contextos reales, como estrategia pedagógica y enfoque principal.

En este programa se proponen habilidades vinculadas en su totalidad a las cinco áreas matemáticas: estadística y probabilidad, números, geometría, medidas, relaciones y álgebra. Por otro lado, también se plantea procesos matemáticos que favorecen la construcción de capacidades cognitivas superiores. "Estas dimensiones están íntimamente asociadas: los procesos matemáticos adoptados se introducen a partir de tareas para el aprendizaje en las que se persigue el desarrollo de habilidades específicas". (MEP, 2012; p. 26).

En los programas se aclara que *los conocimientos matemáticos o las habilidades específicas no generan por sí mismos capacidades cognitivas más amplias que nutran la competencia matemática.* (MEP, 2012; p. 26). Para llevar a cabo esta tarea fundamental es necesario una mediación pedagógica del docente que estimule el análisis, la reflexión y la discusión académica en los estudiantes.

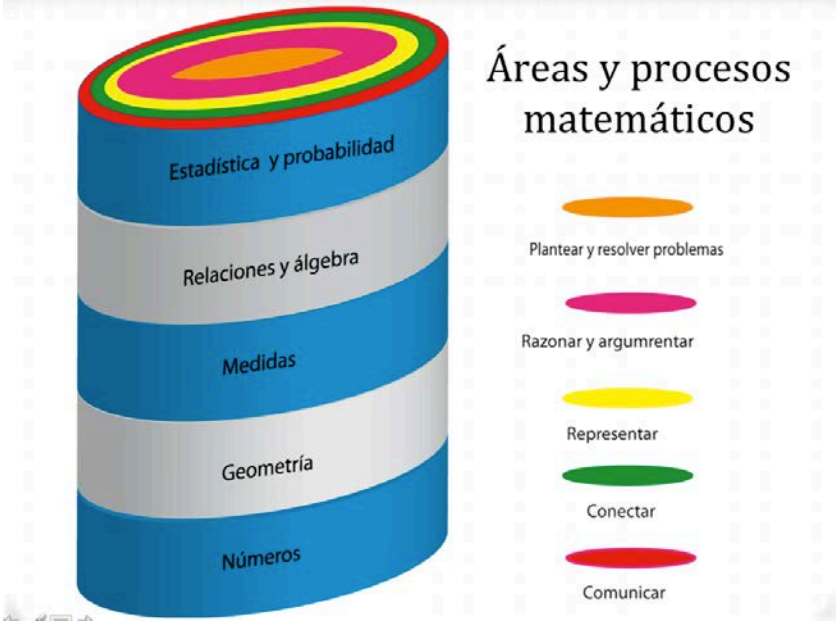


Figura 1. Áreas y procesos en el currículo de Matemáticas de Costa Rica.
Fuente: Ruiz (2012)

Para esto se propone una acción de aula en donde se promueva el aprendizaje significativo en los estudiantes a través de dos etapas: Aprendizaje de los conocimientos y Movilización y aplicación de los conocimientos. En la primera etapa es necesario desarrollarla en cuatro momentos: Propuesta del problema, trabajo estudiantil independiente, discusión y contrastación de respuestas y la clausura.

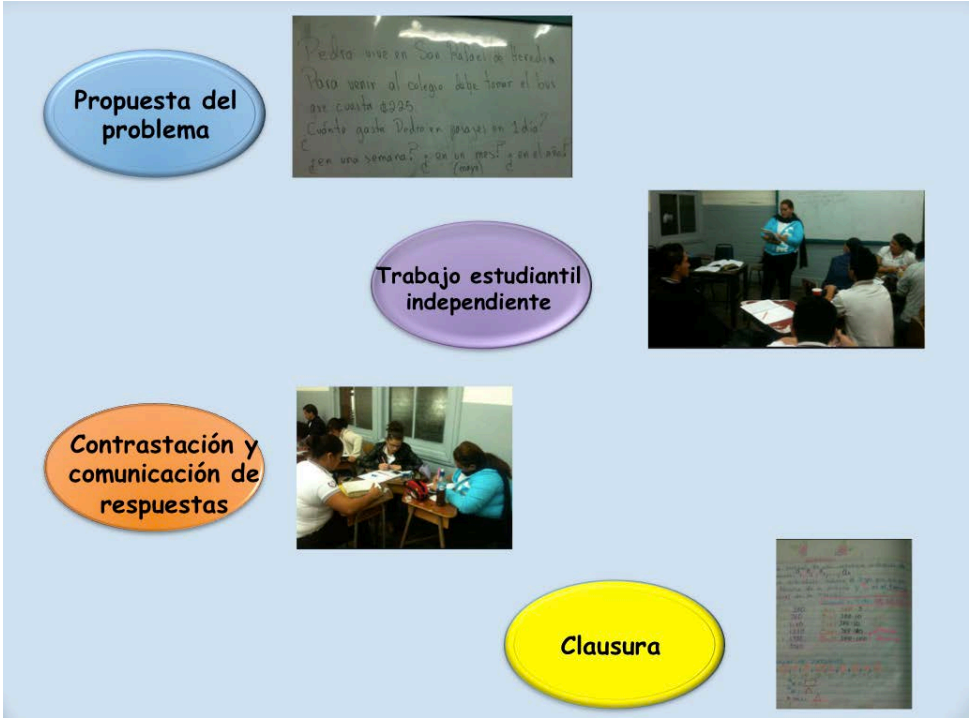


Figura 2. I Etapa: Aprendizaje de los conocimientos

En la segunda etapa se proponen ejercicios y problemas de diferentes niveles de complejidad donde los conocimientos adquiridos se llevan a la práctica en distintos contextos.

Por otro lado, el Programa de estudios está organizado de acuerdo a las áreas matemáticas: relaciones y álgebra, estadística y probabilidad, números, medidas, y geometría. Cada una de ellas están presentes en el currículo de primaria y secundaria en diferentes intensidades según el año lectivo, así como se puede observar en el siguiente gráfico:

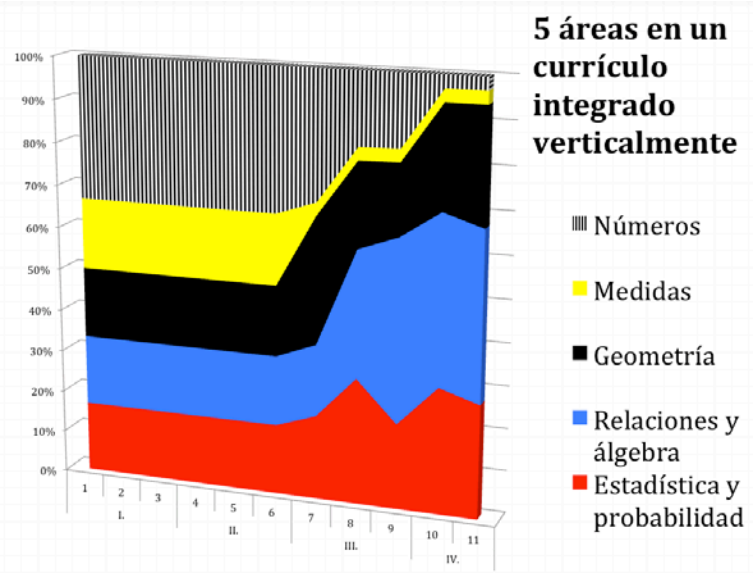


Figura 3. Distribución de áreas en los años lectivos en el currículo de Matemáticas de Costa Rica.

Fuente: Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (2012).

La verticalidad de las áreas de este currículo permite trabajar conceptos básicos desde la primaria. Precisamente esto es lo que se detallará en este Minicurso particularmente en las áreas de Probabilidad y estadística, Relaciones y álgebra y Geometría.

Conceptos básicos de Matemáticas desde la primaria

En el currículo de Matemáticas de Costa Rica plantea una distribución de las habilidades en cada año lectivo según las áreas, el nivel de dificultad y profundidad. Además, cada área se divide en sub áreas para una mejor comprensión y orden.

A continuación se detalla en cada área, las diferentes sub áreas y como se esbozan las habilidades en los Programas de Matemáticas de Costa Rica. Se propondrá un problema de ejemplo donde se visualice alguna o algunas de las habilidades que se desean lograr.

Relaciones y Álgebra

La incorporación de esta área en el currículo de Matemáticas de Costa Rica es una novedad ya que en los programas anteriores se trabajaba el Álgebra hasta la secundaria y de una forma abstracta. Como lo indica De Faria (2013, p. 12), el currículo nuevo de Costa Rica "promueve el desarrollo del pensamiento algebraico funcional desde los primeros años de la educación primaria, en forma gradual, integrada, articulada, tomando los cuidados para evitar todo tipo de cortes didácticos o rupturas cognitivas que podrían ser producidas durante su puesta en praxis."

Sucesiones

En toda la primaria se trabaja esta sub área. La idea es en los primeros años trabajar con patrones no solo numéricos si no con representaciones geométricas, figuras e incluso sonidos. Se plantean habilidades sobre la construcción de sucesiones y la identificación así como la resolución de problemas utilizando patrones y sucesiones.

Un ejemplo donde se utilizan las sucesiones para la resolución de problemas es: Una colonia de bacterias cuenta inicialmente con 8 bacterias. Si la cantidad de bacterias es duplicada cada 24 horas, ¿qué cantidad de bacterias tendrá la colonia al final de 1 semana? (MEP, 2012, p. 240)

Relaciones

El tema de relaciones se introduce a mediados de la primaria iniciando con la representación tabular de relaciones entre números y operaciones y el cálculo de valores faltantes en una tabla o en una expresión matemática.

El concepto de variable se introduce en los dos últimos años de la primaria iniciando con la distinción entre cantidades variables y constantes para luego crear en los estudiantes la necesidad del uso de símbolos para la generalización y su uso en las relaciones. Después se trabaja los conceptos de dependencia e independencia entre cantidades principalmente con expresiones conocidas por los estudiantes como por ejemplo las fórmulas de perímetros y áreas de figuras geométricas.

La proporcionalidad directa, los porcentajes y la regla de tres son conceptos que se adquieren en el último año de la primaria.

Un ejemplo para introducir el concepto de cantidades constantes y variables es: El costo de ½ kg de queso es de $2, el de 1 kg $4, el de $1{,}5\ kg$ es $6. ¿Qué relación existe entre los kilogramos de queso y su costo? (MEP, 2012, p. 234)

Representaciones:

Esta sub área se trabaja en los últimos 3 años de la primaria pues antes es fundamental el dominio básico de operaciones con números naturales.

Se plantean habilidades donde se utilicen las diferentes representaciones de una expresión matemática (verbal, números y letras). También se trata la representación de relaciones a través de tablas y en el último año de primaria, mediante un plano cartesiano. Con esto se puede visualizar una correlación y conexión entre las sub áreas (el concepto de relación) y áreas de la Matemática (el uso de plano cartesiano).

Un ejemplo donde se trabajan varias habilidades de esta sub área es:

Complete la siguiente tabla utilizando la conversión de grados entre temperatura (Fahrenheit, Celsius a través de la relación $C = \frac{(F-32)\times 5}{9}$.

Grados Celsius	Grados Fahrenheit
50	
55	
60	
65	
70	
75	

En un plano cartesiano represente los pares ordenados que se obtienen de la tabla anterior. (MEP, 2012, p. 235)

Ecuaciones e inecuaciones

Esta sub área se introduce en el último año de la primaria ya que es necesario primero un manejo conceptual básico de los contenidos anteriores.

Para su introducción es importante primero identificar si un número es solución de una ecuación e inecuación dada para luego resolverlas. La resolución se da en los números naturales.

Un ejemplo para introducir el concepto de inecuación es:

En Costa Rica la relación costo (en colones) y cantidad de litros de gasolina se puede modelar con la fórmula $C = 570 \times l$. ¿cuántos litros de gasolina se pueden comprar a lo sumo con 10 000 colones?

Geometría

En el currículo de Matemáticas de Costa Rica en primaria se propone el trabajo de la Geometría sintética, simetría,transformaciones, conceptos básicos de Geometría analítica y del espacio. Para efectos de este Minicurso se indicarán las habilidades que se desean lograr en los estudiantes de primaria de las cuatro últimas sub áreas nombradas anteriormente.

Cuerpos sólidos

En el nuevo currículo de Matemáticas de Costa Rica se le ha dado una importancia significativa a esta sub área ya que se asume un estudio de la Geometría con los entornos espaciales donde se desarrolla el estudiante y su relación con la visualización espacial. En todos los niveles escolares, el estudio de los cuerpos sólidos pretende una familiarización con ellos como forma general tridimensional, con sus nombres y con los elementos que los definen. Esto implica trabajar con material concreto que permita explorar e identificar las características de cada cuerpo. (MEP, 2012, p. 204)

En los primeros años se trabaja con la identificación de objetos que tengan forma de caja o forma esférica. Se analiza las partes de cada una de estos cuerpos sólidos y que se reconozca las diferencias y similitudes entre las cajas y los cubos.

En la mitad de la primaria se propone la identificación de los conceptos de paralelismo y perpendicularidad en el espacio, siempre asociados a cuerpos sólidos, particularmente de los prismas rectangulares.

Al final de la primaria se trabaja con los elementos y propiedades de prismas y cilindros; y el cálculo de volúmenes. En esto último se hace un especial énfasis en la deducción de las fórmulas.

Un ejemplo para introducir el concepto de volumen es:

En un “kinder” se tienen 64 cubos de madera de diferente color y de un decímetro de arista. Si se desea guardarlos en una caja de madera, entonces ¿cuáles podrían ser las dimensiones de la caja? (MEP, 2012, p. 212)

Simetría y Transformaciones

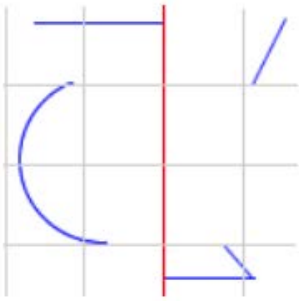
Esta sub área se trabaja solo en los últimos tres años de primaria ya que es necesario que el estudiante adquiera primero los conceptos básicos de la geometría sintética.

Se quiere que el estudiante adquiera habilidades de identificación, reproducción y trazo de figuras simétricas y la ubicación de puntos homólogos

La única trasformación que se trabaja es la traslación, a través del reconocimiento de figuras que se obtienen mediante una traslación de otras.

Un ejemplo de (MEP, 2012, p. 214) muestra como se pueden trabajar algunas de las habilidades de simetría:

En la siguiente figura la línea roja es el eje de simetría. Complete la figura



Geometría analítica

Esta sub área se trabaja poco en primaria solo en el quinto nivel (estudiantes de 11 años) pero es fundamental que desde estos años escolare se trabaje por la conexión que existe con el área de relaciones y álgebra, como más adelante se puede visualizar en un problema de esta área.

En primaria se trabaja solo con números naturales por lo que para las habilidades de esta sub área se utiliza solo el I cuadrante del plano cartesiano.

Las habilidades que se exploran son la de representar primaramente puntos en un sistema de coordenadas y luego hacerlo con figuras.

Para lograr estas habilidades se puede realizar una actividad donde el cuadriculado del piso del aula represente un sistema de coordenadas; un vértice de uno de los cuadros es el punto de referencia, de modo que a la derecha de él está el Este. Luego se solicita a varias personas caminar una determinada distancia al Este y otra al Norte y que se posicione ahí. Por ejemplo: una persona A que camine 3 cuadros al Este y 2 al Norte, otra persona B que camine 4 cuadros al Este y 6 al Norte. Una persona C que camine 7 cuadros al Este y 1 al Norte y una persona D que camine 8 cuadros al Este y 5 al Norte. Posteriormente, se solicita a las demás determinar el tipo de figura que ellas formaron. (MEP, 2012, p. 207)

Estadística y Probabilidad

En el nuevo currículo, esta área también se le da un énfasis importante en comparación con los programas anteriores que se centraban en el cálculo de medidas y la creación de algunas gráficas estadísticas. Como la afirma Ruiz (2013, p. 34):

> se ha dado un lugar relevante a la Estadística y Probabilidad en todos los añosescolares, precisamente porque es un área que aporta grandes posibilidades de realizarel enfoque principal: resolución de problemas con énfasis en contextos reales. También porque permite amplias conexiones con otras áreas matemáticas.

Además como lo establece el MEP (2012, p. 55) *en el siglo XXI se requiere de personas capaces de comprender, interpretar y usar la información para entender la realidad, resolver distintos problemas y tomar decisiones inteligentes*.

Los tópicos de esta área se introducen de forma paulatina, intuitiva y práctica en toda la educación Primaria.

En el caso de Estadística se incluyen las subáreas de: datos, población y muestra, porcentajes, variabilidad de los datos, recolección y presentación de información y medidas. En este minicurso se hará énfasis a las dos últimas sub áreas.

En el caso de Probabilidad las sub áreas que se trabajan son: situaciones o experimentos, eventos y probabilidades y sus propiedades. En este minicurso se trabajará en la sub área de eventos.

Recolección y presentación de la información

En esta sub área se trabaja la recolección de datos a través de la observación y la interrogación en los primeros años y después a través de la medición y el cuestionario. También se agrupan los datos por medio de la frecuencia de repeticiones.

Para la representación de la información una vez resumida se utilizan los cuadros, gráficos de barras, diagramas de puntos y diagramas lineales para las series de tiempo.

Todo lo anterior se realiza para el análisis de la información, o sea, la habilidad final no es l la construcción de un cuadro o gráfico sino que a través del mismo obtengan conclusiones válidas.

Un ejemplo que propone MEP (2012, p. 254) es:

> Se busca determinar las preferencias alimenticias del estudiantado con respecto a cuatro alimentos particulares: frutas, ensaladas (de hortalizas), hamburguesas y papas fritas. Se debe realizar un análisis estadístico que permita clasificar estos productos de acuerdo con la preferencia de las y los estudiantes del grupo. Se recomienda medir la preferencia por el consumo de cada producto por medio de los términos Mucho, Regular y Poco, además incluir el sexo de cada estudiante que responde las preguntas. Diseñe una estrategia que permita recolectar la información necesaria, impleméntela, resuma la información y lleve a cabo el análisis correspondiente.

Medidas estadísticas

Con respecto a las medidas, en primera instancia se trabaja la moda, el máximo y el mínimo. Posterior se utiliza el promedio. El recorrido es la única medida de variabilidad que se trabaja en primaria.

Todas las medidas se utilizan para realizar los análisis estadísticos en la resolución de problemas y la toma de desiciones.

Eventos

En los primeros niveles de primaria se busca identificar eventos (se inicia con la palabra resultado por ser más natural para los estudiantes de estos niveles) probables, imposibles, más probables o menos probables según el experimento que se plantee.

Luego se va construyendo el concepto de evento simple para luego identificar los resultados a favor de un evento y luego se trabaja de nuevo con la determinación de eventos más probables, igualmente probables y menos probables, según con la frecuencia de sus resultados simples y ya no de forma intuitiva como en los primeros niveles.

Todo esto se da como preámbulo necesario para la construcción de la definición clásica de probabilidad y utilizarlo para la toma de desiciones.

Un problema que integra varias habilidades de esta área, según MEP (2012, p. 265) es:

> Una caja contiene cuatro bolas azules, dos bolas rojas y una bola blanca. Si se concibe el experimento de extraer una bola sin ver su color (aleatoriamente): a. Determine el número de resultados simples que se pueden obtener. b. De todos estos resultados, ¿cuántos son favorables para el resultado de obtener una bola azul? c. ¿Qué otros resultados posibles pueden presentarse? d. ¿Qué es más probable, obtener una bola blanca u obtener una bola roja? ¿Por qué?

Algunos retos

A pesar de que esta reforma curricular en Costa Rica lleva poco tiempo, ya se han vislumbrado algunos retos que el Ministerio de Educación Pública debe enfrentar al incoroporar estos conceptos que para un gran número de docentes de primaria son casi nuevos. La formación inicial de estos docentes no incluye una base matemática sólida, pues al impartir todas las asignaturas, su formación debe incluir un conocimiento básico en cada una de ellas, así como un conocimiento en pedagogía y didáctica general.

Aunado con lo anterior se encuentra el problema de la calidad de la formación recibida, como lo establece Alfaro, A. y otros (2013) en Costa Rica *existen muchos entes formadores de docentes…; sin embargo, los mecanismos para supervisar la calidad y pertinencia de las mismas son muy pocos.*

Para contrarestar lo anterior, el Ministerio de Educación Pública a través del *Proyecto Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica* (www.reformamatematica.net), han puesto en práctica diferentes estrategiascomo cursos virtuales, cursos bimodales y creación de materiales de apoyo curricular, todos estos con el enfoque de Resolución de Problemas que establecen los programas oficiales de estudio para Matemáticas del país. Además se ha creado una comunidad virtual y se ha dado apoyo a través de redes sociales.

Conclusiones

Varias investigaciones recomiendan introducir el álgebra, la estadística y probabilidad y la geometría analítica, desde los primerosaños de la educación elemental (NCTM, (1989), NCTM (2000), Carraher y Schliemann (2007), De Faria (2013)). Lo anterior insta a que conceptos como sucesiones, relaciones, cuerpos sólidos, simetría, transformaciones, recolección y representación de información, medidas estadísticas y eventos sean incorporados en los currículos de matemáticas en el mundo.

En Costa Rica, los nuevos programas de Matemática han incorporado estos y otros conceptos desde la primaria a través de la Resolución de Problemas como estrategia pedagógica.

La introducción de algunos conceptos básicos de estas áreas desde la primaria permiten que los estudiantes se enfrenten a conceptos más complejos y abstractos con una menor dificultad. También promueven mayor análisis y reflexión.

La introducción de la Geometría con visualización espacial, movimiento de objetos, coordenadas y su relación con el Álgebra estímula el razonamiento, la argumentación, la comprensión y manipulación dinámica de los objetos geométricos.

La introducción temprana y gradual de Relaciones y Álgebra, permite la construcciónconcon fundamento pedagógico para el aprendizaje de las funciones, una visión integradora de lo funcional y simbólico, y el uso de modelos algebraicos simples.

El fortalecimiento de la Estadística y Probabilidad en todos los años lectivos, áreas orientadas a la organización de la información en diferentes espacios y situaciones, para una preparación para la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre en la vida cotidiana.

Referencias y bibliografía

Alfaro, A. y otros (2013). La formación inicial y continua de docentes de Matemáticas en Costa Rica. En *Cuadernos de Investigación y formación en Educación Matemática*. Recuperado el 01 de febrero de 2015 de http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/12225/11496.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D. (2007). *Early Algebra and Algebraic Reasoning. In F. Lester (Ed.*), Handbook of Research in Mathematics Education (pp. 669-705). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

De Faria, E. (2013). *El pensamiento algebraico en los programas de estudio de matemáticas: Una visión general.*Recuperado el 28 de enero de 2015 de http://www.centroedumatematica.com/memorias-icemacyc/Conferencia_paralela,_De_Faria.pdf.

National Council of Teachers of Mathematics (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics.* NCTM. Reston, VA.

National Council of Teachers of Mathematics (2003). *Principles and standards for school mathematics*. NCTM. Reston, VA.

Ministerio de Educación Pública. (2012). *Programas de estudio en Matemáticas para la Educación general Básica y el Ciclo Diversificado*. San José, Costa Rica: autor. Recuperado el 27 de octubre de 2014 de http://www.reformamatematica.net/proyecto/docs/programas.pdf.

Morales, L. y Díaz, J. (2003). *Concepto de variable: dificultades de su uso a nivel universitario.* Recuperado el 28 de enero de 2015 de http://semana.mat.uson.mx/MemoriasXVII/XIII/lina.pdf.

Ruiz, A. (2012). *Programas de estudio en Matemática* [diapositivas de PowerPoint].

Ruíz, A (2013). La reforma de la Educación Matemática en Costa Rica. Perspectivas de la praxis. En: *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*. Recuperado el 15 de febrero de http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/issue/view/1186/showToc.

La evaluación continua en clase de Matemática

Alejandra **Deriard**
Instituto Superior de Formación Docente n° 24 Bernal
Argentina
alejandraderiard@gmail.com
Ana Cecilia **Martínez**
Instituto Superior de Formación Docente n° 24 Bernal
Argentina
ana.cecilia.martinez12@gmail.com
Gerardo **Couyet**
Instituto Superior de Formación Docente n° 24 Bernal
Argentina
gerardocouyet@yahoo.com.ar
Noelia **García**
Instituto Superior de Formación Docente n° 24 Bernal
Argentina
noeliasg_9@yahoo.com.ar

Resumen

Este taller, destinado a docentes del nivel secundario, pretende ser un espacio de reflexión e intercambio entre colegas, referido a la evaluación de la propia práctica docente. Se hace necesario repensar el concepto de Evaluación, tanto hacia las prácticas de los docentes como hacia las prácticas de los alumnos. Para ello, en un primer momento se hará hincapié en las conclusiones obtenidas del estudio de Diseños Curriculares jurisdiccionales contrastándolos con los modos de actuar docente.

Se analizarán distintas grillas de evaluación y se presentará un modelo de evaluación continua, utilizado por los autores del taller, en el que se privilegia la evaluación positiva en clase de matemática.

Palabras clave: evaluación continua, práctica docente, alumnos

Justificación de la propuesta

Proponemos este taller en Evaluación para docentes de Matemática que se desempeñen en la escuela secundaria debido a que en observaciones realizadas a numerosos docentes en ejercicio (Deriard, 2013), se pudo constatar la ausencia de la implementación de un plan de evaluación anual al interno de la clase, y la prevalescencia de instrumentos de evaluación en los que se privilegia el resultado final y no el proceso.

Este equipo de trabajo, siendo parte de un Instituto de Formación de Profesores en Matemática, considera necesario tomar el asunto en sus manos brindando capacitación al respecto.

Pensamos en este taller como un ámbito para la reflexión conjunta y para ello proponemos el análisis de las recomendaciones emanadas desde diferentes Diseños Curriculares, a modo de repensar sobre el tema, abriendo el debate al respecto y extrayendo conclusiones.

Ponemos a consideración de los participantes del taller un paneo de diferentes instrumentos de evaluación, acordes a aportes realizados por teóricos del tema. Además compartimos un modelo de evaluación continua utilizado por los autores.

Marco Teórico

Actualmente, en las prácticas, la evaluación de los aprendizajes en matemática comparte con la evaluación en otras disciplinas algunas características que la desvían del lugar que ella debería tener como parte de los procesos de enseñanza y aprendizaje, que es el de relevar información para el mejoramiento de la gestión de la clase y de la producción de saberes.

La evaluación, en cuanto a acto evaluativo particular, está altamente determinada por el contexto, mientras que la nota numérica (y por lo tanto, el juicio de valor) aparece como la imagen visible de las prácticas (De Ketele, 1993). Podemos considerar, citando a De Ketele, en cuanto a las funciones de la evaluación, se hace necesario aceptar que, aunque la certificación es una función muy importante, la función primordial debería ser la gestión social de la clase.

Este autor plantea que además de asociar a la evaluación sólo con la certificación, generalmente se trata de ocultar o no explicitar a los alumnos cuáles son los criterios de evaluación que serán tenidos en cuenta durante el período escolar (Ibíd.).

En investigaciones y congresos, se ha puesto en discusión la relación existente entre las modificaciones en la enseñanza de la matemática y las funciones de la evaluación.

Como ejemplo podemos mencionar que en el Simposio de Valencia de Profesores de Matemáticas (1987), se reflexionó acerca de la relación entre la matemática y la evaluación en el sistema escolar:

> La formalización, jerarquización, y escisión de las matemáticas encaja bien con las funciones de la evaluación en el sistema escolar: al separar a los alumnos reproduce la separación social; al legitimar la diferenciación, legitima las jerarquías sociales; además, los distintos estatutos de la matemática, pura y aplicada, permiten cualificar de formas diferentes la fuerza de trabajo por regla general mediante el establecimiento de dos currículos diferentes (Rico, 1997).

Además, entre las conclusiones del Seminario Internacional sobre la Evaluación en Matemática realizado en Granada en 1990 (ICMI) se afirmó la desigualdad y la tensión crecientes que se dan entre la enseñanza contemporánea de la matemática y las prácticas de evaluación tradicionales.

Podemos señalar al respecto que una innovación curricular que acepta las teorías cognitivo - constructivistas no puede seguir sustentando el modelo de evaluación positivista – tecnológico.

Por otro lado, Brousseau, en 2007 en el CIAEM realizado en Queretaro señala que

> …el uso abusivo de la evaluación formal conduce a un desmenuzamiento de las enseñanzas y provoca el alargamiento del tiempo de enseñanza y de aprendizaje, el aligeramiento de los proyectos educativos y el endurecimiento de los aprendizajes, por lo que cada una de esas medidas conduce a la disminución efectiva de los resultados de la enseñanza. Es decir, a lo contrario de lo que se propuso.

Nos interesa también definir las relaciones existentes entre el contrato didáctico y la evaluación, al que entendemos como "Conjunto de comportamientos (específicos de los conocimientos enseñados) del maestro que son esperados por el alumno y el conjunto de comportamientos del alumno que son esperados por el maestro" (Brousseau, 1980), en relación directa con la evaluación, obligándola a renegociar a partir de sus resultados. A decir de Crippa, enunciamos que los efectos del contrato didáctico inciden en las respuestas de los alumnos en situación de evaluación, mientras que las evaluaciones inciden en la constitución del contrato didáctico (Crippa, 2000)

Elegimos dos paradigmas tendientes a explicar los comportamientos del colectivo docente en situaciones de evaluación. Para ello, en primer lugar, especificamos el paradigma positivista (Araujo, 2012) que tiene como principales características la búsqueda y creencia en la objetividad de la evaluación, poniendo todo el énfasis en los resultados de la enseñanza, los que cuantifica, además de controlar estrictamente las variables intervinientes.

En segundo lugar, definimos el paradigma alternativo (Ibíd.), según el cual la objetividad en la ciencia y en la evaluación es siempre relativa, considerándose las posiciones, opiniones e ideologías a partir de los cuales los sujetos interpretan los hechos y los objetivos. La finalidad de la evaluación no se restringe a las conductas manifiestas, ni a los resultados a corto plazo, ni a los efectos previstos o previsibles de un programa, se amplía la evaluación hacia los procesos de pensamiento, análisis e interpretación, capacidades complejas de investigación, comprensión y solución de problemas, se incorporan las prácticas de autoevaluación y coevaluación, poniéndose énfasis en los procesos, siendo su propósito el de describir y comprender la situación objeto de estudio para ayudar a entender, interpretar e intervenir del modo más indicado para los involucrados.

Por último, presentamos un formato de evaluación continua, armado mediante grillas no estandarizadas (Deriard, op. cit.) teniendo en cuenta que, coincidimos en decir que el sistema de evaluación continua presenta, sin duda alguna, ventajas tanto para el estudiante como para el profesor. Sabemos, por nuestra práctica que aquellos estudiantes que tienen la oportunidad de ser evaluados mediante grilla a modo de evaluación continua tienen mayores garantías de superar la asignatura: porque han asimilado de forma gradual los contenidos más importantes de la materia, porque conocen la forma de evaluar del profesor, saben qué es lo que más valora de las respuestas y cómo lo hace, el estudiante recibe información sobre su propio ritmo de aprendizaje, a la vez que por intermedio de las actividades de remediación podrá salvar los obstáculos manifiestos en los errores que ha ido cometiendo, encontrándose en condiciones de reorientar su aprendizaje y, en definitiva, implicándose de forma más motivada en su propio proceso de aprendizaje.

Objetivos del Taller

En este taller nos proponemos:

- Definir la *evaluación* desde la teoría y mostrar las incongruencias con la puesta en práctica de la misma, refiriendo a los conceptos de normalidad y normatividad.
- Caracterizar los paradigmas referidos a la evaluación.
- Indagar acerca de las ideas que presentan los diseños curriculares sobre la evaluación y hallar conclusiones.
- Diferenciar entre evaluación de procesos y evaluación de productos.

- Caracterizar y enumerar diferentes modos de evaluación con pruebas y sin pruebas centrando el interés en lo que permite evaluar cada una de ellas.
- Abrir el debate con respecto a los diferentes paradigmas evaluativos.
- Socializar resultados que aplican formatos de evaluación continua.

Desarrollo del taller

Las actividades propuestas seguirán dos momentos:

En un primer momento se expondrán cuestiones relativas a las funciones de la evaluación y sus relaciones con el contrato didáctico (Brousseau, 1987) con el proyecto anual de cátedra, abriendo el debate al respecto.

Se intentará, de manera breve, mostrar algunas diferencias entre las perspectivas cuantitativa y cualitativa de la evaluación (Araujo, op. cit.), y la evaluación con o sin pruebas, con el fin de promover la reflexión sobre cuál de ellas nos permitiría alcanzar las expectativas que nos planteamos para nuestras clases.

Se socializarán grupalmente distintos Diseños Curriculares de la República Argentina, en referencia a las recomendaciones emanadas de los mismos, con respecto a la evaluación en clase de Matemática, abriéndose el debate al respecto y extrayendo conclusiones.

En un segundo momento las actividades girarán en torno al análisis didáctico de situaciones de enseñanza en la clase de matemática, las que este equipo proveerá mediante videos o registros de clases, abriendo la discusión en torno a diferentes instrumentos de evaluación plausibles de ser utilizados.

Se presentarán, mediante cuadros, diversos instrumentos de evaluación, diferenciando entre aquellos que permiten valorar los procesos y los que valoran los productos finales. En este sentido, se prestará atención al trabajo con portafolios y grillas (Deriard, op. cit.), como ejemplo de evaluación continua.

Se pretende con este breve taller que los docentes tomen conciencia de la importancia de la temática en cuestión para el desarrollo del espíritu crítico de los actores sociales y comprendan que las funciones de la evaluación no son excluyentes, sino variadas, incorporando a su caja de herramientas evaluativas múltiples instrumentos acordes a criterios que releven información tendientes a satisfacer funciones formativas, sociales, ético-políticas y pedagógicas.

Referencias y bibliografía

Araujo, S. (2012). *Didáctica. Carpeta de Trabajo*. Segunda edición, Buenos Aires, Argentina: Universidad Nacional de Quilmes.

Arcuri, S., Echeverría, L., Molinelli, L., Weis, A., Moslares, M. A., Citzenmaier, F., Zanín, P., Castro, N & Comerón, A. (2013). *Materiales Curriculares, Matemática, Versión Preliminar.* La Pampa, Argentina

Basconcel, S.A., López, R.A., Báez, M.V. & Martínez Diblasi, M.C. (2012). *Diseño Curricular Jurisdiccional de la Provincia de Misiones. Ciclo Secundario Orientado.* Misiones, Argentina.

Barberá, E. (1999). *Enfoques evaluativos en matemáticas: la evaluación por portafolios*, en Pozo, J Y Monoreo, C. (Eds.), *El aprendizaje estratégico*. Buenos Aires, Argentina: Aula XXI – Santillana.

Brousseau, G (1987)), Théorisation des phenomenes d'enseignements des mathématiques. Tesis de Doctorado, Bordeaux.

Bodin, A. (1997). *L'évaluation du savoir mathematique. Questions et methodes. RDM N° 17/1*. Francia: La Penseé Sauvage Editions.

Crippa, A. (2000). *Evaluación del y para el Aprendizaje*, en CHEMELLO, G. (ED.): Estrategias de Enseñanza de la Matemática. Carpeta de Trabajo. Primera edición. Buenos Aires, Argentina: Universidad Nacional de Quilmes.

Danielson, Ch. Y Abrutyn, L. (1997). *Una introducción al uso de portafolios en el aula*. Buenos Aires, Argentina: Fondo de Cultura Económica.

De Ketele, J. M. (1984). Evaluar para educar: ¿por qué?, ¿qué?, ¿quién?, ¿cómo?, en: *Observar para educar.* Madrid, España: Visor.

Delgado, A. M. Oliver, R. (2006). La evaluación continua en un nuevo escenario docente. *Revista de Universidad y Sociedad del Conocimiento (RUSC).* Vol. 3, n.° 1. UOC. Artículo en línea en http://www.uoc.edu/rusc/3/1/dt/esp/delgado_oliver.pdf, ISSN 1698-580X.

Deriard, A. (2013). ¿*La evaluación en matemática, un camino de ida*?, en Actas IJECICNAMA2013. Buenos Aires, Argentina.

Itzcovich, H. (2007). *La matemática escolar: las prácticas de enseñanza en el aula*. Buenos Aires, Argentina: Aique.

Ministerio de Educación de la Provincia de Santa Fe. (2010) *Orientaciones Curriculares*. Educación Secundaria Ciclo Básico. Santa Fe, Argentina.

Ministerio de Educación de la Provincia de Córdoba. (2011). *Orientaciones Curriculares.* Diseño Curricular Ciclo Básico. Córdoba, Argentina.

Rico, Luis y otros*: "Cuestiones abiertas sobre evaluación matemática",* en Revista DM Uno Nº11, Barcelona, 1997.

Rottemberg, R. Y Anijovich, R. (2007). *Estrategias de enseñanza y diseño de unidades de aprendizaje. Carpeta de Trabajo*. Buenos Aires, Argentina. Universidad Nacional de Quilmes.

Scriven, Michael. 1967. *The methodology of evaluation. En Perspectives on Curriculum, Evaluation* (AERA Monograph Series on Curriculum Evaluation, n. 1). Chicago, Rand McNally.

Anexo

Planillas de evaluación contínua

Planilla General

PLANILLA GENERAL													
NOMBRE Y APELLIDO	ASISTENCIA	EVALUACION ESCRITA				EXP. ORAL		TRABAJOS PRACTICOS		TRABAJOS	ACTITUD EN CLASE	EL MATERIAL	CARPETA
		INDV.	PAREJ.	MIXTA									
				INDV.	PAREJ.	INDV.	GRUP.	INDV.	GRUP.				
Alegre Javier													
Cabañas Diego													
Consani Iván													
Flores Rodrigo Adrián													
Di Donato Cristian													
Gomez Germán													
Morinigo Brian													

Planilla indicadora de logros con respecto al trabajo en la resolución de problemas

MATRIZ INDICADORA DE LOGROS																						
ALUMNOS	ACTITUD FRENTE AL PROBLEMA					COMPRENSIÓN DEL PROBLEMA													RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA			
	ayuda para analizar el problema	ayuda porque cree no entender	ayuda luego de comprender enunciado	ayuda para verificar lo pensado	ayuda para verificar el resultado	reconocimiento de datos	explicación oral del	anticipación a la	anticipación a las	pertinencia de la	preg. sobre enunciado	preg. sobre incógnita	preg. sobre relación de	preg. sobre pertinencia	explicitar lo requerido	argumentación de	lenguaje matem.	uso de herramientas	reconocimiento de contenidos involucrados	solicita información	utiliza distintos conceptos	evaluación de respuestas obtenidas
Alegre Javier																						
Cabañas Diego																						
Consani Iván																						
Flores Rodrigo Adrián																						
Di Donato Cristian																						
Gomez Germán																						
Morinigo Brian																						
Orona Mauro																						
Rivas Pablo																						
Tupponi Kevin																						
Calderón Yael																						

La incorporación al aula de prácticas de modelación/simulación del movimiento

Jaime **Arrieta** Vera
Unidad Académica de Matemáticas, Universidad Autónoma de Guerrero
México
jaime.arrieta@gmail.com
Eduardo **Carrasco** Henríquez
C.D. en Ciencias Básicas para Ingeniería, Universidad Austral de Chile
Chile
ecarrasc@gmail.com
Rafael **Pantoja** Rangel
Universidad de Guadalajara
México
profe.rpantoja@hotmail.com

Resumen

Las intenciones del taller son dos, la primera está referida al ejercicio de prácticas de modelación/simulación del movimiento por los participantes del taller con el afán de caracterizarlas, la segunda, es la de reflexionar acerca de que son las prácticas de modelación/simulación, su importancia y las formas de incorporarla al sistema escalar. La primera refuerza y sitúa la segunda. Se trabajan diseños basados en modelación del movimiento utilizando diferentes recursos tecnológicos como sensores,, simuladores y software para análisis de videos. La metodología empleada para la elaboración y validación de los diseños es la Ingeniería didáctica y el marco teórico que los soporta es la socioepistemología.

Palabras clave: modelación/simulación, prácticas, movimiento, socioepistemología, TICs.

Introducción

La modelación matemática, en los últimos años, ha tomado un papel cada vez más relevante tanto en la investigación en educación matemática como en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, como se evidencia en la incorporación de la modelación en las curricula de muchos países (Blum, Galbraith & Niss, 2007).

Sin embargo los resultados de aprendizaje respecto a los procesos de modelación en las curriculas aún no generan impactos relevantes en el sistema educativo. PISA 2012, muestra que un alto porcentaje de los estudiantes en los países latinoamericanos evaluados (Brasil, Chile, México, Argentina, Perú, Costa Rica y Colombia) a lo más son capaces de identificar y extraer información y datos desde texto, tablas y gráficos, mapas u otra representación, y hacer uso de ellos para expresar relaciones matemáticamente, interpretando o adaptando expresiones algebraicas simples relacionadas con contextos de aplicación, pudiendo transformar descripciones textuales de una relación funcional simple en forma matemática. Esto, toma mayor gravedad si consideramos el alto porcentaje de estudiantes que está por debajo del primer nivel de logro en la evaluación PISA.

Diversos investigadores (Arrieta, 2003; Arrieta y Díaz, 2014; Biembengut, 2011; Cordero, 2006, entre otros) plantean la incorporación de la modelación matemática al aula de matemáticas, recurriendo a actividades de modelación de fenómenos posibles de experimentar en el aula o al acceso a datos reales de situaciones experimentales.

Introducir situaciones experimentales al aula de matemática implica desafíos muy complejos. Una primera cuestión es la concepción de que el trabajo en el aula con la experiemtación de fenómenos es ajeno al discurso matemático escolar, y por tanto, la enseñanza matemática ha de centrarse en ilustrar aplicaciones y/o ejemplos. Por otra parte nos obliga a considerar factores adicionales que en general no están presentes en las curriculas, como son la toma de datos, protocolos de experimentación, mayor tiempo de aula del que se dispone, entre otros. Además, del tratamiento educativo que implica la posibilidad y/o necesidad de manejar grandes cantidades de datos en condiciones instrumentalmente desventajosas. Por ejemplo, el hecho que los datos tomados desde el fenómeno contengan ruido, es decir, errores de medición y variaciones producto de variables no consideradas.

Hoy en cambio las tecnologías nos ofertan recursos que ayudarían a vencer los desafíos planteados. Sensores, simulaciones computacionales, el video digital y software para su análisis, software para ajuste gráfico y numérico de datos y hojas de cálculo pueden integrar un gran soporte para la experimentación, la toma de datos y su tratamiento para su modelación.

Coincidente con ello, el recurso a tecnologías en América Latina se ha facilitado. Diversos programas del Banco Mundial y otras organizaciones han ayudado a dotar a las instituciones de educación, de computadores en las aulas o en laboratorios de informativa. Programas como el proyecto Enlaces en Chile, o el programa Cibal en Uruguay son muestras claras de como la tecnología informática ya no es una excepción en las aulas de nuestro continente. Del mismo modo la población y en particular los estudiantes, hoy acceden a teléfonos móviles avanzados. Actualmente, sobre el 84% de los hogares de Latinoamérica están subscritos a algún servicio de telefonía móvil y, por tanto, cuentan con teléfonos móviles que actualmente son capaces de grabar videos de mediana calidad (World Bank, 2012).

A pesar de ello, los esfuerzos de inserción de las tecnologías informáticas se han centrado en la incorporación del recurso tecnológico, sin una evidencian clara de cambios en prácticas docentes o en los aprendizajes estudiantiles (Guerrero y Kalman, 2010). Por tanto, se hace necesario indagar formas de incorporar estas tecnologías en la enseñanza con una intencionalidad didáctica matemática que las transforme en herramientas didácticas más complejas que la mera simplificación de cálculo.

En síntesis, el desafío didáctico es aprovechar herramientas tecnológicas que permitan realizar actividades de modelación de fenómenos, a partir de su experimentación. En este marco, la herramienta digital Tracker, utilizada para procesar videos de situaciones cotidianas de movimiento, entrega entidades como gráficas, datos numéricos y expresiones analíticas a los actores, quienes mediante un proceso de socialización, las trasformarían en modelos al articularlos con los movimientos de las variables a modelar y cuya covariación se registra en el video. La modelación, así, reside en el acto de articular las entidades mencionadas y se entiende en el acto de la interrelación de lo uno con lo otro y su entorno, y donde los alumnos son los actores protagonistas, que desarrollan el guion de la escena. La modelación se vive, más bien se convive con los integrantes del equipo, en un proceso en activo integrado por los acoplamientos

estructurales que hacen emerger las herramientas, los procesos e intencionalidades en la modelación misma.

Luego el taller tiene como objetivo explorar, junto a los participantes, el uso de celulares y computadoras básicas, para el ejercicio de prácticas de modelación de fenómenos cotidianos.

Considerando a la modelación como una práctica en el aula, el taller se propone de modo específico modelar y simular situaciones de la vida cotidiana mediante el trabajo colaborativo y apoyados en el analisis de video digital mediante el software Tracker, con simuladores del movimiento y sensores.

Aspectos Teóricos

Concebimos a la Modelación y a la Simulación como prácticas recurrentes de diversas comunidades. Mientras que la modelación es una práctica que articula dos entidades con intención de intervenir en una de ellas, lo modelado, a partir de la otra, el modelo, conformando, así, un dipolo modelo-modelado (Arrieta y Díaz, 2014). A la simulación la caracterizamos como prácticas con intención de reproducir algún fenómeno partiendo de sus modelos, posibilitando manipular el fenómeno al variar sus parámetros, sin la necesidad de que ocurra (figura 1).

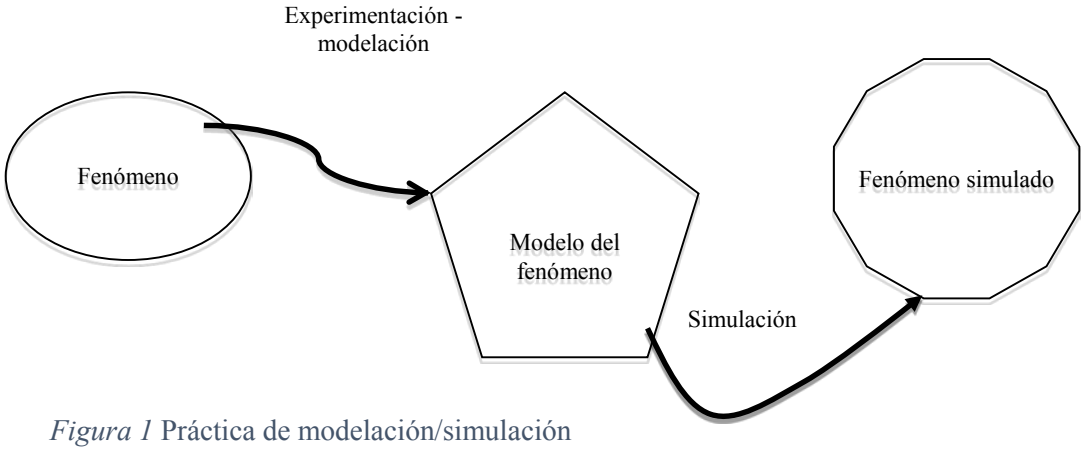


Figura 1 Práctica de modelación/simulación

Por ejemplo, cuando se asocia la relación algebraica con el fenómeno de caída libre, se articula la covariación entre el tiempo y la distancia recorrida por aquello que cae, con los valores de *t* y *d* que cumplen la igualdad $d = 9.8t^2$. Así, en la medida que se asignan valores al tiempo se puede predecir la distancia recorrida por el objeto que cae. Por otra parte, también se puede simular en computadores la imagen de un objeto que cae y explorar las velocidades finales a partir de ensayar alturas diversas.

De este modo el dipolo modelo-modelado permite la realización de dos prácticas, que se imbrican en la articulación del modelo y lo modelado, que dependen de la intencionalidad de quien actúa. Por un lado, el acto de modelar o construir la articulación entre un ente matemático y un fenómeno dado, por otro, reproducir un fenómeno a partir de sus modelos. Si bien estas prácticas de modelación y de simulación pueden parecer prácticas inversas, no lo son. Pues en el acto de modelar un fenómeno, se ha de restringir el número de variables, dada la dificultad de articular todas las variables del fenómeno con entidades matemáticas. Luego una simulación solo podrá reproducir un fenómeno restringido a algunas variables.

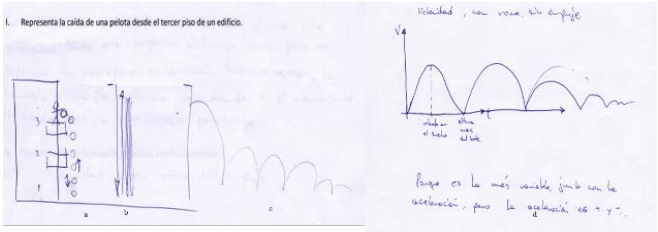
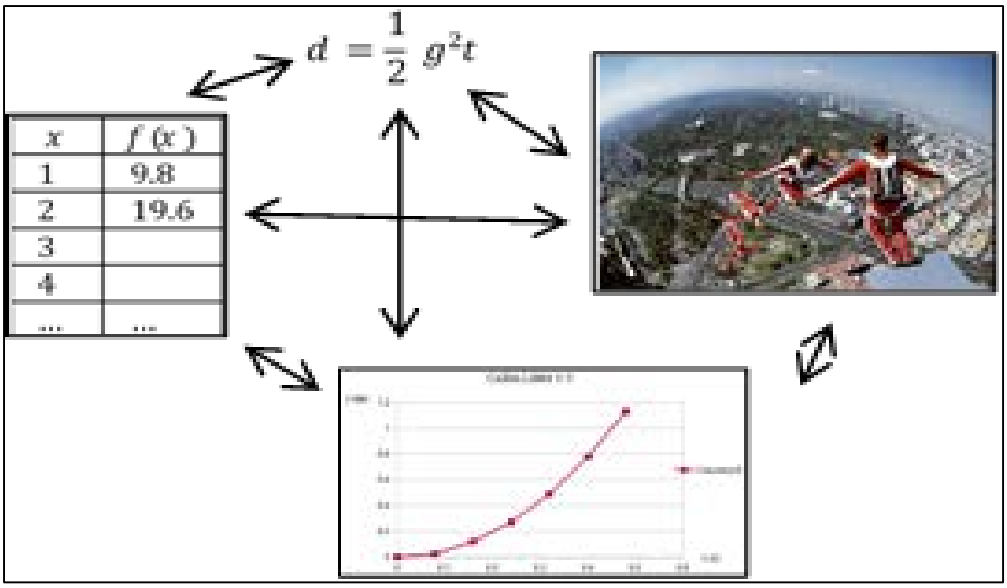


Figura 2. Figuración de caída libre. (Carrasco 2014)

Por ejemplo, en Carrasco (2014) se muestra un proceso de figuración de un fenómeno de caída libre en el cual, en la sucesiva construcción de figuras, articula una gráfica cartesiana con la covariación de velocidad y tiempo en la caída de una pelota. La imagen muestra un proceso de modelación en la cual la gráfica cartesiana, figuración del fenómeno, se constituye en el modelo y la pelota que cae, en lo modelado. Como muestra la imagen 2 se construyen cuatro figuraciones del fenómeno de caída. La primera de ellas (Img. 2a) es cercana a la percepción visual del fenómeno y se constituye en una narración compleja del mismo. Esta el edificio, la trayectoria de la pelota lo rebotes y desplazamiento de distancia, pero el tiempo queda implícito en las diversas posiciones de la pelota. La segunda y tercera imagen, se aprecia como el estudiante no figura el edificio y una de las dimensiones es dejada para ser reemplazada por el tiempo. Finalmente surge una gráfica cartesiana con velocidad y tiempo.



Del mismo modo que se articula la gráfica, se puede articular una tabla de valores experimentales o teóricos con el fenómeno o una expresión algebraica. Cada uno de ellos se constituye en modelo del fenómeno.

Por su parte, al simular el fenómeno desde la gráfica se accede solamente a las variaciones de velocidad que ha tenido el móvil que se mueve. Por ello, quien simula desde gráficas diferenciales deberá interpretar dicha gráfica y para ello concurre no solo la covariación de velocidad y tiempo que se figura, sino aquella información respecto del fenómeno que quien simula evoca (Carrasco, Buendía y Díaz, 20014). De esta manera se reconstruye un fenómeno con diversas variaciones en los elementos no graficados (altura de inicio, finalización del

fenómeno, objeto que cae entre otros). En particular al simular a partir de gráficas velocidad tiempo, implica responder a la pregunta diferencial sobre la función (d(t)) conocida la relación diferencial (d'(t)).

Surge interesante entonces propiciar la reflexión en torno a las potencialidades que las prácticas de modelación/simulación tienen en la construcción de aprendizajes estudiantiles. Al caracterizar aquello que concurre como herramienta al modelar/simular el movimiento en torno a gráficas de velocidad/tiempo. Reflexión en torno a Desplazando la mirada desde los objetos matemáticos que posibilitan determinar función d(t), hacia la actividad de quien simula, se focaliza en buscar elementos teóricos que permitan caracterizar de modo complejo la actividad del estudiante que modela/simula y el rol de tienen en su actividad aquello que sabe, aquello que hace y aquello que surge en la actividad.

Sobre el acto cognitivo: El espacio epistémico de figuración

La aproximación a los procesos de modelación/simulación de gráficas diferenciales la hacemos el marco socioepistemológico. Este Marco teórico asume la importancia de focalizar en las prácticas que están al seno del actuar de cada sujeto y de aquellas que están a la base de su construcción de saber. Así en el aula se produce un encuentro de tales prácticas por ello se hace necesario una caracterización de las prácticas que ponen en juego los y las estudiantes que actúan.

Varela (2000) establece la noción de Enacción para entender cómo se constituye el acto cognitivo. Este se da en el acoplamiento estructural del sujeto que actúa con aquello que le toca vivir. De este modo el mundo del sujeto emerge en la carga de significaciones que se han constituido para estructurar su identidad en y con el entorno que le ha tocado y toca vivir (Varela 2000). Es decir, el mundo es construido por quien vive, no es, por tanto, una re-presentación adquirida desde un mundo exterior. Así, por ejemplo, cuando vemos un autorretrato de Frida Calo o Kandisnky vemos la diferencia entre el mundo del pintor y como se percibe e el, de la fotografia de ellos.

Luego para entender cómo se construye saber en torno al uso de gráficas cartesianas como modelo de fenómenos tomamos la noción de espacio epistémico de figuración (Carrasco, Buendía, Díaz, 2014). Este espacio es conformado por la gráfica cartesiana, el fenómeno y el sujeto que interpreta y/o construye la gráfica (ver. Img. 3).

La gráfica es en principio una figura que hace ostensible, a quien la usa, las variaciones de variables en un fenómeno. Así, diversas investigaciones la consideran como un conjunto de símbolos, que devienen en signos al ser interpretados por quien trabaja. Signos vehículos por cuanto llevarían el significado del mundo externo a la cognición (Presmeg, 2008). Esta mirada representacionista la resignificamos desde la idea de que el mundo se enacta en la medida que se actúa, por ello la gráfica y sus elementos se significa en la medida que se articula con aquello que busca mostrar (una función o la relación de variación entre variables de un fenómeno). Roth y Bowen (2003) muestra como diversos profesionales interpretan aspectos diversos del fenómeno desde una misma gráfica, y gracias a la cooperación entre ellos se comprende que sucede en el proceso productivo. La interpretación entonces se construye desde la relación entre la gráfica y la función que esta representa, asi como desde la experiencia de quien interpreta. Trabajar con gráficas porta la carga experiencial del sujeto desde la cual reflejan aquellas practicas propias de su pertenencia social. Entonces la mirada es hacia el sujeto que trabaja con gráficas, es un foco en el uso de la gráfica (en el sentido de Tuyub y Buendía, 2014) y por tanto

en las prácticas que con ellas se ejercen. Prácticas que desde el marco socioepistemológico, reconocemos sociales y que orientan la actividad del sujeto. Investigaciones en este marco han evidenciado la emergencia de figuras no cartesianas cuando estudiantes buscan modelar fenómenos de variación (Carrasco, Buendía, Díaz, 2014, Díaz 2009, Dolores 2010) Las cuales son articuladas con el fenómeno y como muestra la figura 2, pueden ser articuladas en la construcción de una gráfica cartesiana. Así el espacio epistémico de figuración, conformado por la figura, el fenómeno y el sujeto que figura, se constituye en el topos sobre el cual se da la actividad de conocer un fenómeno por parte del estudiante. Un acto cognitivo que se constituye en la media que se interactua con el fenómeno y la gráfica articulándolos ambos y por tanto constituyendo a la gráfica en modelo del fenómeno.

En síntesis, el espacio epistémico es operacional toda vez que el estudiante conoce en la medida en que se imbrica en aquello que se necesita conocer. Es perceptual, en el sentido que concurre su visión y percepción del mundo que vive, de la gráfica como figura, pero también como modelo, su percepción del fenómeno evocado o experimentado. Y finalmente, experiencial, pues a entender aquello que conoce concurre las experiencias previas, vividas y que asumimos similares a lo que se vive así como la relación con los otros.

Esta noción conforma una mirada a la gráfica como un modelo, en el sentido de Arrieta (2002), que busca reconocer de modo complejo las prácticas que esta herramienta facilita. Ubica una mirada sistémica al sujeto que articula la gráfica con el fenómeno, conformando el espacio epistémico de figuración integrando las relaciones que se construyen entre el fenómeno, la gráfica y quien actúa.

En este espacio epistémico se constituyen las prácticas de modelación con gráficas cartesianas. En particular a aquellas de simulación del fenómeno a partir del modelo gráfico. Prácticas que son descritas, por las herramientas que concurren a la actividad estudiantil, las argumentaciones que emergen para explicar aquello que se vive y los significados que emergen en la actividad (Carrasco, 2014).

Metodología

En una primera fase, los participantes del taller trabajan diseños de aprendizaje basados en la modelación del movimiento soportado por la metodología de Ingeniería Didáctica (citas). Para ello se experimenta con movimientos y se capturan datos numéricos y gráficos utilizando sensores, simulaciones y videos y software para la captura de datos. Se analizan los datos desarrollando diferentes procedimientos, como el ajuste gráfico de datos, el análisis de gráficas y la utilización de las herramientas tecnológicas. Se construyen diferentes modelos y se utilizan para predecir el movimiento. Se articulan redes de los diferentes modelos con el movimiento. Se constituyen redes de redes de modelos, analogando diferentes movimientos. Se simulan diferentes movimientos a partir de modelos diferenciales.

En una segunda fase se reflexiona sobre la actividad realizada, se analizan las herramientas matemáticas empleadas, los procedimientos utilizados, los argumentos esgrimidos y las intenciones de realizar la actividad. Se concluye esta fase caracterizando las prácticas de modelación/simulación.

En una tercera fase se propicia una reflexión didáctica respecto de la propuesta presentada, sus potencialidades y desafíos de implementación. Se discute sobre las formas de incorporar las prácticas de modelación/simulación del movimiento al aula de matemáticas.

Consideraciones Finales

En la aproximación presentada en el taller se busca aportar herramientas para la incorporación de la modelación/simulación del movimiento al aula de matemáticas, con soporte en recursos tic, configurando de este modo un escenario escolar, de bajo costo, para la realización de prácticas de modelación.

Del mismo modo se busca reflexionar sobre las fases de la modelación/simulación y su caracterización desde las categorías presentadas. Se reflexiona sobre la relevancia de la experimentación con el fenómeno; sobre la actividad que caracteriza a la modelación, el acto de modelar; la construcción de redes de modelos con el fenómeno; la construcción de red de redes de modelación/simulación, la analogía; y la caracterización de la simulación y su relación con la modelación. Esto de una mirada sistémica que desde el espacio epistémico de figuración caracteriza las practicas que ejercen los actores que modelan, identificando sus formas de hacer, sus argumentos, sus significados y las herramientas que concurren a su actividad.

Referencias y bibliografía

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula.* Disertación doctoral no publicada, Departamento de Matemática Educativa del Cinvestav-IPN, México.

Arrieta, J. y Díaz, M. (2014). *Una mirada Socioepistemológica de la modelación.* Artículo enviado a revista de corriente principal (140501).

Biembengut, M. (2011). Concepções e Tendências de Modelagem Matemática na Educação Brasileira. En *Acta Electrónica de la XIII Conferenciad Interamericana de Educación Matemática*. Recuperado el 10 de marzo de 2013 de http://cimm.ucr.ac.cr/ocs/index.php/xiii_ciaem/xiii_ciaem/paper/viewFile/2875/1149

Carrasco, E. Buendía G y Díaz (2014). Figuración de lo que varía. Enseñanza de las Ciencias. V 32(3), pp. 365-384

Cordero, F. (2006). La modellazione e la rappresentazione grafica nell'insegnamento-apprendimento della matematica. *La Matematica e la sua Didattica*. Anno 20, n.1, pp. 59-79.

Ezquerra, Á., Iturrioz, I., Díaz, M. (2011). Análisis experimental de magnitudes físicas a través de vídeos y su aplicación al aula. *Revista Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias* Universidad de Cádiz. APAC-Eureka. ISSN: 1697-011X. DOI: 10498/14733 http://hdl.handle.net/10498/14733. http://reuredc.uca.es

Pantoja, R., Ulloa, R, Nesterova, E. (2013). La modelación Matemática en situaciones cotidianas con los software AVIMECA y MATHCAD. *Revista Virtual Góndola, revista de Enseñanza y Aprendizaje de las Ciencias*. ISSN 2145-4981 2010.

Guerrero, I, Kalman, J (2010). La inserción de la tecnología en el aula: estabilidad y procesos instituyentes en la práctica docente. Revista Brasileira de *Educação* v. 15 n. 44. Rio de Janeiro, Brasil

Roth, W.-M. y Bowen, G. (2003). When Are Graphs Worth Ten Thousand Words? An Expert-Expert Study. *Cognition and Instruction*, pp. 429-473. http://dx.doi.org/10.1207/s1532690xci2104_3

Tuyub, I., Buendía, G. (2014). El uso de las gráficas en una comunidad de prácticas. El caso de la maestría en ingeniería de la UADY. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa.* Colegio Mexicano de Matemática Educativa A. C. V27 pp. 1636-1642.

World Bank. (2012). *Information and Communications for Development: Maximizing Mobile*. Ed. International Bank for Reconstruction and Development / The World Bank. Washington, DC.

La visualización en la resolución de patrones

Sergio Damián **Chalé** Can
Departamento de Matemática Educativa-Cinvestav, Instituto Politécnico Nacional
México
schalecan@gmail.com

Resumen

El taller tiene como objetivo trabajar con los profesores aproximaciones visuales en la resolución de secuencias figurales de patrones. La aproximación visual será considerada como el puente que conecta el trabajo de análisis de los estudiantes y la simbolización algebraica. La riqueza de los diversos análisis visuales, no debe ser ignorada, por lo que se propone un análisis de algunas de sus posibilidades y limitaciones. Esperamos que surjan diversas aproximaciones visuales de los propios profesores, y por tanto distintas formas de expresiones algebraicas asociadas a ellas, lo que contribuirá a detonar una discusión en torno al papel que puede jugar el análisis visual en su práctica docente.

Palabras clave: Pensamiento algebraico, sucesiones figurales, visualización.

Antecedentes

La capacidad de razonar algebraicamente es fundamental en la formación de los estudiantes y en las oportunidades que a ellos se les presente, es por ello que esa habilidad es promovida en el curriculum mexicano de matemáticas, lo cual se ve especialmente reflejado en los planes y programas de estudio de la Secretaría de Educación Pública de México (SEP, 2010 & 2011).

En tales planes, dentro del eje llamado Sentido numérico y pensamiento algebraico, se pide que el estudiante al finalizar la educación media básica, sea capaz de "resolver problemas que impliquen expresar y utilizar la regla general lineal o cuadrática de una sucesión de números" (SEP, 2011, p. 16) buscando con esto desarrollar la capacidad de generalizar propiedades aritméticas mediante el uso del álgebra y la puesta en juego de diferentes formas de representar y realizar cálculos.

Durante los tres niveles de educación secundaria, el eje Sentido numérico y pensamiento algebraico, es el que rige los aprendizajes esperados de cada uno de los tres grados escolares en ésta área. En el primer grado el aprendizaje esperado es que el estudiante sea capaz de "representar sucesiones de números o de figuras a partir de una regla dada y viceversa", y como objetivo final "la obtención de la regla general (en lenguaje algebraico) de una sucesión con progresión geométrica". Los aprendizajes esperados en el segundo grado, coinciden con los del primer año. En el tercer grado se espera que "en casos sencillos se utilicen expresiones generales cuadráticas para definir el enésimo término de una sucesión", esperando con esto la obtención de una expresión general cuadrática (SEP, 2011). En general podemos decir que se busca, a través de la generalización el acceso o desarrollo del pensamiento algebraico, a través de la obtención de una regla general expresada algebraicamente.

La hipótesis que subyace a esta aproximación, es que la generalización de patrones numéricos y la formulación simbólica de relaciones entre las variables podrían llevar a los estudiantes a desarrollar la capacidad necesaria para el desarrollo de la generalización algebraica.

Las corrientes teóricas del álgebra escolar

Desde la década de los años ochenta, el contenido de los planes y programas de estudio del álgebra han experimentado un debate entre diversas tendencias y puntos de vista, las cuales tienen sus orígenes en las diferentes posturas teóricas que se tienen respecto a las formas de introducir a los estudiantes al pensamiento algebraico.

A partir de nuestra revisión bibliográfica, hemos identificado cuatro posturas relevantes, que prevalecen en la introducción del álgebra en los primeros años de la vida escolar de los estudiantes: la Tradicional, el Álgebra como una Generalización de la Aritmética, el Álgebra concebida como la Resolución de Ecuaciones, y el Álgebra como el Estudio de las Funciones.

La postura Tradicional tiene su origen desde tiempos antiguos, cuando el álgebra fue considerada esencialmente como el desarrollo de procedimientos y notaciones. Tal punto de vista del álgebra, implicó verla como una herramienta para manipular símbolos y resolver problemas, lo que ha sido reflejado en el currículo escolar, y que fue desarrollada y moldeada a través del Siglo XIX e inicios del Siglo XX (Kieran, 2007). En esta línea, los estudiantes son introducidos al álgebra a través de la operación y significación de símbolos, por ejemplo: la simplificación de expresiones, la resolución de ecuaciones, inecuaciones, y sistemas de ecuaciones por métodos formales; así como la factorización de polinomios y expresiones racionales. Se hace énfasis en la aplicación de técnicas, así como en la manipulación de expresiones polinómicas y racionales. Todo lo anterior orientado a reconocer formas, la cual es, desde este punto de vista, la tarea más importante a realizar en el álgebra (Pimm, 1995, citado por Kieran, 2007, p. 709).

Desde la postura del álgebra como una generalización de la aritmética, se afirma que éstas es inherente a la aritmética, y que la aritmética tiene un carácter algebraico, lo cual sugiere que la aritmética y el álgebra elemental no son del todo distintos (Carrahe & Shielman, 2007). La hipótesis más fuerte que subyace a esta aproximación, es la que afirma que a partir de la generalización de las propiedades y leyes de la aritmética, los estudiantes pueden acceder al conocimiento algebraico. Se considera que los aprendices nóveles del álgebra manejan ciertas propiedades y leyes de la aritmética, por ejemplo la ley conmutativa para la adición de los naturales, y que a partir de éste conocimiento se puede promover la necesidad del uso de las variables obteniendo con ello una ley general, que necesariamente tiene que expresarse en letras, reconociendo en ésta última pensamiento algebraico.

El punto de vista en el cual se considera introducir a los estudiantes al álgebra a través de la resolución de ecuaciones, está basada en la idea de que la primera y más importante tarea a desarrollar en la enseñanza del álgebra es la habilidad de operar con las incógnitas como si fueran conocidas, con esto se pretende desarrollar un “punto de corte” entre el pensamiento algebraico y aritmético (Filloy, Puig & Rojano, 2008).

La aproximación funcional, del surgimiento del pensamiento algebraico, sugiere un estudio del álgebra centrada en el desarrollo de experiencias con funciones y familias de funciones, a través de encuentros con situaciones reales del mundo, de las cuales, relaciones cuantitativas pueden ser descritas por estos modelos (Heid, 1996 citado por Kieran, 2007, p. 709).

Objetivos del taller

El presente trabajo se enmarca en la postura teórica del álgebra como una generalización de la aritmética. Para ello, nos centramos concretamente en el trabajo temprano con las letras alrededor de formulaciones de expresiones algebraicas que modelan un patrón de una secuencia de figuras.

En el taller iniciaremos con el estudio de propiedades aritméticas de secuencias (diferencias, proporcionalidad directa e indirecta, etc.), para que posteriormente, con la observación y análisis de regularidades numéricas, se formulen expresiones algebraicas de las regularidades observadas.

Se tendrá como objetivo general trabajar con los profesores aproximaciones visuales en la resolución de secuencias. El tema será tratado desde un punto de vista, en el cual la aproximación visual es considerada como el puente que conecta el trabajo de análisis de los estudiantes y la simbolización algebraica (Healy & Hoyles, 1999 citados por Kieran, 2006, p. 19).

Pensamos que la aproximación visual en tareas que involucran la generalización, puede proveer fuertes bases para la representación de secuencias y el desarrollo de un marco conceptual para las funciones. La riqueza de los diversos análisis visuales, no debe ser ignorada, y en este taller pretendemos revalorar su papel en el aprendizaje del álgebra elemental. Se buscará que los profesores realicen un análisis de las posibilidades y riquezas del análisis visual de secuencias figurales, así como de las limitaciones de ésta, para enriquecer su práctica docente (Hershkowitz, Arcavi & Bruckheimer, 2012; El Mouhayar, R. R. & Jurdak, M. E., 2012).

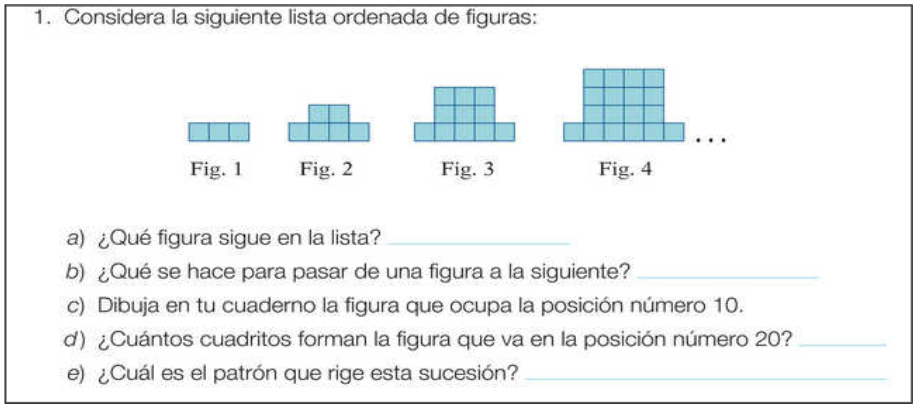

1. Considera la siguiente lista ordenada de figuras:

Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4 . . .

a) ¿Qué figura sigue en la lista? _____

b) ¿Qué se hace para pasar de una figura a la siguiente? _____

c) Dibuja en tu cuaderno la figura que ocupa la posición número 10.

d) ¿Cuántos cuadritos forman la figura que va en la posición número 20? _____

e) ¿Cuál es el patrón que rige esta sucesión? _____

Figura 1. Ejemplo de tarea con secuencias de figuras

En la resolución de este tipo de tareas (*Figura 1)*, a los estudiantes se les pide predecir el siguiente elemento en un conjunto ordenado, construido bajo cierto patrón. Posteriormente se espera que éstos puedan abstraer la regla que subyace a la secuencia, para finalmente generalizarla, lo que se considera sucede cuando el estudiante logra escribir una fórmula algebraica. Sin embargo, resulta difícil, si no imposible para algunos estudiantes, generar una regla o expresión algebraica debido a que esta acción subyace la idea de generalización (Stacey, 1989). Hay que notar que al extender un conjunto ordenado y estructurado de objetos, los estudiantes muestran algún grado de generalización, pero esta actividad puede fallar, al pasar de una generalización expresada en lenguaje convencional a una expresada en las formas propias de la matemática (Carraher, Martínez & Schliemann, 2008).

La generalización de patrones

Los patrones no son admitidos como un concepto estrictamente algebraico; libros de texto, maestros y estudiantes toman una postura amplia y una aproximación inconsistente hacia los patrones, sus propiedades y sus operaciones. Prueba de lo anterior es la falta de definiciones, tanto en la literatura matemática especializada, así como en los libros de texto en las escuelas acerca de lo que es un patrón. No hay un acuerdo entre los matemáticos acerca de lo que son los patrones, sus propiedades y operaciones (Carraher, Martínez & Schliemann, 2008) pese a considerarlos.

¿Cómo se generaliza un patrón?

Rivera & Rossi (2008, p.66), señalan los resultados que en diversas investigaciones se han obtenido al tratar de responder o caracterizar el proceso para generalizar un patrón:

> En la etapa inicial de la investigación, los estudiantes deben "centrarse en" o "llamar la atención" en una posible propiedad invariante o relación dentro del patrón (Lobato, Ellis & Muñoz, 2003), "tomar algo común" o una "regularidad" (Radford, 2006), y "notar" o "llegar a ser conscientes" de sus propias acciones en relación con el fenómeno sometido a generalización (Mason, Graham & Johnston-Wilder, 2005).

Las autoras prosiguen señalando que en Lee (1996), se describe el rol central de la "agilidad perceptiva" en la descripción y generalización de un patrón, la cual consiste en "ver varios modelos y estar dispuestos a abandonar aquellos que no resulten útiles (es decir aquellos que no conduzcan a una fórmula)". Masón (2005), puntualiza que en ruta hacia la generalización, los estudiantes requieren actos en los que deben de "prestar atención" a los detalles, sobre todo a los aspectos que cambian o se mantienen iguales y "ver lo general a través de lo particular". Los resultados de Rivera & Becker (2007, 2003) confirman un acto preparatorio por el cual la percepción es necesaria y fundamental en la generalización –como una "forma de llegar a conocer" un objeto o alguna propiedad o hecho acerca de un objeto- (Rivera & Rossi, 2008, p. 66-67)

Según Kieran (1989, citado por Radford, 2006, p. 5),

> una de las características que pueden constituir el núcleo de la generalización de un patrón es la capacidad de percibir algo general en lo particular y que uno debe ser capaz de expresarlo algebraicamente. Un componente necesario de la generalización algebraica es el simbolismo algebraico para razonar acerca de ella y expresar la generalización".

Radford (2006), se declara de acuerdo con las exigencias de Kieran y afirma que él podría agregar que la generalidad algebraica está hecha de diferentes niveles, unos más profundo que otros. Además, que el grado de generalidad que se puede alcanzar dentro de un nivel determinado es entretejido con la forma material que utilizamos para razonar y expresar lo general.

La visualización

No hay duda de la participación de los aspectos visuales en el proceso de construcción del conocimiento matemático, pero decir cuál es el papel que juega es un asunto en el que no existe un acuerdo general entre los investigadores. Hershkowitz (1989) ha identificado dos posturas: en la primera, la visualización se concibe como un paso perceptual necesario para introducirse a una problemática, posteriormente puede dejarse de lado en el momento en el que intervienen procesos de pensamiento más avanzados, que la relegan a una participación marginal; en la

segunda, se le concibe como un actor directo del proceso de construcción del pensamiento, pieza fundamental para el desarrollo del pensamiento matemático, y por tanto instrumento que participa directamente de él.

Desde nuestro particular punto de vista, pensamos que en un primer acercamiento a la matemática, la visualización debe jugar un papel importante, y que una de las maneras como el estudiante puede introducirse a este apasionante mundo, es a través de tareas donde lo visual esté presente y juegue un rol importante. La información que nos proporcionan los elementos visuales, serán una herramienta importante en el proceso de pensamiento, pero habrá momentos en que deberá ser abandonada o disminuida en la medida en que deje de ser la base de información fundamental, dependiendo esto de las necesidades del problema o situación a resolver.

Una caracterización de la visualización

Consideramos que no es posible dar una definición precisa y clara de lo que es la visualización, ya que sólo puede ser analizada a través de la evidencia que los individuos van proporcionando cuando la usan. Sin embargo, podemos considerar caracterizaciones de la misma sugeridas por diversos autores para tener un acercamiento de su naturaleza.

Desde el punto de vista de Duval (1999), la visualización es una organización de una cadena de unidades (palabras, símbolos y proposiciones), la cual implica tomar una estructura y comprender sus relaciones; ésta actividad no es inmediata, requiere de un largo proceso de entrenamiento, y puede ser mental o física. La complejidad de la visualización matemática consiste en la selección implícita de cuáles valores de contraste visual, dentro de las configuraciones de las unidades, son relevantes y cuales no lo son.

La visualización es diferente de la visión, ésta última es inmediata, consiste en aprehender simultáneamente diversos objetos o un campo completo, en otras palabras la visualización parece dar inmediatez a una aprehensión completa de algún objeto o situación, provee acceso directo a los objetos y está al nivel de lo que se percibe. La visión: detecta, observa; la visualización: estructura, relaciona.

Consideramos necesario, tener en cuenta otras caracterizaciones de la visualización que diversos autores han realizado (Arcavi, 2003;Hershkowitz, Arcavi & Bruckheimer, 2001; Noss, Healy y Hoyles, 1997), las cuales tratamos someramente a continuación:

Para Arcavi (2003), la visualización es un componente cognitivo central en la actividad matemática, es un producto y proceso de creación sobre gráficos o imágenes. El autor se refiere a ella como un método para ver lo invisible; tiene un rol complementario que ayuda a ver más allá de lo aparente, respalda e ilustra los resultados simbólicos esenciales, entre otras tantas características que el autor le confiere a la visualización.

Por otro lado para Hershkowitz, *et al* (2001), la visualización en general se refiere a la capacidad de representar, transformar, generar, comunicar, documentar, y reflexionar acerca de la información visual, como tal es un factor crucial para el aprendizaje de los conceptos matemáticos. Lo autores, dan evidencia de que la visualización puede ser más que un soporte intuitivo y perceptual de niveles avanzados de razonamiento, podría constituir la esencia de una matemática rigurosa dependiendo del tipo de uso que se haga de ésta; además la visualización puede ser central, no solamente en áreas que están asociadas con las imágenes visuales (tal como la geometría), sino también en aquellas donde un argumento simbólico formal es necesario (por ejemplo el álgebra).

La visualización y la generalización de patrones algebraicos

Otras investigaciones se han llevado acabo, concretamente estudiando los procesos de visualización que se dan cuando se generalizan patrones o secuencias algebraicas. Por ejemplo Rivera & Rossi (2008), analizaron el caso concreto de tareas que involucraban la resolución de patrones donde aparecen sucesiones de figuras, notando que existen dos tipos de percepción de las figuras, el cual desarrolla las habilidades de análisis y síntesis.

Consideramos que dichas habilidades, consideramos no se dan de manera espontánea en los estudiantes, y mucho menos a la par del desarrollo de nuestras capacidades perceptuales. Y por eso es necesario desarrollar la habilidad en los estudiantes de "aprender a ver", es decir, que los estudiantes aprendan a enfocar la información relevante y organizarla adecuadamente. Coincidimos con Hershkovitz, Parzysz & Van Dormolen (1997) cuando afirman que el ojo de los estudiantes debe ser educado, y que para lograrlo se deben presentar tareas donde se fomente: a) Analizar formas a partir de elementos básicos y desarrollar síntesis de éstas a formas complejas, b) Afinar la codificación y decodificación visual, y desarrollar la c) Flexibilidad perceptual.

En el caso que nos ocupa, la capacidad de percibir los patrones visuales requiere de la identificación de una estructura subyacente a la secuencia, y otras que se derivan de ésta. De hecho percibir ciertas estructuras así como su transformación, requiere de la capacidad de intuir y atender estructuralmente el cambio presente en ellas. Esta capacidad de percibir, identificar y atender nace de la sensibilidad que los estudiantes deben desarrollar, acompañados de sus profesores y compañeros de clase.

El taller

Como se ha mencionado líneas arriba, el objetivo del taller es trabajar con los profesores aproximaciones visuales en la resolución de secuencias o patrones algebraicos para que: 1. Construyan y analicen secuencias de figuras; 2. Observen que las soluciones de las secuencias no son únicas; 3. Den sentido a la diversidad de expresiones algebraicas asociadas a una misma secuencia; 4. Se percaten de la importancia de mostrar que las expresiones asociadas se refieren a distintas formas de asociar los elementos de las figuras.

El tema será tratado desde un punto de vista, en el cual la aproximación visual sea considerada como el puente que conecta el trabajo de análisis de los estudiantes y la simbolización algebraica. Se buscará que los profesores realicen un análisis de las posibilidades y riquezas del análisis visual de secuencias figurales, así como de las limitaciones de ésta, para enriquecer su práctica docente.

Pensamos que la aproximación visual en tareas que involucran la generalización, puede proveer fuertes bases para la representación de secuencias y el desarrollo de un marco conceptual para las funciones. La riqueza de los diversos análisis visuales, no debe ser ignorada, y en este taller pretendemos revalorar su papel en el aprendizaje del álgebra elemental.

Los elementos teóricos que jugarán un papel importante para el desarrollo del taller, son los mencionados en páginas anteriores. Discutiremos los objetivos planteados en los planes y programas de estudio de la Secretaría de Educación Pública de México, así como las corrientes contenidas en el álgebra desde el punto de vista de las diversas investigaciones consultadas. Posteriormente se discutirán las ideas relativas a la generalización de patrones y la visualización, así como los últimos resultados obtenidos en investigaciones donde se estudia este tema.

Durante la fase de actividades, esperamos que los profesores discutan, y puedan desarrollar sus habilidades para identificar y explicar las acciones de los estudiantes en la generalización de tareas de patrones, y que durante este proceso puedan dar cuenta de la variación de explicaciones que surgen cuando se abordan este tipo de problemas.

Referencias y bibliografía

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics 52(3),* 215-241.

Carraher, D. & Schielman, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. K. Lester (Ed). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 669-705). USA: NTCM.

Carraher, D., Martines, M. & Schliemann, A. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik-The International Journal on Mathematics Education, 40(1), 3-22.*

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. En F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting of the North America Chapter of the International Group of PME* (pp. 3-26). . Cuernavaca, Morelos, Mexico: PMENA.

El Mouhayar & Jurdak, M. E. (20012). Teacher's ability to identify and explain students' actions in near and far figural pattern generalization tasks. *Educational Studies in Mathematics 82*(3), 379-396.

Filloy, Rojano & , Puig, (2008). *Educational Algebra*. United States: Springer.

Hershkowiz, R. (1989). Visualization in Geometry-Two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics, 11(1),* 61-76.

Hershkowitz, R., Parzysz, B. & Van Dormolen, J. (1997). Space and Shape. En A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & C. Laborde (Eds.) *International Handbook of Mathematics Education 4,* (pp. 205-237). Kluwer International Handbooks of Education.

Hershkowitz, R., Arcavi, A. & Bruckheimer, M. (2001). Reflections on the status and nature of visual reasoning -the case of the matches. *International Journal of Mathematics Education in Science and Technology, 32(2),* 255-265.

Kieran, C. (2006). Research on the learning and the teaching of algebra. A Broadening of sources of meaning. A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 11-49). Rotterdam: Sense Publishers.

Kieran, (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. En F. K. Lester (Ed.). *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 709- 755). USA: NTCM.

Noss, R., Healy, L. & Hoyles, C. (1997). The construction of mathematical meanings: connecting the visual with the symbolic. *Educational Studies in Mathematics 33(2),* 203-233.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. Alatorre, S., Cortina, J.L., Sáiz, M. and Méndez, A. (Eds.) *Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp.2-21). Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Rivera, F. & Rossi, J. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik-The International Journal on Mathematics Education, 40(1), 65-82*.

Secretaría de Educación Pública (2011). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Secundaria. Matemáticas*. México: SEP.

Secretaría de Educación Pública (2010). *Serie: Programas de Estudio. Dirección General de Bachillerato.* México: SEP. Recuperado el 21 de marzo del 2013 de: http://www.dgb.sep.gob.mx/informacion_academica/programasdeestudio/cfb_1ersem/MATEMATICAS_I.pdf

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics 20*, 147-164.

Warren, E. & Copper T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics 67(2)*, 171-185.

Apéndice A

Formulario adicional para propuesta de talleres

Pertinencia e interés de la temática de este trabajo para desarrollarse como un taller

En la introducción del extenso referente a nuestro taller, se consigna que la capacidad de razonar algebraicamente es básica en la formación futura de los estudiantes, y por lo anterior esa habilidad es promovida en el currículum mexicano (SEP, 2010 &2011), concretamente en la Educación Básica, en el nivel llamado Secundaria, donde asisten estudiantes entre los 11 y 15 años de edad.

Entre los objetivos y propósitos plasmados en los planes y programas de estudio, está el de desarrollar la capacidad de que los estudiantes puedan resolver problemas que impliquen expresar y utilizar la regla general lineal o cuadrática de una sucesión de números, buscando con lo anterior la capacidad de generalizar propiedades aritméticas mediante el uso del álgebra y la puesta en juego de diferentes formas de representar y realizar cálculos. Durante los tres cursos de la educación media básica, en el eje Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico, se pide que los estudiantes puedan desarrollar las habilidades antes mencionadas (SEP, 2011).

Tomando en cuenta los reportes de diversas investigaciones, en las que se analizan las formas de proceder de los estudiantes cuando resuelven el tipo de tareas en las que se busca la generalización de patrones (Stacey, 1989; Nos, *et al*, 1997; Carraher, *et al,* 2008), los procesos cognitivos que ponen en juego (Rivera, *et al*, 2008) y las capacidades y formas de proceder de los profesores cuando enseñan esta temática (Hershkowitz, *et al,* 2001; Waren & Cooper, 2008; El Mouhayar & Jurdak, 2012) y dada la importancia que la temática tiene en el currículum actual mexicano, consideramos de suma importancia fomentar un espacio de discusión en la XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática en la cual los profesores reflexionen y discutan alrededor de los fenómenos que se dan cuando este tipo de tareas son propuestas a los estudiantes.

Acciones, objetivos y metodología que se desarrollarán durante este taller

En el taller iniciaremos con el estudio de propiedades aritméticas de secuencias (diferencias, proporcionalidad directa e indirecta, etc.), para que posteriormente, con la observación y análisis de regularidades numéricas, se formulen expresiones algebraicas de las regularidades observadas. En particular, a nosotros nos gustaría tener 3 horas de 60 minutos para desarrollar completamente el taller y lograr nuestros objetivos, a saber:

Se tendrá como objetivo general trabajar con los profesores aproximaciones visuales en la resolución de secuencias. El tema será tratado desde un punto de vista, en el cual la aproximación visual es considerada como el puente que conecta el trabajo de análisis de los estudiantes y la simbolización algebraica.

Se buscará que los profesores realicen un análisis de las posibilidades y riquezas del análisis visual de secuencias figurales, así como de las limitaciones de ésta, para enriquecer su práctica docente.

Las acciones a desarrollar en el taller serán, a grandes rasgos:

Momento 1. Se iniciará con la presentación de los elementos teóricos que sustentan el taller: las tendencias teóricas que sustentan el actual currículum escolar, las acciones de los

estudiantes al resolver tareas con patrones visuales, los procesos cognitivos que aparecen durante la resolución de este tipo de tareas y el papel que la visualización podría jugar.

Momento 2. Inicio de la resolución de las actividades. Se buscará sobre todo la participación activa del profesor en la resolución y presentación de la solución de las actividades al resto de sus compañeros presentes.

Momento 3. A partir de los modelos teóricos propuestos realizar un análisis de las posibles acciones de los estudiantes al resolver el tipo de tareas que proponemos.

Para cada uno de los tres momentos, por experiencias pasadas, calculamos se lleven a cabo cada una en horas de 60 minutos, sumando con ello tres horas completas de taller.

Información general sobre el taller

Nivel educativo al que va dirigido el taller	Preescolar	Primaria: 1 a 6 grados	Secundaria: 7 a 12 grados	Terciaria	General
			Todos los niveles de nivel Secundaria.		
Número máximo de personas	Ninguno				
Equipos audiovisuales o informáticos que requeriría	Proyector multimedia	TV grande	Laboratorio de computación	Conexión a Internet	
	Requerimos un proyector				

Apéndice B

Guías de trabajo

A continuación se adjuntan un ejemplo de las actividades que desarrollaremos en las guías de trabajo.

I. **Primera parte.** En la página 2 y 3 (*paginación según guías de trabajo*) se representan acciones que algunos estudiantes realizaron al resolver unas secuencias de patrones visuales representados en la Figura 1.

Basándose en las estrategias dadas:

i. Explique cómo los estudiantes realizaron el análisis de las figuras.
ii. ¿Cuál de los arreglos figurales podría ser la mejor manera para llegar a una fórmula que represente el perímetro del n-ésimo término? ¿Por qué?
iii. Para cada una de las situaciones algebraicas, de ser posible, ofrezca una expresión algebraica y una explicación.

¿Cuál es el perímetro de las figuras tomando como unidad un lado del hexágono? ¿Cuál el perímetro de la n-ésima figura?

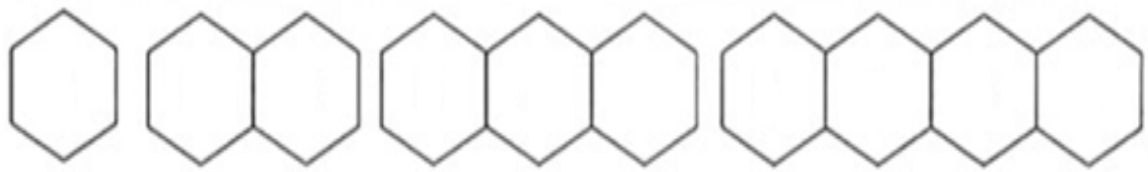
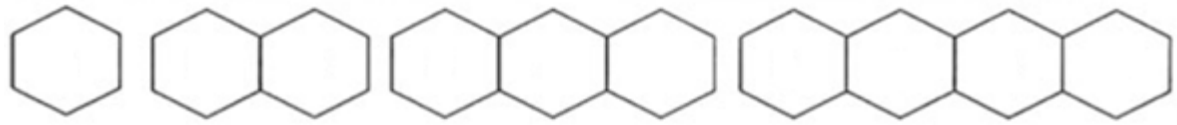


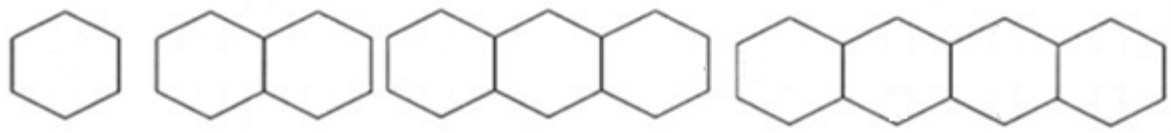
Figura 1

a)



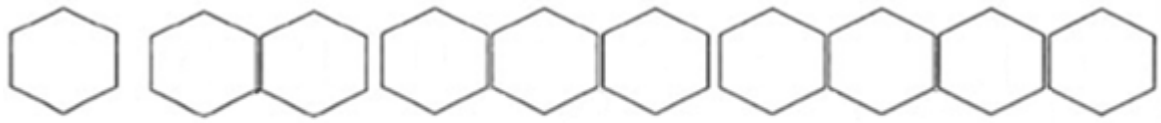
1	2	3	4
6	5+5=10	5+4+5=14	5+4+4+5= 18

b)



1	2	3	4
2×2+2	2×4+2=10	2×6+2=14	2×8+2=18

c)



1	2	3	4
6	2×6-2=10	3×6-2×2=14	4×6-3×2=18

d)

1	2	3	4
6	10	14	18

Limites e possibilidades dos registros de representação semiótica na construção de gráficos por meio dos softwares Geogebra e R

Fabiano dos Santos **Souza**
Universidade Federal Fluminense
Brasil
fabiano_souza@id.uff.br
Cileda de Queiroz e Silva **Coutinho**
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Brasil
cileda@pucsp.br

Resumo

Esta oficina tem por objetivo incentivar a discussão referente à abordagem de conteúdos estatísticos na escola básica por meio da filosofia da análise exploratória de dados. Pesquisas na área indicam sua eficácia para o desenvolvimento do letramento estatístico dos alunos em todos os níveis de escolaridade. Discutimos a utilização de ambientes computacionais como ferramentas para a apreensão e utilização de mais de um registro de representação semiótica para a análise de um conjunto de dados, para que o aluno possa construir efetivamente seus conhecimentos estatísticos, e não apenas conhecimentos procedimentais. Faz-se necessário discutir alguns critérios, identificando contribuições, limites e possibilidades do uso de softwares como o Geogebra ou R na construção e articulação de gráficos e medidas estatísticas, quando o objetivo é a aprendizagem. As discussões a serem desenvolvidas no minicurso versarão sobre tais critérios com o objetivo de desenvolvimento do letramento estatístico dos alunos.

Palavras chave: educação estatística, letramento estatístico, transnumeração, registro de representação semiótica, Geogebra, R-project.

Considerações Iniciais

A título introdutório, apresentamos um conjunto de reflexões sobre a ciência Estatística que desde da metade do século XX, com os avanços tecnológicos e computacionais, tem se tornado uma ciência muito importante para a sociedade, em suas diversas esferas. Esta ciência é componente curricular na Escola Básica em diversos países, contribuindo para a formação pessoal e profissional do sujeito, uma vez que se faz presente em diversas áreas do conhecimento.

Para que esse sujeito torne-se um cidadão crítico exercendo plenamente sua cidadania é exigido à compreensão dos conceitos e significados estatísticos envolvidos nas situações cotidianas, tanto pessoais com profissionais, para que possa tomar decisões corretas. Tais decisões devem ser tomadas a partir da apreensão e da compreensão da variabilidade contida nos dados a serem analisados para subsidia-las. Dessa forma, faz-se necessário que esse sujeito seja estatisticamente letrado, ou seja, exige-se do cidadão de hoje um nível de letramento estatístico

que lhe permita não apenas compreender o noticiário divulgado nas mais diversas mídias, como também se expressar corretamente por meio dos termos e noções estatísticas, relacionando-as sempre que necessário para constituir uma análise eficiente e eficaz. Nessa perspectiva, entendemos por letramento estatístico não apenas a alfabetização, mas o uso correto dos conceitos e procedimentos estatísticos pelo sujeito. Neste contexto, fazemos a opção pela seguinte definição, a ser adotada no desenvolvimento desse minicurso:

> Letramento estatístico inclui habilidades básicas e importantes que podem ser usadas para compreender informações estatísticas ou resultados de pesquisa. Estas habilidades incluem estar apto a organizar dados, construir e exibir tabelas, e trabalhar com diferentes representações dos dados. O Letramento Estatístico inclui também uma compreensão de conceitos, vocabulário e símbolos, além de incluir uma compreensão de probabilidade como uma medida da incerteza (Garfield, delMas e Chance, 2003, apud Ben-Zvi e Garfield, 2004, p.7).

Para Shamos (1995, apud GAL, 2002), um sujeito está no nível cultural de letramento estatístico quando a mobilização de seus conhecimentos nessa área limita-se ao uso de termos básicos naturalmente utilizados na mídia para comunicação de temas científicos. Já o nível funcional exige alguma substância a mais nessa mobilização de conhecimentos, pois além do uso de termos comuns, o sujeito deve ser capaz de conversar, ler e escrever de forma coerente, podendo mesmo usar termos não técnicos, mas sempre dentro de um contexto significativo. Finalmente, o nível científico, o mais elevado, exige do sujeito uma compreensão global do procedimento científico, de forma integrada com a compreensão dos processos científicos e investigativos.

Com o rápido desenvolvimento das ferramentas computacionais disponíveis tanto para o tratamento de um grande volume de dados como para a divulgação de tal tratamento e análise pelas mais diversas mídias, percebe-se que as informações estatísticas são veiculadas por meio de tabelas e principalmente por gráficos, e até mesmo por meio de medidas estatísticas. No entanto, muitas vezes na divulgação de tais informações, alguns erros são cometidos, e um exemplo bastante frequente (infelizmente) é o erro nas escalas dos gráficos apresentados à população, que pode levar à uma percepção equivocada dos resultados ali discutidos.

É nessa perspectiva que diversas pesquisas na área da Educação Estatística são desenvolvidas, de forma a compreender os processos de ensino e de aprendizagem dos conteúdos estatísticos, desde os mais elementares. Entendemos que estes conteúdos são ferramentas fundamentais para a cidadania, uma vez que é necessário ao sujeito, minimamente, compreender as informações veiculadas e identificar problemas nessa veiculação, quando existentes, fazendo a filtragem. Em consequência, é possível fazer a leitura correta desses dados, transformando-os em informação e construindo conhecimentos a partir da apreensão dessa informação.

Para Showers, Joyce e Bennet (1997), em uma formação continuada, qualquer que seja o conteúdo trabalhado visando o desenvolvimento profissional, os professores trazem seus conhecimentos e habilidades, seu estilo de ensino, suas características pessoais tais como estágio de crescimento, flexibilidade conceitual, senso de eficácia e conceitos, além de percepções sobre suas necessidades e preferências por certos tipos de desenvolvimento profissional. E é nesse contexto que se insere a proposta desse minicurso: discutir elementos para a leitura e análise de gráficos estatísticos, não apenas apresentados individualmente mas, e principalmente, quando utilizados de forma simultânea com outros registros de representação semiótica tais como outros gráficos e medidas estatísticas. O ponto inicial é a experiência dos participantes na representação

e leitura de dados estatísticos para que, por meio de um trabalho diferenciado fundamentado na filosofia da Análise Exploratória de Dados e na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, possamos favorecer o desenvolvimento profissional desses professores (ou futuros professores). Destaca-se ainda que os conteúdos e procedimentos serão trabalhados de forma a levantar questões motivadoras para pesquisas na área da Educação Estatística.

A teoria de registros de representação semiótica e o ensino e aprendizagem de conteúdos estatísticos

No que se refere à Teoria dos Registros de Representação Semiótica, em uma leitura feita para sua aplicação na aprendizagem dos conteúdos estatísticos, Vieira (2008) afirma que:

> [...] A resolução de problemas estatísticos passa não apenas pela transformação de um registro a outro, mas também pelo uso simultâneo desses diversos registros para obtenção do maior número de informações, permitindo a análise crítica dos dados, segundo os princípios da Análise Exploratória de Dados. (Vieira, 2008, p. 24).

Esta ideia é reforçada por Duval (2009), quando afirma que um registro de representação semiótica deve permitir o cumprimento de três atividades cognitivas, que neste texto fazemos a transposição para o contexto da aprendizagem de conteúdos estatísticos. A primeira delas é a construção de um traço ou ajuntamento de traços perceptíveis que sejam identificáveis como elemento de um sistema determinado (entendemos assim os gráficos estatísticos, as tabelas de distribuição e de distribuição de frequências e as medidas resumo como registros de representação semiótica). A segunda diz respeito à transformação de uma representação em outra a partir das regras do sistema considerado (transformação de tabelas pela modificação do tipo de agrupamento dos dados, transformação dos gráficos pela modificação das escalas dos eixos etc). Finalmente, a terceira atividade cognitiva refere-se à conversão das representações produzidas em um sistema para representações de um outro sistema (conversão de tabelas em gráficos, tabelas em medidas, gráficos em medidas, e vice-versa).

A aplicação dessa Teoria converge para os pressupostos do desenvolvimento do pensamento estatístico, nos termos propostos por Wild e e Pfunkuch (1999) e Pfunnchuk (2008) com a designação por "transnumeração", e retomados por Coutinho, Silva e Almouloud (2011), que entendem essa articulação entre registros como:

> o trabalho realizado ao se passar dos dados brutos para um registro tabular de distribuição de frequência e, deste, para registros gráficos tais como histograma e box-plot, na busca de significados no conjunto de dados analisado para a resolução do problema proposto. Assim, a articulação entre os diversos registros de representação semiótica é fundamental para a compreensão da estatística, tanto quanto a transnumeração, no sentido cunhado por Wild e Pfannkuch (1999) e retomado por Pfannkuch (2008). (Coutinho, Silva, Almouloud, 2011, p.501)

Retornando assim aos objetivos desse minicurso a partir das reflexões teóricas apresentadas, reforçamos a necessidade de estimular e provocar discussões e reflexões sobre como desenvolver o letramento estatístico em nossos alunos utilizando a filosofia da análise exploratória de dados (Batanero; Estepa; Godino, 1991). Verifica-se assim, no âmbito do desenvolvimento desse letramento, a necessidade da utilização de ambiente computacional, visando potencializar a articulação entre as diversas representações a serem construídas, pois concordamos com Pfannkuch (2008), quando esta afirma que um desafio para os pesquisadores é "comunicar seus achados de forma a impactar o desenvolvimento da prática dos professores e a

aprendizagem dos alunos". Ora, o ambiente computacional é uma realidade, uma ferramenta potente a ser incorporada na prática do docente em sala de aula.

No entanto, se faz necessária o estabelecimento de critérios didáticos para a escolha da ferramenta computacional a ser utilizada pelo professor para a abordagem dos conteúdos estatísticos. Concordamos com Coutinho e Souza (2013) quando estes adotam a usabilidade como ponto de partida para uma análise didática dos softwares disponíveis. Estes autores consideram itens como inserção de dados no software, possibilidade de construção de mais de um gráfico em um mesmo sistema de eixos, dinamismo na representação (alteração da tabela, por exemplo, provocando a automática alteração dos gráficos, sem necessidade de novo comando de construção).

Assim, buscamos integrar, nesse minicurso, as teorias citadas, de forma a fundamentar a explicitação dos itens que constituem o critério de usabilidade.

Estrutura da Minicurso

Objetivos

Geral: Dar uma visão da Estatística como uma ferramenta poderosa de análise de dados, promovendo uma abordagem conceitual fundamentada da filosofia da Análise Exploratória de Dados, proporcionando, ao professor e ao pesquisador, um espaço de reflexão sobre a utilização de softwares para o trabalho simultâneo com pelo menos dois registros de representação semiótica. Para isso, discutiremos a construção de critérios que permitam analisar as potencialidades e as limitações destes softwares para um trabalho didático.

Específicos:

- Conhecer e utilizar os softwares Geogebra e R como ferramentas para a construção de gráficos estatísticos e representação gráfica das medidas-resumo, de forma a favorecer o desenvolvimento do letramento estatístico.
- Discutir a criação e utilização de critérios que permitam analisar softwares utilizados para o ensino e a aprendizagem da estatística em termos de potencialidades e limitações de tais softwares.
- Apresentar conteúdos básicos de estatística descritiva, como um instrumento importante para a compreensão e interpretação de situações do cotidiano, explorando dados coletados a partir de problematização desse cotidiano (pessoal e profissional);
- Subsidiar os professores para concepção e gestão de atividades que venham a enriquecer as suas práticas, utilizando a filosofia da Análise Exploratória de Dados para a abordagem dos conteúdos estatísticos na Escola Básica.

Descrição sumária das atividades durante as duas horas de oficina

A primeira atividade a ser desenvolvida é uma adaptação do proposto por Ponte, Brocado e Oliveira (2006). Os participantes serão convidados a problematizar a caracterização do grupo, de forma a que se crie a necessidade de dados para responder à questão formulada. A discussão será permeada pelos princípios da análise exploratória de dados, dos quais um deles é o trabalho em um contexto familiar ao aprendiz. Nesse sentido, concordamos com Cobb e Moore (1997), para quem na Estatística, os dados não são somente números: eles são números com um contexto, e é este que dará significado aos dados.

A primeira questão a ser proposta aos participantes, após a construção da problematização, será relativa à organização dos dados, de forma a melhor descrever o grupo para outra pessoa que não tenha participado do minicurso. A partir das discussões, trabalharemos a organização em tabelas e em gráficos com uso dos softwares, solicitando que descrevam as informações levantadas por cada representação, relacionando-as. Questões de fomento dos debates poderão ser formuladas, tais como: o que a tabela informa? O que o gráfico de pontos informa que complemente a informação gerada pela leitura da tabela? Que outros gráficos podem ser construídos de forma a sempre complementar as informações?

Nesse sentido, buscaremos discutir a adequação de cada tipo de gráfico ao tipo de variável em jogo, o tipo de informação gerada pela leitura de cada tipo de gráfico, e as possíveis articulações de forma a identificar elementos para a análise do conjunto de dados. Tal discussão conduz, naturalmente, à necessidade da utilização de ferramentas computacionais, de forma a não transformar a atividade de análise de dados em uma construção mecânica dos gráficos e determinação das medidas-resumo. A utilização dos softwares tem assim, por objetivo, proporcionar condições para a mudança de registros de representação semiótica e utilização simultânea de mais de um registro para a análise dos dados, nos termos da filosofia da Análise Exploratória de Dados.

Discutiremos a utilização de algumas ferramentas, tais como Geogebra e R, para abordagem dos gráficos estatísticos – construção e análise, em situação de sala de aula. Ou seja, a utilização destes programas para ensino e para a aprendizagem, visando o desenvolvimento do letramento estatístico dos alunos. Nossa análise das potencialidades e limitações de tais ferramentas se fundamentará na possibilidade de compatibilização dos diversos registros de representação semiótica para apreensão da variabilidade presente no conjunto de dados por meio do uso simultâneo de dois ou mais registros, nos termos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica articulado com a ideia de transnumeração, conforme abordado em Coutinho, Silva, Almouloud (2011).

Esta primeira fase do minicurso inclui a familiarização dos participantes, tanto com o Geogebra como com o R, para a construção de gráficos estatísticos como gráfico de pontos, gráfico de colunas, gráfico de setores e boxplot, assim como a representação gráfica do intervalo construído a partir da média e desvio-padrão: $[\bar{X} - S, \bar{X} + S]$.

Na sequência do minicurso será proposta aos participantes a construção de uma análise didática da primeira atividade desenvolvida. Para desencadear tal análise, será formulada a questão: Nesta atividade, quais seriam os conhecimentos que os alunos necessitam mobilizar para resolver a tarefa proposta? Quais as principais dificuldades que poderiam encontrar e como estas poderiam ser trabalhadas? Quais as dificuldades inerentes à utilização do software? Quais as vantagens na utilização do software para a superação ou minimização dos obstáculos à construção dos conceitos estatísticos em jogo.

Esta segunda atividade tem por objetivo a construção de conhecimento didático estatístico que permita ao professor a concepção e gestão de situações de aprendizagem envolvendo tais conteúdos.

Como uma segunda atividade para aplicação dos conhecimentos construídos, será proposta uma atividade para análise de um conjunto de dados relativos à previsão de temperaturas máximas e mínimas de Chiapas - México. Os participantes receberão dados referentes a previsões de temperaturas máximas e mínimas de Chiapas. A partir da apropriação dos dados os

participantes serão solicitados a construírem diversas representações para a redação de uma análise sobre os dados apresentados. Perguntaremos quais gráficos seriam mais adequados aos dados? Após a construção do gráfico "ideal", vamos trabalhar com os conceitos das medidas de tendência central (média, moda e mediana), assim como, algumas medidas de dispersão (amplitude, desvio padrão). Em seguida, acrescentaremos valores discrepantes outliers, e faremos novas discussões com o grupo em relação ao dado novo.

Solicitaremos aos participantes a construção do gráfico de pontos e o box-plot, os quais não são apresentados em livros didáticos, e discutiremos a importância desses gráficos e a baixa complexidade cognitiva que ambos apresentam, após esses gráficos, despontaremos de colunas/barras e histogramas, enfatizando a adequação de cada um ao tipo de variável em questão. Destacaremos a articulação entre os gráficos, como fonte de informação, no espírito da análise exploratória de dados, localizando-se a média e a mediana e o efeito dos valores discrepantes nos gráficos.

As atividades propostas serão exploradas com o uso dos softwares: Geogebra, R, para que os participantes possam aprender novas possibilidades e recursos tecnológicos discutindo os aspectos didáticos para o ensino de estatística na Educação Básica.

Recursos didáticos

- Laboratório de informática com os softwares: Geogebra, R instalado e o seu pacote Rcmdr. O software R e o seu pacote Rcmdr poderão ser instalados anteriormente, através do site http://www.R-project.org, software free e funciona em Unix, Windows ou Macintosh; O software Geogebra poderá ser instalado em http://www.geogebra.org.
- Um projetor para que os participantes possam acompanhar as atividades e tela para projeção, ou quadro branco.

Público Alvo

Professores de matemática da Educação Básica, futuros professores de Matemática (e formação inicial), assim como pesquisadores da área de Educação Estatística e Educação Matemática.

Vagas

O número de vagas depende da capacidade do laboratório alocado para o minicurso, sendo desejável que não se ultrapasse o número de 20 participantes.

Considerações Finais

Abordamos, neste trabalho, aspectos relevantes à utilização de ambiente computacional para a concepção e gestão de atividades que tenham por objetivo o ensino e a aprendizagem dos conceitos de base da Estatística Descritiva, segundo os preceitos da filosofia da Análise Exploratória de Dados. Buscamos assim discutir as condições para o desenvolvimento do letramento estatístico fundamentado na utilização da Teoria de Registros de Representação Semiótica.

Os objetivos desse minicurso serão atingidos à medida que os participantes se envolvam nas discussões e nas atividades propostas, sendo que além dos conhecimentos didáticos sobre o ensino e a aprendizagem da estatística, destacamos também a importância o conhecimento tecnológico a ser construído.

Temos a consciência que o papel de um minicurso é apenas o passo inicial para tal construção de conhecimento, e esperamos que os participantes sejam sensibilizados para a busca autônoma das ferramentas e conhecimentos necessários para a atuação docente no que se refere ao desenvolvimento o letramento estatístico do aluno.

Vale salientar que a pesquisa na qual o presente minicurso foi concebido está em andamento, em cooperação entre os programas de Pós-Graduação em Educação Matemática da PUC-SP e da PUC-Peru.

Destacamos que diante das mudanças sociais, políticas, econômicas e tecnológicas da sociedade moderna, a informação e formação torna-se muito mais veloz no cotidiano escolar. Nesse sentido, torna-se necessário que a formação inicial e continuada do professor de matemática esteja incorporada de novas metodologias, e de novos recursos tecnológicos.

Chamamos a atenção, também, para o fato de que a Estatística tem desempenhado cada vez mais um papel primordial para o desenvolvimento da sociedade moderna conforme destaca Batanero (2005). Dessa forma, a oficina por meio de suas atividades busca proporcionar ferramentas metodológicas para abordar a análise de dados por meio da articulação entre os conhecimentos estatísticos presentes nos currículos da Escola Básica.

Acreditamos que, para se concretizar de forma plena a proposta aqui apresentada, torna-se evidente que pesquisadores da Educação Estatística desenvolvam propostas de atividades/trabalhos que venham atender a demanda dos Educadores Matemáticos da Educação Básica, pois foi pensando nessas dificuldades que os educadores possuem que se preferiu por oferecer essa oficina no e minicurso no XIV CIAEM-IACME possibilitando novas reflexões sobre o ensino de estatística na Educação Básica.

Referências Bibliográficas

Batanero, C., Estepa, A., & Godino, J. D. (1991). Análisis Exploratorio de Datos: sus Posibilidades en la Enseñanza Secundaria. *Suma*, *9*, 25-31. Recuperado de http://www.ugr.es/~batanero. Consultado em 05/06/2014.

Batanero, C., & Godino, J. D. (2005). *Perspectivas de la educación estadística como área de investigación.* En R. Luengo (Ed.), *Líneas de investigación en Didáctica de las Matemáticas* (pp. 203-226). Badajoz: Universidad de Extremadura.

Ben-Zvi, D., & Garfield, J. (Eds.) (2004). *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking* (pp. 6-7).

Cobb, G. W., & Moore, D. S. (1997). Mathematics, Statistics, and Teaching. *The American Mathematical Monthly*, *4*(9), 801-823. Disponível em <http://clint.sharedwing.net/research/stat/mst.pdf>.Acesso em 10 Jul. 2012.

Coutinho, C. Q. S., Almouloud, S. Ag., & Silva, M. J .F. (2012) O desenvolvimento do letramento estatístico a partir do uso do Geogebra: um estudo com professores de matemática. *Revemat: R. Eletr. de Edu. Matem, 7*(2), 246-265. ISSN 1981-1322. Florianópolis.

Coutinho, C. Q. S.; Silva, M. J. F.; Almouloud, S. Ag. (2011). *Desenvolvimento do Pensamento Estatístico e sua Articulação com a Mobilização de Registros de Representação Semiótica.* In Bolema, *24*(39), 495-514. Rio Claro (SP).

Coutinho, C. Q. S., & Souza, F. S. (2013). Aprendizagem da Estatística e o uso de ambientes computacionais: uma análise didática de programas para construção de gráficos estatísticos. In *Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. Montevidéo: Biblioteca

Nacional de Uruguay. Disponível em http://www.cibem7.semur.edu.uy/7/actas/pdfs/234.pdf. Acesso em 30 de agosto de 2014.

Duval, R. (2003). Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão da matemática. In Machado (org.), *Aprendizagem em matemática, registros de representação semiótica* (pp. 11-33). Campinas: Papirus.

Gal, I. (2002). Adult´s statistical literacy. Meanings, components, responsibilities. *International Statistical Review, 70*(1), 1-25. Recuperado de http://www.stat.auckland.ac.nz/~iase/cblumberg/gal.pdf. Consultado 05/06/2014.

Pfannkuch, M. (2008). Training teachers to develop statistical thinking. In the *ICMI STUDY 18 and 2008 IASE Round Table Conference. Proceedings*. Recuperado de <http://www.ugr.es/~icmi/iase_study/Files/Topic4/T4P2_Pfannkuch.pdf>. Consultado: 05/06/2014.

Ponte, P. J., Brocado, J., & Oliveira, H. (2006). *Investigações Matemáticas na Sala de Aula*. Belo Horizonte: Autêntica.

Showers, B., Joyce, B., & Benett, B. (1987). Synthesis of Research on Staff Development: a framework for future study and a state-of-the-art analysis. In *Educational Leadership*. November.

Vieira, M. (2008). *Análise Exploratória de dados: Uma abordagem com alunos do Ensino Médio* (Dissertação de Mestrado). PUC-SP. Disponível em < http://www.sapientia.pucsp.br/tde_busca/arquivo.php?codArquivo=8039>, acesso em 15 de setembro de 2014.

Wild, C., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International Statistical Review*, *6*, 223-265. Auckland.

O *design* de problemas com as tecnologias digitais no ensino da Matemática

Fabiane Fischer **Figueiredo**
Universidade Luterana do Brasil
Curso de Matemática, Universidade de Santa Cruz do Sul
Brasil
fabianefischer@unisc.br
Rodrigo **Dalla Vecchia**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
rodrigovecchia@gmail.com

Resumo

O *design* na Educação e, em particular, o *design* de problemas com as tecnologias digitais são perspectivas que podem proporcionar novos horizontes educacionais ao ensino e a aprendizagem da Matemática. Dessa forma, este minicurso tem como objetivo propiciar reflexões sobre o *design* de problemas com a utilização das tecnologias digitais, por parte de licenciandos e professores de Matemática que atuam e desejam atuar em consonância com as tecnologias digitais. Acreditamos que, por meio das atividades propostas, os participantes do minicurso perceberão possibilidades e desafios do ensino da Matemática nessa perspectiva e como ela pode vir à contribuir para a produção de conhecimento por parte do aluno.

Palavras chave: design de problemas, tecnologias digitais, ensino e aprendizagem, matemática.

O *Design* e suas perspectivas educacionais

Design é uma palavra em inglês que refere-se "[...] à idéia de plano, desígnio, intenção, quanto à de configuração, arranjo, estrutura (e não apenas de objetivos de fabricação humana, pois é perfeitamente aceitável, em inglês, falar do design do universo ou de molécula)" (Cardoso, 2004, p. 14). Essa palavra surgiu do latim, a partir do verbo *designare*, e abrange os sentidos de designar e desenhar (Cardoso, 2004). Desse modo, sob o ponto de vista etimológico, *design* "[...] já contém nas suas origens uma ambiguidade, uma tensão dinâmica, entre um aspecto abstrato de conceber/projetar/atribuir e outro concreto de registrar/configurar/formar" (Cardoso, 2004, p. 14).

Na maioria das definições, há uma concordância que o *design* é a junção entre a forma material e os conceitos intelectuais, ou seja, uma atividade que gera projetos de planos ou esboços ou modelos que se misturam e se concretizam na prática (Cardoso, 2004). Embora concordemos com a visão de Cardoso (2004), salientamos que apesar da palavra *design* ser comumente usada, sua compreensão se mostra de modo múltiplo, abrangendo uma multiplicidade de visões, que ora possuem convergências, ora divergências. Nesse universo, consideramos importante destacar outras visões, consonantes com a de Cardoso (2004) como a visão de Filatro (2008, p. 3) que entende *design* como "[...] o resultado de um processo ou

atividade (um produto), em termos de forma e funcionalidade, com propósitos e intenções claramente definidos [...]". Além dessa visão, trazemos ainda o modo como é definido pelo Dicionário de Informática e Internet, em que *design* é definido como um produto na área da Informática (Sawaya, 1999), ou seja, como uma "[...] especificação das relações de funcionamento existentes entre as partes integrantes de um sistema, expressas em função de suas ações características" (Sawaya, 1999, p. 127).

O *design* é uma atividade que vem ganhando destaque em diferentes áreas profissionais. Na Educação, podemos perceber o *design* em atividades ligadas a instrução (*design* instrucional), tanto em Cursos presenciais como em Cursos de Educação a Distância, com e sem a utilização das tecnologias digitais (TD). Essa especificação chamada de *design* instrucional pode ser entendida como uma

> [...] ação intencional e sistemática de ensino que envolve o planejamento, o desenvolvimento e a aplicação de métodos, técnicas, atividades, materiais, eventos e produtos educacionais em situações didáticas específicas, a fim de promover, a partir dos princípios de aprendizagem e instrução conhecidos, a aprendizagem humana (Filatro, 2008, p. 3).

Essa perspectiva do *design* envolve o planejamento de procedimentos para o desenvolvimento de programas para a Educação, que visam oportunizar ao aluno uma formação que o possibilite participar de sua aprendizagem e de forma interativa (Gustafson & Branch, 2002). A maioria dos modelos de *design* instrucional, em que são utilizadas as tecnologias digitais, tem a finalidade de possibilitar uma maior análise dos problemas educacionais, do desempenho e da aprendizagem do aluno com o propósito de, por meio dessa análise prévia, desenvolver, implementar e avaliar os procedimentos de instrução e os recursos materiais que possam vir à melhorar o ensino nas instituições (Reiser, 2001).

Outro *design* utilizado como meio de instrução é *design* pedagógico, que é centrado no aluno e na sua aprendizagem (Torrezzan & Behar, 2009). Essa vertente de *design* integra fatores técnicos, gráficos e pedagógicos nas fases de planejamento e desenvolvimento, sendo "[...] aquele que une diferentes áreas de estudo, integrando fatores importantes a respeito de práticas pedagógicas, ergonomia, programação informática e composição gráfica. [...] o Design Pedagógico preocupa-se com a futura ação do usuário sobre o produto" (Torrezzan &Behar, 2009, p. 35). Na Educação a Distância, o *design* pedagógico tem como objetivo possibilitar à construção de "[...] um ambiente instigante em que o aluno encontre espaço para realizar interações e interatividades [...], colocando em prática uma postura crítica, investigativa e autônoma" (Torrezzan & Behar, 2009, p. 35).

Além desses, há o *design* de ambientes de aprendizagem construtiva, que para Jonassen (2003), devem ser desenvolvidos com base na resolução de problemas. Por meio de tais ambientes, o aluno pode ter a oportunidade de aprender a resolver diferentes tipos de problemas e, também, pode construir conhecimentos, seja de forma individual e/ou colaborativa (Jonassen, 2003). Segundo o mesmo autor, esse tipo de *design* instrucional, que tem como base o *design* de problemas, também pode ser desenvolvido a fim de oportunizar recursos que venham à ajudar o aluno a interpretar e manipular informações do problema, assim como re(construir) o significado do problema a ser resolvido (Jonassen, 1998). Com isso, o aluno tem a oportunidade de preparar-se melhor para a resolução de problemas no dia a dia.

Conforme Jonassen (2003), o *design* de problemas pode contribuir para a formação de profissionais para o mercado de trabalho, uma vez que o futuro profissional, ao ter a

oportunidade de resolver problemas que se assemelham à problemas que surgem no ambiente de trabalho, está tendo a oportunidade de uma formação que o melhor prepare para exercer a profissão (Jonassen, 2003). Esse *design* também vem ao encontro do *design* para experiência que, conforme Nojimoto (2009) visa que as experiências venham a imergir a partir de relações entre o indivíduo e objetos interativos. "Através do entendimento [...] da relação indivíduo-objeto, espera-se que o *designer* tenha condições de explorar certos aspectos envolvidos entre pessoas e objetos interativos, buscando assim os meios para tornar possível o surgimento de experiências" (Nojimoto, 2009, p. 83).

Diante essas considerações, destacaremos o *design* de problemas com as tecnologias digitais, por ser uma atividade que, ao ser realizada por professores e alunos, pode constituir-se como um meio ambiente de aprendizagem investigativo processo de ensino e aprendizagem da matemática.

As tecnologias digitais e o *design* de problemas no ensino Matemática

As tecnologias digitais estão alterando a forma de viver e aprender na atualidade, em que "[...] comportamentos, práticas, informações e saberes se alteram com extrema velocidade" (Kenski, 2003, p. 27). Essas alterações também vem possibilitando mudanças nas formas de ensinar e aprender na Educação (Kenski, 2003), pois podem dinamizar os processos de acesso, compreensão e produção de conhecimento (Arruda, 2009).

Na Educação, as tecnologias digitais estão cada vez mais sendo utilizadas com fins de produção de recursos educativos digitais, em que o *design* se mostra necessário para atender as necessidades das instituições de ensino, dos professores e alunos. Um dos tipos que podemos destacar nessa perspectiva, é o *design* de *softwares* instrucionais para a Educação, que têm como propósito a construção de programas de computador com objetivos específicos de instrução, que venham à proporcionar a aprendizagem (Harel & Papert, 1990).

O *design* de um *software* consiste em projetar um processo para resolver um problema, tornando-se necessário a sua modelagem e o planejamento de sua estrutura, bem como as funções que serão executadas (Budgen, 2003). Independente do objetivo para qual foi desenvolvido, um *software*, conforme a definição dada pelo Dicionário de Informática e Internet tem "Suporte lógico, suporte de programação. Conjunto de programas, métodos e procedimentos, regras e documentação relacionados com o funcionamento e manejo de um sistema de dados" (Sawaya, 1999, p. 436).

No ensino da Matemática, "[...] as possibilidades que os *softwares* oferecem podem mudar o tipo de atividades que são propostas em sala de aula, bem como transformar a natureza do conhecimento matemático" (Borba, 2010, p. 2). No caso da perspectiva de resolução de problemas, os *softwares* podem proporcionar a visualização e a experimentação, que são caraterísticas que aparecem e são associadas às interfaces (Borba, Malheiros & Amaral, 2011). Ainda,

> Os ambientes computacionais condicionam as ações quando se tem que resolver uma atividade ou um problema matemático. No que se refere ao uso dos *softwares*, diferentes estratégias são utilizadas em complemento ao uso do lápis e papel. Ele afeta, principalmente, o *feedback* proporcionado ao usuário" (Borba, 2010, p. 3).

Além dos *softwares*, podemos destacar os objetos de aprendizagem, tais como "[...] vídeos, imagens, aplicativos pequenos, figuras, gráficos e apresentações de slides, além de outros

elementos digitais que possibilitam ao aluno adquirir conhecimento enquanto interage com eles" (Togni, 2007, p. 82). Esses objetos na resolução de problemas podem contribuir para a experimentação, análise de gráficos, simulações e a resolução de diferentes tipos problemas, em que aluno tem a oportunidade de relacionar o conhecimento aprendido na escola com aquele aprendido no seu cotidiano (Togni, 2007).

Dessa forma, acreditamos que a utilização de *softwares* (sejam eles desenvolvidos para área da Matemática ou não), de objetos de aprendizagem e de outras tecnologias digitais podem vir à contribuir para a resolução de problemas e para aprendizagem da Matemática por meio deles. Porém, muitas vezes "[...] cabe ao professor a nem sempre fácil tarefa de escolher e/ou elaborar problemas que atendam ao que ele pretende que os alunos trabalhem em termos de conteúdos e conceitos matemáticos, e que aproveitem as possibilidades que as TI oferecem" (Allevato, 2005, p. 99).

Nesse viés, pensamos que o *design* de problemas com as tecnologias digitais podem trazer novos horizontes para o ensino e a aprendizagem da Matemática. O *design* pode contribuir para que o enunciado de um problema seja produzido para abrir possibilidades para a busca, a descrição e a definção de outros problemas, que são partes constituintes do processo de resolução (Valente & Canhette, 1993). Também, esse *design* pode ser uma atividade que vise à atender objetivo(s) de ensino e aprendizagem e para favorecer um ambiente de aprendizagem que possibilite questionamentos, críticas e debates entre alunos e o professor (Valente & Canhette, 1993).

Outro aspecto que podemos destacar é que o *design* de problemas com as tecnologias digitais vem ao encontro da perspectiva de resolução de problemas abertos, pois

> Um problema aberto tem por objetivo permitir que o aluno desenvolva um processo de resolução de problemas que nós chamaremos de "processo científico", ou seja, nele o aluno desenvolverá a capacidade de tentar, supor, testar e provar o que for proposto como solução para o problema, implicando uma oposição aos problemas fechados. [...] o próprio enunciado do problema não permite que ele encontre a resposta como de costume (Souza & Santos, 2007, p. 5).

As tecnologias digitais podem tornar o *design* de um problema mais desafiador e criativo, pois elas "[...] favorecem a exploração de problemas abertos e, ademais, em virtude da imprevisibilidade presente nas atividades realizadas com o computador, novos e inesperados problemas, na maior parte das vezes, propostos pelos próprios alunos, podem surgir" (Allevato, 2005, p. 99). Também, podem contribuir para a ocorrência de um ambiente de aprendizagem construtiva (Jonassen, 2003), que oportunize o *design* de novos problemas a partir do problema inicial (Valente & Canhette, 1993).

Além disso, no *design* de problemas, as tecnologias digitais podem proporcionar a visualização. Para Borba, Malheiros e Amaral (2011), a visualização possibilita a compreensão matemática, pois o aluno pode testar conjecturas, calcular e "[...] decidir questões que têm informações visuais como ponto de partida" (Borba, Malheiros & Amaral, 2011, p. 70).

O *design* de problemas com a utilização das tecnologias digitais pode ser considerado um *design* instrucional, pois o *design* instrucional é um "[...] processo de identificar um problema de aprendizagem e desenhar, desenvolver, implementar e avaliar uma solução para esse problema" (Filatro, 2008, p. 25). Nessa perspectiva, professores e/ou alunos tornam-se *designers*, que

podem ou vir não à solicitar o auxílio de outros profissionais (Filatro, 2008) para planejar e realizar o *design* de problemas.

Esse tipo de *design* no ensino da matemática pode ser realizado com a finalidade de vir ao encontro dos interesses, da realidade e do desenvolvimento cognitivo dos alunos. Também, pode oportunizar a experiência de resolver diferentes tipos de problemas (Nojimoto, 2009) com a utilização das tecnologias digitais. Essas possibilidades que destacamos se aproximam da visão de Pozo (1998, p. 9), que salienta:

> […] é preciso tornar os alunos pessoas capazes de enfrentar situações e contextos variáveis, que exijam deles a aprendizagem de novos conhecimentos e habilidades. Por isso, os alunos que hoje aprenderem a aprender estarão, previsivelmente, em melhores condições de adaptar-se às mudanças culturais, tecnológicas e profissionais que nos aguardam. [...] Assim, ensinar os alunos a resolver problemas supõe dotá-los da capacidade de aprender a aprender [...].

Dessa forma, o *design* de problemas com as tecnologias digitais pode favorecer uma maior interação entre alunos e o professor, ou seja, a colaboração entre eles num processo de construção coletiva (Borba, Malheiros & Amaral, 2011). Contudo, pode ser realizado para que o aluno tenha a "[...] a oportunidade de re(construir) conceitos matemáticos, ao mesmo tempo que potencializa a produção de conhecimentos [...]" (Figueiredo & Rosa, 2013, p. 8).

A proposta do Minicurso

O objetivo deste minicurso é propiciar reflexões sobre as possibilidades que o *design* de problemas com a utilização das tecnologias digitais pode proporcionar ao ensino e a aprendizagem da Matemática. A duração do minicurso será de 2 horas e terá como público-alvo a participação de licenciandos de Cursos de Matemática e professores do Ensino Fundamental e do Ensino Médio, que irão fazer uso de um Laboratório de Informática ou de seus próprios computadores ou celulares com acesso à internet.

Como atividades, inicialmente, iremos oportunizar uma breve apresentação oral dos participantes do minicurso: nome, formação, origem e experiências como licenciandos e/ou como professores de Matemática. Em seguida, serão apresentadas as seguintes questões para desencadear a troca de ideias e propiciar reflexões entre os participantes:

- Na sua formação, você pode ter a oportunidade de resolver diferentes tipos de problemas?
- Como a resolução de problemas é comumente proposta na Educação Básica?
- Quais possibilidades e/ou limitações que a resolução de problemas pode proporcionar ao ensino e a aprendizagem da Matemática?

Após esse momento, faremos uso do referencial teórico apresentado neste trabalho para suscitar reflexões quanto ao *design* de problemas com tecnologias digitais no ensino e na aprendizagem da Matemática. Também, nos apoiaremos na visão de *design* de Valente e Canhette (1993) que entendem que

> O design envolve atividades como planejar, delinear, desenhar, esboçar, projetar, esquematizar, criar, inventar e executar. É o que fazem os arquitetos, engenheiros, economistas, artistas, quando desejam construir um objeto concreto [...]. Esse objeto, na verdade, é um produto do intelecto – uma idéia – e do meio usado para expressar e materializar essa idéia (Valente & Canhette, 1993, p. 66).

Para os autores (1993), o *design* é o que o ser humano faz quando resolve problemas. Na área da Educação, há fatores que diferem *design* e a resolução de problemas: no *design*, a definição do problema é parte do processo de resolução e a obtenção da solução não é imediata e clara, porque o objeto a ser construído depende do meio, das limitações do aluno e daquilo que mais satisfaz os seus interesses; na resolução de problemas, as estratégias são regras e heurísticas, assim como há melhores condições para a depuração e obtenção de uma determinada solução para o problema do que no *design* (Valente & Canhette, 1993). Dessa forma, o elo entre a atividade de *design* e a resolução de problemas traz a possibilidade de desafiar e motivar o aluno e pode contribuir para um ambiente de aprendizagem que suscite questionamentos e uma maior interação entre alunos e o professor no processo de construção de conhecimento (Valente & Canhette, 1993).

Além dessas atividades, será proposto aos participantes a resolução do problema "Brasil e México": *É ou não é possível determinar qual desses países que mais irá crescer populacionalmente até 2020, se for comparado um com o outro? Justifique sua resposta por meio de gráfico(s) e de suas respectivas análises.*

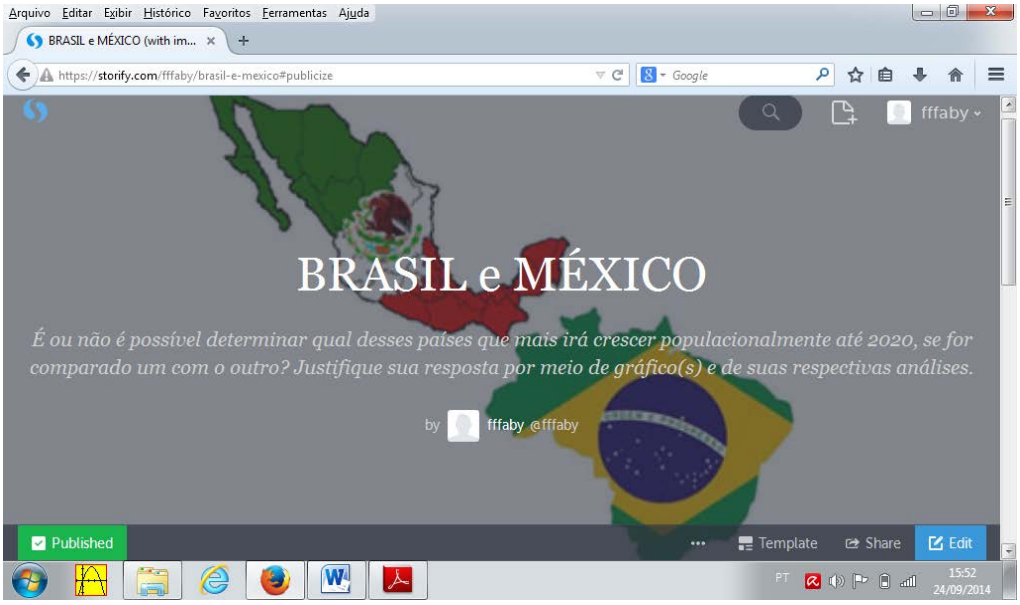


Figura 1. Problema "Brasil e México", disponível em: https://storify.com/fffaby/brasil-e-mexico.

O *design* desse problema foi realizado no *Storify*, que é um site disponível em: https://storify.com/ e que permite a criação de histórias por meio da colagem de imagens e informações extraídas do *Google* e de redes sociais (Setti, 2011). Também, é um site que permite a postagem de comentários e a interação entre os usuários.

O problema "Brasil e México" visa que os participantes do minicurso possam resolver um problema do tipo aberto, em que investigações, explorações e visualizações sejam feitas, assim como do *design* de novos problemas a partir do problema inicial possam emergir. Para tanto, o site *Storify* foi escolhido para que as tecnologias digitais disponíveis no ciberespaço possam ser utilizadas e que imagens, vídeos, *links*, etc. possam ser postados no decorrer do processo de resolução e/ou sejam utilizadas para apresentar a(s) solução(ões). Por meio do *Storify,* há também a possibilidade de uma maior troca de ideias e conhecimentos entre os participantes,

num trabalho colaborativo em que comentários podem ser postados quanto aos processos de resoluções, em que um participante pode contribuir com o processo de resolução do outro.

Ao término dessa atividade, será proposto outro momento para a troca de ideias e reflexões, em que serão feitos os seguintes questionamentos:

- Quais recursos tecnológicos vocês utilizaram no processo de resolução do problema?
- Quais outros problemas surgiram e foram resolvidos por vocês na tentativa de solucioná-lo?
- Quais conhecimentos matemáticos foram trabalhos por meio da resolução desse problema?
- O *design* do problema influenciou ou não no processo de resolução?
- Quais contribuições e/ou limitações o *design* desse problema pode proporcionar ao ensino e a aprendizagem da Matemática?
- Como vocês fariam o *design* de um problema com as tecnologias digitais? Para que alunos e nível de ensino ele seria proposto?

Como culminância, os participantes irão avaliar o minicurso.

Referências bibliográficas

Allevato, N. (2005). *Associando o computador à resolução de problemas fechados*: análise de uma experiência (Tese de Doutorado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro.

Arruda, E. (2009). Relações entre tecnologias digitais e educação: perspectivas para a compreensão da aprendizagem escolar contemporânea. In M. T. Freitas (Org.), *Cibercultura e formação de professores.* Belo Horizonte: Autêntica Editora.

Borba, M.C., Malheiros, A. P. S., & Amaral, R. B. (2011). *Educação a Distância online.* Belo horizonte: Autêntica Editora.

Borba, M. (2010). *Softwares* e internet na sala de aula de Matemática. In X Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM). Salvador. *Anais*...

Budgen, D. (2003). *Software design.* Harlow, England: Pearson Education Limited.

Cardoso, R. (2004). *História do design*. São Paulo: Edgard Blücher.

Figueiredo, F. F., & Rosa, M. (2013). A resolução de problemas e o *problem posing* com o ciberespaço. In *VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática (CIEM)*. Canoas. *Anais*...

Filatro, A. (2008). *Design instrucional na prática.* São Paulo: Pearson Education do Brasil.

Gustafson, K. L., & Branch, R. M. (2002). What is instructional design? In R.A. Reiser, & J. V. Dempsey (Eds.), *Trends and issues in instructional design and technology.* Saddle River, NJ: Merrill/Prentice-Hall.

Harel, I., & Papert, S. (1992). Software design as a learning environment: interactive learning environments. In D. P. Balestri, S. C. Ehrmann, & D. L. Ferguson (Eds.), *Learning to design, designing to learn: using technology to transform the curriculum.* Washington: Taylor & Francis.

Jonassen, D. (1998). Designing constructivist learning environments. In C. M. Reigeluth, *Instructional theories and models* (2a ed.). Mahwah, NJ: Laurence, Erlbaum.

Jonassen, D. (2003). *Learning to Solve Problems:* an instructional *design* guide. *Essential resources for training and HR professionals.* San Francisco: Pfeiffer.

Kenski, V. (2003). *Tecnologias e ensino presencial e a distância.* Campinas: Papirus.

Nojimoto, C. (2009). *Design para experiência:* processos e sistemas digitais (Dissertação de Mestrado em Arquitetura e Urbanismo). Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

Pozo, J. (Org.) (1998). *A solução de problemas*: *aprender a resolver, resolver para aprender.* Porto Alegre: ArtMed.

Problema "Brasil e México" (2014). Disponível em: https://storify.com/fffaby/brasil-e-mexico.

Reiser, R. (2001). A history of instructional design and technology – Part II: A History of Instructional Design. *ETR&D*, *49*(2), 57-67.

Sawaya, M. R. (1999). *Dicionário de Informática e Internet.* São Paulo: Nobel.

Setti, R. (2011). *Storify permite a criação de histórias por meio da colagem de informações extraídas das redes sociais*. Disponível em: http://oglobo.globo.com/sociedade/tecnologia/storify-permite-criacao-de-historias-por-meio-da-colagem-de-informacoes-extraidas-das-redes-sociais-2790746#ixzz3EG91GfxT.

Souza, L. P., & Santos, S. A. (2007). Problemas matemáticos abertos e o predomínio da calculadora. In *VI Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências (ENPEC)*. Belo Horizonte: Abrapec. *Anais...*

Storify (2014). *Site.* Disponível em: https://storify.com/

Togni, A. (2007). *Construção de funções em matemática com o uso de objetos de aprendizagem no Ensino Médio Noturno* (Tese de Doutorado em Informática na Educação). Instituto de Informática na Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Torrezzan; C.A.W., & Behar, P. A. (2009). Parâmetros para construção de materiais educacionais digitais do ponto de vista de design pedagógico. In P. A. Behar (Org.), *Modelos pedagógicos em Educação a Distância.* Porto Alegre: Artmed.

Valente, J. A., & Canhette C. C. (1993). LEGO-Logo: Explorando o conceito de *design*. In J. A. Valente (Org.), *Computadores e Conhecimento: Repensando a Educação.* Campinas: Unicamp.

O estudo do Teorema Fundamental das Curvas Planas utilizando o GeoGebra

André Lúcio **Grande**
Faculdade de Tecnologia de Mauá
Brasil
andremath@uol.com.br
Larissa de Oliveira **Nunes**
Faculdade de Tecnologia de Mauá
Brasil
nuneslari21@gmail.com
Marlon Polaz da **Silva**
Faculdade de Tecnologia de Mauá
Brasil
marlonpolaz@gmail.com

Resumo

Esta oficina visa efetuar o estudo de algumas propriedades geométricas das curvas planas parametrizadas diferenciáveis no sentido de encontrar qual é o seu invariante geométrico, o que constitui a essência do Teorema Fundamental das Curvas Planas (TFCP). Para tal estudo, será utilizado o software GeoGebra como recurso computacional auxiliar,o qual possibilita uma manipulação algébrica, geométrica e numérica de forma dinâmica e interativa dos objetos matemáticos. Como fundamentação teórica serão utilizados alguns conceitos ligados ao papel da intuição e da lógica na construção do conhecimento matemático formulados pelo filósofo e matemático francês Henri Poincaré (1854 – 1912). Este trabalho se constitui como sendo do tipo qualitativo, tendo como procedimentos metodológicos a discussão de questões sobre o objeto matemático de estudo bem como a exploração e manipulação de curvas planas por meio do GeoGebra procurando compreender as ideias envolvidas no TFCP.

Palavras chave: Curvas Planas, Parametrização, GeoGebra, Curvatura, Teorema Fundamental das Curvas Planas.

Introdução

Esta oficina originou-se como fruto de nossa experiência em salas de aula ao lecionar dentre outras disciplinas Cálculo Diferencial e Integral (CDI) para os cursos de graduação em Tecnologia.Durante algumas aulas, ao discutir com alguns alunos funções tais como polinomial de primeiro e segundo graus, exponencial, logarítmica e trigonométrica, ao apresentar a representação gráfica de tais funções, os estudantes tiveram curiosidade de saber diferenciar o "formato" do gráfico de uma função quadrática de uma exponencial ou trigonométrica, por exemplo, do ponto de vista geométrico e não algébrico, ou seja, como caracterizá-las de segundo

propriedades geométricas. Isso me fez refletir sobremaneira em grande medida sobre alguns tópicos abordados do CDI e suas possíveis interfaces com outras áreas.

O Cálculo Diferencial e Integral (CDI) constitui um importante domínio do conhecimento matemático, sendo que essa disciplina ocupa um lugar de destaque nos cursos em que ela é ministrada, além de ser utilizada nos vários ramos da Matemática. Dentre eles, a Geometria Diferencial de um modo geralfaz um tratamento de curvas e superfícies por meio do CDI e possui aplicações em diversas áreas tais comoFísica, Engenharia, Tecnologia e Astronomia.

Carmo (2012) considera a Geometria Diferencial sob dois aspectos: o estudo local das curvas e superfícies com o uso do CDI e como as propriedades locais influenciam nas propriedades globais do objeto de estudo. As propriedades locais são aquelas que não pertencem à forma do objeto geométrico em questão como um todo, mas somente pertencem às vizinhanças de um ponto desse objeto. Temos, por exemplo, a curvatura de uma curva como propriedade local das curvas e superfícies. Já as propriedades globais consideram o objeto geométrico na sua totalidade, como, por exemplo,a dimensão de uma curva ou o fato da mesma ser aberta ou fechada.

O estudo da Geometria Diferencial permite a aplicação de diversos conceitos matemáticos, tais como curvas no plano e no espaço e superfícies, funções diferenciáveis, derivada e integral, paralelismo, ortogonalidade e operações entre vetores, além de inter-relacionar diversos ramos da Matemática, como o Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica e Álgebra Linear. Sua importância pode ser reiterada segundo Albuquerque (2004):

> Sem dúvida, a geometria diferencial joga um papel excepcional, mesmo na matemática, toda se tal se pudesse considerar, porque afinal ela conjuga muitas e variadíssimas das matérias da álgebra e da análise. Aparece nas soluções de problemas de várias variáveis reais ou complexas, tratadas como espaços geométricos de dimensão qualquer, ou nos problemas de variáveis discretas, tratadas como abstrações das anteriores (referimo-nos às variedades algébricas); informa-nos sobre as propriedades intrínsecas da morfologia do espaço e suas medidas. (Prefácio do autor, 2004).

Ainda com relação ao seu estudo, o autor reitera que a Geometria Diferencial obriga uma profunda reflexão sobre os conceitos e leva-nos a formulação de novas ideias e teorias, à descoberta de estruturas geométricas antes não imaginadas ou sequer procuradas.

Dentre alguns conceitos abordados num curso de Geometria Diferencial, o estudo das curvas planas, por exemplo, pode englobar alguns elementos que se inter-relacionam, tais como:

- o movimento de um ponto no plano que gera uma curva utilizando alguns conceitos de Cinemática e Dinâmica em Física;
- o estudo do contexto histórico que envolve a gênese e o desenvolvimento do objeto matemático de estudo;
- a exploração do conceito de vetores e suas operações no $\mathbb{R}^2$e $\mathbb{R}^3$.
- o envolvimento de diversas áreas da Matemática como Cálculo Diferencial e Integral, Geometria Analítica e Álgebra Linear, dentre outras.

No que tange às pesquisas em Educação Matemática sobre o ensino e aprendizagem de alguns tópicos da Geometria Diferencial observou-se uma escassez de trabalhos e pesquisas ligados ao assunto, o que se pode sugerir a possibilidade de investigações e uma maior

exploração do tema em sala de aula por parte dos professores, com uma ampla gama de aplicações e conteúdos que podem ser envolvidos em seu estudo.

Leivas (2009) em sua pesquisa defende a possibilidade de "geometrizar" o currículo de Licenciatura em Matemática, sendo que a imaginação, intuição e visualização podem ser exploradas por meio da Geometria Diferencial e da Geometria Analítica. Para o autor a derivada de uma função, por exemplo, pode ser aplicada e interpretada no estudo da Geometria Diferencial como um vetor tangente em um ponto de uma curva ou no caso de uma superfície pode-se associar o estudo das derivadas parciais como dois vetores linearmente independentes no plano tangente num ponto dessa superfície.

A Matemática é uma ciência que se utiliza do raciocínio lógico-dedutivo, entretanto em muitas situações, no tocante ao ensino de seus conceitos, não são explorados alguns aspectos cognitivos como a intuição, a imaginação, o uso de recursos gráficos e geométricos, principalmente no processo de construção do conhecimento, sendo o tratamento dos objetos matemáticos feito de maneira axiomática.

Além da possibilidade de relacionar diversos conteúdos, por meio do contexto histórico e suas aplicações, a Geometria Diferencial permite a exploração da intuição geométrica e da analogia com conceitos ligados à Física por meio da elaboração de conjecturas e hipóteses objetivando a construção do conhecimento matemático, sendo que o tratamento desses objetos se torna, com isso, uma valiosa experiência no âmbito do ensino e aprendizagem da Matemática. Esses elementos serão levados em consideração e discutidos de acordo com o referencial teórico que será apresentado a seguir.

Fundamentação Teórica

O filósofo e matemático francês Jules Henri Poincaré (1854 – 1912) defendia a intuição como uma ideia ou interpretação antecipada daquilo que se está procurando, constituindo-se de um sentimento que possibilita gerar hipóteses na constituição do conhecimento científico. O autor faz críticas à ciência concebida como absoluta e inquestionável, e discute a importância da intuição e da lógica nesse processo de construção do conhecimento matemático.

O autor discute em suas obras, como *A Ciência e a Hipótese* (1984), *O Valor da Ciência* (1995) e *Ciência e Método* (2004) alguns temas sobre o papel da intuição, da lógica e da hipótese na construção do pensamento cientifico.

Poincaré defendia a intuição como papel central na questão da criatividade e a invenção. A intuição, segundo o autor, é uma faculdade do espírito, cuja função é essencialmente heurística, pois para o mesmo, é pela intuição que se descobre e se inventa, mas é pela lógica que se justifica.

Com relação ao raciocínio intuitivo, o autor ressalta o apelo aos sentidos e à imaginação, também denominada de intuição sensível, com o uso de representações geométricas, por exemplo. Essa intuição, segundo ele, não pode nos dar a certeza, entretanto a mesma possui a propriedade de instrumento da invenção do conhecimento matemático.

Como exemplo, Poincaré (1995) considera a seguinte afirmação: "Se numa reta o ponto C está entre A e B e o ponto D esta entre A e C então o ponto D esta entre A e B". Para comprovar a veracidade de tal afirmação, somos levados ao recurso geométrico imaginando tal situação. Essa afirmação constitui-se como uma propriedade topológica da reta.

O autor discute a importância da Matemática refutando a mesma como uma ciência feita tendo como vista aplicações, destacando que a mesma pode estar ligada a muitas outras áreas. Para o mesmo, a Matemática tem um tríplice objetivo: deve fornecer um instrumento para o estudo da natureza; além disso, tem um objetivo filosófico e estético. No que diz respeito ao aspecto pedagógico, ou seja, do ensino da Matemática, o autor defende que "o objetivo principal do ensino da Matemática é o de desenvolver certas faculdades de espírito, das quais a intuição não é a mais importante".

Sobre o primeiro objetivo descrito pelo autor é que gostaríamos de nos ater e fomentar essa pesquisa, pois vários de seus ramos são imprescindíveis para a compreensão de inúmeros fenômenos ligados, por exemplo, à Física, que mesmo para o próprio autor, estabelece uma relação limítrofe e de "boa vizinhança" com a Matemática. Pode-se considerar que a Geometria Diferencial apresenta tais características de se relacionar com outras áreas como a Física assim como desenvolver algumas cognições como a intuição geométrica por parte dos estudantes.

Ainda sobre o uso da intuição geométrica, Poincaré (1995) cita o caso do matemático alemão Bernard Riemann (1826 – 1866), que apresentou algumas ideias intuitivas muito pertinentes que auxiliam a compreensão de alguns conceitos geométricos.

> Entre os geômetras deste século, dois nomes são especialmente ilustres; são aqueles dos dois cientistas que fundaram a teoria das funções – Weierstrass e Riemann. Weierstrass reduz tudo à consideração das séries e suas transformações analíticas; melhor dizendo, reduz a análise a uma espécie de prolongamento da aritmética; pode-se percorrer todos os seus livros sem nele encontrar uma figura. Riemann, ao contrário, recorre à geometria: cada uma de suas concepções é uma imagem que, uma vez compreendida seu sentido, ninguém pode esquecer. (Poincaré, 1995, p. 15).

No caso, por exemplo, de especificar distâncias, Riemann ao reformular alguns conceitos da Geometria procurou encontrar uma forma de medir a velocidade ao longo de uma trajetória numa variedade. Segundo o autor o Cálculo oferece um meio automático de medir os comprimentos das curvas, assim como a álgebra e a trigonometria nos fornece insumos de se medir ângulos.

Em Geometria Diferencial, O Teorema Fundamental das Curvas Planas estabelece qual é o invariante geométrico das curvas planas diferenciáveis parametrizadas, a menos sua posição do plano. Esse teorema engloba vários elementos cujo estudo pode sugerir o raciocínio intuitivo, tais como equações paramétricas, vetores tangente e normal, comprimento de arco, transformações rígidas.

Apesar de a Geometria Diferencial pertencer ao escopo da Matemática Pura, pretendemos mostrar que o estudo de alguns tópicos como o Teorema Fundamental das Curvas Planaspode emergir dessa forma algumas situações pertinentes no contexto do ensino e aprendizagem da Matemática.

Diante desse cenário, esta oficina objetiva realizar um estudo de algumas curvas planas utilizando um recurso computacional auxiliarcomo forma de introdução ao estudo da Geometria Diferencial.

Selecionamos o software GeoGebra para a exploração das propriedades gráficas e geométricas dos objetos matemáticos, visando trabalhar com os estudantes a ideia intuitiva das propriedades locais por meio da Geometria Dinâmica, o que pode contribuir para o aluno formular conjecturas e testar hipóteses sobre alguns resultados.

Por Geometria Dinâmica pode-se entender como a geometria assistida por computador, em que os objetos matemáticos, como retas, ângulos e triângulos, podem ser movidos e manipulados, ao contrário da geometria em que os objetos são construídos com instrumentos euclidianos, como régua não graduada e compasso.

Nessa oficina pretendemos desenvolver por meio da construção de algumas curvas planas parametrizadas diferenciáveis utilizando o GeoGebra algumas propriedades geométricas dessas curvas, por meio de ideias intuitivas, formulação de hipóteses e conjecturas procurando responder aos seguintes questionamentos:

- O que é uma curva plana?
- Quais as propriedades locais e globais de uma curva plana?
- Como caracterizar uma curva plana? Quais são os seus invariantes geométricos?

Para responder tais questões, abordado o Teorema Fundamental das Curvas Planas, que nos fornece justamente como se caracteriza uma curva plana, a menos de sua posição no plano, por meio de um conceito importante que pode ser estudado tanto em Geometria Diferencial quanto no CDI, como a noção de curvatura de uma curva.

Entretanto, para a compreensão desse conceito, serão apresentados a seguir algumas definições e teoremas que constituem algunstópicos de Geometria Diferencial.

Alguns elementos da Geometria Diferencial

Para o estudo das curvas planas no $\mathbb{R}^2$, vamos apresentar alguns conceitos algébricos e geométricos necessários para o desenvolvimento dessa oficina.

Uma variedade é um espaço que pode ser descrito localmente através de coordenadas, sendo o número de coordenadas ou o número de direções independentes necessárias para representar todos os pontos próximos de um ponto dado num objeto chamado de dimensão da variedade. Esse número de direções pode ser compreendido intuitivamente como o número observado por alguém que "viva" sobre a variedade, e não o número de dimensões necessárias para conter o objeto. No caso das curvas planas, sua dimensão é igual a um.

Sobre a dimensionalidade, Poincaré (1995) fez uma análise, mesmo que de forma intuitiva, sobre uma definição a respeito desse conceito. O autor define essa noção da seguinte maneira:

> É bem a mesma ideia; para dividir o espaço, é preciso cortes que chamamos de superfícies; para dividir as superfícies, é preciso cortes que chamamos de linhas; para dividirmos as linhas, é preciso cortes que chamamos de pontos; não se pode ir mais longe, e o ponto não pode ser dividido, o ponto não é contínuo; então as linhas, que podemos dividir com cortes que não são contínuos, serão contínuos de uma dimensão; as superfícies, que podemos dividir com cortes contínuos de uma dimensão, serão contínuas de duas dimensões; enfim, o espaço, que podemos dividir com cortes contínuos de duas dimensões, será um contínuo de três dimensões. (p. 49).

Variedades como curvas e superfícies, por exemplo, podem ser alteradas ou "deformadas" segundo uma transformação topológica. Por transformação topológica de uma figura A em outra A` define-se como sendo uma correspondência

$$p \leftrightarrow p'$$

entre os pontos p de A e p' de A'com as seguintes propriedades:

1) Correspondência bijetiva, ou seja uma correspondência dos pontos uma a um de A para A' e vice-versa.
2) Correspondência contínua em ambas as direções. Isso significa que se tomarmos os pontos p e q de A e deslocarmos p de modo que p e q se aproximam de zero, então a distância entre p' e q' de A' se aproxima de zero e vice-versa.

Em síntese, de um ponto de vista topológico, as curvas planas são denominadas variedades de dimensão um, podendo ser classificadas em abertas ou fechadas, conforme a figura a seguir. Essas curvas podem ser obtidas por meio de outras segundo transformações ou "deformações contínuas", e que a transformação inversa e reversível e contínua. Sendo assim, qualquer curva aberta pode ser deformada e transformada numa reta, assim como curvas fechadas transformadas circunferência.

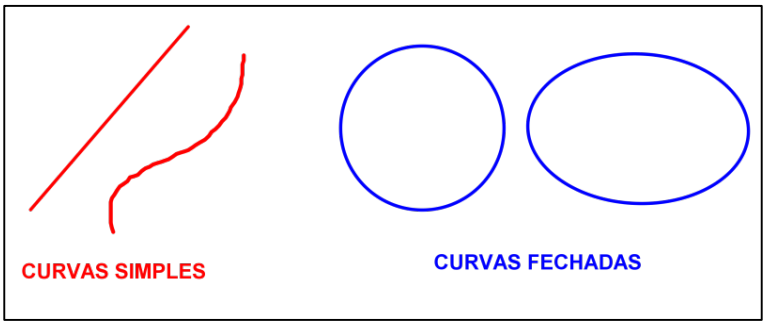


Figura 1. Classificação das curvas

Entretanto, no estudo das curvas planas, a pergunta que pode ser feita: qual o invariante geométrico de uma curva plana transformada por um movimento rígido? Uma transformação é chamada de movimento rígido se qualquer par de pontos de imagem tem a mesma distância que o par correspondente de pontos da imagem inversa. Por transformações rígidas temos, por exemplo, as isometrias tais como rotações e translações.

A Geometria Elementar lida com grandezas tais como comprimentos, ângulos e áreas que não são alteradas pelos movimentos rígidos. Entretanto esses movimentos são considerados casos especiais de transformações topológicas.

Para um estudo geométrico das curvas planas utilizando-se do CDI, uma curva no plano é descrita dando-se as coordenadas dos seus pontos como funções de uma variável independente. Tais curvas são chamadas de curvas parametrizadas diferenciáveis e a variável independente definida num intervalo real denomina-se parâmetro.

No caso das curvas planas diferenciáveis, por meio do estudo local de uma curva munido de uma métrica (no nosso caso utilizaremos a usual, ou seja, a euclidiana) podemos segundo sua curvatura caracterizá-la, a menos a sua posição no plano.

Algumas definições descritas segundo Tenenblat (2008) serão apresentadas a seguir no intuito de analisar algumas características das curvas planas.

Curva Parametrizada Diferenciável

Definição. Uma *curva parametrizada diferenciável* do plano é uma aplicação diferenciável α de C^{∞}, de intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$ em $\mathbb{R}^2$. A variável $t \in I$ é dita *parâmetro* da curva, e o subconjunto de $\mathbb{R}^2$ dos pontos $\alpha(t), t \in I$, é chamado *traço* da curva.

Essa definição também pode ser expressa pela seguinte representação: uma curva parametrizada diferenciável do plano é uma aplicação

$$\alpha: I \to \mathbb{R}^2$$

$$t \longmapsto \alpha(\mathrm{t}) = (\mathrm{x}(\mathrm{t}), \mathrm{y}(\mathrm{t}))$$

onde as funções $\mathrm{x}(\mathrm{t})$ e$\mathrm{y}(\mathrm{t})$ são diferenciáveis de classe C^{∞}.

Vetor Tangente; Curva Regular

Definição. Seja $\alpha: I \to \mathbb{R}^2$ uma curva parametrizada diferenciável que, a cada $t \in I$, associa $\alpha(\mathrm{t}) = (\mathrm{x}(\mathrm{t}), \mathrm{y}(\mathrm{t}))$. O vetor

$$\alpha'(\mathrm{t}) = (\mathrm{x}'(\mathrm{t}), \mathrm{y}'(\mathrm{t}))$$

é chamado vetor tangente a α em *t*.

Definição. Uma curva parametrizada diferenciável $\alpha: I \to \mathbb{R}^2$ é dita regular se $\nabla\, \mathrm{t} \in I, \alpha'(\mathrm{t}) \neq 0$.

Comprimento de Arco; Parametrização pelo Comprimento de Arco

Definição. Seja $\alpha: I \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular e fixemos t_0 e t_1 do intervalo *I.* A aplicação

$$s(t) = \int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(\mathrm{t})|\, dt$$

é denominada função comprimento de arco da curvaα a partir de t_0. Essa função é diferenciável de classe C^{∞}, pois α é uma curva regular.

Proposição. Uma curva regular$\alpha: I \to \mathbb{R}^2$ está parametrizada pelo comprimento de arco se, e só se, $|\alpha'(\mathrm{t})| = 1$. Consequentemente, o comprimento do arco da curvaα a partir de t_0a t_1é igual a $t_1 - t_0$, isto é:

$$s(t) = \int_{t_0}^{t_1} |\alpha'(\mathrm{t})|\, dt = t_1 - t_0$$

Fórmula de Frenet. Curvatura

Se $\alpha: I \to \mathbb{R}^2$ é uma curva regular, parametrizada pelo comprimento do arco *s*, então o conjunto de vetores $t(s), n(s)$ é dito *referencial de Frenet* e satisfaz as equações

$$\begin{cases} t'(s) = k(s)n(s) \\ n'(s) = -k(s)t(s) \end{cases}$$

O vetor$t(s) = (\mathrm{x}'(\mathrm{s}), \mathrm{y}'(\mathrm{s}))$ é o vetor tangente unitário e $n(s) = (-y'(\mathrm{s}), \mathrm{x}'(\mathrm{s}))$é o vetor ortogonal a $t(s)$.

O fator de proporcionalidade $k(s)$é chamado curvatura de α em s. A curvatura de uma curva plana regular mede, intuitivamente, o quanto a curva se “dobra” no plano se constitui no invariante geométrico das curvas, de acordo com o teorema a seguir.

Teorema Fundamental das Curvas Planas

a) Dada uma função diferenciável $k(s)$, $s \in I \subset \mathbb{R}$, existe uma curva regular $\alpha(s)$, parametrizada pelo comprimento de arco *s*, cuja curvatura é $k(s)$.

b) Se duas curvas $\alpha(s)$ e $\beta(s)$ têm a mesma curvatura, então diferem por sua posição no plano, isto é, existe uma rotação *L* e uma translação *T* em $\mathbb{R}^2$ tal que:

$$\beta(s) = L\big(\alpha(s)\big) + T(\alpha(s))$$

Destacamos que o Teorema Fundamental das Curvas Planas nos mostra que o único invariante geométrico de uma curva plana a menos de sua posição no planoé a curvatura.

Lembrando que a curva $\alpha(s)$ citada anteriormente é única quando fixamos $\alpha(s_0)= p_0$ e $\alpha'(t) = v_0$,ondev_0 é um vetor unitário de $\mathbb{R}^2$.

Metodologia e Procedimentos

Este trabalho apresenta as características de uma pesquisa qualitativa, tendo como procedimentos metodológicos a exploração das propriedades geométricas locais das curvas planas parametrizadas diferenciáveis utilizando como ferramenta auxiliar o software GeoGebra.

Procuraremos nessa oficina investigar esses conceitos descritos anteriormente por meio do software Geogebra buscando caracterizar as curvas planas com a participação dos sujeitos da aprendizagem com a formulação de conjecturas e hipóteses de maneira intuitiva utilizando os recursos do software de maneira interativa.

O GeoGebra permite ainda de maneira dinâmica explorar tais conceitos sem recorrer à excessiva manipulação algébrica necessária para se obter a parametrização da curva pelo comprimento de arco e, posteriormente, sua curvatura.

A oficina será ministrada no Laboratório de Informática, com o número máximo de 20 participantes, tendo como público-alvo de um modo geral estudantes e professores dos cursos de Ciências Exatas e áreas afins. Os participantes utilizarão o software GeoGebra, onde as curvas planas serão construídas e manipuladas. Além disso, os alunos receberão material impresso contendo informações e instruções para o desenvolvimento das tarefas.

Abordaremos os conceitos relacionados ao estudo das curvas planas apresentando como fundamentação teórica as ideias ligadas ao uso da intuição e do rigor segundo o filósofo e matemático francês Henri Poincaré que em seus trabalhos procura elucidar a importância do uso da intuição no processo de ensino e aprendizagem, particularmente na Matemática, destacando a preocupação com as faculdades intuitivas dos alunos exigidas na aprendizagem e no contato inicial com os objetos matemáticos.

Objeto Matemático

No estudo proposto nessa oficina, inicialmente os participantes responderão num protocolo entregue no início da oficina, mesmo de maneira provisória, as seguintes questões:

- O que é uma curva plana?
- Quais as propriedades locais de globais de uma curva plana?
- Como caracterizar uma curva plana? Quais os seus invariantes geométricos?

Tais questões podem ser respondidas e discutidas num primeiro momento, em que podem ser dados exemplos e contraexemplos no sentido de se estabelecerem conjecturas e hipóteses a respeito dos conceitos envolvidos.

Pode-se discutir também quais são as vantagens e desvantagens de se realizar um estudo das curvas planas por meio de sua parametrização ao invés, por exemplo, de sua expressão analítica dada por uma função, quer seja explícita ou implícita.

A seguir apresentaremos o exemplo da construção no GeoGebra de uma curva plana parametrizada diferenciável, que pode ser estudada tanto de maneira algébrica quanto geométrica.

Vamos estudar algumas características geométricas da parábola $y = x^2$Convém destacar que para a referida curva não temos somente essa parametrização possível cujo traço é igual à referida parábola e que não é o objetivo desse estudo discutir as propriedades geométricas da parábola tais como reta diretriz, foco ou vértice da mesma.

As equações paramétricas dessa curva podem ser dadas segundo a aplicação:

$$\alpha: I \to \mathbb{R}^2$$

$$t \longmapsto \alpha(\mathrm{s}) = (\mathrm{s}, s^2)$$

O vetor tangente será dado por$\alpha'(\mathrm{t}) = (1, 2\mathrm{t})$ e o comprimento de arco será obtido por meio de $l(s) = \int_{s_0}^{s} \sqrt{1 + 2s^2}\, ds$, o que torna o cálculo de sua parametrização pelo comprimento de arco extremamente trabalhoso do ponto de vista algébrico para o estudo do referencial de Frenet e dacurvatura da curva.

Todavia o GeoGebra apresenta uma gama de recursos e comandos que facilitam a obtenção de tais elementos, e o seu estudo passa a ser realizado de maneira dinâmica e interativa.

Para isso, basta criarmos as funções $a(s) = t$ e $b(s) = s^2$ e definirmos a curva: $c: I \to \mathbb{R}^2$

$$c(s) = \big(a(s), b(s)\big)$$

com$I = [-5,5]$, por exemplo.

Podemos ainda criar um ponto P(a(s),b(s)) que pertença a curva, teremos o traço segundo a figura a seguir:

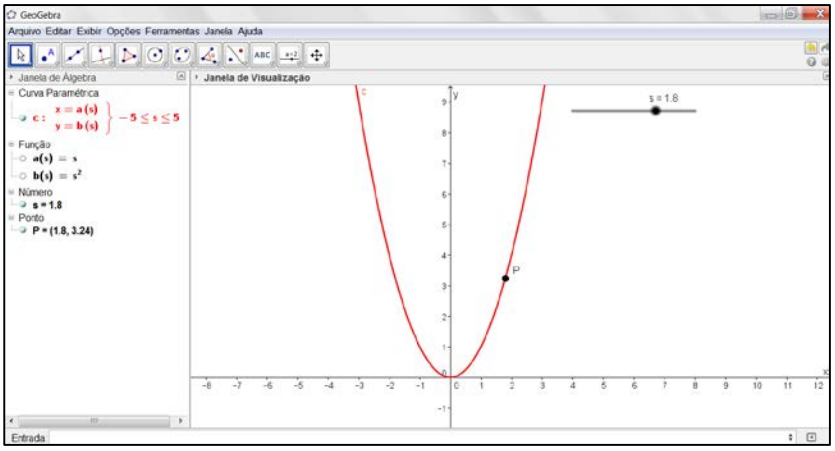


Figura 2. Curva c(t) parametrizada diferenciável

O GeoGebra permite obter os vetores *v (tangente)*, *n (normal)*, e seus respectivos vetores unitários u_1e$u_2$que constituirão o referencial de Frenet. Além disso, é possível determinar a curvatura *k* da curva c no ponto P, conforme a figura a seguir:

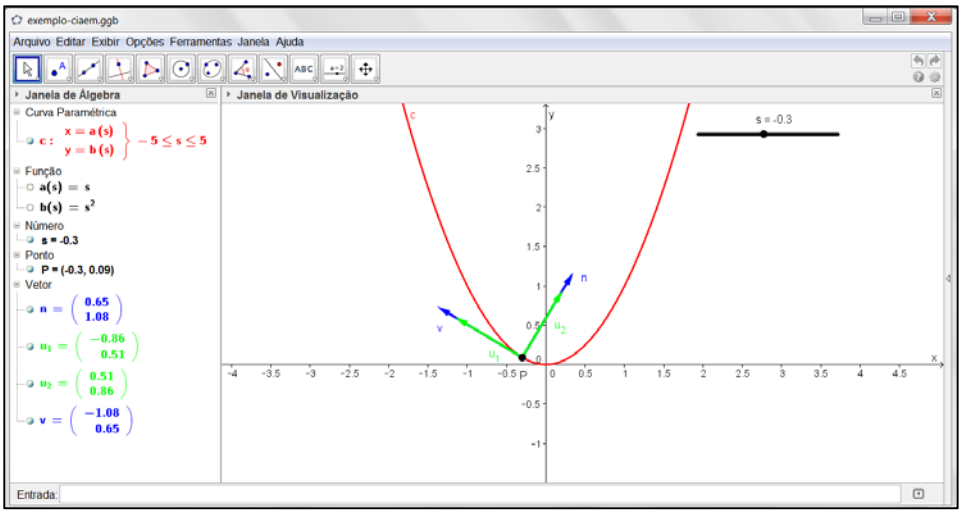


Figura 3. Referencial de Frenet para a curva c.

Com o valor da curvatura k da curva é possível construir um gráfico *k x s* por meio de um ponto C de coordenadas variáveis (s, k) que representa a variação da curvatura em função do parâmetro t e observar com isso o que ocorre com a forma da curva c quando temos o valor de k positivo, negativo, crescente ou decrescente, conforme a figura a seguir.

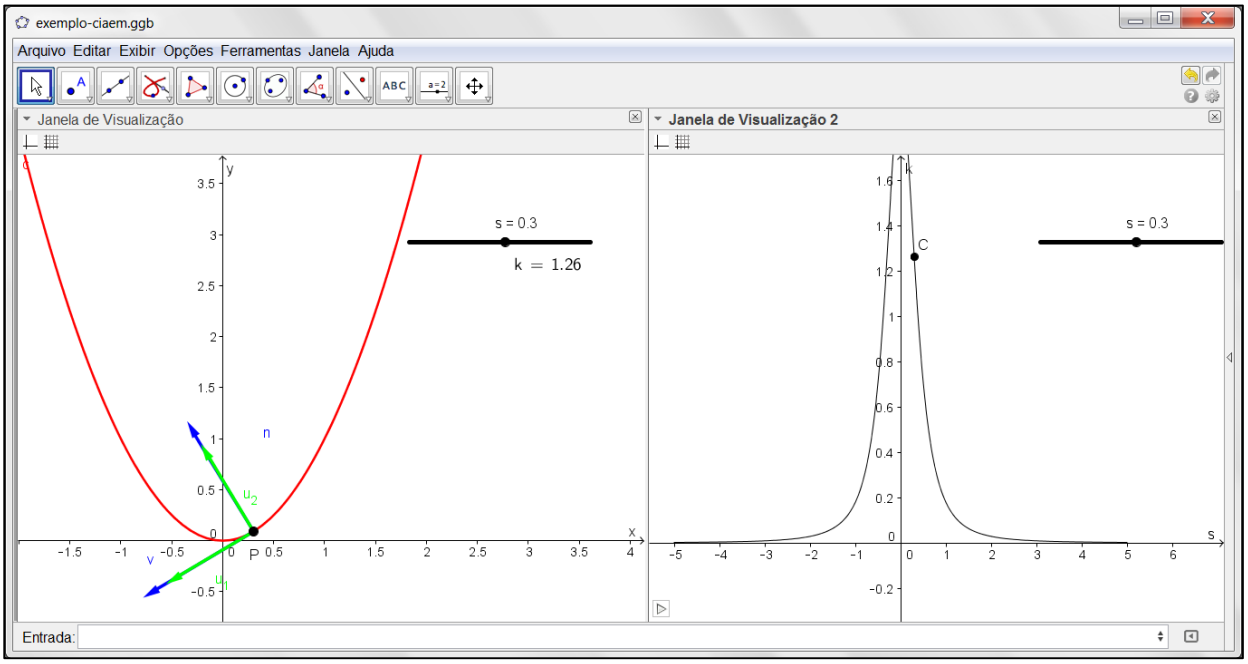


Figura 4. Curvatura k da curva c

Essa construção permite, por exemplo, discutir nas aulas de CDI, em grande medida, a questão da monotonicidade de uma função por meio de sua representação gráfica e pelos sinais das derivadas de primeira e segunda ordem da função.

Uma exploração extremamente producente que pode ser realizada a partir do gráfico k x t seria procurar esboçar uma curva plana que represente a curvatura dada.

Para estudar o Teorema Fundamental das Curvas Planas de uma maneira intuitiva podemos construir outras curvas a partir da curva $c(t) = (t, t^2)$ por meio de transformações rígidas e questionar o que acontece com o valor da curvatura bem como os vetores tangente e normal

Esse procedimento se configura num exemplo de se procurar formalizar a essência do teorema de que o único invariante geométrico de uma curva plana, a menos sua posição no planosob transformações rígidas é a sua curvatura.

A partir daí pode-se realizar manipulações com outras curvas planas parametrizadas como forma de explorar os resultados encontrados.

Para se formalizar os conceitos abordados nessa oficina, as questões propostas inicialmente podem ser retomadas e discutidas provavelmente objetivando compreender melhor as ideias envolvidas no teorema.

A proposta dessa oficina pode ser estendida, por exemplo, no estudo de curvas no $\mathbb{R}^3$, o que possibilita a produção de inúmeras questões conforme procuramos aqui descrever, o que pode ser apresentada em uma próxima oportunidade.

Referências e bibliografia

Albuquerque, R. (2004). *Introdução à Geometria Diferencial*. Departamento de Matemática. Universidade de Évora, Portugal.

Araújo, P. V. (2008). *Geometria Diferencial*. Coleção Matemática Universitária. 2 ed. Rio de Janeiro: IMPA.

Carmo, M. F. (2013). *Introdução ao curso de curvas e superfícies*. Rio de Janeiro: IMPA.

Courant, R. e Robbins, H. (2000). *O que é matemática? Uma abordagem elementar de métodos e conceitos*. Tradução de Adalberto da Silva Brito. Rio de Janeiro: Ciência Moderna.

Creswell, J. W. (2010). *Projeto de pesquisa: métodos qualitativo, quantitativo e misto*. Tradução de Magda França Lopes. 3ª. ed. Porto Alegre: Artmed.

Grande, A. L. (2013). *Um estudo epistemológico do Teorema Fundamental do Cálculo voltado ao seu ensino*. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.

Guidorizzi, H. L. (2014). *Curso de Cálculo*, v.1-4. Rio de Janeiro: Gen, 2014.

Leivas, J. (2009).*Imaginação e Visualização: a Riqueza de Possibilidades da Abordagem Geométrica no Currículo de Cursos de Licenciatura de Matemática*. (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Paraná. Paraná.

Poincaré, H. (2008). *Ensaios Fundamentais*. Rio de Janeiro: Contraponto.

Poincaré, H. (2004). *Science and Method*. Translated by Francis Maitland. New York: Barnes e Noble Books.

Poincaré, H. (1995). *O valor da ciência*. Tradução de Maria Helena Franco Martins. Rio de Janeiro: Contraponto.

Poincaré, H. (1984). *A Ciência e a Hipótese*. Tradução Maria Auxiliadora Kneipp. Brasília: Editora UNB.

Stewart, J. (2009). *Cálculo* – Volume 1. Tradução da 6° edição norte-americana. São Paulo: Cengage Learning.

Tenenblat, K. (2008). *Introdução àGeometria Diferencial*. Brasília: Universidade de Brasília.

O jogo das lâmpadas e sistemas lineares

Rubens Carlos **Viriato** Júnior
Universidade de Brasília
Brasil
rubens.viriato@gmail.com
Raquel Carneiro **Dörr**
Universidade de Brasília
Brasil
raqueldoerr@gmail.com

Resumo

Esta oficina apresenta em quatro atividades práticas, resoluções de situações problemas construídas usando um jogo de lâmpadas. Seu objetivo principal é, a partir do uso dos princípios básicos de contagem no conjunto dos números inteiros, construir sistemas de equações lineares de ordem dois ou três e apresentar fundamentos das operações soma e subtração nos conjuntos munidos das relações de congruências módulos 2 e 3 da Álgebra. Essa apresentação é feita motivada pelo jogo e sem o formalismo e abstração do tema. A metodologia é a de resolução de problemas em grupos e discussão mediada pelo aplicador. Essa oficina poderá incentivar educadores matemáticos de todos os níveis educacionais na elaboração de material inédito e criativo para suas turmas.

Palavras chave: números inteiros, somas, subtração, sistemas lineares, congruências.

O Jogo das Lâmpadas e Sistemas Lineares

Aos alunos de cursos de Licenciaturas das universidades brasileiras é oferecida a possibilidade de participarem do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID). Esse programa visa o aperfeiçoamento e valorização da formação de professores para a educação básica e oferece bolsas aos participantes para atuarem em escolas de educação básica da rede pública de ensino.

Os projetos do PIBID contribuem para a inserção dos licenciandos no contexto das escolas públicas desde o início da sua formação acadêmica e consistem no desenvolvimento de atividades didático-pedagógicas sob a orientação de um docente da licenciatura da área e de um professor da escola. O projeto é fomentado pelo Ministério da Educação através de Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES)[1].

A atividade apresentada nesta oficina foi produzida no âmbito do projeto denominado "Escola de Matemática", desenvolvido no Departamento de Matemática da Universidade de Brasília para integrar o Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES). De acordo com Grebot, Gaspar e Dörr (2013), o PIBID da Universidade de Brasília (UnB) tem como objetivo principal:

[1] Informações sobre o PIBID: https://www.capes.gov.br/educacao-basica/capespibid

> ... a criação de um espaço de ensino-aprendizagem da matemática em que os alunos de licenciatura em matemática possam experimentar propostas diferentes para trabalhar os conteúdos matemáticos e refletir sobre o papel do aluno e do professor no processo de ensino e aprendizagem.

As atividades foram aplicadas durante um ano, entre o segundo semestre de 2013 e o primeiro de 2014. Foram realizados encontros semanais de duas horas em uma escola pública de ensino médio no Distrito Federal na cidade de Brasília. Os alunos foram selecionados pelos professores de Matemática da escola e o grupo foi formado por um máximo de 15 estudantes. As atividades que compõem a oficina foram construídas por um estudante do curso de licenciatura em Matemática da UnB sob a orientação de uma professora de Matemática da mesma instituição.

Objetivo Geral

Apresentar, por meio de uma situação-problema, noções básicas sobre sistemas de equações lineares e suas aplicações.

Objetivos Específicos

- Interpretar uma situação-problema;
- Construir equações lineares em duas ou três variáveis a partir de uma situação- problema;
- Introduzir somas e subtrações em módulo 2 e em módulo 3 como aplicações de sistemas lineares.
- Sugerir atividades a partir de situações-problemas para educadores matemáticos.

Referencial Teórico

Os temas matemáticos centrais deste trabalho dizem respeito Álgebra, com ênfase na construção de sistemas de equações lineares.

A álgebra linear é um dos assuntos centrais da Matemática básica e, para muitos autores, é considerada mais importante que o Cálculo Diferencial e Integral (Strang, 2010). Tal afirmação justifica-se, segundo o autor, pelo fato dela ser base das Ciências, Engenharias e Administração, áreas que alcançaram uma abrangência significativa no mercado de trabalho atual.

Por sua importância no futuro dos estudantes que pretendem ingressar em cursos superiores que exigirão conhecimento prévio dos elementos de álgebra linear ou que a usarão como ferramenta no estudo do Cálculo Diferencial, é importante, como educadores, nos perguntarmos, de que modo a matéria deve ser introduzida para que estimulemos os estudantes na sua aprendizagem?

No caso particular da resolução de sistemas lineares, a matéria é introduzida no Brasil nos anos finais do ensino fundamental e seu estudo é estendido ao Ensino Médio.

A proposta de trabalho apresentado nesta oficina traz uma metodologia alternativa ao estudo de sistemas lineares que contribui para a promoção de uma participação ativa dos participantes, por meio do uso de grupos (Dörr, 2013). O trabalho em grupo e a construção dos resultados por meio de uma resolução passo a passo, contribuem para a diminuição da tendência tecnicista que predomina em nossas salas de aulas de matemática em todos os níveis educacionais e que apresenta a matemática como um conjunto de técnicas, regras e

algoritmos (Fiorentini, 1995). D'Ambrosio (1996) enfatiza que esse tipo de professor tem seus dias contados.

As situações problemas propostas foram construídas com base nos jogos lineares finitos, uma aplicação de sistemas lineares, presente no livro "Álgebra Linear" de David Poole (2006). Ao invés de tratarmos cada lâmpada presente nas atividades como um vetor-coluna, ideia chave para a resolução da atividade apresentada no livro de David Poole, foi associada a cada lâmpada uma equação linear de duas ou até três variáveis, adaptando-a assim, para uma aplicação a sistemas lineares tratados no final do ensino fundamental e ensino médio. Logo, conteúdos matemáticos exigidos nas atividades permitem seu uso nos anos finais do ensino fundamental e em todos os anos do ensino médio.

Outro tema que surge nas atividades é a introdução, de modo intuitivo, da congruência módulos 2 e 3. Não é necessária a ênfase neste tópico. Entretanto, do modo como é apresentado, contribuirá para promoção da descoberta e poderá desafiar a curiosidade e independência dos alunos sobre o tema. De acordo como Polya (1995), o professor que tem a oportunidade em sala de aula de promover esses sentimentos em seus alunos, deixará marcas não só em seu aprendizado matemático, mas também na sua mente e seu caráter.

Os problemas propostos nesta oficina motivam estudantes ao estudo de temas matemáticos considerados, em geral, abstratos para a maioria deles e muitas vezes apresentados de modo desconectado das aplicações. As atividades poderão ser usadas por professores para motivar ou introduzir sistemas lineares e trabalhar temas não vistos no ensino básico como congruências módulos 2 e 3 (Domingues & Iezzi, 1979; Santos,1998), oferecendo ao aluno, por meio de uma aplicação prática, conhecimentos matemáticos não incluídos nas diretrizes curriculares.

Metodologia

As atividades devem ser realizadas em grupos de 2 a 4 pessoas. Os participantes devem interpretar a situação proposta em cada atividade, e em seguida, seguir os comandos do enunciado sob a coordenação do professor que deverá mediar os trabalhos, esclarecendo dúvidas, controlando o tempo e fechando cada atividade por meio de comentários sobre os resultados e as conclusões e ressaltando descobertas feitas pelos grupos durante o processo. O nível das atividades é crescente. Os participantes devem registrar todas as suas respostas e resoluções.

Promovemos aqui a comunicação oral e escrita entre os participantes como instrumento importante no processo de ensino e aprendizagem da matemática.

Atividade 1

Considere duas lâmpadas, uma ao lado da outra, que podem estar acesas ou apagadas. Embaixo de cada lâmpada existe um botão que muda o estado das lâmpadas da seguinte forma: o botão X, que está embaixo da primeira lâmpada, muda o estado da primeira lâmpada e também da segunda lâmpada. O botão Y, que está embaixo da segunda lâmpada, muda o estado somente da segunda lâmpada. Sendo assim, considerando que as duas lâmpadas estavam inicialmente apagadas, temos a seguinte tabela que retrata as mudanças de estados das lâmpadas sempre que apertamos um dos botões.

Tabela 1
Atividade 1

	Lâmpada A	Lâmpada B
Botão X	1	0
Botão Y	1	1

Fonte: elaborada pelos autores.

Responda os itens abaixo, com a resposta final sendo 0 para o estado final da lâmpada apagada e 1 para o estado final da lâmpada acesa.

1 – Apertando uma vez o botão X e uma vez o botão Y, qual o estado final de cada lâmpada, sendo que as duas estavam inicialmente apagadas?

2 – Apertando duas vezes o botão X e uma vez o botão Y, qual o estado final de cada lâmpada, sendo que a primeira estava inicialmente apagada e a segunda acesa?

3 - Complete agora a tabela a seguir. Nela, temos quantas vezes o botão X e o botão Y foram apertados e, também, qual o estado final de cada lâmpada, sendo que, em todos os casos, as lâmpadas estavam inicialmente apagadas. Siga os exemplos:

Tabela 2
Continuação Atividade 1

	Botão X	Botão Y	Lâmpada A	Lâmpada B
1	0	1	0	1
2	1	0	1	1
3	1	2		
4	1	3		
5	3	2		

Fonte: elaborada pelos autores.

4– Observando a tabela anterior, o que podemos concluir quando apertamos duas vezes seguidas apenas o botão X ou o botão Y?

5- Qual a quantidade mínima de vezes que devemos apertar cada botão para que a primeira lâmpada esteja acesa e a segunda lâmpada apagada? Considere que as duas lâmpadas estejam inicialmente apagadas.

Atividade 2

Nas atividades anteriores, os resultados finais das lâmpadas eram 0 ou 1. Podemos estabelecer as operações soma e subtração no conjunto {0,1} de modo que as respostas das operações também pertençam a esse conjunto.

Complete a tabela a seguir:

Tabela 3
Atividade 2

	Soma	**Módulo**	**Resultado**
1	1 + 1	2	0
2	1 + 2	2	1
3	2 + 0	2	
4	3 + 1	2	

5	2 + 3	2
6	4 + 6	2
7	11 + 6	2
8	10 + 7	2
9	7 + 6	2
10	12 + 9	2

Fonte: elaborada pelos autores.

1 - O que concluímos acerca dos resultados da tabela acima?

2 - A mesma relação citada na questão anterior, que é válida para a soma em módulo 2, é válida, também, para a subtração em módulo 2. Siga os exemplos e complete a tabela da subtração em módulo 2 a seguir:

Tabela 4
Atividade 2

	Subtração	**Módulo**	**Resultado**
1	2 – 0	2	0
2	3 – 2	2	1
3	2 – 3	2	1
4	4 – 2	2	0
5	2 – 4	2	

Fonte: elaborada pelos autores.

3 – Construa a definição de soma e subtração em {0,1}.

Atividade 3

Considere três lâmpadas, uma ao lado da outra, que podem estar acesas ou apagadas. Embaixo de cada lâmpada existe um botão que muda o estado das lâmpadas da seguinte forma: o botão X, que está embaixo da lâmpada A, muda o estado da lâmpada A e também da lâmpada B. O botão Y, que está embaixo da lâmpada B, muda o estado da lâmpada B e da lâmpada C. E o botão Z, que está embaixo da lâmpada C, muda o estado da lâmpada A e da lâmpada C. Sendo assim, considerando que todas as lâmpadas estavam inicialmente apagadas, temos a seguinte tabela que retrata as mudanças de estados das lâmpadas sempre que apertamos um dos botões.

Tabela 5
Atividade 3

	Lâmpada A	**Lâmpada B**	**Lâmpada C**
Botão X	1	0	1
Botão Y	1	1	0
Botão Z	0	1	1

Fonte: elaborada pelos autores.

Responda os itens abaixo, com a resposta final sendo 0 para o estado final da lâmpada apagada e 1 para o estado final da lâmpada acesa.

1 – Apertando uma vez o botão X, uma vez o botão Y e, em seguida uma vez o botão Z, qual o estado final de cada lâmpada, sendo que todas estavam inicialmente apagadas?

2 – Apertando duas vezes o botão X, uma vez o botão Y e duas vezes o botão Z, qual o estado final de cada lâmpada, sendo que a lâmpada A estava inicialmente apagada e a lâmpada B e a lâmpada C acesas?

3 - Complete agora a tabela a seguir. Nela, temos quantas vezes o botão X, o botão Y e o botão Z foram apertados e, também, qual o estado final de cada lâmpada, sendo que, em todos os casos, as lâmpadas estavam inicialmente apagadas. Siga os exemplos:

Tabela 6
Continuação Atividade 3

	Botão X	**Botão Y**	**Botão Z**	**Lâmpada A**	**Lâmpada B**	**Lâmpada C**
1	0	1	0	0	1	1
2	1	1	1	0	0	0
3	1	1	0			
4	0	1	1			
5	1	1	3			

Fonte: elaborada pelos autores.

4 - É possível descobrir a quantidade mínima que devemos apertar os botões das três lâmpadas para conseguirmos um determinado estado final para cada lâmpada? Para isso, monte três equações, uma equação para cada lâmpada, igualando as equações ao estado final desejado de cada lâmpada, considerando X, Y e Z a quantidade de vezes que o botão da lâmpada A, da lâmpada B e da lâmpada C foram apertados, respectivamente.

5 - As três equações do item anterior formam um sistema linear, no qual, por meio de sua resolução, podemos determinar a quantidade mínima de vezes que devemos apertar cada botão, dado um estado final de cada lâmpada. Sendo assim, quantas vezes devemos apertar cada botão para que a lâmpada A e a lâmpada C estejam acesas e a lâmpada B apagada? Considere que todas as lâmpadas estejam inicialmente apagadas.

6 - Qual a quantidade mínima de vezes que devemos apertar o botão de cada lâmpada para que a lâmpada A esteja apagada, a lâmpada B acesa e a lâmpada C também acesa? Considere que todas as lâmpadas estejam inicialmente apagadas.

7 - Existe solução, ou seja, existe uma quantidade mínima de vezes para apertamos cada botão para que todas as lâmpadas estejam acesas? E para que a lâmpada A esteja apagada, a lâmpada B acesa e a lâmpada C apagada?

Atividade 4

Considere, agora, três lâmpadas, uma ao lado da outra, que podem estar acesas com a cor branca, acesas com a cor azul ou acesas com a cor vermelha. Embaixo de cada lâmpada existe um botão que muda o estado das lâmpadas da seguinte forma: o botão X, que está embaixo da Lâmpada A, muda o estado das três lâmpadas. O botão Y, que está embaixo da lâmpada B, muda o estado da primeira lâmpada e da segunda lâmpada. E o botão Z, que está embaixo da lâmpada C, muda o estado da segunda e da terceira lâmpada. Seja 0 a representação para a cor branca, 1 para a cor azul e 2 para a cor vermelha.

1 – Apertando uma vez o botão X, uma vez o botão Y e uma vez o botão Z, qual é será a cor de cada lâmpada, sendo que a A e a C estavam inicialmente brancas e a B estava inicialmente vermelha?

2 - Qual será a cor de cada lâmpada quando apertamos três vezes o botão X, quatro vezes o botão Y e uma vez o botão Z? Considere que a lâmpada A estava inicialmente vermelha, a lâmpada B branca e a lâmpada C azul.

3 – O que acontece quando apertamos três vezes seguidas apenas o mesmo botão? E quando apertamos quatro vezes?

4 - Observe e complete a tabela a seguir. Nas duas primeiras linhas, temos quantas vezes o botão X, o botão Y e o Botão Z foram apertados e, também, qual o estado final de cada lâmpada. Considere que em todos os casos as lâmpadas estavam inicialmente com a cor branca.

Tabela 7
Atividade 4

	Botão X	**Botão Y**	**Botão Z**	**Lâmpada A**	**Lâmpada B**	**Lâmpada C**
1	1	1	1	2	0	2
2	2	2	2	1	0	1
3	2	1	2			
4	3	1	1			
5	2	1	3			

Fonte: elaborada pelos autores

5 – Qual o número mínimo de vezes que devemos apertar o botão X, o botão Y e o botão Z para que tenhamos as seguintes cores das lâmpadas: azul para a lâmpada A, branca para a lâmpada B e branca para a lâmpada C? Considere que a lâmpada A estava inicialmente vermelha, a lâmpada B inicialmente branca e a lâmpada C inicialmente azul.

6 - Usando a mesma ideia de congruência módulo 2, complete a tabela a seguir com a subtração em módulo 3.

Tabela 8
Continuação Atividade 4

	Soma	**Módulo**	**Resultado**
1	7 – 3	3	
2	8 – 5	3	
3	10 – 5	3	
4	3 – 0	3	
5	4 – 3	3	

Fonte: elaborada pelos autores.

7 - É possível associar a cada lâmpada uma equação nas variáveis X, Y e Z, igualando essas equações ao estado final desejado de cada lâmpada? Caso afirmativo, quais são essas equações?

8 - Por meio das equações anteriores, qual a quantidade mínima de vezes que devemos apertar o botão X, o botão Y e o botão Z para obtermos as seguintes cores das lâmpadas: vermelha para a lâmpada A, azul para a lâmpada B e branca para a lâmpada C? Considere que todas as lâmpadas estejam inicialmente na cor branca.

9 - Qual a quantidade mínima de vezes que devemos apertar o botão de cada lâmpada para que a lâmpada A esteja azul, a lâmpada B vermelha e a lâmpada C branca? Considere que todas as lâmpadas estejam inicialmente na cor branca.

10 - Qual a quantidade mínima de vezes que devemos apertar o botão de cada lâmpada para que a lâmpada A esteja azul, a lâmpada B vermelha e a lâmpada C azul? Considere que todas as lâmpadas estejam inicialmente na cor branca.

11 - Qual a quantidade mínima de vezes que devemos apertar o botão de cada lâmpada para que a lâmpada A esteja azul, a lâmpada B azul e a lâmpada C vermelha? Considere que todas as lâmpadas estejam inicialmente na cor branca.

12 - Existe solução, ou seja, a quantidade mínima de vezes que devemos apertar cada botão para que as lâmpadas tenham a seguinte configuração em seu estado final: a lâmpada A branca, a lâmpada B azul e a lâmpada C vermelha, considerando que todas elas estavam brancas em seu estado inicial?

Conclusões e Perspectivas de Futuro

As atividades propostas nesta oficina foram elaboradas para integrarem as atividades do projeto PIBID no Departamento de Matemática da Universidade de Brasília.

Buscando cumprir com os objetivos do projeto, construíram-se situações problemas que foram aplicadas em grupos de alunos do Ensino Médio numa escola da rede pública de ensino do Distrito Federal. Os conteúdos matemáticos escolhidos para a as atividades são relevantes para os estudantes do ensino médio e, se bem apreendidos, servirão de auxílio no futuro para aqueles que em seus cursos superiores necessitem de cursarem disciplinas de álgebra ou que a usem como fundamento.

Na aplicação das atividades, o licenciando pode experimentar o cotidiano da sala de aula de uma instituição pública, participou da elaboração de uma atividade pedagógica prática, articulando assim a teoria acadêmica com a prática, cumprindo com os objetivos do PIBID, mas principalmente, foi criada uma oportunidade de desenvolvimento do licenciando como estudante e como futuro educador matemático.

Uma vez que as atividades foram realizadas em grupos, observou-se um maior envolvimento dos estudantes com as resoluções das situações problemas, se comparado com as atividades rotineiras de resolução de exercícios em sala de aula. A situação prática inicial das lâmpadas, instigou a curiosidade dos participantes, promoveu a criatividade e a descoberta de resultados importantes.

Consideramos que determinados conteúdos em matemática devam ser introduzidos por meio do uso de situações problemas. Tal prática ajuda a desmistificar a matéria como algo sem utilidade e gera interesse pela disciplina.

Como projeto futuro os autores pretendem construir o jogo das lâmpadas em material concreto para incrementar a aplicação das atividades.

Para o bom andamento durante a aplicação das atividades, é importante a atenção e a interpretação dos enunciados. Assim, contribuímos para o desenvolvimento da leitura e interpretação dos problemas.

Concluímos que as atividades propostas pela oficina contribuem para o alcance dos objetivos colocados inicialmente e que elas poderão auxiliar educadores matemáticos que buscam alternativas para a aula tradicional. A oficina traz uma sugestão de trabalho que poderá ser aplicada em salas de aulas de outros educadores. Esperamos que ao serem aplicadas, sejam motivadoras e os estimulem na construção de suas próprias atividades.

Referências e bibliografia

D'Ambrosio, U. (1996). *Educação Matemática: da teoria à prática.* Campinas: Papirus.

Domingues, H., & Iezzi, G. (1979). *Álgebra Moderna*. São Paulo: Atual.

Dörr, R. C. (2013). Uso de Grupos Colaborativos: Relato de Experiências e Perspectivas de Uso no Ensino Superior. *Atas VII CIBEM Congresso Iberoamericano de Educação Matemática.* Montevideo.

Fiorentini, D. (1995). Alguns Modos de Ver e Conceber o Ensino da Matemática no Brasil. *Revista Zetetiké*, *3*(4) .

Grebot, G., Gaspar, M.T. J. & Dörr, R. C. (2013). Experiências matemáticas e experiências com alunos na formação de professores: desdobramentos do programa PIBID/MAT da Universidade de Brasília. *Atas VII CIBEM Congresso Iberoamericano de Educação Matemática.* Montevideo.

Polya, G. (1995). *A Arte de Resolver Problemas.* Rio de Janeiro: Interciência.

Poole, D. (2006). *Álgebra Linear.* São Paulo: Pioneira Thomson Learning.

Santos, J. P. O. (1998). *Introdução à Teoria dos Números.* Rio de Janeiro: SBM, Sociedade Brasileira de matemática.

Strang, G. (2010). *Álgebra Linear e suas aplicações.*São Paulo: Cengage Learning.

León, N. (2009). *Teaching statistics for the real life*. Comunicación oral. CIAEM, Canadá

León, N. (2011). Un recorrido de lo certero a lo probable por los caminos de la ciencia y de nuestra acción ciudadana. *Enseñanza de la Matemática.* Número especial.

López, L. (2004). Directivos con nuevas tecnología de información y comunicación. *Espacios*, *25*(3)

Matemáticas (S/F). Documento en línea. Disponible en www.gobiernodecanarias.org/educacion/udg/ord/...8matematicas.pdf

Morin, E. (2000). *Los siete saberes necesarios a la educación del futuro*. IESALC/UNESCO, Caracas.

Morin, E. (2011). *La vía para el futuro de la humanidad*. Paidos, España.

Morin, E. Ciurana, E. y Motta, D. (2002). *Educar en la era planetaria. El pensamiento complejo como método de aprendizaje en el error y la incertidumbre humana*. Editorial Gedisa S.A, Valladolid, España.

Peralta, R. (1999). Educación y transdisciplinariedad. Un desafío para el pensamiento complejo en América Latina. *RELEA. Revista Latinoamericana de Educación Avanzada, 17*, 17-30.

Ramos, R. (s/f). *Del riesgo a la incertidumbre y el miedo*. Documento en línea. Disponible: www.unavarra.es/puresoc/pdfs/c-salaconfe/ramos2.PDF

Sánchez, E. y Candín, P. (2010). Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a tareas de distribución binomial. *Educación Matemática Pesquiza, 12*(3) 598-618.

Schield, M**.** (2008). *Statistical literacy and Mathematical thinking*. Comunicación oral presentada en ICME 9. Monterrey

Shaughnessy, J., Chance, B. y Kranendock, H. (2009). *Focus in high school mathematics: Reasoning and making sense in statistics and probability*. Reston, VA: NCTM.

Ugas, G. (2007). *La ignorancia educada y otros escritos*- Lito Formas, San Cristóbal, Venezuela.

Zaldívar, M. (2009). Propuesta de temas estimuladores para el desarrollo de la flexibilidad y fluidez del pensamiento en la enseñanza de la física. ODISEO. Revista *electrónica de Pedagogía, 6*(12).

Zaldivar, M., Sosa, Y. y López, J. (2006). Definición de la flexibilidad de pensamiento desde la enseñanza. *Revista Iberoamericana de Educación, 37*(4).

Pensamiento matemático y pensamiento estadístico: herramientas para enfrentar la incertidumbre

Nelly **León** Gómez
Universidad Pedagógica Experimental Libertador-Instituto Pedagógico de Maturín
Venezuela
nellyleong@hotmail.com

Resumen

Siguiendo a Eurípides, Edgar Morin alerta sobre el fin de las certezas en el conocimiento humano e incluye el principio de incertidumbre como directriz de la educación del futuro. Ciertamente, el hombre debe estar preparado para enfrentar la incertidumbre inherente a la complejidad de la realidad natural y humana. Sustentamos en este minicurso cómo la Educación Matemática puede contribuir a este propósito mediante el desarrollo del pensamiento matemático y del razonamiento estadístico y probabilístico, además del fomento de la creatividad y la afectividad; logrando así habilitar al ciudadano para la toma de decisiones apropiadas en situaciones de azar con base en informaciones inciertas, sopesando riesgos y beneficios.

Palabras clave: Incertidumbre, azar, certeza, pensamiento matemático, pensamiento estadístico.

Introducción

Morin (2000), en su libro titulado "los siete saberes necesarios a la educación del futuro", sintetiza los grandes ejes orientadores de las vías hacia donde deben canalizarse las transformaciones de la educación. En ellos incluye el de "Enfrentar las incertidumbres", haciendo un reconocimiento a la prevalencia de situaciones inciertas a lo largo de la historia de la humanidad y enfatizando la necesidad del hombre de enfrentar, a través de la educación, las incertidumbres de lo real, del conocimiento y de la acción.

Pero, ese futuro al que Morin hace referencia hace ya más de una década, es hoy; de allí la imperiosa necesidad de una formación que eduque al hombre en la conciencia de la existencia de riesgos y azares, más que certezas, en todas y cada una de las acciones que emprenda y de las situaciones y fenómenos en los que se vea involucrado en su vida cotidiana, laboral, familiar, que deberá afrontar con la toma de buenas y oportunas decisiones mediante la utilización de estrategias flexibles y fácilmente adaptables a entornos cambiantes, producto de la variabilidad inherente a sus elementos constituyentes y a las interrelaciones entre ellas, (Morin, 2000)

Ahora bien, cuál es el papel de la Educación Matemática en este compromiso actual de la formación de ciudadanos aptos para enfrentar exitosamente una vida plena de incertidumbre o, como lo ha dicho este autor, una realidad que puede visualizarse como un océano de incertidumbre salpicado por archipiélagos de certeza.

En este escrito trataré de hacer un acercamiento a una posible aproximación al educar para la incertidumbre a través de ciertas vertientes factibles de trabajar desde la Educación Matemática, como son el desarrollo de:

Las habilidades del pensamiento matemático
El pensamiento y el razonamiento estadístico
Una didáctica que privilegie el aprendizaje contextualizado
El componente de la afectividad en la enseñanza y el aprendizaje.

Conviviendo con la incertidumbre

A pesar de que las evidencias han apuntado siempre a la presencia de lo incierto tanto en el macro como en el micro cosmos, hemos vivido por mucho tiempo bajo el hechizo de la certeza como posibilidad real (León, 2011). Hace ya muchos siglos que Eurípides alertó al respecto al decir "Juguetes de la suerte, bogamos en un mar de incertidumbre", pensamiento retomado por Morín, cuando metafóricamente se refiere al conocimiento como un navegar en un océano de incertidumbre en el cual flotan archipiélagos de certeza; certezas que son tales hasta que sucumben ante la emergencia de nuevos conocimientos que las despojan de esa cualidad.

Obviamente, los islotes que forman esos archipiélagos son innumerables y muchos de ellos majestuosos, pero aun así diminutos ante la inmensidad del océano que no es más que una alegoría a nuestra ignorancia. Cada día se produce conocimiento amplio y valioso, lo que dinamiza la ciencia y sus saberes. ¿Podemos tener entonces la esperanza de ir generando más islas que lleguen a cubrir la superficie oceánica?. Bajo el paradigma de la certeza, la ignorancia se enfrentaba eliminándola a través de la producción de un conocimiento que diera respuestas válidas, confiables, universales y libres de toda duda a las interrogantes planteadas. Pero, en las condiciones actuales de incerteza, los nuevos conocimientos, al dar respuestas relativas y temporales a las inquietudes de las que se derivan, a su vez generan ignorancia sobre sus alcances, sus consecuencias y su interrelación con otros conocimientos (Innerarity, 2008). Entonces, la respuesta a la pregunta anterior parecer ser no; ciertamente la ciencia nos proporciona innumerables saberes pero que de ninguna manera cubren las fuentes de incertidumbre, a medida que se van cubriendo focos de ignorancia, van surgiendo otros sobre las cuales actuar, por lo tanto nos toca aprender a convivir con ella, aceptarla, comprenderla tolerarla y hasta aprovecharnos de ella, convirtiéndola en una "ignorancia educada" (Ugas, 2007), en el sentido que podamos decidir que ignorancia hemos de abordar como relevante y cual podemos obviar por parecer menos significativa.

La incertidumbre no es algo pasajero, es más bien un rasgo distintivo de nuestra cultura y de nuestra época. La incertidumbre no es una anomalía que deba erradicarse sino una categoría esencial en la comprensión del mundo actual. (Coronado, s/f). La incertidumbre se manifiesta en momentos de toma de decisiones sobre la base de informaciones no confiables al cien por ciento.

A estas alturas ya está claro que el futuro es incertidumbre por la misma complejidad de la naturaleza humana, aun así muchos se resisten a aceptarlo y se aferran a resquicios de certezas. Tendemos a esperar que ocurran las cosas buenas y a desechar de nuestro pensamiento aquello que no deseamos. Lo posible puede volverse imposible. ¿Cuántas enfermedades siguen sin tener cura a pesar de los grandes esfuerzos de los investigadores médicos por hallarla y vivimos con la esperanza de que algún día esto ocurrirá? En contraposición, lo inesperado ocurre, algunas veces con resultados maravillosos como el descubrimiento, por serendipity, de la penicilina.

Enfrentando la incertidumbre

Tres elementos sugiere Morin (2000) para enfrentar las incertidumbres: una buena decisión, la conciencia del riesgo y las estrategias, todos ellos vinculados entre sí. Manejar con propiedad estos tres elementos requiere una formación que reconozca la complejidad como

filosofía de vida del hombre actual: complejidad que devela una incertidumbre ineludible, no sólo en el campo de la producción del conocimiento sino en el seno mismo del accionar del ciudadano común.. En todo aquello en que éste se involucre actuarán una multiplicidad de elementos y circunstancias imposibles de conocer en su totalidad y de ponderar individualmente o de manera aislada por la trama de interconexiones que entre ellos se produce, derivando en una incertidumbre perenne imposible de obviar, pero factible de afrontar.

Usualmente tendremos que actuar en condiciones inciertas; la elección que tomemos ante una situación dada motoriza la acción, acción que no estará exenta de riesgos. Calificativos como imprevisto, inesperado, azar, desviaciones están inevitablemente asociados a cualquier decisión que se tome y consecuentemente a cualquier acción que se emprenda (Innerarity, 2008). Toda decisión es una apuesta a una entre varias opciones, no está exenta de riesgos por lo incierto de sus alcances y sus consecuencias, de allí la pertinencia de un pensamiento educado para enfrentar las incertidumbres: un pensamiento flexible, reversible y recursivo.

Este tipo de pensamiento nos habilita para aprovechar las oportunidades que se nos presentan en un momento decisorio, con la puesta en acción de estrategias flexibles adaptables al entorno, que es cambiante por naturaleza, pensando siempre en términos de probabilidades.

El riesgo siempre tiene dos caras: una positiva asociada a los logros, y otra negativa referida a pérdidas o daños (Ramos, s/f). Con acciones y estrategias adecuadas disminuimos la probabilidad de que se muestre la cara negativa a la vez que incrementamos las posibilidades de éxito o que aflore la cara positiva. Afortunadamente, la incertidumbre no nos guía hacia la debacle. En este sentido rescato uno de los siete principios enunciados por Morin, Ciurana y Motta (2002) cuando reflexionan sobre la irremediable confrontación dialógica entre la esperanza y la desesperanza ante el incierto devenir de la humanidad. Me refiero al principio del salvataje, según el cual cada vez que surge una situación de peligro simultáneamente emergen alternativas para sobreponerse y sobrellevarlo con éxito, siempre y cuando se reconozcan las posibilidades y se actúe con propiedad evitando que emociones como el miedo o el temor nos paralicen y obnubilen nuestra capacidad de pensar y razonar y nuestro sentido de la intuición.

Enfrentando las incertidumbres desde la educación Matemática

Para muchos pensadores la educación es la mejor arma para enfrentar la incertidumbre pues incita a reflexionar sobre las dudas y problemas que se presentan tanto en el ámbito de las ciencias como en el acontecer cotidiano, conduciendo a la toma de buenas decisiones ante lo inesperado y lo incierto.

Una educación con este propósito debe hacer suyo el principio de la incertidumbre de la condición humana. Mas no se trata de incluir la incertidumbre del acontecer social y personal como un contenido programático en los pensa de estudio, sino más bien que la concepción curricular comulgue con este principio; es decir, que se adopte un currículo que obligue a la pedagogía a vencer la certeza y hacer emerger ante los ojos del educando una realidad compleja en la que la incertidumbre es algo inminente, brindándole las herramientas que lo formen para satisfacer sus necesidades, desarrollar sus capacidades y responder adecuadamente ante las contingencias de la vida.

Una educación para la incertidumbre es una educación para asumir retos en lugar de evitarlos, para argumentar correctamente, para la flexibilidad cognitiva y la crítica, para el diálogo entre los saberes desde las diversas disciplinas.

¿Cómo podemos entonces comprometer a la educación matemática en la formación de un ciudadano que pueda convivir exitosamente en un mundo arropado por la incertidumbre?. Aceptando que hasta ahora la formación matemática tradicional lleva a pensar en las matemáticas en términos de exactitud y de certezas, acercar una respuesta a esta interrogante no es tarea fácil, pues implica enfrentar esta concepción a los planteamientos que hemos venido haciendo hasta ahora.

Durante mucho tiempo el sueño de grandes matemáticos ha sido garantizar plenamente el rigor y la certeza en el edificio de las matemáticas. Los trabajos de Bertrand Russel son una muestra palpable de ello. No obstante, las formulaciones de Godel en cuanto a la consistencia y la completitud de algunos sistemas formales mostraron grietas en ese edificio que hicieron tambalear sus estructuras y llevaron a reflexionar sobre las más preciadas cualidades de la Matemática: la exactitud y la certidumbre.

El pensamiento matemático es formal y abstracto; esto permite no sólo la sistematización del conocimiento disciplinar sino también su contextualización en términos de capacidad de matematizar situaciones expresándolas en términos numéricos y relacionales. La ordenación, la clasificación, la medición, las estimaciones, las cuantificaciones, el establecimiento de relaciones, la inferencia, como manifestaciones del pensamiento matemático se convierten en herramientas del cerebro para enfrentar situaciones de diversa índole. No podemos negar que el pensamiento matemático es analítico, no obstante no se puede considerar reductor pues también se acompaña de la síntesis y la generalización permitiendo ir del todo a las partes y de las partes al todo, siendo ésta una manifestación de la reversibilidad de pensamiento.

Estas características de reversibilidad y de flexibilidad, acompañadas de un bueno manejo de las emociones y de un despliegue de creatividad, promueven la capacidad de resolver problemas en ambientes de incertidumbre con la formulación de hipótesis y el establecimiento de inferencias sobre qué esperar de cada una de ellas, es decir mostrar posibles futuros y facilitando elementos para la toma de decisión confrontando los riesgos y los beneficios.

Tal toma de decisiones deberá hacerse con base en información incierta, convirtiéndose el manejo de la información en punto clave en el mundo actual. Con los avances en las tecnologías de la información y comunicación, la información es instantánea y prolífera, pero también susceptible a manipulaciones e interpretaciones sesgadas, razones por las cuales es indispensable un buen desarrollo del pensamiento estadístico en todos los ciudadanos.

Sustentamos, entonces, que la educación matemática puede contribuir a una formación para la incertidumbre a través de: el desarrollo de algunas habilidades del pensamiento matemático como la flexibilidad, la reversibilidad; la contextualización; el fomento del componente afectivo y la creatividad; y el desarrollo del pensamiento estadístico.

Flexibilidad del pensamiento

Entendemos la flexibilidad como apertura que permite el despliegue de posibilidades, la proliferación de trochas y caminos, el atreverse a transitarlas. Es un antónimo de la rigidez que coarta, que amarra, que impide. La flexibilidad es dinámica, incita a la acción, contrario a la rigidez que es estática y paralizante. Como cualidad de la mente facilita a las personas su adaptación a medios cambiantes y el aprovechamiento de una diversidad de recursos al enfrentar situaciones problemáticas. Por el contrario, una persona con una mente rígida está esclavizada a "sus métodos" y por lo general se encuentra desorientada en circunstancias de incertidumbre.

La flexibilidad de pensamiento se evidencia en una actitud abierta y de interacción constante con los demás y con el entorno. Permite al individuo, en su aproximación a la Matemática, no encerrarse en ella y en sus mecanismos de rigor sino más bien establecer diálogo con otras disciplinas científicas y con las artes (Peralta, 1999, p. 27).

La flexibilidad de pensamiento es una habilidad de primera importancia en la actividad matemática, tanto en la generación de conocimiento) como en su aplicación en la solución de problemas. Pero, es una cualidad no solamente inherente a situaciones altamente matematizadas sino también a circunstancias de la vida común que ameriten visualizar y considerar posibilidades diversas de actuación ante cambios imprevistos que se puedan suscitar.

Precisamente, la flexibilidad es esa particularidad del pensamiento que se manifiesta en la multiplicidad de recursos y estrategias que el ser pensante pone en juego ante los aconteceres de la vida. Una persona recursiva, es decir que es capaz de usar todos los recursos disponibles en la solución de un problema o al tomar una decisión, es una persona con una mente flexible que va moldeando según cambia la realidad circundante.

Promover la flexibilidad como habilidad del pensamiento es una tarea pendiente de la educación matemática (Zaldivar, 2009) que sólo puede cumplirse si se mira la matemática desde su conceptualización como resolución de problemas. Si revisamos las tendencias en la enseñanza de la Matemática desde hace ya algún tiempo encontraremos la resolución de problemas como contenido, como actividad y como metodología de enseñanza. Se enseñan diversos métodos de resolución de problemas, el profesor explica y resuelve problemas sobre los temas estudiados y asigna problemas por resolver a sus estudiantes. Con esto no se logra cumplir esa tarea pendiente. ¿Por qué?. Entre otras razones porque los métodos de resolución con frecuencia se enseñan como si fueran recetas aplicables a problemas similares a los que el profesor resolvió en clase, contribuyendo a reforzar certezas cognitivas y una idea de unicidad y homogeneidad procedimental: leer y entender el enunciado del problema para extraer los datos y las condiciones más que para comprenderlo, establecer un plan para resolverlo que casi invariablemente es el plan empleado por el profesor; aplicación del plan, que se limita a sustituir los nuevos datos en el ejemplo antes resuelto y concluir escribiendo "la respuesta" a la(s) pregunta(s).

Estos problemas "tipo", cerrados, de solución única, que se trabajan esporádicamente poco contribuyen a potenciar la flexibilidad de pensamiento como habilidad para tomar decisiones en situaciones de incertidumbre pues no hay ningún reto al intelecto y a la curiosidad del aprendiz. Problemas y actividades abiertas, por el contrario, requieren darle movilidad al intelecto, explorar en la estructura cognitiva aquellos conocimientos, estrategias, modos de actuar que puedan emplearse, asociando "el sentido de abstracción y el análisis con el sentido de la intuición y lo global" (Morin, 2011, p.252), en la búsqueda de diferentes resultados y soluciones posibles.

Veamos un ejemplo bien sencillo. En un primer momento se puede pedir a los niños que resuelvan un problema como el siguiente: "En una fiesta había una fuente con muchos caramelos de fresa y de naranja. Luis tomó de la fuente 4 caramelos de fresa y 5 de naranja. ¿Cuántos caramelos en total tomó Luis de la fuente?". Este es un problema cerrado que conduce a una única respuesta, pero que luego puede modificarse para llevarlo a una estructura abierta: "En una fiesta había una fuente con muchos caramelos de fresa y de naranja. Para realizar un juego, la payasita pidió a los niños que fueran a la fuente y tomara cada uno 9 caramelos. ¿Cuántos caramelos de cada sabor pudieron tomar los niños para completar sus 9 caramelos?, ¿Los tomaron todos de la misma manera?, ¿De cuántas maneras distintas podrían haber tomado los

caramelos?, ¿Cómo hiciste para saber cómo podían tomarse los caramelos?". La socialización posterior a la resolución individual podrá llevar de manera natural ante la primera pregunta a una respuesta a la segunda, pues las respuestas individuales seguramente diferirán; Si se van escribiendo en la pizarra las respuestas de los estudiantes, el total que se obtenga se podrá contrastar con las respuestas de los niños a la tercera interrogante. Para la última pregunta es de esperar respuestas válidas, intuitivas y hasta de razones personales, por ejemplo un niño puede argumentar que no puede escoger caramelos de naranja simplemente porque no le gustan.

En el campo de la geometría se podría sugerir como una primera actividad dibujar un rectángulo cuya base mida 6 cm y su altura 4 cm y luego calcular el área de ese rectángulo. Esta es una actividad cerrada de respuesta única que requiere conocimientos teóricos y habilidad manual para el dibujo, pero poca reflexión. Luego la actividad se puede transformar para hacerla un poco más retadora, pidiéndole a los estudiantes que dibujen un rectángulo cuya área sea 24 cm^2 y luego preguntar: ¿Puedes dibujar otro rectángulo con otras dimensiones pero que tenga esa misma área?, ¿Cuántos rectángulos distintos puedes dibujar que tengan esa misma área?, ¿Cómo sabes que esos son todos los rectángulos posibles de construir con área igual a 24 cm^2?, ¿cuántos de ellos tienen un perímetro igual a 20 cm?, finalmente, ordenar toda esta información en una tabla que permita verla con más claridad. (Adaptado de: creatividad y competencias matemáticas. Hoja de trabajo 14).

Obsérvese que en ambos ejemplos hay preguntas que buscan inquirir sobre el razonamiento de los estudiantes y sobre el proceso de solución por ellos seguidos, pues según Zaldívar, Sosa y López (2006), la manifestación de la flexibilidad de pensamiento se da en tres etapas de la resolución de un problema: en la planificación de la resolución, en el proceso y en el análisis de los resultados.

La flexibilidad de pensamiento implica que ante problemas de esta naturaleza, el estudiante pueda encontrar diferentes vías de solución, empleando incluso estrategias propias que no hayan sido propuestas por el docente. Como manifestación de un pensamiento ágil, el estudiante podrá encontrar expresiones matemáticas equivalentes y métodos alternativos de cálculo, tan importantes en la resolución de problemas (Matemáticas, s/f) y estas habilidades podrá extrapolarlas a situaciones no matemáticas fuera del aula: respuestas equivalentes a una misma situación, formas alternativas de abordar una misma circunstancia, diversidad de caminos para solucionar un problema en su cotidianidad de acuerdo a los recursos disponibles.

La flexibilidad de pensamiento es una habilidad que no se desarrolla de manera instantánea sino que se va logrando paulatinamente a largo plazo. El pensamiento de los niños más pequeños es flexible como condición innata para facilitar su aprendizaje. En las primeras etapas de la escolaridad, la mejor arma para coartar la libertad del niño es intentar meterlos a todos por un mismo carril, pues sin libertad no hay apertura ni flexibilidad. La opción es dejar que los niños se acerquen a la matemática de una manera natural sin pretender que toda actividad vinculada a esta materia la hagan mecánicamente siguiendo algoritmos que muchas veces no entienden.

Pensamiento Reversible

La reversibilidad es una cualidad del pensamiento que permite tener una visión global de un proceso a la vez que se tiene un conocimiento preciso de las partes y de la interrelación entre ellas. Así pues, permite resolver problemas considerando tanto las partes como la totalidad.

Al igual que la flexibilidad, es una particularidad del pensamiento que se logra en la medida que se trabaje de manera consciente a lo largo del tiempo, promoviendo la integración de

las partes aisladas de una situación en función de la comprensión global, pues un conocimiento disperso y fragmentado no muestra la realidad plenamente.

No obstante, la escuela enseña a compartimentar y no a ligar los conocimientos (Morin, 2000); hace énfasis en el análisis que consiste en separar las partes para conocer el todo. Frente a un problema complejo se sugiere en primer lugar descomponerlo en pequeños y sencillos problemas y solucionarlos aisladamente para así llegar a una solución global. Esta forma de pensar conduce a reducir lo complejo de la realidad, a intentar conocer un fenómeno a través del conocimiento aislado de sus componentes, lo que obviamente no podrá lograrse.

Para Lanz y Ferguson (2005), la reversibilidad del pensamiento se manifiesta en una condición cognitiva que descarta todo intento de razonamiento que no lleve a interconectar todo con todo. Por eso, esta cualidad del pensamiento está íntimamente ligada con la de globalización. El pensamiento globalizador es opuesto al pensamiento reductor. Parte de la consideración de que el todo es más que la suma de las partes, pues el todo tiene características que no se encuentran completamente en ninguna de sus componentes, pero a su vez, éstas tienen cualidades que pueden quedar arropadas cuando sólo se mira lo global. De allí que para lograr la globalización hay que tener a su vez la habilidad de reversibilidad del pensamiento que es lo que permite navegar en ambos sentidos: de las partes al todo y del todo a las partes en forma de bucle hasta llegar a una comprensión total del fenómeno de interés, por supuesto en su contexto.

En Matemática, la reversibilidad del pensamiento es la habilidad de hacer acciones opuestas de manera simultánea, como resolver un problema dado pero a la vez poder plantearlo a partir de resultados y preguntas apropiadas, seguir una secuencia en forma progresiva y regresiva, reconstruir una situación de principio a fin o bien del fin al principio.(Matemáticas, s/f)

1. Mencionamos a continuación algunas ideas que pueden propiciar esta habilidad de manera consciente en estudiantes de Educación Básica:
2. Reconstruir una historia en forma progresiva, es decir de principio a fin, a partir de las viñetas de un comic. Luego hacerlo en forma regresiva, es decir, del final al principio.
3. Enumerar las acciones que ellos realizan un día cualquiera desde que se levantan hasta que llegan a la escuela y luego hacerlo en sentido contrario.
4. Contar los números en sentido progresivo y en sentido regresivo, de uno en uno, de dos en dos, de tres en tres y así sucesivamente.
5. Resolver operaciones incompletas. Por ejemplo: $8 - \square + 5 = 10$
6. Para estudiantes más avanzados, resolver una ecuación en Z y luego, dada la solución, reconstruir el proceso algorítmico para llegar a la ecuación inicial, esto es seguir la secuencia en sentido contrario justificando cada paso.
7. Presentar problemas resueltos o demostraciones de proposiciones con algunos errores para que los estudiantes los identifiquen y justifiquen.
8. Presentar demostraciones incompletas para que los estudiantes las culminen, faltando en algunos casos las justificaciones de las conclusiones de algunos pasos de la demostración y en otros casos a partir de las justificaciones completar las premisas.
9. Completar tablas con faltantes en diversas columnas. Por ejemplo, el problema de construcción de un rectángulo de área igual a 24 cm^2 se puede ampliar completando la siguiente tabla:

Base (cm)	Altura (cm)	Perímetro (cm)
24	1	50
12	2	
8		22
	4	20
		20
	8	

Pensamiento estadístico

Usualmente la Estadística se ve como un conjunto de técnicas y procedimientos basados en cálculos matemáticos, aplicables a series numéricas en circunstancias muy específicas; sin embargo, la educación estadística tiene sentido en la medida que contribuye a desplegar una cultura estadística y a enfatizar el razonamiento estadísticos, elementos que Batanero, Díaz y Roa (2013) engloban en el concepto de sentido estadístico.

La alfabetización estadística, como parte de esa cultura, busca la formación de ciudadanos educados para participar en la sociedad de la información, consumidores críticos de informaciones numéricas contextualizadas, capaces de disentir, de tomar posición política y socialmente comprometidas en temas expresados en términos estadísticos y de comunicar resultados en los mismos términos (Gal, 2002; León, 2005; Schield, 2008).

El razonamiento estadístico es una forma de pensar que comprende el análisis de los problemas, la búsqueda de relaciones entre los datos y entre las conclusiones y el contexto, la evaluación de estrategias la capacidad para aplicar los diferentes momentos de la investigación estadística y la reflexión acerca de la plausibilidad de los resultados obtenidos.(Garfield, 2002; Shaughneddy, Chance y Kranendock, 2009).

El pensamiento estadístico es una filosofía o una forma de pensar que reconoce la incertidumbre y la variabilidad de los datos en su contexto y el impacto de estas dos condiciones en la toma de decisiones. Esto implica que el conocimiento conceptual de las técnicas del análisis estadístico y de la probabilidad no es un indicador suficiente de razonamiento estadístico, son necesarias además una comprensión de los mismos en situaciones contextualizadas y una mente flexible que lleve a asumir una actitud crítica frente a argumentos basados en datos e informaciones estadísticas.

Para Snee (1993), citado por López (2004) el pensamiento estadístico viene a estar constituido por una serie de principios y valores que posibilitan la identificación de procesos, su caracterización y cuantificación, el control y reducción de su variabilidad en términos de la toma de decisiones en cuanto a las acciones a seguir en situaciones inciertas.

La variación es una de las principales fuentes de incertidumbre en los diversos procesos y fenómenos. Una parte de dicha variación podrá ser controlada a través de la planificación y la manipulación de factores cuyos efectos se pueden estimar, pero siempre habrá una porción de ella debida al azar o a la falta de conocimiento preciso que se convierte en una incertidumbre verdadera y de allí que las conclusiones e inferencias se expresen en términos de probabilidad.

El razonamiento estadístico va de la mano del razonamiento probabilístico, entendiendo por éste “la manera de razonar que siguen los matemáticos o estadísticos para formular, interpretar, obtener y validar enunciados y afirmaciones probabilísticas” (Sánchez y Candín,

2010, p. 599). Este tipo de razonamiento se evidencia en las habilidades para reconocer situaciones de azar y modelarlas, decidir cómo y cuándo usar la probabilidad en circunstancias contextualizadas y evitar sesgos en la interpretación de situaciones aleatorias, entre otras.

Exhibir un razonamiento estadístico y probabilístico se convierten, entonces, en herramientas indispensables para enfrentar la incertidumbre que genera, por una parte, la información y su manejo y por otra, la variabilidad y la interconexión de elementos presentes en los procesos y los efectos del azar.

Al igual que la flexibilidad y la reversibilidad, estos dos tipos de razonamientos han de cultivarse a lo largo de la escolaridad, de allí la inclusión de la probabilidad y la estadística en el currículum desde los primeros niveles educativos. Una de las estrategias que se sugieren para incentivar de manera consciente el pensamiento estadístico es el uso del periódico y de otros medios informativos con el propósito de que los estudiantes aprendan a leer e interpretar datos contenidos en tablas y gráficas incluidas en noticias cotidianas en lugar de evitarlo, que aprendan a identificar gráficos mal construidos que conduzcan a interpretaciones erróneas según los intereses particulares y que lean los artículos en busca de sesgos en el razonamiento estadístico de sus autores y por último, que puedan escribir sus propias impresiones sobre la noticia con base en el manejo de los datos allí presentes; todo esto con la intención de incentivar el espíritu crítico como un componente de la alfabetización estadística y como recurso ante la incertidumbre que suscita el actuar en función de informaciones inciertas.(León, 2009)

Muy recomendada por especialistas en la materia, es la enseñanza basada en el trabajo cooperativo a través de investigaciones y proyectos (Batanero, Díaz y Roa, 2013; Batanero y Díaz (2011), León (2009), donde los estudiantes tengan ocasión de transitar por el proceso completo de la investigación estadística, razonando estadísticamente y pensando críticamente en cada uno de los pasos o procesos que se lleven a cabo. La investigación estadística no se reduce al análisis de datos, más aun, la competencia en ese tipo de análisis no siempre va acompañada de un buen nivel de razonamiento estadístico. El análisis de datos es el punto intermedio del proceso, estando en ambos extremos los dos procesos que más favorecerán el desarrollo del pensamiento estadístico, abarcando el primero todo lo que atañe a la generación de la información (descripción y contextualización del objeto de estudio, definición de variables y categorías, selección de muestras, identificación y aplicación de los instrumentos más recomendables para la obtención de información válida y confiable) , y el último, la toma de decisiones con base en el análisis realizado y la comunicación de resultados en términos estadísticos.

Aun cuando se tenga la idea de que los estudios estadísticos conducen a la fragmentación de la realidad en variables predefinidas y operacionalizables, y se cuestione su uso para indagar sobre problemas de naturaleza humanista, lo que aquí estamos intentando rescatar es su contribución al desarrollo de un pensamiento y una actitud crítica.

Creatividad y afectividad

En un mundo en el que cada vez hay menos certezas y más incertidumbre es fundamental lograr un balance entre lo cognitivo y lo afectivo en la educación. El hombre es un ser emocional, sus actuaciones están condicionadas por las emociones y sentimientos que afloran ante cada situación; por eso, educar para la incertidumbre pasa por educar las emociones (Escotet 2011).

Una de las necesidades relacionadas con la supervivencia humana en la pirámide de Maslow es la seguridad. Una vez que el hombre ha satisfecho sus necesidades básicas de alimentación, vivienda, salud pasa al siguiente nivel en sus requerimientos, donde se encuentra la certeza de sobrevivir frente a los peligros que puedan amenazarlo. Ciertamente, la certeza da tranquilidad y sosiego, pero también conformismo. La incertidumbre genera inquietud, pero también anima, vigoriza el espíritu. Si tuviéramos certeza de todo quizás seríamos como autómatas, no habría nada ante lo cual discernir o tomar riesgos. La incertidumbre, bien manejada, incita a la búsqueda, a la exploración de posibilidades.

La incertidumbre produce pavor en aquellos acostumbrados a las certezas, a las personas con mente rígida, que sólo se manejan apropiadamente en ambientes controlados. Las emociones que surgen en situaciones que se oponen a lo esperado pueden llegar a paralizarlas impidiéndoles actuar creativamente. Por eso, educar las emociones es ineludible si se quiere formar para enfrentar lo incierto de la realidad actual. Esto no implica reprimirlas, sino aprender a canalizar aquellas negativas que obnubilan la mente e impiden actuar tanto intuitiva como racionalmente y, contrariamente, hacer que afloren las positivas, las que motivan a romper barreras de manera creativa sin que para ello deba tenerse certezas plenas.

Cuando un estudiante no puede resolver un problema de matemática es usual que sienta rabia, frustración, rechazo, con las consecuentes actitudes negativas hacia la disciplina. Lo mismo que siente ante un problema matemático, lo extrapolará a la realidad fuera del aula cuando se enfrente a una situación inesperada, incierta, que no pueda controlar fácilmente. Las mismas emociones negativas y la misma actitud de rechazo aflorarán ante las problemáticas de su vida cotidiana. Es recomendable, entonces, que desde la educación matemática se eduquen las emociones y las actitudes, haciendo que el estudiante sienta confianza en sí mismo, en sus capacidades, en su inteligencia, en sus posibilidades de logro.

Esta educación desde la afectividad también debe hacerse de manera consciente. El rol del profesor de Matemática pasa, de ser transmisor de conocimientos, a convertirse en "gestor de procesos abiertos, críticos, creativos, innovadores, para ayudar a convertir lo posible en probable y lo probable, que es hoy emergente, en una alternativa que complejiza los procesos" (Peralta, 1999, p. 18). En este proceso nuevo de formación ambos lados del cerebro entran en juego. En matemática usualmente se favorece el desarrollo del hemisferio izquierdo donde residen los procesos lógicos que favorecen el razonamiento formal, deductivo, que partiendo de premisas lleva a conclusiones lógicas. Lo que se pretende es, a la par, incentivar el uso del hemisferio derecho, sede de lo intuitivo, de lo afectivo, de lo creativo. El acoplamiento de ambos hemisferios favorece la reversibilidad de pensamiento pues mientras el izquierdo es analítico y fragmentador, el derecho es integrador y globalizador. Igualmente el despliegue simultáneo de ambos lados del cerebro favorece la flexibilidad de pensamiento, pues el hemisferio izquierdo es razonador y sigue patrones y coordenadas, en tanto que el derecho es intuitivo, se abre a lo desconocido. Mientras el hemisferio derecho permite el desborde de las emociones, el izquierdo las controla, llevándolas entre ambos a un punto de balance que optimice su efecto frente a los momentos de incertidumbre y de desasosiego.

No es tarea fácil para el docente de Matemática balancear lo cognitivo y lo afectivo en su proceso de enseñanza. Ponderar lo afectivo significa tomar en cuenta las diferencias individuales; los diversos esquemas de aprendizaje; el estado anímico, las actitudes, las creencias, los sentimientos, las satisfacciones e insatisfacciones, las expectativas; hacer sentir a los estudiantes, sobre todo a los menos aprovechados en la materia, que ellos si son tomados en

cuenta, que pueden comprender y aprender, aun dentro de sus limitaciones. Significa procurar que los estudiantes aprendan a aprender para brindarles autonomía en su crecimiento personal y en su futuro profesional y posibilitarlos para, con nuevos conocimientos, enfrentar nuevas incertidumbres, pues lo que hoy están aprendiendo seguramente ya habrá perdido vigencia para cuando ellos culminen los estudios formales.

Reflexiones finales

Hemos desarrollado algunas ideas en relación a la incertidumbre como condición inherente a la existencia humana y a la necesidad de formar ciudadanos aptos para desenvolverse en situaciones donde el azar siempre estará presente. Formar para la incertidumbre debe ser un tema educativo transversal, por lo tanto abordable desde las distintas disciplinas pero con una visión transdisciplinar que permita tomar conciencia de las múltiples interrelaciones que se suscitan en el acontecer humano. La Educación Matemática, como hemos querido resaltar, cumple un papel importante hacia este propósito, para cuyo logro no existen recetas únicas. No obstante, hemos centrado nuestra atención en algunas categorías que se muestran prometedoras para hacer ostensible ese educar en y para la incertidumbre como son: el desarrollo del pensamiento matemático y del pensamiento estadístico en un entorno de afectividad y de contextualización de las situaciones de aprendizaje. Aspiramos en el desarrollo de este minicurso generar una reflexión y una discusión provechosas que abran caminos a nuevas formar de actuar en nuestro actuar docente.

Referencias y bibliografía

Batanero, C., Díaz, C. y Roa, R. (2013). El sentido estadístico y su desarrollo. *Números, 83*, 7-18. http://www.sinewton.org/numeros.

Batanero, C. y Díaz, C. (2011). *Estadística con proyectos*. Universidad de Granada: departamento de Didáctica de la Matemática

Coronado, J. (s/f). *Educar para la incertidumbre*. Documento en línea. Disponible: http://ined21.com/educar-para-la-incertidumbre/

Creatividad y competencias matemáticas. *Hoja de trabajo 14*. (s/f). Documento en línea. Disponible: upvv.clavijero.edu.mx/…pensamiento_matematico/…/hojadetrabajo14.pdf

Escotet, M. (2011). Educar para la incertidumbre es absolutamente necesario en estos tiempos. *Revista Eduga 59*. www.miguelescotet.com/webnews/edugainterviw.ES.html.

Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy: Meaning, components, responsibilities. *International review 70*(1), 1-25.

Garfield, J, (2002). The challenge of developing statistical reasoning. *Journal of Statistics Education 10*(3). On line: www.amstat.org/publications/jse/

Innerarity, D. (2008). *El retorno de la incertidumbre*. Documento en línea. Disponible http://www.caffereggio.net/2008/10/07/el-retor-de-la-incertidumbre-de-daniel-innerarity-en-el-pais/. [Consultado: Agosto 2014]

Lanz, R. y Ferguson (2005). *La reforma universitaria en el contexto de la mundialización del conocimiento. Observatorio Internacional de reformas Universitarias (ORUS)*. Disponible en: debatecultural.org/Observatorio/RigobertoLanz22.htm

León, N. (2005). Alfabetización y desarrollo del pensamiento estadístico. *V Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*. Porto, Portugal.

León, N. (2009). *Teaching statistics for the real life*. Comunicación oral. CIAEM, Canadá

León, N. (2011). Un recorrido de lo certero a lo probable por los caminos de la ciencia y de nuestra acción ciudadana. *Enseñanza de la Matemática.* Número especial.

López, L. (2004). Directivos con nuevas tecnología de información y comunicación. *Espacios*, *25*(3)

Matemáticas (S/F). Documento en línea. Disponible en www.gobiernodecanarias.org/educacion/udg/ord/...8matematicas.pdf

Morin, E. (2000). *Los siete saberes necesarios a la educación del futuro*. IESALC/UNESCO, Caracas.

Morin, E. (2011). *La vía para el futuro de la humanidad*. Paidos, España.

Morin, E. Ciurana, E. y Motta, D. (2002). *Educar en la era planetaria. El pensamiento complejo como método de aprendizaje en el error y la incertidumbre humana*. Editorial Gedisa S.A, Valladolid, España.

Peralta, R. (1999). Educación y transdisciplinariedad. Un desafío para el pensamiento complejo en América Latina. *RELEA. Revista Latinoamericana de Educación Avanzada, 17*, 17-30.

Ramos, R. (s/f). *Del riesgo a la incertidumbre y el miedo*. Documento en línea. Disponible: www.unavarra.es/puresoc/pdfs/c-salaconfe/ramos2.PDF

Sánchez, E. y Candín, P. (2010). Niveles de razonamiento probabilístico de estudiantes de bachillerato frente a tareas de distribución binomial. *Educación Matemática Pesquiza, 12*(3) 598-618.

Schield, M**.** (2008). *Statistical literacy and Mathematical thinking*. Comunicación oral presentada en ICME 9. Monterrey

Shaughnessy, J., Chance, B. y Kranendock, H. (2009). *Focus in high school mathematics: Reasoning and making sense in statistics and probability*. Reston, VA: NCTM.

Ugas, G. (2007). *La ignorancia educada y otros escritos*- Lito Formas, San Cristóbal, Venezuela.

Zaldívar, M. (2009). Propuesta de temas estimuladores para el desarrollo de la flexibilidad y fluidez del pensamiento en la enseñanza de la física. ODISEO. Revista *electrónica de Pedagogía, 6*(12).

Zaldivar, M., Sosa, Y. y López, J. (2006). Definición de la flexibilidad de pensamiento desde la enseñanza. *Revista Iberoamericana de Educación, 37*(4).

Professional knowledge of future primary teachers - how can diagnostic competency be fostered?

Macarena **Larrain**
Universidad de los Andes
Chile
mlarrainj@uandes.cl
Gabriele **Kaiser**
University of Hamburg
Germany
gabriele.kaiser@uni-hamburg.de

Abstract

The aim of this mini-course is to show an approach to develop prospective primary teachers' diagnostic competency. Every teacher encounters errors in their students' mathematical work. However, the identification, understanding and appropriate response to those errors is not a straightforward process. It requires a competency that is a crucial part of mathematics teachers' professional competence. During the mini-course, the theoretical background of the promotion of diagnostic competency will be presented and participants will be encouraged to actively participate in an error analysis teaching sequence. Finally, the characteristics of the activity will be discussed with the participants, considering theoretical perspectives and the challenges of initial teacher education.

Key words: diagnostic competency, error analysis, mathematics education, initial teacher education.

Introduction

Teaching mathematics for understanding is a key goal of educational reform in many countries that are shifting from a model of knowledge transmission towards a student-centered paradigm in which students' thinking is highlighted and taken as a starting point to build further mathematical knowledge. Such teaching is complex and so as to be effective in the primary education classroom, it requires teachers equipped with a specialized body of knowledge that has been described and researched in the past decades (Shulman, 1986; Ball, Thames & Phelps, 2008; Kaiser et al., 2014). Also, teachers' abilities to understand students' thinking is crucial, because they need to use this understanding as a foundation base to provide effective instructional strategies.

Errors are unavoidable in teaching-and-learning-processes, furthermore their educational potential has been recognized in the past decades, because errors serve as a window into students' mathematical thinking. Therefore, a key competence that future teachers need to develop during their university studies is their *diagnostic competence,* which constitutes a real challenge for teacher educators.

In this mini-course we will explore the theoretical background of this professional competence of primary mathematics teachers, a teaching sequence will be presented and

experienced by participants and, finally, challenges considering teacher education will be discussed.

Professional knowledge of future primary teachers

The conceptualization of what constitutes the professional knowledge required by teachers started to change in 1986 with Lee Shulman's contribution. He suggested that subject-matter knowledge and pedagogical or curricular knowledge as separated domains were not enough for effective teaching. He pointed out that teachers also need what he called *pedagogical content knowledge* and defined it as including 'the ways of representing and formulating the subject that make it comprehensible to others' (Shulman, 1986, p. 9). In other words, it is a specialized knowledge of the subject needed by teachers to foster successful learning. It comprises, for instance, a wide variety of examples, representations and explanations that would allow students' learning, knowledge about which aspects of a specific content make it easier or more difficult for students' to grasp, the most common errors and difficulties for each topic and a range of strategies that may help students overcome their difficulties. The IEA study "Teacher Education and Development Study in Mathematics" (TEDS-M) developed a theoretical framework for its international comparative study referring to this seminal work by Shulman (1986) and distinguished mathematical content knowledge (MCK), mathematics pedagogical content knowledge (MPCK) and general pedagogical knowledge (GPK). These domains can be empirically distinguished, but are strongly related (for a short overview see Kaiser et al., 2014). In particular, MPCK is described as consisting of mathematical curricular knowledge, knowledge required to plan or design mathematics teaching and learning strategies (pre-active) and the knowledge required to effectively implement those strategies and interact in the classroom (inter-active) (Tatto et al., 2008). However, until now, no consensus exists about the conceptualization of the professional knowledge of teachers, already many studies depart from the seminal work of Shulman (1986). Especially, the description of MPCK varies strongly as Depaepe, Verschaffel and Kelchtermans (2013) point out.

Loewenberg Ball and colleagues elaborated Shulman's construct of pedagogical content knowledge especially focusing on primary teachers and clarified further how teachers are expected to know the contents they teach (Ball, Thames & Phelps, 2008). Their analyses yielded that 'the mathematical demands of teaching are substantial. The mathematical knowledge needed for teaching is not less than that needed by other adults. In fact, knowledge for teaching must be detailed in ways unnecessary for everyday functioning.' (Ball et al., 2008, p. 396). In view of this, they created the concept of *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT) and described it by organizing its subcomponents in two areas: Subject Matter Knowledge and Pedagogical Content Knowledge (PCK). Within PCK, they included three domains, namely knowledge of content and curriculum, knowledge of content and students (KCS) and knowledge of content and teaching (KCT). Knowledge of content and students includes the ability to anticipate which aspects of a particular content can be confusing for students or the type of reasoning that children could follow, the ability to interpret and understand the arguments sometimes incomplete and expressed in everyday language of young students and knowledge about the most common errors that may arise during the learning of certain mathematical content. Similarly, teachers put into practice their knowledge of content and teaching when, for example, during a whole-class discussion they must decide whether they deepen or not in the contribution of a student, if they stop to better clarify an issue, if they make a question or give a particular task to enhance or put into conflict the reasoning of a student (Hill, Ball & Schilling, 2008; Ball et al., 2008).

These distinctions acknowledge the relevance of understanding students thinking. For instance, how could teachers decide whether the contribution of a student is worth following in whole-class discussion if they do not understand the reasoning behind that student's claim? Or more generally, how could they foster the development of students' mathematical thinking if they do not comprehend the starting point of their students' mathematical understandings? It is clear that interpreting, analyzing and understanding students thinking provide teachers with useful information to make instructional decisions before, during and after each lesson. Therefore, it is of special interest the competences of teachers related to understanding students mathematical thinking, because they facilitate teaching practices aimed at providing and attending to the educational needs of all learners (Cooper, 2009; Empson, 2003).

Diagnostic competence: understanding learners' thinking as a key professional competence

Although the concept of *diagnostic competence* might have some clinical or medical connotations in some languages, it has also been used in reference to 'a teacher's competence to analyse and understand student thinking and learning processes without immediately grading them' (Prediger, 2010, p. 76). This is in line with what is being argued worldwide. If school systems are aimed at promoting the development of children's mathematical literacy (OECD, 2012) or at promoting learning mathematics for understanding (NCTM, 2000; Van de Walle, Lovin, Karp & Bay-Williams, 2014), they need teachers equipped with the competencies to identify and understand what students know, what they still need to learn and what they have misunderstood, with the abilities to make ongoing analyses of children's learning and new understandings and to make instructional decisions aimed at supporting and challenging them in the learning process (NCTM, 2000).

Similarly, Prediger (2010) suggests that teachers benefit from their diagnostic competence, because in a learner-centered paradigm, effective teaching should consider students current level of mathematical understandings as the foundation for building further knowledge. In other words, teachers support in the learning process should start from children's ideas and to do so, they require the ability to analyze and understand a wide variety of students' thinking that might be communicated incompletely. Unless teachers are very clear about where students' knowledge and skills need further support to improve, it is difficult to begin discerning what pedagogical resources might help students learn.

According to Prediger (2010) diagnostic competence is made-up of four elements. First, teachers need to be interested and curious about student thinking. Second, teachers need to assume an 'interpretative attitude of understanding from an inner perspective' (p. 77) that allows them to go further and not only identify the correctness of students' work, but also to understand the underlying reasoning of student thinking. Additionally, teachers need theoretical knowledge about mathematics learning as a background to analyze and understand student thinking. Finally, Prediger suggests that this knowledge needs to be complemented with mathematical knowledge specific to each mathematical concept that would allow teachers to analyze and understand student thinking according to the different meanings of each particular concept.

This suggests that diagnostic competence should not be viewed as related to a single dimension of *mathematical knowledge for teaching* as described by Ball and her colleagues (2008) nor only to *pedagogical content knowledge* as conceptualized by Shulman (1986). It implies a more 'integrated understanding of mathematical knowledge for teaching' (Prediger,

2010, p. 79). Thus, teacher educators must provide future teachers with well-thought and complex opportunities to learn, where the elements distinguished above interact.

Mathematical errors: a window into students' mathematical thinking

Students' mathematical errors, considered as 'systematic, persistent and pervasive mistakes' (Brodie, 2014, p. 223) that are not easily identified and corrected by learners themselves, are a good opportunity for teachers to look into children's mathematical understanding.

Persistent and systematic errors are explained by constructivism as the result of erroneous conceptualizations or misconceptions which, in turn, are cognitive structures built by students according to their previous knowledge and experiences or by overgeneralizing knowledge from other domains (Smith, diSessa & Roschelle, 1993). As a consequence, errors make sense for the student, because there is an underlying (erroneous) reasoning explaining the error, frequently connected to some other correct knowledge (Brodie, 2014).

According to Brodie (2014), as a result of this connection to correct conceptual structures in other domains, errors are difficult to eradicate, because complex cognitive restructuring needs to take place. This involves a process in which learners must recognize that what until now makes perfect sense to them is not correct and teachers need to be able to select strategies that are more likely to help students reorganize their understandings.

Brodie (2014, p. 224) synthesizes the characteristics of errors stating that

> errors are reasonable and show reasoning among learners; they are a normal and necessary part of learning mathematics; and learner errors give teachers access to learners' current thinking about and ways of doing mathematics and access to possibilities for future growth in their mathematical thinking and practices.

Because errors provide teachers with an opportunity to understand student thinking and hence, design and deliver appropriate learning experiences, errors need to be considered and addressed during teaching (Smith et al., 1993; Brodie, 2014). In fact, there is strong evidence showing that doing so is more effective for learning than trying to avoid or ignore the occurrence of errors in the classroom (see Keith & Frese, 2008).

Fostering diagnostic competence in teacher education courses

Considering the relevance of teachers' understandings of student thinking, it is evident that developing diagnostic competence needs to be a crucial aim during pre-service teacher education (Bartell, Webel, Bowen & Dyson, 2013; Cooper, 2009). Although teaching experience is key in developing this kind of competences, according to Cooper (2009) future teachers would certainly benefit from guided experiences and knowledge that may constitute the basis for the development of this competence along their professional career. The question that follows is how this competence can be fostered.

Jacobs & Philipp (2004) propose that both written work from students and videos showing children's work should be used in teacher education to promote analysis and discussion about student thinking and hence, facilitate the development of knowledge related to mathematics, teaching and learning. They also make the point that the value of bringing those work samples into teacher education courses is not in the children's work themselves, but in the discussions

that may arise when teacher educators provide with well-chosen questions and prospective teachers engage in fruitful analyses and conversations about mathematics teaching and learning.

In a subsequent work, Jacobs, Lamb and Philipp (2010) go on to describe some prompts that may help teacher educators to encourage those productive discussions. They organize the discussion prompts into their *noticing of children's mathematical thinking* framework, which comprises three fundamental skills: attending to children's strategies, interpreting their understandings and deciding how to respond on the basis of this analysis. They make the significant claim that these three skills need to be considered in an integrated way, not independently or sequentially.

For each of these skills they give some guidance on how they may be addressed in teacher education courses. For instance, they suggest that in attending to children's strategies is not only important the identification of relevant elements in a complex classroom environment, but also the recognition of what is mathematically significant in students' explanations, and teacher educators need to provide directed support so future teachers can start the development of this skill in an appropriate way. Regarding the ability to interpret children's understandings, the authors highlight the need to focus student teachers efforts on analyzing learners' understandings specifically and not in the discussion on more general issues. Their difficulties to interpret children's work may be the result of a deficit on the mathematical knowledge needed to understand their strategies and make the appropriate connections to mathematical concepts. Lastly, Jacobs, Lamb and Philipp (2010) state that the ability to give an appropriate pedagogical response, needs to be based on children's understandings. The type of responses that student teachers may suggest can vary widely, including testing teacher's analysis of children's understandings, exploring deeper students' solutions and their underlying reasoning or proposing a new problem. In any case, to be productive, they should consider students' understandings.

Similarly, Peng and Luo (2009) propose a framework that describes mathematics teacher knowledge related to error analysis. They identified four types of error analysis: (i) *identify* or detect the presence of a mathematical error, that could be related to the ability to attend to children's understanding from the 'noticing' framework; (ii), *interpret* the underlying rationality of a student mathematical error and (iii) *evaluate* the level of performance of a student, according to what the mathematical error shows, that is clearly connected with the interpreting skill proposed by Jacobs and her research team; and (iv) *remediate* the mathematical misconception by presenting a targeted teaching strategy to eliminate mathematical error, that can also be linked to the third skill of 'noticing', namely the ability to decide how to respond based on children's understandings.

Accordingly, McGuire (2013) designed an error analysis problem structure that included three separate but related levels: identify students' error pattern or misconception, 'think like a student' or answer similar problems using the same error pattern and describe remediation strategies.

In this work, we consider an integration of these models that can be summarized in the diagram in Figure 1.

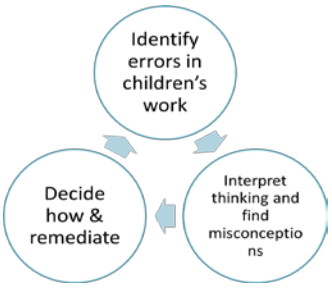


Figure 1. Error diagnosis cycle.

This model proposes that prospective teachers should start by attending to children's work and identifying the systematic errors when they appear, then they should interpret the underlying thinking of students and locate where misconceptions are placed. With this in mind, future teachers need to activate their knowledge related to mathematics, teaching and learning to decide which aspects of children's knowledge need further improvement and design carefully thought and targeted instructional strategies.

Error analysis teaching sequence structure

A four-session-teaching sequence was designed with the aim of fostering the development of prospective primary teachers' diagnostic competence. During the four 90 minute sessions, prospective teachers are expected to engage in individual analysis and in small and large group discussions of children's work, coming both from written samples and from video clips taken from mathematical classrooms. It is intended that the prospective teachers work through the error analysis cycle several times, based on different samples of primary students' mathematical work and that they will communicate their proposals and evaluate those of their classmates.

The first session is aimed at sensitizing prospective teachers' interest on error analysis and understanding of students thinking as a way into providing effective pedagogical strategies that promote children's learning of mathematics. The error analysis cycle will be presented, explained and applied to study the work of primary students.

The goals of the second session are to highlight the opportunity that error analysis give to look into children's understandings and to develop prospective teachers' abilities of identifying and comprehending students' mathematical reasoning and misconceptions. This session focuses especially on the first and second stage of the error analysis cycle (i.e. identifying and interpreting) and also guides future teachers to acknowledge that primary school students think differently than adults do.

The third session focuses primarily on the development of prospective teachers' ability to provide effective pedagogical responses to students' errors. In order to do this, they are expected to use their previous knowledge and information provided during the session to analyze teachers' responses to students' errors in classroom settings and to design appropriate instructional strategies to address those errors. In this session future teachers will be working through the whole error analysis cycle.

The last session is intended to apply knowledge and abilities developed in previous sessions. Prospective teachers are expected to analyze the work from a student. They will identify and interpret written work from a student to comprehend the underlying reasoning of the learner errors and design an effective response. In addition, they will communicate their analyses

to other groups and evaluate how others have analyzed the students' errors. In this way, they will have access to a wider variety of errors and of points of view.

Participation in this mini-course

During this mini-course, participants will be encouraged to actively participate in selected activities from the second session. Particularly, they will be asked to analyze and discuss four pieces of students' work on fractions, identify the error underlying each of them, interpret students' thinking and find their misconceptions and solve similar tasks using the students' reasoning. After discussing those analyses, participants will watch a video showing a student working on one of the previous cases. This will be followed by a pair discussion of the video, aid by some given prompts, focusing on the identification, interpretation and understanding of the misconception. In a whole-group discussion, participants will also be encouraged to discuss adequate teaching alternatives, which might be used in further teaching practice.

To conclude the description activities of the mini-course, it is expected that the participants engage in a discussion about the characteristics of the activity, considering theoretical perspectives and the challenges of pre-service teacher education.

References

Ball, D.L., Thames, M.H., Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education, 59* (5), 389 – 407.

Bartell, T. G., Webel, C., Bowen, B., & Dyson, N. (2013). Prospective teacher learning: recognizing evidence of conceptual understanding. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *16*(1), 57-79.

Brodie, K. (2014). Learning about learner errors in professional learning communities. *Educational Studies in Mathematics*, 85(2), 221-239.

Cooper, S. (2009). Preservice teachers' analysis of children's work to make instructional decisions. *School Science and Mathematics*, *109*(6), 355-362.

Depaepe, F., Verschaffel, L., & Kelchtermans, G. (2013). Pedagogical content knowledge: a systematic review of the way in which the concept has pervaded mathematics educational research. *Teaching and Teacher Education, 34*, 12-25.

Empson, S. B. (2003). Low-performing Students and Teaching Fractions for Understanding: an Interactional Analysis. *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(4), 305-343.

Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 372 – 400.

Jacobs, V., Lamb, L. & Philipp, R. (2010) Professional Noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(2), 169 – 202.

Jacobs, V. R., & Philipp, R. A. (2004). Mathematical Thinking: Helping Prospective and Practicing Teachers Focus. *Teaching Children Mathematics, 11*(4), 194-201.

Kaiser, G., Bloemeke, S., Busse, A., Doehrmann, M., & Koenig, J. (2014). Professional knowledge of (prospective) mathematics teachers – its structure and development. In P. Liljedahl, C. Nicol, S. Oesterle & Dr. Allan (Eds.), *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36, Vol. 1* (pp. 35-50). Vancouver: PME

Keith, N., & Frese, M. (2008). Effectiveness of error management training: a meta-analysis. *Journal of Applied Psychology*, *93*(1), 59.

Mc Guire, P. (2013). Using online error analysis items to support preservice teachers' pedagogical content knowledge in mathematics. *Contemporary Issues in Technology and Teacher Education*, *13*(3), 207-218.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

OECD (2013). *PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy*, PISA, OECD Publishing, Paris. DOI: http://dx.doi.org/10.1787/9789264190511-en

Peng, A. & Luo, Z. (2009). A framework for examining mathematics teacher knowledge as used in error analysis. *For the Learning of Mathematics, 29*(3), 22-25.

Prediger, S. (2010). How to develop mathematics-for-teaching and for understanding: the case of meanings of the equal sign. *Journal of Mathematics Teacher Education, 13*(1), 73-93.

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Smith III, J. P., diSessa, A. A., & Roschelle, J. (1993). Misconceptions reconceived: A constructivist analysis of knowledge in transition. *The Journal of the Learning Sciences, 3*(2), 115-163.

Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S., Ingvarson, L., Peck, R., & Rowley, G. (2008). *Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M): Conceptual framework.* Amsterdam, the Netherlands: International Association for Educational Achievement (IEA). Available online at http://teds.educ.msu.edu/framework/

Van de Walle, J. A., Lovin, L. A. H., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2014). *Teaching Student-centered Mathematics: Developmentally Appropriate Instruction for Grades Pre-K-2* (Vol. 1). Pearson Higher Ed.

Reflexión sobre el razonamiento algebraico elemental en profesores de primaria y secundaria

Antonio **Estepa**
Universidad de Jaén
España
aestepa@ujaen.esn
Ángel **Contreras**
Universidad de Jaén
España
afuente@ujaen.es
Juan D. **Godino**
Universidad de Granada
España
jgodino@ugr.es
Miguel R. **Wilhelmi**
Universidad Pública de Navarra
España
miguelr.wilhelmi@unavarra.es

Resumen

Se propone la realización de un taller para promover en los profesores de primaria y secundaria el desarrollo de conocimientos para discriminar objetos algebraicos y el reconocimiento de distintos niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. La actividad práctica a realizar se basa en la resolución de un conjunto de tareas que ponen en juego conocimientos didáctico-matemáticos sobre razonamiento algebraico elemental y la puesta en común de las soluciones. La visión ampliada del álgebra escolar que se propone desarrollar tiene en cuenta los procesos de generalización, simbolización, modelización estructural y funcional, así como el cálculo analítico, y permite una articulación coherente entre el pensamiento algebraico en educación primaria y secundaria.

Palabras clave: razonamiento algebraico, niveles de algebrización, formación de profesores, conocimiento didáctico – matemático, enfoque ontosemiótico

Introducción

La promoción del razonamiento algebraico desde los primeros niveles educativos se propone como un objetivo importante en diversas orientaciones curriculares (NCTM, 2000), para lo cual se asume una visión ampliada de la naturaleza del álgebra escolar, no limitada al manejo de expresiones algebraica (Godino, Castro, Aké, & Wilhelmi, 2012). Ello supone un reto para la formación de los profesores de matemáticas ya que usualmente los planes de formación no contemplan el desarrollo de dicha visión sobre el álgebra. Aunque algunos autores (Lins & Kaput, 2004), en la agenda de investigación que proponen para los próximos años en su capítulo

sobre "Early Algebra", sugieren que se debe poner "especial atención a la formación de profesores" (p. 60).

El objetivo de este taller es la implementación de una actividad práctica orientada al reconocimiento de los rasgos característicos del Razonamiento Algebraico Elemental (RAE), que avance en la capacitación del profesor para la promoción del pensamiento algebraico desde los primeros niveles educativos. Se trata de aplicar un primer paso de la metodología de diseño instruccional descrita en Aké, Godino, Fernández y Gonzato (2014) para promover el desarrollo de competencias de análisis didáctico de los profesores en el campo del RAE.

Se propone la resolución de un conjunto de tareas propias de educación primaria y secundaria y el reconocimiento de diferentes niveles de algebrización en la actividad matemática implicada, basados en la identificación de objetos y procesos algebraicos característicos. La actividad puede ser de interés tanto para profesores de educación primaria como de secundaria, ayudando a progresar en la articulación de los conocimientos didáctico – matemáticos (Godino, 2009) sobre álgebra de dichas etapas educativas.

En este documento se describe la actividad diseñada, la cual está basada en la resolución en equipos del cuestionario sobre conocimientos didáctico – matemáticos sobre RAE (cuestionario CDM – RAE, incluido en el Anexo) y la puesta en común de dichos conocimientos. Previamente se hace una síntesis de las características del RAE, los niveles de razonamiento propuestos en Godino, Aké, Gonzato y Wilhelmi (2014) y la estructura del conjunto de tareas incluidas en el cuestionario.

Características del razonamiento algebraico elemental

Diversos autores han reflexionado acerca de los rasgos que caracterizan el álgebra escolar (Filloy, Rojano, & Puig, 2008; Kaput, 2008; Kieran, 2007). Parece haber consenso en que un rasgo característico de la actividad algebraica son los procesos de generalización matemática, esto es, el estudio de situaciones donde se pasa de considerar casos particulares de conceptos, procedimientos etc., (objetos determinados) a clases o tipos de tales objetos. En la perspectiva del "álgebra temprana" (Cai & Knuth, 2011; Carraher & Schliemann, 2007) el reconocimiento de lo general es condición previa de la expresión de dicha generalidad. Otros autores relacionan el álgebra con el tratamiento de objetos de naturaleza indeterminada, como incógnitas, variables y parámetros. Otro rasgo característico del álgebra es el estudio de las relaciones de equivalencia y sus propiedades, el de las operaciones entre los elementos de los conjuntos numéricos, o de otro tipo, y las propiedades de las estructuras que se generan. En relación con el pensamiento relacional, la investigación sobre álgebra temprana se ha interesado por indagar la comprensión de los estudiantes de los significados operacional y relacional del signo igual (Carpenter, Levi, Franke, & Zeringue, 2005; Stephens, 2006).

De las anteriores descripciones se puede concluir que la consideración de una actividad como algebraica tiene contornos difusos. Por ello Godino et al. (2014) proponen un modelo para caracterizar el RAE en el que distinguen cuatro niveles de algebrización, teniendo en cuenta los objetos y procesos que intervienen en la actividad matemática. En el nivel 0 la actividad matemática no incorpora ningún rasgo algebraico, mientras que el nivel 3 es claramente algebraico, los niveles 1 y 2, o niveles incipientes de algebrización, ponen en juego algunos objetos y procesos de índole algebraica (Figura 1).

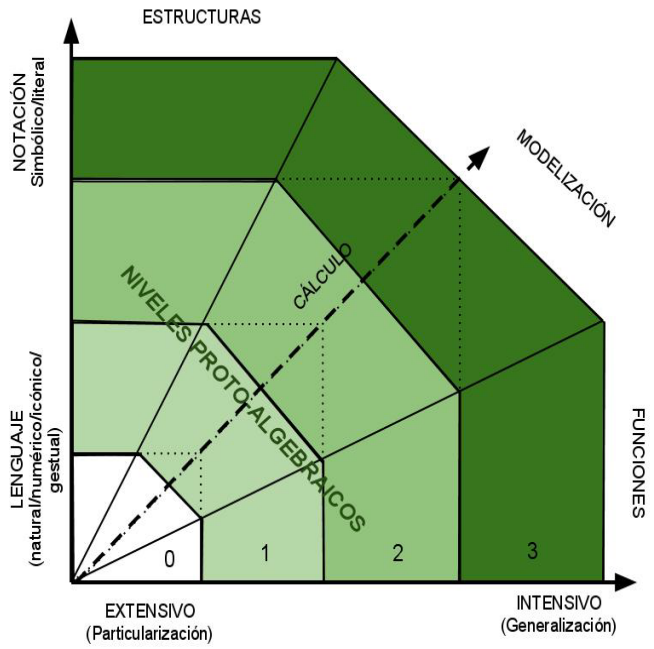


Figura 1. Niveles proto-algebraicos de razonamiento matemático (Godino et al., 2014).

En la Tabla 1 se resumen las características esenciales de los tres niveles de algebrización descritos en Godino et al. (2014), junto con el nivel 0 (ausencia de rasgos algebraicos), los cuales están basados en las siguientes distinciones ontosemióticas:

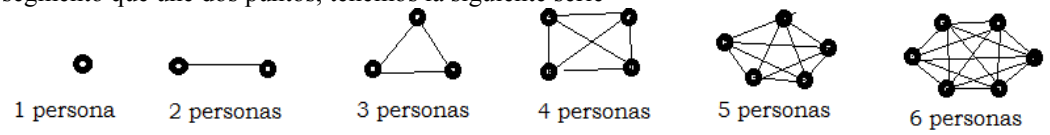
1) La presencia de "objetos algebraicos" intensivos (esto es, entidades que tienen un carácter de generalidad, o de indeterminación).
2) El tratamiento que se aplica a dichos objetos (operaciones, transformaciones basadas en la aplicación de propiedades estructurales.
3) Tipo de lenguajes usados.

Tabla 1.
Rasgos característicos de los niveles de razonamiento algebraico elemental

NIVELES	TIPOS DE OBJETOS	TRANSFORMACIONES	LENGUAJES
0	No intervienen objetos intensivos. En tareas estructurales pueden intervenir datos desconocidos.	Se opera con objetos extensivos	Natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que refieren a objetos extensivos o datos desconocidos
	Ejemplo de problema que se puede resolver de diferentes maneras implicando los diferentes niveles de algebrización: *En una fiesta, los asistentes, al llegar, se saludan dándose un apretón de manos, ¿cuántos apretones de manos se dan si asisten a la fiesta 2 personas? ¿Y tres personas? ¿Y 5 personas? ¿Y 50 personas? … ¿Y n personas?* ***Solución 1:* (nivel 0).** Si asiste una persona, no hay apretón de manos. Si asisten 2 personas se dan un apretón de manos. Si asisten 3 personas, la primera le da apretón de manos a las otras dos y las otras dos se dan un apretón de manos, en total 3 apretones de manos. Y así sucesivamente…		

<table>
<tr><th>NIVELES</th><th>TIPOS DE OBJETOS</th><th>TRANSFORMACIONES</th><th>LENGUAJES</th></tr>
<tr><td rowspan="2">1</td><td>En tareas estructurales pueden intervenir datos desconocidos.
En tareas funcionales se reconocen los intensivos</td><td>En tareas estructurales se aplican relaciones y propiedades de las operaciones.

En tareas funcionales se calcula con objetos extensivos.</td><td>Natural, numérico, icónico, gestual; pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos</td></tr>
<tr><td colspan="3">Solución 2: (nivel 1) Supongamos que las personas llegan a la fiesta de 1 en 1. Cuando llega la primera no hay apretón de manos. Conforme van llegando las personas le dan un apretón de manos a las que había anteriormente. De este modo cuando llega la 2ª persona estrecha la mano a la primera persona que llega a la fiesta, un apretón de manos. Cuando llega la 3ª persona estrecha la mano a los dos anteriores, 2 apretones de manos y el que habíamos contado antes, en total 3 apretones de manos. Cuando llega la 4ª persona, teníamos ya 3 apretones de manos más los 3 apretones de manos que da la 4ª persona a los anteriores 3+3= 6 apretones de manos, en general, cada vez que llega una nueva personas los apretones de manos serán los anteriores más el lugar que ocupa la última persona menos 1. Lo resumimos en la siguiente tabla
<table>
<tr><th>Nº Per.</th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>6</th><th>7</th><th>8</th><th>9</th><th>10</th><th>…</th></tr>
<tr><td>Apretón manos</td><td>0</td><td>1</td><td>1+2=3</td><td>3+3=6</td><td>6+4= 10</td><td>10+5=15</td><td>15+6=21</td><td>21+7=28</td><td>28+8=36</td><td>36+9=45</td><td>…</td></tr>
</table>
También podía haber sido la solución 3 (nivel 1): (uso de una fórmula conocida):). El problema propuesto equivale al número de parejas distintas que se pueden formar con n personas, es decir, las combinaciones de n elementos tomados de 2 en 2, es decir, Cn,2 = (($n(n-1)$)/2! = (n^2-n)/2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>Intervienen indeterminadas o variables</td><td>En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $Ax \pm B = C$.
En tareas funcionales se reconoce la generalidad pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.</td><td>Simbólico – literal, usado para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial y temporal</td></tr>
<tr><td colspan="3">Solución 4: (nivel 2). Si colocamos las n personas en una tabla como la siguiente, para calcular los apretones de manos procederemos de la siguiente manera: n^2 es el número de pares que se obtienen en la tabla, pero para calcular el número de apretones de manos debemos eliminar los pares que tienen igual componente (1,1), (2,2), …., es decir, los de la diagonal principal que son n, ya que, una persona no se da apretón de manos consigo misma, además , en cuanto a los apretones de manos, los pares restantes los debemos dividir por 2, ya que los que tienen componentes simétricas, (a,b) y (b,a) corresponden al mismo apretón de manos, en consecuencia el número de apretones de manos es = (n^2 – n)/2.
<table>
<tr><th></th><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th><th>5</th><th>…</th><th>n</th></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>2</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>3</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>4</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>5</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>…</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>n</td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table></td></tr>
<tr><td>3</td><td>Intervienen indeterminadas o variables</td><td>En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma $Ax \pm B = Cx \pm D$.
Se opera con las indeterminadas o variables.</td><td>Simbólico – literal ; los símbolos se usan de manera analítica, sin referir a la información del contexto</td></tr>
</table>

NIVELES	TIPOS DE OBJETOS	TRANSFORMACIONES	LENGUAJES
	***Solución 5*. (Nivel 3).** Si representamos cada persona por un punto y el apretón de manos por el segmento que une dos puntos, tenemos la siguiente serie  De dicha serie se deduce que el número de apretones de manos que se dan *n* personas, para *n*>2, se corresponde con el número de diagonales de un polígono convexo de *n* lados más el número de lados n, es decir, $\frac{n(n-3)}{2}+n=\frac{n^2-3n}{2}+\frac{2n}{2}=\frac{n^2-n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$		

La resolución de problemas de distintas maneras contribuye a desarrollar la competencia matemática del estudiante (Niss, 2003). Si pedimos a nuestros estudiantes que resuelvan los problemas de distintas maneras, paulatinamente irán apareciendo, de manera natural, los distintos niveles de algebrización y contribuiremos al desarrollo de la competencia matemática.

Categorías de conocimientos didáctico-matemáticos sobre RAE

El conjunto de ítems que componen el cuestionario CDM-RAE (Anexo), que será usado como instrumento de reflexión en el taller, está estructurado según dos tipos de variables: Contenido algebraico y contenido didáctico. Para la variable contenido algebraico se consideran tres valores o categorías, en las cuales a su vez se pueden distinguir diversas subcategorías:

- Estructuras (relación de equivalencia; propiedades de las operaciones, ecuaciones,…).
- Funciones (patrones aritméticos, patrones geométricos; función lineal, afín, cuadrática,…).
- Modelización (problemas de contexto resueltos mediante el planteo de ecuaciones o relaciones funcionales).

Las tareas involucran contenido algebraico propio de educación primaria (conocimiento común del contenido), o propio de niveles superiores (conocimiento avanzado, p. e., educación secundaria). El cálculo analítico puede tener lugar ligado a las estructuras, funciones y modelización, y ser realizado con lenguaje simbólico – literal o de otro tipo.

Para la variable *contenido didáctico*, el cual refiere a un contenido algebraico, sea común o avanzado, se consideran las categorías siguientes:

- Faceta epistémica: reconocimiento de objetos y procesos algebraicos (representaciones, conceptos, procedimientos, propiedades; generalización, modelización); reconocimiento de niveles de algebrización.
- Faceta cognitiva: significados personales de los alumnos (conocimiento, comprensión y competencia sobre contenidos algebraicos elementales); conflictos de aprendizaje sobre objetos y procesos algebraicos.
- Faceta instruccional: recursos para la enseñanza del álgebra en primaria (situaciones – problema, medios técnicos).
- Faceta ecológica: directrices curriculares; uso de RAE en distintos bloques de contenido matemático; conexiones inter-disciplinares).

La evaluación del conocimiento didáctico-matemático del profesor tiene en cuenta tanto el contenido algebraico en sí mismo, como el conocimiento didáctico relativo a tales contenidos

matemáticos. Usualmente las tareas incluyen apartados centrados en la solución de una tarea matemática (mediante la cual se evalúa el conocimiento del contenido matemático) y apartados que cuestionan sobre alguno de los aspectos del conocimiento didáctico de los contenidos puestos en juego.

Desarrollo de conocimientos didácticos sobre RAE

La actividad práctica mediante la cual se pretende desarrollar el conocimiento didáctico – matemático sobre RAE se describe a continuación:

Metodología del taller:

1. Presentación de las características del RAE basadas en los trabajos de Godino y colaboradores (Aké, Godino, & Gonzato, 2013; Godino et al., 2014) y de los niveles de algebrización.

2. Trabajando en equipos realizar las siguientes actividades:

   2.1. Resolver las tareas del Cuestionario CDM-RAE (Anexo), a ser posible, de varias maneras.

   2.2. Asignar niveles de pensamiento algebraico a las distintas soluciones dadas, en el punto anterior, a las tareas del cuestionario, teniendo en cuenta los objetos y procesos algebraicos previamente identificados.

   2.3. Enunciar tareas relacionadas cuya solución implique cambios en los niveles de algebrización puestos en juego.

3. Presentación, discusión de resultados y extracción de conclusiones

Reflexiones finales

Consideramos que la distinción de niveles de razonamiento algebraico elemental puede ser útil en la formación didáctico-matemática de profesores al permitir desarrollar en ellos el *sentido algebraico*. Se trata de reconocer rasgos de las prácticas matemáticas sobre los cuales los profesores pueden intervenir para aumentar progresivamente el nivel de algebrización de la actividad matemática de los alumnos. Este sentido algebraico se puede entender como la capacidad de un sujeto para,

1) Usar sistemáticamente símbolos para expresar cantidades indeterminadas y generalizaciones, especialmente mediante notaciones simbólico-literales.

2) Reconocer y aplicar propiedades estructurales de los sistemas matemáticos, particularmente propiedades de las operaciones y relaciones.

3) Reconocer patrones, regularidades y funciones.

4) Modelizar situaciones matemáticas o del mundo real con expresiones simbólico-literales y operar de manera sintáctica (siguiendo reglas) con ellas, para obtener una respuesta en la situación dada.

El sentido algebraico se puede desarrollar en los niños mediante actividades debidamente planificadas, que partiendo de tareas aritméticas, o de otros bloques de contenido vayan creando la tensión hacia la generalización, simbolización, la modelización y cálculo analítico. Se contribuye de este modo al desarrollo de la competencia matemática de los estudiantes cuando resuelven un problema de distintas maneras (Niss, 2003).

Es claro que para que los alumnos vayan construyendo el sentido algebraico los maestros deben también tenerlo y saber cómo desarrollarlo. No basta con elaborar propuestas curriculares (NCTM, 2000) que incluyan el álgebra desde los primeros niveles educativos, se precisa que el docente actúe como principal agente de cambio en la introducción y desarrollo del razonamiento algebraico en las aulas de primaria, y de su progresión en la educación secundaria.

Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación EDU2012-31869, y EDU2013-41141-P, Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO, España).

Referencias y bibliografía

Aké, L., Godino, J. D., Fernández, T. & Gonzato, M. (2014). Ingeniería didáctica para desarrollar el sentido algebraico de maestros en formación. *Avances de Investigación en Educación Matemática, 5*, 25 – 48.

Aké, L., Godino, J. D. & Gonzato, M. (2013). Contenidos y actividades algebraicas en Educación Primaria. *UNIÓN. Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 33,* 39-52.

Cai, J. & Knuth, E. (2011). *Early algebraization. A global dialogue from multiple perspectives*. Berlin: Springer-Verlag.

Carpenter, TH. P., Levi, L., Franke, M. L. & Zeringue, J. K. (2005). Algebra in elementary school: Developing relational thinking. *ZDM, 37(1),* 53-59.

Carraher, D. W. & Schliemann, A. L. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, pp, 669-705). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Filloy, E., Rojano, T. & Puig, L. (2008). *Educational algebra: A theoretical and empirical approach*. Berlin: Springer.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.

Godino, J. D. Aké, L., Gonzato, M. & Wilhelmi, M. R. (2014). Niveles de algebrización de la actividad matemática escolar. Implicaciones para la formación de maestros. *Enseñanza de las Ciencias,* 32.1, 199-219.

Godino, J. D., Castro, W., Aké, L. & Wilhelmi, M. D. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Boletim de Educação Matemática - BOLEMA*, *26*(42B)*,* 483-511.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kaput, D. W. Carraher, & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York: Routledge.

Kieran, K. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. En F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, pp. 707-762). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Lins, R. & Kaput, J. (2004). The Early Development of Algebraic Reasoning: The current State of the Field. En K. Stacy, H. Chick & M. Kendall (Eds.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra. The 12th ICMI Study*, (pp. 47-70). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: Author.

Niss M. (2003). Quantitative literacy and mathematical competencies. En B. L. Madison & L. A. Steen, (Eds), *Proceedings of the National Forum on Quantitative Literacy,* held at the National Academy of Sciences in Washington, D.C. on December 1-2, 2001. National Council on Education and the Disciplines, Princeton, New Jersey, 2003. Disponible el 1 de Agosto de 2014 en: https://www.docenti.unina.it/downloadPub.do?tipoFile=md&id=297768

Stephens, A. C. (2006). Equivalence and relational thinking: Preservice elementary teachers' awareness of opportunities and misconceptions. *Journal of Mathematics Teacher Education, 9(3),* 249-278.

ANEXO. Cuestionario CDM-RAE

1. Considera la siguiente cuestión planteada a un alumno de primer ciclo de primaria:

¿Qué número se debe colocar en el recuadro para que la igualdad sea verdadera?

8 + 4 = ___ + 5

Un alumno responde que el número es el 12,

a) Explica cuál fue el posible razonamiento que condujo al alumno a dar esa respuesta.

b) ¿Qué interpretación del signo = está realizando el alumno?

2. Se ha pedido a un alumno que indique si la expresión "13 + 11 = 12 + 12" es verdadera o falsa.

El alumno responde lo siguiente:

Es verdadera porque restamos uno al doce y lo sumamos al otro doce, y se obtiene lo que está ahí (en el lado izquierdo).

a) Explica el razonamiento que pudo seguir el alumno para plantear su respuesta.

b) ¿Qué propiedades de la adición moviliza el alumno que justifica su respuesta?

3. Un alumno formuló la siguiente conjetura: *"Sumo tres números naturales consecutivos. Si divido el resultado por tres obtengo siempre el segundo número"*

a) ¿Es válida la afirmación para todos los números naturales? ¿Por qué?

b) ¿Qué tipo de justificación piensas podría dar un alumno de primaria a esta conjetura?

4. Observa detenidamente la siguiente suma, y determina el número que representa cada letra. Considera que cada letra tiene un valor distinto.

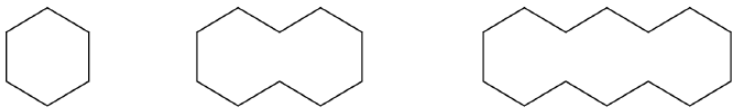
$$\begin{array}{rccc} & A & B & C \\ & A & B & C \\ + & A & B & C \\ \hline 2 & A & C & C \end{array}$$

a) ¿Cuáles son los valores numéricos de A, B y C? ¿Cómo sabes que son correctos? Explica tu razonamiento

b) ¿Se puede resolver la tarea usando algún procedimiento algebraico? ¿Cómo sería esa resolución y qué nociones algebraicas se usarían?

c) ¿Qué tipo de respuesta y justificación piensas podría dar un alumno de primaria a este problema?

5. Considera la siguiente secuencia de figuras.

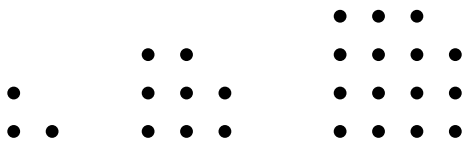


a) Representa los dos términos siguientes de la secuencia e indica el número de segmentos necesarios para construir cada una. Explica cómo lo haces.

b) ¿Cómo cambiarías el enunciado de la tarea para inducir algún procedimiento de resolución que ponga en juego conocimientos de tipo algebraico?

c) ¿Cuáles serían tales conocimientos algebraicos?

6. Observa la siguiente secuencia de tres figuras formadas por puntos:



a) Determinar el número de puntos que tendrá la figura que estuviera en la vigésimo quinta (25ª) posición de esta secuencia, suponiendo que se continúa con la misma regla de formación de las figuras. Justifica la respuesta.
b) Indicar las técnicas o diferentes maneras mediante las cuales se puede resolver el problema.
c) ¿Consideras que esta tarea se puede proponer a alumnos de tercer ciclo de primaria? ¿Cómo podrían abordar la solución?

7. Un estudiante recibió de sus padres una cierta cantidad de dinero para comer durante 40 días. Sin embargo, encontró sitios en donde pudo ahorrar 4 euros al día en la comida. De esta forma, el presupuesto inicial le duró 60 días.
a) ¿Cuánto dinero recibió?
b) ¿Se puede resolver el problema mediante procedimientos exclusivamente aritméticos? ¿Cómo?
c) ¿Se puede resolver el problema usando conocimientos algebraicos? ¿De qué manera?

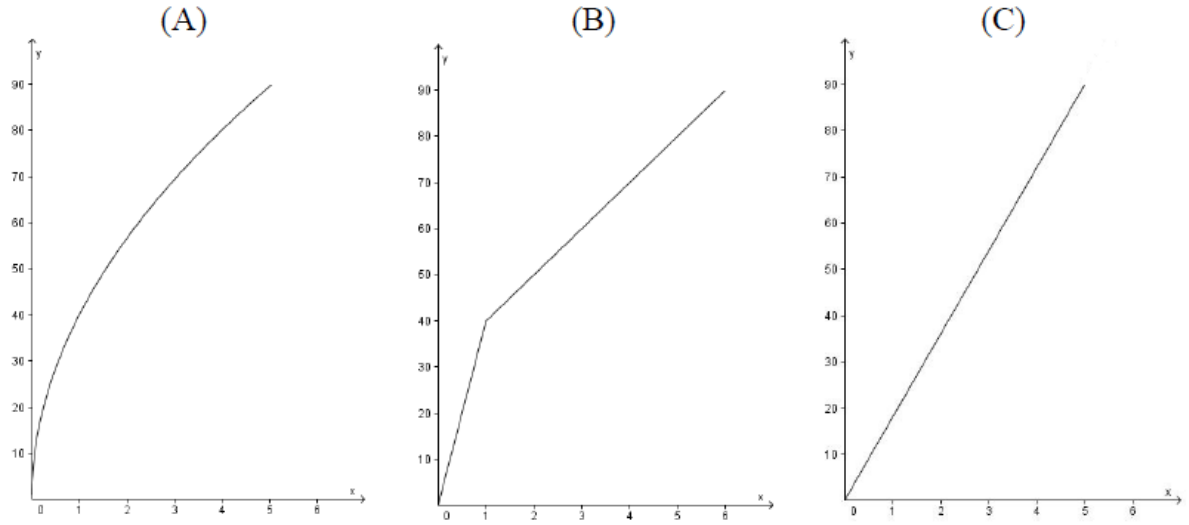
8. Analiza las siguientes expresiones y contesta:

1. $4x + 5 = 25$
2. $y = 2x + 1$
3. $P = 2c + 2l$

a) Describe la interpretación que haces de cada una de las expresiones anteriores.
b) Enuncia tres problemas que se puedan proponer a alumnos de primaria cuya solución lleve a plantear estas expresiones.

9. Para llenar con agua un recipiente de una capacidad máxima de 90 litros se usa un grifo cuyo caudal es constante e igual a 18 litros por minuto.

a) Indica cuál de las tres representaciones gráficas corresponde a la situación descrita, siendo que en el eje de las X se representa el tiempo en minutos y en el eje de las Y el volumen de agua en litros.



Respuesta: _____; Justificación:
b) ¿Qué conocimientos matemáticos o de otro tipo se usan para resolver esta tarea?
c) ¿Consideras que esta tarea es adecuada para ser propuesta a niños de educación primaria? En tal caso, de qué ciclo. Justifica tus respuestas.

10. Un profesor propone el siguiente problema a sus alumnos:

En una tienda venden el kg de peras a 2 € y cobran 10 céntimos de euro por la bolsa.
¿Cuánto costaría una bolsa de 4 kg de peras?

a) Enuncia una variante del problema que pueda servir para iniciar el estudio de las funciones lineales. Supón que en una bolsa caben 4 kg.
b) Resuelve el problema que enuncies e indica los conocimientos algebraicos que se usan.

Reforzamiento del pensamiento algebraico con base en tareas que requieren del pensamiento funcional

Vicente **Carrión** Miranda,
Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV, Instituto Politécnico Nacional
México
vcarion@cinvestav.mx
Pablo Rafael **Zamudio** Cortés
Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México
México
lobo@ciencias.unam.mx

Resumen

En el taller se utilizan algunas propiedades de funciones reales de variable real en el tratamiento de relaciones algebraicas, desde el punto de vista de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM). Está dirigido a profesores del nivel medio superior y superior. Los participantes trabajan en pequeños grupos. Cada equipo se enfrenta a una situación matemática diferente utilizando un mismo *software* de geometría dinámica. Los participantes tienen ocasión de verificar cómo el uso de herramientas tecnológicas ejerce influencia en el proceso del desarrollo de la actividad y en el manejo de conceptos. El trabajo se desarrolla con medios digitales, *software* algebraico-geométrico, en ventanas gráfica y algebraica.

Palabras clave: Actividad matemática, Competencia, ETM., Pensamiento algebraico, Pensamiento funcional, Trabajo colaborativo.

Introducción

Las actividades se realizan con base en que los saberes del álgebra no son suficientes para los tratamientos que se ponen en juego con funciones (Vivier, L.; 2011); por ejemplo, para examinar propiedades específicas en un tema tan complejo como la tangencia es necesario el llamado pensamiento funcional. Es posible que de los objetos matemáticos el de funciones es el que puede expresarse con más registros de expresión: con lenguaje, describiendo movimientos o evoluciones, con representaciones gráficas, con tablas numéricas y con fórmulas algebraicas. Una actividad antecedente a la que aquí se presenta es un taller con profesores donde presentamos problemas vinculados con lenguaje funcional y características esenciales de una función real de variable real (Carrión & Pluvinage, 2014). Se puede sustentar una mejor comprensión del contenido conceptual de funciones con la coordinación de varios registros de representación (Duval, 1993).

Metodología

Para el desarrollo del trabajo con los participantes se propone la metodología ACODESA que combina trabajos individuales, en pequeños grupos y en forma colectiva (Hitt, 2007). Los profesores se distribuyen en pequeños grupos. Cada grupo trabaja utilizando *software* de Geometría Dinámica para graficar funciones, procesar expresiones algebraicas y relaciones

numéricas. Se pretende estudiar paralelamente aspectos gráficos con elementos algebraicos y numéricos. Se consideran simultáneamente fórmulas y curvas. Lo anterior se consigue por la facilidad que tiene el *software* de permitir abrir al mismo tiempo varias ventanas. Se consideran sólo funciones reales de una variable real en una interrelación de marcos (Douady, 1986). Se observa y se refuerza la presencia de objetos matemáticos al lado de los conceptos.

Los participantes interactúan entre instrumentos, registros de representación y formas de expresión y reconocen las potencialidades de estos elementos para propiciar la transformación del trabajo matemático. Se observa cómo el uso de entornos tecnológicos y sistemas de signos influyen en la construcción de los conceptos en el estudiante y en la conducción de su trabajo matemático. Se integran globalmente los aspectos cognitivo, técnico, didáctico y afectivo.

Se discute el proceso representacional donde el grupo de participantes da significado progresivamente a las relaciones entre las gráficas cartesianas y las fórmulas algebraicas. Además, se discuten las interacciones del trabajo matemático en el aula. Se analizan estas interacciones en la construcción del pensamiento funcional.

Con el objetivo de examinar las representaciones que utilizan los participantes se diseñan actividades para convertir, en uno y otro sentidos, registros de representación algebraico y gráfico. Las reflexiones cualitativas se enfocan en los ETM y en los registros de representación.

Los cinco problemas que se presentan más adelante constituyen la base matemática que sustenta el diseño y elaboración de las actividades que realizan los participantes en el taller.

Consideraciones teóricas

El trabajo describe las relaciones entre ETM (Kuzniak, A. & Richard, P. R., 2014), utilizando un enfoque metodológico basado en el trabajo colaborativo. El objetivo fundamental es el estudio del trabajo matemático. El taller intenta integrar ciertos aspectos en las dimensiones semiótica, cognitiva e instrumental que conforman un ETM. La organización en equipos para realizar trabajo colaborativo contempla la dimensión social que se refleja en un discusión de la calidad de la enseñanza generada en un contexto de discusión en grupo. Los participantes intentan construir trayectorias de pensamiento en la realización de las actividades al identificarse con el trabajo matemático. Se sustentan en nociones teóricas sobre representación y visualización en un espacio de trabajo de funciones.

Las Tecnologías de la Información y la Comunicación han propiciado una transformación social. El ambiente educativo no debe quedarse al margen. El uso de las nuevas tecnologías es fundamental en los procesos de aprendizaje y de enseñanza de la matemática. Los cambios que producen en el aprendizaje se tienen tanto en los propios contenidos como en la forma de abordarlos. Los estudiantes pueden profundizar su aprendizaje usándolas en formas pertinente y responsable; pueden obtener, probar o rechazar conjeturas llegando, cada vez, a niveles más altos de abstracción y de generalización. El profesor también debe saber que el uso conveniente y oportuno desarrolla el pensamiento matemático de los estudiantes y que experimentar con recursos digitales conduce a una mejor visualización, exploración y adquisición de conceptos. Él debe decidir cuándo y en qué forma utilizarlas. El uso atinado de los programas computacionales simbólicos, de graficación y de simulación, al promover un mejor aprendizaje, pueden perturbar las formas actuales para abordar los cursos de matemáticas establecidas oficialmente; sin embargo, esto invita a replantear nuevas maneras de conducir la enseñanza de la matemática. Lo que aquí se propone es usar los recursos digitales para un aprendizaje efectivo de conceptos

fundamentales del álgebra afrontando problemas que ayudan a estimular, desarrollar e incrementar el pensamiento funcional. Su diseño toma en cuenta que los alumnos, por lo general, poseen una formación académica heterogénea. Provienen de planes de estudio diferentes con un manejo variado de competencias.

La introducción de los conceptos relacionados con propiedades de funciones supone la adquisición de formas nuevas de pensamiento y de lenguaje que introducen nuevos conceptos respecto al álgebra. Desde el punto de vista cognitivo no es suficiente sólo el manejo de álgebra. Se puede afirmar que los conceptos relacionados con propiedades de funciones, donde intervienen procesos que requieren de conceptos de cálculo, requieren que el estudiante incorpore nuevas acciones de pensamiento, funcional y variacional, distintos del algebraico (Adjiage & Pluvinage, 2008; Adjiage & Pluvinage, 2012), que combinan aprendizajes ligados a procesos y conceptos. El estudiante debe aprender un lenguaje específico.

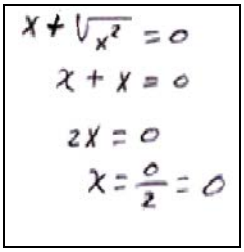


Figura 1

El análisis algebraico utilizado como único recurso en el aprendizaje de conceptos algebraicos y su aplicación para resolver problemas, en veces, constituye un obstáculo que bloquea a los estudiantes en ciertos problemas que requieren del razonamiento funcional. Se presentan tres ejemplos que ilustran esta realidad.

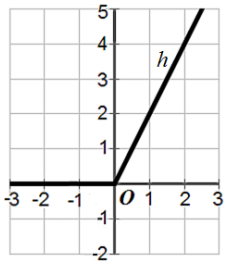


Figura 2

1). En la *Figura 1* se muestra la resolución algebraica obtenidas por la mayoría de los estudiantes y profesores cuando resuelven la ecuación $x + \sqrt{x^2} = 0$. Se pone de manifiesto la ausencia del desarrollo de pensamiento funcional, ocasionada por las dificultades que presenta la raíz cuadrada de un cuadrado. Se percibe un tratamiento parcial, sólo algebraico. Obtienen la solución $x = 0$. No obstante, si se recurre a la representación gráfica de la función $h(x) = x + \sqrt{x^2}$, *Figura 2*, se advierte que las soluciones son el conjunto de los valores reales de x tales que $x = t$ y $t < 0$. El procedimiento algebraico de resolución requiere de la definición de valor absoluto de un número real negativo: $\sqrt{x^2} = -x$ si $x < 0$.

A partir de la perspectiva de los ETM se puede verificar que en la enseñanza tradicional hace falta poner más énfasis en técnicas que no se apoyan directamente en un sustento teórico. Un caso es el número negativo. Realmente, es un objeto matemático generado a partir de la visión teórica de la recta numérica. En la enseñanza predomina la insistencia en escrituras de

números negativos con el símbolo "–"; por ejemplo 1. Sin embargo, el valor absoluto de –1 no es ese mismo número sin signo, sino el mayor de los dos siguientes: –1 y –(–1). En espacios de trabajo personales de estudiantes, y en la perspectiva de sus desarrollos, pueden reforzarse actividades donde está presente la identidad $\sqrt{x^2} = |x|$. Es posible suponer, además, que actividades de este tipo podrían contribuir a la desaparición del error clásico $\sqrt{x^2} = x$, presente en las producciones de los estudiantes (Carrión & Pluvinage, 2014).

2). En Adjiage & Pluvinage (2012) se presenta el ejemplo de la resolución en los números reales de la ecuación (1) con el manejo del *software* DERIVE.

$$x\sqrt{x^2 - 1} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

El *software* exhibe las tres soluciones -1, 0 y 1, aun cuando la raíz cuadrada no tiene sentido en $x = 0$ porque $\sqrt{-1}$ no es un número real. La mayoría de los estudiantes y profesores al resolver la ecuación (1) sólo toman en cuenta la propiedad algebraica general "un producto es cero si, al menos, uno de sus factores es cero". Es necesario analizar, además, en la resolución el dominio de la función (2), *Figura 3*.

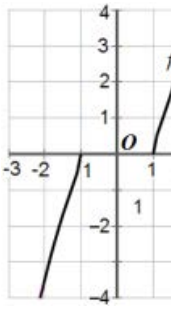


Figura 3

$$f(x) = x\sqrt{x^2 - 1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Un caso que contrasta entre tratamientos algebraicos y funcionales se presenta con la ecuación (3),

$$x\sqrt{1 - x^2} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Es posible resolver siguiendo exactamente el mismo procedimiento algebraico y las mismas operaciones utilizados para resolver la ecuación (2). Se llega igualmente a las tres soluciones obtenidas para la ecuación (1). Sin embargo, sólo -1 y 1 son solucioes de (1) y las tres, -1, 0 y 1, son soluciones de (2). De nuevo, se puede analizar el dominio de la función (4), *Figura 4*.

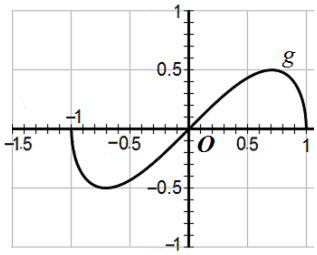


Figura 4

$$f(x) = x\sqrt{1 - x^2}. \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

Es aquí donde entra en auxilio el pensamiento funcional. Al graficar las funciones (2) y (4), *Figuras 3* y *4*, se determinan sus dominios y se comparan. Una vez determinadas las soluciones se puede ir de nuevo a los procedimientos algebraicos y hacer los ajustes necesarios y establecer las relaciones entre ambos registros de representación.

Problemas que son la base matemática para el diseño de las actividades

Algunas propiedades de funciones empleadas en demostrar teoremas o en resolver problemas que requieren de conceptos de cálculo diferencial cobran sentido al aplicarlas en la resolución de ecuaciones y desigualdades o en demostraciones donde se aplican relaciones algebraicas. A continuación se presentan ejemplos donde se aplican métodos que requieren del uso de tales propiedades. Son métodos que pueden resultar menos laboriosos que otros donde se utilizan procesos algebraicos más complejos. Al afrontar situaciones problemáticas del álgebra escolar su uso reporta ventaja porque refuerzan el aprendizaje de conceptos de cálculo diferencial. Los siguientes ejemplos ilustran estas ideas. Requieren de algunas propiedades

algebraicas y de las siguientes propiedades de funciones: composición, continuidad, crecimiento, derivación y propiedades de valores absolutos.

Problema 1. Resolver la ecuación siguiente si x ≥ 4:

$\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}-2=\frac{4}{\sqrt{x-1}}$ . . . . . (5).

Solución.

Se definen las funciones:

$f(x)=\sqrt{x+4}+\sqrt{x-4}-2$ y $g(x)=\frac{4}{\sqrt{x-1}},\ x\geq 4.$

La función f es continua y creciente para toda x mayor que 4 y la función g es continua y decreciente para valores de x mayores que 2, *Figura 5*. Como consecuencia, la ecuación (5) sólo tiene una solución, $x_1=5$, encontrada por simple inspección.

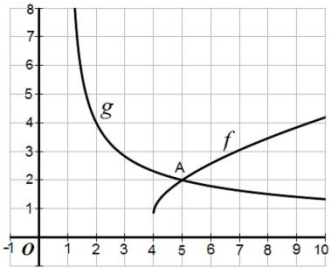


Figura 5

Problema 2. Demostrar la desigualdad siguiente, para $x>0$:

$\sqrt{x+1}>1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}$ . . . . . (6).

Solución.

Se consideran las funciones g_1 y g_2, *Figuras 6 y 7*.		Representación grafica de la desigualdad (6) con las funciones g_3 y g_4, *Figura 8*.
$g_1(x)=\sqrt{x+1},$ $x>-1$	$g_2(x)=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8},$ $x>-1$	$g_3(x)=\sqrt{x+1}, x\geq 0,$ $g_4(x)=1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}, x\geq 0$

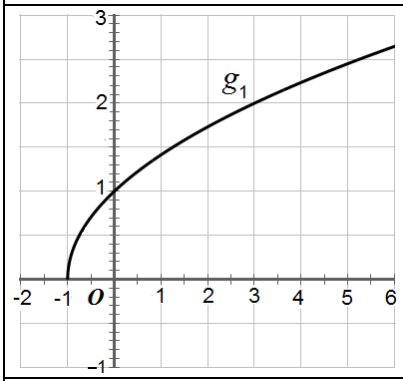
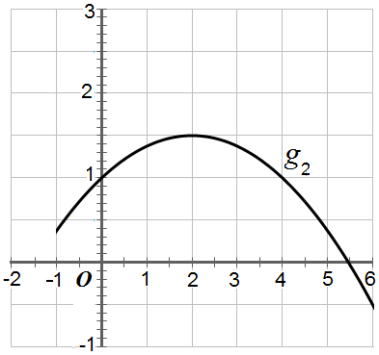
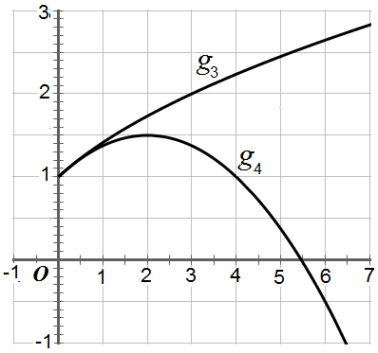

		

Figura 6	*Figura 7*	*Figura 8*

En la demostración de (6) se utiliza la función f, *Figura 9*, $f(x)=\sqrt{x+1}-1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{8}$ . . . . . (7)

Primero se demuestra que la función (7) es continua y creciente, si x es mayor que cero para verificar con esto que $f(x)>f(0)$ si $x>0$.

Se tiene $f(x)=0$ en $x=0$. Entonces $f(x)>0$ para toda $x>0$.

La derivada de f respecto a x, *Figura 10*, es

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}-\frac{1}{2}+\frac{x}{4}$ . . . . . (8)

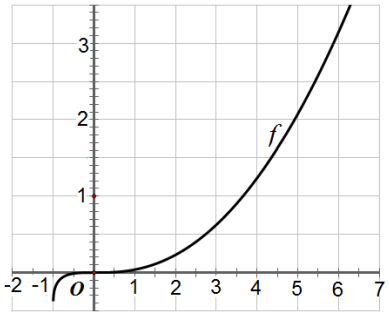


Figura 9

Para demostrar que f' es positiva, si x es positiva, se utiliza la desigualdad de Cauchy $\left(\text{Si } x_1 \geq 0 \text{ y } x_2 \geq 0 \text{ entonces } \frac{x_1+x_2}{2} \geq \sqrt{x_1 x_2}\right)$:

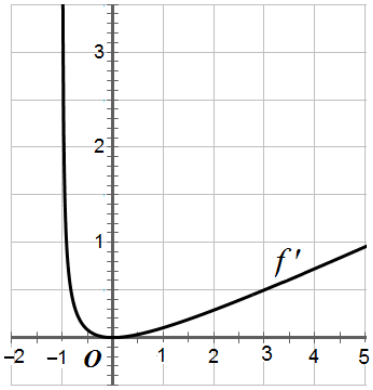


Figura 10

$$\sqrt{x+1} = \sqrt{1\cdot(x+1)} \leq \frac{1+(x+1)}{2} = \frac{x+2}{2} \quad \ldots\ldots\ldots (9)$$

Reemplazando (9) en (8) se obtiene

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} - \frac{1}{2} + \frac{x}{4} \geq \frac{1}{x+2} - \frac{1}{2} + \frac{x}{4} = \frac{x^2}{4(x+2)}.$$

La función f es creciente porque para $x > 0$ se cumple $f'(x) > 0$.

Por tanto, si $x > 0$ entonces $f(x) > f(0)$; o sea, $f(x) > 0$.

Se concluye la función f es continua y creciente si $x > 0$. Con esto queda demostrada la desigualdad (6).

Un tratamiento semejante se sigue para demostrar la desigualdad $\sqrt{x+1} < 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$, si $-1 < x < 0$, F*igura 11*.

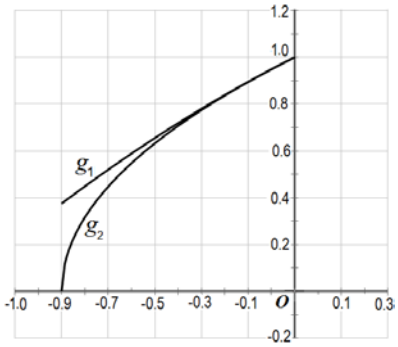


Figura 11

Problema 3. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones no lineales con tres incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} 3^x + 5^x = 8^y \\ 3^y + 5^y = 8^z \\ 3^z + 5^z = 8^x \end{array}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

Solución.

El sistema (10) se puede transformar en el sistema siguiente: $\left.\begin{array}{l} y = \frac{ln(3^x) + 5^x}{ln(8)} \\ z = \frac{ln(3^y) + 5^y}{ln(8)} \\ x = \frac{ln(3^z) + 5^z}{ln(8)} \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots (11)$	Considerando la sustitución $f(x) = \frac{ln(3^x) + 5^x}{ln(8)}$ el sistema de ecuaciones (11) se puede escribir como sigue: $\left.\begin{array}{l} y = f(x) \\ z = f(y) \\ x = f(z) \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (12)$

El sistema (10) es equivalente a la ecuación funcional

$$f(z) = f\left(f\left(f(x)\right)\right) = x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

todo valor positivo, *Figura 12*; entonces,

$$y = f(x) = \frac{ln(3^x) + 5^x}{ln(8)} = x \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

La ecuación (14) se transforma en la siguiente: $3^x + 5^x = 8^x$. De aquí se obtiene

$$\left(\frac{3}{8}\right)^x + \left(\frac{5}{8}\right)^x = 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (15)$$

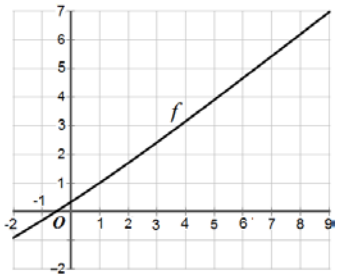


Figura 12

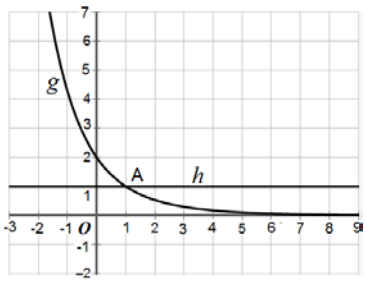


Figura 13

Una solución de la ecuación (15) es $x_1 = 1$. La solución es única porque si $x > 0$ la función $g(x) = \left(\frac{3}{8}\right)^x + \left(\frac{5}{8}\right)^x$ es creciente y, además, $g(x) = 1$ es constante y ambas son continuas en el mismo dominio, *Figura 13*.

Con un procedimiento semejante se obtener que la solución del sistema de ecuaciones (10) es $x_1 = 1,\ y_1 = 1$ y $z_1 = 1$.

Problema 4. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones no lineales con dos incógnitas:

$$\left.\begin{array}{r} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = ln\left(\frac{y}{x}\right) \\ 3^{2x}(3^x - 8) + 8 \cdot 3^{x+3} = 3^{2y+3} \end{array}\right\} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (16)$$

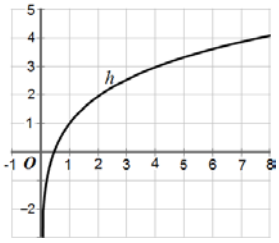


Figura 14

Solución.

De la primera ecuación del sistema (16) se tiene que $x \cdot y > 0$. La ecuación se transforma en la siguiente:

$$\sqrt[3]{x} + ln(x) = \sqrt[3]{y} + ln(y) \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (17)$$

Si definimos la función $h(x) = \sqrt[3]{x} + ln(x)$, *Figura 14*, entonces la ecuación (17) tiene la forma de la ecuación funcional $h(x) = h(y)$.

La función h es creciente para $x > 0$. Entonces, de la igualdad $h(x) = h(y)$ se sigue $x = y$, en este mismo conjunto de valores.

Por otra parte, de la segunda ecuación del sistema (16) se despeja y y se designa con $y = f(x)$, *Figura 15*:

$$y = f(x) = \frac{ln\left[3^{2x-3}(3^x - 8) + 8 \cdot 3^x\right]}{ln(9)} \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (18)$$

Considérese también la función g definida como sigue:

$$g(x) = x = y \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ (19)$$

La pendiente de la recta tangente t de la función (18) es igual a 1 en el punto A de abscisa $x_A = \frac{3\,ln(6)}{2ln(3)}$, *Figura 15*. Si $x < x_A$ la pendiente es menor que 1 y si $x > x_A$ es mayor que 1. Esto garantiza que la ecuación resultante de igualar las funciones (18) y (19), sólo dos soluciones, x_1 y x_2, con las siguientes $x_2 > x_A$, *Figura 16*, donde $x_1 =$ soluciones del sistema de ecuaciones $(x_1,\ y_1)$ y $E = (x_2,\ y_2)$, tales que

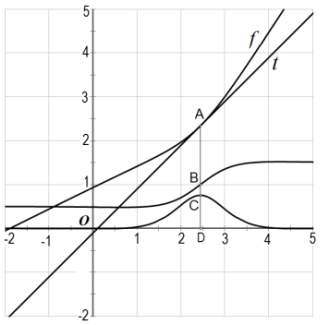


Figura 15

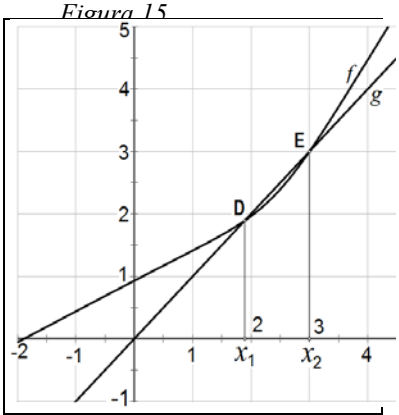


Figura 16

Problema 5. Resolver la ecuación

$$\left|x^2-6x+7\right|+\left|x^2-5x+6\right|=x-1 \quad . \; . \; . \; . \; . \; (20)$$

Solución.

Se utiliza la siguiente propiedad de valores absolutos para funciones: Sean f y g funciones reales de variable real. Si

$\left|f(x)\right|+\left|g(x)\right|=-f(x)+g(x)$

entonces $f(x)\leq 0$ y $g(x)\geq 0$.

La igualdad de este enunciado coincide con la ecuación (20) si se definen las funciones

$f(x)=x^2-6x+7$ y

$g(x)=x^2-5x+6$.

Esto significa que $\left|f(x)\right|=-f(x)$ y $\left|g(\mathrm{x})\right|=g(x)$.

En otras palabras, se tienen las relaciones

$f(x)\leq 0$ y $g(x)\geq 0$, *Figura 17.*

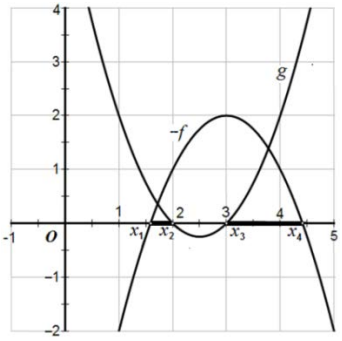


Figura 17

Se llega al sistema de desigualdades siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} x^2-6x+7 \;\leq 0 \\ x^2-5x+6\geq 0 \end{array}\right\} \quad . \; (21)$$

La solución del sistema de desigualdades (21) es la unión de los intervalos $x_1<x<\;x_2$ y $x_3<x<x_4$, tales que

$x_1=3-\sqrt{2}$, $x_2=2$, $x_3=3$ y $x_4=3+\sqrt{2}$, *Figura 17.*

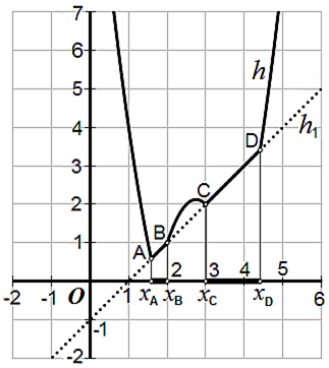


Figura 18

Para tener otra manera de visualizar la resolución de la ecuación (20) se toman en cuenta las funciones h y h_1, *Figura 18.*

$$h(x)=\left|x^2-6x+7\right|+\left|x^2-5x+6\right| \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (22)$$

$$h_1(x)=x-1 \quad . \; . \quad (23)$$

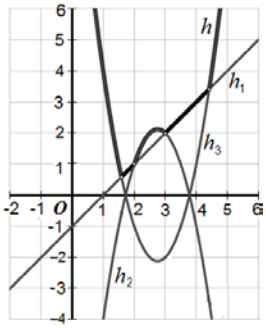


Figura 19

La función (22), *Figura 19*, se determina con las siguientes secciones:

$h_1(x)=x-1$, tal que $3-\sqrt{2}<x<2$,

$h_2(\mathrm{x})=-2x^2+11x-13$, tal que $2<x<3$,

$h_3(x)=2x^2-11x+13$, tal que $x<3-\sqrt{2}$ o $x>3$

En la *Figura 18* se observan los segmentos de recta comunes de las representaciones gráficas de las funciones (22) y (23). Estos segmentos determinan los intervalos solución de la ecuación (20): $x_{\mathrm{A}}<x<\;x_{\mathrm{B}}$ y $x_{\mathrm{C}}<x<x_{\mathrm{D}}$. Las soluciones x_{A} y x_{D} se encuentran resolviendo simultáneamente el sistema de ecuaciones formado con las funciones h_1 y h_3 y las soluciones x_{B} y x_{C} se obtienen con h_1 y h_2, *Figuras 18* y *19*.

Conclusiones

Consideramos que el saber del álgebra no es suficiente para los tratamientos de funciones, se necesita el pensamiento funcional. La introducción de los conceptos del cálculo supone la adquisición de una nueva forma de pensamiento y de un lenguaje que introducen elementos adicionales y complementarios respecto al álgebra. Para adquirir procesos y conceptos sobre

funciones el estudiante debe aprender un nuevo lenguaje específico. Debe entrar en el razonamiento funcional, distinto al algebraico.

Se mejora la calidad de la enseñanza que se genera en un contexto de discusión en grupo.

El uso de herramientas tecnológicas ejerce influencia en el desarrollo de las actividades y en el manejo de conceptos.

Referencias y Bibliografía

Adjiage R. & Pluvinage, F. (2008), A numerical landscape (chapter). In Calvin L. Petroselli (Eds), Science Education Issues and Developments (pp. 5-57), New-York: Nova Publishers.

Adjiage R. & Pluvinage, F. (2012), Strates de compétences en mathématiques. Repères IREM, vol. 88.

Carrión Miranda, V. & Pluvinage, F. (2014) Registros y estratos en ETM al servicio del pensamiento funcional. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Volumen especial ETM3. En proceso de publicación.

Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. Recherche en Didactique des Mathématiques, 7/2, 5–31.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5, 37–65.

Hitt, F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'autoréflexion. In M. Baron, D. Guin et L. Trouche (Éds.). *Environnements informatisés pour l'éducation et la formation scientifique et technique: modèles, dispositifs et pratiques.* (p. 65-88). Paris: Hermes.

Kuzniak, A. & Richard, P. R. (2014). Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, Volumen especial ETM3*. En proceso de publicación.

Vivier, L. (2011). La noción de tangente en la educación media superior. *El Cálculo y su Enseñanza.* Vol. II, año 2010-2011. México, Cinvestav-IPN.

Sentido geométrico de objetos matemáticos no ostensivos que emergen en las prácticas computacionales de contexto algebraico

Larissa **Sbitneva**
Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma del Estado de Morelos
México
larissa@uaem.mx
Nehemias **Moreno** Martínez
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional
México
nehemias_moreno@live.com
Melissa **Cervantes** Badillo
Universidad Autónoma del Estado de Morelos
México
melissa.e.cervantes@gmail.com
Rogelio **Valdez** Delgado
Facultad de Ciencias, Universidad Autónoma del Estado de Morelos
México
valdez@uaem.mx

Resumen

Las estrategias didácticas propuestas permiten lograr la comprensión de los conceptos fundamentales de álgebra lineal (producto vectorial, producto interno, significado geométrico de ecuación lineal en 3d), mismos que emergen como objetos matemáticos no ostensivos en el proceso de la realización de las prácticas computacionales en el contexto algebraico. En la parte introductoria se proporciona una guía, como un recurso metodológico, para utilizar la definición y propiedades del determinante de 3×3 emergentes del proceso de solución de los sistemas lineales con tres variables, como un instrumento poderoso en aplicaciones. El aprendizaje significativo de los conceptos fundamentales del curso de Álgebra Lineal se logra a través de actividades de apoyo para evidenciar la naturaleza y significado de los objetos matemáticos. En este trabajo nos apoyamos en el marco teórico de Enfoque Ontosemiótico (EOS).

Palabras clave: objetos no ostensivos, representaciones, significado.

Marco teórico: Enfoque Ontosemiótico de la cognición matemática (EOS)

La preocupación por el significado de los términos y conceptos matemáticos lleva directamente a la indagación sobre la naturaleza de los objetos matemáticos, a la reflexión ontológica y epistemológica sobre la génesis personal y cultural del conocimiento matemático y su mutua interdependencia. Recíprocamente, detrás de toda teoría sobre la formación de conceptos, o más general, de toda teoría del aprendizaje hay unos presupuestos ontológicos sobre la naturaleza de los conceptos, y por tanto, una teoría más o menos explícita del significado de los mismos (Godino, 2010 b, p. 3).

La transición desde las operaciones computacionales, hasta los objetos abstractos es larga y complicada y se desarrolla en tres etapas: interiorización (desarrollo de representaciones mentales), condensación (nacimiento del concepto) y reificación (salto cualitativo hacia el concepto).

Respecto a las consideraciones básicas de esta teoría, Sfard (1994) declara que:

> la concepción operacional (orientada por los procesos) emerge primero y que los objetos matemáticos (concepciones estructurales) se desarrollan después a través de la reificación del proceso. Hay muchas evidencias de que la reificación es difícil de adquirir (Sfard, 1994, p. 191).

En el EOS se ha afrontado el problema de la significación y representación mediante la elaboración de una ontología matemática explicita sobre presupuestos iniciales de tipo antropológico, lo que da cuenta del origen humano de la actividad matemática, sistemas de prácticas operativas y discursivas ligadas a campos o tipos de problemas (Godino at al., 2007, Font at al., 2007).

En los trabajos sobre "significado institucional y personal de los objetos matemáticos" Godino y Batanero (1994) han introducido las nociones de práctica personal, sistema de prácticas personales y objeto personal como útiles para el estudio de la cognición matemática individual.

Respecto a los objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas:

> En las prácticas matemáticas intervienen objetos ostensivos (símbolos, gráficos, etc.) y no ostensivos (que evocamos en la actividad matemática), los cuales son representados en forma textual, oral, grafica e incluso gestual. De los sistemas de prácticas matemáticas emergen nuevos objetos que dan cuenta de su organización y estructura (tipos de problemas, lenguajes, procedimientos, definiciones, proposiciones, argumentaciones).

Las situaciones-problema son el origen o razón de ser de la actividad; el lenguaje (símbolos, notaciones, gráficos, entre otros) representa las restantes entidades y sirve como instrumento para la acción, mientras que los argumentos justifican los procedimientos y proposiciones que relacionan los conceptos entre sí.

Nuestra propuesta está basada en el Enfoque Ontosemiótico (EOS) de la cognición y la instrucción matemática:

Lograr que el estudiante comprenda conceptos abstractos por medio del proceso de la construcción de los mismos, a través de la práctica matemática en el contexto computacional.

Esta estrategia implica el desarrollo del pensamiento geométrico (operaciones con vectores, planos y rectas, volúmenes y áreas).

Partiendo de objetos geométricos se puede dar interpretación geométrica de los objetos abstractos y lograr visualización que facilite la apropiación de los conceptos abstractos.

El modo de pensar algebraico es indispensable debido a las aplicaciones en computación, economía, medicina, finanzas sin mencionar física, mecánica, química, etc.

Prácticas discursivas respecto a las representaciones semióticas del determinante

Las investigaciones recientes pretenden sentar las bases para el estudio de razonamiento algebraico dentro del modelo operativo. Es un retorno a lo básico con el enfoque a resolución de

problemas para lograr el aprendizaje significativo de contenidos y lograr el desarrollo del pensamiento algebraico.

En la parte introductoria se realizan prácticas discursivas con base en la guía teórica proporcionada a cada participante, como un recurso metodológico, para utilizar la definición y propiedades de determinante 3×3, obtenidos en el proceso de solución de los sistemas lineales respecto a tres variables, como un instrumento poderoso en aplicaciones. También se proporciona un cuestionario para autoevaluación de las competencias adquiridas.

Objetivo: Lograr que los participantes comprendan conceptos abstractos por medio del proceso de la construcción de los mismos a través de la práctica matemática en el contexto computacional.

La estrategia didáctica está apoyada en el Enfoque Ontosemiótico de la cognición e instrucción matemática, la cual sugiere que el aprendizaje significativo de los conceptos matemáticos puede ser logrado a través de las prácticas en las que a partir de la organización de ciertos objetos matemáticos primarios y la realización de algunos procesos cognitivos emergen otros objetos matemáticos más complejos.

Para un sistema lineal de 3×3 dado
$$\begin{aligned} xa + yb + zc &= d \\ xa_1 + yb_1 + zc_1 &= d_1 \\ xa_2 + yb_2 + zc_2 &= d_2 \end{aligned}$$

se obtiene la forma más simple de la primera ecuación: $\left(a\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right) z = (T)$

(véase Apéndice).

Así, podemos llamar el determinante de 3×3 al coeficiente frente a z, y denotarlo con un símbolo que a su vez se representa por un registro semiótico complejo, el que a la vez codifica la regla de cálculo

$$\Delta_{3\times 3} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Así la ecuación toma la forma $\Delta_{3\times 3} z = \Delta_z = \begin{vmatrix} a & b & d \\ a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \end{vmatrix}$,

de donde uno puede obtener la solución única para la incógnita z, siempre y cuando el determinante no sea cero.

Significado geométrico de la ecuación lineal 3d

Debido a que partiendo de objetos geométricos se puede dar interpretación geométrica de los objetos abstractos y lograr visualización que facilite la apropiación de los conceptos, nuestra estrategia implica el desarrollo del pensamiento geométrico (operaciones con vectores, planos y rectas, volúmenes y áreas).

Representaciones equivalentes de una ecuación lineal con tres incógnitas

Situación-Problema: ¿Cuál es el significado geométrico de la ecuación lineal $Ax + By + Cz + D = 0$?

Primero vamos a obtener representaciones equivalentes a través de manipulaciones algebraicas según las reglas operativas.

Supongamos que hay tres ternas de valores, (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), que satisfacen esta ecuación, es decir, al sustituir los valores numéricos de esas ternas en la ecuación dada, esta se convierte en la identidad.

Como resultado de sustitución, obtenemos un sistema de ecuaciones lineales no homogéneas respecto a los coeficientes A, B, C (en el proceso de prácticas discursivas se aclaran las condiciones que deben satisfacer los valores numéricos de las ternas)

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 = -D$$
$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 = -D$$
$$Ax_3 + By_3 + Cz_3 = -D$$

Entonces se puede usar las fórmulas de Cramer para las incógnitas *A, B, C* (véase Apéndice) y obtener:

(*) $\Delta_A x + \Delta_B y + \Delta_C z + \Delta D = 0$,

donde el símbolo Δ_A representa el determinante $\begin{vmatrix} -D & y_1 & z_1 \\ -D & y_2 & z_2 \\ -D & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$ el cual se puede transformar en $\begin{vmatrix} -D & y_1 & z_1 \\ 0 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ 0 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = -Dw_1$, utilizando las propiedades de determinantes (véase Apéndice A).

El símbolo w_1 representa el determinante de 2×2 de la tabla de los elementos obtenidos al quitar la fila y columna que contienen al elemento D, es decir, el $Det\begin{pmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{pmatrix}$.

El procedimiento análogo se realiza para representar los símbolos Δ_B y Δ_C, $\Delta_B = Dw_2$ y $\Delta_C = -D\, w_3$. Donde w_2 y w_3 son los determinante 2×2 de las tablas correspondientes a los elementos obtenidos al quitar la fila y columna que contienen al elemento D.

Para el determinante del sistema tenemos $\Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$.

Realizamos las siguientes transformaciones que no lo cambien de acuerdo con las propiedades del determinante: restamos de los elementos del segundo renglón, los elementos correspondientes del primer renglón, del mismo modo los restamos del tercer renglón, y luego aplicamos la regla de desarrollo del determinante por los elementos del primer renglón de acuerdo con la definición del determinante de 3×3.

El resultado se puede expresar en la forma resumida utilizando notaciones para los determinantes de 2×2 correspondientes:

$$\Delta = x_1 w_1 - y_1 w_2 + z_1 w_3 .$$

Con lo cual la ecuación (*) se transforma (si $D \neq 0$) en

$$(**)\ w_1 (x - x_1) + (-w_2)(y - y_1) + w_3 (z - z_1) = 0 .$$

En esta expresión reconocemos la ley de cálculo del determinante de 3×3, dado que cada símbolo w_i representa un determinante de 2×2, donde $(x - x_1)$, $(y - y_1)$, $(z - z_1)$ son elementos que forman el primer renglón.

Entonces el resultado de nuestra exploración de la ecuación lineal se presenta utilizando el determinante de 3×3

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0,$$

que es equivalente tanto a la ecuación (**) como a la (*).

Todas las representaciones son equivalentes a la ecuación lineal $Ax + By + Cz + D = 0$, con tres soluciones dadas: (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) .

La solución única respecto a A, B, C se garantiza por la condición que el determinante del sistema no es cero: ¿Cuál es el sentido geométrico que expresa esta condición?

Interpretación geométrica y significados de las diferentes representaciones y símbolos

Si asumimos que cada terna representa las coordenadas cartesianas de los puntos M, K y L; entonces todas las representaciones son ecuaciones del plano que pasa por estos tres puntos, los cuales lo determinan de manera única, en concordancia con nuestra intuición geométrica.

¿Cómo se puede averiguar?

Necesitamos dar sentido geométrico a los símbolos w_i y a la expresión

$$(**)\ w_1 (x - x_1) + (-w_2)(y - y_1) + w_3 (z - z_1) = 0 .$$

Vamos a dar interpretaciones geométricas de los registros semióticos de objetos emergentes y significado de los símbolos.

Consideramos las ternas (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3) como coordenadas cartesianas de los puntos K, M, L, respectivamente. Entonces las ternas

$x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ \ z_2 - z_1$
$x_3 - x_1,\ y_3 - y_1,\ \ z_3 - z_1$

representan las coordenadas correspondientes de los vectores $\boldsymbol{KL}$ y $\boldsymbol{KM}$. Denotamos ahora como $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{KL}$, con coordenadas u_1, u_2, u_3, y $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{KM}$, con coordenadas v_1, v_2, v_3.

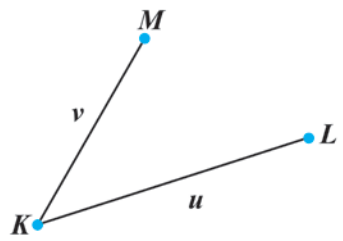


Figura 1. Vectores $\boldsymbol{u}$ y $\boldsymbol{v}$.

Así el vector $\boldsymbol{w}$ tiene coordenadas

$$w_1 = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, w_2 = -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, w_3 = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}$$

y lo llamamos producto vectorial.

Prácticas discursivas: ortogonalidad. En el caso 2d tenemos $|\boldsymbol{a}|^2 = {a_1}^2 + {a_2}^2$, $|\boldsymbol{b}|^2 = {b_1}^2 + {b_2}^2$ y si $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ entonces $|\boldsymbol{c}|^2 = {c_1}^2 + {c_2}^2 = (a_1 + b_1)^2 + (a_2 + b_2)^2 = |\boldsymbol{a}|^2 + |\boldsymbol{b}|^2 + 2(a_1 b_1 + a_2 b_2)$.

Si además tenemos que $\boldsymbol{a}$ y $\boldsymbol{b}$ son ortogonales, $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$, se cumple el teorema de Pitágoras; lo que nos sugiere ver la expresión $(a_1 b_1 + a_2 b_2) = 0$ como la condición de ortogonalidad, expresada analíticamente a través de las coordenadas de los vectores.

Así podemos interpretar la ecuación (**) como ortogonalidad de los vectores $\boldsymbol{KP}$ y $\boldsymbol{w}$, donde $\boldsymbol{P}(x, y, z)$ es un punto arbitrario, cuyas coordenadas satisfacen la ecuación (**) y la ecuación (*). Y en general, la expresión algebraica de la izquierda, en (**), es llamada producto interno (o escalar) de los vectores $\boldsymbol{KP}$ y $\boldsymbol{w}$.

Nuestra intuición geométrica y experiencia visual nos permite deducir que los puntos $\boldsymbol{P}$ forman un plano.

Para percibir otras propiedades del vector $\boldsymbol{w}$, notamos que se verifica

$$u_1 w_1 + u_2 w_2 + u_3 w_3 = 0$$

$$v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 = 0.$$

Es decir, $\boldsymbol{w}$ es ortogonal a $\boldsymbol{KL}$ y a $\boldsymbol{KM}$.

Mediante otros ejercicios computacionales, podemos obtener que $|\boldsymbol{w}|$ es el área del paralelogramo formado con los vectores $\boldsymbol{KL}$ y $\boldsymbol{KM}$, y que al valor absoluto del determinante se puede dar el sentido geométrico como el volumen, entre otras interpretaciones.

Agradecimientos

Nuestro trabajo ha sido realizado en el marco del proyecto de la investigación PICA14 con un apoyo de Secretaría de Investigación UAEM a través de la Dirección General de Desarrollo de la Investigación.

Referencias y bibliografía

Godino, J., (2010 b) Marcos teóricos sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático. *Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada*, Disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos_teoricos/marcos_teoricos_ddm.pdf

Godino, J. D. y Batanero, C., (1994) Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathemátiques*, v.14 no 3 pp 325-355

Godino, J. D., Batanero, C., y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 39(1–2), 127–135.

Font, V., Godino, J. D. y D'Amore, B. (2007). Enfoque ontosemiótico de las representaciones en Educación Matemática, en M. J. Alderete y M. L. Porcar (Eds.), *Temas de Didáctica de las Matemáticas* (pp.1—20)las, Mendoza, Argentina: Universidad de Cuyo. Versión ampliada del artículo en For the Learning of Mathematics, v. 27 no 2, pp.2-7.

Sfard, A., (1994) The gains and pitfalls of reification, the case of algebra, *Educational Studies in Mathematics*, v. 26, no. 2-3 pp. 191-228

Apéndice A

Una guía como asesoría teórica.

Introducción a exploración para desarrollar el eje *Extensivo – Intensivo* en EOS.

Motivación: trayectorias emocionales. Evidenciar la naturaleza de objetos matemáticos.

Los matemáticos chinos durante los siglos III y IV a.C. continuaron la tradición de los babilonios y nos llegaron los primeros métodos del pensamiento lineal.

Un problema publicado en 152 a.C.

"Hay tres clases de granos; tres gavillas de primera clase, dos gavillas de segunda clase y una de la tercera hacen 39 medidas; dos de la primera, tres de la segunda y una de la tercera hacen 34 medidas; y una de la primera, dos de la segunda y tres de la tercera hacen 26 medidas. ¿Cuántas medidas de granos están contenidos en una gavilla de cada clase?"

Los sistemas de este tipo surgen en gran cantidad de problemas de aplicaciones en física, biología, química, ingeniería, estadística, economía, finanzas, psicología y sociología, teoría de códigos, etc..

Nivel Extensivo. Para un sistema lineal de 3×3 tenemos:
$$\begin{aligned} xa + yb + zc &= d \\ xa_1 + yb_1 + zc_1 &= d_1 \\ xa_2 + yb_2 + zc_2 &= d_2 \end{aligned}$$

Si aplicamos el método de eliminación de variables: (o las fórmulas de Cramer para las incógnitas x y y) en las últimas dos ecuaciones, obtenemos las expresiones:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 - c_1 z & b_1 \\ d_2 - c_2 z & b_2 \end{vmatrix}}{\Delta}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 - c_1 z \\ a_2 & d_2 - c_2 z \end{vmatrix}}{\Delta}, \text{ donde } \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Al sustituirlas en la primera ecuación obtenemos: $\left(a\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right) z = (T)$

donde T denota el término libre. Para facilitar los cálculos es indispensable usar las propiedades del determinante de 2×2 que se verifican directamente $\begin{vmatrix} a & b_1 + b_2 \\ c & d_1 + d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b_1 \\ c & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b_2 \\ c & d_2 \end{vmatrix}$.

Así, podemos llamar el determinante de 3×3 al coeficiente frente a z, y denotarlo con un símbolo que a su vez se representa por un registro semiótico complejo, el que a la vez codifica la regla de cálculo:

$$\Delta_{3\times 3} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Entonces la ecuación se puede escribir como $\Delta_{3\times 3} z = a\begin{vmatrix} b_1 d_1 \\ b_2 d_2 \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a_1 d_1 \\ a_2 d_2 \end{vmatrix} + d\begin{vmatrix} a_1 b_1 \\ a_2 b_2 \end{vmatrix}$, y

reagrupando los términos en la parte derecha, obtenemos la ecuación en la forma

$$\Delta_{3\times 3} z = \Delta_z = \begin{vmatrix} a & b & d \\ a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

Y así obtenemos las fórmulas de Cramer $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$, $z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$.

Nivel Intensivo. Ejercicio para generalización de los resultados.

Si uno sigue la técnica de reducción al caso de la dimensión anterior, se puede obtener para el caso de $n = 4$ la regla de cálculo del valor numérico asignado a la tabla de los coeficientes del sistema $\sum_{i=1}^{i=n} a_{ki} x^i = b_k, k = 1,...,n$, que se puede explicar como el procedimiento siguiente:

- nos movemos a lo largo del primer renglón, multiplicando a_{ij} por el determinante de la tablita de 3×3 obtenida al eliminar el primer renglón y la j-ésima columna,
- después sumamos todos estos términos, pero alternando los signos positivo y negativo: negativo antes de a_{12} y a_{14} .

Propiedades de determinantes. Como resultado de unos ejercicios divertidos se encuentran varias propiedades, que son inmediatas de las definiciones.

(a) Al intercambiar dos renglones, o dos columnas, el signo del determinante se cambia. Y en consecuencia:
(a´) Si una matriz tiene dos renglones (o dos columnas) iguales, el determinante es cero.
(b) Se puede sacar un factor común a cualquier renglón o columna de una matriz y los determinantes se relacionan de una manera algebraica de factorización.

(c) Si a un renglón (o columna) le sumamos otro renglón (o, respectivamente, columna), no se cambia el valor del determinante.

d) $\begin{vmatrix} a & b_1 + b_2 \\ c & d_1 + d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b_1 \\ c & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b_2 \\ c & d_2 \end{vmatrix}$.

Esta propiedad se cumple para el determinante de 3×3,

$\det\left(a^{\uparrow}, b_1^{\uparrow} + b_2^{\uparrow}, c^{\uparrow}\right) = \det\left(a^{\uparrow}, b_1^{\uparrow}, c^{\uparrow}\right) + \det\left(a^{\uparrow}, b_2^{\uparrow}, c^{\uparrow}\right)$,

donde el símbolo $u^{\uparrow} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$ denota las entradas de una columna de un determinante de 3×3.

Y en general, se cumple para determinantes de $n \times n$, lo que uno puede comprobar por la inducción utilizando una de las dos definiciones para determinantes que se encuentran en los libros, mismas que uno puede concebir por su propia cuenta.

Como una aplicación de las propiedades, en el cuestionario se propone una actividad lúdica con el determinante de $n \times n$ llamado circulante, del cual se puede obtener todos los números de Fibonacci.

Sequência didática com polígonos e área de figuras planas utilizando objetos de aprendizagem

Agostinho Iaqchan Ryokiti Homa
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
iaqchan@hotmail.com

Resumo

Este minicurso apresenta uma sequência didática, com a temática área de figuras planas, utilizando objetos de aprendizagem construídos no *software* Geogebra. O objetivo foi elaborar uma sequência didática, com objetos de aprendizagem interativos, de maneira que os estudantes do Ensino Fundamental construam os conceitos de polígonos e as fórmulas de áreas das figuras planas através da observação e manipulação desses objetos. A sequência está de acordo com o padrão *SCORM,* e foi implementada na plataforma de ensino *ILIAS* e encontra-se disponível no endereço: http://matematica.ulbra.br/ilias.

Palavras chaves: Geometria, Sequência Didática, Objetos de Aprendizagem, Polígonos, Área de Figuras Planas.

Introdução

Apresenta-se uma sequência didática, organizada em conformidade com o padrão *SCORM* 2004 (ADLNET, 2009) e implementada (desenvolvida, aplicada e avaliada) na plataforma de ensino ILIAS, com a temática *Polígonos e Área de figuras planas*, utilizando objetos de aprendizagem, construídos no *software* Geogebra. O minicurso será desenvolvido com o uso de multi-mouses que permitem a manipulação dos objetos de aprendizagem pelos participantes, levando-os a concluírem os conceitos de geometria que foram planejados.

Objetivo

O objetivo foi elaborar uma sequência didática, com objetos de aprendizagem interativos, que levem os estudantes do Ensino Fundamental a construírem o conceito de polígonos e as fórmulas de áreas das figuras planas através da manipulação e observação desses objetos.

Sequência Didática

Entende-se por Sequência Didática a organização de um conteúdo qualquer, a partir da articulação entre os conceitos e procedimentos a serem desenvolvidos, com atividades didáticas planejadas para esse fim, com foco na aprendizagem. Segundo Zabala (1998, p. 18), sequências didáticas são "[...] um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que tem um princípio e um fim conhecido, tanto pelos professores como pelos alunos". Dolz, Schneuwly (2004) consideram que sequências didáticas são organizadas pelo professor com o objetivo de alcançar a aprendizagem de seus alunos, e envolvem atividades de aprendizagem e avaliação.

Segundo Groenwald, Zoch, Homa (2009, p.2):

> A vantagem do uso de uma sequência didática em uma plataforma de ensino é a possibilidade da utilização de diferentes recursos, com padrão superior de qualidade, como vídeos-exemplo, textos com exemplos em movimento, ou seja, um conteúdo visual com maior qualidade de visualização.

Em 1977 o Departamento de Defesa dos Estados Unidos (DoD) e o Escritório de Política de Ciência e Tecnologia da Casa Branca (OSTP) lançaram o *ADL (Advanced Distributed Learning Initiative)* que apresentou o *SCORM* (*Sharable Content Object Reference Model*) como a solução para as necessidades de prover acesso a um aprendizado de alta qualidade, levando em consideração as necessidades individuais, com a capacidade de ser entregue a qualquer hora e em qualquer lugar a um custo efetivo menor do então existente e definindo o conteúdo reutilizável como um objeto educacional, dentro de uma estrutura técnica para aprendizagem baseada em computador e na *Web*.

O *SCORM* é o resultado da especificação e padronização baseadas no trabalho de outras entidades normativas, podendo ser identificado como a união das melhores práticas e padrões existentes em *e-learning* (*electronic learning*) anteriores ao seu surgimento; padrões que continuam sendo aprimorados pelos seus criadores, os quais colaboram com o *ADL Initiative*. Uma sequência de apresentação de conteúdos em conformidade com o padrão *SCORM* garante a portabilidade da sequência, ou seja, garante o mesmo comportamento de apresentação em qualquer *Learning Management System* (*LMS*) que também esteja em conformidade com o padrão. Atualmente existem diversos *LMS*, de uso livre ou com tecnologias proprietárias, em conformidade com o *SCORM*, dentre as de uso livre o *Moodle* e o *ILIAS* são destaque. Neste trabalho optou-se pela plataforma *ILIAS*, pois a mesma tem um gerenciamento mais simples que o *Moodle* com uma interface visualmente menos carregada e possibilidade de customização das telas dos usuários.

O uso de atividades interativas, para a sequência didática, levou à busca por um *Dynamic Geometry System* (*DGS* – Sistema de Geometria Dinâmica) para o desenvolvimento das atividades em formato eletrônico. Deste modo, para atender as recomendações do padrão *SCORM*, as atividades foram desenvolvidas utilizando o *software* Geogebra, pois o mesmo permite que as atividades sejam exportadas para um formato *WEB*.

O Geogebra é um *software open source*, sob o GNU (*General Public License*) dispovível em www.geogebra.org, que agrega as funcionalidades de *DGS* e de *Computer Algebric System* (CAS) no plano, sendo então denominado como um *Dynamic Mathematics Software* (DMS) para Geometria, Álgebra e Cálculo (Hohenwarter & Preiner, 2007).

Segundo Hohenwarter e Fuchs (2004):

> Geogebra é um software de Geometria interativa que também fornece possibilidades algébricas como entrar diretamente com equações. Ele é direcionado aos estudante (10 a 18 anos) e professores do Ensino Médio. O software incentiva os estudantes a abordarem a matemática de maneira experimental (tradução nossa).

A sequência didática foi organizada de modo que, através de atividades interativas, o aluno identifique as relações entre as dimensões das figuras planas e a área das mesmas. Para tal objetivo, as atividades foram desenvolvidas como objetos de aprendizagem segundo o conceito de granularidade (*ADNET*, 2004) e como objetos específicos de aplicação, desenvolvidos com base em um objetivo simples (Hodgins, 2002) de modo que cada atividade é independente entre

si podendo ser reutilizado em outras sequências didáticas. Granularidade é uma das características dos objetos de aprendizagem, ou seja, o conceito a ser trabalho deve estar completamente contido no objeto de aprendizagem, de modo que possa ser organizado com outros objetos de aprendizagem para conseguir objetivos mais complexos.

Os objetos de aprendizagem (OA) são partes componentes dessa organização que, segundo Wiley (2000), são recursos digitais que podem ser reutilizados para o suporte ao desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem. Para o *IEEE* (*Institute of Electrical and Electronics Engineers*, 2002) os objetos de aprendizagem são qualquer entidade, digital ou não, que pode ser utilizada, reutilizada ou referenciada durante o processo de ensino e aprendizagem que utilize tecnologia.

Nas atividades presentes nos OA são apresentadas instruções para que os alunos entendam quais são as interações disponíveis, o que cada informação representa. O OA é organizado de maneira que o objetivo proposto seja alcançado dentro de aproximadamente 10 minutos, adequado ao conceito de objeto de aprendizagem que, segundo Mortimer (2002), deve ter um objetivo de aprendizagem dentro de um determinado tempo para a sua execução.

Logo as atividades têm a característica de reutilização, com uma descrição mínima de seus objetivos, tipos de interações, existindo em si só, ou seja, não depende de outros objetos para atender o objetivo proposto.

Merril (2002) afirma que objetos sem um *design* instrucional são somente objetos de conhecimento, ou seja, tem um caráter mais informativo, por isso a sequência didática segue uma abordagem construtivista, onde o estudante através das interações que realiza com os objetos de aprendizagem identifica as relações e generaliza os conceitos propostos.

Organização da sequência didática com a temática polígonos e área de figuras planas

Na sequência desenvolvida os objetos estão encadeados didaticamente, levando o estudante a construção dos conceitos de polígnos e área das principais figuras planas: triângulos, quadriláteros e círculo.

Apesar da sequência estar em um formato de *e-learning* e disponível na *WEB*, podendo ser realizada na modalidade a distância, recomenda-se a sua realização de forma presencial pois, as atividades foram organizadas para serem realizadas com a mediação do professor que orientará quais e quantas manipulações, por atividade, os alunos estudarão e, se necessário, esclarecer sobre as instruções dos objetos.

O *layout* dos OA foi organizado com o objeto do *Geogebra* a esquerda e, a direita, as instruções mínimas de interação. As sugestões de manipulação, com o objetivo de generalizar as fórmulas de área, deverão ser realizadas pelo professor que pode orientar para estudos individualizados ou colaborativos, neste caso as orientações são mínimas deixando que os grupos façam suas próprias sugestões de construção.

A seguir apresentam-se exemplos de objetos disponibilizados na sequência didática desenvolvida e que serão manipulados pelos participantes do minicurso através da utilização de multi-mouses.

Objetos de Aprendizagem com área de figuras planas

Os objetos de aprendizagem a seguir objetivam que o estudante generalize o modelo matemático de polígonos e área de figuras planas. Foram desenvolvidos na seguinte ordem:

conceito de polígono, classificação dos polígonos, modelo matemático para a área de retângulos e quadrados, paralelogramos propriamente dito, trapézios, losangos, triângulos e círculos.

A Figura 1 apresenta o objeto de aprendizagem para que o estudante identifique linha poligonal, tipos de linhas poligonais, conceito de polígono.

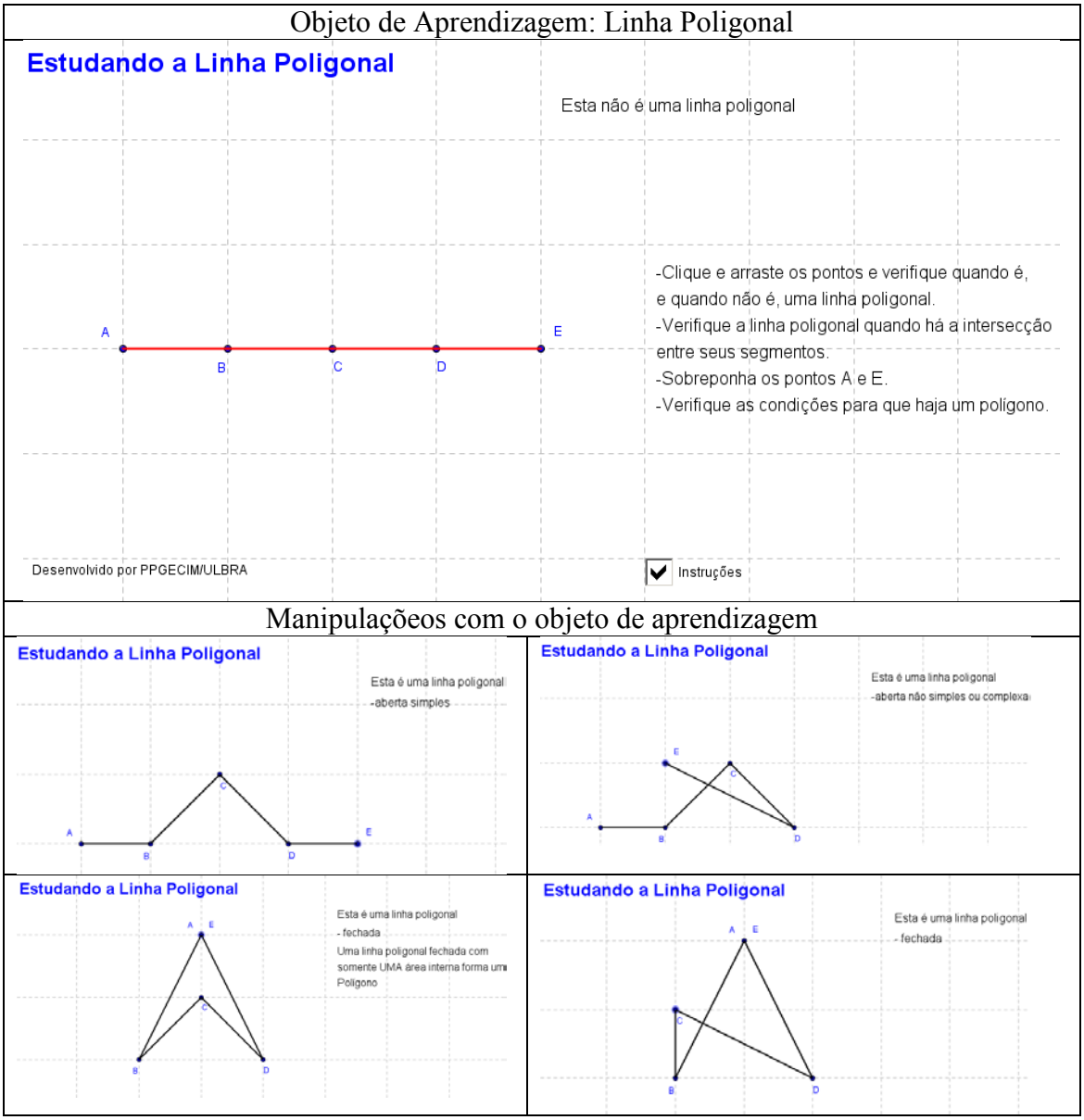


Figura 1. Objeto de Aprendizagem de Linha Poligonal
Fonte: Repositório de Objetos de Aprendizagem do PPGECIM.

As conclusões possíveis com as manipulações do objeto referido são: Linha poligonal é uma linha formada por um conjunto de segmentos de retas sucessivas e não colineares; Classificação das Linhas Poligonais: linha poligonal aberta simples; linha poligonal aberta complexa (quando há intersecção entre os segmentos); linha poligonal fechada; Polígono é uma figura plana limitada por uma linha poligonal fechada com uma região interna.

O objeto de aprendizagem da Figura 2 apresenta o paralelogramo com a possibilidade de manipulação da sua base e altura através de controles situados à direita, um controle para alterar o deslocamento entre a base inferior e a superior e um controle para animação que transforma o objeto em um retângulo, a partir de uma das alturas.

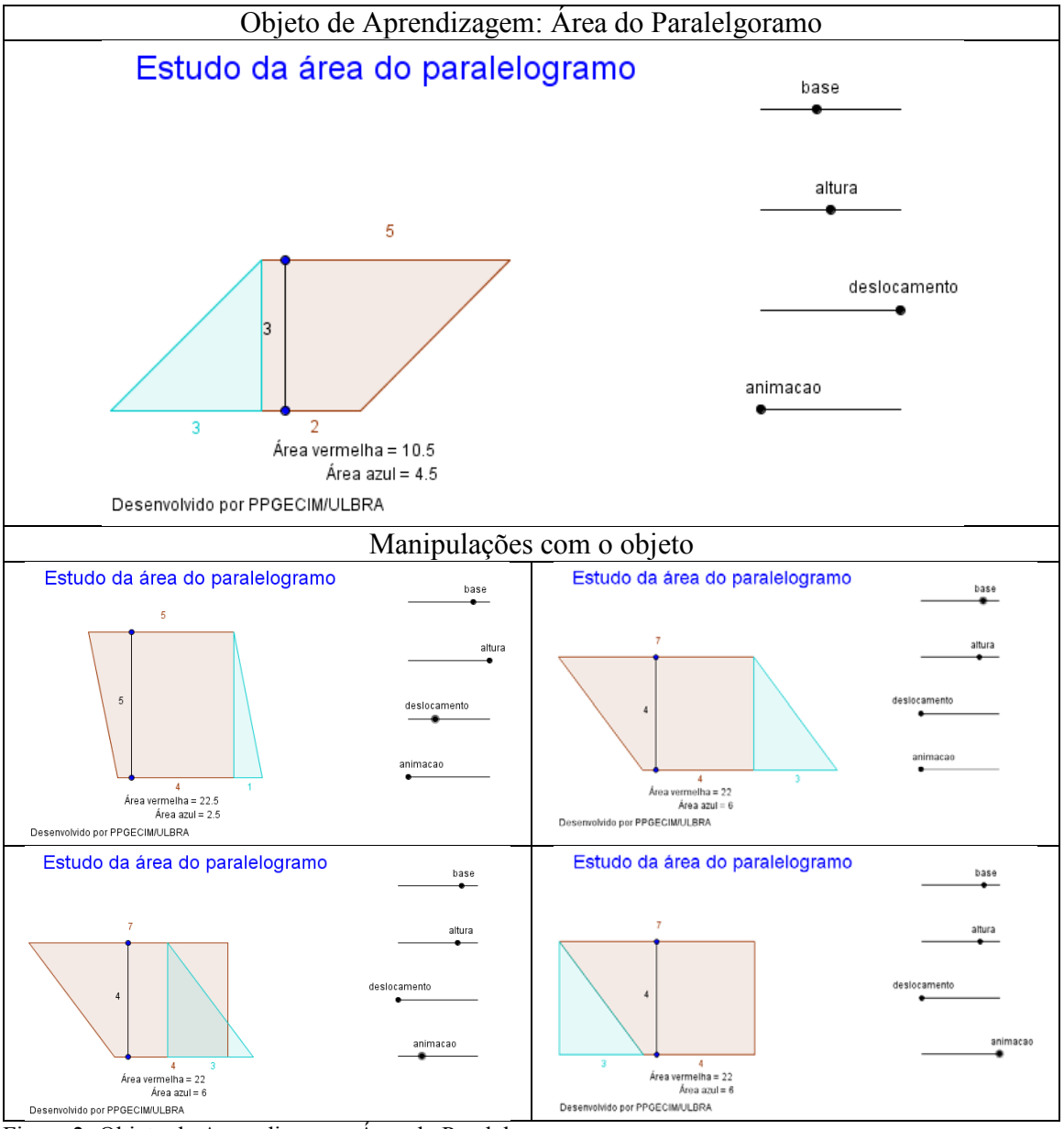


Figura 2- Objeto de Aprendizagem: Área do Paralelgoramo
Fonte: Repositório de Objetos de Aprendizagem do PPGECIM.

Através da animação o paralelogramo é transformado em um retângulo, cuja área já foi apresentada na atividade anterior, deste modo espera-se que o estudante generalize a área do paralelogramo como o produto da base pela altura.

Como atividade recomenda-se que seja proposto a construção de paralelogramos com o deslocamentos à esquerda, à direita e sem deslocamento algum, verificando as áreas dos objetos geométricos.

Ex:

- Verifique a área do paralelogramo com altura 5 e controle de base todo para a esquerda e controle de deslocamento todo para a direita.
- Manipule os controle de base e deslocamento para obter, com diferentes deslocamentos, uma base de 5. Determine as áreas para altura 5.

A Figura 3 apresenta o objeto de aprendizagem para a área do trapézio. Pela manipulação dos vértices, altera-se a medida da altura e das bases, sendo possível a construção de diferentes trapézios.

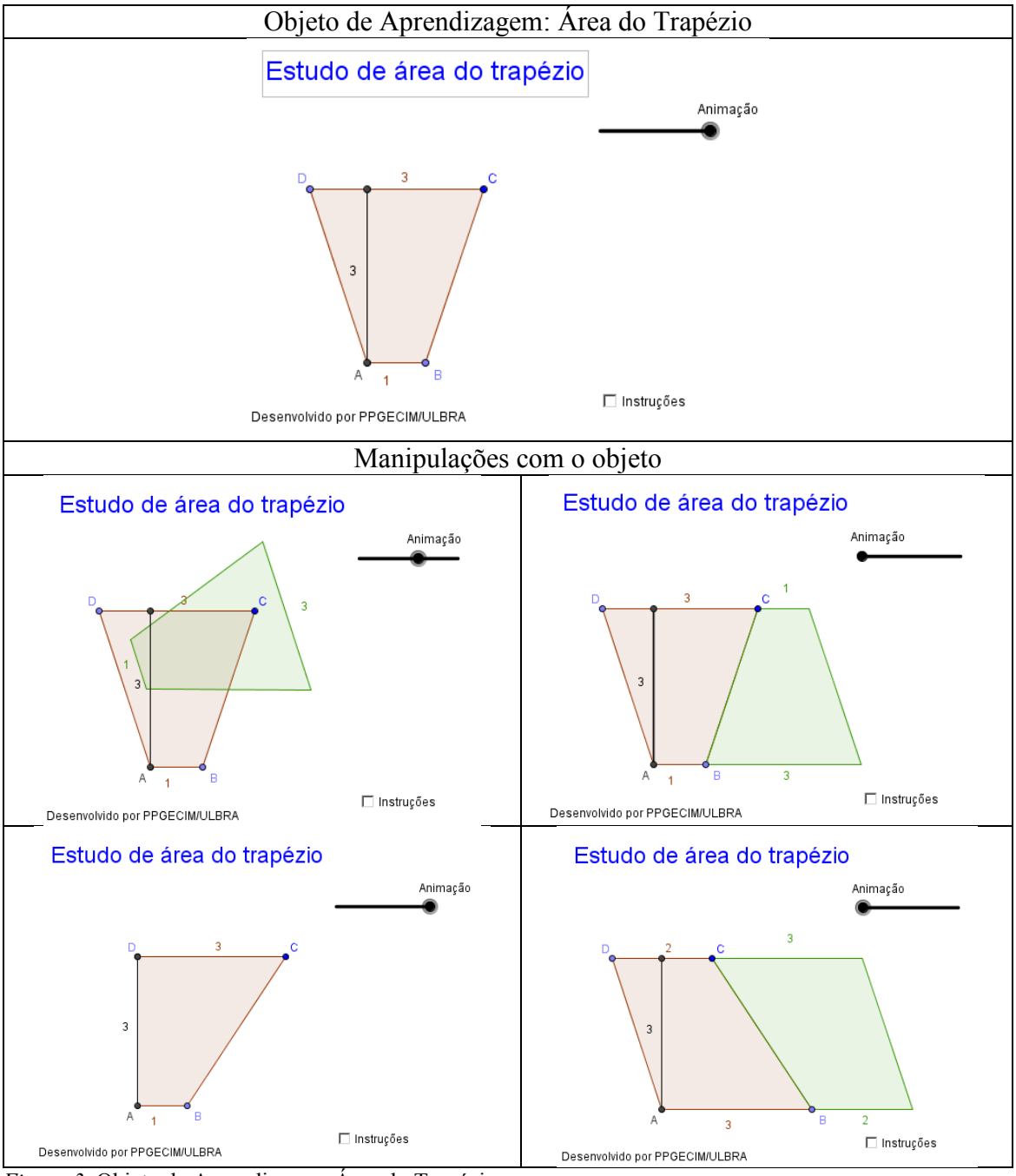


Figura 3. Objeto de Aprendizagem Área do Trapézio
Fonte: Repositório de Objetos de Aprendizagem do PPGECIM.

Pela animação o trapézio é transformado em um paralelogramo com o dobro da área do trapézio, deve-se, quando necessário, indicar que a soma das bases do trapézio será o valor da base do paralelogramo.

Ex:

- Construa um trapézio com base 4 e 3 (pontos B e D), mude o ponto C de modo que um dos lados fique perpendicular com a base. Anime, verifique a figura formada e determine a área do trapézio.
- Construa um trapézio com bases 1 e 3, mude o ponto C para uma altura 3 de modo que nenhum dos lados fique perpendicular a base. Verifique a área do trapézio. Mude o ponto C para diferentes deslocamentos. Anime e verifique as figuras formadas e as áreas.

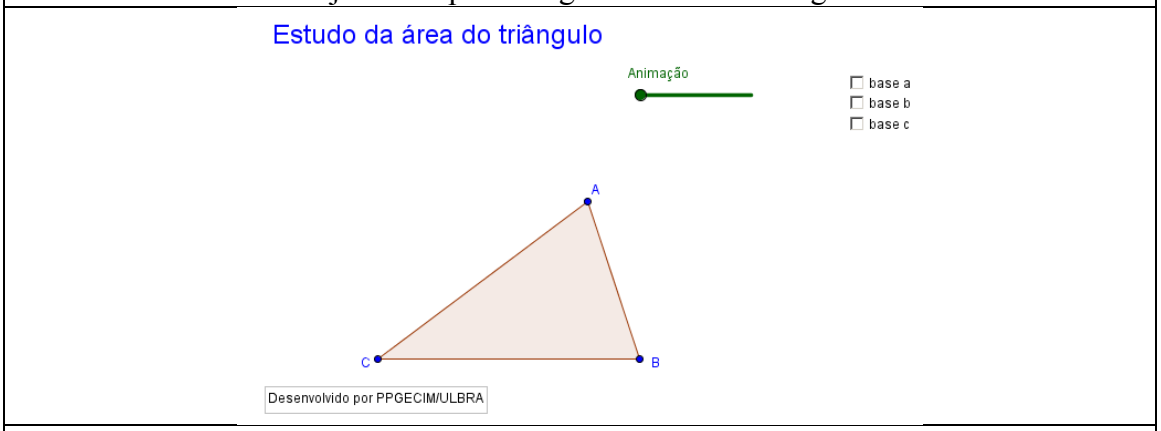
A figura 4 apresenta a área de triângulos. Neste objeto é possível que o estudante visualize a transformação do triângulo em um paralelogramo e que perceba que a medida da área do triângulo é a metade da área do paralegramo. É possível que o estudante realize as transformações optando por uma das alturas do triângulo em relação a uma das bases. Importante salientar que esse OA permite ao estudante observar que dependendo da base escolhida, obtém-se diferentes alturas, mas a medida da área permanece a mesma.

Ex:

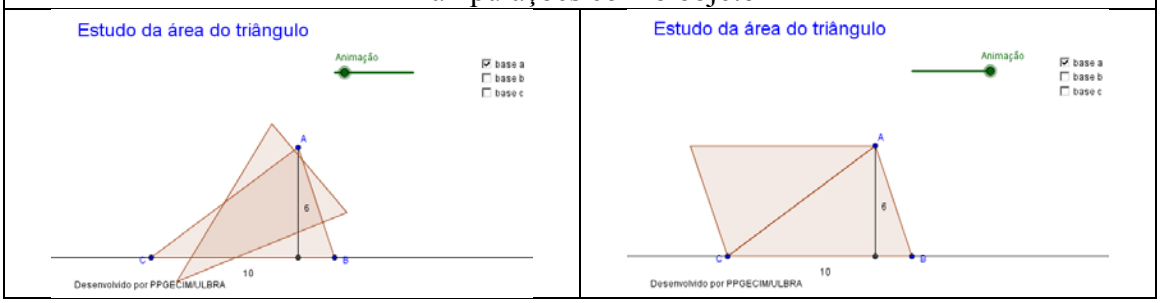
-Construa um triângulo com base 5 e altura 3, selecione a *base a* , anime e verifique qual a área de qual objeto geométrico tem relação com a área do triângulo. Determine a área.

- Desmarque a *base a* e selecione a *base b*, verifique as dimensões da base e da altura em relação à nova base. Anime e determine a área do triângulo.
- Desmarque a *base b* e selecione a *base c*, verifique as dimensões da base e da altura em relação à nova base. Anime e determine a área do triângulo.

Objeto de Aprendizagem: Área do Triângulo



Manipulações com o objeto



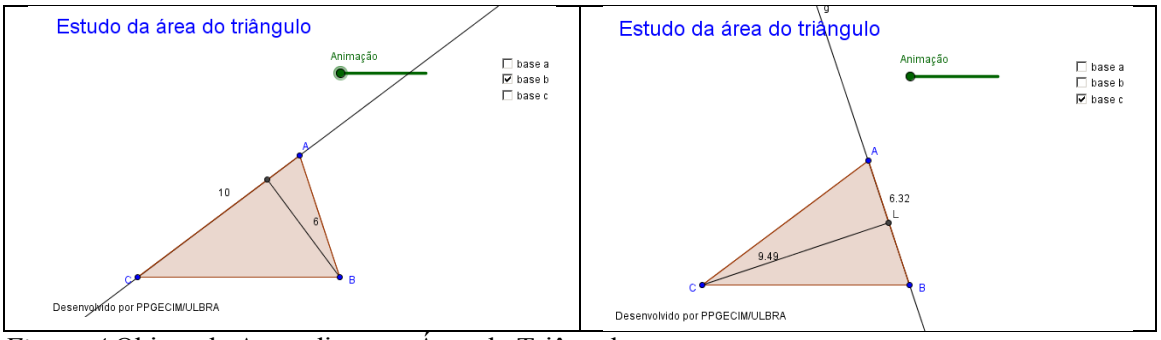
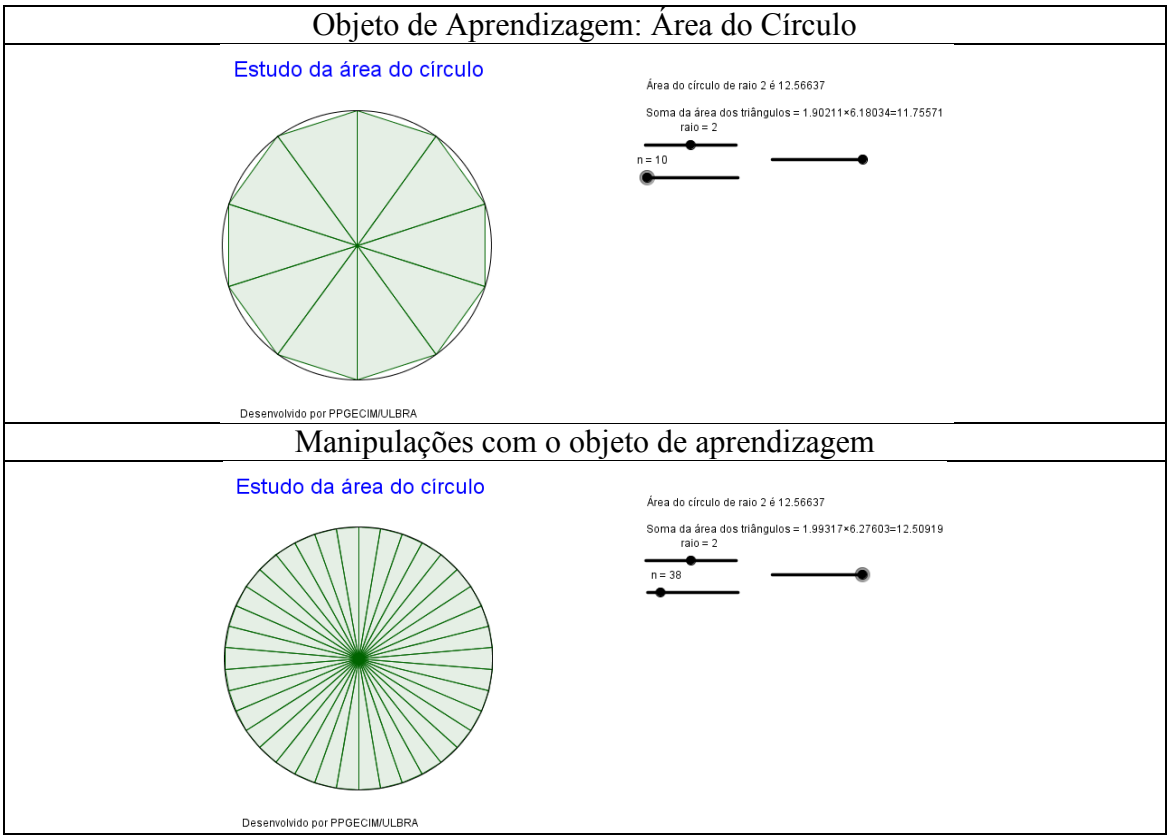


Figura 4 Objeto de Aprendizagem Área do Triângulo
Fonte: Repositório de Objetos de Aprendizagem do PPGECIM.

A figura 5 apresenta o objeto de aprendizagem que trabalha a generalização da área do círculo, através da visualização da área do círculo como a área aproximada de um paralelogramo, cuja base é a metade do perímetro do círculo e a altura é próxima ao raio do círculo desenhado. O objeto permite, também, que se construam círculos com diferentes medidas de raios, assim como, a decomposição em diferentes números de diâmetros que manipulados formarão o paralelogramo.



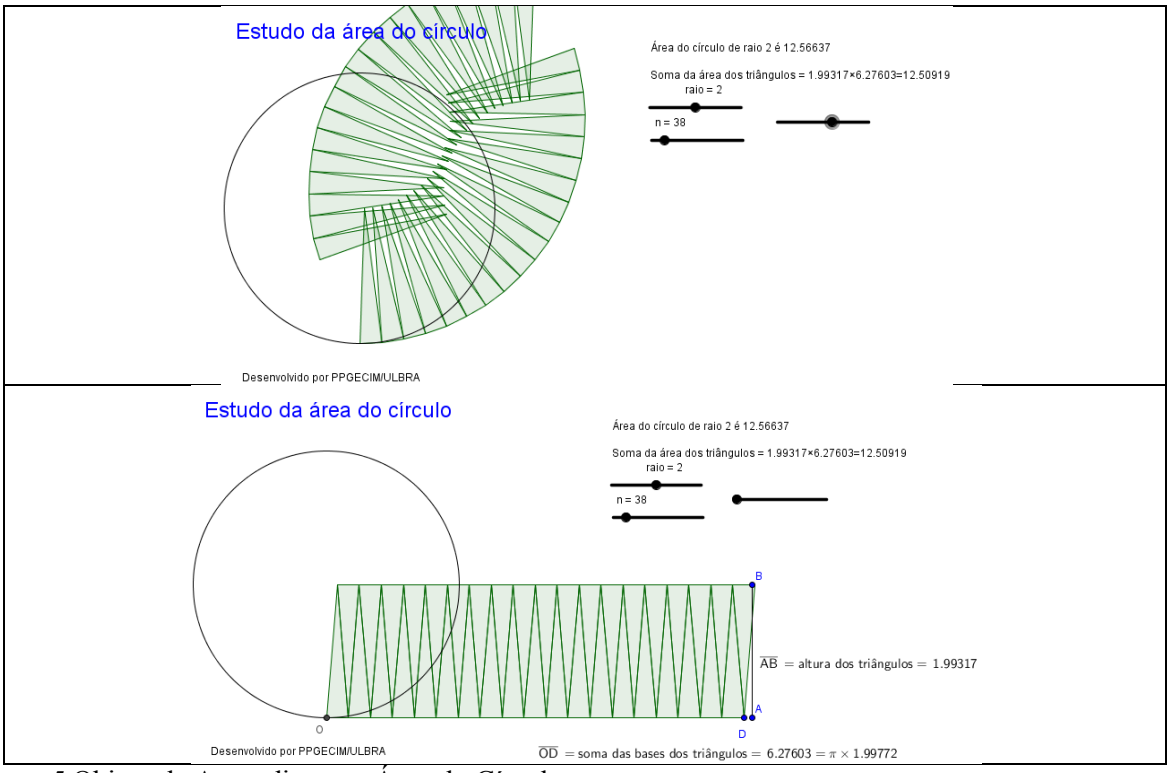


Figura 5 Objeto de Aprendizagem Área do Círculo
Fonte: Repositório de Objetos de Aprendizagem do PPGECIM.

Nessa atividade observa-se que a área do paralelogramo se aproxima da área do círculo quando o número de diâmetros tende ao infinito. Pode-se trabalhar com a ideia de infinitesimal pela visualização de que os triângulos, que compõem o trapézio, têm a medida dos lados iguais ao raio do círculo e sua altura terá medida próxima ao raio quando a base dos triângulos tender a zero, ou seja, quando o número de triângulos tender ao infinito.

Ex:

- Contrua um círculo de raio 1 e *n* igual 10. Anime e compare as áreas do círculo e do trapézio formado pela soma dos triângulos. Aumente o valor de *n* até o máximo e verifique que a soma das bases se aproxima de qual valor? (Obs: a simbologia e o valor de π deve ser de conhecimento dos estudantes).
- Anime e verifique que os triângulos internos ao círculo formam um trapézio.
- Para diferentes valores de raio e *n* verifique o valor da base do trapézio formado pela soma dos triângulos. Determine a área do trapézio formado e compare com a área do círculo.

Conclusão

O GeoGebra é um *software* adequado à construção de objetos de aprendizagem manipuláveis sem que seja necessário o conhecimento de programação avançada. Importante frisar que os objetos desenvolvidos não devem ser apresentados individualmente, pois os mesmos são baseados no conhecimento da área do paralelogramo e do retângulo, logo, salienta-se a importância da construção de uma sequência didática que apresente os objetos encadeados. Nesse sentido, o desenvolvimento da sequência foi realizada no padrão *SCORM*, que mostrou-se eficiente, dentro das premissas definidas, atendendo às expectativas de entrega dos conteúdos adequados às necessidades dos alunos.

A escolha do padrão *SCORM* atendeu a implementação das regras em um padrão aberto de *e-learning*, o que facilita a difusão das ideias em outras instituições, algo que poderia ser dispendioso e inviável para pequenos projetos de conteúdo utilizando plataformas proprietárias para o *e-learning*.

Referências e bibliografia

ADLNET. (2009). Sequencing and Navigation. Retrieved December 05, 2011, from http://www.adlnet.gov

Dolz, J., & Schneuwly, B. (2004). *Gêneros orais e escritos na escola*. Campinas: Mercado da Letras.

Groenwald, C. L. O., Zoch, L., & Homa, A. I. R. (2009). Sequência Didática com Análise Combinatória no Padrão SCORM. *Bolema*, *22*(34), 27 – 56.

Hodgins, H. W. (2002). The Future of Learning Objects. In J. R. Lohmann & M. L. Corradini (Eds.), *e-Technologies in Engineering Education Learning Outcomes Providing Future Possibilities* (pp. 76–82). a. Retrieved from http://dc.engconfintl.org/etechnologies/11

Hohenwarter, M., & Fuchs, K. (2004). Combination of dynamic geometry , algebra and calculus in the software system GeoGebra. Retrieved from http://www.geogebra.org/publications/pecs_2004.pdf

Hohenwarter, M., & Preiner, J. (2007). Dynamic Mathematics with GeoGebra. *The Journal of Online Mathematics and Its Applications*, *7*. Retrieved from http://www.maa.org/external_archive/joma/Volume7/Hohenwarter/index.html

Institute of Electrical and Electronics Engineers. (2002). IEEE Standard For Learning Object Metadata. Retrieved March 05, 2013, from http://grouper.ieee.org/groups/ltsc/wg12/

Kampff, A. J. C., Machado, J. C., & Cavendini, P. (2004). No Title. In *X Workshop de Informática na Escola e XXIII Congresso Da Sociedade Brasileira De Computação*. Bahia. Retrieved from http://www.cinted.ufrgs.br/renote/nov2004/artigos/a12_tecnologias_matematica.pdf

Merrill, D. (2002). Position statement and questions on learning objects research and practice. In *Learning objects technology: Implications for educational research and practice, AERA*. New Orleans. Retrieved from http://www.learndev.org/LearningObjectsAERA2002.html

Mortimer, L. (2002). Objects of desire: Promise and practicality. *Learning Circuits*. Retrieved from http://www.learningcircuits.org/2002/apr2002/mortimer.html

Wiley, D. A. (2000). Connecting learning objects to instructional design theory: A definition, a metaphor, and a taxonomy. *The Instructional Use of Learning Objects*. Retrieved from http://reusability.org/read/chapters/wiley.doc

Zabala, A. (1998). *A prática educativa: como ensinar*. Porto Alegre: Artmed.

Simulación de variables aleatorias discretas utilizando Excel

Greivin **Ramírez** Arce
Escuela de Matemática, Tecnológico de Costa Rica
gramirez@itcr.ac.cr
Kendall **Rodríguez** Bustos
Tecnológico de Costa Rica
kendall2412@gmail.com

Resumen

El taller pretende mostrar estrategias de simulación, tanto físicas, como computacionales con el uso de Excel, de variables aleatorias discretas; partiendo desde el diseño de la distribución, el desarrollo repetitivo de experimentos, su representación gráfica hasta el cálculo de probabilidades de forma frecuencial. Los participantes podrán utilizar material manipulativo para analizar el comportamiento de casos individuales, así como el computador para inferir patrones y generalizar resultados en la solución de problemas estocásticos. Las técnicas empleadas serán de eliminación, eliminación-adición y repetición.

Palabras clave: simulación, variables aleatorias discretas, Excel, distribuciones de probabilidad, resolución de problemas.

Introducción

Existe un acuerdo casi universal entre los investigadores de estocástica y su didáctica, que las simulaciones en computadora, las hojas de cálculo y el uso de las computadoras para conducir el Análisis Exploratorio de Datos (AED) y resolver problemas estocásticos de manera frecuencial, son las direcciones hacia donde debe estar orientando la educación estocástica (Shaughnessy, 2002; Burrill, 2002; Ben-Zvi & Garfield, 2004; Inzunsa, 2006; Sanabria, 2013). Sin embargo, la creación de la distribución para empezar a realizar el proceso de muestreo no es sencilla a la hora de simular, de hecho es quizás la etapa clave que permite llegar a la solución de problemas estocásticos.

Se concuerda plenamente con el uso de la tecnología, tal y como es planteada en muchos currículos a nivel mundial, entendiendo su uso para disminuir los cálculos tediosos o rutinarios con el fin de concentrarse en los procesos de razonamiento o de aplicación más significativos, además de utilizarla como instrumento para obtener representaciones múltiples de datos (MEP, 2012).

Sin embargo, es importante previo al uso de la tecnología, que los estudiantes manipulen con material concreto (ya sean dados, cartas, monedas, entre otros) la situación planteada en el problema, como lo manifiesta Ramírez (2013):

> La simulación, primero física, permite que el estudiante se enfrente a la situación real del problema, con el fin de que empiece a observar el comportamiento de algunos experimentos, más tarde, la simulación computacional, permitirá inferir patrones, debido a la gran cantidad de experimentos que se pueden crear, manipulando parámetros y variando las condiciones del problema inicial. (pp.700-701).

Se propone, como estrategia metodológica en el taller, incorporar la simulación física y computacional, en la construcción de distribuciones de probabilidad de variables aleatorias discretas a través de problemas no triviales.

Para la simulación computacional se utiliza Excel que es un paquete dinámico que permite al usuario realizar simulaciones a través de su aporte funcional y gráfico. Además, es un paquete de fácil acceso para todo usuario en cualquier sistema operativo.

Aspectos teóricos

Algunos aspectos teóricos que son fundamentales conocer para desarrollar las actividades propuestas son los siguientes:

Probabilidad frecuencial de un evento A

Se define como: $P(A) = \frac{\text{núm de experimentos donde el evento A ocurre}}{\text{núm total de experimentos realizados}}$

Ley de los grandes números

Dado un experimento, sea A un evento y $X(n)$ el número de veces que ocurre A en n de estos experimentos, entonces para todo $\varepsilon > 0$ se tiene que: $P\left(\left|\frac{X(n)}{n} - P(A)\right| \geq \varepsilon\right) = 0$, para n lo suficientemente grande.

Muestreo aleatorio con reemplazo

Consiste en la extracción de una muestra aleatoria donde un elemento puede ser seleccionado cada vez que se haga la extracción. En este tipo de muestreo la probabilidad de que un elemento sea seleccionado en cada experimento se mantiene constante.

Muestreo aleatorio sin reemplazo

Consiste en la extracción de una muestra aleatoria donde una vez que un elemento ha sido seleccionado, éste no puede volver a formar parte del espacio muestral para la nueva extracción.

Variable aleatoria

Es una función de un espacio muestral Ω asociado al conjunto de los números reales.

Variable aleatoria discreta

X es una variable aleatoria discreta si y sólo si su rango es finito o infinito numerable.

Función de distribución de probabilidad para una variable aleatoria discreta

Si X es una variable aleatoria discreta, la función $f_X: R_X \to \mathbb{R}$ definida por $f_X(k) = P(X = k)$ se llama función de probabilidad de la variable aleatoria X.

Actividades

Problema 1. Dos bombillos defectuosos se mezclan con tres buenos. Se seleccionan uno a uno al azar y sin reposición hasta encontrar los dos defectuosos. Sea *X* el número de bombillos defectuosos. Determine la función de probabilidad de *X*.

Simulación física

Se recomienda insertar cinco canicas en una bolsa o urna, de tal manera que sean dos de un color (representan los bombillos defectuosos) y tres de otro color (representan los bombillos en buen estado). Los siguientes pasos permiten la simulación física:

1. Realizar el experimento de extraer canicas (bombillos), sin reposición, hasta obtener los dos defectuosos y contabilizar el número de extracciones que debió realizar para lograrlo.
2. Volver a poner las canicas en la caja y repetir el paso anterior.
3. De los *n* experimentos que realiza, hallar en cuántos de ellos se obtuvo los dos defectuosos en las dos primeras extracciones, el cociente será
   $P(X = 2)$
4. Se obtienen las otras probabilidades para terminar de obtener la distribución de probabilidad de la variable aleatoria *X*.

Simulación en Excel

Para realizar la simulación se toma valores enteros aleatorios entre 1 y 5, donde 1 y 2 representan los bombillos defectuosos, mientras que 3, 4 y 5 representan los bombillos en buen estado. Estas técnicas de simulación se le llama de repetición y eliminación, primero porque habrá que lanzar el dado repetidamente, sin reposición, hasta que ocurran los dos defectuosos, y segundo ir eliminando los valores del dado que representan los bombillos según los resultados obtenidos. Se presenta a continuación una posible simulación:

1. Se crea una variable en la primera columna llamada "Bombillo1" que se le asigna el comando: *=ALEATORIO.ENTRE(1,5)*
2. Se crea otra variable en la segunda columna llamada "Bombillo2" que se le asigna: *=SI(A2>2,ALEATORIO.ENTRE(1,4),ALEATORIO.ENTRE(2,5))*

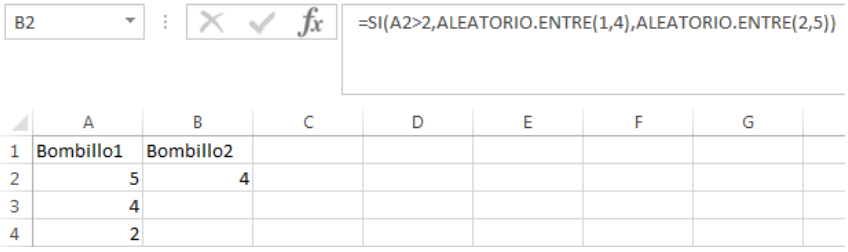


Figura 1. Paso 2 de simulación en Excel

Es aquí donde se muestra la técnica de eliminación, pues aunque los bombillos en cada estado no son distinguibles, si se obtiene un valor mayor que dos, entonces se sabe que como salió uno en buen estado, sin importar cuál sea (entre 3, 4 y 5), ahora lo que importará es que quedan dos bombillos defectuosos (el 1 y el 2) y dos buenos (se tomarán como el 3 y 4). En caso contrario, si sale algún valor entre 1 o 2, sabemos que se obtuvo uno defectuoso, así que sin importar cuál sea (1 o 2), lo que interesará es que queda sólo uno defectuoso (el 2) y los tres en buen estado (3, 4 y 5).

3. Se crea en la tercera columna otra variable llamada "Bombillo3" que se le asigna: *=SI(Y(A2<3,B2<3),"F2",SI(O(Y(A2<3,B2>2),Y(A2>2,B2<3)),ALEATORIO.ENTRE(2,4), ALEATORIO.ENTRE(1,3)))*

Nuevamente con la técnica de sustitución, en caso de que los dos primeros hayan sido defectuosos (menos que 3), entonces se asigna "F2" que significa que los bombillos defectuosos se obtuvieron en las dos primeras extracciones. En caso que sólo se haya obtenido un bombillo defectuoso en las dos primeras extracciones (por tanto uno bueno también), entonces se elige un

aleatorio entre 2 y 4, pues eliminamos cada extremo (uno bueno y uno malo), en caso contrario entonces quedarán dos defectuosos y uno bueno, por lo que se elige un aleatorio entre 1 y 3.

C2 =SI(Y(A2<3,B2<3),"F2",SI(O(Y(A2<3,B2>2),Y(A2>2,B2<3)),ALEATORIO.ENTRE(2,4),ALEATORIO.ENTRE(1,3)))

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Bombillo1	Bombillo2	Bombillo3									
2	5	4	1									
3	1	2	F2									

Figura 2. Paso 3 de simulación en Excel

4. Se crea otra variable llamada "Bombillo4" que se le asigna: *=SI(C2="F2","F2",SI(O(Y(A2<3,C2<3),Y(B2<3,C2<3)),"F3",SI(Y(A2>2,B2>2,C2>2),"F5",ALEATORIO.ENTRE(2,3))))*

La técnica es la misma, sólo se debe notar que en caso de que se haya obtenido los dos defectuosos en las dos primeras extracciones, entonces a esta condición se le sigue asignando "F2" con el objetivo de llevar registro que ya no se debe lanzar más el dado, sino más bien tener presente que con la segunda extracción se acabó el experimento.

5. Se crea otra variable llamada "Bombillo5" que se le asigna: *=SI(D2=3,"F5",SI(D2=2,"F4",SI(D2="F5","F5",SI(D2="F3","F3","F2"))))*
6. Se arrastran cada una de estas fórmulas hasta realizar 1000 experimentos (hasta la fila 1001)
7. Se crea una nueva columna llamada "Numextracciones" que nos permitirá contar en cada experimento después de cuántas extracciones se obtuvo los dos bombillos defectuosos. Así: *=SI(E2="F1",1,SI(E2="F2",2,SI(E2="F3",3,SI(E2="F4",4,5))))*

F2 =SI(E2="F1",1,SI(E2="F2",2,SI(E2="F3",3,SI(E2="F4",4,5))))

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Bombillo1	Bombillo2	Bombillo3	Bombillo4	Bombillo5	NumExtracciones		
2	1	5	3	2	F4	4		
3	2	4	2	F3	F3	3		
4	1	2	F2	F2	F2	2		
5	3	4	1	3	F5	5		
6	1	3	3	2	F4	4		
7	3	3	3	F5	F5	5		

Figura 3. Paso 7 de simulación en Excel

8. Se encuentra la distribución de probabilidad de la variable X, calculando de los 1000 experimentos, el número de veces en los que se obtuvo los dos defectuosos en la segunda, tercera, cuarta o quinta extracción.

Así, $P(X = 2)$ se obtiene como: *=CONTAR.SI(E2:E1001,"=F2")/1000*

Y en forma similar para las demás.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Bombillo1	Bombillo2	Bombillo3	Bombillo4	Bombillo5	NumExtracciones	P(X=2)	0.101
2	4	1	4	2	F4	4	P(X=3)	0.21
3	1	4	2	F3	F3	3	P(X=4)	0.284
4	2	2	F2	F2	F2	2	P(X=5)	0.405
5	1	5	4	3	F5	5		

Figura 4. Paso 8 de simulación en Excel

9. Se grafica la distribución de probabilidad de X

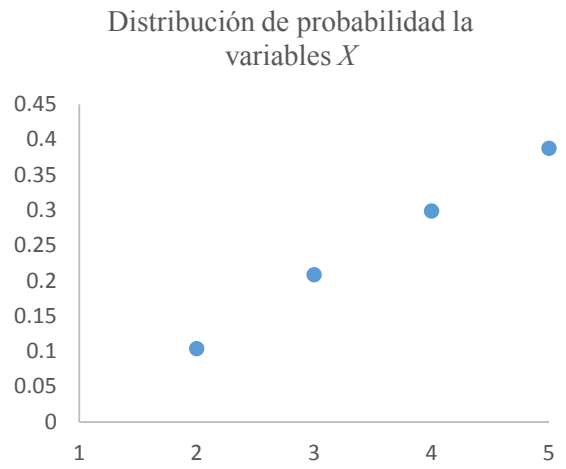


Figura 5. Paso 9 de simulación en Excel

Solución teórica

El espacio muestral es

$\Omega = \{DD, BDD, DBD, DBBD, BDBD, BBDD, DBBBD, BDBBD, BBDBD, BBBDD\}$ y el rango es $R_X = \{2,3,4\}$

La distribución de probabilidad está dada por:

X	2	3	4	5
$P(X=x)$	$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{4}$	$\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{5}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}\frac{3}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\frac{2}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\frac{2}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}\frac{2}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\frac{2}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\frac{2}{4}\frac{2}{3}\frac{1}{2}+\frac{3}{5}\frac{2}{4}\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{2}{5}$

Problema 2. En una canasta se tienen 3 bolas azules y 3 bolas rojas. Se comienza a sacar bolas al azar sucesivamente bajo las siguientes reglas:

Regla 1. Si la bola extraída es roja no se devuelve a la canasta y se agrega una bola azul a la canasta.

Regla 2. Si la bola extraída es azul se termina la extracción.

Si X es la variable que representa el número de extracciones realizadas hasta obtener la primera bola azul. Determine la distribución de probabilidad de X.

Simulación física

Para esta primera parte, consideramos seis bolas en una bolsa o una urna de tal manera que sean tres bolas de un mismo color y las otras tres de otro color. Los siguientes pasos permiten la simulación física, donde se realiza el proceso de extracción de bolas en forma aleatoria:

1. Realizar el experimento de extraer bolas, según las reglas planteadas en el problema, hasta obtener la primera bola azul y contabilizar el número de extracciones realizadas en el momento que obtiene la bola azul.
2. Regresar las bolas a la urna y repetir el experimento n veces.
3. De los n experimentos realizados, determinar en cuántos de ellos se obtuvo la bola azul en la primera extracción, el cociente $\frac{\#\ bolas\ azules\ en\ 1°\ extracción}{n}$ será la probabilidad de que $X = 1$.
4. De la misma manera que en el paso anterior, se calculan las otras probabilidades para terminar de obtener la distribución de probabilidad de la variable aleatoria X, donde el rango de X es $R_X = \{1,2,3,4\}$.

Simulación en Excel

Para efecto de la simulación computacional, consideremos las bolas rojas como el conjunto de valores numéricos $\{1,2,3\}$ y las bolas azules como $\{4,5,6\}$.

El problema consiste en realizar extracciones de bolas en forma aleatoria hasta obtener la primera bola azul; en caso de obtener la bola azul en el primer intento, se termine el experimento, según la regla 2.

La variación del problema surge cuando la primera bola es roja, pues ahí rige la regla 1: "Si la bola extraída es roja no se devuelve a la canasta y se agrega una bola azul a la canasta", es decir, la cantidad de bolas azules y rojas puede variar según el color de bola extraída.

Para ello, se considera la siguiente estrategia para modelar el problema planteado cuando se obtiene una bola roja; basado en la regla 1: al conjunto inicial $\{1,2,3,4,5,6\}$ se le elimina el primer elemento (bola roja) y se le agrega una bola azul, en este caso, se adiciona el sucesor de último número del conjunto: 7 que fungirá como bola azul. En esto consiste la técnica de eliminación-adición.

Así, de la segunda a la tercera extracción el conjunto $\{2,3,4,5,6,7\}$ se modifica al conjunto $\{3,4,5,6,7,8\}$ en el caso de que las bolas obtenidas hasta el momento sean rojas y en un último caso, de la tercera a la cuarta extracción se tendría el conjunto $\{4,5,6,7,8,9\}$, donde se puede observar que es la última posibilidad de extracción, debido a que la canasta no tiene más bolas

rojas, por lo que se obtendría una bola azul y por la regla 2; se termina la extracción. En la siguiente figura se muestra la estrategia explicada anteriormente para realizar la simulación computacional.

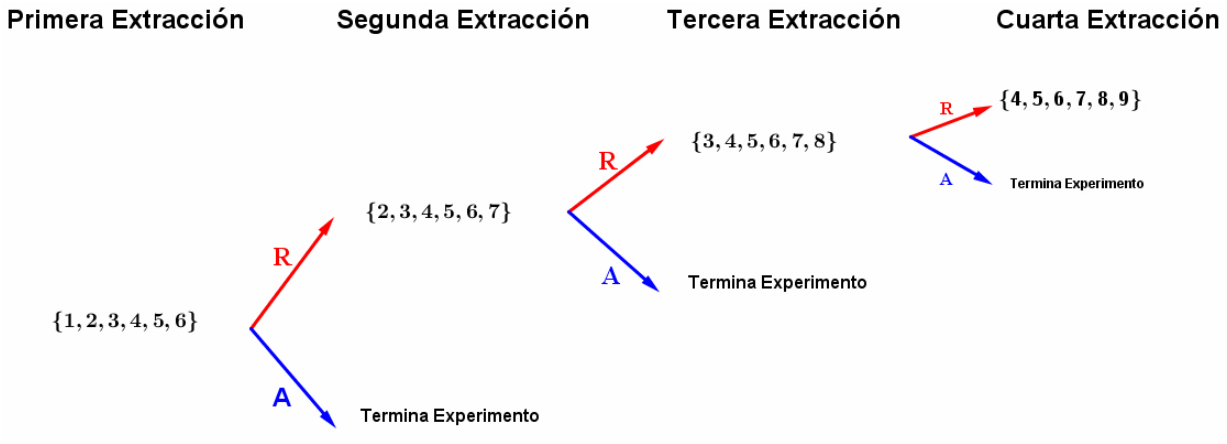
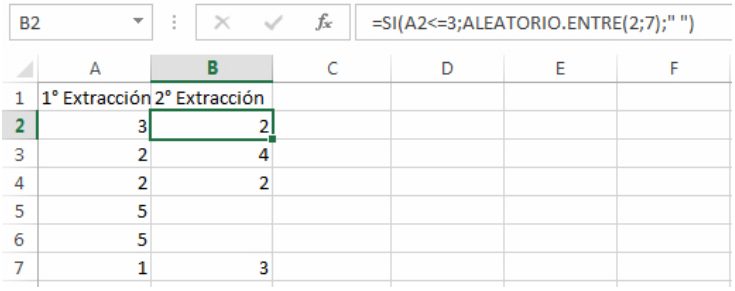


Figura 6. Estrategia para realizar simulación en Excel

Se presenta a continuación una posible simulación del problema planteado:

1. Se crea una variable en la primera columna llamada "1° Extracción" que se le asigna el comando: *=ALEATORIO.ENTRE(1;6)*
2. Se crea una variable en la segunda columna llamada "2° Extracción" que se le asigna el comando: *=SI(A2<=3;ALEATORIO.ENTRE(2;7);" ")*



	A	B	C	D	E	F
1	1° Extracción	2° Extracción				
2	3	2				
3	2	4				
4	2	2				
5	5					
6	5					
7	1	3				

Figura 7. Paso 2 de simulación en Excel

3. Se crea una variable en la tercera columna llamada "3° Extracción" que se le asigna el comando *=SI(B2<=3;ALEATORIO.ENTRE(3;8);" ")*.
4. En la cuarta columna se crea una variable llamada "4° Extracción", para ello se utiliza el comando: *=SI(C2<=3;ALEATORIO.ENTRE(4;9);" ")*.
5. Se arrastran cada una de estas fórmulas hasta realizar 1000 experimentos, en este caso, hasta la celda 1001 de cada columna.
6. Ahora interesa saber en cada uno de los experimentos, en cuál extracción se obtuvo la primera bola azul. Para ello, se crea una variable en la quinta columna llamada "NumExtracciones", donde se utilizará el comando: *=SI(A2>=4;"1";SI(B2>=4;"2";SI(C2>=4;"3";"4")))* y se arrastra dicha fórmula hasta la celda 1001 de esa misma columna.

E2 =SI(A2>=4;"1";SI(B2>=4;"2";SI(C2>=4;"3";"4")))

	A	B	C	D	E	F
1	1° Extracción	2° Extracción	3° Extracción	4° extracción	NumExtracciones	
2	6				1	
3	2	2	3	8	4	
4	4				1	
5	1	6			2	
6	3	6			2	
7	5				1	
8	2	5			2	

Figura 8. Paso 6 de simulación en Excel

7. Por último, se crean las variables "Rango" y "Probabilidad".

Para hacer el cálculo respectivo de cada probabilidad, se utiliza el comando: *=CONTAR.SI(E2:E1001;"=1")/1000.* Y así sucesivamente se obtienen las otras probabilidades.

H2 =CONTAR.SI(E2:E1001;"=1")/1000

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	1° Extracción	2° Extracción	3° Extracción	4° extracción	NumExtracciones	Rango	Probabilidad	
2	6				1	1	P(X=1)	0,526
3	2	6			2	2	P(X=2)	0,312
4	6				1	3	P(X=3)	0,135
5	6				1	4	P(X=4)	0,027
6	5				1			
7	4				1			
8	4				1			

Figura 9. Paso 7 de simulación en Excel

8. Finalmente, se realiza la gráfica de la distribución de la variable aleatoria X

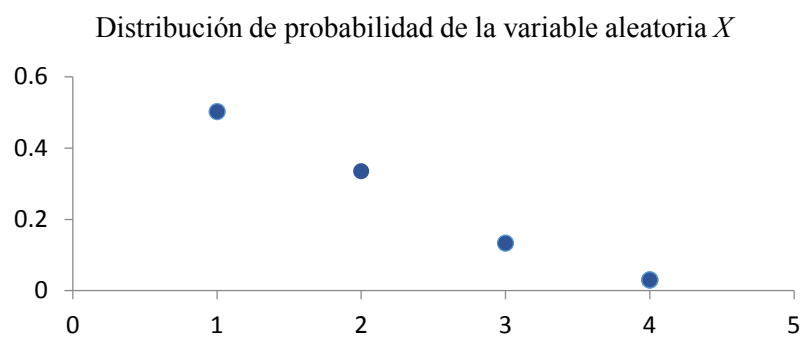


Figura 10. Paso 8 de simulación en Excel

Solución teórica

El espacio muestral es $\Omega = \{A, RA, RRA, RRRA\}$.

El rango de la variable X es $R_X = \{1,2,3,4\}$.

La distribución de probabilidad de la variable X está dada por:

X	1	2	3	4
$P(X=x)$	$\frac{3}{6}$	$\frac{3}{6}\cdot\frac{4}{6}$	$\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{5}{6}$	$\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{6}{6}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{1}{36}$

Problema 3. Hernán y Ester lanza una moneda cada uno una única vez. Sea *X* el número de caras obtenidas. Según el número de caras obtenidas por Hernán y Ester será la cantidad de veces que Mariela lance un dado. Si *Y* es la variable que representa la cantidad de unos obtenidos por Mariela, determine la distribución de probabilidad de *X* y de *Y*.

Simulación física

Para la variable *X*

Los siguientes pasos permiten la simulación física:

1. Realizar el experimento de lanzar dos monedas y contar el número de caras obtenidas.
2. De los *n* experimentos que realiza, hallar en cuántos de ellos se obtuvo cero caras en los dos lanzamientos, el cociente será $P(X = 0)$
3. Se obtienen las otras probabilidades para terminar de obtener la distribución de probabilidad de la variable aleatoria *X*.

Para la variable *Y*

Los siguientes pasos permiten la simulación física:

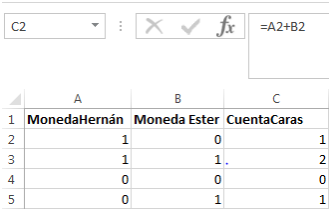
4. Según el número de caras obtenidas en cada experimento (de lanzar las dos monedas) de la simulación anterior, lanzar el dado tantas veces como caras obtenidas y contabilizar el número de unos que obtiene.
5. El cociente entre el total de unos obtenidos sobre el número *n* de experimentos que realiza será $P(Y = y)$. Se obtienen todas estas probabilidades para terminar de obtener la distribución de probabilidad de la variable aleatoria *Y*.

Simulación en Excel

Para la variable *X*

Para realizar la simulación se toman valores enteros aleatorios entre 0 y 1, donde el cero representa el "sol" y el 1 la "cara". Se utiliza la técnica de repetición.

1. Se crea una variable en la primera columna llamada "MonedaHernán" y se le asigna: *=ALEATORIO.ENTRE(0,1)*
2. Se crea en la segunda columna otra variable llamada "MonedaEster" y se le asigna: *=ALEATORIO.ENTRE(0,1)*
3. Otra variable se crea en la tercera columna llamada "CuentaCaras" y se le asigna: *=A2+B2*, que representa el número de caras obtenidas en los dos lanzamientos.



	A	B	C
1	MonedaHernán	Moneda Ester	CuentaCaras
2	1	0	1
3	1	1	2
4	0	0	0
5	0	1	1

Figura 11. Paso 3 de simulación en Excel

4. Se arrastran cada una de estas fórmulas hasta realizar 1000 experimentos (hasta la fila 1001)

5. Se encuentra la distribución de probabilidad de la variable X, calculando de los 1000 experimentos, el número de veces en los que ocurrió cero, una o dos caras.

   Así, $P(X = 1)$ se obtiene como: *=CONTAR.SI(C2:C1001, 0)/1000*

   Y en forma similar para las demás probabilidades.

E6 | =CONTAR.SI(C2:C1001,1)/1000

	A	B	C	D	E
1	MonedaHernán	Moneda Ester	CuentaCaras		
2	1	0	1		
3	0	0	0		
4	1	0	1		
5	1	1	2	P(X=0)	0.246
6	1	1	2	P(X=1)	0.488
7	1	0	1	P(X=2)	0.266

Figura 12. Paso 5 de simulación en Excel

   Para la variable Y

6. A partir de la simulación anterior, se crea una nueva variable en la columna D llamada "Dado1" que se le asigna:
   =SI(C2=0,"",SI(C2=1,ALEATORIO.ENTRE(1,6),ALEATORIO.ENTRE(1,6)))

   Se muestra que si se han obtenido cero caras, entonces el dado no se lanza.

7. Se crea otra variable llamada "Dado2" que se le asigna:
   =SI(C2=0,"",SI(C2=1,"",ALEATORIO.ENTRE(1,6)))

   En caso de haber obtenido cero o una cara, entonces el dado no se lanza.

8. Se crea otra variable llamada "Cuentaunos" que se le asigna: *=CONTAR.SI(D2:E2,1)*

F2 | =CONTAR.SI(D2:E2,1)

	A	B	C	D	E	F
1	MonedaHern	MonedaEste	CuentaCaras	Dado1	Dado2	Cuentaunos
2	1	1	2	1	2	1
3	0	0	0			0
4	1	1	2	1	1	2
5	0	0	0			0
6	0	1	1	5		0

Figura 13. Paso 8 de simulación en Excel

9. Se encuentra la distribución de probabilidad de la variable Y, calculando de los 1000 experimentos, el número de veces en los que ocurrió uno el lanzamiento de los dos dados.

   Así, $P(X = 0)$ se obtiene como: *=CONTAR.SI(F2:F1001,0)/1000*

   Y en forma similar para las demás probabilidades.

H6 =CONTAR.SI(F2:F1001,1)/1000

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	MonedaHern	MonedaEste	CuentaCaras	Dado1	Dado2	Cuentaunos		
2	1	0	1	3		0		
3	0	1	1	1		1		
4	1	0	1	2		0		
5	1	0	1	2		0	P(X=0)	0.842
6	1	0	1	1		1	P(X=1)	0.154
7	0	0	0			0	P(X=2)	0.004

Figura 14. Paso 9 de simulación en Excel

10. Se grafica la distribución de la variable Y

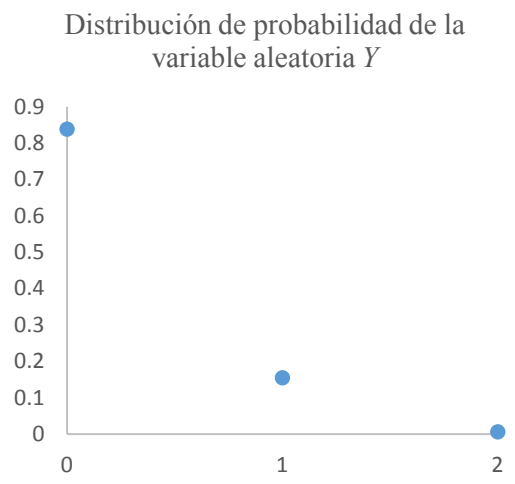


Figura 15. Paso 10 de simulación en Excel

Solución teórica

Para la variable X

El espacio muestral es $\Omega = \{SS, CC, SC, CS\}$ y el rango es $R_X = \{0,1,2\}$

La distribución de probabilidad está dada por:

X	0	1	2
$P(X = x)$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$

Para la variable Y.

El rango de es $R_Y = \{0,1,2\}$

La distribución de probabilidad está dada por:

Y	0	1	2
	0 de 0 v 0 de 1 v 0 de 2	1 de 1 v 1 de 2	2 de 2

$P(Y=y)$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}+\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^2$ $\frac{121}{144}$	$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}$ $\frac{11}{72}$	$\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2$ $\frac{1}{144}$

Conclusiones

Se destaca la importancia de la introducción de simulaciones físicas y computacionales aplicadas a eventos probabilísticos en diferentes niveles educativos. Además, serán los discentes, los encargados de crear sus propios experimentos probabilísticos; generando sus poblaciones, tomando muestras y calculando las probabilidades para que obtengan sus conclusiones.

Esta propuesta didáctica evitará que los alumnos abarquen los aspectos teóricos desde un punto de vista abstracto, permitiendo la relación entre conceptos con la realidad cotidiana del individuo. Se busca, por medio de proyectos o laboratorios computacionales, promover el razonamiento creativo y crítico de los estudiantes en el momento en que se enfrentan a distintas situaciones o eventos aleatorios.

Por último se pretende que el participante, a través de herramientas mínimas de programación en Excel, pueda utilizar las técnicas vistas en la resolución de nuevos problemas probabilísticos y estos a su vez desarrollen sus propias estrategias de eliminación, eliminación-adición y repetición.

Referencias y bibliografía

Ben Z-vi, D. y Garfield, J. (2004). Research on reasoning about variability: a forward. *Statistic Education Research Journal*, 3 (2), 4-6.

Burrill, G. (2002). Simulation as a tool to develop statistical understanding. En B. Phillips (Ed). *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics.*Cape Town South Africa.

Inzunsa, S. (2006). Significados que estudiantes universitarios atribuyen a las distribuciones muestrales en un ambiente de simulación computacional y estadística dinámica. Tesis doctoral no publicada. CINVESTAV-IPN. México.

Ministerio de Educación Pública (MEP). (2012). Reforma Curricular en Ética, Estética y Ciudadanía. Programas de Estudio de Matemática. I y II Ciclo de Educación Primaria, III Ciclo de Educación General Básica y Diversificada. Informe Técnico. Ministerio de Educación Pública, San José, Costa Rica. Extraído el 01 de Agosto, 2014 en: http://www.mep.go.cr/downloads/RecursosTecnologicos/Programas_matematica.pdf

Ramírez, G. y Rodríguez, K. (2014). *Ejercicios Resueltos de Probabilidades* (2ª ed.). Cartago, Costa Rica: Publicaciones ITCR.

Ramírez, G. (2013). Simulación física y computacional: estrategia metodológica para resolver problemas estocásticos, *Memorias del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (VII CIBEM)*. Montevideo, Uruguay.

Sanabria, G. (2013). Simulación en Excel de variables aleatorias discretas, *Memorias del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática (VII CIBEM)*. Montevideo, Uruguay.

Shaughnessy, M. (1992). Research in Probability and Statistics: Reflections and Directions. En Grouws, D. A.(Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* New York. Macmillan Publishing Company, pp. 465-494.

Una propuesta de enseñanza sobre la función lineal en el contexto de proyectos productivos agroindustriales

Ligia Amparo **Torres** Rengifo
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
liamtore@yahoo.es
Ofelia **Angulo** Vallejo
Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia
ofeliava@gmail.com

Resumen

En este taller se presentan, dos de las cinco situaciones de la Unidad didáctica diseñada en el marco del proyecto *Análisis de la articulación de proyectos productivos agroindustriales y la función lineal*. Esta unidad didáctica se implementó con estudiantes del grado 9° de la Institución Educativa (IE) Policarpa Salavarrieta del municipio de Yumbo[1], en el periodo académico 2012. El proyecto se fundamenta en una propuesta de Análisis Didáctico, que incluye un contexto curricular, un análisis de contenido (Modelación, Análisis Fenomenológico, Estructura Conceptual y Sistemas de Representación) y un análisis de instrucción. En la primera situación se pretende que los estudiantes identifiquen variaciones lineales en situaciones problemáticas, reconociendo la relación entre las magnitudes que intervienen en estas y, en la segunda, se orienta a los estudiantes para que identifiquen una relación de dependencia proporcional entre magnitudes y traduzcan su representación tabular a una algebraica, para un modelo de función lineal.

Palabras clave: análisis didáctico, unidad didáctica, función lineal, situaciones problémáticas, modelación matemática.

Planteamiento del problema y antecedentes

Este proyecto parte de reconocer la problemática presentada en la escuela sobre la falta de consideración del contexto sociocultural e institucional en el cual se desarrolla la actividad matemática particularmente en el campo algebraico, se debe a la forma como tradicionalmente se imparte la educación en el aula, en donde según Freudenthal (1983) se presenta una situación que él denominó *Inversión Antididáctica* la cual consiste en comenzar por los conceptos y no por la actividad matemática, enfoque contrario a su propuesta de Fenomenología didáctica que toma los fenómenos del mundo real y de las matemáticas que precisan ser organizados y los interpreta a través de conceptos matemáticos que son los medios de organización a partir de los cuales se enseña al estudiante a manipular el concepto involucrado.

[1] Municipio ubicado en el Departamento del Valle del Cauca, Colombia.

En un área específica como el álgebra, Kieran (1992) muestra en los resultados de sus investigaciones, que las dificultades presentadas por los estudiantes para el aprendizaje de esta asignatura están asociadas al aprendizaje, la enseñanza y el contenido y en estos tres aspectos se logra identificar la honda brecha ontológica entre las concepciones operacional y estructural, que desde la perspectiva del aprendizaje, principalmente se manifiesta en las reacciones de la mayoría de los estudiantes cuando comienza el estudio de las expresiones algebraicas y no logran comprender la estructura algebraica, puesto que no han alcanzado a desarrollar el álgebra en su parte estructural; de ahí sus intentos fallidos para convertir expresiones y/o situaciones problémáticas en ecuaciones, simplificar expresiones, operar sobre una ecuación como un objeto, entender que el signo igual es un símbolo de simetría más que el anunciante de un resultado, considerar las letras como variables o como "cantidades dadas", traducir problemas de palabras a ecuaciones, ver la estructura escondida de las ecuaciones y usar el álgebra como herramienta para probar relaciones numéricas.

Al respecto, Sfard (1991) reconoce la naturaleza dual de las concepciones matemáticas y enfatiza que estas dos concepciones operacional y estructural, no son mutuamente excluyentes sino que por el contrario se complementan ya que cualquier concepto matemático debe ser definido tanto estructural (como objeto) y operacionalmente (como proceso), para lograr un mayor entendimiento del mismo. Un ejemplo de esta dualidad de la interpretación, se observa con la dualidad del significado del signo igual (=) que en algunos casos actúa como símbolo de igualdad y en otros como una instrucción para obtener un resultado.

Arce, Torres, Ramírez, Valoyes, Malagón y Arboleda (sf) plantean en el marco de la perspectiva didáctica, que desde la etapa inicial del proceso de construcción de pensamiento algebraico, es fundamental la movilización de elementos asociados a la variación, los cuales permiten pasar del mundo de la cantidad al mundo de las relaciones, a través de la identificación de relaciones funcionales; estableciendo que el pensamiento algebraico integra el concepto de variables con todas sus connotaciones, usos y conexiones, es decir acepta la existencia de lo desconocido o lo que varía, representarlo a través de símbolos y operar sobre ello. Esto conlleva a que al pasar al campo específico del concepto de función, también se contemplen dificultades asociadas a su definición, a su simbolismo, a los modelos que esquematiza, a la amplia gama de sus aplicaciones y además a sus diversas formas de representación.

Esta proyecto asume estos dos grandes problemas, la descontextualización del saber matemático y la relación entre lo procedimental y estructural en la construcción de saberes algebraicos, se desarrolla en la Institución Educativa Policarpa Salavarrieta que ofrece especialidad Agroindustrial para la media técnica por cuanto dicha institución no está exenta de la problemática respecto a las dificultades en el aprendizaje de las matemáticas y el álgebra, además no existe articulación entre los contenidos curriculares del área de matemáticas y las situaciones provenientes de los proyectos productivos agroindustriales que desarrolla la especialidad; por esta razón se adelantó a partir del segundo semestre de 2012 este proyecto que permite caracterizar la articulación de situaciones problémicas de proyectos productivos agroindustriales y la función lineal, mediante una propuesta de Análisis Didáctico y de esta forma contribuir con la integración de los estudiantes en el próximo nivel de enseñanza media, potenciar su aprendizaje y dar respuesta al interrogante de investigación planteado:

¿Cómo caracterizar la articulación de situaciones problémicas de proyectos productivos agroindustriales y la función lineal, mediante una propuesta de Unidad Didáctica, para el grado 9° de la Institución Educativa Policarpa Salavarrieta?

Marco teórico de referencia

Este trabajo se inscribe en el campo de la Didáctica de las Matemáticas y dentro de la propuesta del Grupo de investigación Pensamiento Numérico Algebraico (PNA) que se ocupa de los fenómenos de enseñanza, aprendizaje y comunicación de conceptos numéricos en el sistema educativo y en el medio social; estudia los diferentes procesos cognitivos y culturales con que los seres humanos asignan y comparten significados utilizando diferentes estructuras numéricas y de este se toma la propuesta de Análisis didáctico como marco teórico y metodológico que direccionó este proyecto.

En este marco de referencia se asume que el conocimiento producido al interior de la Didáctica de las Matemáticas, denominado *conocimiento didáctico,* proporciona los elementos fundamentales que requiere un profesor para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas; estos elementos son reconocidos como *organizadores del currículo de matemáticas* y según Rico (1997) son aquellos conocimientos fundamentales que requiere un profesor para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas. La articulación y concreción de estos conocimientos didácticos conforman el *Análisis Didáctico* que es un proceso cíclico para diseñar, llevar a la práctica y evaluar unidades didácticas e identificar las actividades que idealmente un profesor debería realizar para organizar la enseñanza de un contenido matemático concreto. Este *Análisis Didáctico* se basa en cuatro análisis: el de contenido, el cognitivo, el de instrucción y el de actuación.

El *Análisis de contenido* es una herramienta técnica para establecer y estudiar la diversidad de significados de los contenidos de las Matemáticas Escolares; el *Análisis cognitivo* es una reflexión e indagación acerca de por qué, cómo y cuáles dificultades, obstáculos y errores se presentan con mayor frecuencia en el aprendizaje de los estudiantes al abordar el estudio de un contenido matemático particular; el *Análisis de instrucción* se refiere a una fundamentación teórica sobre las nociones básicas que orientan la enseñanza, el aprendizaje de las matemáticas y los procesos de evaluación y el *Análisis de Actuación* que le permite al profesor determinar las capacidades que los escolares han desarrollado y las dificultades que pueden haber manifestado hasta ese momento.

El *Análisis Didáctico* culmina con la elaboración de una Unidad didáctica que es un documento donde el profesor concreta los objetivos, contenidos, tareas, recursos y materiales, instrumentos de evaluación y orientaciones metodológicas que serán objeto de trabajo en clase con los alumnos, en un período determinado de tiempo y que, a juicio del profesor, mantienen unidad según criterios principalmente conceptuales; esta Unidad didáctica debe estar dirigida a un grupo concreto de alumnos y referirse a un contenido matemático específico y está enmarcada en un contexto sociocultural determinado. Esta propuesta se complementa con el Análisis del Contexto curricular en el cual se propone el trabajo de aula.

El propósito de este proyecto fue diseñar, planificar y desarrollar una Unidad didáctica como propuesta curricular, que para su diseño requiere seleccionar y secuenciar un conjunto de conceptos y procedimientos sobre tópicos matemáticos relacionados con la función lineal; para efectos prácticos de su desarrollo, se dio relevancia al Análisis de contenido, sin desconocer los aspectos de los otros análisis. Este Análisis comprende aspectos relacionados con la estructura conceptual de la función lineal, sus sistemas de representación, la fenomenología y la modelación matemática donde se analizaran las tendencias actuales principales sobre esta temática y los principios de la Educación Matemática Realista; el Análisis curricular aunque no

aparece dentro de la estructura del Análisis Didáctico, se tuvo en cuenta en tanto que el currículo constituye una herramienta básica para el trabajo del profesor de matemáticas de secundaria, válida para la planificación y desarrollo de unidades didácticas.

De otra parte el Análisis de instrucción que comprende el diseño propiamente de la Unidad didáctica se realizó a partir del diseño de situaciones problemáticas formuladas en el contexto de los proyectos productivos agroindustriales seleccionados; el Análisis cognitivo se realizó a partir de las principales dificultades, obstáculos y errores que presentaron los estudiantes al desarrollar las diversas tareas que conforman la unidad didáctica y finalmente el Análisis de actuación se desarrolló durante la etapa de evaluación de los resultados y permitió determinar las capacidades que los escolares han desarrollado durante el proceso.

Metodología y propósito del taller

Este taller, como espacio de interacción entre los proponentes y los maestros, investigadores y asistentes, en general, mediado por la lectura y análisis de las situaciones problemáticas para movilizar reflexiones sobre la enseñanza y aprendizaje de las funciones, se ha organizado en cuatro momentos. Un primer momento (20 minutos) donde se presentarán los aspectos más relevantes del proyecto (problemática, propósitos, justificación y referentes teóricos y metodológicos) ; un segundo momento (40 minutos) donde se trabajará la situación 1 (Preparación de la mezcla para el pandebono y la relación uno a uno entre magnitudes), en grupos de 3 o 4 personas asistentes al taller; un tercer momento (40 minutos) donde se trabajará la situación 3 (Comercializando los pandebonos y la función lineal), se realizará utilizando el mismo esquema del segundo momento. Finalmente, se realizará una plenaria (20 minutos) para socializar el análisis y las reflexiones de los grupos de trabajo. Al finalizar el taller se recogerán las conclusiones y las recomendaciones para mejorar esta propuesta de trabajo en el aula. Ver fichas de reflexión en el Anexo 1.

Este taller tiene como propósito compartir algunas situaciones y tareas de la Unidad Didáctica del proyecto, aquí expuesto, que articula el contexto del proyecto productivo de pandebonos y algunos aspectos de la función lineal. Además, interactuar con los participantes a través de sus análisis y reflexiones sobre la pertinencia de las tareas, sus contenidos matemáticos y los desempeños que movilizan.

Plan de acción del taller

La situación 1, tiene como propósito que los estudiantes identifiquen comportamientos de variaciones lineales al interior de situaciones problémicas y así mismo que reconozcan la relación entre magnitudes que intervienen en situaciones de variación (cantidad de queso vs cantidad de pandebono; cantidad de areparina vs cantidad de pandebono).

Situación 1: Preparación de la mezcla para el pandebono y la relación uno a uno entre magnitudes

Los estudiantes del grado 9°1 de la IE Policarpa Salavarrieta han gestionado la producción de pandebono en pro de la Unidad Productiva conformada desde el año lectivo 2011. La gestión de este proceso ha consistido en realizar actividades según las etapas de: preventa, preparación del laboratorio (asepsia), alistamiento, producción y comercialización. En la etapa de producción de pandebonos se parten porciones de masa de 60 g y con ellas se forman pandebonos del mismo tamaño y forma; dicha masa se prepara conforme a la siguiente relación de materias primas

Tabla 1
Relación materias primas fabricación pandebonos

Materia Prima	Cantidad en gramos
Queso costeño	4.000
Almidón agrio	5.000
Areparina	1.000
Azúcar	1.000
Mantequilla	2.000
Leche en polvo	1.000
Total de materia prima	14.000

Para esta relación de materias primas, el número aproximado de pandebonos producidos es de 250 unidades.

Tarea 1: Comprendiendo la situación

Teniendo en cuenta las cantidades relacionadas en la tabla anterior, realice o responda lo siguiente:

1. Si se utilizan 8.000 gramos de queso costeño y se ajustan las cantidades necesarias de los otros ingredientes para producir pandebonos considerando la misma receta, ¿cuántos pandebonos se pueden producir? Indique cómo lo calculó.
2. Calcule la cantidad de gramos de queso costeño requerido para fabricar 50, 100, 150, 200, 350, 600 y 1.000 pandebonos. Explique cómo obtuvo los resultados solicitados.
3. Realice una tabla donde se muestre el número de pandebonos y los gramos de queso requeridos según los datos del punto 2.
4. Si se utilizan 2.000 gramos de queso costeño y se ajustan las cantidades necesarias de los otros ingredientes para producir pandebonos sin alterar la receta, ¿cuántos pandebonos se pueden producir? Indique cómo lo calculó.
5. Calcule la cantidad de gramos de areparina requeridos para fabricar 50, 100, 150, 200, 350, 600 y 1.000 pandebonos.

Tarea 2: Relación entre magnitudes

A partir de los resultados de la actividad anterior, realice lo indicado y responda las siguientes preguntas:

1. Calcule el número de pandebonos que sin alterar la receta se pueden producir con 240 g. de queso costeño, con 560 g., con 6.000 g. y con 4.800 g, teniendo los gramos necesarios de los otros ingredientes.
2. Complete la siguiente tabla y explique cómo obtuvo los resultados

Tabla 2
Relación gramos de queso costeño vs número de pandebonos

Gramos de queso costeño				7.200	8.000		12.800	13.600
Número de pandebonos	1	100	400			700		

3. Determine las magnitudes y cantidades que intervienen en la situación y sus unidades de medición.

4. Escriba de qué depende la cantidad de queso utilizado en cada caso. Explique su respuesta.
5. Escriba cuánto queso se requiere para producir un pandebono.
6. Escriba una expresión que permita calcular la cantidad de gramos de queso necesarios para producir una **cantidad cualquiera** de pandebonos.

Tarea 3: Validando la relación entre magnitudes

A partir de los resultados del numeral 5 de la Tarea 1, realice lo indicado y responda las siguientes preguntas:

1. Complete la siguiente tabla para el caso de la cantidad de areparina necesaria para producir pandebonos:

Tabla 3
Relación gramos de areparina vs número de pandebonos

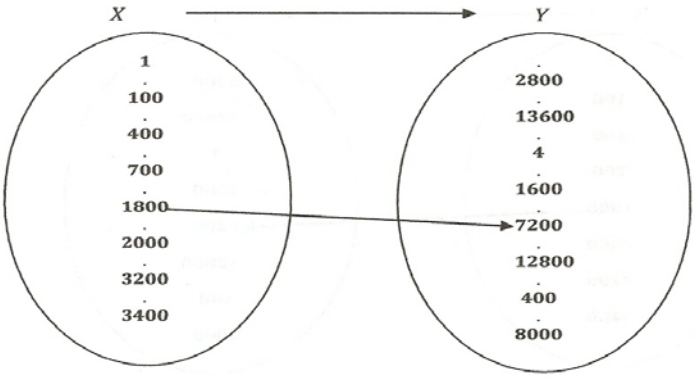
Gramos de areparina				7.200	8.000		12.800	13.600
Número de pandebonos	1	100	400			700		

2. Escriba una expresión que permita calcular los gramos de areparina requeridos para fabricar una **cantidad cualquiera** de pandebonos.
3. Explique la validez de la siguiente afirmación:

"Para un número determinado de pandebonos a producir, existe una única cantidad gramos de queso necesario para esta producción"

4. Complete el siguiente diagrama que relaciona:

Número de pandebonos (X) Cantidad de gramos de areparina (Y)



5. Plantee por lo menos dos situaciones, en contextos diferentes a la producción de pandebonos, en las cuales se presenten relación entre cantidades o magnitudes.

Para la situación 3, se espera que los estudiantes identifiquen una relación de dependencia proporcional entre magnitudes y traduzcan un sistema de representación tabular a una expresión algebraica para un modelo de función lineal, de otro lado que calculen la razón de cambio a partir de una gráfica cartesiana, identifiquen relaciones lineales de tendencia decreciente y comprendan los conceptos de costo de producción y ganancia

Situación 3: Comercializando pandebonos y la función lineal

El costo de producción de 350 pandebonos, fabricados por los estudiantes del grado 9°1 de la IE Policarpa Salavarrieta, en pro de la Unidad Productiva conformada desde el año lectivo 2011, teniendo en cuenta el costo de las materias primas, del transporte y de las bolsas para

empaques, fue de $108.500 y el precio de venta de cada pandebono es de $500[2]. A partir de esta información desarrolle las siguientes tareas:

Tarea 1: **Relación entre representación tabular y expresiones algebraicas**

1. Encuentre el costo de producción de un pandebono según el valor de producción de 350 unidades y explique cómo obtuvo este valor.
2. Teniendo en cuenta lo realizado en el punto 1, complete la siguiente tabla donde se registra costo y ganancia de cierta cantidad de pandebonos.

Tabla 4
Relación de costo de producción, ganancia vs número de pandebonos

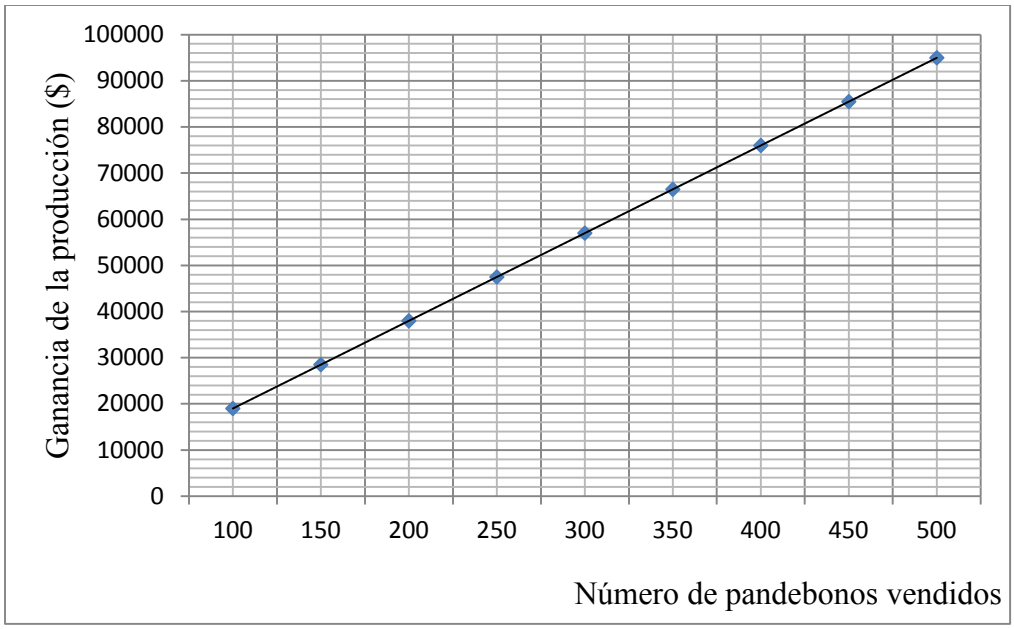
Número de pandebonos producidos y vendidos	1	100			300		450	500	
Costo de producción de pandebonos (en $)			62.000			108.500			186.000
Ganancia obtenida (en $)				47.500	57.000		85.500		

3. Explique qué le sucede al costo de producción de los pandebonos cuando se aumenta el número de pandebonos a producir. De un ejemplo.
4. Escriba un comentario sobre la siguiente afirmación: "No tiene sentido en el contexto de la producción de pandebonos hablar de ½ pandebono o de 5 ½ pandebonos"
5. Explique la siguiente expresión $Y = 310X$, si Y es el costo de producción de X número de pandebonos.
6. Explique por qué es menor la diferencia entre el costo y la ganancia cuando se producen 100 pandebonos que cuando se producen 500 o más.

Tarea 2: Lectura e interpretaciones de representaciones gráficas

1. Verifique si en la Gráfica 1, los puntos corresponden a las coordenadas determinadas y registradas en la Tabla 4, una vez diligenciada (punto 2 de la Tarea 1).
2. Tome dos puntos de la gráfica 1 y encuentre la razón de cambio para la ganancia al comercializar los pandebonos.
3. Explique el significado de la coordenada (0,0) para la Gráfica de Ganancia.
4. Escriba el significado de conectar con una recta, los puntos trazados en la gráfica de Ganancia

[2] Para resolver esta Situación asuma que el costo de las materias primas, del transporte y de las bolsas se puede totalizar y asumir como un solo costo que se altera dependiendo del número de pandebono a producir, aunque en la vida diaria no se podría asociar porque el transporte no se paga por el número de pandebonos transportados, mientras que el costo de materias primas y el de las bolsas depende del número de pandebonos a producir.



Gráfica 1. Ganancia al comercializar ***X*** número de pandebonos.

5. Respecto a la gráfica 1, escriba el procedimiento utilizado para obtener el resultado y explique su significado.
   a. Encuentre la razón de cambio que corresponde a una producción comprendida entre 250 y 450.
   b. Encuentre la razón de cambio que corresponda a una producción comprendida entre 450 y 500 pandebonos.
   c. Explique en cuánto varía la ganancia en relación a la variación del número de pandebonos vendidos.
   d. Indique cómo se refleja esta variación en la forma de la gráfica.

6. a. Encuentre el número de pandebonos que generan unos costos de producción de $130.000.
   b. Encuentre la ganancia correspondiente a este costo de producción de $130.000.

Tarea 3: Relaciones lineales de tendencia decreciente

Valentina considera que debe haber alguna forma de bajar los costos de producción de cada pandebono si se logra aumentar el número de pandebonos que se fabrican en cada producción y propone la siguiente tabla donde se relacionan los costos de producción unitario y el número de pandebonos a producir:

Tabla 5
Relación costos producción unitario por pandebonos

Costos de producción unitario ($)	300	250	200	150	100
Número de pandebonos a producir	100	200	300	400	500

1. Con los resultados de la tabla anterior, realice una gráfica en el plano cartesiano, ubicando en el eje horizontal el número de pandebonos y en el eje vertical, los costos de producción unitarios.

2. Observe y describa la tendencia de la gráfica obtenida. Explique, si en el contexto de esta tarea, tiene o no sentido conectar los puntos de esta gráfica, con una recta.
3. Tome dos puntos de esta gráfica y realice el proceso para calcular la razón de cambio. Interprete este resultado.
4. Escriba la expresión algebraica que describe la relación anterior.
5. Observe en la gráfica el costo correspondiente a una producción de pandebonos de cero. Registre este dato e interprételo.
6. ¿Está de acuerdo con el planteamiento de Valentina? Explique su respuesta.

Conclusiones

Mediante la realización de este taller se espera ratificar la pertinencia de una *Unidad didáctica* que ha sido diseñada como propuesta curricular a partir de articular los diversos análisis que conforman el Análisis didáctico (de contenido, cognitivo, de instrucción, de actuación, contexto curricular) en un solo documento estructurado por un conjunto de actividades a desarrollar (Situaciones) en un tiempo determinado para la consecución de unos objetivos específicos, constituyendo una unidad de programación y actuación docente dirigida a un grupo concreto de alumnos (estudiantes de 9º grado de la IE Policarpa Salavarrieta), referida a un contenido matemático específico (función lineal) y enmarcada en un contexto determinado (Proyectos Productivos Agroindustriales).

En este taller se espera se puedan validar empíricamente algunas de las conclusiones del análisis de la producción de los estudiantes sobre esas situaciones y hacer una súper síntesis de esas conclusiones.

Referencias y bibliografía

Arce, J. H., Torres, L.A., Ramírez, M. A., Valoyes, L.E., Malagón, M. R., & Arboleda, L. C. (sf). *Iniciación al álgebra escolar: situaciones funcionales, de generalización y modelación*. Cali: Universidad del Valle.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structure*. Dordrecht: Reidel.

Kieran, C. (1992). *El aprendizaje y la enseñanza del álgebra escolar.* En D. Grouws (Ed.), *Manual de investigación sobre la enseñanza de las matemáticas y el aprendizaje* (pp. 390-419). Nueva York: Macmillan Publishing Company.

Rico, L. (Coord.) (1997). *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 39-74). Barcelona: Horsori.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22*(1), 1-36.

Anexo 1

Ficha de Reflexión 1

Situación 1: Preparación de la mezcla para el pandebono y la relación uno a uno entre magnitudes

1. Enuncie los aspectos relacionados con el concepto de función lineal que se movilizan en las tareas propuestas en la situación 1.
2. Indique procesos o desempeños del pensamiento variacional que se pueden movilizar en las tareas propuestas en la situación 1.
3. Escriba algunas observaciones sobre la pertinencia de estas tareas en el marco de las situaciones problemáticas de los proyectos productivos agroindustriales para el grado 9º (potencialidades o restricciones).

Ficha de Reflexión 2

Situación 2: Comercializando pandebonos y la función lineal

1. Enuncie los aspectos relacionados con el concepto de función lineal que se movilizan en las tareas propuestas en la situación 2.
2. Indique algunos procesos o desempeños del pensamiento variacional que se pueden movilizar en las tareas propuestas en la situación 2.
3. Escriba algunas observaciones sobre la pertinencia de estas tareas en el marco de las situaciones problemáticas de los proyectos productivos agroindustriales u otro tipo de proyectos (potencialidades o restricciones).
4. Desde su experiencia profesional o su formación, determine algunos elementos conceptuales y metodológicos que considera fundamentales al momento de introducir el concepto de función en la educación básica.

Una secuencia didáctica sobre la construcción del concepto de número natural en preescolar[1]

Ligia Amparo **Torres** Rengifo
Universidad del Valle
Colombia
ligia.torres@correounivalle.edu.co
Lina Vanessa **Gutierrez** Vecca
Universidad del Valle
Colombia
gutty.gu@gmail.com

Resumen

La intención de este taller es analizar los aportes conceptuales y procedimentales, en la construcción del concepto de número natural en la escuela, de una secuencia didáctica que involucra juegos con materiales manipulativos implementada con estudiantes de Jardín y Transición de la educación colombiana. El taller se inicia presentando la problemática y algunos referentes teóricos de índole didáctica, curricular y matemática, que posibilitaron la elaboración de la secuencia didáctica. Luego, se exponen para su análisis, por parte de los participantes, dos situaciones: Juego: Cincuenta Fichas y Juego: Tens, que permitieron el desarrollo de estrategias de conteo, comparación de cantidades, agrupaciones, repartos, composiciones y descomposiciones numéricas, movilizando procedimientos y consolidando nociones importantes en la construcción del concepto del número como la cardinalidad y la ordinalidad. Por último se realizará una plenaria donde se comparten las reflexiones de los participantes, esperando con esto se puedan enriquecer las situaciones propuestas.

Palabras clave: Concepto de número natural, educación preescolar, materiales manipulativos, secuencia didáctica, cardinalidad.

Justificación

En este trabajo se reconoce a los grados Jardín y Transición como fundamentales en la educación de cualquier sujeto, puesto que en éstos se construyen herramientas que permiten desarrollar las habilidades planteadas y establecidas en los Lineamientos Curriculares de Preescolar (1998a), que hacen parte de las diferentes dimensiones. De manera particular, investigaciones como la de Chamorro (2005), evidencian de una parte, que la mayoría de los padres y docentes creen que en el preescolar no se puede hacer un trabajo matemático de calidad,

[1] Taller realizado en base al trabajo de grado titulado *"La construcción del concepto de número natural en preescolar: una secuencia didáctica que involucra juegos con materiales manipulativos"*. (Cerón & Gutierrez, 2013) Tutora del trabajo: Ligia A. Torres. Universidad del Valle

y de otra, que aún se nota la resistencia hacia la formación matemática en este grado. En esta secuencia didáctica los docentes pueden reconocer la importancia de comenzar a trabajar en las matemáticas durante los primeros grados, logrando el acercamiento temprano al concepto de número natural; esto implica, fortalecer el pensamiento matemático en aspectos relevantes como: cardinalidad, ordinalidad, comparación de cantidades, composición y descomposición de números naturales, entre otros.

Así mismo, los juegos con materiales manipulativos ocupan un papel protagónico en el desarrollo de la secuencia didáctica, María Montessori (1912) expone la relevancia y los fructíferos resultados que generan en los niños y niñas el trabajo con material que puedan manipular, conocer y experimentar. Sin embargo, el material por sí solo no garantiza un aprendizaje significativo, pues se requiere indudablemente que el maestro conozca de cerca todas las potencialidades y limitaciones que éste ofrece, para aprovechar al máximo este tipo de recurso.

Este taller aporta a la reflexión sobre el desarrollo de pensamiento matemático en los primeros años y sobre las actividades que se proponen en el Preescolar, en los cuales, el docente tiene un rol fundamental al momento de proponer retos al estudiante y crear ambientes de enseñanza y aprendizaje que aporten a la construcción de aspectos relevantes del concepto de número natural.

Problemática

En este proyecto se reconoce la manera como tradicionalmente se aborda la construcción del concepto de número natural en preescolar, ante lo cual, se documenta esta problemática a través de referentes didácticos, curriculares y matemáticos y se responde a ésta con el diseño e implementación de una Secuencia Didáctica que involucra juegos con materiales manipulativos, la cual articula los referentes antes mencionados.

Se sitúa el hecho de que la mayoría de las actividades se limitan a la nemotecnia de la secuencia numérica, clasificación, ordenación, agrupación, y el reconocimiento de los símbolos numéricos. Pero más allá de estas actividades, los niños están en la capacidad de desarrollar el pensamiento numérico, pues es una noción que abarca el sentido numérico, como una intuición sobre los números que surge de todos los diversos significados del número natural.

A su vez, se reconoce que prevalece una manera tradicional de enseñar el conteo y acercar a los niños a las matemáticas implementando actividades sin relación con un significado real del concepto de número natural, a pesar de que el aprendizaje debe apuntar a ser significativo; esto es, relacionar las experiencias de los estudiantes con los contenidos a ser enseñados (Ausubel, Novak & Hanesian, 1983).

De otro lado, Desde los Lineamientos Curriculares de Preescolar (1998a), las dimensiones de aprendizaje y el juego ocupan un papel protagónico en este nivel, por eso es importante involucrarlos en las actividades de clase. Además, el Ministerio de Educación Nacional publica los Lineamientos Curriculares para las áreas obligatorias y fundamentales de la educación colombiana. De esta manera, aparecen los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998b), en los cuales se aborda una orientación sobre la manera en que las Instituciones Educativas deben construir sus currículos y la actividad matemática en el aula, a partir de los conocimientos básicos, procesos generales de pensamiento y contextos, como ejes centrales de esta propuesta curricular.

Particularmente los Lineamientos enfatizan en la importancia del desarrollo del pensamiento numérico a partir de la construcción del concepto de número natural en los primeros años de la escolaridad. Este marco curricular permite reconocer los niveles de Jardín y Transición como ámbito fundamental en la Educación de los sujetos, y el pensamiento numérico como obligatorio de las Instituciones Educativas, para que se comprometan en su desarrollo. La implementación de ambos Lineamientos Curriculares son necesarios puesto que brindan unos referentes para el desarrollo del pensamiento matemático en el Preescolar

Por último, desde la experiencia personal, de las autoras, se constata que pocas veces se integran aspectos formales de las matemáticas (conceptos como el sucesor, el antecesor, el cardinal, el conjunto, entre otros) al momento de diseñar actividades que construyan el concepto de número natural. Si bien, la investigación no pretende que la formalidad del concepto se asuma en las aulas de preescolar, sí se destaca que el maestro debe tener claro que las propiedades del número natural y las teorías plantean aspectos fundamentales de este concepto, lo cual es un referente importante para desarrollar las propuestas de aula.

A partir de estos referentes curriculares, didácticos y matemáticos se plantea la pregunta problema: ¿Cómo a través de una secuencia didáctica que involucra juegos con materiales manipulativos, se aporta al significado y comprensión del concepto de número natural en preescolar?

Marco de referencia conceptual

Desde la perspectiva curricular se tomaron en consideración los Lineamientos Curriculares de Preescolar (1998a) y Lineamientos Curriculares de Matemática (1998b), los cuales son una herramienta para el diseño e implementación de los currículos en las instituciones educativas, pues a partir de estos se orientan reflexiones acerca de los aprendizajes que se pueden desarrollar en los estudiantes en esta área de conocimiento.

Por una parte los Lineamientos curriculares de Preescolar (1998a) contemplan principios, aprendizajes y dimensiones propios del nivel. Los principios son: la integralidad, la participación y la lúdica. Los pilares de la educación se fundamentan en cuatro tipos de aprendizajes: aprender a conocer, aprender a hacer, aprender a vivir juntos y aprender a ser. Para el primer nivel de la educación el desarrollo integral obedece a la potencialidad de ciertas dimensiones de desarrollo en los niños y niñas, las cuales están determinadas de la siguiente manera: cognoscitiva, socio-afectiva, comunicativa, estética, espiritual y ética.

Además, las competencias matemáticas en transición son entendidas como aquellas capacidades que hacen posible que los niños accedan al mundo que los rodea y construyan un conocimiento que les ayude a vivir en él. Éstas apuntan a desarrollar cuatro funcionamientos cognitivos: “cuantificación y principios de conteo, comunicación de cantidades, establecimiento de relaciones de orden y resolución de problemas aditivos” (MEN, 2009, p. 100). Estos funcionamientos cognitivos constituyen los procesos generales que se deben abordar en el preescolar, para así interpretar, definir, comunicar y razonar acerca del conocimiento numérico.

A su vez, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998b) son una herramienta para el diseño e implementación de los currículos en las instituciones educativas colombianas, pues a partir de estos se orientan reflexiones acerca de las potencialidades que se pueden desarrollar en los estudiantes en esta área de conocimiento. Estos lineamientos orientan la organización de las

propuestas curriculares en las instituciones educativas a partir de tres grandes ejes: conocimientos básicos, procesos generales y contextos.

Por otro lado, desde la Perspectiva Didáctica permite conocer algunas dificultades en la construcción del concepto de número. En primer lugar, se refiere a que pocas veces se toman en cuenta las experiencias previas y los contextos en los cuales los niños usan los números antes de llegar a la escuela. En segundo lugar, algunas investigaciones entre ellas las realizadas por Castro, Rico & Castro (1988), dejan claro que muchas veces la enseñanza del número natural se limita al trazo de los símbolos dejando por fuera la reflexión necesaria para que el estudiante construya el concepto de número natural. Por último, otra dificultad subyace al proceso de lectura y escritura de los números, puesto que la intervención en el aula no siempre apunta a la reflexión conjunta acerca del sistema de numeración decimal, en especial a lo concerniente a la numeración escrita y hablada.

Es importante implementar en la actividad matemática aspectos lúdicos relacionados con el juego, para superar las dificultades, puesto que es una actividad propia de estas edades, incluso genera una satisfacción entre sus participantes y los niños quienes están realmente interesados en "realizar actividades que les produzcan goce, placer y posibilidades de disfrute" (MEN, 1998b, p.31).

En las actividades lúdicas resulta importante implementar Materiales manipulativos pues diferentes autores como Godino (1988), Cañal (2002), Kamii (1980), entre otros, afirman que el uso de este tipo de materiales en clase de matemáticas constituye un potencializador para el desarrollo del conocimiento matemático, puesto que motivan al estudiante y ayudan en la comprensión de conceptos matemáticos. Así lo expresa Cañal (2002, p.32) "los materiales potencian una enseñanza más rica, más creativa, más activa, más participativa. Los alumnos trabajan desde otras perspectiva pues manipulan y desarrollan estrategias que ayudan a adquirir y afianzar de una manera más atractiva los conceptos". Kamii (1980) da a conocer algunos juegos con materiales manipulativos que sirven como referencia para desarrollar pensamiento matemático, por eso, se retoman algunos juegos los cuales son la base de las situaciones problemicas que se plantean en la Secuencia Didáctica

Por último, con relación a la parte matemática se toman en cuenta tres matemáticos importantes en la construcción del concepto de número: Dedekind, Peano y Cantor. Dedekind por su parte, fundamenta la ordinalidad como el principio mismo de la construcción de los números naturales como un sistema simple, infinito y ordenado, asociando los números naturales con los sistemas que ha definido a partir de su teoría de sistemas. Peano desde su teoría presenta en el axioma 1 y el 6 la fundamentación del principio de "siguiente" a través del sucesor y el principio de "antecesor"; que son propiedades básicas del número natural. Por ultimo, Cantor define el cardinal como el número de elementos de un conjunto dado, con esto se aclara lo que quiere decir ser el "número de un conjunto", los principios fundamentales que deja la teoría de cantor son: la correspondencia biunívoca (equipotencia), la cardinalidad, la ordinalidad.

En síntesis, los aspectos curriculares, didácticos y matemáticos son fundamentales en la construcción del concepto de número natural, y por tanto, son relevantes al momento de diseñar actividades en una secuencia didáctica para permitir el desarrollo de pensamiento matemático.

Plan de las acciones a desarrollar en el taller, contenido y objetivos.

Contenido

Análisis de unas propuestas de aula que involucran el concepto de número natural en el nivel de Preescolar

Objetivo General

Analizar los aspectos conceptuales y procedimentales expuestos en una secuencia didáctica sobre la construcción del concepto de número natural con investigadores y maestros participantes en el evento.

Objetivos Específicos

- Explicitar la problemática y el marco conceptual cuya articulación proporcionaron los elementos para diseñar y ejecutar una secuencia didáctica que involucra juegos con materiales manipulativos.
- Identificar aportes conceptuales y procedimentales de las situaciones presentadas en la secuencia didáctica que favorecen la construcción del concepto de número natural en niños de Jardín y Transición.
- Explicitar las potencialidades y restricciones que se podrían presentar en las situaciones propuestas en la Secuencia Didáctica que involucra juegos con materiales manipulativos para construir el concepto de número natural en los grados de Jardín y Transición.

Plan de Acción

Este taller como espacio de interacción entre los proponentes y los participantes mediados por fichas de trabajo y reflexión se realizara en una jornada con una duración de dos horas, la cual se manifiesta en cuatro fases:

Fase uno, se presentan las autoras, la justificación del taller, la presentación del problema y el marco conceptual de manera breve, con una duración de 30 minutos.

Fase dos, se expone la situación "Juego: Cincuenta Fichas" (Ver ficha de trabajo 1) de la secuencia didáctica junto con el material, los participantes realizan el juego usando el material concreto y luego analizan las actividades propuestas en la situación. Por último, dan a conocer sus comentarios sobre la situación (Ver ficha de reflexión 1). Esta etapa tiene una duración de 30 minutos.

Fase tres, se expone la situación "Juego: Tens" (Ver ficha de trabajo 2) de la secuencia didáctica junto con el material, los participantes realizan el juego, se familiarizan con el material concreto y luego analizan las actividades propuestas en la situación. Por último los asistentes dan a conocer sus puntos de vista sobre la situación (Ver ficha de reflexión 2). Esta etapa tiene una duración de 30 minutos.

Finalmente, en la fase cuatro, se realiza una plenaria con los participantes del taller, quienes aportarán ideas sobre la secuencia didáctica y posteriormente, se socializarán algunas conclusiones de los asistentes, acompañados de algunas conclusiones del trabajo, lo cual se realizará en 30 minutos.

Descripción de la metodología

Para la realización del taller los participantes contarán con las fichas de trabajo y de reflexión, para cada situación. En la situación "Juego: Cincuenta Fichas" los asistentes utilizan dos tableros divididos en cuadrículas organizadas en 5 filas y 10 columnas (como se muestra en la ficha de trabajo), 100 fichas circulares de diferente color y dos dados. Se juega en parejas (cada uno tiene un tablero). Con la orientación de los expositores se lleva a cabo la situación "Juego Cincuenta Fichas" y luego se procede a responder la Ficha de reflexión 1.

Luego, se realiza la situación "Juego: Tens", los participantes se organizan en grupos de 3 a 5 personas. Cada grupo tiene una caja con 72 piezas triangulares divididas a su vez en tres partes. Cada parte tiene uno de seis colores (amarillo, verde, fucsia, violeta, naranja y azul), y un número del cero al diez. Con la ayuda de los expositores se realiza la situación y luego se procede a responder la Ficha de reflexión 2. Por último se realiza la plenaria, en la cual se retoman los aportes de los grupos para visualizar las potencialidades y limitaciones de las situaciones y sacar algunas conclusiones.

Conclusiones del trabajo

Es posible incorporar desde los primeros años de escolaridad, actividades para involucrar elementos conceptuales y procedimentales sobre la construcción del concepto de número natural con el fin de desarrollar diferentes funcionamientos cognitivos teniendo en cuenta la perspectiva curricular, didáctica y matemática del nivel preescolar.

El proceso que viven los estudiantes de Jardín y Transición respecto a la escritura de los símbolos numéricos es evidentemente positivo, y confirma que las experiencias previas de los niños, la interacción con los juegos y la visualización de los símbolos que hacen parte del material, permite otorgarle un sentido a la escritura y lectura de los números en el sistema de numeración decimal, como parte de la construcción del concepto de número natural.

Los materiales manipulativos siempre que tengan una intención didáctica y la secuencia didáctica en sí misma, potencian el desarrollo de estrategias de conteo, comparación de cantidades, agrupaciones, repartos, composiciones, descomposiciones, entre otros, en vista de que los materiales son mediadores en el paso de lo concreto a lo abstracto y permiten ejercitar procedimientos y consolidar las principales nociones matemáticas.

Bibliografía

Ausubel, D., Novak, J., & Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo.* México: Trillas.

Cañal, P. (2002). *La innovaciòn Educativa*. Universidad Internacional de Andalucía. Madrid: Akal S.A.

Castro, E., Rico, L., & Castro, E. (1988). *Números y operaciones: fundamentos para una aritmética escolar*. Madrid: Síntesis.

Ceron, C. y Gutierrez, L. (2013). *La construcción del concepto de número natural en preescolar: una secuencia didáctica que involucra juegos con materiales manipulativos*. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Chamorro, M. (2005). *Didáctica de las matemáticas para Educación Preescolar.* Madrid: Pearson.

Godino, J. (1988). *Uso de Material Tangible y Gráfico-Textual en el Estudio de las Matemáticas. Superando Algunas Posiciones Ingenuas*. Portugal.

Kamii, C., & Devries, R. (1980). *Juegos colectivos en la primera enseñanza: implicaciones de la teoría de Piaget.* Madrid: Visor.

MEN. (1998a). *Lineamientos Curriculares de Preescolar*. Santafé de Bogotá, Colombia.

MEN. (1998b). *Lineamientos Curriculares de Matemática*. Santafé de Bogotá, Colombia.

MEN (2009). *Documento No 13: Elementos conceptuales aprender y jugar. Instrumento diágnostico de competencias básicas en Transición.* Santafé de Bogotá, Colombia.

Montessori, M. (1912). *Manual práctico del método montessori.* Barcelona: Araluce.

Ficha de Trabajo 1

Situación 1 "Juego: Cincuenta Fichas. El conteo y la correspondencia uno a uno"

Para resolver la situación se utiliza el material que se describe a continuación: Para realizar el juego se requieren dos tableros divididos en cuadrículas organizadas en 5 filas y 10 columnas (como se muestra a continuación), 100 fichas circulares de diferente color y dos dados.

Instrucciones: Se juega en parejas (cada uno tiene un tablero) y por turno lanzan los dados. Van llenando cada tablero con las fichas circulares de acuerdo a la cantidad de puntos obtenidos al lanzar los dados en cada turno. Sólo se puede colocar una ficha por cada cuadrícula. Gana el jugador que llene completamente las cuadrículas de su tablero. Los expositores explicarán como se presenta una cantidad del dado usando los tableros y las fichas circulares

Actividades de la Situación para Analizar

Tarea 1:

Cada pareja de estudiantes juegan "Cincuenta Fichas" registrando el puntaje obtenido en cada casilla de una tabla como la que se muestra a continuación según la suma de las cantidades de los puntos de los dados.

TURNO	PUNTAJE
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	
9	
10	
11	

TURNO	PUNTAJE
14	
15	
16	
17	
18	
19	
20	
21	
22	
23	
24	

Durante el juego los estudiantes indican:

a) ¿Quién va ganando hasta el momento? ¿por qué?

b) ¿Cuánto te falta para ganar?

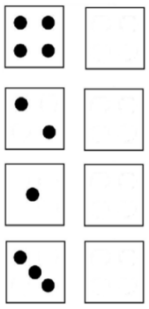
c) ¿Quién tiene más casillas tapadas?

d) Indica las razones por las que el ganador obtuvo la victoria

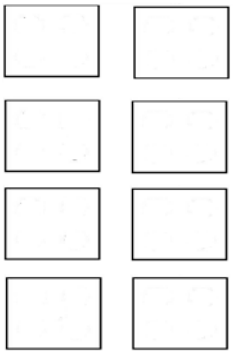
e) Si el tablero no tuviera 50 casillas, sino 20, ¿en qué turno hubieras ganado?

Tarea 2:

1. Cada pareja de estudiantes juegan "Cincuenta Fichas": Por turno los estudiantes lanzan los dados, pero sólo pueden llenar las casillas del tablero, si la suma de los puntos obtenidos al lanzarlos es igual a 5.
2. En forma individual, completa los puntos que deberían aparecer en la cara del dado de la derecha para obtener cinco puntos en total.



3. Dibuja los puntos necesarios para que en cada pareja de dados, haya 6 puntos en total.



Tarea 3:

1. En grupo de dos estudiantes juegan una transformación del juego "Cincuenta Fichas" que consiste en que cada uno de los integrantes del grupo lanza por turnos los dados cinco veces y de forma individual, registran los puntajes obtenidos en cada lanzamiento en una tabla. Gana aquel que al final haya obtenido la mayor cantidad de puntos. La tabla es la siguiente:

Turno	Puntaje dado 1	Puntaje dado 2	Total
1			
2			
3			
4			
5			

2. ¿Quién obtuvo mayor puntaje en el tercer lanzamiento? ¿Cómo lo sabes?
3. En plenaria, completar una tabla como la que aparece a continuación, registrando los puntajes obtenidos por cada pareja de estudiantes.

	Turno 1	Turno 2	Turno 3	Turno 4	Turno 5
Pareja 1					
Pareja 2					
Pareja 3					
Pareja 4					

Mientras se completa la tabla, preguntar:

a. ¿Cuál es el mayor número?, ¿por qué es mayor?,
b. ¿Cuál es el menor número?, ¿por qué es menor?
c. ¿Cuándo da igual?,
d. ¿Dónde están los doces? ¿Dónde están los veintiuno?
e. ¿Están bien escritos los números?

Ficha de Trabajo 2

Situación 2 "Juego: Tens". Composición y Descomposición de Cantidades

Para resolver la situación se utiliza el material que se describe a continuación: Cada grupo tiene una caja con 72 piezas triangulares divididas a su vez en tres partes. Cada parte tiene uno de seis colores (amarillo, verde, fucsia, violeta, naranja y azul), y un número del cero al diez. La caja se ubica en el centro de la mesa.

Instrucciones: Para realizar el juego se organizan grupos de 3 a 5 personas. Cada jugador toma 3 piezas de la caja y las pone boca arriba; el resto de piezas permanecen en la caja. El jugador que va a jugar primero, saca una de las piezas de la caja y se pone en el centro de la mesa. Por turnos cada jugador trata de colocar una de sus piezas al lado de la inicial con el fin de que la suma de las cantidades sea igual a 10. Si no tiene una pieza que pueda colocarse toma una pieza de la caja y vuelve a probar. Si continua sin poder colocar la pieza pasa el turno al siguiente jugador. El ganador es el primero que se queda sin piezas.

Actividades de la Situación para Analizar

Tarea 1:

1 Los estudiantes realizan el "Juego: Tens" y realizan la composición del 10.
2 En forma individual los estudiantes escriben los números que hacen falta para completar 10 en los lados continuos de cada caso

___+___ = 10

___+___ = 10

___+___ = 10

___+___ = 10

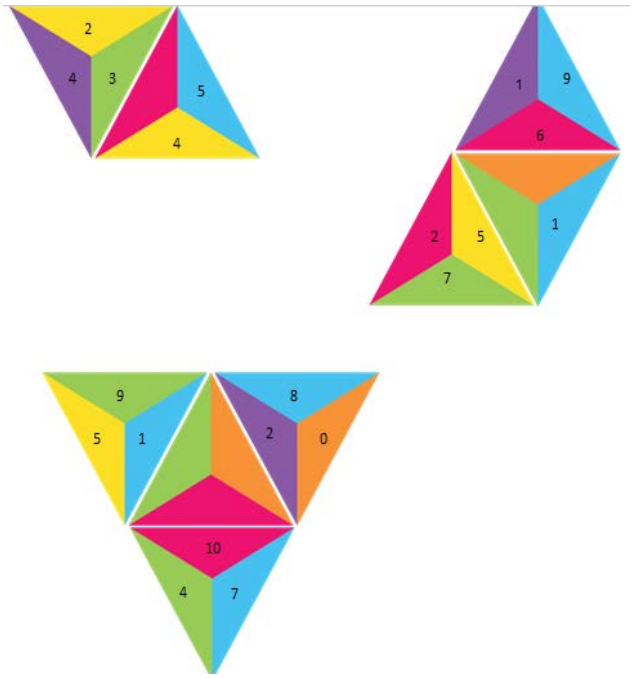
___+___ = 10

___+___ = 10

___+___ = 10

Tarea 2:

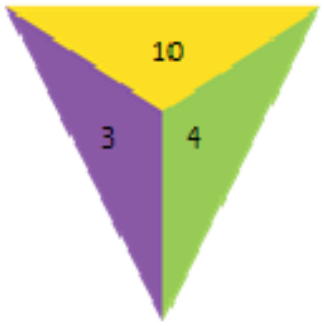
1. Los estudiantes realizan el "Juego: Tens"
2. En forma individual los estudiantes escriben los números que hacen falta para completar 10 en los lados continuos de cada caso.



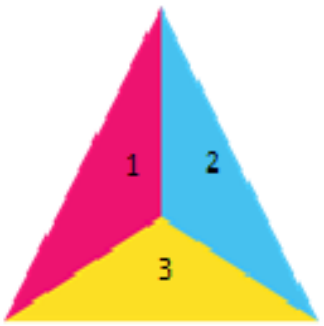
Tarea 3:

1. Escribe al frente de cada triángulo el valor de la suma de los números que allí se encuentran.

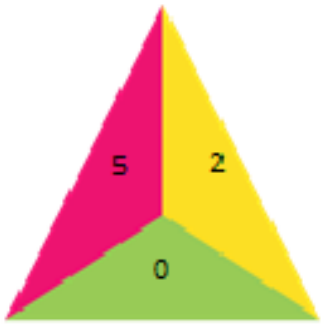
   Encerrar el triángulo con los números que representan mayor cantidad.



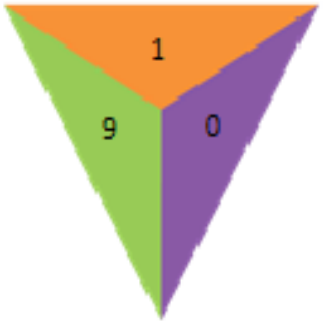
_____



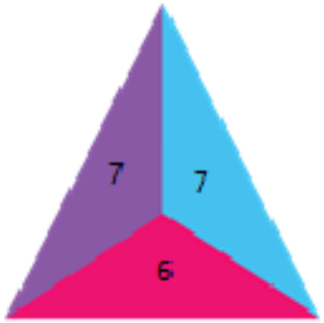
_____



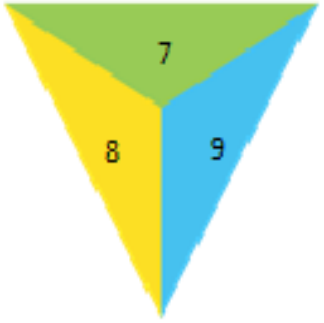
_____



_____



_____



_____

Ficha de Reflexión 1

Situación 1 "Juego: Cincuenta Fichas"

1. Enuncien algunos aspectos relacionados con el concepto de número natural que se moviliza en las tareas propuestas en la situación 1.
2. Indiquen algunos procesos o desempeños del pensamiento numérico que se pueden movilizar en las tareas propuestas en la situación 1.
3. Escriban algunas observaciones sobre la pertinencia de estas tareas que involucran material manipulativo en el nivel de preescolar (potencialidades o restricciones).

Ficha de Reflexión 2

Situación 2 "Juego: Ten"

1. Enuncie los aspectos relacionados con el concepto de número natural que se moviliza en las tareas propuestas en la situación 2.
2. Indique procesos o desempeños del pensamiento numérico que se pueden movilizar en las tareas propuestas en la situación 2.
3. Escriba algunas observaciones sobre la pertinencia de estas tareas que involucran material manipulativo en el nivel de preescolar (potencialidades o restricciones).
4. Desde su experiencia profesional o su formación, determine elementos que considera fundamentales al momento de introducir el concepto de número natural en preescolar.

¿Versiones históricas no multiplicativas de la proporcionalidad?

Edgar Alberto **Guacaneme** Suárez
Departamento de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional
Colombia
guacaneme@pedagogica.edu.co

Resumen

La Historia de las Matemáticas ofrece, entre otros aspectos a favor del conocimiento del profesor de Matemáticas, un ambiente sinigual para ampliar la visión usual sobre los objetos matemáticos y sobre las formas de pensar en Matemáticas. La historia de la proporcionalidad brinda la posibilidad de reconocer al menos dos teorías de la proporción (a saber: pre-eudoxiana y euclidiana) que recurren a sendos tratamientos aditivos de las magnitudes (o cantidades) geométricas. El estudio de aspectos centrales de estas dos teorías no solo logra confrontar el saber matemático usual de los profesores e investigadores sobre las ideas de razón, proporción y razonamiento proporcional, sino que además ofrece opciones para un tratamiento curricular radicalmente innovador de la proporcionalidad y abre una novedosa ventana a la investigación sobre el razonamiento proporcional aditivo.

Palabras clave: proporcionalidad, razón, proporción, Historia de las Matemáticas, razonamiento proporcional, conocimiento del profesor de Matemáticas, teoría pre-eudoxiana de la proporción, teoría euclidiana de la proporción.

Introducción

La relación "Historia de las Matemáticas – Educación Matemática" ha merecido la atención de la comunidad internacional desde hace ya varias décadas. Durante la última década del siglo XX, la décima versión de los estudios temáticos del ICMI abordó precisamente dicha relación (Fauvel & van Maanen, 2000, 2002).

En América Central y Suramérica se han desarrollado iniciativas para el estudio de dicha relación, algunas de las cuales han confluido y tenido eco en uno de los núcleos temáticos que concentran el interés y trabajo de la "Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe" (REDUMATE, http://www.centroedumatematica.com/redregional/).

En Colombia, desde hace algunos años, tal relación ha sido objeto de estudio por parte de un sector de la comunidad académica, sobresaliendo, entre otros, el trabajo del "Grupo de Historia de las Matemáticas" de la Universidad del Valle, y más recientemente las investigaciones del "Grupo de Historia, Epistemología y Educación Matemática" (GHEEMA) de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas y del grupo "*Research on Mathematics Teacher Education"* (RE-MATE) de la Universidad Pedagógica Nacional.

Precisamente en el seno del "Grupo de Historia de las Matemáticas" y en el marco del "Doctorado Interinstitucional en Educación – Énfasis en Educación Matemática" se desarrolla la tesis titulada "Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas", bajo la dirección del doctor Luis

Carlos Arboleda Aparicio. A través de esta tesis se ha estudiado un fragmento de la historia de la proporcionalidad y se ha procurado establecer sus vínculos con el conocimiento del profesor (Guacaneme, 2010, 2011, 2012a, 2012b, 2013a). Desde dicha aproximación se han logrado identificar, como parte de la producción matemática de los griegos clásicos, dos ideas de proporción que no aluden estrictamente a esquemas multiplicativos y que más bien involucran la adición o diferencia de las magnitudes geométricas implicadas y un pensamiento correlacional entre ellas.

En lo que sigue se presentan aspectos de las dos teorías de la proporción que desarrollan sendas ideas de la misma, se precisan los enfoques aditivos y correlacionales de las mismas y se discuten algunas posibles implicaciones en ámbitos educativos e investigativos.

Dos teorías de la proporción

El estudio de la historia de la proporción permite reconocer varias teorías de la razón y la proporción y establecer diversos hitos históricos para estos objetos matemáticos. A continuación se abordan aspectos de dos de tales hitos, definidos por sendas teorías sobre la razón y la proporción, cronológicamente secuenciales, ubicados en la antigua Grecia entre los siglos V y III a.C.

Las ideas de razón y proporción en la teoría pre-eudoxiana

Varios documentos de Historia de las Matemáticas (*v.g.*, Evans, 1927; Filep, 1999, 2003; Fowler, 1979, 1980, 1981, 1982; Knorr, 1978; Thorup, 1992) refieren la existencia de una teoría de la proporción para magnitudes geométricas, que antecede a la presentada por Euclides en los Libros V y VI de *Elementos*, y que se basa en la idea de *antanairesis* (también reportada como *antifairesis*, traducción literal del término inglés *anthyphairesis*) o método de restas sucesivas (usual y anacrónicamente conocido como algoritmo de la sustracción de Euclides).

Bajo esta óptica, y atendiendo a un cierto orden cronológico de las publicaciones, se puede sintetizar que Evans (1927) presenta la existencia implícita de la antanairesis como definición alterna de proporción a la expuesta en *Elementos* de Euclides; explica en qué consiste el método o procedimiento aludido. Knorr (1978) presenta un relato de una teoría pre-euclidiana de la proporción, que atribuye a Eudoxo, en la que probar que dos magnitudes a y b tienen la misma razón que las magnitudes c y d, implica probar primero el caso en que las magnitudes son conmensurables y luego el caso en el que son inconmensurables (por una reducción al absurdo). Fowler discute la antifairesis como el aspecto central de una teoría pre-euclidiana de la razón, pero no de la proporción (1979), presenta una interpretación del Libro II de *Elementos* a través de la cual reconoce un interesante nexo con la teoría pre-eudoxiana de la razón (1980, 1982) y discute que la definición eudoxiana de proporción surge naturalmente del proceso clásico de antifairesis (1981). Thorup (1992) presenta una teoría alterna de las proporciones, construida con base en la idea de antifairesis y en una interpretación muy simple de la misma, a través de lo cual no intenta mostrar que tal teoría fuese la efectivamente existente entre los matemáticos antecesores a Eudoxo, sino más bien, argumentar que ninguna parte de una teoría se puede excluir por su simple conexión con una teoría o notación moderna. Filep analiza los métodos pitagóricos de aproximación a la relación entre la diagonal y el lado del cuadrado, uno de los cuales incluye la aproximación a través de restas sucesivas (1999) y estudia tanto la teoría pre-euclidiana de la proporción como la génesis de la definición de Eudoxo (2003).

A partir del estudio de tales documentos y de manera extremadamente sintética se puede decir que la antanairesis configura tanto un proceso de comparación del tamaño de dos magnitudes homogéneas a través de la diferencia (o resta sucesiva) de las magnitudes o de sus residuos, como el resultado de dicho proceso. Asimismo, se puede reseñar que si dos parejas de magnitudes tienen la misma antanairesis, se puede concluir que estas guardan la misma razón, es decir, son proporcionales.

Para entender estas ideas, inicialmente se ilustra el proceso de resta sucesiva para dos magnitudes. Así, supóngase que se quiere obtener la antanairesis de dos magnitudes homogéneas A y B, con B menor que A. Para ello se resta B de A tantas veces como sea posible, quedando eventualmente un residuo R_1 menor que B; se registra el número n_1 de veces que B se pudo restar de A. En seguida se repite el proceso para las magnitudes B y R_1, obteniéndose un número n_2 (que representa el número de veces que R_1 se restó de B) y posiblemente un residuo R_2, menor que R_1. El proceso se puede repetir, bien hasta que no exista residuo o bien de manera infinita; en el primer caso se dispondrá de una m-upla de valores $[n_1, n_2, \ldots, n_m]$, en tanto que en el segundo se tendrá una sucesión infinita de dichos valores $[n_1, n_2, \ldots, n_m, \ldots]$.

La Figura 1 ilustra la anterior descripción para dos segmentos, obteniéndose la tripla [3,2,2] como resultado de la antanairesis, o si se prefiere, obteniéndose la antanairesis [3,2,2].

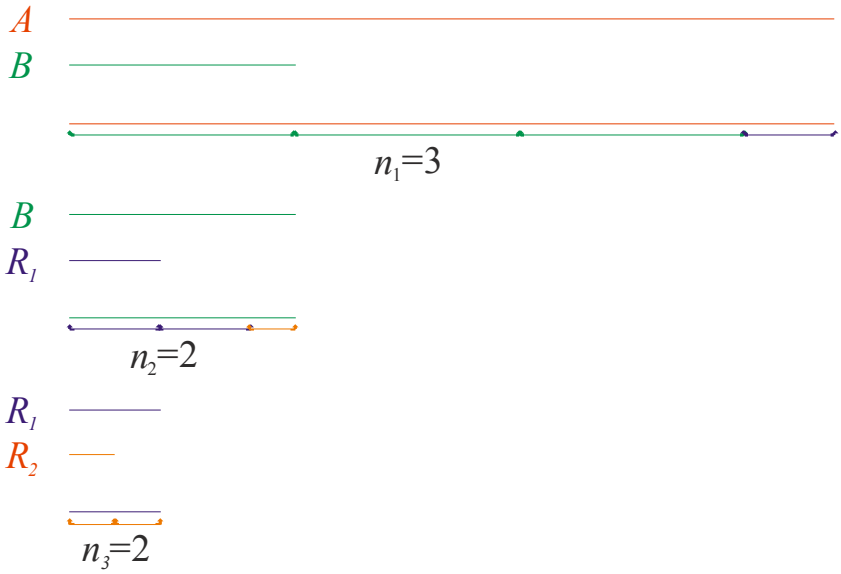


Figura 1 Antanairesis [3,2,2] de dos segmentos.

Ahora bien, en la Figura 2 se reconoce que la antanairesis [3,2,2] surge de aplicar la resta sucesiva al caso de los dos círculos C y D. Acá se aprecia cómo una versión particular del Teorema de Pitágoras se emplea como algoritmo geométrico para realizar las diferencias, ubicando en la hipotenusa el minuendo, en uno de los catetos el sustraendo y obteniendo consecuentemente en el otro cateto el residuo. Hay que anotar sí, que a pesar de que al hacer la diferencia entre T_1 y T_2 solo se pueda realizar una construcción (*i.e.*, la que aparece al final de la figura), el proceso de antanairesis incluye luego la resta entre T_2 y T_2, la cual obviamente no se puede dibujar, pero sí se debe contar (de allí que $\tilde{n}_3$=2).

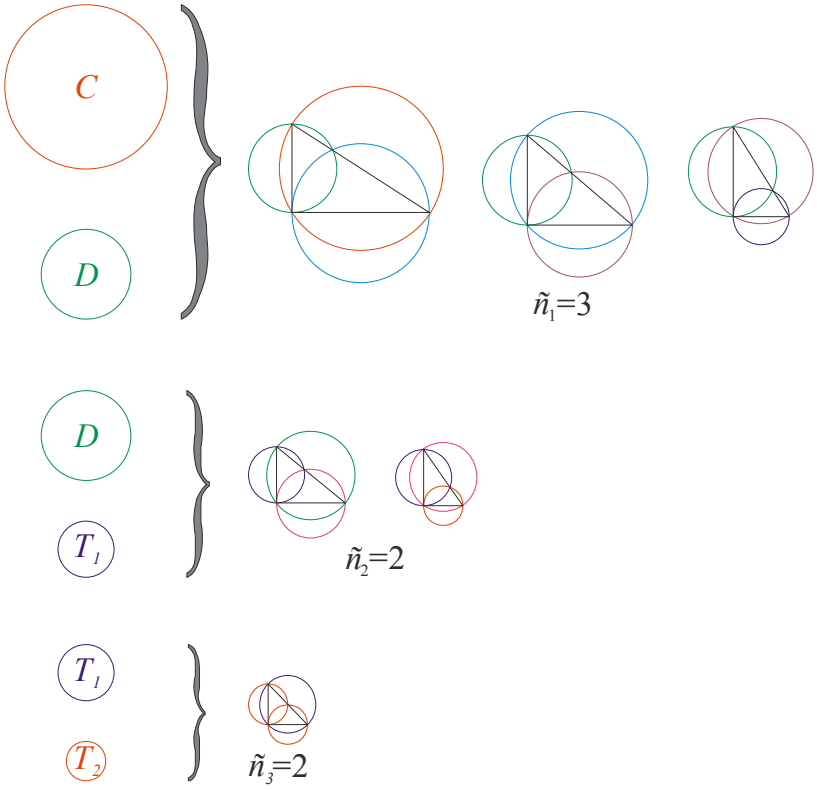


Figura 2 Antanairesis [3,2,2] de dos círculos

Comparando los resultados de la antanairesis de la pareja de segmentos *A* y *B* y la de la pareja de círculos *C* y *D*, y advirtiendo que estas son iguales, se concluye que estas cuatro magnitudes (*A*, *B*, *C*, *D*) son proporcionales, o dicho de otro modo que *A* y *B* guarda la misma razón que *C* y *D*, como se logra percibir en la Figura 3.

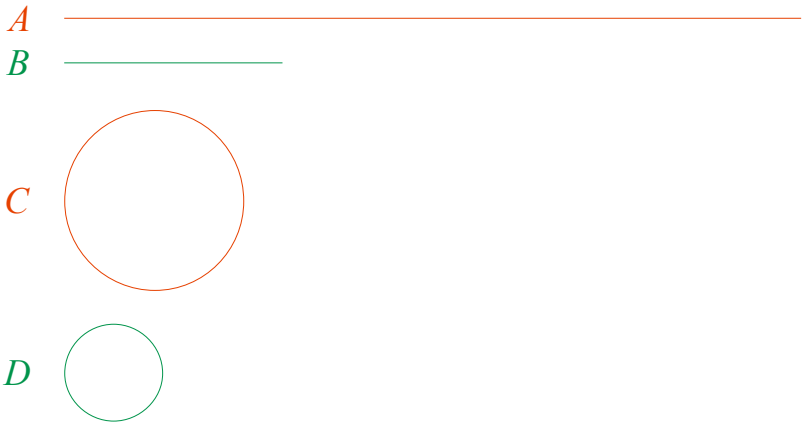


Figura 3 Cuatro magnitudes proporcionales.

Lo anterior permite advertir que la antanairesis, entendida como resultado, captura la razón entre las dos magnitudes (o si se prefiere la relación entre los dos tamaños de las magnitudes en cuestión) a través de un proceso aditivo (o mejor, sustractivo) y que, por tanto, constituye el criterio para establecer la proporción (o igualdad de razón) entre dos o más parejas de magnitudes.

Las ideas de razón y proporción en la teoría euclidiana

La teoría euclidiana de la proporción para magnitudes geométricas, expuesta por Euclides en los Libros V y VI de *Elementos*, es analizada exhaustivamente por un sinnúmero de historiadores de las Matemáticas, desde diversos enfoques y con muy diversos propósitos (*v.g.*, Fine, 1917; Gardies, 1988; Grattan-Guinness, 1996; Hill, 1900, 1912a, 1912b; Knorr, 1992; Muller, 1970; Saito, 2003; Stein, 1990; Vitrac, 2002).

Para reseñar cronológicamente aspectos de los tratados por estos investigadores se debe señalar que Hill (1900) escribe un libro de texto a través del cual espera hacer más comprensible el Libro V de *Elementos* y en su prefacio hace declaraciones interesantes sobre particularidades del Libro V y usa una idea de proporción relacionada con el orden en las sucesiones de múltiplos; posteriormente este autor, en un artículo presentado en dos partes (1912a, 1912b), discute algunas definiciones y proposiciones del Libro V y presenta su reescritura. Fine (1917) exhibe una breve mirada a algunos apartes de los libros V, VI, VII y X a través de los cuales hace una presentación de la teoría euclidiana de la proporción la cual se basa en la idea de proporción sin exigir una definición explícita de razón; a través de esta teoría aborda el problema de la inconmensurabilidad sin recurrir al problema de la medida ni a los números fraccionarios. Muller (1970) discute la interpretación que Aristóteles hace de la teoría de la proporción de Eudoxo, especialmente en lo relativo a la homogeneidad de las magnitudes involucradas; presenta, además, el análisis de algunas demostraciones de propiedades y enunciados de algunas propiedades del Libro V de *Elementos*, en donde se evidencia la consideración a un discurso generalizado para la idea de magnitud o una particularización a magnitudes geométricas. Gardies (1988) examina detalladamente los aportes de Eudoxo a las matemáticas griegas, especialmente a *Elementos* de Euclides, abordando asuntos tales como: Aristóteles y Euclides, las implicaciones de la antifairesis, la teoría eudoxiana de las proporciones, las anomalías del Libro V, algunas concepciones epistemológicas y matemáticas eudoxianas, incomprensiones del siglo XVII, y la herencia eudoxiana en Dedekind. Stein (1990), en el apartado "Cantidades y sus razones: Eudoxo" propone a la razón como una de las tres cantidades trabajadas por Euclides y discute algunas definiciones del Libro V. Knorr (1992) discute dos preguntas, a saber: ¿Cuáles son las diferencias que distinguieron la teoría de Eudoxo de su presentación euclidiana? y ¿Cómo se desarrolló la forma euclidiana de la teoría a partir de su forma eudoxiana anterior? Grattan-Guinness (1996), a propósito de la discusión sobre la existencia de un álgebra geométrica en *Elementos*, introduce la discusión acerca de la posibilidad de considerar las razones como un tercer tipo de cantidad adicional a los números y las magnitudes, y reseña aspectos relativos a la definición de razón y proporción, así como a la imposibilidad de asumir la composición de razones como multiplicación, y la imposibilidad de multiplicar magnitudes entre sí. Vitrac (2002) presenta un estudio sobre la teoría antifairética de las proporciones, reseña algunas dificultades del tratamiento euclidiano en el Libro V así como problemas textuales en su transmisión y examina las teorías desarrolladas por los comentaristas árabes (al-Mâhânî, an Nairîzî y al-Khayyâm). Saito (2003) propone una visión alternativa a la reconstrucción de Becker de la teoría pre-eudoxiana de la proporción, para sustentar que los libros V y VI de *Elementos* no son tan completos como una teoría de las proporciones en abstracto y se pueden interpretar mejor como un conjunto de proposiciones útiles en Geometría, y para argumentar a favor de la idea que las teorías antiguas, si es que existían, deben haber sido menos completas.

En el desarrollo de la tesis doctoral citada en la introducción de este documento, se ha retomado el tratamiento de estos y otros estudios para procurar una comprensión de las ideas de

razón y proporción (Guacaneme, 2012a). A partir de ello, entre otros resultados, se ha podido establecer que en la teoría euclidiana de la proporción para magnitudes geométricas hay tres definiciones que han merecido particular interés de los análisis histórico-epistemológicos, destacándose en su orden la definición 5, la 3 y la 7. A continuación se presenta la versión en Español de las dos primeras referidas.

> Definición V-5: Se dice que una primera magnitud guarda la misma razón con una segunda que una tercera con una cuarta, cuando cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera excedan a la par, sean iguales a la par o resulten inferiores a la par, que cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, respectivamente y tomados en el orden correspondiente. (Puertas, 1994, pp. 11-12)

> Definición V-3: Una razón es determinada relación con respecto a su tamaño entre dos magnitudes homogéneas. (Puertas, 1994, p. 9)

Si bien el texto de la definición 5 puede ser interpretado discursiva o simbólicamente, entre otras opciones, para los efectos de este documento se prefiere a continuación la interpretación asociada a la expresión gráfica. Así, sean *A*, *B*, *C* y *D* cuatro magnitudes geométricas homogéneas dos a dos (dos segmentos y dos cuadrados, presentados en la Figura 4).

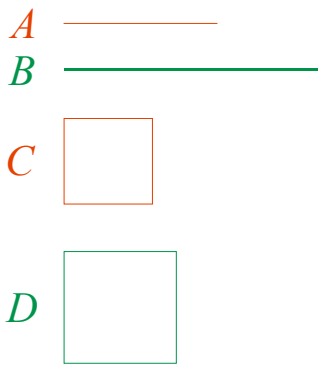


Figura 4 Cuatro magnitudes geométricas homogéneas dos a dos.

Constrúyanse los "múltiplos" de cada una de ellas, pero no a través de una multiplicación entre magnitudes geométricas ni a través de un producto por un escalar (lo cual corresponde a lecturas y notaciones modernas o al menos no coetáneas con la teoría en cuestión), sino por medio de la suma de la magnitud con ella misma. Para el caso de los segmentos la construcción de la suma es elemental; la suma de los cuadrados se puede realizar mediante construcciones geométricas en donde se interpreta el Teorema de Pitágoras como un algoritmo para sumar cuadrados construidos sobre los catetos y el construido sobre la hipotenusa como su suma.

Además, identifíquense con un subíndice que indique el número de veces que cada una se suma a sí misma para obtenerlo; así, A_3 indica el segmento resultante de sumar el segmento *A* (a sí mismo) tres veces (Nótese así que $A_0=A$ y que $A_1=A+A$) y C_2 indica el cuadrado resultante de sumar *C* con C_1 (donde C_1 es el cuadrado resultante de sumar *C* con *C*).

La Figura 5 muestra el resultado de las sumas para los segmentos en tanto que la Figura 6 exhibe los resultados de las sumas para los cuadrados.

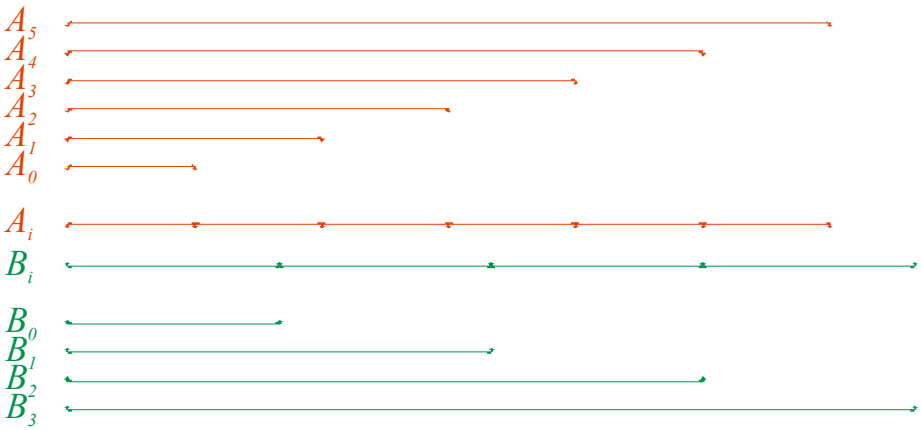


Figura 5 Segmentos resultantes de sumar los segmentos *A* o *B* a sí mismos.

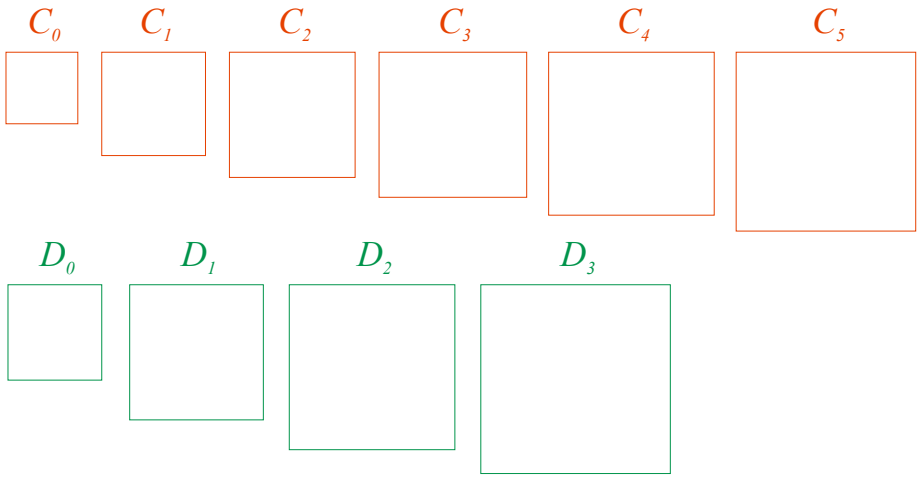


Figura 6 Cuadrados resultantes de sumar los cuadrados *C* o *D* a sí mismos.

Una opción para determinar si las magnitudes *A*, *B*, *C* y *D* son proporcionales es establecer si satisfacen las condiciones de la definición V-5. Ello se puede hacer comparando cada uno de los múltiplos de *A* con cada uno de los de *B*, a la vez que se compara el mismo múltiplo de *C* con el homólogo de *D*, y verificando si el resultado de la comparación coincide. Así, por ejemplo, se puede reconocer que:

A_3 es mayor que B_0 y B_1 pero menor que B_2 y B_3, a la vez que

C_3 es mayor que D_0 y D_1 pero menor que D_2 y D_3.

Una segunda opción se sigue si se asume la interpretación de la definición V-5 sugerida por (De Morgan, 1836) y retomada también por (Fine, 1917). En esta basta con ordenar de manera sucesiva y en un solo grupo los múltiplos de *A* y *B*, así como también ordenar en otro grupo los múltiplos de *C* y *D*; luego se revisa si los órdenes en ambos grupos coinciden.

La Figura 7 exhibe los dos grupos aludidos; allí se aprecia que el orden en que se distribuyen los múltiplos de *A* y *B* es el mismo en que lo hacen los de *C* y *D*, como se evidencia al comparar los dos siguientes listados (retomados de la figura):

A_0, B_0, A_1, A_2, B_1, A_3, A_4=B_2, A_5, B_3

C_0, D_0, C_1, C_2, D_1, C_3, C_4=D_2, C_5, D_3

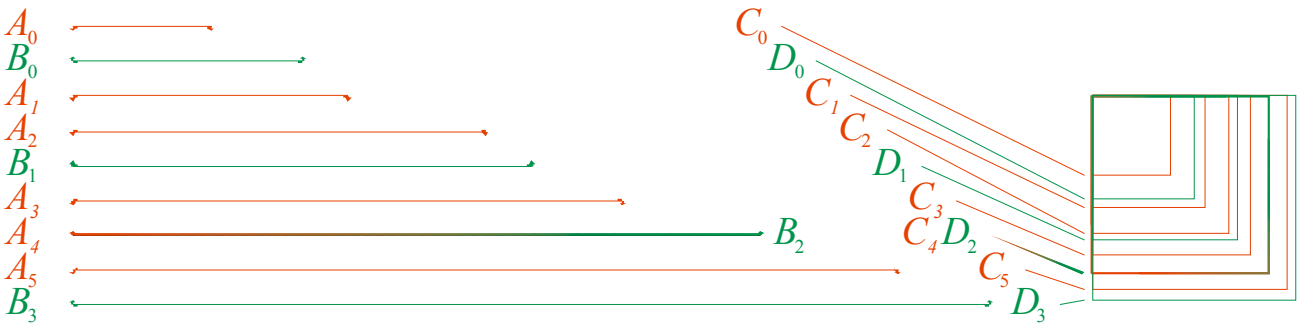


Figura 7 Grupos de múltiplos de las parejas de magnitudes homogéneas.

Lo anterior permite advertir que al "ejecutar" la definición, más que comparar las razones entre cada par de magnitudes para establecer si guardan o no la misma razón, lo que se hace es comparar los órdenes relativos de los múltiplos de las magnitudes en cuestión, actividad que comporta exclusivamente la realización de sumas y la comparación (u ordenación) de los resultados de las mismas.

Enfoques aditivos de las dos teorías

Como se ha intentado enfatizar antes, tanto la aproximación a la razón y proporción a través de la antanairesis, como el tratamiento de las proporciones por medio de la definición V-5, recurren a tratamientos aditivos de las magnitudes geométricas. En uno y otro caso se emplea la sustracción y la adición, respectivamente, para operar las magnitudes. Además de ello, para establecer la existencia o no de una proporción, se acude a una comparación, bien sea entre el resultado del conteo del número de veces que se pudo restar una a otra magnitud (en el primer caso), bien entre los órdenes o distribución de los múltiplos de las magnitudes (en el segundo).

Por otra parte, una mirada a las ideas y estrategias expresadas en ambas teorías permite reconocer que la idea de razón, en tanto expresión de la relación entre el tamaño de dos magnitudes, no necesariamente involucra la existencia de un número (o de una pareja de números) que la capture, objetive o la haga ostensible (Guacaneme, 2013b). Para el caso de la antanairesis, la relación entre los dos tamaños de las magnitudes se aprehende en el comportamiento relativo de las diferencias entre estas, de los residuos con estas, o de sus residuos. Para el caso de la definición V-5 la relación entre los dos tamaños de las magnitudes se aprehende en el comportamiento relativo de los múltiplos de las magnitudes y del correspondiente orden de estos.

En ninguno de los dos casos se incorpora una aproximación que implique la aparición de un producto o un cociente entre las magnitudes implicadas, e incluso en el segundo caso no es necesaria la determinación de la razón entre las parejas de magnitudes vinculadas (lo cual parece justificar la aparente imprecisión o laxitud de la definición V-3). Así, en ninguno de los dos casos se hace presente la idea de razón asociada al cociente de las magnitudes y mucho menos al producto cruzado de las mismas (incluso si las cuatro magnitudes son homogéneas).

Lo anterior conduce necesariamente a proponer que la Historia de las Matemáticas, a través de estos dos enfoques de la razón y la proporción, ofrece una posibilidad para entender que no siempre el razonamiento proporcional ha estado ligado al pensamiento multiplicativo y que existen posibilidades de asociarlo al pensamiento aditivo de las magnitudes.

Algunas posibles implicaciones para la Educación Matemática

Muy probablemente para la gran mayoría de los lectores lo relatado hasta acá constituya una novedad y, en tal sentido, probablemente se adicione al conocimiento que sobre la razón y la proporción se posee, articulándose al mismo de manera más o menos consciente, cuestionando o no la hegemonía del conocimiento común y usual sobre tales objetos matemáticos.

Más allá de ello, lo planteado hasta este punto pretende ser un elemento que confronte el saber matemático usual de los profesores de Matemáticas y, por qué no, de los investigadores en Educación Matemática. Se espera que los individuos de ambas comunidades perciban que en efecto las actividades matemáticas implicadas en las dos teorías citadas conllevan la emergencia de dos significados matemáticos de sendos objetos matemáticos y que incluso se advierta que la razón y la proporción cobran una naturaleza epistémica diferente a la usual y una manera de existir matemáticamente diferente a la convencional. Se tiene la esperanza que la respuesta que unos y otros den a la pregunta qué es una razón y una proporción se dificulte y complejice al intentar incluir las respuestas implicadas en las teorías aludidas. Se aspira a que se reconozca que efectivamente el razonamiento proporcional puede no necesariamente estar ligado al pensamiento multiplicativo y que existe la posibilidad de que esté fuertemente asociado al pensamiento aditivo y al pensamiento correlacional. Se anhela a que el estudio de tales teorías y objetos matemáticos permita explorar opciones alternas para el establecimiento de la cuarta proporcional, problema central (pero no el único) del razonamiento proporcional.

En una dirección un tanto más ambiciosa, pero quizá no menos difusa, se entrevé que la aproximación a la razón y la proporción basada en alguna de las teorías (o en las dos, e incluso en otras no tradicionales), ofrezca un ámbito de innovación educativa y de elaboración de propuestas curriculares que permitan aproximaciones escolares alternas a las usuales.

Asimismo, se prevé que las ideas expresadas constituyan un acicate para nuevas propuestas investigativas en el campo del razonamiento proporcional (ahora también aditivo), tanto desde perspectivas cognitivas como desde otros enfoques de la investigación en Educación Matemática (*v.g.*, ontosemiótico, semántico, social). No se deja de lado la invitación a que más y mejores investigadores se unan a la comunidad ya existente que asume como empresa académica la investigación de la relación "Historia de las Matemáticas – Educación Matemática" entendida como un ámbito ampliamente estudiado, pero aún con mucho conocimiento por brindar. Sin duda sus aportes constituirán nuevos derroteros y retos para profesores e investigadores, en tanto intelectuales de la educación.

Referencias y bibliografía

De Morgan, A. (1836). *The connexion of number and magnitude: an attempt to explain the fifth book of Euclid*. London: Taylor and Walton.

Evans, G. (1927). The Greek Idea of Proportion *The American Mathematical Monthly, 34*(7), 354-357.

Fauvel, J., & van Maanen, J. (2000). *History in Mathematics Education. The ICMI Study*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publisher.

Fauvel, J., & van Maanen, J. (Eds.). (2002). *History in Mathematics Education. The ICMI Study*. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publisher.

Filep, L. (1999). Pythagorean side and diagonal numbers. *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis, 15*, 1-7.

Filep, L. (2003). Proportion Theory in Greek Mathematics. *Acta Mathematica Academiae Paedagogicae Nyíregyháziensis, 19*, 167-174.

Fine, H. (1917). Ratio, Proportion and Measurement in the Elements of Euclid. *The Annals of Mathematics, Second Series, 19*(1), 70-76.

Fowler, D. H. (1979). Ratio in Early Greek Mathematics. *Bulletin (New Series) of the Amrican Mathematical Society, 1*(6), 807-846.

Fowler, D. H. (1980). Book II of Euclid's Elements and a pre-Eudoxan theory of ratio. *Archive for History of Exact Sciences, 22*(1), 5-36.

Fowler, D. H. (1981). Anthyphairetic ratio and Eudoxan proportion. *Archive for History of Exact Sciences, 24*(2), 69-72.

Fowler, D. H. (1982). Book II of Euclid's Elements and a pre-Eudoxan theory of ratio part 2: Sides and diameters. *Archive for History of Exact Sciences, 26*(3), 193-209.

Gardies, J.-L. (1988). *L'Héritage épistémologique d'Eudoxe de Cnide. Un essai de reconstitution*. Paris: Librairie Philosophique J. Vrin.

Grattan-Guinness, I. (1996). Numbers, Magnitudes, Ratios, and Proportions in Euclid's Elements: How Did He Handle Them? *Historia Mathematica, 23*(4), 355-375.

Guacaneme, E. A. (2010). ¿Qué tipo de Historia de las Matemáticas debe ser apropiada por un profesor? *Revista Virtual Educyt, 2*(2).

Guacaneme, E. A. (2011). *La Historia de las Matemáticas en la educación de un profesor: razones e intenciones*. Paper presented at the XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Recife - Brasil.

Guacaneme, E. A. (2012a). Significados de los conceptos de razón y proporción en el Libro V de los Elementos. In O. L. León (Ed.), *Pensamiento, epistemología y lenguaje matemático* (pp. 99-135). Bogotá: Fondo de Publicaciones Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Guacaneme, E. A. (2012b). Teoría euclidiana de la proporción en la construcción de los números reales: ¿un asunto útil para un profesor? *Revista TED. Tecné, Episteme y Didaxis, 31*, 113-131.

Guacaneme, E. A. (2013a). Conflictos para precisar el conocimiento disciplinar del profesor de Matemáticas. In C. Dolores Flores, M. d. S. García González, J. A. Hernández Sánchez & L. Sosa Guerrero (Eds.), *Matemática Educativa: La formación de profesores* (pp. 77-95). Chilpancingo, Guerrero: Ediciones Díaz de Santos, S. A.

Guacaneme, E. A. (2013b). Tres ejemplos para discutir la existencia de objetos geométricos In P. Perry (Ed.), *Memoerias del 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones* (pp. 23-34). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Hill, M. J. M. (1900). *The contents on the fifth and sixth books os Euclid*. London: Cambridge University Press Warehouse.

Hill, M. J. M. (1912a). The Mathematical Association. London Branch. Presidential Address on the Theory of Proportion. *The Mathematical Gazette, 6*(99), 324-332. doi: 10.2307/3605021

Hill, M. J. M. (1912b). Presidential Address on the Theory of Proportion. *The Mathematical Gazette, 6*(100), 360-368.

Knorr, W. (1978). Archimedes and the Pre-Euclidean Proportion Theory. *Archives internationales d'histoire des sciences, 28*, 183-244.

Knorr, W. (1992). De exhaución a cortaduras: primeras etapas de la teoría griega de las proporciones. *Mathesis. Filosofía e Historia de las Matemáticas, 8*, 1-12.

Muller, I. (1970). Homogeneity in Eudoxus's theory of proportion. *Archive for History of Exact Sciences, 7*(1), 1-6.

Puertas, M. L. (1994). *Euclides. Elementos. Libros V-IX*. Madrid: Editorial Gredos S.A.

Saito, K. (2003). Phantom Theories of pre-Eudoxean Proportion. *Science in Context, 16(03), 331-347, 16*(3), 331-347. doi: 10.1017/S0269889703000838

Stein, H. (1990). Eudoxos and Dedekind: On the ancient Greek theory of ratios and its relation to modern mathematics. *Synthese, 84*, 163-211.

Thorup, A. (1992). A pre-euclidean theory of proportions. *Archive for History of Exact Sciences, 45*(1), 1-16.

Vitrac, B. (2002). 'Umar al Khayyam et l'anthyphérèse: Étude du deuxième Livre de son commentaire Sur certaines prémisses problématiques du Livre d'Euclide. *Fahrang. Quarterly Journal of Humanities & Cultural Studies, 14*, 137-192.