Educación Matemática en las Américas 2015

Volumen 16: Modelación

CIAEM
IACME
Fundado Founded: 1961

Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM)
Paseo de la Reforma 383., 7° Piso,
Colonia Cuauhtémoc, Delegación Cuauhtémoc,
México D.F. CP 06500, MÉXICO

www.ciaem-iacme.org
ciaem.iacme@gmail.com

Educación Matemática en las Américas 2015
Volumen 16: Modelación
Editado por Patrick (Rick) Scott y Ángel Ruiz
Colaboradora: Sarah González.

ISBN Volumen: 978-9945-603-13-2
ISBN Obra Completa: 978-9945-415-97-1

El Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM) es una organización fundada en 1961 asociada a la International Commission on Mathematical Instruction. Busca potenciar la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en las Américas.

Para citar este libro y este volumen:

Comité Interamericano de Educación Matemática (2015). *Educación Matemática en las Américas: 2015. Volumen 16: Modelación*. Editores: Patrick (Rick) Scott y Ángel Ruíz. República Dominicana.

Tabla de Contenidos

Presentación

La **XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática** realizada en Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México, del 3 al 7 de mayo del 2015, contó con la participación de cerca de 1000 personas de 23 países y la presentación de más de 500 trabajos (conferencias plenarias y paralelas, mesa redonda, minicurso, diálogos, comunicaciones, talleres y posters) Esta fue una reunión regional de la *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI). El CIAEM es la organización afiliada al ICMI con mayor antigüedad. Su creación se remonta al año 1961 cuando se realizó la primera conferencia en Bogotá, Colombia.

Un gran nivel científico dominó los trabajos, en un ambiente cultural muy especial, con una gran hospitalidad por parte de los colegas de Chiapas.

Los conferencistas plenarios fueron Michèle Artigue (Francia), Carlos Vasco (Colombia), Diane Briars (USA), Abraham Arcavi (Israel-Argentina), Celia Hoyles (Reino Unido), María Teresa Tatto (USA) y Alicia Ávila (México). Ellos también desarrollaron *Diálogos* especiales, espacios adicionales de conversación e intercambio.

Una mesa plenaria organizada por la *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe* contó con la participación de Carlos Sánchez (Cuba), Nelly León (Venezuela), Edison de Faría (Costa Rica), Luis Carlos Arboleda y Jhony Villa (Colombia).

El evento tuvo conferencias paralelas y minicursos impartidos por académicos invitados, entre ellos: Gabriele Kaiser (Alemania), Richard Noss (Reino Unido), Manuel Santos (México), Gert Schubring (Alemania), José Chamoso (España), José Luis Lupiáñez (España), Arthur Powell (USA), Alessandro Ribeiro (Brasil), Roberto Araya (Chile), Gilberto Obando (Colombia), Uldarico Malaspina (Perú).

Los dos temas principales fueron la *Preparación de docentes que enseñan matemáticas* y el *Uso de tecnologías en la Educación Matemática*.

El congreso tuvo el valioso patrocinio de varias instituciones internacionales y nacionales: International Commission on Mathematical Instruction; Universidade Luterana do Brasil; Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas, y Centro de Investigación y Formación en Educación Matemática de la Universidad de Costa Rica; Secretaría de Educación del Estado de Chiapas; Universidad del Valle de México; Sindicato de Trabajadores de la Educación de México; Centro Regional de Formación Docente e Investigación Educativa (CRESUR); Oficina de Convenciones y Visitantes de Chiapas; Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas de México; Escuela Normal Superior de Chiapas; Universidad de Costa Rica; HP; CASIO; y EduSystems.

Desde el 2007 el CIAEM ha logrado, entre otras cosas:

- Potenciar la calidad académica en los trabajos, la organización eficiente y la proyección de las conferencias interamericanas
- Consolidar la publicación de trabajos seleccionados de la Conferencias en la revista *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* (editada en Costa Rica)

- Fortalecer la relación del CIAEM con la comunidad internacional de Educación Matemática, especialmente con el ICMI y la *International Mathematical Union*.
- Crear y consolidar la Medalla *Luis Santaló*
- Apoyar el desarrollo del *Capacity and Networking Project* del ICMI en América Latina (Costa Rica 2012, Perú 2016)
- Auspiciar la creación y las actividades de la *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe*
- Apoyar la organización del *I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe*, celebrado en Santo Domingo, República Dominicana, en noviembre del 2013
- Consolidar el uso intenso de tecnologías de la comunicación en todas las actividades del CIAEM
- Crear una comunidad virtual del CIAEM de gran proyección tanto a través de su sitio web principal como de su página en Facebook
- Fundar en México el *Comité Interamericano de Educación Matemática* con personalidad jurídica para atender los múltiples compromisos formales que posee
- Traducir al español y publicar algunos textos del NCTM relacionados con la temática *Principles to actions* y continuar una línea importante de colaboración con el *National Council of Teachers of Mathematics* de los USA

En la XIV CIAEM fue confirmada la decisión de tener la XV CIAEM en Medellín, Colombia, en el 2019. Será desde hará 58 años la segunda ocasión en que se realizará una CIAEM en tierra colombiana.

CIAEM es el evento internacional más importante en Educación Matemática en América Latina. Constituye un punto de referencia para investigadores, docentes y estudiantes en todo el continente.

La mayoría de los textos de base para las presentaciones plenarias o paralelas ha sido incluidas en el número 15 de los *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* que se edita en Costa Rica: http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem.

Las comunicaciones, talleres, minicursos y posters han sido incluidas en esta colección digital de volúmenes que titulamos *La Educación Matemática en las Américas: 2015.* Los trabajos se han organizado de la siguiente manera:

- Volumen 1 *Educación Matemática en las Américas 2015: Formación Inicial para Primaria*
- Volumen 2 *Educación Matemática en las Américas 2015: Formación Inicial para Secundaria*
- Volumen 3 *Educación Matemática en las Américas 2015: Formación Continua*
- Volumen 4 *Educación Matemática en las Américas 2015: Uso de Tecnología*
- Volumen 5 *Educación Matemática en las Américas 2015: Etnomatemática y Sociología*
- Volumen 6 *Educación Matemática en las Américas 2015: Currículum, Evaluación y Competencias*
- Volumen 7 *Educación Matemática en las Américas 2015: Investigación*
- Volumen 8 *Educación Matemática en las Américas 2015: Estadística y Probabilidad*
- Volumen 9 *Educación Matemática en las Américas 2015: Geometría*
- Volumen 10 *Educación Matemática en las Américas 2015: Álgebra y Cálculo*

- Volumen 11 *Educación Matemática en las Américas 2015: Educación Primaria*
- Volumen 12 *Educación Matemática en las Américas 2015: Historia y Epistemología*
- Volumen 13 *Educación Matemática en las Américas 2015: Nuevos Enfoques y Relación con Otras Áreas*
- Volumen 14 *Educación Matemática en las Américas 2015: Necesidades Especiales*
- Volumen 15 *Educación Matemática en las Américas 2015: Resolución de Problemas*
- Volumen 16 *Educación Matemática en las Américas 2015: Modelación*
- Volumen 17 *Educación Matemática en las Américas 2015: Talleres y Minicursos*
- Volumen 18 *Educación Matemática en las Américas 2015: Posters*

El CIAEM desea agradecer a todos los autores que presentaron sus trabajos en la XIV CIAEM y que incluimos en esta colección de volúmenes. Y a todos los revisores, directores de tema, y colaboradores que participaron en la revisión científica de las ponencias de este magno evento.

La organización detallada y la edición en sus diversas dimensiones fue realizada por nuestro segundo vicepresidente Patrick Scott (Estados Unidos) quien dedicó un esfuerzo extraordinario para tener estas *Memorias* disponibles. Quiero expresar en nombre de nuestra organización nuestro agradecimiento a Rick. Nuestra compañera Sarah González (Vocal para El Caribe) se encargó de tramitar su registro en República Dominicana que contó con el apoyo de la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra de ese país, a las que también expresamos nuestra gratitud.

Los enlaces de estos volúmenes se han colocado en las páginas web oficiales del CIAEM.

Esperamos que la publicación de todos estos trabajos contribuya al progreso de la investigación y la acción de aula en la Educación Matemática de las Américas.

Angel Ruiz
Presidente
Comité Interamericano de Educación Matemática

A iniciação na Modelagem Matemática como uma possível proposta formativa

Ernandes Rocha de **Oliveira**
Departamento de Matemática, Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista
Brasil
ernandes@mat.feis.unesp.br
Zulind Luzmarina **Freitas**
Departamento de Matemática, Faculdade de Engenharia, Universidade Estadual Paulista
Brasil
zulind@mat.feis.unesp.br

Resumo

Neste trabalho analisamos o processo de formação inicial ocorrido com um estudante no desenvolvimento de sua investigação de um problema em Modelagem Matemática em interação com os outros colegas e dois docentes que pesquisam em ensino de Ciências e Matemática. O objetivo é investigar características da aprendizagem do aluno quando utilizamos a modelagem matemática como abordagem de ensino e aprendizagem no contexto da formação inicial de professores. Foram realizadas ao longo de dois semestres reuniões semanais com o grupo de alunos em que esses relatavam o desenvolvimento de seus trabalhos, as reuniões foram gravadas e depois analisadas. Os nossos dados foram obtidos a partir da análise dessas reuniões e de relatório confeccionado por um destes alunos. Foi possível elencar algumas categorias e construir uma tipologia para um olhar do processo formativo tendo como pano de fundo a modelagem matemática.

Palavras chave: educação, matemática, formação inicial, modelagem, formação crítica.

Introdução

Durante o ano de 2014 desenvolveu-se um projeto de investigação com quatro alunos do Curso de Licenciatura em Matemática visando lidar com situações de ensino-aprendizagem que os permitissem elaborar, numa fase posterior, sequências didáticas para alunos de uma Escola Estadual de Ensino Médio. Neste trabalho analisamos esse processo de formação ocorrido com um dos estudantes, do segundo ano de licenciatura em Matemática, desenvolvendo a sua investigação pessoal, de um problema relativo a Modelagem Matemática, em interação com os outros colegas e dois docentes que pesquisam em ensino de Ciências e Matemática. O grupo reunia-se, semanalmente, para discutir sobre as atividades desenvolvidas. Esses alunos recebiam bolsas da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nivel Superior (CAPES) e estavam vinculados a um projeto maior com foco na Escola. A interação ocorrida entre os participantes baseia-se na visão de que a aprendizagem é um processo de engajamento, do estudante, em conversação e atividades de ensino, que refletem as concepções aceitas pela comunidade científica (Driver et al.,1999). Nesta concepção, é, principalmente, através do diálogo sobre ciências, que o aprendiz de ciências pode passar, lentamente, a dominar a maneira científica de pensar e agir. A nossa hipótese é que a abordagem de problemas utilizando-se a modelagem matemática, dentro de um grupo que privilegia a investigação sobre a prática como modelo formativo, pode favorecer o surgimento de certos aspectos de aprendizagem que não seriam possíveis em outras circunstancias. Como acreditamos que essa aprendizagem necessita de um processo de construção a nossa investigação é dirigida de maneira a entender quais aprendizagens podem ser evidenciadas quando o futuro professor se envolve em um problema que contemple a modelagem, enquanto estratégia de ensino.

Educação Matemática, Modelagem e formação inicial de professores

A ideia de formação docente assumida pelos autores está baseada em Chauí (2003); nessa visão, a formação docente envolve tempo, assim, não pode prescindir de conhecimentos instituídos e nem pode ser reduzida à mera transmissão de conteúdos e ao mero treinamento de futuros pesquisadores. Para Chauí (2013), a leitura de uma obra nos anuncia algo de novo que nos mobiliza para elevar as nossas questões do plano do vivido como "passional", "natural", ou "choro", para um plano que nos questiona, remete-nos ao passado, não em um plano contemplativo, mas que nos interroga e ajuda-nos a re-colocar as questões do presente.

Quanto a concepção de Educação Matemática adotamos uma postura que se aproxima da Educação Matemática Crítica no sentido proposto por Ole Skovsmose (Jacobini; Wodewotzki, 2006). Segundo Jacobini e Wodewotzki (2006) uma abordagem sócio-crítica da Educação Matemática, em consonância com a Pedagogia Crítica freiriana, volta-se para a formação crítica, amadurecimento acadêmico do educando e construção da autonomia. As características que ressaltam são a da participação ativa do educando, reflexões sobre problemas de seu entorno e envolvimento e participação na comunidade.

Existem muitas concepções acerca de Modelagem Matemática e de sua relação com a Educação Matemática (Malheiros, 2012). Barbosa (2001) resgata a perspectiva da modelagem na Educação Matemática, a partir de sua origem na Matemática Aplicada. Na Matemática Aplicada entende-se que muitos problemas que aparecem no cotidiano são passíveis de serem compreendidos a partir de um ponto de vista quantitativo e/ou envolvendo alguma representação de formas e que, para a resolução desses problemas, é desejável, ou ainda, necessário empregar as ferramentas simbólicas que historicamente foram organizadas no campo da Matemática. Entendemos que nessa etapa, enquanto proveniente da Matemática Aplicada, a primeira característica importante que se pode dizer sobre o uso de matemática em problemas do "mundo real" é que ela funciona como uma linguagem tentando traduzir, da linguagem natural, de modo conciso e com algum grau de precisão e mínima ambiguidade, os princípios básicos organizados em outras ciências. Esse processo de tradução de conceitos formulados em uma linguagem natural para a linguagem simbólica matemática é o início do que se chama modelamento, ou modelagem, matemática (Bassanezi, 2002; Barbosa, 2009; Araújo, 2012). Como linguagem, a matemática possui uma sintaxe peculiar e, muitas vezes, difícil para quem se inicia, por isso, em todos os níveis de ensino sugere-se a vinculação dos conteúdos próprios da matemática com problemas do contexto do estudante, quando não com o próprio contexto em que o conteúdo matemático (agora como modelo simbólico) foi concebido. A segunda característica, que essa ciência apresenta, é funcionar como "ferramenta" para obter respostas a partir de modelos matemáticos já conhecidos ou ainda como instrumentos para a construção de novos modelos (Barbosa, 2001).

A formação básica de qualquer profissional no ensino superior que venha a usar a matemática, não pode deixar de lado um cuidado especial com os conteúdos, com a relação desses conteúdos matemáticos com as outras ciências, com os diversos ramos da própria matemática e com o desenvolvimento histórico dos temas da matemática e sua relação com os problemas do mundo real. Entende-se também, que o estudo de modelos matemáticos simples, porém significativos do ponto de vista do desenvolvimento dessa ciência e sua relação com as demais ciências, permite ao iniciante compreender melhor o poder e o limite dos métodos matemáticos utilizados. Além disso, esses modelos podem servir como um primeiro passo na busca de uma formação matemática que possa desenvolver no estudante uma confiança na formulação e exploração de novos modelos.

Da mesma forma, a literatura aponta para várias perspectivas sobre a relação entre modelagem e Educação Matemática. Araújo (2009) argumenta em favor de uma abordagem da modelagem matemática segundo a educação matemática crítica. Referenciamos nosso trabalho em uma perspectiva crítica para a formação de professores e, nesse sentido, procuramos organizar nosso trabalho com os estudantes de modo a construir um ambiente de apredizagem que valorize o grupo, que permita que cada um explore suas questões e publicamente as apresente, que permita o questionamento das suposições e condições e que compreenda a sua prática como condição problematizável.

As propostas curriculares de formação básica contemplam a perspectiva da Modelagem Matemática no ensino-aprendizagem (Brasil, 2006). Embora a estrutura curricular dos cursos de Fomação de Professores de Matemática preveja várias disciplinas específicas de matemática, existe espaço e necessidades para a exploração de tratamentos e uso de metodologias alternativas às que são tradicionais nessas disciplinas e é necessário buscar-se um tratamento mais integrado entre as diversas disciplinas. Malheiros (2012) aponta que pesquisas que investigam a modelagem na formação inicial e continuada de professores destacam a importância de a Modelagem ser incorporada aos cursos de formação e observa que, nessas formações, pelo menos duas ações devem estar presentes: a vivência com modelagem e as ações didatico-pedagógicas que permitiriam aos estudantes refletirem sobre as possibilidades de utilização da modelagem como estratégia de ensino. Vários autores que investigam a Modelagem na Formação de professores, reconhecem que esses, nesse processo, possuem a oportunidade de experimentar e aprofundar seus conhecimentos em investigações e só têm a ganhar em suas habilidades de uso da matemática na formulação e resolução de futuros problemas e na concepção de alternativas metodológicas de ensino de matemática possibilitando a transferência do processo vivenciado para sua atuação na educação básica (Biembengut, Biembengut, 2009; Leite, 2008; Barbosa, 2001).

A investida dos professores da universidade foi voltada para uma preocupação tanto com a resolução de problemas quanto com uma atenção e cuidado com o rigor da expressão de raciocínios matemáticos, na construção de modelos próprios e na compreensão de sua relação com os problemas reais, na reflexão sobre esse processo e na busca de traduzir as investigações em propostas de ensino para o ensino básico, compreendendo os aspectos culturais e sociais envolvidos nessa tarefa. Na nossa perspectiva, a Modelagem Matemática é compreendida como uma alternativa pedagógica que permite um trabalho formativo que vise a possibilidade de construção de autonomia por parte dos estudantes. Barbosa (2001) apresenta seis pilares que se constituem na argumentação do movimento de Modelagem na educação: o argumento formativo, o argumento da competência crítica, o argumento da utilidade, o argumento intrínseco, o argumento da aprendizagem e o argumento da alternativa epistemológica (a matemática como cultura). Compreendemos que nosso trabalho, na formação inicial de professores, busca, na utilização da modelagem, defender esses mesmos pilares.

O ensinar e aprender na perspectiva formativa

Segundo Freire & Shor (2003), a tarefa do professor nas escolas e instituições de ensino superior, ao discutir o próprio processo da educação, passa por incentivar a curiosidade e o rigor dos alunos, não garantindo, mas permitindo que estes percebam as contradições existentes na sociedade, possibilitando com isso que alguns poucos continuem de maneira mais comprometida nesse processo de transformação. Nessa prática, o diálogo é a confirmação conjunta do professor e dos alunos no ato comum de conhecer e reconhecer o objeto. Então, em vez de transferir o conhecimento estático, como se fosse uma posse do professor, o diálogo requer uma aproximação dinâmica na direção do objeto. Nas palavras de Freire & Shor (2003, p. 205), "Na perspectiva libertadora, não temos nada para dar, realmente. Damos alguma coisa aos alunos apenas quando intercambiamos alguma coisa com eles". Nessas condições, podemos dizer que o professor, "desarmado", contextualiza o programa a ser desenvolvido em um momento em que ocorre simultaneamente a sua aprendizagem e a do aluno. A relação "quem ensina aprende" é parte de como o professor compreende a sua participação e o seu compromisso na construção do conhecimento. Para Shor e Freire não significa, no entanto, não compartilhar de algumas "certezas", mas vinculá-las à historicidade da ciência, ou seja, entender que as perguntas surgem e adquirem sentido de acordo com a sociedade e o momento que vivemos; assim um conhecimento novo surge e é substituído quando não dá conta de responder às questões que estão sendo feitas naquele tempo e lugar (Freire e Shor, 2003). Nem por isso, na perspectiva de Freire e Shor (2003), o professor e o aluno têm o mesmo status na relação ensino-aprendizagem, o que significa que ele mantém uma posição diretiva, ou seja, ele diferencia-se da posição do aluno na medida em que "traz" para essa relação o conhecimento do conteúdo e processos de análise. Dessa maneira, ele dispõe de "rigor" e "autoridade", o que, para os autores, implica que esta está continuamente em reconstrução no processo do conhecimento, juntamente com o aluno. Conhecimento no sentido de dar "vida" ao objeto estudado, o que exige do professor e aluno manter sempre uma posição cética com relação ao objeto estudado. A autoridade, e não o autoritarismo, no próprio processo de exercitar a autoridade, que se refaz, abre espaço para o aluno trazer sua expressão na relação com o objeto, juntamente com o professor. A autoridade do professor, a liberdade por parte dos alunos, a busca da intimidade do objeto na sua historicidade e relações, juntas são o motor para o pensamento crítico. Segundo Shor e Freire, o fato de o professor ter mais intimidade com o objeto, não significa que ele já esgotou todas as dimensões, todas as relações, relativas ao processo de conhecimento do objeto (Freire & Shor, 2003).

Metodologia

O nosso trabalho é de natureza qualitativa e tem como base projetos de investigação realizados com alunos do Curso de Licenciatura em Matemática visando lidar com situações de ensino-aprendizagem que os permitissem elaborar, numa fase posterior, sequências didáticas para alunos de uma Escola Estadual de Ensino Médio. Os registros foram obtidos a partir da transcrição de áudio de reuniões do grupo de pesquisa, realizadas semanalmente durante o período de março a junho de 2014, e de relatório apresentado por um dos alunos. O grupo de investigação é composto por quatro estudantes de Iniciação Científica cada um desenvolvendo a sua investigação pessoal acerca de um problema relativo a Modelagem Matemática e dois professores da universidade. A proposição do problema foi construída passo a passo por um dos alunos através do compartilhamento de informações, em reuniões realizadas semanalmente com o grupo, partindo do interesse do aluno.

A análise de dados foi realizada através da construção de categorias, utilizando-se a análise de conteúdo segundo Bardin (1988), a partir da qual procuramos destacar os diferentes tipos de aprendizagem ocorridos no processo de formação do professor na condução de trabalhos de investigação.

Na constituição dos dados destacamos situações que trazem reflexões para a importância do aluno viver esse processo durante a sua formação inicial.

Análise

As categorias de ensino-aprendizagem construídas a partir de uma leitura da perspectiva freiriana nos permitem inferir sobre o seu papel na formação inicial.

Ensinar e aprender exigem arriscar-se ao novo

Esta aprendizagem é definida a partir do desenvolvimento da disposição do sujeito abrir-se para áreas não explicitamente relacionadas. Barbosa (2001) considera "a modelagem como um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar", nesse sentido o novo, ou novidade, pode vir a partir de uma situação a qual o estudante ainda não fora exposto, ou seja, a partir de uma situação em que seus conhecimentos prévios, experiências, vivências, deverão ser mobilizados para enfrentar um problema que, para ele, é novo, surpreendente ou ainda, a novidade pode advir de uma situação em que o estudante reconhece uma certa insuficiência de seus conhecimentos prévios para responder adequadamente à sua questão (Burak, 2010).

No relato isso é alcançado quando o aluno ao adentrar nos estudos de modelagem elege um dos exemplos apresentados por Bassanezi (2002) como tema de estudo. O tema escolhido foi o da Maçã. Este momento lhe surge como uma surpresa, um espanto, que diante da pergunta "como calcular o volume de uma maçã" se vê perante um problema que até então não fazia parte do universo temático de seus estudos de matemática. O que uma maçã teria a ver com matemática?

> ... este tema me chamou a atenção pela curiosidade em saber como eu poderia transformá-lo em um problema matemático, achava que se fosse possível não teria muitas maneiras de como fazer isso. Em minhas pesquisas sobre o tema, descobri como modelos: Análise da correlação entre temperatura de "dormência" e a produção, Processo de resfriamento da maçã e etc. Dentre as opções citadas e muitas outras, eu escolhi trabalhar com o volume da maçã, isto é, como calcular o volume de uma maçã.

Este é um momento que permite ao aluno mover-se do estrito universo dos conteúdos propriamente matemáticos em direção a aspectos que, na forma tradicional, estão fora da matemática escolar. Aqui cabe observar que, o que torna esse momento possível, é a busca do diálogo entre professores e alunos e uma busca pela horizontalidade na construção do conhecimento, caracterizamos esse momento como parte do rigor metódico, característico do processo investigativo, apresentado em Freire (1996). Essa horizontalidade de posicionamentos é parte da concepção de formação docente assumida pelos autores no sentido de que o aluno, em conjunto com o professor re-colocam a leitura da obra, no caso o tema eleito, enquanto "entendimento do que significa compreender um tema" e recolocá-lo numa perspectiva de introduzir outros elementos. Também Keim (2012) destaca a importância da horizontalidade num processo de formação que privilegia e valoriza as diferenças no que tange ao encaminhamento de uma educação crítica:

> Num processo educacional, diferente do que ocorre na Educação Bancária, predomina a horizontalidade na medida em que as relações são de parceria e de colaboração e

> reciprocidade. A horizontalidade predomina em circunstância na qual somente ensina quem se dispõe a aprender. No sistema horizontal, igualdade não é uniformidade, mas respeito e valorização das diferenças. Na horizontalidade o processo educativo reúne pessoas diferentes, com diferentes graus de conhecimentos e diferentes tipos de conhecimentos, que não se submetem, por esses atributos, a hierarquia pré-estabelecida.

Nesse sentido podemos falar que o arriscar-se para o novo surge numa procura de satisfação e sustentação do sujeito e do coletivo, na busca pela compreensão mais ampla do assunto abordado. Nesse contexto, o processo de formação adotado caminha para uma concepção voltada para humanização onde prevalece a reciprocidade e a colaboração. Esse processo é implícito e vai sendo explicitado na medida que os ganhos de tal abordagem se tornam visíveis. Desta maneira faz-se necessário um exercício investigativo do grupo e dos integrantes do grupo para a compreensão da extensão da estratégia adotada. A interligação de muitas áreas, quando não se torna explícita, distancia o sujeito da complexidade e teia de relações que seu objeto e prática estão inseridos. Compreender e explicitar concepções que embasam práticas sociais potencializam que o inter-relacionamento de outras áreas do saber como questões políticas, econômicas, de cidadania, dentre outras, adquiram mais consistências, tanto no que tange à projetos individuais como coletivos (Freire,1996).

Ensinar e aprender exigem libertar-se de pré-concepcões

O contexto é estabelecido de maneira que a investida do aluno caminhe para cada vez mais buscar conhecimento enriquecendo a qualidade da crítica. Jacobini e Wodewotzki (2006) assinalam que a investigação na modelagem matemática permite ao estudante uma

> imersão no objeto de estudo com a intenção de ampliar o seu conhecimento sobre o mesmo e sua percepção tanto da relação entre o material investigado e a matemática quanto dos componentes externos a esta última.

Desse modo o aluno estaria tendo uma oportunidade de alargar sua questão e, a partir do estudo do tema, contribuir para outras áreas de conhecimento que não a matemática, o aluno nesse sentido extrapola o conhecimento de matemática.

No relatório percebemos que essa investida teve início na forma como o aluno abordou o problema. O aluno inicialmente considera que a matemática deve ser aplicável, ou aplicada, e deve dar conta de resolver um problema prático, isto é, o modo como a matemática se relaciona com problemas do cotidiano é visto como instrumental.

> Não sei ao certo como isso poderia ajudar no cultivo de macieiras, mas como aluno de graduação em matemática pude perceber como é vasto o assunto volume e o que vemos no ensino médio, até mesmo na graduação, é apenas a "ponta do iceberg". As noções de volume que tenho agora só foram possíveis com a problematização do tema maçã."

Aos poucos a forma de perceber a matemática e sua relação com o mundo é modificada ao ponto de se permitir reconstruir o conhecimento abstrato, teórico, a partir da interação com o problema, ou seja, a problematização do tema e a investida em sua compreensão, permitiu que ele modificasse seu conhecimento sobre o assunto. Segundo Freire (1996) é parte da responsabilidade do professor incentivar a curiosidade e rigor dos alunos, não garantindo mas permitindo que alguns continuem de forma mais compromissada, no caso, esse compromisso e rigor, relaciona-se à surpresa do aluno quanto a dinamicidade do conhecimento matemático com relação aos conteúdos trabalhados no ensino médio o que não era percebido até então como um processo em permantente construção, não se limitando a estudar e tratar resultados e fórmulas. A qualidade da reflexão e a pertinência de tratar um problema real o leva a perceber a insuficiência do tratamento do assunto pela simples apresentação de resultados. Nesse sentido o comprometimento do aluno e o seu envolvimento na situação de diálogo favorecem a sua construção de autonomia para o enfretamento de situações novas se contrapondo às situações que fortalecem relações de heterenomia.

Ensinar e aprender exigem perguntar-se

Faz-se necessário a construção de um contexto que incite o aluno a permanentemente questionar os seus procedimentos e reconstruir o que significa em termos teóricos os resultados, não tomando o conhecimento (provisório) enquanto verdade absoluta. Burak (2010) apresenta cinco etapas, adaptáveis, para o desenvolvimento de investigações em modelagem. Em cada uma delas o papel das questões a serem formuladas é destacado e, na análise crítica das soluções e resultados é um momento que permite "o aprofundamento de aspectos matemáticos como dos aspectos não matemáticos envolvidos no tema". Dessa forma, o trabalho com modelagem permite estabelecer as distinções entre o campo teórico e o problema do "mundo" e questionar as certezas provenientes de ambos. No relato apresentado percebe-se isto em várias perguntas formuladas pelo aluno: qual o sentido das medidas feitas? Como considerar os instrumentos que foram utilizados na produção das medidas? Como o conhecimento teórico matemático se relaciona com esses provenientes das experimentações?

Ensinar e aprender exigem a superação da condição ingênua

Faz-se necessário a construção de um ambiente para que estimule o aluno a sair da condição de neutralidade do ensino, isto significando que o indivíduo participa de um processo no qual ele se apropria de interpretações sociais que o permitem compreender as relações que condicionam a sua ação no mundo e, deste modo, tomar posições. O aluno, nesse momento, não está incorporando a figura do professor, o que significa que esta categoria não está relacionada a prática profissional. É necessário a construção de um contexto no qual a condição de não saber ou de um saber não crítico transite para um saber crítico, isto é, um saber que o recoloca no mundo que o coloca como um sujeito que pode restabelecer relações sociais através do conhecimento.

Segundo Freire (1996) a libertação envolve também a relação do sujeito com os conteúdos disciplinares e é responsabilidade do professor cuidar para que o aluno "entre" na relação com esses saberes. No relato isso se apresenta quando a noção de volume apresentada pelo aluno é, em primeiro momento, confundida com as fórmulas utilizadas para o cálculo e isso não é suficiente para que ele se pergunte a cerca do significado de volume. O que é que estou fazendo quando digo que vou calcular o volume? O que isso significa?

> O problema em calcular o volume de uma maçã é que não existe uma formula específica para tal tarefa. Se concentrarmos na parte visual da fruta notaremos sua semelhança com uma esfera e o interessante é que sabemos calcular o volume de uma esfera, agora a parte inicial do meu problema está quase resolvida, vamos para a parte prática. Primeiramente pegue uma maçã e a envolva com um pedaço de barbante obtendo uma circunferência cujo comprimento de 26,2cm. Sabendo que a formula do comprimento de uma circunferência é dada por $2\pi R$ temos que $R = 4.1698$cm. Aplicando a fórmula do volume de uma esfera obtemos um valor "aproximado" superior ao volume da maçã. Cortando-se a maçã ao meio (no sentido longitudinal), mede-se o raio r do círculo inscrito na face plana da maçã e calculando-se a média, entre o volume máximo e este mínimo, segue que:média, entre o volume máximo e este mínimo, segue que: $vol_{maça} \approx (303.6934 + 107.5364)/2 = 205.6149$ cm^3.

Parte do rigor metódico (Freire, 1996) pode ser traduzido como a necessidade do processo de problematização que permita ao aluno questionar-se mais adequadamente a respeito de seus próprios conhecimentos sobre o tema. A conversa no grupo e o diálogo com os professores devem permitir que o aluno se aproxime de seu objeto de conhecimento de modo a ressignificá-lo a aprofundar sua curiosidade sobre o objeto. Essa caminhada foi fruto do processo de sustentação engatilhado pelo professor e da liberdade atribuída ao aluno de busca pela intimidade do objeto na sua historicidade e relações, que juntas foram o motor para o pensamento crítico (Freire & Shor, 2003). Nas palavras de Freire

> ensinar e aprender tem que ver com o esforço metodicamente crítico do professor de desvelar a compreensão de algo e com o empenho igualmente crítico do aluno de ir entrando como sujeito em aprendizagem, no processo de desvelamento que o professor ou professora deve deflagrar. Isso não tem nada que ver com a transferência de conteúdo e fala da dificuldade, mas, aomesmo tempo, da boniteza a docência e da discência.

Percebemos que essa passagem é realizada uma vez que já existe um “despertar” para o problema teórico, começa a fazer sentido para o aluno buscar resposta para a questão: o que é o volume e como determiná-lo matematicamente? Outra forma do rigor metódico se apresentar requer a entrada no processo de pensar certo sobre o objeto a ser conhecido e essa não é feita de um modo linear, são necessárias várias idas e vindas, lançar-se sobre o grupo para que este o ajude a problematizar e novamente debruçar-se sobre seu próprio entendimento pondo-o à prova. O sentido para si é construído no e pelo diálogo-problematizado no grupo (Freire, 1996).

> A leitura desse livro começou com uma noção intuitiva de volume. Segundo Elon “o volume de um sólido é a quantidade de espaço por ele ocupado. Costuma-se tomar como unidade de volume um cubo cuja aresta mede uma unidade de comprimento, o qual será denominado cubo unitário e por definição seu volume será igual a 1. Assim o volume de um sólido S será o numero de vezes que esse sólido contém o cubo unitário.” A partir da definição de cubo unitário foi o ponto de partida para demonstrar a fórmula do volume da esfera. Antes tínhamos que encontrar o volume de um bloco retangular e como o cubo é um caso particular de bloco retangular, então devemos encontrar o volume de um cubo de aresta medindo um número inteiro, racional e irracional. Nessa parte da pesquisa encontrei algumas dificuldades para entender, pois para a demonstração de algumas passagens precisa ter certos conhecimentos em análise, mas era algo bem simples de entender, nada que um aluno de ensino médio não pode entender. Olha só que interessante, minha busca de encontrar outro método para demonstrar a fórmula do volume da esfera me fez encontrar outro meio, mais teórico, de determinar volume de uma maçã.

A passagem de uma posição ingênua de lidar com o conhecimento para uma posição mais crítica (Freire & Shor, 2003), e o fato de ter vivido uma tal experiência são elementos necessários para uma consciência do processo de transformação social, no entanto o aluno começa a se preocupar com outros elementos também importantes na efetivação desse processo. No caso tratado o aluno, futuro professor, vai se dirigir à problemática de como estabelecer um contexto em que os alunos da escola de ensino médio possam também fazer reflexões sobre a matemática como um instrumento gerador de problema através do diálogo. A sua busca é por um modelo que possibilite ao aluno do ensino médio transitar para a condição de um sujeito mais autônomo utilizando da investigação e comunicação. A transformação social, dessa maneira, não é um processo individual e sim social: "trabalho apenas começa pela busca do pensamento crítico", a luta está por fazer-se, através da ação política de grupos com um ideal de luta. Nesse sentido, a busca da liberdade pelo pensamento crítico é um ideal que não se esgota. Essa investida deve se estender, conscientes da complexidade em que se insere esse processo, para ajudar outros a se libertarem (Freire & Shor, 2003). Uma posição contrária a esta, caminha em direção a uma postura individualista de ascensão ao poder, corroborando e se favorecendo dos instrumentos legitimados por essa estrutura. Então há de se ficar atento para que a posse, o poder, a confiança e a autonomia, adquiridos na vivência de uma experiência crítica, não reduzam a complexidade em que qualquer processo de transformação está inserido.

Ensinar e aprender exigem reflexão sobre a prática

Essa aprendizagem se refere a uma transição do estudante para o futuro professor, diz respeito a traçar caminhos para levar o assunto para os alunos.

A modelagem matemática como perspectiva para formação de professores em um ambiente crítico pode favorecer com que o estudante possa considerar problemas que são coletivos. Não somente ele busca questionar, compreender um problema, mobilizar seus conhecimentos para produzir novas compreensões para si, como também, como consequência de seu processo de libertação e de construção de uma condição de autonomia, religar esses conhecimentos aos processos de libertação de outros.

O que significa quando o aluno opta por não usar uma ferramenta que não o permitiria estabelecer relações com outras pessoas (alunos do ensino médio)? Nessa condição resolver o problema é buscar modelos que oportunizem outros a emitir opiniões. O trabalho com modelagem, em um grupo problematizador, pode contribuir para que o estudante, ao envolver-se não somente com o problema matemático mas também com questões relacionadas as suas atuais e futuras funções sociais, tenha oportunidades de ascender para uma condição de contribuir para o processo de transformação social .

> Depois desse experimento parecia que estava faltando algo, foi quando eu resolvi trazer a demonstração do volume da esfera, mas a maneira que eu conhecia usava integral. O primeiro passo foi buscar um referencial teórico que atendesse meu objetivo, foi recomendado pelo meu orientador o livro Medida e forma em geometria comprimento, área, volume e semelhança do autor Elon Lages Lima.

Percebe-se nessa investida, a preocupação em encontrar uma forma de exposição do conteúdo que seja compreendida, essa não se refere somente ao aluno, mas também aos estudantes de ensino médio que passam a ser considerados pelo próprio aluno como seu objeto de preocupação.

> Como essa matemática era vista só em faculdade eu tentei encontrar outra saída para demonstrar a fórmula sem usar integral, ou seja, usar a matemática aprendida no ensino médio, assim um maior número de pessoas poderia entender.No decorrer da leitura do livro do Elon eu encontrei um teorema chamado Princípio de Cavalieri que dizia o seguinte: São dados dois sólidos A e B. Se qualquer plano horizontal secciona A e B segundo figuras planas SA e SB de mesma área, então os sólidos A e B têm o mesmo volume. O princípio de Cavalieri é um teorema, ou seja, ele pode ser demonstrado e como envolve conceito avançados de cálculo não iremos demonstrar então vamos adota-lo como verdadeiro.

Ele estava em um caminho voltado para si e começa a colocar possibilidades de levar o tema para a sala de aula. Parte da caracterização do rigor metódico pode ser entendida no momento em que o aluno, ao incorporar em seu modo de ver algo além daquilo que lhe era imediato, passa a refletir a partir de termos mais abstratos e, relacionando essa forma mais abstrata ao seu problema real, estabelece um novo nível de necessidade de rigor matemático.

A condição de aprendiz e de incompletude características desse processo potencializam o transitar da curiosidade ingênua para a curiosidade epistemológica e filosófica, bem como, à superação da dicotomia teoria e prática, condição que permite ao sujeito avançar na qualidade da crítica e assumir a sua responsabilidade enquanto sujeito ativo na sua relação com o mundo. (Freire, 1998).

Outra forma que o rigor metódico é apresentado consistiu na responsabilidade assumida pelo aluno por organizar seus argumentos e fundamentá-los, de modo a poder estabelecer uma conversa verdadeira com os outros, o aluno inicia seu processo de buscar um rigor em sua construção conjunta do conhecimento.

Conclusão

As categorias elencadas a partir do referencial freiriano permitiram construir uma tipologia para um olhar do processo formativo tendo como foco a modelagem matemática. A reflexão crítica que ocorreu no grupo refletidas na construção das categorias, permite entender a dinâmica da construção de processos que propiciam aprendizagens de maneira a valorizar tanto o papel da abordagem com foco na modelagem matemática, que se pretende de vertente crítica, que apresenta potencial para que determinados recursos possam ser mobilizados, como o papel da abordagem de formação numa perspectiva freiriana, onde outros recursos puderam ser mobilizados, tendo em vista a formação do professor. Essas abordagens são dialeticamente relacionadas de modo a uma complementar a outra. Assim a categoria "ensinar e aprenderexigem arriscar-se ao novo" permitiu entender, a partir do enfoque da modelagem, as condições nas quais o aluno tem oportunidades de se atentar para áreas que inicialmente não se encontram explicitamente relacionadas, permitindo que aspectos como a surpresa (ou o espanto), vivências, dentre outros, fossem mobilizados. A categoria "ensinar e aprender exigem libertar-se de pré-concepcões" permitiu entender a partir do contexto estabelecido as condições de oportunidade ao aluno de alargar sua questão contribuindo assim para a produção de conhecimento em outras áreas que não a matemática, o aluno nesse sentido teve a oportunidade de extrapolar o conhecimento como simples aplicação de fórmulas permitindo que a investida dele caminhasse para cada vez mais em direção a buscar conhecimento enriquecendo a qualidade da crítica. Nos dados, essa categoria é expressa pelo aluno a partir da problematização do tema e da investida em sua compreensão que permitiu que ele modificasse seu conhecimento sobre o assunto. A categoria "ensinar e aprender exigem perguntar-se" permitiu entender que se faz necessário um contexto, no caso proporcionado pela abordagem modelagem, em que as questões relativas ao campo teórico e prático sejam levantadas, o que permite ao aluno um contínuo questionar-se não tomando o conhecimento com verdade absoluta. A categoria "ensinar e aprender exigem a superação da condição ingênua" permitiu entender que a modelagem, em um grupo problematizador, pode contribuir para que o estudante envolva-se não somente com o problema matemático mas também com questões relacionadas as suas atuais e futuras condições sociais, construção essa que permite o aluno transitar de um contexto no qual o conhecimento é aprendido de modo não contextuado, não relacionado aos problemas de seu meio, para um em que o conhecimento pode ser reconstruído e reinterpretado de modo a contribuir para que as relações com outros dê-se a partir de posicionamentos cada vez mais conscientes.

A categoria "ensinar e aprender exigem reflexão sobre a prática" nos permite compreender como a junção da modelagem matemática e o referencial freiriano podem contribuir para que o futuro professor considere como aprendizagem de conteúdos as formas que viabilizam a comunicação do problema com aqueles a quem escolhe se dirigir – essa aprendizagem se refere a uma transição do estudante para o futuro professor, diz respeito a traçar caminhos para levar o assunto para os alunos.

Referências e bibliografia

Araújo, J. L. (2009). Uma abordagem sócio-crítica da modelagem matemática: a perspectiva da educação matemática crítica. *ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciências e Tecnologia*, *2*(2),55-68.

Araújo, J. L. (2012). Ser Crítico em Projetos de Modelagem em uma Perspectiva Crítica de Educação Matemática. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 26(43), 839-859. Rio Claro,

Bardin, L. (1988). *Análise de Conteúdo.* Lisboa, Portugal: Edições 70.

Barbosa, J. C. (2001). Modelagem Matemática e os professores: a questão da formação. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 1-18. Rio Claro,

Barbosa, J. C. (2009). Modelagem e Modelos Matemáticos na Educação Científica. *ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, 2(2), 69-85.

Bassanezi, R. C. (2002). *Modelagem Matemática: ensino aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Contexto.

Biembengut, M. S., & Hein, N. (2013). *Modelagem Matemática no Ensino* (5a ed.). São Paulo: Contexto. Biembengut, M. S., & Biembengut, T. M. (2009). Modelagem matemática na formação de professores: possibilidades e limitações. *IX Congresso Nacional de Educação*. *Anais* (pp. 10095-10108).

Burak, D. (2010). Modelagem Matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. *Revista de Modelagem na Educação Matemática*, 1(1), 10-27.

Driver, R., Asoko, H., Leach, J., Mortimer, E., & Scott, P. (1999). Construindo conhecimento científico na sala de aula. *Química Nova na Escola*, 9, 31-40.

Freire, P., & Shor, I.(2003). *Medo e ousadia: o cotidiano do professor* (10a ed.). São Paulo, Brasil: Paz e Terra.

Freire, P. (1998). *Pedagogia da Esperanca*. São Paulo: Paz e Terra.

Freire, P. (1996). *Pedagogia da Autonomia: saberes necessários à prática educativa*. São Paulo: Paz e Terra. (Coleção Leitura)

Giordano, F. R., Fox, W. P., Horton, S. B., & Weir, M. D. (2009). *A First Course in Mathematical Modeling*. Belmont: Brooks/Cole.

Jacobini, O. R. (2004). *A Modelagem Matemática como instrumento de ação política na sala de aula*. São Paulo: UNESP.

Jacobini, O., & Wodewotzki, M. (2006). Uma reflexão sobre a modelagem matemática no contexto da educação matemática crítica. *Bolema*, 19(25), 1-16.

Keim, E. J. (2012). Princípios essenciais na obra freiriana e a educação inter-étnica da emancipação e humanização. Seminário de Pesquisa de Educadores da Região Sul, IX ANPED SUL.

Leite, M. (2008). Reflexões sobre a disciplina de modelagem matemática na formação de professores. *Educação Matemática Pesquisa*, 10(1), 115-135.

Malheiros, A.P.S. (2012). Pesquisas em Modelagem Matemática e diferentes tendências em Educação e em Educação Matemática. *Bolema: Boletim de Educação Matemática, 26*(43), 861-882. Rio Claro.

Actividades de modelización para un curso de Álgebra Lineal en una formación de ingenieros

Luis Ramón **Siero** González
Universidad Autónoma de Baja California
México
lsiero@uabc.edu.mx
Avenilde **Romo Vázquez**
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Instituto Politécnico Nacional
México
aromov@ipn.mx

Resumen

Esta investigación se desarrolla en el Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional de México (CICATA – IPN) y en el Centro de Ingeniería y Tecnología, unidad Valle las Palmas de la Universidad Autónoma de Baja California (CITEC) y tiene por objetivo diseñar actividades de modelización para una formación matemática de ingenieros. El diseño se basa en el análisis de la modelización matemática en cursos de la formación de especialidad, por ejemplo el de materiales compuestos. Se consideran elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico y se propone una metodología asociada a esta teoría que permite el análisis de modelos matemáticos en uso como base del diseño de las actividades didácticas.

Palabras clave: Modelización matemática, formación de ingenieros, praxeología, didáctica.

Introducción

La formación matemática de futuros ingenieros ha sido objeto de estudio de diferentes investigaciones en Matemática Educativa (Camarena, 1999; Bissell y Dillon 2000; Bissell 2002; Kent y Noss 2000 y 2001; Romo-Vázquez 2009; Macias 2012; Soto 2012; Martínez 2014). Estos trabajos han mostrado que la enseñanza de las matemáticas en formación de ingenieros atiende a necesidades particulares. Pollak (1988) pone de manifiesto que estas necesidades matemáticas básicas y avanzadas pueden ser abordadas a partir de la modelización matemática, considerando a ésta como base de un nuevo paradigma educativo. De hecho, la modelización matemática ha sido abordada en una diversidad de investigaciones en nuestra disciplina. El estudio ICMI 14 publicado en el año 2007 permite evidenciar diferentes perspectivas teóricas que han sido producidas para estudiarla. En la introducción de este estudio un modelo matemático es definido de la siguiente manera: "Un modelo matemático consiste en un dominio extra-matemático D, de interés, algún dominio matemático M, y un mapeo que va del dominio extra-matemático al matemático" (p.4). Y está representado por la siguiente figura:

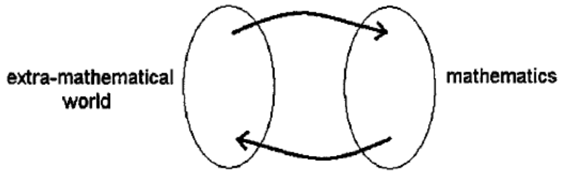


Figura 1. Modelo matemático, mapeo del modelo extra-matemático al matemático.

La modelización por su parte es definida como:

> Objetos, relaciones, fenómenos, suposiciones, cuestiones, etc. En D son identificados y seleccionados como relevantes para el propósito y situación y entonces son mapeados ~ trasladados dentro de objetos, relaciones, fenómenos, suposiciones cuestiones, etc. Perteneciendo a M, discusiones matemáticas, manipulaciones e inferencias son hechas, los resultados son entonces trasladados de regreso a D e interpretados como conclusiones concernientes a este dominio (Niss, Blum & Galbrahit, 2007, p.4).

Esta idea de modelización, concebida como un ciclo que puede ser repetido varias veces, puede decirse que con algunas variantes aparece en diferentes trabajos. Bissell (2002) presenta por ejemplo dos ciclos de modelización, y los denomina rígido y flexible, sin embargo este autor señala que éstos se basan en una concepción platónica de la modelización, ya que asumen que todo fenómeno o situación es modelizable. Además señala que los ingenieros más que construir modelos, ellos adaptan y refinan modelos “tipos”, cuyas soluciones son bien conocidas y que han sido utilizados en otras ocasiones. Esto nos lleva a cuestionarnos, ¿cómo modelan los ingenieros en su formación de especialidad y en la práctica misma? ¿Cuáles son los modelos matemáticos que utilizan? ¿Estos modelos son objeto de enseñanza en su formación matemática?

El CITEC una formación de ingenieros en México

Estas preguntas pueden ser abordadas al considerar el CITEC, debido a que en esta institución la enseñanza de las matemáticas ocupan un lugar muy importante, durante los primeros dos años de la carrera se cursan 7 asignaturas de matemáticas, como son Álgebra Lineal, Cálculo Diferencial, Cálculo Integral, Ecuaciones diferenciales, etc. Al entrevistar a profesores de estas asignaturas se evidenció que los profesores conocen poco de las necesidades matemáticas de las asignaturas de especialidad. Por ejemplo el coordinador de la carrera reconoció que el tema de caracterización de materiales compuestos resultaba muy complejo para los estudiantes. El profesor que imparte las materias de materiales compuestos (MC, en adelante) y de Diseño de Estructuras de Aeronaves (DEA) señaló que los alumnos no recuerdan cómo hacer operaciones básicas con matrices.

Este tipo de operaciones son esenciales para obtener las deformaciones de los materiales compuestos, o los esfuerzos que soporta cada elemento, dependiendo de los datos que se tengan. Uno de los contra tiempos en las materias es que se tiene que volver a explicar cómo multiplicar dos matrices. Esto sacrifica tiempo de clase, recordando álgebra matricial en lugar de trabajar en los temas propios de la materia, como es el caso de los alumnos del tronco común de ingeniería del CITEC. (Discurso del profesor A).

Además señaló que los temas de álgebra lineal debían explicarse nuevamente, utilizando programas computacionales como Matlab, Maple, Matemática, etc. Este discurso del profesor motivó que en esta investigación nos enfocaremos en analizar la asignatura de DEA con el objetivo de reconocer las matemáticas que están presentes, sus adaptaciones y/o usos y la manera en que éstas podrían abordarse desde un curso de álgebra lineal.

Instituciones presentes en la formación de ingenieros

Esta investigación considera elementos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) propuesta por Chevallard en 1999 y desarrollada por otros investigadores durante los últimos años. Esta teoría propone un modelo epistemológico para el estudio de la actividad humana en su dimensión institucional. La institución puede definirse como:

> Las instituciones, es decir, organizaciones sociales estables, enmarcan las actividades humanas y simultáneamente las hacen posibles por los recursos que estas instituciones ponen a disposición de sus sujetos. Estos recursos materiales e intelectuales han sido producidos por comunidades, a lo largo de procesos de enfrentamiento a situaciones problemáticas, para resolverlas con regularidad y eficacia (Castela & Romo, 2011, p.85).

En este trabajo nos interesa reconocer las instituciones involucradas en la formación de ingenieros y las relaciones que existen entre ellas en torno a la modelización matemática. En Romo –Vázquez (2009) se reconocen tres tipos de instituciones que participan en una formación de ingenieros: de producción *P*, de enseñanza *E* y prácticas *Ip*. Las instituciones de producción son las disciplinas, matemáticas *P*(M) y disciplinas intermediarias *P*(DI), en éstas se producen y validan praxeologías. Las instituciones de enseñanza tienen por objetivo transmitir y difundir las praxeologías entre aprendices, por ejemplo la enseñanza de las matemáticas *E*(M) y la enseñanza de las disciplinas intermediarias *E*(DI). Las instituciones prácticas *Ip* acogen y norman las actividades prácticas, por lo que las praxeologías son utilizadas. Las actividades prácticas que tienen lugar en la formación, como el desarrollo de proyectos o innovaciones *Ap* se consideran una institución práctica, ya que éstas se acercan en cierta medida a la práctica profesional. La producción, enseñanza (difusión) y el uso de praxeologías puede tener lugar en toda institución, la distinción hecha de las instituciones tiene que ver con la actividad y vocación predominante en éstas. Dentro de una formación de ingenieros las relaciones que pueden aparecer entre estas instituciones puede ser de diferentes tipos. Por ejemplo, una formación de ingenieros muy teórica podrá tener una cercanía a *P*(M) y a *P*(DI) mientras que una formación muy práctica estará más cerca de *Ip*. Las praxeologías matemáticas producidas en *P*(M) y utilizadas en *Ap* pueden circular entre las diferentes instituciones de la siguiente manera: 1)De *P*(M) a *P*(DI) y luego a *E*(DI) y finalmente a Ap. 2) De *P*(M) a *E*(M) y luego a Ap. 3) De *P*(M) a *E*(M) a *E*(DI) y a *Ap*. Estos recorridos se esquematizan de la siguiente manera:

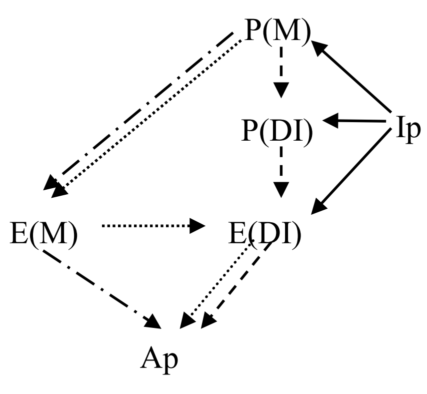


Figura 2. Modelo Praxeológico extendido, recorridos praxeológicos entre instituciones.

La actividad de modelización matemática se analizará por tanto en el marco de instituciones que participan en la formación del ingeniero, como se detallará más adelante, reconociendo las restricciones que condicionan así como los recursos que posibilitan dicha actividad. Para ellos se utilizará la noción de praxeología, la cual se divide en cuatro componentes, considerados en 2 bloques como se muestra a continuación:

Tabla 1
Definición del modelo praxeológico

Bloque Técnico – Práctico	**Bloque Tecnológico - Teórico**
T Tipo de tareas	θ Tecnologías
$\boldsymbol{\tau}$ Técnicas	Θ Teorías

Fuente: Chevellard (1999).

En el bloque técnico - práctico tenemos:

- Tipos de tareas (T), lo que se hace.
- Técnicas (τ), la manera en que se realizan o resuelven las tareas.

En el bloque Tecnológico - Teórico

- Tecnología (θ), es lo que explica, produce, valida y justifica la técnica.
- Teoría Θ, es el discurso que a su vez explica, produce, valida y justifica la tecnología θ.

La praxeología $[T, \tau, \theta, \Theta]$, se reconoce como la mínima unidad de análisis de la actividad.

Metodología

Las asignaturas de Materiales Compuestos (MC), y Diseño de Estructuras de Aeronaves (DEA) son las que se revelaron en las entrevistas con los profesores, como asignaturas cuyo análisis puede ayudar a comprender el rol que juegan las matemáticas en su enseñanza. Dichas asignatura son parte de las formaciones en Ingeniería Aeroespacial e Ingeniería Mecánica que se imparten en el CITEC. Considerando el esquema de las instituciones que participan en la formación de ingenieros podríamos esquematizar las instituciones que consideramos en esta investigación de la siguiente manera:

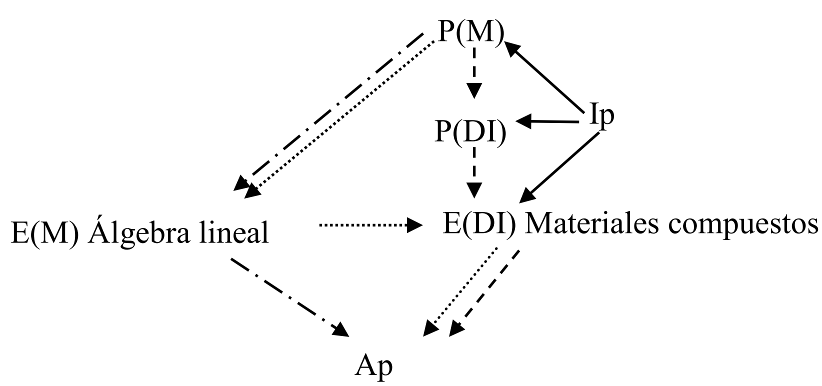


Figura 3. Modelo Praxeológico extendido, recorridos praxeológicos del modelo extendido entre instituciones en un estudio de caso CITEC.

Para el análisis de las *E*(DI), Materiales Compuestos y Diseño de Estructuras de Aeronaves se estudiaron libros de texto, sugeridos por los profesores que enseñan dichas asignaturas.

Para materiales compuestos (MC):

- Askeland D. y Phulé P., (2004), "Ciencia e Ingeniería de los Materiales", Cengage.
- Barbero, J. (2011) "Introduction to Composite Materials Design*",* CRC Press, 167-213.

Y para Diseño de estructuras de aeronaves la siguiente referencia: Logan D.L. (2004), A First Course in the Finite Element Method", Thomson.

De la misma manera se realizó un trabajo colaborativo con los profesores responsables de los cursos, entrevistas, resolución conjunta de ejercicios y descripción de las elecciones didácticas efectuadas para su enseñanza. Para complementar este trabajo se realizaron observaciones de clase con el objetivo de apreciar la propuesta didáctica en funcionamiento, la actividad de los estudiantes, sus dificultades y/o cuestionamientos.

Análisis de la caracterización de materiales compuestos

En Askeland y Phulé (2004), los materiales compuestos se definen como la mezcla de dos o más materiales de los cuales conocemos las propiedades físicas, químicas y geométricas, el resultado de esta mezcla es un material compuesto logrando obtener diversas combinaciones no usuales de rigidez, peso, resistencia a corrosión y resistencia a temperaturas altas. De estos compuestos no se conocen las características y no se pueden inferir de los datos que conocemos de cada material que lo forma, por lo que dicho material compuesto debe de ser caracterizado. Para la caracterización del material, es necesario conocer las propiedades geométricas, químicas y físicas del elemento, las cuales están relacionadas de la siguiente manera:

$\sigma = (E)\varepsilon$, esto es; Esfuerzos = Módulo de Elasticidad * Deformaciones

Si conocemos el módulo de elasticidad y las deformaciones, el producto de estas dos matrices nos da como resultado los esfuerzos del material, relación que nos permite conocer sus características y de esta manera poder inferir sobre las ventajas o desventajas de construir piezas de aviones, carros, estructuras de edificios con características específicas y decidir cuáles materiales son más adecuados para el trabajo que se está solicitando, tomando en cuenta el espesor de la pieza, la forma y los esfuerzos externos a los que puede estar expuesta (Barbero, 2011).

Análisis del desplazamiento de resortes

Este tema se aborda en la materia de diseño de estructuras de aeronaves la cual está asociada a la materia de álgebra lineal ya que existe un modelo matricial inmerso en los temas propios de la materia como son, solución de sistemas de resortes y solución de sistemas de barras, los cuales en el campo laboral se utilizan cuando se quiere hacer un tren de aterrizaje para un avión y es donde los alumnos egresados tienen que aplicar el modelo aprendido en la clase de DEA. Es por ello que se realizó un análisis para identificar las praxeologías matemáticas en juego, el cual se presenta a continuación.

Se analizará el capítulo 2 del libro de Logan cuyo título es: *A First Course in the Finite Element Method* y fue publicado en 2004. En dicho capítulo, la unidad inicia presentando una introducción general del método de rigidez y desplazamiento así como los temas se abordarán con más profundidad en capítulos posteriores.

En la sección 2.1 se presenta una definición formal de la "Definición de la Matriz de Rigidez", la cual se presenta a continuación:

> For an element, a stiffness matrix $\hat{k}$ is a matrix such that $\hat{f} = \hat{k}d$, where $\hat{k}$ relates local-coordinate $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ nodal displacements $\hat{d}$ to local forces f of a single element.

Inmediatamente después muestra una gráfica de un sistema de resorte donde explica el significado de cada variable y de la notación $\frown$, la cual define como un símbolo que hace referencia a un sistema local de coordenadas del sistema de resorte presentado en la Figura 4.

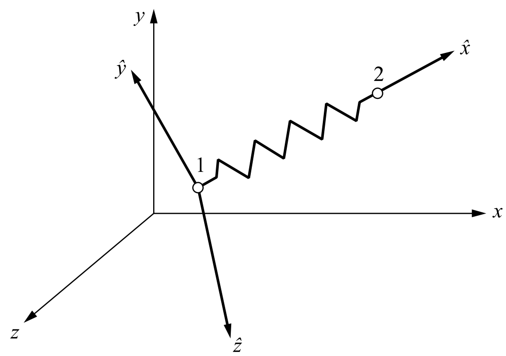


Figura 4. Modelo de un resorte en el espacio, sistemas de coordenadas, $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ local y (x, y, z) global.

> For a continuous medium or structure comprising a series of elements, a stiffness matrix K relates global-coordinate (x, y, z) nodal displacements d to global forces F of the whole medium or structure. (Lowercase letters such as x, y, and z with out the ^ symbol denote global-coordinate variables).

En esta sección sólo muestra la definición de matriz de rigidez para sistemas de resorte en general, para preparar al lector a los conceptos que se utilizarán en los siguientes subtemas.

La sección 2.2 trata el tema de la deducción de la matriz de rigidez para un sistema de un resorte. Inicia utilizando la convención de equilibrio directo para obtener la matriz de rigidez para un sistema unidimensional de resortes, el cual obedece la ley de Hooke, establece que el alargamiento unitario que experimenta un material elástico es directamente proporcional a la fuerza aplicada F y se representa por la ecuación $F = KU$ donde F: Vector de fuerzas, K: Matriz de rigidez o constante del resorte, U: Vector de desplazamiento y sólo resiste fuerzas en la dirección del resorte, como muestra la Figura 5 y en el texto explica que significa cada uno de los elementos presentados, los números 1 y 2 son llamados nodos, $\hat{f}_{1x}. \hat{f}_{2x}$, representan las fuerzas asociadas a los nodos en la dirección axial, $\hat{d}_{1x}$, $\hat{d}_{2x}$, son los desplazamientos locales de los nodos, también se les puede identificar como los grados de libertad de cada nodo y la constante k es la llamada constante del resorte o también conocida como la rigidez del resorte.

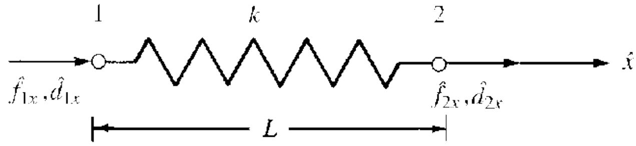


Figura 5. Sistema de resorte con dos nodos, elemento lineal del resorte con desplazamiento positivo de los nodos y con convención de fuerzas.

Después menciona que la constante del resorte se volverá a utilizar en los diferentes capítulos del libro pero con diferente significado, por ejemplo en el capítulo 3 la constante de rigidez se aplicará en barras definiéndola como $k = \frac{AE}{L}$, donde A representa la sección transversal de la barra, E es el módulo de elasticidad y L es la longitud de la barra. En el capítulo 5 la constante de rigidez para una barra con sección transversal prismática con torsión se define como $k = \frac{JG}{L}$, donde J representa el momento polar de inercia, G es el módulo de rigidez del material y L sigue representando la longitud de la barra. En los capítulos 13 y 14 hablan de conductividad de calor y de fluidos en materiales porosos, respectivamente en los cuales también se utiliza la constante k y muestra que la constante de rigidez se puede aplicar en problemas no estructurales como transferencia de calor y fluidos como en problemas estructurales como son los sistemas de resortes y sistemas de barras. Hace especial énfasis en la utilidad de la constante de rigidez en los diferentes problemas aplicando la correcta ley constitutiva como la ley de Hooke para problemas estructurales, la ley de Fourier para problemas de transferencia de calor y la ley de Darcy para fluidos y un principio de conservación como son el equilibrio de los nodos y la conservación de energía.

Una vez que explicó el uso de la constante de rigidez muestra la relación entre las fuerzas de los nodos que son $\hat{f}_{1x}, \hat{f}_{2x}$ con los desplazamientos de los nodos que están dados por $\hat{d}_{1x}$, $\hat{d}_{2x}$ y menciona que dicha relación es la matriz de rigidez dada por:

$$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{1x} \\ \hat{f}_{2x} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{d}_{1x} \\ \hat{d}_{2x} \end{Bmatrix} \qquad (1)$$

No explica de dónde se obtiene esta relación pero ha justificado el uso de la ley de Hooke desde el principio de la unidad, la cual se define como $F = -k\delta$, lo que nos lleva a inferir que efectivamente aplicando la ley de Hooke para sistemas de resortes se obtiene como resultado esta relación.

En seguida presenta el método de elemento finito el cual se explica en la sección 1.4 del libro y se utiliza para la construcción de la matriz de rigidez para un sistema de resortes y para su solución, lo que nos conducirá a poder resolver problemas ingenieriles.

El método lo divide en 7 pasos:

Paso 1: **Seleccionar el tipo de elemento**, en esta primera etapa el autor explica los tipos de elementos que se pueden seleccionar, los cuales se muestran a continuación en la Figura 6.

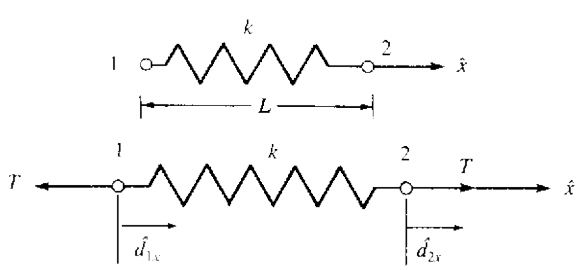


Figura 6. Esquema de un sistema de resorte con dos nodos, resorte lineal sujeto a fuerzas de tracción.

Paso 2: **Seleccionar la ecuación de desplazamiento**, en la segunda etapa el autor explica que, se debe de seleccionar una función que represente la deformación del resorte cuando se le aplica una fuerza, porque a veces es muy difícil obtener una solución exacta, por lo que se asume una función de forma o la distribución de desplazamiento dentro del elemento, usando una función apropiada. Comenta que la función más común o de mayor uso son los polinomios, después explica y justifica paso a paso cuales son estas distribuciones de desplazamiento o funciones de forma y lo hace para un resorte de dos nodos como se muestra en la Figura 7.

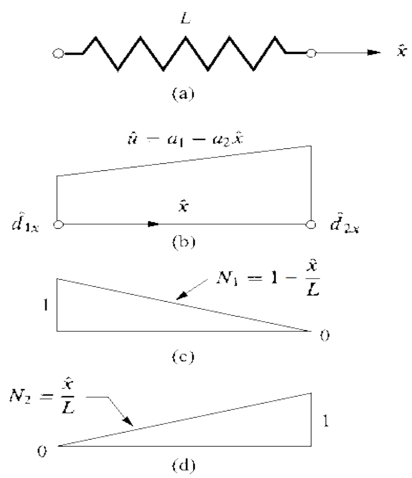


Figura 7. (a) Grafico de un elemento de resorte (b) Función de desplazamiento y función de forma $\hat{u}$ (c) N_1 (d) N_2 sobre dominio del elemento.

Obteniendo los al final la función de forma donde los N_i expresa la forma de la propuesta distribución de desplazamiento.

$$N_1 = 1 - \frac{\hat{x}}{L} \text{ y } N_2 = \frac{\hat{x}}{L} \qquad (2)$$

donde N_1, N_2 representan la distribución de desplazamiento en un cierto dominio, los N_i se les llama función de forma y expresan la forma de la propuesta distribución de desplazamiento. Este es un método alterno al de la ley de Hooke para obtener la matriz de rigidez.

Paso 3: **Definir la deformación/Desplazamiento y estrés/ Deformación**,

Para un sistema de resortes de dos como se muestra en la Figura 8.

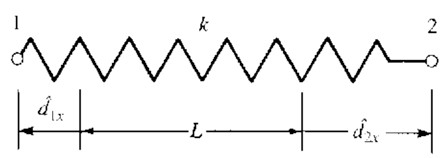


*Figura 8.*Esquema de un sistema de resortede dos nodos, deformación del resorte.

En esta sección el autor explica la deformación del resorte la cual se representa por $\delta = \hat{u}(L) - \hat{u}(0) = \hat{d}_{2x} - \hat{d}_{1x}$ (3)

donde

δ es la deformación del resorte, es decir la elongación total del resorte.

$\hat{d}_{1x}$ es el negativo porque la dirección de la deformación se hace en la dirección de negativa del eje $\hat{x}$.

$\hat{d}_{2x}$ es el positiva porque la dirección de la deformación se hace en la dirección de Positiva del eje $\hat{x}$.

El autor define a la fuerza de tracción como

$T = k\delta$ (4)

sustituyendo el valor de δobtenemos

$T = k(\hat{d}_{2x} - \hat{d}_{1x})$ (5)

en este apartado el autor define la fuerza de tracción como el producto de la constante del resorte k por la deformación del resorte δ, lo que deja listo para la obtención de la matriz de rigidez , la cual se explica en la siguiente sección.

Paso 4: **Deducir la matiz de rigidez y sus ecuaciones**.

En esta cuarta sección el autor explica cómo obtener la matriz de rigidez, utilizando la convención de las fuerzas de los nodos y equilibrio, que dice

$\hat{f}_{1x} = -T$ y $\hat{f}_{2x} = T$ (6)

Utilizando la ecuación anterior con la ecuación (5), se obtiene que

$T = \hat{f}_{1x} = k(\hat{d}_{2x} - \hat{d}_{1x})$ (7)

$T = \hat{f}_{2x} = k(\hat{d}_{2x} - \hat{d}_{1x})$ (8)

Rescribiendo la ecuación anterior

$\hat{f}_{1x} = k(\hat{d}_{2x} - \hat{d}_{1x})$ (9)

$\hat{f}_{2x} = k(\hat{d}_{2x} - \hat{d}_{1x})$ (10)

Ahora escribiéndola en su forma matricial obtenemos

$\begin{Bmatrix} \hat{f}_{1x} \\ \hat{f}_{2x} \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} k & -k \\ -k & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{d}_{1x} \\ \hat{d}_{2x} \end{pmatrix}$ (11)

esta expresión matricial contiene la constante del resorte en dirección axial (es decir a lo largo de la dirección $\hat{x}$). El autor hace especial hincapié en que la matriz de rigidez k es una matriz simétrica, pero no comenta cuál es la ventaja o desventaja de esta propiedad, también hace notar que a esta expresión se le denota por, matriz de rigidez local.

Paso 5: **Ensamblar la ecuación del elemento para obtener la ecuación global e introducir las condiciones de frontera**.

En esta quinta sección el autor comenta que en los subtemas posteriores muestra el proceso de ensamble de la matriz de rigidez global, para un elemento o dos y empleando el método de superposición y en está sección deja ambigua la forma de ensamblaje.

Paso 6: **Resolver para el desplazamiento de los nodos.**

En esta sexta sección el autor explica que la forma de obtener los desplazamientos de los nodos aplicando condiciones de frontera, tales como, condiciones de soporte de los materiales y resolviendo el sistema de ecuaciones $F = Kd$.

Paso 7: **Resolución para las fuerzas internas.**

Finalmente en la sexta sección el autor comenta que para encontrar las fuerzas internas es por sustitución aplicada en cada elemento en ecuaciones similares a la (9), (10).

Los 7 pasos presentados para encontrar la matriz de rigidez se han presentado anteriormente y nos permiten ver que está técnica es una técnica tecnológica. Es decir cada uno de los pasos tiene elementos tecnológicos asociados al contexto que para un aprendiz abren múltiples cuestiones. Podemos notar que la selección de casos, funciones de forma, los casos ideales y la variable k juegan roles importantes en la determinación de la matriz de rigidez. Particularmente esta constante del resorte $\hat{k}$ tiene un significado particular en diferentes tipos de tareas ingenieriles y dentro de esta materia se utiliza a lo largo del semestre en las diferentes unidades que se abordan en el curso como son: sistemas de resortes (capítulo 2), sistema de barras (capítulo 3), sistemas de barras de forma prismática con una sección transversal circular con torsión (capítulo 5). La constante del resorte $\hat{k}$ en este curso se utiliza para la resolución de problemas estructurales los cuales se mencionaron anteriormente, pero también se aplica en problemas no estructurales como sistemas eléctricos, problemas de flujo de fluidos y transferencia de calor, por lo que esta constante del resorte $\hat{k}$ se considera un elemento crucial que debemos analizar con mayor detalle. Además, esta constante aparece en diferentes elementos tecnológicos que permiten utilizarla como, la ley de Hooke, la ley de Darcy y la ley de Ohm. La importancia de la constante del resorte $\hat{k}$ denominada de esta manera en problemas estructurales es que relaciona al área del resorte, área de la barra y la sección transversal prismática circular con el módulo de elasticidad en los sistemas de resorte y de barras y con el módulo de corte del material respectivamente todo esto dividido entre la longitud del resorte o de la barra. Esto nos indica que tiene la misma forma para los diferentes problemas haciendo la misma función en cada uno de ellos, por lo que podemos decir que la constante del resorte $\hat{k}$, no es sólo un número si no que es un parámetro fundamental para la solución de estos problemas.

A partir de la asistencia y un primer análisis del curso pudimos constatar que las clases el método de solución se imparte utilizando la ley de Hooke, pero en el libro de texto lo presenta con la función de forma, por lo que se entrevistó al profesor A y comenta que para el nivel de licenciatura es más fácil verlo de esta manera. El profesor A señala que la función de forma es otro método alterno de solución el cual se aborda en los cursos de maestría, por lo que es necesario hacer un análisis más fino del curso e investigar las razones de las diferencias en las técnicas. Esto nos permitirá reconocer elementos tecnológicos asociados al curso.

Conclusión

En el presente trabajo se seleccionó y analizó la clase DEA junto con el libro de texto de la asignatura, para observar qué praxeologías matemáticas y de modelización aparecen en curso impartido a futuros ingenieros que están próximos a egresar. De la misma manera, este análisis permite observar las dificultades que tienen para usar las herramientas que se les proporcionaron al inicio de la carrera. En particular, hemos distinguido que algunas de las praxeologías hacen intervenir elementos del curso de álgebra lineal, noción de linealidad y matrices como modelos, por ejemplo. Al principio del curso se les solicitó a los estudiantes utilizar algún programa computacional para realizar cálculos para asociados a cierto modelo pero pronto se toparon con el problema de que tenían que recordar como se multiplican las matrices. A pesar de que estaban utilizando un programa los alumnos tenían que construir la función que les resolviera el sistema matricial. El análisis de los cursos está en su etapa inicial pero consideramos que ya hemos identificado tipos de tareas como el cálculo de desplazamiento de un resorte que hacen intervenir praxeologías de modelización matemática que pueden estar relacionadas con praxeologías matemáticas del curso de álgebra lineal. Más localmente, el análisis del curso y las entrevistas con el profesor A nos permitirán comparar las praxeologías propuestas en el libro y éstas presentadas en el curso, las razones de estas diferencias así como los diferentes niveles de discursos tecnológicos que las sustentan. Consideramos que la aproximación teórica metodológica nos permite realizar análisis praxeológicos de los cursos de álgebra lineal E(M) y de DEA E(DI) serán la base de un diseño didáctico.

Referencias y bibliografía

Askeland D., & Phulé P. (2004). *Ciencia e Ingeniería de los Materiales*. Cengage.

Barbero, J. (2011). *Introduction to Composite Materials Design* (pp. 167-213). CRC Press.

Bissell, C. C., & Dillon, C. (2000). Telling tales: models, stories and meanings. *For the Learning of Mathematics, 20*(3), 3-11.

Bissell, C. (2002). Suporting student proyects at a distance through ICT: The UK Open University approach. *European Journal of Engineering Education*, *22*(1), 15-21.

Blum, W., Galbraith, L., & Niss, M. (Eds.) (2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education ICMI Study Series* (pp. 3-32). New York: Springer,

Camarena, P. (1999). Hacia la integración de conocimiento: matemáticas e ingeniería, *Memorias del 2do. Congreso Internacional de Ingeniería electronica y sistemas*, Mexico.

Chevallard, Y. (1999). La recherche en didactique et la formation des professeurs : problématiques, concepts, problèmes. En J. L. Dorier, M. Artaud, M. Artigue, R. Berthelot, & R. Floris (Eds.), *Actes de la X Ecole d'été de Didactique* (pp. 98-112). Francia: Académie de Caen.

Castela, C., & Romo-Vazquez, A. (2011). Des mathématiques a lùautomatique : étude des effets de transposition sur la transformèe de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique de Mathématiques, 31*(1). 79-130.

Kent P., & Noss R. (2000). The visibility of models: Using technology as a bridge between mathematics and engineering. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*, 1, 61-69.

Kent P., & Noss R. (2001). Finding a role for technology in service mathematics for engineers and scientists. In D. Holton (Ed), *The teaching and learning of mathematics at university level: ICMI study* (pp. 395-404).

Kent, P., & Noss, R. (2002). The mathematical components of engineering expertise: The relationship between doing and understanding mathematics. *Proceedings of the IEE Second Annual Symposium on Engineering Education: Professional Engineering Scenarios 2* (pp. 39/1 -39/7). London U.K.

Logan D.L. (2004). *A First Course in the Finite Element Method*. Thomson.

Macias, C. (2012). *Uso de las nuevas tecnologías en la formación de ingenieros* (Tesis de maestría no publicada). CICATA-IPN, México.

Martínez, E. (2014). *Diseño de una secuencia basada en optimización para la enseñanza del Cálculo Diferencial en formación de ingenieros* (Tesis de maestría no publicada). CICATA-IPN, México.

Pollak H. O. (1988). Mathematics as a service subject- why? In A. G. Howson et al. (Eds), *Mathematics as a service subject* (pp.28-34). Cambridge: Cambridge University Press (Series: ICMI study).

Romo-Vázquez, A. (2009). *Les mathématiques dans la formation d'ingénieurs*. Paris: Irem de Paris.

Soto, S. (2012). *La modelación matemática y su vinculación con el entorno de la formación matemática de ingenieros* (Tesis de maestría no publicada). CICATA-IPN, México.

Análisis de praxeologías matemáticas en cursos de especialidad en formación de ingeniero para diseño de secuencias didácticas

Avenilde **Romo** Vázquez
Centro de investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Instituto Politécnico Nacional
México
aromov@ipn.mx
Lenin Augusto **Echavarría** Cepeda
Instituto Politécnico Nacional
México
laugusto@ipn.mx

Resumen

En esta investigación en proceso se aborda la problemática de la formación matemática para futuros ingenieros y su adecuación a la formación de especialidad. La Teoría Antropológica de lo Didáctico y en particular las nociones de institución y de praxeología nos permiten situar esta problemática. Se analizan los cursos de Análisis Matricial de Estructuras y Análisis Numérico de la Ingeniería en Aeronáutica de una institución de educación superior mexicana a través de un análisis de tareas que permite mostrar posibles relaciones entre éstos y generar en un segundo momento una secuencia didáctica. En particular, se identifica que las fases usuales del método de elemento finito involucran técnicas que están presentes en ambos cursos.

Palabras clave: modelización matemática, análisis de tareas, formación de ingenieros.

Introducción

Esta investigación se centra en la enseñanza matemática para la formación de futuros ingenieros y tiene por objetivo principal diseñar actividades de modelización matemática basadas en el análisis de cursos de especialidad de Diseño de la carrera de Ingeniería en Aeronáutica de la Unidad Profesional Interdisciplinaria de Ingeniería Campus Guanajuato (UPIIG) del Instituto Politécnico Nacional (IPN). En esta especialidad, la modelización matemática juega un papel importante, particularmente en cursos como Análisis Matricial de Estructuras, Aerodinámica, Estructuras de Pared Delgada y Diseño Aerodinámico. La modelización matemática ha sido muy estudiada en la disciplina de la Matemática Educativa, por ejemplo el estudio ICMI 14 publicado en el 2007 (Blum, Galbraith, Henn y Niss, 2007) fue dedicado a este tema. También existen investigaciones (Pollak, 1988; Camarena 1999; Sevgi, 2006; Romo, 2009; Macias 2012; Soto 2013 y Romo, 2014) enfocadas específicamente a la formación de ingenieros. Pollak (1988) destaca que las necesidades matemáticas de los ingenieros pueden reconocerse a dos niveles: básicas y avanzadas. Las primeras son necesarias para resolver ecuaciones, manipular parámetros y utilizar modelos matemáticos mientras las segundas permiten construir y adaptar modelos matemáticos más sofisticados. Asimismo, Pollak reconoce que el paradigma de la modelización matemática en la formación de ingenieros puede ser eficaz. Sin embargo, instaurar este paradigma resulta complejo como lo muestran diversas investigaciones. Por ejemplo, en (Camarena, 1999) se reconoce que en el uso de las matemáticas intervienen diferentes conocimientos, lo que provoca que en el uso de las matemáticas se ignoren elementos teóricos que en la enseñanza ocupan un rol preponderante. En este mismo sentido Noss, Hoyles y Pozzi (2000) y Kent y Noss (2002) muestran que en prácticas profesionales de enfermeras, banqueros, pilotos de avión y de ingenieros civiles, las matemáticas pueden ser invisibles para los usuarios. Esto debido a que la práctica permite cristalizar los modelos matemáticos que sustentan los conocimientos en uso. Otro factor que consideran favorece la invisibilidad de las matemáticas es la división del trabajo matemático, en la práctica de ingenieros civiles los ingenieros analistas crean modelos matemáticos mientras que los ingenieros de diseño utilizan estos modelos. Bissell (2002) enfatiza que en la práctica más que la construcción de modelos existe una adaptación y refinamiento de modelos tipos. Este uso, adaptación y refinamiento de modelos puede verse afectados por el uso de la tecnología, cada vez más presente en las prácticas profesionales, la cual modifica el trabajo matemático (Kent, 2007). Todo lo anterior evidencia la complejidad de identificar las matemáticas utilizadas en las prácticas profesionales de ingenieros y por tanto la de acercar la enseñanza de las matemáticas a éstas. Sin embargo, existen trabajos y propuestas dentro de la matemática educativa para enfrentar esta complejidad. En el trabajo de Kent y Noss (2000) se presenta una propuesta para un curso corto de iniciación al uso del programa computacional Mathematica partir de una tarea de resistencia de materiales. En este mismo sentido los trabajos de Macias (2012), Soto (2013) y Romo (2014) proponen el diseño de actividades didácticas de modelización basadas en el análisis de modelos matemáticos en uso dentro de las disciplinas de la especialidad y en la práctica misma. Tanto el diseño de las actividades como el análisis de los modelos matemáticos en uso se realizan utilizando herramientas de la Teoría Antropológica de lo Didáctico, propuesta por Chevallard (1999). Esta investigación se desarrolla dentro de esta misma propuesta teórica metodológica realizando un análisis de modelos matemáticos utilizados en el curso de análisis matricial de estructuras y el curso de métodos numéricos. El primero es parte de la formación de especialidad y el segundo de la formación matemática (básica). Se detalla a continuación tanto la propuesta teórica metodológica como un ejemplo de análisis del curso matricial de estructuras y cómo puede ser base del diseño de actividades didácticas para el curso de métodos numéricos.

Herramientas teóricas metodológicas

La Teoría Antropológica de lo Didáctico ofrece un modelo epistemológico para el estudio de la actividad humana en su dimensión institucional y en particular para el estudio de la actividad matemática. Dos nociones definidas dentro de esta teoría son consideradas para el desarrollo de esta investigación: institución y praxeología, éstas se detallan a continuación.

La praxeología $[T,\boldsymbol{\tau},\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{\Theta}]$ es entendida como la unidad mínima de análisis de la actividad matemática y tiene cuatro componentes T, tipo de tareas, $\boldsymbol{\tau}$ técnicas, $\boldsymbol{\theta}$ tecnologías y $\boldsymbol{\Theta}$ teorías. Las tareas pertenencen a un tipo de tareas y corresponde a la consigna, lo que se hace; las técnicas corresponden a la forma de realizar las tareas, cómo se hace; las tecnologías son los discursos que permiten producir, justificar y explicar las técnicas, el por qué se hace así y las teorías son discursos más generales que producen, justifican y explican las tecnologías. Así la actividad de modelización en este trabajo será analizado en términos de praxeologías, que tendrán lugar en diferentes instituciones, que son definidas de la siguiente manera.

> Las instituciones, es decir, organizaciones sociales estables, enmarcan las actividades humanas y simultáneamente las hacen posibles por los recursos que estas instituciones ponen a disposición de sus sujetos. Estos recursos materiales e intelectuales han sido producidos por comunidades, a lo largo de procesos de enfrentamiento a situaciones problemáticas, para resolverlas con regularidad y eficacia (Castela & Romo, 2011, p.85).

Esta noción nos parece fundamental para situar la formación de ingenieros en términos de las instituciones que la componen, para lo cual consideramos el modelo propuesto en Romo-Vázquez (2009). En dicho modelo se consideran tres tipos de instituciones: de producción, de enseñanza y de uso. Aunque se precisa que éste corresponde a un modelo "limitado" pues pueden existir muchas más instituciones que participen en dicha formación. Las instituciones de producción son las que producen el modelo matemático, visto como praxeología, haciendo pesar sobre éste todas sus condiciones y restricciones, pero también generando puntos de apoyo. Se reconocen dos instituciones de producción:

- Matemáticas (como disciplina) P(M).
- Disciplinas Intermediarias (como disciplina) P(DI).

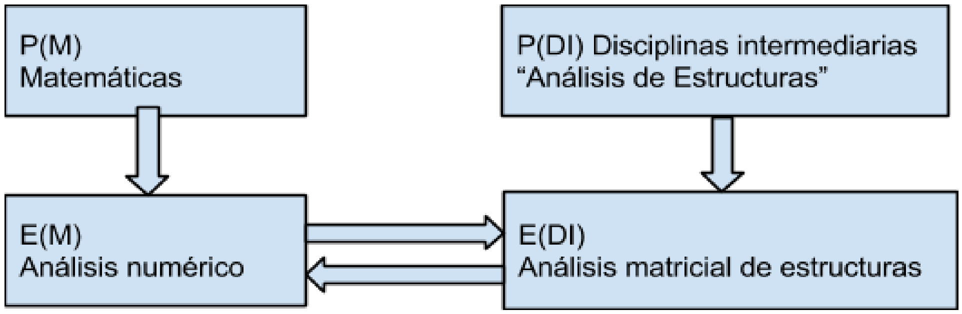
Las instituciones de enseñanza son las responsables de transmitir las praxeologías (modelos matemáticos), operando las transposiciones necesarias para adaptarlas a las condiciones y restricciones de la enseñanza, incluso cuando dichas praxeologías están en uso, por ejemplo un curso de la especialidad. Se reconocen dos instituciones de enseñanza:

- Enseñanza de las Matemáticas E(M).
- Enseñanza de las Disciplinas Intermediarias E(DI).

Las instituciones usuarias es donde las praxeologías matemáticas son utilizadas para atender a las necesidades de la práctica:

- Práctica profesional Ip.
- Actividades prácticas Ap.

Las instituciones que consideramos aparecen en el Esquema 1, E(M) está representada por el curso de métodos numéricos, E(DI) está representada por el curso de análisis matricial de estructuras. En una primera etapa los dos cursos serán analizados para reconocer las relaciones que existen entre éstos y sobre todo cómo podría diseñarse una secuencia didáctica para el curso de métodos numéricos que atienda necesidades del curso de análisis matricial de estructuras. Esto aparece representado por las dos flechas, una que va del curso de métodos numéricos al de análisis matricial de estructuras y la otra en el sentido inverso. Las instituciones de producción aparecen como instituciones de referencia, es decir como sustento general de las de enseñanza que pueden aparecer a diferente nivel en las de enseñanza: convocadas, invocadas, evocadas o ignoradas. Estos niveles de relación entre las instituciones de producción P y de enseñanza E se detallan en Romo-Vázquez (2009). Se dice que una institución de producción es convocada si las praxeologías se realizan en E de la misma manera (o muy cercanamente) que en P. Se dice que se invocan si se reconoce que las tecnologías que sustentan las técnicas provienen de P, aunque no se presenten. La evocación corresponde a un nivel menor y es cuando sólo se dice que existe una tecnología en P que sustenta las técnicas presentadas en E. En el nivel de ignorancia no hay ninguna referencia a P en E.



Esquema 1. Instituciones consideradas para esta investigación.

Observación del curso de análisis matricial de estructuras

- Se observa el curso de Análisis Matricial de Estructuras. Cuando hay disponibilidad de videocámara, se filman las sesiones observadas.
- Se toman notas considerando las siguientes palabras clave: modelar, comparar resultados analíticos con numéricos, … Se suelen tomar fotografías como evidencia de algunas observaciones.
- Se analiza el libro de texto y se contrasta lo ahí escrito con lo que dice el profesor. Se detectan las mismas palabras clave que en el párrafo anterior.

Reflexión sobre el curso análisis numérico

- A través de entrevistas con un profesor del curso de análisis numérico, se puede conocer más acerca de la propia filosofía del curso.
- Se hace un análisis de los reactivos de tareas y de exámenes para detectar las tendencias del curso.
- Se completa una bitácora después de cada sesión tratando de retomar momentos en los que se mencionó la modelación o soluciones numéricas vs. soluciones analíticas.

Identificación de praxeologías

Tanto en el curso de análisis numérico como en el de análisis matricial de estructuras, se presentan tipos de teorías. En análisis numérico se tratan de buscar tareas que:

- Impliquen algún tipo de modelación.
- Impliquen una contrastación entre el método numérico y el analítico.

En el curso de análisis matricial de estructuras se intentan buscar tareas que

- Involucren conocimientos de matemáticas explícitas.
- Involucren una contrastación entre soluciones analíticas y numéricas.
- Pongan de relieve creencias sobre la modelación.

Ejemplos de tareas

Las observaciones hechas en el curso de análisis matricial de estructuras nos han permitido distinguir elementos que permiten una comparación analítica con el curso de análisis numérico. Durante las clases y en entrevistas, el profesor del curso de análisis matricial de estructuras ha manifestado la importancia que tienen las relaciones entre los métodos analíticos, los métodos numéricos y la experimentación en laboratorio para estudiar problemas de estructuras. Entre sus objetivos de enseñanza, está que los estudiantes aprendan a conducir una comparación adecuada de las soluciones obtenidas mediante diferentes métodos. Dentro de este objetivo, el profesor busca que los estudiantes sean, en principio, capaces de desarrollar programas en los que se implementen los métodos numéricos.

Una tarea típica del curso de Análisis Matricial de Estructuras consiste en determinar las reacciones en O en la Figura 1. Para realizar esta tarea, la técnica propuesta es la siguiente: 1) se dibuja un diagrama de cuerpo libre, 2) se vectorizan las fuerzas, 3) se aplican las ecuaciones de equilibrio y 4) se resuelven dichas ecuaciones. Resolver dichas ecuaciones (paso de esta técnica) constituye un tipo de tarea que suele presentarse en el curso de análisis numérico, sin embargo no suelen ser un tipo de tareas de los más retadores.

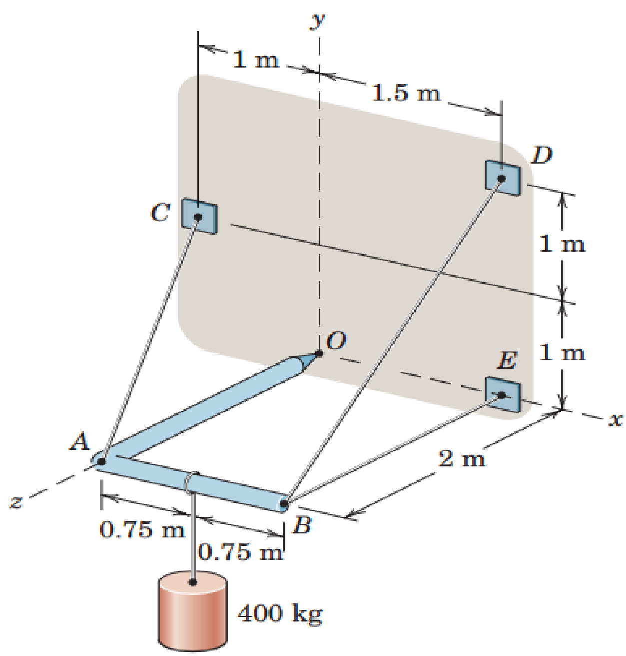


Figura 1. Tarea típica de análisis matricial de estructuras.

Otra tarea consiste en determinar la fuerza en cada miembro de la armadura de la Figura 2. Una técnica para resolver esta tarea requiere del uso del programa computacional ANSYS. Para resolverlo se siguen los pasos usuales del método de elemento finito. En la fase de pre-procesamiento, se modela el problema en ANSYS, se asignan los valores de los materiales involucrados y se aplican las restricciones. Este paso de la técnica de solución es propia del curso de análisis matricial de estructuras. En la fase de solución, se resuelven las ecuaciones simultáneas numéricamente, es decir, un paso propio del curso de análisis numérico. En la fase de pos-procesamiento, se interpretan las soluciones obtenidas en términos del problema original. Esta última fase es propia del curso de análisis matricial de estructuras. De esta manera, de una forma natural, podría darse la interacción de ambos cursos. En la fase de solución, los estudiantes del curso de análisis numéricos pueden comparar y analizar las soluciones obtenidas mediante varios métodos, por ejemplo, usando el método de Galerkin o el de mínimos cuadrados (Moaveni, 2003).

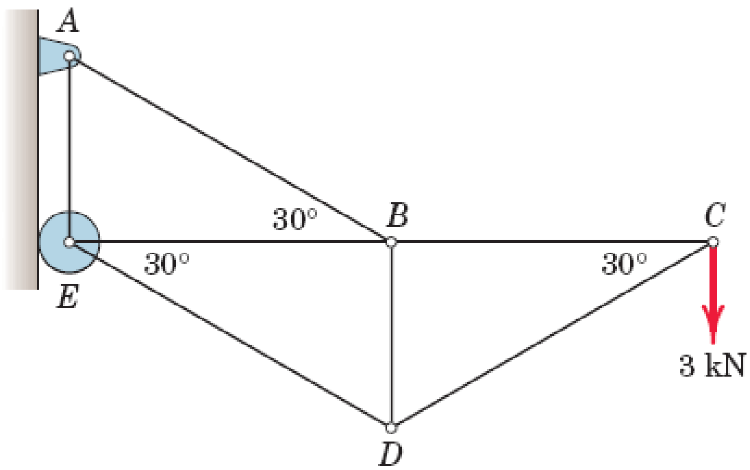


Figura 2. Armadura para una tarea que involucra técnicas de análisis matricial de estructuras y análisis numérico.

Diseño de actividad didáctica

A partir de las fases típicas del método de elemento finito, se puede plantear la interacción entre los estudiantes de los cursos de análisis numérico y de análisis matricial de estructuras. Es decir, podría diseñarse una secuencia didáctica para los dos cursos en la cual, los estudiantes de análisis matricial de estructuras se encargan de las fases de pre y post-procesamiento porque el estudiar las características de los materiales, el planteamiento de problemas y la interpretación de soluciones de estructuras forma parte natural de los objetivos de este curso. Mientras tanto, la fase de solución puede ser realizada por los estudiantes de análisis numérico porque la obtención de soluciones numéricas, su análisis y comparación son actividades propias de este curso. El diseño de esta secuencia se encuentra en proceso, debido a que el análisis de tareas se está profundizando, pero consideramos que sería una base para el diseño de una actividad didáctica que pudiera ser parte de los dos cursos. Su diseño sería posible debido al trabajo colaborativo que durante este semestre los profesores de estos dos cursos están realizando. Es un elemento metodológico que también deberá ser analizado en el marco de la investigación.

Conclusión

Esta investigación considera la problemática de la formación matemática de futuros ingenieros. En particular, el lugar que la modelización matemática pueden tener en los cursos de esta asignatura. Las nociones de institución y de praxeología definidas en la Teoría Antropológica de lo Didáctico nos permiten reconocer tres tipos de instituciones que participan en la formación de ingenieros, de producción, de enseñanza y práctica así como analizar la actividad de modelización matemática que tienen lugar en las instituciones de enseñanza. Estas instituciones están representadas por el curso de métodos numéricos E(M) y el curso de análisis matricial de estructuras. Estos cursos son analizados para reconocer las praxeologías y/o sus elementos que mantengan alguna relación. El trabajo colaborativo de los profesores responsables de estos cursos ha permitido iniciar un análisis de tareas que evidencie dichas praxeologías y permita en un segundo momento el diseño de una secuencia didáctica. Esta secuencia deberá ser parte de ambos cursos, se espera que pueda diseñarse e implementarse hacia la parte final del semestre. El análisis de tareas se encuentra en proceso, pero consideramos que los ejemplos aquí presentados permiten ilustrar que existen técnicas matemáticas que son parte de las técnicas del análisis matricial de estructuras. El uso de estas técnicas es distinto al que se tiene en las tareas propias de los métodos numéricos, pues los elementos tecnológicos que las explican no son los mismos. Un análisis más fino permitirá precisar las praxeologías y hacer el diseño de la secuencia didáctica. Consideramos que este tipo de trabajos enfrenta la complejidad de comprender las lógicas que rigen cada institución de enseñanza, sin embargo esta ruta metodológica nos parece necesaria para comprender las necesidades matemáticas de la formación de especialidad y adecuar en efecto la formación matemática.

Referencias y bibliografía

Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H.-W., & Niss, M. (Eds.). (2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education* (Vol. 10). Boston, MA: Springer. doi:10.1007/978-0-387-29822-1.

Camarena, P. (1999). *Las funciones generalizadas en ingeniería, construcción de una alternativa didáctica* (Tesis de doctorado no publicada). CINVESTAV, México.

Castela, C., & Romo, A. (2011). Des mathématiques a l'automatique: étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *31*(1), 79-130.

Chevallard Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique Des Mathématiques, 19*(2), 221–265.

Kent, P., & Noss, R. (2000). The Visibility of Models: Using technology as a bridge between mathematics and engineering. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *31*(1), 61–69.

Kent, P., & Noss, R. (2002). The mathematical components of engineering expertise: The relationship between doing and understanding mathematics. *Proceedings of the IEE Second Annual Symposium on Engineering Education: Professional Engineering Scenarios 2* (pp. 39/1 -39/7)

Macias, C. (2012). *Uso de las nuevas tecnologías en la formación de ingenieros* (Tesis de maestría no publicada). CICATA-IPN, México.

Moaveni, S. (2003). *Finite element analysis: theory and application with ANSYS*. India: Pearson Education.

Noss, R., Hoyles, C., & Pozzi, S. (2000). Working Knowledge: Mathematics in use. En A. Bessot & J. Ridgway (Eds.), *Education for Mathematics in the workplace*, (pp.17-35). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Pollak, H. (1988). Mathematics as a service subject-why? En A. G. Howson et al. (Eds), *Mathematics as a service subject* (pp. 28-34). Cambridge: Cambridge University Press (Series : ICMI study).

Romo, A. (2009). *La formation mathematique des futurs ingénieurs* (Tesis de doctorado). Université Diderot Paris 7.

Sevgi, L. (2006). Modeling and simulation concepts in engineering education: Virtual tools. *Turkish Journal of Electrical Engineering and Computer Sciences*, *14*(1), 113–127.

Soto, S. (2013). *Una secuencia didáctica basada en modelación matemática* (Tesis de maestría no publicada). CICATA-IPN, México.

Análisis del contexto topográfico para el diseño de actividades didácticas para el bachillerato

Olda Nadinne **Covián** Chávez
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Instituto Politécnico Nacional
México
nadinne.olda@gmail.com
Avenilde **Romo Vázquez**
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Instituto Politécnico Nacional
México
avenilderv@yahoo.com.mx

Resumen

La caracterización de las matemáticas en contextos prácticos y profesionales ha evidenciado que éstas son de naturaleza diferente. En este sentido, en Matemática Educativa se han desarrollado trabajos enfocados en la caracterización de posibles relaciones, sus usos y posibles puentes de los conocimientos matemáticos entre dichos contextos. En este documento se reportan los principales resultados del trabajo doctoral reportado en Covián (2013) desde el cual se analiza el uso de las matemáticas en el contexto topográfico y de su enseñanza para que con base en los resultados obtenidos se puedan proponer elementos para el diseño de actividades didácticas en el bachillerato.

Palabras clave: Escenarios, Institución, Usos, Actividades Didácticas

Introducción

En Matemática Educativa se reconoce la importancia de caracterizar las matemáticas desde diferentes contextos (cultura, vida cotidiana, práctica profesional, escuela, etc.) para analizar las posibles relaciones entre estos y la naturaleza de los conocimientos y saberes matemáticos que ahí se encuentran. En un análisis realizado en Covián (2013) en trabajos situados en contextos ajenos al escolar (Carraher, Carraher, & Schliemann, 1991; Covián, 2005; Lave, 1988; Solares, 2011) se pudo reconocer ciertas distancias entre los escenarios escolares y no escolares, en específico en la construcción y uso de conocimientos matemáticos. Se observó que cada contexto tiene sus propias condiciones y restricciones, las cuales determinan o rigen los usos de los conocimientos que ahí tienen lugar. También se identificaron dos escenarios considerados como extremos, la teoría y la práctica; la matemática y el uso y aplicación de conocimientos matemáticos. Sin embargo, se reconoce que siendo extremos, casi ajenos uno del otro, al interior de la disciplina matemática existen usos y aplicaciones de los conocimientos matemáticos, pero bajo condiciones completamente diferentes a las de cualquier escenario práctico. Esto puede explicar las distancias y rupturas entre los escenarios escolares y no escolares. La complejidad de estas distancias puede verse con mayor claridad al considerar escenarios de profesionales y de formaciones profesionales. Escenarios que podría creerse mantienen relaciones pues se solicitan uno al otro, pero que, no es tan natural. Camarena (1999); García-Torres (2008); Noss, Hoyles, y Pozzi (2000; 2001) y Romo-Vázquez (2009) dan cuenta que la evolución de las profesiones parece ser más rápida que la de las formaciones, demandado adaptaciones que solicitan una problematización de la incorporación de la tecnología, un cambio en las tareas matemáticas presentadas, una explicitación de validaciones teóricas y prácticas, una atención particular a la interpretación de resultados y que no consiguen realizarse a corto plazo. Además, en Romo-Vázquez (2009) se observa que entre estos escenarios extremos aparece otro, el cual también forma parte de las formaciones profesionales, las disciplinas intermediarias (DI). Éstas, juegan un papel de interface entre las matemáticas y la práctica (el uso, la aplicación e intencionalidades). Son disciplinas que tienen elementos y saberes propios de las matemáticas y de la profesión.

Trabajos como los de Bessot (2000a; 2000b) y Sträesser (2005) se centran en estudiar formaciones profesionales a nivel vocacional. Desde éstas se han planteado analizar la matemática escolares susceptible de ser aplicadas en el trabajo (construcción) y viceversa. Sträesser (2005) por su parte muestra que las matemáticas en el trabajo son importantes pero invisibles, tratadas como cajas negras (fuerte influencia de la tecnología). Y han planteado como una problemática de estudio la transición del nivel vocacional al superior.

Estos antecedentes permiten reconocer que las formaciones vocacionales también son importantes para ser estudiadas, en específico aquellas formaciones que van encausadas para el desarrollo laboral, puesto que en éstas también se plantea que los saberes enseñados puedan ser aplicados en la vida laboral. Además de representar en México un grupo importante que va en aumento con respecto al tipo de formación general. Éste es el contexto principal en Covián (2013), en específico, la formación de futuros profesionales técnicos en construcción. En este tipo de formación la característica principal es que la matemática escolar o de la formación debe estar al servicio de las DI. Por esto, el principal objetivo que se aborda en esta investigación fue el de conocer si la matemática de la formación era apropiada para la formación profesional y la práctica, en específico en la formación de futuros profesionales técnicos en construcción del Colegio Nacional de Educación Profesional Técnica (CONALEP). La DI elegida para ser estudiada fue la Topografía, presente en la formación en cursos de Levantamientos y Trazos Topográficos. La metodología desarrollada en Covián (2013) para el estudio de conocimientos escolares y conocimientos prácticos fue la de construir tres escenarios: el escenario histórico, el escenario profesional y el escenario escolar. Los dos primeros escenarios representan a la práctica. Sin embargo, para situar el estudio en el nivel vocacional se eligió una actividad común a los tres escenarios: el levantamiento topográfico. El marco teórico elegido para desarrollar esta investigación fue la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD).

Consideraciones Teóricas

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) es un marco que permite el estudio de problemáticas en didáctica de las matemáticas a un nivel macro-didáctico. A través de un enfoque social permite analizar la actividad humana al seno de instituciones, los saberes son parte de las organizaciones matemáticas (reconocidas como praxeologías matemáticas) que describen la actividad y pueden ser reconocidos como objetos de circulación entre instituciones de diversa índole. En efecto, los saberes son adaptados, modificados o transpuestos bajo ciertas restricciones y sustentos institucionales. La TAD ofrece un modelo epistemológico donde la actividad humana:

> […] consiste en realizar una tarea t de un cierto tipo T mediante una cierta técnica τ, justificada por una tecnología θ que al mismo tiempo permite pensarla, incluso producirla, y que en su momento es justificable por una teoría. En resumen, toda actividad pone en obra una organización que puede escribirse $[T/\tau/\theta/\Theta]$ y que se llama praxeología u organización praxeológica. (Chevallard, 1992, p.3)

Las dos primeras componentes de la praxeología forman el bloque técnico-práctico y las dos últimas el bloque tecnológico-teórico. Las instituciones son entendidas como organizaciones sociales estables, determinadas por recursos, condiciones y restricciones que han sido producidas por comunidades a través de largos procesos de enfrentamiento a situaciones problemáticas, las cuales tratan de superarse con regularidad y eficacia.

Dentro del trabajo (Romo-Vázquez, 2009) una atención particular es puesta en la noción de tecnología, como componente fundamental que permite estudiar y caracterizar las praxeologías matemáticas utilizadas en diferentes instituciones. Basándose en el trabajo de Castela (2008) en el que definen dos componentes de la tecnología: la componente teórica θ^{th} y la componente práctica θ^{p}:

> […] la tecnología está orientada hacia la producción de la práctica efectiva, cuyas funciones de justificar y legitimar la técnica así como para equiparla y para facilitar su aplicación. Junto a los elementos de conocimiento de algunas teorías pertinentes (hablaremos más adelante en la tecnología de "componente teórico", señalado como θ^{th}) figuran dentro de la tecnología el conocimiento que, según las áreas de investigación se describen como operativo, pragmático, práctico. El trabajo colectivo forjado en la experiencia, el componente práctico de tecnología (indicado como θ^{p}) expresa y capitaliza la ciencia de la comunidad de los practicantes que se enfrentan a las mismas condiciones materiales e institucionales de las tareas del tipo T, las cuales promueven la difusión dentro del mismo grupo (traducción del original en Francés, Castela, 2008, p.143).

A partir de esta noción de tecnología práctica (θp), en Romo-Vázquez (2009), se precisan seis funciones tecnológicas de la componente práctica (Describir el tipo de tareas y la técnica, validar la técnica, explicar la técnica, facilitar la aplicación de la técnica, motivar la técnica y los pasos que la componen y evaluar la técnica.) y se propone el modelo extendido de la tecnología. Estas seis funciones tecnológicas de la componente práctica constituyen una herramienta que permite validar el "saber-hacer", lográndose así analizar tanto conocimientos y saberes presentes en los cursos de Disciplinas Intermediarias (como la topografía) y matemáticas, así como en la actividad práctica relativa a la Disciplina Intermediaria estudiada. Lo anterior, porque lo que interesa es analizar y evidenciar el tipo de validaciones que se producen en relación a una técnica matemática en uso, enfrentando una tarea matemática o no.

El modelo praxeológico ampliado se resume en el esquema siguiente:

$$\left[T, \tau, \begin{matrix} \theta^{th}, \Theta \\ \theta^{p} \end{matrix} \right] \begin{matrix} \leftarrow P(S) \\ \leftarrow Iu \end{matrix}$$

Figura 1. Modelo praxeológico ampliado (Romo-Vázquez, 2009)

Las flechas se conciben como una evocación de mecanismos de validación dentro de una u otra institución *P(S)* e *Iu* respectivamente sobre el bloque $[\theta^{th},\Theta]$ y sobre θ^{p}. Este modelo parece pertinente para estudiar tanto los contextos escolares (cursos) como el práctico, para dar cuenta, de manera más general, de los procesos de circulación de saberes y las transposiciones asociadas.

En Romo-Vázquez (2009) se reconoce que al seno de la TAD, una praxeología es una construcción social que vive de manera estable en una institución I; esta última es vista como una institución fruto de un proceso de institucionalización controlado por I. El interés principal es puesto en el proceso de validación de una praxeología, que es una componente esencial de la institucionalización.

Entre las instituciones que tienen una relación con una praxeología dada, se distinguen las instituciones que tienen una función de producción de saberes, las que denotan por los símbolos *P(S)* y las instituciones usuarias de estas praxeologías concebidas como *Iu*, en el sentido de que los sujetos de *Iu* deben realizar tareas del tipo T. No consideran las instituciones educativas, cuya función de la praxeología es la transmisión. Las instituciones *P(S)* mantienen una relación teórica con T. Su misión no es manejar las tareas de tipo T pero si la producción y validación de los diferentes componentes de praxeologias relativos a T, el tiempo de la práctica aquí está suspendido. Es muy posible que *P(S)* sea una rama de una institución *Iu* y surjan así algunos temas en determinado momento de las actividades cuando se enfrentan a las tareas (T). Por el contrario, los sujetos de una institución de producción de saberes se encuentran dentro de esta actividad como los usuarios utilizadores de los productos del conocimiento, como en el caso de las matemáticas.

En *P(S)* existen prácticas de validación, que son pruebas de los saberes tecnológicos que no están validados por un componente teórico, la teoría misma, si fuera el caso que existiera. Hay dos tipos de estas prácticas que son posibles y están vinculados en la mayoría de los casos: las prácticas internas en el campo de conocimiento que conduce a un consenso en la comunidad de sujetos, como las prácticas científicas externas, tales como experimentos de laboratorio, las teorías producidas el modelo real. Estas prácticas aportan un aval científico al boque [θ^{th}, Θ], si existe, a un subconjunto de la tecnología dada como θ^{th} o incluso si no existe (todavía) la teoría que justifica (esa posibilidad es una hipótesis académica, que debe demostrar que es efectivamente en práctica). Sin embargo, asumen que una vez que una praxeología es utilizada en una institución *Iu*, una parte de la tecnología no está validada por una teoría, por lo que amplia esta posición al asumir que, en muchos casos, los saberes tecnológicos validados por una institución de *P(S)* no cubren la tecnología, que suele ser un componente de θ^{p} que también debe considerar los modos de validación social. Por ello se considera como parte de *Iu*, las prácticas de construcción puestas a prueba en la multiplicidad de los logros reales y la institución (en el sentido de estabilidad y no necesariamente por el reconocimiento por parte de una institución determinada) para encontrar habilidades y conocimientos. Es de suponer que estas prácticas que podrían describirse como empíricas, que nunca se desprecian en el trabajo real, dependen en gran medida la participación de un grupo de sujetos utilizadores de praxeologías.

En Covián (2013) con el modelo praxeológico extendido se analizaron las actividades en cursos de topografía y de matemáticas en la formación de futuros profesionales técnicos. Esto porque el objetivo principal fue analizar y mostrar el tipo de validaciones producidas para una técnica matemática en uso en tipos de tareas matemáticas o no. En este trabajo las instituciones identificadas en el contexto de formación fueron cuatro: Institución productora de conocimiento matemático (I(M)) o conocimiento matemático; institución productora de conocimiento topográfico (I(T)) o conocimiento topográfico; institución de conocimientos matemáticos escolares (E(M)) o matemática escolar e institución de enseñanza de la topografía o enseñanza de la topografía (E(T)). En este caso se consideró que las praxeologías en I(M) e I(T) circulan entre las instituciones y son objetos de transposición. Existen praxeologías que surgen en I(M) y circulan a I(T). Éstas sufren transposiciones a I(T), sin embargo, existen praxeologías que surgen en I(T) pero que son usadas en I(M). Para mostrar el análisis desarrollado en Covián (2013) se presentan a continuación tres ejemplos de cada uno de los escenarios estudiados.

Análisis de tres escenarios

En esta sección se presentan los análisis praxeológicos realizados desde cada uno de los escenarios estudiados.

Escenario histórico

El levantamiento topográfico es una actividad muy antigua, García (2003) menciona que esta actividad emergió por la necesidad de medir y delimitar la tierra. Bell (1985), Boyer (2007) y Struik (2008) permiten ver que uno de los posibles orígenes de la geometría y la trigonometría es la medida de la tierra y el levantamiento de planos.

En este escenario fue necesario estudiar diversos recursos de información: historia de instrumentos topográficos (De la Cruz, Mesa, & Cuartero, 1998), tres libros de historia de las matemáticas (Bell, 1985; Boyer, 1999; Struik, 1980), dos artículos de investigación acerca de actividades topográficas en propuestas para recursos didácticos para cursos de matemáticas (Camacho & Sánchez, 2010; Camacho, Sánchez, Blanco & Cuevas, 2011) y dos libros acerca de la enseñanza de la topografía (Pérez de Moya, 1573; Goulard-Henrrionet, 1849 ambos en Covián, 2013). Con estos elementos fue posible efectuar la reconstrucción, deducir el tipo de motivaciones y describir el tipo de conocimientos matemáticos involucrados.
Un ejemplo de este tipo de análisis es reportado en Covián y Romo-Vázquez (2014). La tarea está situada en el antiguo Egipto. El principal instrumento es una cuerda con nudos (Figura 2).

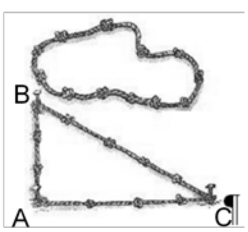


Figure 2. Cuerdas usadas por los egipcios (Covián & Romo-Vázquez, 2014, p. 142)

Uno de los tipos de tareas identificadas fue la delimitación de terrenos. Un ejemplo de los elementos praxeológicos reportados en Covián y Romo-Vázquez (2014, p. 144) son:

Tarea 2. Medición del terreno para trazo de figuras geométricas sobre éste.

Técnica 2. Se elige un punto (A) sobre el terreno. Utilizando la cuerda de 12 nudos, se mide una distancia de 4 nudos hacia otro punto (C) suponiéndolo parte de la misma recta. Se elige otro punto (B) sobre una recta perpendicular a AC con medida 3 nudos. […] se unen los puntos A y C con la cuerda de 5 nudos, obteniendo un triángulo rectángulo ABC (Figure 2). […] desde el punto A y sobre la recta AB se ubica la distancia a medir. […] se determina otro punto D y desde éste se vuelve a levantar otra perpendicular. Esta técnica se sigue hasta trazar la figura deseada (Figura 3).

Tecnología θ^{th}. Propiedades de las rectas perpendiculares. Reconocimiento del caso particular del teorema de Pitágoras $a^2 + b^2 = c^2$ donde a=3, b=4 y c= 5, el cual asegura la perpendicularidad de las rectas AC y BC. Reconocimiento de las propiedades geométricas de figuras conocidas (cuadrados, rectángulos, triángulos, trapecios) y así delimitar terrenos.

Tecnología θ^p. Diferenciar tipos de terrenos, pues esta técnica sólo es aplicable a terrenos planos, los inclinados o con desniveles requieren de proyectar el plano a través de postes para poder utilizarla. Suponemos que el uso de los valores 3, 4 y 5 para asegurar la perpendicularidad de rectas se debe a su facilidad de aplicación. Elementos que permiten elegir el punto A sobre el terreno (visible, accesible). Elementos que permiten el trazo de perpendiculares sobre el terreno (evitar desniveles).Todos estos elementos permiten evaluar la elección de la técnica utilizada, pues se lograba hacer un dimensionamiento del terreno.

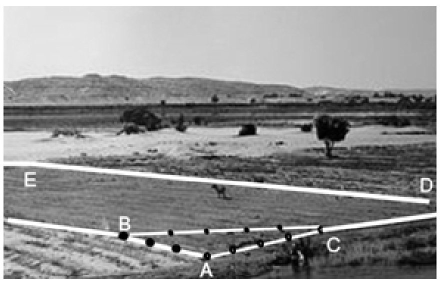


Figura 3. Terrenos en las orillas del Río Nilo (Covián & Romo-Vázquez, 2014, p. 145)

Escenario profesional

Desde este escenario fue posible analizar el discurso que representa la actividad desde la práctica. Para esto fue necesario elegir dos elementos principales: una narrativa elaborada por un experto topógrafo (Anexo 4 en Covián, 2013) acerca de un ejemplo de levantamiento de un terreno y dos libros de enseñanza de la topografía (García, 2003; Montes de Oca, 1989).

El tipo de tarea identificado es dibujar un plano topográfico que represente lo más cercano posible todos los elementos de un terreno. Esta tarea se divide en dos tareas principales, delimitar un terreno y medir los elementos (lados, ángulos y direcciones) de éste. Este es una situación de levantamiento topográfico. Como parte de la técnica el primer paso es ubicar puntos estratégicos en el terreno, los cuales delimitarán la forma del terreno y los elementos que contiene. En este caso se obtiene una poligonal o polígono irregular de seis lados (Figura 4). Seguido se acude al terreno y se mide con un teodolito los ángulos internos de dicha poligonal. Se obtiene la dirección de uno de los vértices de la poligonal para orientar el plano. La figura 4 representa un primer bosquejo del terreno medido.

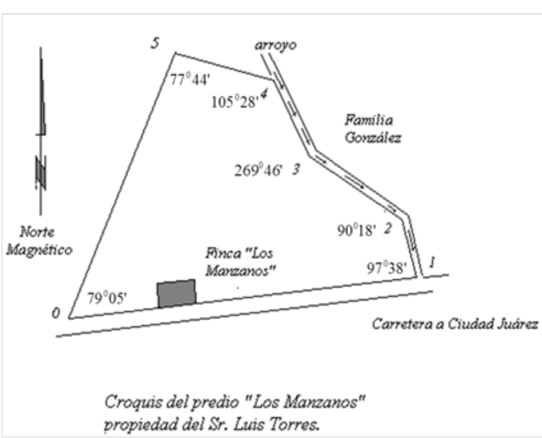


Figure 4. Plane of ground “Los Manzanos” (Covián, 2013, p. 142)

Sin embargo, los valores obtenidos de los ángulos pueden contener errores al momento de la medición. Esto porque al efectuar las mediciones en el terreno se pueden realizar errores humanos debido a que los instrumentos pueden no ser tan precisos o factores climáticos que no permitan efectuar las mediciones. Por lo que, se hace necesario calcular la cantidad de error obtenido y si éste es tolerable. La técnica para estimar el error demanda del uso de la fórmula $S=(n-2)180^0$ donde *n* representa el número de lados del polígono y *S* representa la suma de los ángulos internos del polígono. Para el ejemplo desarrollado por el profesional $S=(6-2)180^0=720^0$. Sin embargo, para el caso que se analiza, la suma de los ángulos internos que se obtiene al realizar la medición con el teodolito es de $719^0 59'$. El error angular es de $1'$. La tecnología teórica que justifica el uso de esta técnica es la propiedad de los ángulos de un polígono propia de la Geometría Euclidiana. Sin embargo, en este caso esta técnica permite al profesional y a la mayoría de los topógrafos controlar el grado de error que se tiene y tomar decisiones con respecto a las mediciones efectuadas. El uso está validado por la necesidad de calcular el error en la medida de los ángulos con los instrumentos usados. Este resultado motiva (θ^p) el uso de otra fórmula y otra técnica para calcular si este error es tolerable. La fórmula $T=E_m\sqrt{n}$. En la que E_m es el error por ángulo y *n* es el número de lados del polígono. Para este caso $T=1'\sqrt{6}=2.5'$. Para validar este error es necesario comparar el valor obtenido con la tolerancia que se establece en el Teodolito, debido a que todos los instrumentos tienen un grado de tolerancia, un factor de error al momento de la fabricación. La tolerancia del teodolito para este ejemplo es de 1’. El resultado de la comparación muestra que el error es tolerable. Por lo que, se pueden compensar los ángulos y llevar estos datos para el diseño de un plano topográfico que se acerque a la realidad del terreno. El profesional menciona (componente tecnológica) que la fórmula de la tolerancia del error es justificada por el trabajo experimental. Sin embargo, la práctica profesional de levantamiento ha provocado que el uso de dicha fórmula obtenga cierto formalismo matemático.

El discurso profesional muestra diferentes funciones tecnológicas, describir, justificar, motivar y controlar el uso de técnicas matemáticas. Estas técnicas no están validadas dentro de la matemática pero sí dentro de la práctica de levantamiento. Este ejemplo muestra como las técnicas tienen y cobran significado de uso al seno del tipo de praxeología que la describe, en este caso, praxeologías de naturaleza mixta, puesto que el tipo de tarea es no matemática pero que requiere técnicas de orden matemático o que tienen cierto formalismo matemático. En Covián (2013) se plantea el análisis de cómo éstas técnicas son enseñadas en cursos de levantamiento topográfico en el nivel vocacional.

Escenario Escolar

Para este escenario fue necesario analizar diversa evidencia, donde los elementos principales fueron libros de enseñanza de la topografía (García, 2003; Montes de Oca, 1989), libretas de estudiantes y videograbaciones de cursos de levantamiento topográfico (Anexo 7 en Covián, 2013).

En el contexto de cursos de enseñanza de la topografía se identificó que el tipo de tarea que se realiza es la de levantar una poligonal. Este tipo de tarea es parte de I(T). Las tareas que componen el tipo de tarea es la de medir los elementos que componen la poligonal a levantar (lados y ángulos internos). La técnica realizada por los estudiantes y reportada en Covián (2013) se resumen en cuatro pasos generales:

Paso 1. Elección de los vértices que conforman la poligonal […] se simula un terreno en la explanada de la institución escolar.

Paso 2. Se miden los lados de la polygonal (AB=4.5 m.; AD=11 m.; CD=10.1 m.; CB=9.9 m)

Paso 3. Se miden los ángulos internos de la poligonal.

Paso 4. Se calcula el error obtenido al medir los ángulos. Se suman todos los ángulos medidos y se corrobora si el error es tolerable. Para el examen, el profesor les indica que tienen una tolerancia de 40 minutos. Los estudiantes usan lo que denominan condición angular (180 (*n*-2) donde *n* es el número de vértices de la poligonal, en este caso, cuatro) de la poligonal. Esto quiere decir que la suma de los ángulos de la poligonal les debe dar 360^0. Esto lo comparan con la suma que les da de todos los ángulos medidos, lo cual, por la condición que proporcionó el profesor, no debe exceder de 40 minutos la diferencia. Los estudiantes al ver que no da vuelven a medir todos los ángulos, con el teodolito hasta obtener una diferencia menor que 40 minutos.

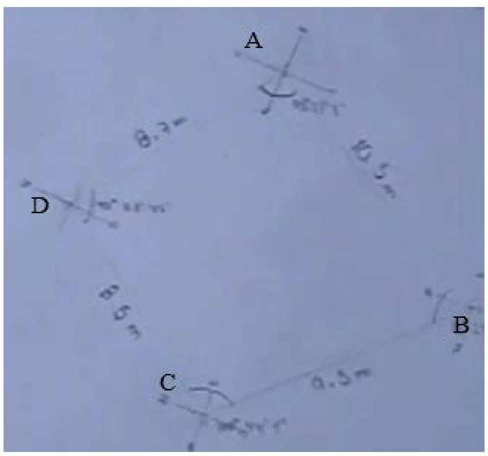


Figura 5. Representación de la poligonal a levantar (Anexo 7.2.2, p. 20 en Covián, 2013)

Con la técnica presentada los estudiantes cuentan con condiciones básicas para describir una poligonal en E(M). Por lo que, los estudiantes usan la condición misma condición reportada en el escenario profesional (la suma de los ángulos internos de polígonos),sin embargo no lo reconocen como un objeto de E(M), puesto que tampoco está contemplado para su enseñanza en los cursos de Geometría en el nivel secundaria o bachillerato. Los conocimientos matemáticos son evocados puesto que no aparecen como una garantía epistemológica. Para la tecnología θ^p las condiciones institucionales determinan el tipo de conocimiento usado. Por ejemplo, en este caso la técnica no considera el caso en el que el terreno tiene desniveles. El objetivo en este caso es que los estudiantes aprendan la técnica y las condiciones del terreno quedan en un segundo plano. Otro ejemplo es que el grado de tolerancia que se solicita a los estudiantes es muy grande. Por lo que, se plantea como hipótesis que en este caso el objetivo es que los estudiantes aprueben el curso.

Elementos para futuros diseños

Al realizar los tres análisis con el modelo praxeológico amplicado se pudo describir e identificar praxeologías de naturaleza mixta. El tipo de tareas que la mayoría en su caso no corresponden a E(M) sino a Iu permitió reconocer que para su resolución es pertinente el uso de técnicas matemáticas y otras de naturaleza topográfica que adquieren su validación debido a su eficacia. Las validaciones muestran que I(M), I(T) e Iu tienen un vínculo indisoluble en el levantamiento topográfico, visto desde sus orígenes hasta la actualidad. Esto podría ser potencializado para el diseño de futuras actividades didácticas en las que se plantearían tipos de tarea que no son propias de E(M) y de I(M), pero que requieren de conocimientos y técnicas propias de estas instituciones para ser abordadas. Se piensa que el plantear este tipo de tareas potencializaría la investigación profunda por parte de los estudiantes para poder resolverlas. Diseñar diversas técnicas que evoquen diferentes instituciones para abordarlas. Tareas o problemas que planteen el reto de investigación y que vaya más allá de solo la resolución de problemas (Matheron y Noirfalise, 2007). Este es el rumbo que se desea tomar para el avance de esta investigación, que actualmente forma parte de un proyecto posdoctoral desarrollado en CICATA-IPN, México, D.F.

Referencias y bibliografía

Bell, E. T. (1985). *Historia de las matemáticas* (2da edición en español ed.). (R. Ortiz, Trad.) D.F., México: Fondo de Cultura Económica.

Bessot, A. (2000a). Geometry at Work. Examples from a the building industry. In A. Bessot, & J. Ridgway (Eds.), *Education for Mathematics in the workplace* (pp. 143-157). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Bessot, A. (2000b). Visibility of mathematical objects present in professional practice. In A. Bessot, & J. Ridgway (Eds.), *Education for Mathematics in the workplace* (pp. 143-157). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Boyer, C. (1999). *Historia de la Matemática.* Madrid, España: Alianza editorial.

Camacho, A., & Sánchez, B. I. (2010). Análisis sociocultural de la noción de variabilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(4-I), 29-52.

Camacho, A., Sánchez, B. I., Blanco, R., & Cuevas, J. (2011). Geometrización de una porción del espacio real. *Educación Matemática,* 23(3), 123-145.

Camarena, P. (1999). *Las funciones generalizadas en Ingeniería. Construcción de una alternativa didáctica.* Tesis de doctorado no publicada. D.F., México: CINVESTAV-IPN

Carraher, T. N., Carraher, D. W., & Schliemann, A. D. (1991). En la vida diez, en la escuela, cero: los contextos culturales del apendizaje de las matemáticas. En T. Carraher, D. Carraher, & A. Schliemann (Edits.), *En la vida diez, en la escuela cero* (Primera Edición en Español ed., págs. 25-47). D.F., México: Siglo Veintiuno Editores, S. A. de C. V.

Castela, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques*, 28(2), 135-179.

Castela, C., & Romo-Vázquez, A. (2011). Des Mathématiques A L'Automatique : Etude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 31(1), 79-130.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : Perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques,* 12(1), 73-112

Covián, O. (2005). *El papel del conocimiento matemático en la construcción de la vivienda tradicional: el caso de la cultura maya.* Tesis de maestría no publicada. México: CINVESTAV-IPN.

Covián, O. (2013). *La formación matemática de futuros profesionales técnicos en construcción. Tesis de doctorado no publicada.* México: CINVESTAV-IPN

Covián, O & Romo-Vázquez, A. (2014). Modelo Praxeológico Extendido una Herramienta para Analizar las Matemáticas en la Práctica: el caso de la vivienda Maya y el levantamiento y trazo topográfico. *Bolema*, 28(48), pp. 128-148.

De la Cruz, J. L., Mesa, J. L., & Cuartero, A. (1998). Evolución histórica de la instrumentación topográfica. *Boletín del Instituto de Estudios Giennenses*, 169, 637-646.

García, F. (2003). *Curso básico de topografía: planimetría, agrimensura, altimetría*. D.F., México: Editorial Pax México

García-Torres, E. (2008). *Un estudio sobre los procesos de insitucionalización de las prácticas de ingeniería biomédica. Una* visión *socioepistemológica.* Tesis de maestría no publicada. D.F., México: CINVESTAV-IPN

Lave, J. (1988). *La cognición en la práctica.* Ediciones Paidós Ibérica, S.A.

Matheron, Y. y Noirfalise, R. (2007, octubre-noviembre). *Dynamiser l'étude des mathématiques dans l'enseignement secondaire (collège et lycée) par la mise en place d' AER et de PER.* Comunicación presentada en el II congrès international sur la Théorie anthropologique du didactique (TAD): Diffuser les mathématiques et autres saviors comme outils de connaissance et d'action, Uzès, Francia.

Montes de Oca, M. (1989). *Topografía.* D.F., México: Ediciones Alfaomega, S. A. de C. V.

Noss, R., Hoyles, C. & Pozzi, P. (2001). Proportional Reasoning in Nursing Practice. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(1), 4-27.

Noss, R., Hoyles, C. & Pozzi, S. (2000). Working Knowledge: Mathematics in Use. In A. Bessot, & J. Ridgway (Eds.), *Education for Mathematics in Workplace* (pp. 17-35). Netherlands: Kluwer academic publishers.

Romo-Vázquez, A. (2009). *La* formation mathématique *des futurs ingénieurs*. Paris, France: Université Paris Diderot (Paris 7)

Solares, D. (2011). Conocimientos matemáticos de niños y niñas jornaleros migrantes: algunas preguntas para la escuela. *Rayuela. Revista Iberoamericana sobre Niñez y Juventud en Lucha por sus Derechos, 4*(4), 101-110

Sträesser, R. (2005). À propos de la transition du secondaire vers le monde du travail. En A. Rouchier, & I. Bloch (Ed.), Perspectives *en* didactique *des mathématiques. Actes de la XIIIème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (págs. 177-186). Fontenay-Le- Compte: La Pensée Sauvage.

Struik, D. (1980). *Historia* concisa *de las Matemáticas.* D.F., México: Consejo Editorial del Instituto Politécnico Nacional.

Wake, G. (2014). Making sense of and with mathematics: the interface between academic mathematics and mathematics in practice. *Educational Studies in Mathematics, 86*(2), pp. 271-290.

Consumo de bolsas plásticas: una experiencia de Modelación

Any Carolina **Cardona-Berrío**
Universidad de Antioquia
Colombia
any-0825@hotmail.com
Cindy Alejandra **Martínez-Castro**
Universidad de Antioquia
Colombia
cindymarca@hotmail.com
María Camila **Ocampo-Arenas**
Universidad de Antioquia
Colombia
macaocar08@gmail.com
Mónica Marcela **Parra-Zapata**
Universidad de Antioquia
Colombia
monica.parra@udea.edu.co

Resumen

En este trabajo se analiza una experiencia de modelación matemática en la que participó un conjunto de tres futuras profesoras de matemáticas. La experiencia se centró en analizar el consumo de bolsas plásticas que actualmente se da en un almacén de cadena en Colombia y la cantidad de bolsas plásticas que se dejarían de consumir si son reemplazadas por bolsas reutilizables. Algunas reflexiones emergieron acerca de cómo este cambio puede ser un punto de partida para aportar al cuidado del medio ambiente. A partir de una información recolectada en relación al tema, se logró un acercamiento a algunos modelos aritméticos que permiten dar cuenta de la problemática ambiental y que demuestran la importancia de reemplazar las bolsas plásticas. La experiencia vivida por este conjunto de futuras profesoras les permitió ampliar su visión frente a las relaciones entre las matemáticas, otras disciplinas y la sociedad.

Palabras clave: modelación matemática, modelo, Educación Matemática, contaminación, bolsas plásticas, bolsas reutilizables.

Introducción

La literatura internacional sobre modelación en Educación Matemática ha reportado el compromiso que implica implementar la modelación en las aulas de clase y el rol que los profesores tienen frente a dicha implementación. Verschaffel, De Corte y Borghart (1997) y Kaiser y Maaß (2007) han apuntado que las creencias y concepciones que tiene los profesores sobre la matemática y su enseñanza se convierte en un elemento que influye en las maneras en que los profesores implementan o no la modelación matemática en la enseñanza. Otro de los aspectos que interviene en la manera en que los profesores integran la modelación en sus prácticas de aula, es reportado por Niss (2001) quien señala que en el cotidiano de las aulas de clase se presentan barreras de diversa naturaleza; entre ellas, las altas demandas matemáticas, pedagógicas y personales que la modelación impone a los profesores.

Como una manera de atender a los diferentes desafíos que tienen los profesores cuando intentan llevar la modelación matemática al aula de clase, el programa de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas de la Universidad de Antioquia (Medellín-Colombia) ha diseñado un espacio en el que los futuros profesores se enfrentan a diferentes tipos de experiencias de modelación matemática. En el espacio en mención (denominado *Seminario de Especialización I*) se reconoce la modelación matemática como un campo de investigación fortalecido al interior de la Educación Matemática y se abordan aspectos relacionados con las prácticas de modelación matemática, sus implicaciones en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática.

En este documento se analiza una experiencia que tuvo lugar en el marco del Seminario anteriormente mencionado; se describe la manera en que tres futuras profesoras se comprometen en la elección de un fenómeno a estudiar, la delimitación de un problema a resolver y de otros aspectos que intervinieron durante el proceso de modelación.

La experiencia reportada en este documento se convierte en evidencia de que cuando las profesoras en formación se comprometen con situaciones de modelación que nacen desde sus intereses personales, ellas construyen reflexiones sobre la enseñanza de las matemáticas, la utilidad de la matemática en la sociedad, a la vez que experimentan aspectos propios de la modelación como lo son: la delimitación de un tema a indagar, la formulación de hipótesis a partir de fenómenos de la realidad y la construcción de una mirada más crítica y reflexiva frente al fenómeno que se estudia.

Modelos y modelación en Educación Matemática

La modelación matemática se ha consolidado a nivel internacional como un dominio de investigación al interior de la Educación Matemática (Blum et al. 2007). En los últimos años, la literatura internacional ha reportado que no existe una compresión homogénea sobre el significado de la modelación matemática en la investigación en Educación Matemática ni de sus implicaciones para el aula de clase (Kaiser y Sriraman, 2006; Villa-Ochoa, 2013). Entre las diferentes maneras de concebir la modelación matemática se encuentra que algunas ponen de relieve la construcción de modelos matemáticos y la descripción del proceso de modelación mediante ciclos (e.g, Modelación como obtención y validación de modelos matemáticas derivados de una situación "real", Bassanezi, 2002), otras, por su parte, ponen el acento en la actividad misma de modelación y en las posibilidades educativas que ofrece a los estudiantes (Barbosa, 2006; Araujo, 2009; Villa-Ochoa, 2010). En consonancia con esta última acepción, Villa-Ochoa (2010) ha descrito la modelación matemática como:

> (…) un proceso de estudio de fenómenos o situaciones que pueden surgir tanto desde los contextos cotidianos, sociales y culturales de los estudiantes como de otras ciencias o disciplinas académicas. Dicho proceso de estudio involucra el uso y la construcción de modelos y otras herramientas matemáticas con las cuales puede ofrecerse una compresión del fenómeno y resolver el problema (p. 9).

En este sentido, la modelación matemática es un proceso que no se agota en la construcción de un modelo sino que, más allá de ello, resalta la importancia de las matemáticas para comprender o describir un fenómeno, o incluso, para resolver problemas que tienen origen en situaciones de la "realidad", tomando en algunos casos contextos especiales según las necesidades e intereses de los participantes (Araújo, 2009).

Otro de los aspectos que se considera importante cuando se hace modelación matemática tiene que ver con el papel que los diferentes actores cumplen en la modelación, así por ejemplo, Villa-Ochoa (2013) ha resaltado que en relación al énfasis que se puede otorgar a la identificación y delimitación de los contextos, temas, o fenómenos que se desean modelar, se pueden reconocer, al menos, dos tendencias, las cuales dependen del papel activo que ejerza el profesor o los estudiantes en tal elección. Según el autor, el primero de ellos pone "el papel protagónico en los estudiantes, quienes de acuerdo con sus necesidades e intereses identifican los contextos, fenómenos o situaciones sobre los cuales se realiza el proceso de modelación" (p. 2); en el segundo, el autor señala que "el papel protagónico está en el profesor, quien de acuerdo con su conocimientos, los contenidos temáticos y su realidad institucional, elige tales contextos o fenómenos" (p.2).

En la literatura relacionada con la modelación matemática escolar puede encontrarse diversidad de evidencia en la cual la modelación permite a los estudiantes acercarse a relaciones entre el contexto socio-cultural y las matemáticas escolares mediante la construcción de cuestionamientos y reflexiones sobre ellas, para luego presentar conclusiones a partir de los datos y los cálculos hechos. En este proceso se usan los resultados obtenidos para hacer inferencias de los hechos reales. Este conjunto de capacidades es el primer paso en dirección al alcance de una postura intelectual crítica. (D'Ambrosio, 2002).

Aspectos metodológicos en los que se desarrolló la experiencia

El contexto

Conforme se mencionó anteriormente, en el programa de Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas (Programa de formación inicial de profesores) se viene implementado un Seminario dedicado al estudio de la modelación matemática y de sus implicaciones educativas. En el seno de ese seminario, que se desarrolló durante el semestre 2014-1, se llevaron a cabo actividades en las cuales los futuros profesores se convirtieron en protagonistas, eligieron el tema y desarrollaron el proceso de modelación de acuerdo a sus intereses y necesidades.

Entre los aspectos que fundamentan la inserción de este tipo de actividades en el Seminario está el hecho de contribuir en la formación de docentes vinculados a las discusiones teóricas acerca de la Modelación Matemática y sus aplicaciones; asimismo, el espacio se justifica debido a que a través de la modelación se da la posibilidad de integrar múltiples contextos y establecer relaciones en las que se exploren diversas formas de transformación a partir de ecuaciones y otros registros matemáticos. En este sentido, Arrieta (2003) afirma que la modelación matemática como actividad humana permite la participación en el mundo, la interacción con las demás personas, y con los acontecimientos que ocurren en nuestro alrededor.

En el marco de las actividades realizadas en el Seminario, tres futuras profesoras parten de sus intereses para desarrollar una situación de modelación matemática. Las futuras profesoras participan en la elección de un fenómeno, delimitan el problema y realizan una serie de cuestionamientos sobre su contexto.

Recolección de los datos y su análisis

Los datos que se analizan en este documento surgieron de un conjunto de asesorías y acompañamiento continuo que se hizo en el seminario por parte de la profesora y de otros especialistas en el tema de la modelación matemática escolar. En estas asesorías se discutía en torno a la pertinencia de la información recolectada hasta ese momento y los planes de acción que se iban constituyendo.

Otros datos también se recogieron de una socialización que hicieron los futuros profesores sobre los resultados obtenidos de su proyecto de modelación. Esa sesión de socialización fue registrada en video. Finalmente se tuvo en cuenta un documento escrito producido por las participantes de la experiencia en donde ellas describieron sus vivencias y el proceso llevado a cabo y las reflexiones que lograron consolidar.

Para el análisis, se centró la atención en aquellas producciones de las estudiantes en las que se pudiera encontrar evidencia frente a las maneras en que hicieron modelación matemática y frente a las reflexiones que las participantes pudieran haber construido acerca de la modelación matemáticas y su experiencia con el fenómeno modelado, el rol de las matemáticas en relación con dicho fenómeno.

Resultados de la Experiencia

El proceso de modelación desarrollado

Conforme se mencionó anteriormente, la modelación matemática, vista como un proceso, generalmente se describe a través de diferentes ciclos que incluyen "traducciones" entre dos dominios, y otra serie de subprocesos como simplificación, abstracción, validación, entre otros. En la presentación oral, las estudiantes (futuras profesoras) detallaron la manera en que ellas se motivaron a elegir el tema de estudio resaltando que existe en ellas una fuerte preocupación por aspectos relacionados con el medio ambiente y que, a través del desarrollo de la actividad, pudieron hacerse conscientes de una problemática que afecta directamente sus vidas y pensar algunas maneras de ayudar a solucionar dicha problemática. En el informe escrito las estudiantes describieron la manera como llevaron a cabo su indagación, así:

> De acuerdo con el proceso vivido durante la experiencia de modelación que se realizó, se reconoce que este se desarrolla cumpliendo un ciclo, pero no propiamente el referenciado por autores como Blum & Borromeo-Ferri(2009), sino que se describió un proceso propio (Figura 1) a partir de unos momentos que se consideraron fundamentales a la hora de desarrollar la situación.

En el documento proporcionado por las estudiantes, ellas describieron una serie de momentos en los que desarrollaron la modelación matemática. En la figura 1 se detallan estos momentos y más adelante se exponen consideraciones sobre ellos:

Figura 1. Ilustración del proceso de modelación desarrollado por las estudiantes.

Momento 1: Identificación del problema. El momento uno que se presenta en la anterior figura, el proceso inició en la necesidad de identificar la problemática sobre la cual se enfocó el proceso de modelación matemática. La elección por el tema del consumo de las bolsas plásticas estuvo motivada por observaciones indirectas realizadas en cuanto al uso indiscriminado de estos materiales por parte de un almacén de cadena en Colombia.

En este primer momento las estudiantes fueron invitadas a indagar sobre situaciones problemáticas relacionadas con sus vivencias cotidianas en las que las matemáticas cobra sentido para intentar dar solución a estas. Inicialmente surgieron diversas ideas, las cuales, luego de un momento de discusión y análisis, fueron replanteadas de acuerdo a los intereses propios de los sujetos inmersos en el proceso, por lo cual, fue necesario contar con nuevas miradas que permitieran otro tipo de reflexiones más cercanas a la realidad de los participantes.

Las participantes de esta experiencia se interesaron por estudiar el proceso del reciclaje, ya que, según ellas,

> Desde la experiencia en los hogares se ve necesario que se conozcan aspectos sobre el reciclaje, entre ellos, el tiempo que tardan los materiales en degradarse como el plástico, las baterías, el aluminio, entre otros; ya que, éstas son situaciones ambientalmente que propician un beneficio al planeta. En particular, cuando se realizan compras en algún mini, súper o hipermercado, el uso de bolsas plásticas se incrementa, aumentando el número de desechos que van a los rellenos sanitarios, a las fuentes hídricas y en muchos casos ocasiona la muerte a algunos animales. Además, en este almacén de cadena en Colombia, se observa que se utilizan las bolsas plásticas sin aprovechar todo el espacio que éstas poseen, y por ende, el peso total que pueden resistir, lo que de alguna manera incentiva el uso descontrolado de éstas.

Con base en las anteriores declaraciones de las estudiantes, se dio la necesidad de indagar en un almacén de cadena reconocido en la ciudad de Medellín, la cantidad de bolsas plásticas que son utilizadas allí. En este momento de la experiencia el objetivo fue analizar la cantidad de bolsas plásticas que se dejarían de consumir si éstas fueran reemplazadas por bolsas reutilizables y cómo esto puede ser una iniciativa para reflexionar en torno a la protección del medio ambiente.

En este sentido, y siguiendo lo propuesto por Herminio & Borba (2010) se identifica en las estudiantes un interés evidente, en el que la situación de modelación nace de una vivencia personal y de su propia preocupación por problemáticas de su contexto; interés que permite concebir la actividad de modelación como un fin en sí mismo y no como un medio. El hecho de que las estudiantes partieran de un interés directo, permitió que a medida que se desarrollara la situación se involucraran en ésta de manera activa, desarrollaran las diferentes tareas y asumieran responsabilidades en el proceso y se preocuparan por aportar significativamente a la solución de dicha problemática.

Momento 2: Indagación. El momento de indagación descrito por las estudiantes inició en la búsqueda de datos, antecedentes, referencias, entre otros. Para las estudiantes, esta búsqueda se hizo con el fin de recolectar información alrededor del tema de su interés, allí el grupo de futuras profesoras tuvo la oportunidad de adquirir información por medio de entrevistas a algunos expertos, la consulta en artículos de revista y páginas web que ampliaron el panorama en torno al problema identificado. Las consultas a expertos fueron necesarias, ya que, luego de un periodo de indagación en la redes, no hallaron datos o información específica en relación con la cantidad de clientes activos, es decir, que compran algo al visitar el almacén de cadena, con respecto al área de la Universidad de Antioquia y otros aspectos fundamentales para avanzar en el proceso de modelación. Según las estudiantes fue a través de esta indagación como lograron recolectar la información que se presenta en el siguiente recuadro:

- En promedio entran 260.000 clientes efectivos (que compran algo) al día.
- Cada cliente utiliza en promedio 1.5 bolsas plásticas tipo 3A (40 cm x 84 cm aprox.) al día (lo que verdaderamente equivale al uso de 2 bolsas plásticas por cliente al día).
- Por cada bolsa reutilizable se pueden reemplazar en promedio de 2 a 5 bolsas plásticas.
- Cada bolsa reutilizable tiene una vida útil de 5 años aproximadamente

Posteriormente, el equipo de estudiantes se comprometió con la indagación de aspectos como el porcentaje de contaminación que generan estas bolsas plásticas en el medio ambiente. Este cuestionamiento sugirió a las estudiantes acercarse a profesionales sanitarios en el tema, según ellas

> en un diálogo con un profesional en ingeniería sanitaria nos aclaró que no era posible establecer esa relación, ya que la contaminación se da, en la tierra, el aire y las aguas, y las estimaciones que se hacen en los rellenos sanitarios con respecto al plástico se llevan a cabo en relación al peso de los residuos que llegan allí. Además de que estas estimaciones se hacen con base a la cantidad de plástico en general, es decir, teniendo en cuenta todos los tipos de plástico existentes".

Con la intención de indagar acerca de los residuos que llegan al relleno sanitario de la región y de conocer la cantidad que poseen en relación al plástico, las participantes iniciaron otro proceso de indagación con el que lograron configurar la información que se muestra en la Figura 2. Según las estudiantes

> Esta información fue proporcionada por un experto en Ingeniería Civil, quien trabaja en el relleno sanitario 'La Pradera'. Es importante resaltar que en promedio llegan 65000 toneladas de basura al mes a este lugar.

*Figura 2.*Caracterización de residuos sólidos en Medellín y el área metropolitana.

Como se observa en las dos indagaciones anteriores, la consulta a expertos surgió en los procesos de modelación matemática como una manera de indagar y profundizar aquella información a la cual no era fácil acceder desde la consulta a los sitios web.

Momento 3: Simplificación. La literatura internacional reporta que cuando se desarrollan procesos de modelación matemática se recurre a la delimitación de la cantidad de variables y relaciones que son susceptibles de ser modeladas matemáticamente. En concordancia con ello las futuras profesoras que participaron de la experiencia manifiestan que,

> se hizo necesario realizar una simplificación, la cual, se realizó bajo el criterio de usar y analizar solo aquella información que aportaba datos pertinentes en relación con la disminución del consumo de bolsas plásticas.

Esta decisión estuvo motivada por el deseo de las futuras profesoras no solo de comprender el fenómeno, sino también de tener cierto “impacto” en las prácticas de consumo.

En coherencia con este propósito, las estudiantes omitieron datos como “residuos que ingresan por mes al relleno sanitario” ya que según ellas

> la caracterización que se hace en el relleno es del plástico en general, por lo cual se podría tener un error en cuanto a los cálculos, además si se tomaba como referencia el peso de las bolsas plásticas en proporción a la cantidad de plástico que ingresa al relleno, no daba una cantidad significativa, ya que, el peso de las bolsas es mínimo, por consiguiente analizar cómo contribuye a reducir la contaminación basado en el peso de las bolsas no es significativo.

En este sentido, se nota como las estudiantes iniciaron un proceso de simplificación de aquella información que no es relevante para lograr los objetivos propuestos con el proceso de modelación y de aquellos aspectos no aportaban significativamente a la generación de conciencia en relación con la reducción de la contaminación por bolsas plásticas.

Otros datos a los que las estudiantes accedieron, pero que posteriormente omitieron fueron

> la cantidad de bolsas que usa un almacén de cadena en Colombia por semana”. Al cuestionarlas por esta decisión, ellas señalaron que esto se debió a que “al tener la información de los clientes que en promedio ingresan a todas las dependencias del almacén de cadena por día y la cantidad de bolsas que consumen en promedio, no fue necesario hacer uso de estos datos ya que era una muestra muy pequeña en relación a la cantidad de estos y sus dependencias que hay en Colombia.

En este caso, las estudiantes analizan la importancia del uso de aquella información que verdaderamente les posibilitara generar un impacto a nivel del consumo descontrolado de bolsas plásticas que se da en este almacén de cadena específicamente.

Momento 4: Modelos. A partir de la información estudiada, el equipo inicia el proceso de matematización, en el que se logra construir algunos modelos aritméticos que permiten dar cuenta de aspectos en relación con la problemática ambiental que se propuso analizar, mediante cifras y datos que demostraron la importancia de reemplazar las bolsas plásticas por bolsas reutilizables, además de que si la información lograda se empieza a difundir, también sería un punto de partida para empezar a generar conciencia ambiental.

Haciendo uso de la información obtenida en el proceso de indagación, las estudiantes lograron establecer un contraste entre de la cantidad de bolsas que se usarían en un tiempo de 5 años, y la que se usa actualmente, para ello, las estudiantes tuvieron en cuenta la relación "*una bolsa reutilizable se podía reemplazar por dos bolsas plásticas*", información obtenida de la página web del almacén de cadena. (Ver tabla 1).

Tabla 1
Bolsas plásticas Vs Bolsas reutilizables en un tiempo de 5 años

	Tipo de bolsa	
Tiempo	Número de bolsas plásticas tipo 3A	Número de bolsas reutilizables
1 día	520000	260000
1 mes	15600000	260000
1año	187200000	260000
5 año	936000000	260000

Realizado el proceso anterior, las estudiantes establecen la relación entre las bolsas que se gastarían dichos clientes en su vida promedio[1], para ello, tuvieron en cuenta la información de siguiente recuadro y de la Tabla 2:

-Consumidor activo: a partir de los 20 años

-Vida promedio de consumidor: 50 años

Tabla 2
Contraste de bolsas que gastarían los 260000 clientes en su vida promedio.

	Tipo de bolsa	
Tiempo	Bolsa plástica tipo 3A	Bolsa reutilizable
50 años	9360000000	2600000

[1]Vida promedio de una persona en Colombia: 70 años. En: https://www.dane.gov.co/files/noticias/Comunicado_dia_poblacion.pdf

Con el ánimo de hacer comprender el fenómeno y obtener algunas conclusiones, las participantes realizaron un contraste entre la cantidad de bolsas que se gastaría un solo cliente en su vida promedio (Ver tabla 3).

Tabla 3
Contraste de bolsas que gastaría 1 cliente en su vida promedio

	Tipo de bolsa	
Tiempo	Bolsa plástica tipo 3A	Bolsa reutilizable
1 día	2	1
1 mes	60	
1 año	720	
50 años	3600	10

Otro contraste importante que las estudiantes establecieron fue encontrar el área aproximada de una bolsa plástica tipo 3A y luego el área que cubrirían las bolsas que consumen en un año los clientes efectivos del almacén de cadena. Para hacerse a una idea de lo que significa estos hallazgos, las estudiantes compararon el área anterior, con el área de un lugar específico y conocido en el contexto en el cual se realizó el proceso de modelación. En este sentido, las estudiantes señalaron que "*se indagó por el área de la Universidad de Antioquia de Medellín, ya que, es un lugar conocido para las personas Colombianas. De acuerdo con la dirección de gestión de logística e infraestructura de la Universidad, el área aproximada de la Universidad es de 237498 metros cuadrados*". Conocida esta información, ellas partieron de los siguientes datos:

- Área aproximada de 1 bolsa plástica tipo 3A: 0,336 m^2.
- Área de las bolsas que consumen 260000 clientes en un año: (187200000)*(0,336 m^2)= 62899200 m^2.
- Área universidad de Antioquia: 237498 m^2.

De esta manera, el número de veces que se puede cubrir la superficie de la universidad si se hiciera un tapete con la cantidad de bolsas que consumen 260000 clientes efectivos en un año, sería: 62899200m^2/ 237498m^2 = 264,84 veces aproximadamente.

En la figura 3, se realiza una simulación de esta situación:

*Figura 3.*Simulación de la superficie de la Universidad de Antioquia cubierta por un tapete de bolsas plásticas.

La anterior comparación estuvo motivada en la intención de proveer a los usuarios y a ellas mismas una comprensión de la dimensión de la cantidad de contaminación que se genera, haciendo una simulación con un lugar conocido en sus contextos, para sensibilizar y poner a reflexionar a las personas inmersas en dicho contexto. Para ello, las estudiantes señalaron que

> nuestra intención es que las personas puedan observar la cantidad de bolsas plásticas que se consumen sólo en uno de los almacenes de cadena que funcionan en Colombia en 1 año, y que de manera puedan tener un panorama de la gran cantidad de metros cuadrados que se podrían cubrir con dichas bolsas, y así reflexionar acerca del uso descontrolado de este producto en nuestro país.

Una vez organizada y analizada la información inicial las estudiantes matematizaron la situación y lograron "conjugar diferentes modelos matemáticos" entre ellos, las relaciones que pudieron determinar o identificar entre los diferentes datos recolectados. A través de esos modelos pudieron dar cuenta de aspectos en relación con la problemática ambiental que se propusieron analizar. Basadas en los resultados de su estudio, las estudiantes concluyeron acerca de

> la importancia de reemplazar las bolsas plásticas por bolsas reutilizables, además es importante que la información lograda se empiece a difundir, para también tener un punto de partida y empezar a generar conciencia ambiental.

Estos resultados permiten comprender que los modelos y las matemáticas utilizadas en la situación, se convirtieron en medios significativos para cuestionar "la realidad" en la que vivimos, en este caso, referente a la problemática del uso descontrolado de bolsas plásticas en Colombia; se generaron así reflexiones y cuestionamientos frente a esta situación. En otras palabras, la modelación matemática les permitió a las participantes de esta experiencia reflexionar sobre las matemáticas, los modelos construidos y su significado social.

Por otra parte, la participación de las futuras profesoras en el proceso de modelación trasciende el aprendizaje de un contenido concreto, y genera en ellas actitudes favorables y comprometidas con la interacción en su medio social; con ello, se deja de lado actitudes pasivas en las que siempre se espera que sea otro quien produzca el conocimiento. De acuerdo con los planteamientos de Barbosa (2006), es una oportunidad para explorar los roles que las matemáticas poseen y desarrollan en nuestra sociedad contemporánea. En este sentido, el proceso de modelación se convirtió en un aprendizaje de vida, en una forma de leer y comprender el mundo, para la toma de decisiones a partir del estudio de situaciones problemáticas de la vida cotidiana.

Momento 5: Reflexiones. Tanto en la presentación oral como en el documento producido por las estudiantes, se señala que durante todo el proceso de modelación fue necesario revisarlos alcances que quería con su trabajo y, en coherencia con ello, fueron ajustados los objetivos que pretendían cumplir. Otras de las reflexiones que las estudiantes manifestaron fueron:

> Durante el proceso de modelación se evidenció que por medio del uso de las matemáticas se puede tomar conciencia de algunas problemáticas que afectan directa o indirectamente a los seres humanos, sin embargo, es necesario entender que las matemáticas no lo solucionan todo, son una herramienta para comprender y reflexionar en torno a lo que se vive a diario en base a supuestos, que permiten abrir el panorama frente a alguna temática y posibilitan la toma de decisiones".

En un proceso de modelación

> Además, de que validar los modelos implica tener en cuenta que cuando los llevamos nuevamente a la realidad, existen múltiples variables que intervienen en dicho proceso, por ello son supuestos que se podrían cumplir bajo ciertas condiciones que no son fáciles de controlar.

A través de este esta experiencia, las futuras profesoras afirman:

> la conciencia en cuanto al uso de bolsas plásticas debe partir de los sujetos que realizaron este proceso, ya que somos quienes vivenciamos la experiencia en torno a ésta situación, quienes nos podemos comprometer de manera autónoma a disminuir el consumo de bolsas plásticas y otros elementos que contaminan los entornos, y propender por sensibilizar a las personas que se encuentran alrededor (familia, amigos, colegas, etc.).

De acuerdo a las reflexiones constituidas por las futuras profesoras, la modelación matemática es asumida como un proceso que permite la toma de decisiones y el posicionamiento frente a diversas problemáticas sociales.

A modo de cierre

Este documento reportó la experiencia que un conjunto de tres estudiantes (futuras profesoras de matemáticas) vivenció a lo largo de un Seminario dedicado a discutir y desarrollar modelación matemática en el aula de clase. Como se puso en evidencia, las estudiantes analizaron el consumo de bolsas plásticas que actualmente se da en un almacén de cadena en Colombia. La experiencia desarrollada por las futuras profesoras permitió consolidar algunos modelos aritméticos, los cuales dejaron en evidencia una problemática ambiental. El trabajo desarrollado les permitió ampliar su visión frente a las relaciones entre las matemáticas, otras disciplinas y la sociedad.

En otro sentido, la modelación desarrollada de manera semejante a la reportada en este documento, permite involucrar al sujeto en el aprendizaje de manera activa, cambiando su rol en el aula de clase, poniéndolo en un papel protagónico en donde es él quien construye su conocimiento a partir de sus propias experiencias. De esta manera, el aprendizaje de las matemáticas se vincula con la participación activa del estudiante en la construcción de relaciones matemáticas, por medio de la interacción con el docente y con sus demás compañeros de grupo. Por su parte, el profesor ya no es un transmisor del conocimiento, sino que propicia espacios de interacción y discusión acompañándolos permanentemente y creando ambientes más agradables para éstos.

Del trabajo realizado por las futuras profesoras puede percibirse una inserción crítica en su realidad, tomando una postura intelectual y crítica al asumirse como ciudadanas, frente a la práctica tradicional de las matemáticas.Esta actitud crítica asumida por las futuras profesoras da lugar a una toma de conciencia referente al consumo o al uso de bolsas plásticas debe partir de los sujetos que realizaron este proceso, ya que son quienes vivenciaron la experiencia en torno a esta situación, comprometiéndose de manera autónoma a disminuir el consumo de bolsas plásticas y otros elementos que contaminan los entornos.

Agradecimientos

Agradecimientos a la Universidad de Antioquia por su apoyo a través del proyecto FPP01 (CODI-Facultad de Educación) y al Semillero de Investigación MATHEMA. Aunque no sean responsables de los planteamiento acá descritos, también queremos agradecer a la profesora Paula Andrea Rendón-Mesa y a otros integrantes de la Red Colombiana de Modelación en

Educación Matemática (www.recomem.com.co) por las lecturas y sugerencias realizadas a las diferentes versiones de este documento.

Referencias bibliográficas

Araújo, J. L. (2009). Uma abordagem Sócio-Crítica da modelagem matemática: a perspectiva da educação matemática crítica. *ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, *2*(2), 55-68.

Arrieta, J. (2003). *Las prácticas de modelación como proceso de matematización en el aula. México* (Tesis doctoral no publicada). Cinvestav, México.

Barbosa, J. C. (2006). Mathematical modelling in classroom: a critical and discursive perspective. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *38* (3), 293-301.

Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Editora Contexto.

Blum, W., Galbraith, L., & Niss M. (Eds.). (2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study* (Vol. 10). New York: Springer.

Blum, W., & Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of mathematical modelling and application*, *1*(1), 45-58.

D'ambrosio, U. (2002). *Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade*. Belo horizonte: Autêntica Editora.

Herminio, M. H. G. B., & Borba, M. C. (2010). A noção de interesse em projetos de modelagem matemática. *Educação Matemática Pesquisa*, *12*(1), 111-127.

Kaiser, G., & Sriramam, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *(ZDM), The International Journal on Mathematics Education*, *38*(3), 302-310.

Kaiser, G., & Maaß, K. (2007). Modelling in lower secondary classrooms - Problems and opportunities. En W. Blum, P. Galbraith, H. Henn, & N. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education,*(The 14th ICMI Study, pp. 99-108). New York: Springer.

Niss, M. (2001). Issues and problems of research on the teaching and learning of applications and modelling. En J. Matos, W. Blum, S. Houston, & S. Carreira (Eds.), *Modelling and mathematics education* (ICTMA 9: Applications in science and technology, pp. 72–89). Chichester: Horwood.

Verschaffel, L. D. De Corte, E., & Borghart, I. (1997). Pre-service teachers' conceptions and beliefs about the role of real-world knowledge in mathematical modelling of school word problems. *Learning and Instruction, 7*(4), 339-359.

Villa-Ochoa, J. (2010). *Modelación matemática en el aula de clase. Algunos elementos para su implementación.* Conferencia presentada en el primer seminario de Educación Matemática, Historia y Etnomatemáticas, Universidad de Medellín. Medellín.

Villa-Ochoa, J. A. (2013). Miradas y actuaciones sobre la modelación matemática en el aula de clase. In V. Bisognin & M. D. F. Sant'Ana (Eds.), *Anais da VIII Conferência Nacional sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática* (pp. 1-8). Santa Maria-RS, Brasil: Centro Universitario Franciscano.

Estudio de Situaciones de Modelación del Movimiento con incorporación de TIC

Víctor Hugo **Luna** Acevedo
Escuela Nacional de Ciencias Biológicas, Instituto Politécnico Nacional
México
vhluna@ipn.mx
Liliana **Suárez** Téllez
Coordinación General de Formación e Innovación Educativa, Instituto Politécnico Nacional
México
lsuarez@ipn.mx

Resumen

En este trabajo se reporta el proceso de diseño de situaciones de modelación del movimiento por parte de estudiantes preuniversitarios. Estamos interesados en observar el uso de los resultados de investigación en el diseño de situaciones de aprendizaje. Se parte de una categoría teórica de la modelación – graficación que ofrece una metodología para el diseño de situaciones de modelación del movimiento. De manera particular, se visualizó la adecuación de la situación problema y la interpretación de la modelación del movimiento mediante el diseño de situaciones de modelación. En este trabajo se identifica la situación desde 1) la discusión del problema, 2) la socialización de alternativas de solución, 3) el contraste con métodos, procedimientos y uso de herramientas tecnológicas, 4) la materialización del problema, 5) y la interpretación de los resultados. Los estudiantes pudieron, con este problema de modelación del movimiento, identificar los tres contextos que intervienen en su diseño con tecnología: la situación de movimiento, su modelación a partir de sus gráficas y las representaciones que proporciona la tecnología.

Palabras clave: Modelación, movimiento, herramienta tecnológicas, materiales didácticos, diseño de situaciones de aprendizaje.

Introducción

Los avances tecnológicos como las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) nos ayudan a proponer y diseñar actividades de aprendizaje en formatos digitales (texto, audio, video), más aún, desde la perspectiva de investigación en educación matemática, por ejemplo Sandoval y Moreno (2012) y Artigue (2013), se sabe que hay el uso de herramientas tecnológicas en el aprendizaje de las matemáticas condicionan la construcción misma del conocimiento al mismo tiempo que la relación entre los aprendices y la tecnología también se desarrolla. Dentro de un proyecto que tiene como propósito estudiar el uso de resultados de investigación en la práctica docente, se propuso a un equipo de estudiantes que diseñaran Situaciones de Modelación del Movimiento en un escenario que simulara los elementos característicos de la Modelación - Graficación (Suárez, 2014). Un problema típico de una Situación de Modelación de Movimiento (SMM), reportado por Torres (2005) y Suárez y Cordero (2010), consiste en representar la posición y la trayectoria de un cuerpo partiendo de un origen, llegando a un punto máximo y finalizando en el punto de origen. Los estudiantes hicieron evidente el manejo de los conceptos matemáticos lo que nos dio la oportunidad de visualizar de manera global, cómo representaron la situación de modelación. En un contexto al aire libre, en la situación y puesta en escena los estudiantes ajustaron las características de las herramientas e instrumentos disponibles. En el presente trabajo se documenta cómo los estudiantes relacionan las experiencias en la construcción de la situación SMM usando una cámara de video, un cronómetro, cinta métrica y una computadora con acceso a Internet con un software de análisis de movimiento en video.

¿Consideran con precisión los parámetros a medir? Los estudiantes manifestaron la necesidad de tomar en consideración los parámetros de distancia y tiempo así como su correspondiente medición con una cinta métrica y un cronómetro digital. Para analizar los datos del problema utilizando el software Tracker se dispuso de una cámara de video. La representación del problema al aire libre les dio un mayor radio de acción para el diseño de la situación de modelación del movimiento. Al notar que el lente de la cámara a utilizar sólo contaba con un cierto ángulo de visión y una distancia máxima para capturar el movimiento, los estudiantes tradujeron a escala los datos del problema.

¿La disponibilidad de programas o software gratuito ayudan en el estudio y desarrollo del pensamiento matemático? El software de análisis de video, cuyas características son 1) por su portabilidad, de fácil manejo de la interfaz de usuario, 2) por su disponibilidad, de uso libre y gratuidad de descarga, ayudó en gran medida a tomar en cuenta varios elementos implícitos en el problema, la distancia del objeto, la trazabilidad, la introducción de datos, con el objeto de analizar los videos producto de la escenificación del problema. Estos elementos ayudaron a los estudiantes a enlazar las ideas en la discusión, argumentando sus decisiones como una evidencia de la evolución del pensamiento matemático en cada momento de la situación problema.

¿Cómo socializan los resultados y discuten las diferencias encontradas en el análisis del problema? El cómo, se hace presente en la reconstrucción de significados de distancia, tiempo, posición, trayectoria recorrida y una virtual imaginación, les ayudó a los estudiantes en el proceso de socializar los resultados, mientras que las diferencias se determinan con el análisis del problema a lápiz y papel en un primer momento para posteriormente trasladar la situación de movimiento en un contexto diferente, grabando los videos, portándolos a la computadora y analizando cada uno de ellos con el software Tracker.

Las funcionalidades de este software que se utilizan en las situaciones de modelación del movimiento son: la elección del punto cuya traza se analizará, el registro en tablas de los cambios en su trayectoria a través del tiempo, la obtención de tablas para la primera y segunda derivada y las graficación de estas tablas. Es el uso de estas funcionalidades y el análisis de las gráficas obtenidas el objeto de estudio de nuestra investigación relacionando tanto la resolución del problema con el diseño de nuevas situaciones de modelación del movimiento.

Identificar los nuevos elementos que se incorporen en el diseño permitirá esbozar una propuesta para ambientes de aprendizaje fuera del aula considerando una serie de herramientas informáticas e instrumentos para recabar datos y analizarlos a detalle.

Marco teórico

En la educación matemática se ha trabajado la incorporación de la modelación desde diferentes perspectivas teóricas como la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard 1990, citado en Ruth 2010) o la Socioepistemología (Cordero, 2008), entre otras. Un común denominador en la presentación de un diseño de situaciones que contrastan con las tareas comunes en los cursos destacando, por ejemplo, su potencial para vincular conocimientos de matemáticas con otras disciplinas y su aprovechamiento para dotar a la matemática de necesidad, utilidad y pertinencia en otros contextos.

Específicamente en esta comunicación retomamos los elementos epistemológicos y didácticos de la Categoría Modelación Graficación (Suárez, 2014) que aportan una base para proponer como actividades de construcción de conocimiento el estudio del movimiento a partir de herramientas tecnológicas que nos arrojan gráficas que son sujetas de análisis para la discusión y construcción de conocimientos. Suárez propone tres momentos de trabajo en las situaciones de modelación del movimiento: el primero donde el estudiante determina los elementos gráficos que tendrán un papel en la representación gráfica del movimiento. Un segundo momento donde construye argumentos que asocian los elementos gráficos a aspectos del movimiento y un tercer momento donde la situación varía y estos argumentos se ponen en funcionamiento. La estructura de la situación establece una trayectoria hipotética de construcción del conocimiento y que podría aportar elementos para el diseño de situaciones de aprendizaje en el aula.

Una perspectiva más amplia de la pertinencia de los diseños de actividades de aprendizaje para el aula la aporta el concepto de *currículo potencialmente aplicado* (Schmidt, 1997) que recientemente ha sido retomado por algunos investigadores para explicar las disfuncionalidades existentes en el sistema educativo debido a las distancias existentes entre lo propuesto en el currículo, la adecuación didáctica que hace el profesor, su traducción en actividades de aprendizaje y finalmente los aprendizajes logrados en los estudiantes. El currículo potencialmente aplicado vendría a situarse entre lo propuesto por la institución y lo planeado por el profesor y entre esta planeación y el desempeño de los estudiantes al aportar materiales (paquetes didácticos), planes (de seguimiento, capacitación y evaluación) y dispositivos organizacionales (redes y comunidades, con un marco de operación explícito) que concretan el currículo planeado desde una perspectiva de sistema y profesional.

Los elementos de la Modelación-Graficación con herramientas tecnológicas y del currículo potencialmente aplicado constituyen un marco nos ayuda a considerar, desde la perspectiva del docente, la reflexión de un diseño instruccional (Blando, 2012) en un ambiente de situaciones de aprendizaje que 1) involucre al estudiante en este proceso para que las mismas abarquen los diferentes estilos de aprendizaje, pero además teniendo a la mano una 2) planeación entendida como una actividad para sistematizar y organizar los elementos en los diferentes momentos. También cumplen con la serie de criterios didácticos que plantea (Parcerisa, 1999) para considerarlos didácticos en su diseño desde una estructura lógica de actividades así como estrategias didácticas encaminadas a la aplicación de perspectivas interdisciplinarias e integrales en contexto del aprendizaje autónomo entendido como una competencia profesional y de trabajo colaborativo.

Método

El plan general de trabajo tiene cinco etapas para desarrollarse a largo plazo I) Intercambio de experiencias y conformación de un marco común de diseño de materiales, II) Diseño de estrategias y materiales educativos, III) Pilotaje de los materiales con profesores, IV) Pilotaje de materiales con estudiantes y V) Reporte de resultados. En este trabajo reportamos lo realizado en la etapa del diseño de estrategias y materiales educativos (Etapa II), particularmente reportamos la experiencia contextualizada fuera del salón de clases nos ha permitido visualizar cómo los estudiantes diseñan la situación de modelación del movimiento en varias etapas 1) la discusión del problema, 2) la socialización de alternativas de solución, 3) el contraste con otros métodos realizados anteriormente para abordar el problema, 4) la materialización del problema y al final 5) la interpretación de los resultados.

La discusión del problema

Los estudiantes leyeron el artículo de investigación sobre modelación (Suárez y Cordero, 2010) donde conocieron las situaciones de modelación del movimiento, se familiarizaron con ejemplos realizados en el cuaderno de experimentos (Suárez, Cortés y Gamboa, 2014) y acordaron diseñar la situación a partir del problema denominado Valentina, he aquí el enunciado problema original:

> Valentina llegó temprano a su clase de música. A punto estaba de sentarse cuando advirtió que había olvidado su cuaderno en su refugio predilecto: la siempre cómoda y acogedora biblioteca. No podía perderse el comienzo de la clase, así que fue a la biblioteca, cogió su cuaderno y regresó a su asiento a tiempo para comenzar su, probablemente disfrutable, clase de música. Pero en el camino se encontró a su bienamado Juan y se detuvo a intercambiar algunas muestras de su muy auténtico cariño, lo que le llevó 4 minutos, pero de los largos, lo que le obligó a recuperar estos instantes, tan bien aprovechados, porque cuando salió del salón no previó la Epifanía. La biblioteca está en un punto diametralmente opuesto al salón de música en el patio circular, que tiene 500 metros de diámetro, de la escuela. Valentina tardó en total 9 minutos (Torres, 2005).

La socialización de alternativas de solución

Apropiándose de la estructura de las Situaciones de Modelación del Movimiento los estudiantes analizaron varias alternativas de solución lo que les permitió desarrollar de manera colaborativa, mostrar el problema y analizarlo con ayuda de un video. El trabajo previo a la introducción de la tecnología es necesario porque ayuda a establecer los elementos de forma de las gráficas que tendrán sentido para describir y modelar la situación de modelación del movimiento, como la elección de las escalas y determinar qué variable se grafica en qué eje.

El contraste con otros métodos

El mismo problema pero en una situación de modelación del movimiento usando sensores los estudiantes conocieron la simulación del movimiento frente a un sensor para obtener la gráfica estipulada en cada actividad de aprendizaje. Contrastaron lo realizado a lápiz y papel con el uso de tecnología. Esta contrastación de métodos y al trabajar en equipo, pudieron comentar sus dudas, revisando procedimientos diferentes para resolver la situación propuesta.

La materialización del problema

Familiarizados con los resultados, propusieron analizar el problema pero ahora usando un software que analiza movimiento y diseñaron la situación de modelación del movimiento. La idea parte de representar el movimiento en un video para ser analizado con el software Tracker (Tracker es un programa que permite analizar videos a partir del seguimiento de objetos y su posición en el espacio). Los jóvenes determinaron grabar la representación en un espacio libre de obstáculos ajustando la distancia máxima grabable.

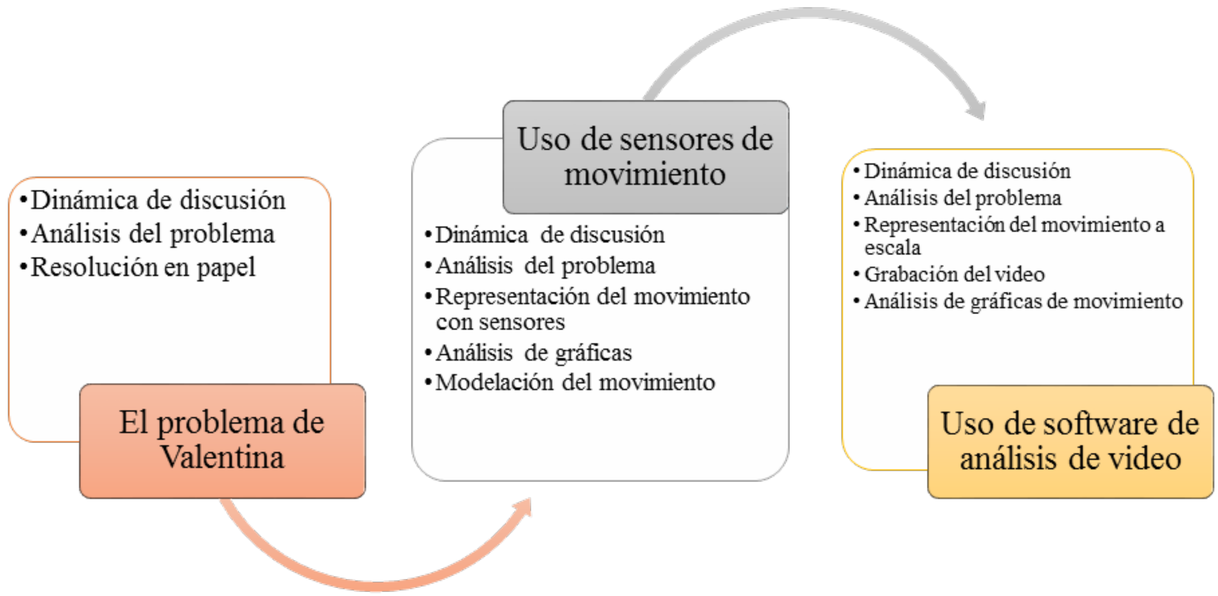
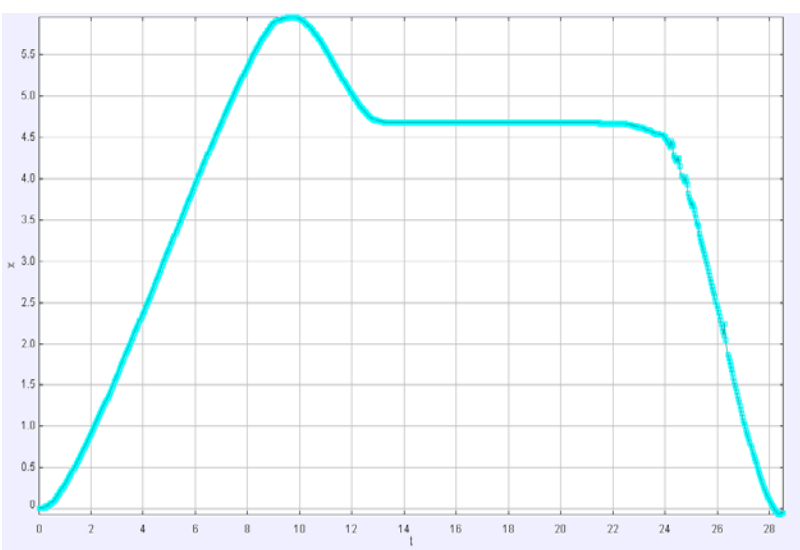


Figura 1. Adecuación de la actividad con el uso de tecnología**.**

Para la recreación del movimiento los estudiantes analizaron la escala para el manejo de distancias y control de tiempos en un espacio determinado.

Para usar el software de análisis de movimiento Tracker, se ajustó la simulación del movimiento en un espacio de 25 metros (de los 500 metros del enunciado original) y en 27 segundos (de los 9 minutos) por diversas razones, entre ellas podemos mencionar la distancia disponible, la apertura del lente de la cámara de video y un espacio al aire libre para no contar con obstáculos durante la grabación. La escala utilizada fue de un factor de 0.05 para la grabación del video en óptimas condiciones. El cronómetro utilizado fue el integrado a los teléfonos celulares.



lineas		✓
estilo		
eje	horiz	vert
row	t	x
0	0	1.642
1	0.033	1.602
2	0.067	1.662
3	0.1	1.625
4	0.133	1.734
5	0.167	1.709
6	0.2	2.578
7	0.234	2.687
8	0.267	3.491
9	0.3	3.652
10	0.334	4.352
11	0.367	4.715
12	0.4	5.704
13	0.434	6.659
14	0.467	7.828
15	0.5	8.642
16	0.534	9.461
17	0.567	9.839
18	0.601	11.255
19	0.634	12.724
20	0.667	14.602
21	0.701	15.87
22	0.734	17.515
23	0.767	19.577
24	0.801	20.525
25	0.834	22.62
26	0.868	23.799
27	0.901	25.365
28	0.934	26.942
29	0.968	28.692
30	1.001	30.162
31	1.034	31.786

Figura 2. Gráfica elaborada con el software Tracker representando la posición con respecto al tiempo.

El trabajo colaborativo les permitió una adecuada definición de roles al interior del equipo de trabajo (Valentina, dos tomadores de tiempo, camarógrafo).

Con la situación de modelación de movimiento definida, se realizaron varias pruebas de video para hacer los ajustes pertinentes en:

- Medición de la distancia con cinta métrica.
- Posición y altura de la cámara de video.
- Marcas de inicio y final.
- Los archivos de video resultantes analizados fueron en formato .avi para ser analizados con el software Tracker.

Resultados de la experiencia

Cada una de las cinco etapas aquí descritas, cuentan con características propias.

La discusión del problema se caracteriza por la conjunción de argumentos, por la interpretación de los datos y por la reconstrucción de significados matemáticos.

La socialización de alternativas de solución se caracteriza por el trabajo colaborativo, compartir dudas, inquietudes que evidencian el estilo de aprendizaje y las habilidades desarrolladas en la resolución de problemas.

El contraste con otros métodos se caracteriza por la exploración de otros niveles de conocimiento organizado lo que permite crear estrategias de solución, distintas y enriquecidas por la historia de la actividad.

La materialización del problema se caracteriza por a) la planeación de la actividad, b) la designación de actividades al interior del equipo, c) la escenificación del problema y d) la ejecución de las tareas.

En la etapa de interpretación de resultados resultó de mucha importancia las relaciones que los estudiantes establecieron entre las características de las gráficas, la situación de movimiento y las acciones que tuvieron que realizar con el software.

En la discusión del análisis de las gráficas resultantes, se invitó a reflexionar sobre el tipo de preguntas que llevan de la gráfica a su fundamento algebraico.

Conclusiones

El trabajo de los estudiantes con este problema de modelación del movimiento fue modélico en el sentido de que ellos pudieron identificar los tres contextos que intervienen en su diseño con tecnología: la situación de movimiento, su modelación a partir de sus gráficas y las representaciones que proporciona la tecnología. Con esta identificación los estudiantes propusieron a su vez nuevas actividades de modelación del movimiento, lo que nos permite a nosotros como investigadores estudiar cómo es el proceso de transferencia del conocimiento mismo de la investigación educativa para su aplicación en actividades y estrategias concretas en el salón de clases.

Agradecimientos

Este trabajo ha sido posible gracias al apoyo recibido en el Proyecto con registro SIP: 20151846 de la Secretaría de Investigación y Posgrado del IPN en México.

Un reconocimiento a los estudiantes del Programa Delfín - Programa Interinstitucional para el Fortalecimiento de la Investigación y el Posgrado del Pacífico por su tiempo, dedicación y disposición a la investigación.

Referencias y bibliografía

Artigue, M. (2013). Teaching Mathematics in the Digital Era: Challenges and Perspectives. En Y. Baldin (Ed.), *Anais do VI HTEM*. Universidade Federal de Sao Carlos.

Blando, M., (2012). Diseño Instruccional. Elemento clave en el desarrollo de cursos para Ambientes Virtuales de Aprendizaje. Memorias del Concurso de Buenas Prácticas Docente en el IPN. México: Instituto Politécnico Nacional.

Cordero, F. (2006). El uso de las gráficas en el discurso del cálculo escolar. Una visión socioepistemológica. Investigaciones sobre enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: un reporte Iberoamericano. Díaz de Santos-Comité Latinoamericano de Matemática Educativa. A. C. Págs., 265-286.

Cordero, F., Cen Chen, C., Suárez, L. (2010) Los funcionamientos y formas de las gráficas en los libros de texto: una práctica institucional en el bachillerato. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 13(2):187-214.

Parcerisa, A., (2001). Materiales curriculares. España: Graó.

Sandoval, I.T. y Moreno, L. (2012). Tecnología digital y cognición matemática: retos para la educación. *Horizontes pedagógicos, 14,*1, 21-29.

Schmidt, W.H., McKnight, C. C., Valverde, G. A., Houang, R. T., & Wiley, D. E. (1997). Many Visions, Many Aims, Volume 1: A Cross-National Investigation of Curricular Intentions in School Mathematics. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Suárez, L. (2000). El trabajo en equipo y la elaboración de reportes en un ambiente de resolución de problemas. Tesis de Maestría del DME-CINVESTAV-IPN.

Suárez, L. (2013) Protocolo del Proyecto Multidisciplinario. La innovación didáctica en el currículo potencialmente, centrada en la interdisciplinariedad, aplicado para las áreas de matemáticas, física, bioquímica, cultura financiera y comunicación. Registro Secretaria de Investigación y Posgrado No. 1571. Documento de trabajo IPN.

Suárez, L. (2014). Modelación-graficación para la matemática escolar. México: Díaz de Santos. Suárez, L. y Cordero, F. (2010). Modelación – graficación, una categoría para la matemática escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa,* 13(4), 319-333.

Suárez, L., Cortés, A. y Gamboa, J. O. (2014). Cuaderno de experimentos para la modelación gráfica en las matemáticas del bachillerato. En L. Suárez (Apéndice 1). Modelación-graficación para la matemática escolar. México: Díaz de Santos. 189-218.

Rodríguez, R. (2010). Aprendizaje y Enseñanza de la Modelación: el caso de las ecuaciones diferenciales. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 13 (4-I): 191-210.

Torres, A. (2005). La Modelación y las Gráficas en Situaciones de Movimiento con Tecnología. En J. Lezama, Sánchez, M. y Molina, G (Eds.). Acta Latinoamericana de Matemática Educativa, 18. CLAME, 645-650.

Experiência de Modelagem Matemática com alunos do ensino fundamental

Janaina de Ramos **Ziegler**
Centro Universitário Univates
Brasil
janarziegler@gmail.com
Márcia Jussara Hepp **Rehfeldt**
Centro Universitário Univates
Brasil
mrehfeld@univates.br
Ieda Maria **Giongo**
Centro Universitário Univates
Brasil
igiongo@univates.br

Resumo

O texto aqui apresentado advém de uma intervenção pedagógica realizada com estudantes do 6º ano do Ensino Fundamental de duas escolas no sul do Brasil, cujo objetivo foi examinar os resultados decorrentes da exploração de atividades envolvendo Modelagem Matemática e o tema esporte. Esta pesquisa, de cunho qualitativo, configurou-se como um estudo de caso, em que, os dados foram coletados por meio de diários de campo e filmagens das aulas. Durante o desenvolvimento das atividades foram construídas maquetes, desenhos ilustrativos, textos e cartazes, para os quais foi necessário o estudo de escalas, porcentagem e o valor do número π. Verificou-se que, apesar dos alunos terem escolhido o mesmo tema de interesse, os subtemas foram diferentes. Em uma escola, foi utilizado vôlei e futebol; na outra, além dessas modalidades abordaram o *skate* e a bicicleta.

Palavras chave: Modelagem Matemática, Ensino Fundamental, Esporte, Ensino.

Introdução

Este artigo relata resultados decorrentes de uma intervenção pedagógica realizada com alunos do 6º ano do Ensino Fundamental, de duas escolas localizadas na região sul do Brasil, mais especificamente nas cidades de Muçum e Lajeado. As atividades desenvolvidas com os educandos fazem parte da dissertação de mestrado, da primeira autora, a qual é bolsista do Programa Observatório da Educação denominado "Estratégias Metodológicas visando à Inovação e Reorganização Curricular no Campo da Educação Matemática no Ensino Fundamental", apoiado financeiramente pela CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior), aprovado no edital nº 049/2012/CAPES/INEP.

Este projeto, desenvolvido no Centro Universitário Univates, conta em sua formação com três professoras de Matemática da Instituição, seis de Escolas Públicas de Ensino Fundamental, três mestrandos do Programa de Pós-Graduação – Mestrado Profissional em Ensino de Ciências

Exatas - e seis bolsistas de graduação. Tem por objetivo propor estratégias metodológicas para melhorar o índice do IDEB (Índice de Desenvolvimento da Educação Básica) das escolas participantes do projeto, bem como promover ações que ensejam uma aproximação entre os índices alcançados pelo 5º e 9º anos do Ensino Fundamental. Com a intenção de melhorar o índice e reduzir a distância entre as notas obtidas no 5º e 9º anos, a equipe de pesquisadores do referido Observatório da Educação, pretende promover intervenções nas escolas parcerias, à luz de três tendências educacionais denominadas: Etnomatemática, Modelagem Matemática e Investigação Matemática. Destaca-se que estes temas foram escolhidos porque, em 2012, o grupo de professores pesquisadores, deste projeto, ministrou um curso de formação continuada, para professores dos Anos Finais do Ensino Fundamental, em que percebeu a necessidade de discussões e problematizações a respeito destas tendências. Neste curso, os participantes tinham pouco conhecimento de tais tendências educacionais, tais resultados "foram decisivos para a emergência de um projeto de pesquisa no âmbito do Observatório da Educação" (Quartieri, Giongo & Pernsoni, 2013, p. 847). A prática pedagógica, aqui apresentada, foi elaborada e desenvolvida utilizando a Modelagem Matemática como metodologia de ensino. Os dados foram coletados por meio de gravações em vídeo e apontamentos em um diário de campo das atividades realizadas pelos estudantes.

Neste contexto, o objetivo foi desenvolver uma proposta com foco na Modelagem Matemática identificando e explorando relações matemáticas existentes no tema esporte a partir do desenvolvimento de atividades. Destaca-se que o tema esporte foi escolhido pelos alunos. acredita-se que tal escolha se justifica pelo fato do Brasil ser sede, a partir de 2013, de eventos mundialmente conhecidos da população, entre eles: Copa das Confederações realizada em julho de 2013, Copa do Mundo de Futebol realizada em julho de 2014 e os Jogos Olímpicos que serão realizadas na Cidade do Rio de Janeiro em 2016.

Referencial Teórico

É grande o número de professores de matemática que relatam preocupação com o nível de envolvimento de seus alunos nas atividades efetuadas em sala de aula. Muitos tentam explorar novas formas de relacionar os conteúdos previstos para o ano letivo com assuntos que sejam interessantes para os educandos. Assim, durante a busca por metodologias diferenciadas e atrativas são seduzidos pela metodologia da Modelagem Matemática. Segundo Fernandes & Junior (2012, p. 28), esta pode promover o "[...] desenvolvimento do raciocínio lógico dedutivo, as habilidades mentais, o espírito exploratório investigativo, e a estabelecer uma conexão dos princípios matemáticos com áreas do conhecimento". Ademais, de acordo com Bassanezi (1999, p. 15):

> [...] a Modelagem Matemática utilizada como estratégia de ensino-aprendizagem é um dos caminhos a ser seguido para tornar um curso de matemática, em qualquer nível, mais atraente e agradável. Tal processo que consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos, resolvê-los e, então, interpretar suas soluções na linguagem do mundo real, é um processo dinâmico e atraente.

Biembengut & Hein (2011, p. 20), destacam que o uso da Modelagem Matemática em sala segue alguns procedimentos agrupados em três etapas identificadas como: "*Interação* – reconhecimento da situação-problema e familiarização; *Matematização* – formação e resolução do problema; e Modelo matemático – interpretação e validação". O primeiro consiste em uma exploração do tema a ser trabalhado. Este é realizado após uma listagem de questões que podem ser relacionadas ao assunto estudado. Na matematização são elaborados e resolvidos os problemas que tratam do tema em questão, assim como o desenvolvimento de saberes necessários para determinar o modelo matemático que melhor representa o problema. Assim, tanto aluno quanto educador mudam, "de uma situação de aulas expositivas seguidas de exercícios para situações que são essencialmente investigativas" (Almeida & Vertuan, 2014, p. 14).

Para isso, torna-se fundamental um professor que incentive o discente à busca por informações pertinentes ao problema em questão e também uma certa flexibilidade quanto a mudança de direção do tema de pesquisa. Isto torna-se evidente no excerto de Fernandes & Junior (2012, p. 28) ao acentuar

> Essa perspectiva [Modelagem Matemática] requer um professor atuante, criativo, dinâmico que atue como mediador na transição do conhecimento do senso comum em conhecimento científico matemático dentre outros, tendo o aluno como participante ativo do seu próprio processo de aprendizagem, desse modo pode ter uma visão crítica do meio ao qual pertence.

Uma vez que, essa metodologia "[...] visa propor soluções para problemas por meio de modelos matemáticos. O modelo matemático, neste caso, é o que 'dá forma' à solução do problema e a Modelagem Matemática é a 'atividade' de busca por esta solução" (Almeida, Tortola & Merli, 2012, p. 217). Na investigação encontra-se uma das características marcantes da modelagem, a externalização dos modelos mentais dos alunos (Vertuan, Borssoi & Almeida, 2013), ou seja, o entendimento dos estudantes suas estratégias, intuições e formas de pensar e agir frente à uma problemática. Em especial, "o diálogo entre os sujeitos, os registros escritos, são instrumentos necessários para a concretização da atividade" (ibidem, 2013, p. 70).

> Na Modelagem Matemática não existe o modelo "certo" ou "errado" ou modelo "verdadeiro" ou "falso"; existe o modelo "mais" ou "menos" refinado, e isto é muito diferente de estar "certo" ou "errado". Um modelo é mais refinado quando diz mais a respeito do objeto de estudo, é de predizer com maior exatidão, pois relaciona mais variáveis significativas do problema (Burak, 1992, p. 314).

Em muitos casos, segundo Brasil (1998), os discentes conseguem estabelecer relações entre o já estudado em matemática, ou em outras disciplinas, e o que é preciso para estabelecer o novo modelo para resolver a questão, por isso não se pode menosprezar o conhecimento adquirido pelos alunos.

Modelagem Matemática em sala de aula

Como a prática, aqui relatada, foi desenvolvida a partir da metodologia da Modelagem Matemática, primeiramente, precisava-se determinar o tema a ser explorado nas atividades a serem desenvolvidas com os alunos. Para isso, realizou-se uma pesquisa com os estudantes por meio do preenchimento de questionários. A partir dos dados destes questionários, foi possível determinar como tema de pesquisa, "o esporte". Segundo Bassanezi (2011, p. 46) "é muito importante que os temas sejam escolhidos pelos alunos que, desta forma, se sentirão co-responsáveis pelo processo de aprendizagem, tornando sua participação mais efetiva". Destaca-se que este tema foi manifestado em ambas às turmas, em que o projeto foi desenvolvido. Assim, teve-se o propósito de observar como os estudantes, das diferentes instituições de ensino, desenvolveriam as atividades propostas, a partir de um tema em comum. Estes alunos são oriundos de duas instituições de ensino que integram o grupo de escolas participantes do programa Observatório da Educação e estão localizadas em duas cidades do Vale do Taquari – Muçum e Lajeado - no estado do Rio Grande do Sul, Brasil.

Durante os encontros os alunos, divididos em grupos, foram orientados a desenvolver atividades ligadas ao esporte que haviam escolhido para pesquisa. Para isso, cada grupo recebeu um material disponibilizado, que fazia referência as modalidades vôlei[1] e futebol[2], já que estas foram as mais citadas pelos estudantes, durante as reuniões anteriores, no preenchimento dos questionários. Estes textos abordavam as regras de construção de ambientes para a prática destes esportes, ou seja, as normas para a construção de um estádio de futebol, as medidas de campo, arquibancada, vestiários, dentre outros. Além disso, descreviam como projetar uma quadra de vôlei e as regras de jogo. De posse dos materiais, as turmas foram informadas que teriam um tempo para explorá-los, a fim de escolher um item para ser investigado nas próximas aulas.

Por se tratar de um estudo qualitativo, optou-se por realizar a coleta de dados a partir dos preceitos de um estudo de caso. Já que o mesmo permite que sejam reunidas as qualidades gerais e significativas dos acontecimentos vivenciados, entre eles o desempenho escolar e a conduta de pessoas reunidas em pequenos grupos (Yin, 2010). A observação direta, para o autor, consiste em perceber comportamentos no decorrer de um tempo estimado, sendo que pode ser aplicada em sala de aula, já que é útil para levantar informações para complementar o estudo. Os artefatos físicos serão as fontes finais de evidências sobre a prática desenvolvida, servindo para comprovar o que foi realizado no estudo, atestando através de comprovações materiais como impressões de trabalhos.

Nesta pesquisa foram utilizadas gravações em áudio e vídeo, aplicação de questionários, assim como um diário de campo, a fim de documentar todos os encontros. Esses instrumentos possibilitaram a posterior análise de dados e permitiram realizar um relato, o mais fiel possível, das práticas pedagógicas elaboradas com os estudantes.

A seguir, apresentaremos o desenvolvimento das atividades em cada turma durante a intervenção pedagógica.

Em Muçum

A escola situada na cidade de Muçum oferece Ensino Fundamental e Ensino Médio Politécnico, nos turnos diurno e noturno, acolhendo 453 estudantes, provenientes dos diferentes bairros do município. Entre esses, 20 constituem a turma do 6º ano do Ensino Fundamental, turno da tarde, cujas idades variam entre 10 e 15 anos, dos quais, dois são repetentes. Para o desenvolvimento das atividades, a turma foi dividida em quatro grupos, para que assim pudessem manipular os textos e observar os assuntos contidos nos mesmos. No entanto, dois grupos demonstraram interesse em explorar outras modalidades esportivas. Dessa forma, no encontro seguinte foram proporcionados textos de outros esportes para a realização do estudo. Os temas escolhidos pelos grupos foram: a roda de uma bicicleta, manobras de *skate*, túnel de acesso ao campo de futebol e quadra de vôlei.

O grupo que preferiu analisar a roda de uma bicicleta justificou sua escolha pelo fato de ser uma das atividades físicas que mais gostavam de fazer. Desta forma, a partir dos novos textos[3]

[1] Disponível em: http://www.esefex.ensino.eb.br/download/Regras_Volei_2013-2016.pdf
[2] Disponível em: http://pt.fifa.com/mm/document/tournament/competition/01/37/17/76/p_sb2010_stadiumbook_ganz.pdf
[3] Textos disponíveis em: http://www.posdesign.com.br/artigos/dissertacao_suzi/02%20Cap%C3%ADtulo%202%20-%20Evolu%C3%A7%C3%A3o%20hist%C3%B3rica%20da%20bicicleta.pdf e

disponibilizados, sobre bicicleta, o grupo o explorou para determinar qual parte do objeto seria alvo do estudo. Após discutir sobre o que os textos apresentavam, elas acordaram em analisar com mais detalhes, a roda da bicicleta e seus componentes. A professora permitiu que as estudantes trouxessem uma bicicleta para a escola, para que, pudessem realizar as medidas pertinentes para o trabalho, como por exemplo, do comprimento dos raios e do pneu. Assim, após alguns questionamentos da pesquisadora, as estudantes, perceberam a relação existente entre o diâmetro e o comprimento da circunferência. Após algumas observações empíricas, as estudantes perceberam que o resultado da divisão do comprimento da circunferência pelo diâmetro resultava em uma constante que, conforme pesquisa realizada pelas alunas, pode ser representada pela letra grega π. Para demostrar para seus colegas o que surgiu da pesquisa realizada, as alunas produziram um texto, o qual foi lido na apresentação do grupo.

Outro grupo, formado apenas por meninos, escolheu o tema manobra de *skate*, pois adoram praticar este esporte quando estão com seus amigos, nos horários em que não estão em sala de aula. Assim, como no grupo anterior, foi necessário disponibilizar materiais diferenciados para que os mesmos pudessem dar continuidade ao seu trabalho. Depois da análise dos textos[4], os alunos decidiram escolher algumas manobras que seriam apresentadas para a turma. Para decidir quais manobras constariam no trabalho, os alunos foram encaminhados ao laboratório de informática da escola, no qual assistiram vídeos explicativos. A partir desse tema os alunos identificaram ângulos, uma vez que, a maioria das manobras está relacionada com o fato de girar o *skate* no ar, por isso alguns nomes são *Ollie*[5], *Ollie* 180º[6] e *No comply*[7]. Os alunos confeccionaram um cartaz explicativo das manobras que elencaram, juntamente com as medidas em graus que são necessárias para que as manobras sejam realizadas.

O terceiro grupo decidiu confeccionar um modelo representativo do túnel de acesso ao campo de futebol de um estádio. A escolha do mesmo surgiu após discussões e acordos firmados entre os membros. O grupo, mesmo gostando de futebol, demorou certo tempo para encontrar um tópico que todos tivessem interesse em explorar. Os alunos utilizaram o material cedido pela professora, para verificar as medidas que são solicitadas pela FIFA na construção deste espaço. Segundo este órgão, o túnel deve ter entre 4,5 m de comprimento, 6,0 m de largura e 6, 0 m de altura. Para a construção do modelo, os educandos empregaram o conceito de escala, uma vez que produziram uma miniatura do túnel. O grupo utilizou como referência a seguinte transformação: cada metro do tamanho real foi representado por três centímetros no modelo. Com isso, a representação da miniatura teve 18 cm de largura, 13,5 cm de comprimento e 18 cm de altura. Utilizaram para confecção do túnel: papelão, tinta, tesoura, cola e régua.

O último grupo optou por fazer a miniatura de uma quadra de vôlei, a partir das medidas oficiais, apresentadas no documento da Confederação Brasileira de Voleibol, disponibilizado pela professora. Segundo este arquivo, uma quadra de vôlei é um retângulo medindo 18 metros comprimento por 9 metros de largura, circundada por uma zona livre de, no mínimo, 3 metros de largura em todos os lados. Assim, como no grupo anterior, os educandos usaram os conceitos de

---

http://www.posdesign.com.br/artigos/dissertacao_suzi/04%20Cap%C3%ADtulo%204%20-%20Morfologia%20da%20bicicleta.pdf

[4] Textos disponíveis em: http://www.trackbikes.com.br/wp-content/uploads/2011/11/MANUAL-SKATE3.pdf e http://www.anpuhsp.org.br/sp/downloads/CD%20XVII/ST%20IX/Tony%20Honorato.pdf

[5] Manobra que consiste em tirar os dois eixos do chão, fazendo o skate saltar.

[6] Manobra que consiste em rodar o *skate* 180º abaixo dos seus pés.

[7] Manobra que consiste em rodar 180º juntamente com o *skate*.

escalas, representando cada metro da quadra por dois centímetros na maquete. Dessa forma, a representação teve 18 cm de largura por 36 cm de comprimento, além de 6 cm de zona livre em cada lado. Os alunos ainda representaram a rede e o poste de sustentação, tendo o cuidado de utilizar a mesma escala da quadra.

Os estudantes realizaram as atividades citadas no decorrer de quatro encontros, os quais compreenderam a exploração do material disponibilizado, a escolha do tema, a confecção das maquetes e cartazes, e a apresentação dos resultados encontrados pelos grupos para o restante da turma.

Em Lajeado

A instituição localizada no município de Lajeado atende 344 alunos, divididos entre Educação Infantil e Ensino Fundamental. A turma do 6º ano do Ensino Fundamental, turno da tarde, é composta por 26 estudantes com idades entre 11 e 12 anos. Do mesmo modo como a escola citada anteriormente, os estudantes foram divididos em grupos e convidados a explorar os materiais sobre vôlei e futebol. Os temas escolhidos foram os seguintes: sala de exame Antidoping em um estádio de futebol, confecção de uma quadra de futsal, confecção de um campo de futebol, violência nos estádios de futebol do Brasil e policiamento nos jogos, e estúdio de filmagem em estádio de futebol.

O encontro seguinte foi dedicado ao desenvolvimento dos conteúdos matemáticos, a partir dos assuntos elegidos pelos alunos. Estes, juntamente com a professora, exploraram possíveis conceitos matemáticos existentes nas diferentes temáticas escolhidas. O grupo que decidiu explorar a construção de uma sala para exame Antidoping em um estádio de futebol analisou as informações contidas no texto sobre futebol. Deparou-se com os seguintes dados: área mínima da sala 36 m^2, composta por, uma mesa, 4 cadeiras, uma pia com espelho e um telefone. Para isso, decidiram confeccionar uma ilustração da sala. No entanto, como o texto só tinha a medida da área total e não especificava quanto de largura e comprimento o ambiente deveria ter, o grupo definiu que sua ilustração representaria uma sala com 9 metros de comprimento e 4 metros de largura. Para confeccionar o desenho as alunas utilizaram uma escala de 3:100, ou seja, 3 centímetros na ilustração representava 100 centímetros do tamanho real da sala.

O segundo grupo dedicou-se a confeccionar uma quadra de futsal, mas essa escolha passou por uma longa conversa entre os componentes. Alguns manifestaram interesse em pesquisar sobre as cores das camisetas de cada país, mas outros não aceitavam essa proposta e defendiam que o grupo deveria trabalha o item telão, sua posição, tamanho e qualidade de imagem. No entanto, após algumas discussões e acordos, e estudando um pouco mais detalhadamente o material disponibilizado, os componentes desse grupo encontraram um assunto de interesse de todos. O grupo escolheu montar uma maquete de uma quadra de futsal. Esta por sua vez, deve possuir, conforme informado no texto, 40 m de comprimento e 20 m de largura, com 3 m de recuo atrás das linhas que demarcam a área de jogo. Como nos demais trabalhos, os alunos utilizaram o conceito de escalas para confeccionar a quadra de futsal. Os educandos decidiram que a escala de redução seria 1:100, ou seja, 1 centímetro na maquete representava 100 centímetros do tamanho real da quadra. Definido isso, o grupo optou em, primeiramente, fazer todos os cálculos necessários para construção da miniatura, para depois confeccioná-la (figura 1).

Figura 1. Maquete da quadra de futsal.

O terceiro grupo optou por confeccionar um campo de futebol. Verificaram que, segundo a FIFA, um campo de futebol, para que possa ser realizada uma partida oficial, deve ter 105 m de comprimento e 68 m de largura. No entanto, como a escolha do tema foi realizada no encontro anterior do desenvolvimento do trabalho, os alunos em pesquisas realizadas na internet, encontraram informações sobre as medidas de um campo de futebol que não eram as mesmas que constavam no material impresso e disponibilizado pela professora. Após analisar o material contido no *site*[8], e a pedido dos estudantes, permitiu-se que o usassem como base para o trabalho. Este apresentava como medidas mínimas de um campo, 45mx90m e máximo 90mx120m. Já que,

> Além da legitimidade da voz do professor no desenvolvimento de atividades de Modelagem, as interações entre aluno-aluno e professor-aluno, construídas neste contexto, também podem fazer com que outras vozes sejam legitimadas e tenham tanta relevância quanto a do professor, para cada aluno" (Braz & Kato, 2013, p. 2).

Os alunos, então, decidiram produzir desenhos representativos de um campo de futebol. Para elaborar as ilustrações, foi usado o conceito de escala. Em conjunto, decidiram que confeccionariam três campos, um com a medida máxima, um com a medida mínima e um intermediário. Para representar o maior, a escala utilizada pelos alunos foi 1:200, um centímetro no desenho representava 200 centímetros do tamanho real. Para a menor metragem a escala escolhida foi de 1:1000, um centímetro no desenho representava 1000 centímetros do tamanho real. Para realizar a confecção dos desenhos, os alunos, primeiramente, fizeram esboços como uma forma de presumir quais seriam as medidas necessárias para cada campo. Os alunos perceberam que não só as medidas de comprimento e de largura deveriam ser convertidas em escala, mas sim todos os demais elementos constantes no campo, como por exemplo, a grande e pequena área, o círculo central e as meias luas. Isto evidencia que, "[...] o ambiente de desenvolvimento de uma atividade de Modelagem pode ser considerado um espaço de interação social em que a palavra falada, o diálogo entre os sujeitos, os registros escritos, são instrumentos necessários para a concretização da atividade" (Vertuan *et al.*, 2013, p. 70).

O grupo 4, elegeu o tema violência nos estádios de futebol do Brasil e policiamento nos jogos. Para realizar o levantamento de dados, utilizaram a *internet* para obter a informações

[8] Disponível em: http://www-regras-do-futebol.f1cf.com.br/www-regras-do-futebol-04-regras-do-futebol-1-dimensoes-do-campo.html

desejadas. Diferentemente dos demais grupos, os estudantes, no decorrer de conversas, durante as primeiras atividades da intervenção, já manifestavam interesse em discutir a violência nos estádio de futebol. Problematizaram a seguinte situação: Qual deve ser o número de policiais nos estádios para as partidas de futebol? Como resultados foram produzidos textos e uma tabela explicativa sobre o número de policiais necessários para os jogos conforme o público presente.

O último grupo dedicou-se a confeccionar um estúdio de filmagem em estádio de futebol. Para isso produziram uma espécie de maquete em 3D que representava um estúdio de televisão, a partir das medidas apresentadas no texto disponibilizado pela professora. Este texto apresenta as seguintes recomendações: os estádios devem ter a disposição, pelo menos, três estúdios de televisão em partidas de grande importância. Estes por sua vez, precisam ter aproximadamente 25 m^2 de piso e 3 metros de altura, permitindo uma visão panorâmica do gramado. A confecção da maquete permitiu utilizar, como nos demais grupos o conceito de escala. O grupo produziu uma miniatura tridimensional de um estúdio, conforme visualizado na figura 2. Inicialmente, os estudantes realizaram os cálculos para determinar a proporção de redução, já que novamente foi preciso usar representações contendo escala. Após discussões, os estudantes optaram em fazer uma escala de 2:100, ou seja, dois centímetros na maquete representam 100 centímetros do tamanho real do estúdio. Portanto, na maquete o piso teve 100cm^2 e 6 cm de altura. Os educandos ainda representaram as janelas, as filmadoras e os apresentadores, tendo o cuidado com a escala de cada item.

Figura 2. Modelo tridimensional de um estúdio de Tv.

Nesta escola, as atividades foram desenvolvidas no decorrer de cinco encontros os quais permitiram aos alunos, explorar os temas escolhidos, elaborar os modelos representativos e socializar com o restante da turma os resultados obtidos.

Considerações

As atividades desenvolvidas com os alunos das turmas de 6º ano do Ensino Fundamental, a partir da Modelagem Matemática, como uma metodologia de ensino, unidas ao tema esporte, destacam algumas semelhanças, bem como diferenças quanto aos trabalhos elaborados/desenvolvidos pelos estudantes das diferentes instituições de ensino, aqui relatadas. A primeira semelhança foi o fato de ambas as turmas manifestarem interesse pelo mesmo tema - o esporte - e também em eleger as modalidades vôlei e futebol como suas preferidas. Notou-se que mesmo sendo desenvolvidos projetos diferentes em ambas as turmas, os alunos utilizaram conceitos de escalas para produzirem suas maquetes e ilustrações. Observou-se também a dificuldade de alguns grupos em decidir qual item dos textos disponibilizados seria o foco das atividades. Isso ficou evidente no grupo que construiu a quadra de futsal (Lajeado) e no grupo que confeccionou o túnel de acesso ao campo de futebol (Muçum).

Aliado a isso, verificou-se que a aprendizagem dos estudantes, não se dá isoladamente, isto é, sem possibilidade de interagir com seus colegas e professor. Neste processo, surgiram dúvidas e questionamentos, os quais precisavam da orientação do professor para serem solucionadas. Isso pode ser observado quando, o grupo que abordou a temática roda de uma bicicleta (Muçum), indagou sobre como poderiam mostrar a matemática envolvida neste tema, visto que, apenas tinham realizado medições dos raios e comprimento do pneu. Neste momento a professora interveio para indicar uma abordagem que possibilitasse significado aos apontamentos fornecidos pelas alunas, revelando a relação existente entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro. E também no grupo que confeccionou as ilustrações do campo de futebol, quando a professora perguntou se os demais itens do campo tais como, pequena área e grande área, por exemplo, deveriam acompanhar a transformação em escalas.

Esses fatos acordam com a afirmação de Bassanezi (1999, p. 13) “o desafio do professor, que toma o caminho da modelagem como método de ensino, é ajudar o aluno a compreender, construindo relações matemáticas significativas, cada etapa do processo”. E também como aponta Almeida & Vertuan (2014, p.15) “[...] em muitas situações, os alunos solicitam a participação do professor com bastante intensidade, não com a finalidade de sugerir ou indicar procedimentos, mas no sentido de opinar sobre e/ou validar seus procedimentos”.

Entre as diferenças observadas nas atividades realizadas, destaca-se a autonomia apresentada pelos alunos de Muçum ao questionarem a professora da necessidade de realizar um trabalho utilizando apenas os materiais disponibilizados em aula, o que não ocorreu com os estudantes da outra instituição. No entanto, nesta metodologia o professor precisa “manter um clima de liberdade, estimulando a participação, a descontração e a criatividade individual” (Biembengut & Hein, 2011, p. 21), e foi necessário disponibilizar outros materiais, demonstrando flexibilidade nas orientações da professora.

Outro item diferenciado foi à preocupação de um dos grupos em explorar a questão da violência nos estádios de futebol (Lajeado), um item que necessitou de uma abordagem diferente dos outros trabalhos desenvolvidos na turma. Este fato chamou a atenção, uma vez que, os demais grupos, em ambas as turmas, optaram por realizarem tarefas em que necessitavam da construção de um objeto como maquete e desenhos.

Entre os pontos positivos da realização da intervenção - em ambas as turmas - destaca-se a motivação dos alunos ao socializarem com os demais, suas descobertas e a matemática envolvida em seus trabalhos. Isso ficou evidente, por exemplo, quando os educandos que construíram uma maquete representativa do túnel de acesso ao campo de futebol (Muçum), relataram aos colegas que para realizar a construção foi necessário transformar as medidas do túnel original, em metros, para centímetros para poder fabricá-lo. E que isso em matemática, chama-se escala. De mesmo modo, os alunos que construíram a planta baixa de uma sala antidoping (Lajeado), relataram que necessitaram dos conceitos de escalas na confecção de seus desenhos. Segundo Biembengut & Hein (2011) uma das etapas de uma Modelagem Matemática é a apresentação dos resultados obtidos pelos alunos por meio da exposição oral.

No entanto, como em toda atividade desenvolvida com grupos de estudantes, nem todos os envolvidos colaboraram totalmente com as tarefas. Por exemplo, no grupo em que o foco foi à construção de uma maquete para o túnel de acesso ao campo de futebol (Muçum), os membros relataram que um dos participantes não se comprometeu totalmente na realização das tarefas. Talvez, isso tenha ocorrido, tendo em vista que este grupo encontrou dificuldades em determinar um assunto em que todos concordassem explorar. Problema também observado no grupo que construiu a maquete de um estúdio de televisão (Lajeado), quando um dos membros da equipe não quis, depois de certo ponto, auxiliar seus colegas, já que queria mudar de grupo. Em ambos os casos, as situações exigiram do professor uma postura de negociador entre os integrantes dos grupos para que pudessem dar continuidade aos trabalhos. Isso corrobora com Quartieri (2012, p. 176) quando aponta que a escolha do tema é "um "processo de negociação" entre professor e aluno, bem como entre aluno e aluno".

Pelos pontos anteriormente expostos, salientam-se as percepções gerais sobre o papel do professor no desenvolvimento de atividades realizadas a partir da metodologia da Modelagem Matemática. Foi perceptível que atuar a partir dessa metodologia de ensino exige do professor uma postura diferenciada. Durante essas aulas não foram resolvidos exercícios matemáticos comum, usando técnicas algébricas ou fórmulas prontas, mas foram desenvolvidas pesquisas pertinentes a itens escolhidos pelos estudantes. Assim, foram desenvolvidos assuntos diferenciados que necessitavam de resoluções diferenciadas, com o auxílio de conteúdos matemáticos. Cada grupo precisava elaborar, em conjunto, o modelo matemático que melhor representaria seu problema. Para isso lançaram mão da construção de maquetes, desenhos e cartazes. Já que, "Um modelo matemático pode ser escrito utilizando-se para isso diferentes sistemas de representação. Uma equação, uma tabela, um gráfico, são exemplos de representações que podem ser associadas aos modelos matemáticos". (Almeida, Silva & Vertuan, 2013, p. 14). Neste contexto, é importante que o professor seja apenas um orientador e o aluno um agente ativo dos processos de ensino e de aprendizagem.

Referências e bibliografia

Almeida, L. W., Silva, K. P., & Vertuan, R. E. (2013). *Modelagem matemática na educação básica*. 1. São Paulo: Contexto.

Almeida, L. M. W. , Tortola, E., & Merli, R. F. (2012). Modelagem Matemática – Com o que estamos lidando: modelos diferentes ou linguagens diferentes? *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, Canoas, 1*4*(2), 215-239. Recuperado em 12 maio, 2014, de http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/230/226.

Almeida, L. M. W., & Vertuan, R. E. (2014). Modelagem Matemática na Educação Matemática. In L. M. W. de Almeida, & K. A. P. da Silva (Orgs.), *Modelagem Matemática em Foco*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda.

Bassanezi, R. C. (1999). Modelagem Matemática Uma disciplina emergente nos programas de formação de professores. *Revista Biomatemática*, *9*, 9-22. Campinas: São Paulo. Recuperado em 4 abril, 2014, de http://www.ime.unicamp.br/~biomat/bio9art_1.pdf.

Bassanezi, R. C. (2011). *Ensino-aprendizagem com Modelagem Matemática: uma nova estratégia* (3ª ed.). São Paulo: Contexto.

Biembengut, M. S., & Hein, N. (2011). *Modelagem matemática no ensino* (5ª. ed.). São Paulo: Contexto.

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. (1998). *Parâmetros curriculares nacionais: matemática*. Brasília: MEC/SEF.

Braz, B. C., & Kato, L. A. (2013). Contribuições da modelagem matemática no processo de constituição de comunidades de prática locais. In *Anais do VIII da Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática* (pp. 1-15). Santa Maria, Brasil.

Burak, D. (1992). *Modelagem Matemática: ações e interações no processo de ensino-aprendizagem* (Tese de doutorado). Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil.

Fernandes, R. J. G., & Junior, G. S. (2012). Modelagem Matemática: um recurso pedagógico para o ensino de matemática. *Revista Práxis*, *8*, 21-29. Recuperado em 11 abril, 2014, de http://web.unifoa.edu.br/praxis/numeros/08/21-29.pdf.

Quartieri, M. T. (2012). *A Modelagem Matemática na escola básica: a mobilização do interesse do aluno e o privilegiamento da matemática escolar* (Tese de doutorado). Universidade do Vale do Rio dos Sinos, São Leopoldo, RS, Brasil.

Quartieri, M. T., Giongo, I. M., & Peransoni, A. M. (2013). Etnomatemática e formação continuada nos anos iniciais do ensino fundamental. In. *Anais do 7º Seminário de Educação e Leitura: Desafios e Criatividade* (pp. 839 – 849). Natal, Brasil, 11 a 14 de novembro de 2013. Recuperado em 4 dezembro, 2014, de http://www.seminarioeducacaoeleitura.com.br/documentos/ANAIS-FINAL.pdf

Vertuan, R. E., Borssoi, A. H., & Almeida, L. M. W. (2013). O papel da mediação e da intencionalidade em atividades de modelagem matemática. *Revista Eletrônica de Educação*, *7*(3), 63-80. Recuperado em 12 maio, 2014, de http://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/article/viewFile/851/292.

Yin, R. K. (2010). *Estudo de caso: planejamento e métodos* (4ª ed.). Porto Alegre: Bookman.

La Modelación Matemática y su función articuladora entre saberes en la formación de un ingeniero

Paula Andrea **Rendón-Mesa**
Universidad de Antioquia
Colombia
paula.rendon@udea.edu.co
Pedro Vicente **Esteban** Duarte
Universidad EAFIT
Colombia
pesteban@eafit.edu.co
Jhony Alexander **Villa-Ochoa**
Universidad de Antioquia
Colombia
jhony.villa@udea.edu.co

Resumen

Este artículo presenta avances de una investigación que estudia las maneras cómo la modelación matemática se articula a la formación de los futuros ingenieros de Diseño de Producto, en la Universidad EAFIT (Medellín, Colombia). Se analiza el uso que los estudiantes hacen de los modelos (matemáticos y no matemáticos) para dar cuenta de las relaciones entre los campos de conocimiento propios a su proceso formativo. Las producciones escritas evidencian que los estudiantes usan las matemáticas para la creación de objetos pero no para mejorar las condiciones de estos. En este sentido se propone la modelación matemática como una estrategia para reconocer las problemáticas del contexto y las necesidades de formación en su campo profesional, y articularlos con conocimientos matemáticos. Con esto se busca que la modelación matemática permita a los estudiantes de Ingeniería de Diseño de Producto reflexionar sobre los modelos y sus relaciones de representación.

Palabras clave: modelos, modelación matemática, ingeniería, geometrización.

Contextos y modelación en las matemáticas para la formación de ingenieros

En la literatura internacional se plantea un amplio debate frente al papel que tienen las matemáticas en el aula de clase de los estudiantes de ingeniería. Algunos investigadores reconocen esta área del saber cómo aspecto fundamental para desarrollar competencias que permitan a los estudiantes desempeñarse académica y laboralmente (Camarena, 2012; Córdoba, 2011; Mendible & Ortiz, 2003); otros han centrado la atención en cómo deben enseñarse en el nivel de formación profesional (Cardella, 2010) y otros tantos, han indagado por las visiones que los estudiantes poseen frente al rol que las matemáticas tienen en su proceso de aprendizaje (Craig, 2013).

El debate sobre los enfoques que deben permear la formación matemática, en la educación en ingeniería, continúa creciendo a medida que nuevas demandas siguen emergiendo para estos profesionales. Así por ejemplo, Sunthonkanokpong (2011) ha argumentado que los ingenieros del futuro han de ser aprendices a lo largo de la vida, poseer habilidades para delimitar y resolver problemas, tanto como para ponerlos en contextos socio-técnicos y operacionales. Este investigador también reconoce la necesidad de que tales profesionales posean altos estándares comunicativos, sean flexibles, dinámicos y lideren los procesos. Este tipo de necesidades de formación impone a la educación matemática desafíos en la enseñanza y el aprendizaje que permitan a los estudiantes desempeñarse en los diferentes contextos que le atribuye su futuro campo profesional. De esa manera, se espera que el futuro ingeniero pueda solucionar, diseñar y resolver problemas; y así ser productivo y creativo para modificar el entorno. En coherencia con los aspectos presentados, las matemáticas en ingeniería deben permitir establecer conexiones entre los aspectos propios del contenido disciplinar y la "realidad" inherente a su campo de acción profesional. Este tipo de conexiones exigen, de acuerdo con Reséndiz (2011), que los futuros profesionales integren sus saberes en diferentes contextos.

La vinculación de diversos contextos a los procesos educativos en matemáticas ha llamado la atención de algunos investigadores; en particular Masingila, Davidenko, & Prus-Wisniowska (1996) han puesto de relieve las características del aprendizaje de las matemáticas cuando se desarrolla en correspondencia con situaciones extraescolares y su diferencia cuando se hace al interior del aula de clase; por su parte, Greer (1997) ha llamado la atención frente al papel que tienen los contextos para reducir la brecha entre el conocimiento específico de un campo de formación y las matemáticas formales; de otro modo, Beswick (2011) ha puntualizado que a través de diferentes contextos se motiva e involucra a los estudiantes y se pone a prueba su capacidad para solucionar problemas reales. En relación con el estudio de contextos "reales" y las conexiones entre ellos y las matemáticas, la modelación matemática se convierte en una herramienta ampliamente defendida en la educación en ingeniería (Camarena, 2012; Cardella, 2010; Diefes-Dux, Zawojewski, Hjalmarson, & Cardella, 2012; Gainsburg, 2013).

En el campo de la ingeniería se ha reconocido como prácticas matemáticas, la modelación matemática y la capacidad de usar modelos (Cardella, 2008). De manera general, la modelación matemática puede entenderse como un proceso de obtención y validación de modelos con los cuales puede delimitarse un problema o fenómeno de la vida real, simplificarse o idealizarse; en ocasiones es posible llegar a matematizarlo o resolverlo interpretando datos para finalmente validarlo y confrontarlo con resultados de la realidad (Blum, Galbraith, Henn, & Niss, 2007; Villa-Ochoa, 2007). A pesar de ello, en la experiencia en Ingeniería de Diseño de Producto los estudiantes tienden a observar y analizar las formas presentes en la "realidad" dejando de lado las variables que generan otras fuentes de datos y otro tipo de modelos (Rendón-Mesa & Esteban, 2013; Rendón-Mesa, Esteban, & Villa-Ochoa, 2013).

Diferencias similares en la manera de construir modelos han sido reportadas por Gainsburg (2013), quien a partir de sus estudios con ingenieros de estructuras ha observado que los estudiantes de este tipo de ingeniería raramente se involucran en la construcción de modelos a través de la generalización o ajuste de curvas debido, en algunos casos, a la imposibilidad de acceder a los datos de los cuales se construyen los modelos. En lugar de ello, el futuro campo de acción de este tipo de ingenieros exige que los principales desafíos para estos estudiantes implica una comprensión profunda de fenómenos estructurales para simplificarlos o idealizarlos a través de la matematización.

Al igual que la experiencia reportada por Gainsburg (2013), los estudiantes de Ingeniería de Diseño de Producto, *grosso modo*, deben partir de un problema o idea acerca de un producto que probablemente no existe, y con base en ello, construir diseños que permitan atender ciertas necesidades derivadas del mercado y de la sociedad. Este proceso de construcción de un diseño involucra modelos matemáticos y no matemáticos. Tales prácticas hacen que las interacciones y usos de las matemáticas en la construcción de diseños de producto sean fuente de interés para la investigación en Educación Matemática y Educación en Ingeniería.

En correspondencia con lo anterior se viene desarrollando una investigación que estudia las maneras mediante las cuales la modelación matemática se articula a la formación de los futuros ingenieros de Diseño de Producto. Derivado de esta investigación se presenta este artículo, cuyo propósito es analizar cómo los modelos (matemáticos y no matemáticos) y la relación de representación que los estudiantes consolidan, posibilita un uso más reflexivo de las matemáticas y su vinculación con el campo de formación. Dicho análisis se realiza a partir de un episodio en el marco de una asignatura denominada Modelación Matemática. En este curso se observa que la representación se da de forma rígida, lo que impide abordar las relaciones espontáneas que pueden surgir entre los modelos y el fenómeno estudiado.

Modelos y modelación en educación matemática

Conforme se ha mencionado anteriormente, la modelación matemática considera conexiones entre dos dominios, uno de ellos el matemático y el otro, generalmente denominado, "mundo real". En ese sentido, cuando este tipo de procesos se lleva a la práctica en cursos de formación de estudiantes de ingeniería, es posible preguntarse por las interacciones entre las matemáticas y los conocimientos del campo de acción de un ingeniero. Esto sugiere que las matemáticas deben ser una herramienta para estudiar la "realidad" para que los futuros profesionales puedan estructurarla y matematizarla. Para lograr este propósito es necesario reconocer cuáles son las acciones que realizan los estudiantes, que se relacionan con los modelos que ellos construyen y el proceso de modelación matemática que da cuenta de la articulación entre los dos campos de conocimiento vinculados a la formación de un ingeniero, en este caso, de diseño de producto.

En general, cuando la matemática es aplicada a una situación extra-matemática, algún tipo de modelo matemático está involucrado explícita o implícitamente en ella (Blomhøj, 2004). Esta situación exige en el contexto educativo que los estudiantes reflexionen sobre los alcances y roles que tienen los modelos matemáticos frente a los fenómenos de los cuales emergen. A partir de la comprensión de Guerrero (2010) y Giere (1999), los modelos matemáticos pueden considerarse como estructuras, en ellos conviene reconocer los alcances, limitaciones y posibilidades que ofrecen frente a aquello que es modelado. Para ilustrar parte de estas relaciones se retoma un ejemplo (no matemático) de Giere (1999), en el que se ilustra la función representacional de un modelo. Este ejemplo también es presentado por Guerrero (2010, p. 176) en los siguientes términos:

i. El mapa no es una entidad lingüística, es un objeto físico.
ii. Usualmente los mapas no son pensados como instanciador (o proveedores de verdad) de una forma lingüística o ajustadores a una descripción.
iii. La relación de representación es tríadica: se utiliza (los usuarios) un objeto (el mapa) para representar otro objeto (la ciudad). En otras palabras, hay una relación de representación entre el objeto representado (la ciudad) y el objeto que representa

(el mapa), establecida y utilizada por los usuarios. Es en este sentido que se acostumbra a decir que el mapa es un modelo de la ciudad.

iv. El mapa representa a la ciudad en ciertos aspectos (no en todos) y con cierto grado (aproximación y no de igualdad).

Conforme se mencionó anteriormente, la noción de modelo en Giere (1999) no se agota en la construcción de una representación, sino que, más allá de ello, pone de relieve una relación tríadica entre el usuario (sujeto), el objeto que se modela y al objeto que modela; se establece entre los dos objetos una relación de representación. En el siguiente diagrama (*Figura 1*) se presenta una interpretación de esta relación.

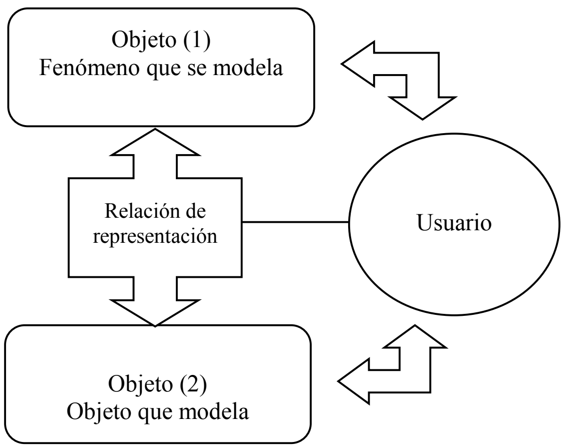


Figura 1. Representación de la relación tríadica en los modelos.

Los elementos anteriormente expuestos pueden ser de utilidad, para el análisis de algunas tareas relacionadas con el uso de modelos matemáticos en el aula de clase, en el marco de un proceso de modelación. En este sentido, el estudio de modelos y de la modelación debe reconocer no sólo la producción de representaciones matemáticas, sino también los aspectos con los cuales se vincula con el fenómeno o situación de la cual emerge. A partir de ese reconocimiento, las matemáticas utilizadas en el aula de clase deben estar en "diálogo" con el campo de formación de un ingeniero; esto, a su vez, exige una manera de implementar la modelación matemática en la cual los intereses y necesidades de los estudiantes adquieran un papel protagónico (Aravena, Caamaño, & Giménez, 2008; Borba & Villarreal, 2006; Borba, Meneghetti, & Hermini, 1997).

El estudio

En este apartado se presenta el lugar donde se ha llevado a cabo la investigación definido como el contexto; al mismo tiempo las fuentes que dieron origen a la discusión propuesta.

El contexto

En la Universidad EAFIT (Medellín, Colombia) se considera que en el proceso formativo de los estudiantes, propiamente de los de Ingeniería de Diseño de Producto, deben establecerse relaciones con situaciones cotidianas como una manera de construir y poner en práctica los conocimientos adquiridos en su proceso formativo. A partir del reconocimiento de las posibilidades que tiene la modelación matemática en el aula de clase, desde el 2006 se viene implementando una asignatura que busca "sensibilizar al estudiante mediante la observación y la construcción de objetos concretos, partiendo de la comprensión de conceptos matemáticos, para dotarlos de herramientas matemáticas básicas para que las integren a su entorno y las relacionen con elementos del diseño” (EAFIT, 2006). Entre los propósitos de la asignatura, se tiene el de permitir que el estudiante alcance una ampliación conceptual más allá de los desarrollos algorítmicos.

La asignatura mencionada propone acercar a los estudiantes al reconocimiento de las conceptualizaciones matemáticas que pueden existir en cualquier objeto creado a través de un proceso de modelación matemática. Dicho proceso incorpora tres fases: exploración, investigación guiada y proyecto final. La exploración permite a los estudiantes indagar sobre los conceptos matemáticos que surgen en diferentes escenarios de la “vida real”. En esta fase los estudiantes seleccionan imágenes y logran establecer asociaciones referidas a las formas y a las medidas. En la fase denominada investigación guiada, los estudiantes definen una propuesta creativa que vincula aspectos conceptuales de la matemática y el diseño con el ánimo de consolidar un modelo de su interés. En el proyecto final, los estudiantes construyen y validan el modelo con expertos en el tema.

En las fases descritas anteriormente se pretende reconocer cómo las producciones de los estudiantes vinculan componentes de Ingeniería de Diseño de Producto y de matemáticas, ellos generan diálogos y relaciones que posibilitan fortalecer el proceso de creación del diseño. Sin embargo, en algunas de las producciones de los estudiantes se percibe que los diseños tienen un componente geométrico, relacionado con los cursos de dibujo que se encuentran en su currículo, pero omiten relaciones matemáticas como las medidas, el costo, el tipo de materiales, que de alguna manera deben ser consideradas para lograr consolidar la propuesta definitiva de diseño. Esta situación permite reconocer que los conceptos matemáticos y el conocimiento propio del área de diseño, son involucrados resumidamente y de forma inconexa, lo que en ocasiones impide que los estudiantes alcancen a desarrollar la idea propuesta.

De la anterior situación, se reconoce que la modelación matemática puede ayudar a articular el conocimiento matemático con el propio del área de formación del Ingeniero de Diseño de Producto, que es una de las exigencias actuales en el sector educativo y social. En Rendón-Mesa y Esteban (2013) se plantea la necesidad de que un saber específico sea aplicado a un contexto, generando la reflexión en torno a los problemas “reales”, puesto que ellos ayudan a los estudiantes a hacer conexiones entre las matemáticas y “la realidad” usando los conceptos matemáticos cuándo y cómo es requerido.

Recolección y análisis de los datos

Los datos se obtuvieron de las producciones escritas de un grupo de estudiantes desarrolladas durante las fases descritas anteriormente, que componen la asignatura. Dichas producciones se analizaron con el ánimo de reconocer las relaciones entre el estudiante (sujeto-usuario), el objeto que se modela (imágenes de objetos referentes) y al objeto que modela (diseño a escala y expresiones matemáticas). En un primer momento se indagó por el uso de las matemáticas en la situación de diseño y, en segunda instancia, se analizó la matematización del diseño creado. El análisis está en correspondencia con la noción de modelo de Giere (1999), que posibilitó determinar los alcances, limitaciones y demás relaciones encontradas en este proceso.

Resultados

En la *fase de exploración* uno de los grupos seleccionó, entre muchas otras imágenes, una lámpara. En el documento aportado por el equipo se describe la lámpara como “*un objeto* *constituido por una esfera central y una base cónica pero truncada".* Esta descripción pone en evidencia el uso de algunos términos específicos de la geometría, pero, que en primera instancia, parecen atender más a los aspectos estéticos de la forma que al uso y la funcionalidad de los objetos. El énfasis en las formas geométricas es una primera aproximación que, en general, los estudiantes hacen para representar el objeto de diseño a través de un modelo matemático. Tal énfasis parece estar en coherencia con la naturaleza geométrica de los objetos de estudio de esta rama de la ingeniería.

Antes de consolidar el modelo a escala de la lámpara, el grupo realizó una descomposición geométrica del objeto a diseñar. En diseño, a esta descomposición se le denomina la *geometrización* (Velásquez, 2007) y se considera como el proceso de trasladar la propuesta a formas geométricas, en ese proceso se establecen relaciones entre los espacios y las figuras que componen el diseño, para definir un conjunto de ellas que consoliden el producto final. Los estudiantes realizaron este proceso (*Figura 2*) e indicaron cada una de las formas que componen el objeto, definieron sus medidas y dimensiones para calcular el área y el volumen respectivo.

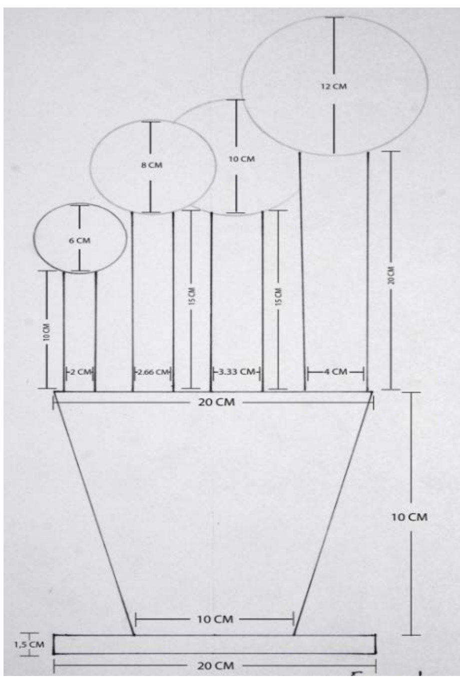


Figura 2. Geometrización del diseño elaborado por el grupo de estudiantes.

Para la *fase de investigación guiada*, el equipo de trabajo creó el prototipo de una lámpara y un nuevo diseño. Los estudiantes formularon su iniciativa de la siguiente forma: *generar un sistema de iluminación consolidado por esferas de diferentes tamaños y alturas que representen los planetas y el sol como nuestro sistema solar. La idea de las diferentes alturas es para que el consumidor pueda hacer uso de diferentes intensidades de luz, variando las alturas, por ejemplo si requiere luz fuerte en un punto específico, usará una esfera de altura baja, para iluminar espacios un poco más amplios la luz más alta y así sucesivamente. La base será en forma de cono y de color negro simulando un agujero negro.*

Particularmente en este diseño, los estudiantes reconocieron que la forma principal es la esfera, la cual se presenta en el diseño de diferentes tamaños, por tanto tiene radios distintos, obteniendo volúmenes diferentes. Involucran cilindros de diferentes diámetros y alturas para tener mayor funcionalidad y un cono, en este caso truncado; esa figura cumple el papel de contenedor y le permite estabilidad al objeto. Con la descripción dada por el grupo se reconocen modelos que se plasman en imágenes reconocibles; además, se observa que la matematización está asociada al reconocimiento de figuras geométricas, es decir, está relacionada con las formas que constituyen el objeto físico que responden a una imagen y no a una necesidad misma del objeto. Esta situación permite identificar que los estudiantes hacen uso de las figuras geométricas como objetos que representan las formas de los productos, sin que ello implique el reconocimiento del porqué de las formas asociadas con una necesidad o funcionalidad que el diseño construido debe satisfacer.

Para el *proyecto final,* los estudiantes consolidaron la idea formulada en un modelo físico (*Figura 3*) y, a partir de herramientas propias del diseño y la matemática definieron el producto. Para reconocer que las formas son proporcionales entre sí, los estudiantes calcularon el volumen de los cuerpos (Tabla 1) y establecieron que al aumentar la base debería aumentar el volumen del cono truncado y, del mismo modo, al aumentar las alturas de cada cilindro aumentaría el volumen de las esferas.

Figura 3. Modelo de la fase del proyecto final.

Tabla 1.
Cálculos realizados por los estudiantes

VOLUMEN DE LAS ESFERAS	VOLUMEN DE LOS CILINDROS	VOLUMEN DEL CONO TRUNCADO
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$	$V = \pi * r^2 * h$ $V_{base} = \pi * (10)^2 * 1{,}5$ $V_{base} = 471{,}238 cm^3$	$V = \frac{4}{3}\pi * h(R^2 + r^2 + Rr)$
$V_1 = \frac{4}{3}\pi(6)^3$ $V_1 = 904{,}778\ cm^3$	$V_1 = \pi * (2)^2 * 20$ $V_1 = 251{,}32 cm^3$	$V = \frac{4}{3}\pi * 10(10^2 + 5^2 + 10 * 5)$ $V = \frac{4}{3}\pi * 10(175)$ $V = 7.330{,}382 cm^3$
$V_2 = \frac{4}{3}\pi(5)^3$ $V_2 = 523{,}598\ cm^3$	$V_2 = \pi * (1{,}665)^2 * 15$ $V_2 = 130{,}638 cm^3$	
$V_3 = \frac{4}{3}\pi(4)^3$ $V_3 = 268{,}082\ cm^3$	$V_3 = \pi * (1{,}33)^2 * 15$ $V_3 = 83{,}357 cm^3$	
$V_4 = \frac{4}{3}\pi(3)^3$ $V_4 = 113{,}097\ cm^3$	$V_4 = \pi * (1)^2 * 10$ $V_4 = 31{,}415 cm^3$	

Al analizar los procesos realizados por los estudiantes se puede reconocer la manera en que las matemáticas son utilizadas por ellos y la comprensión lograda sobre los conceptos implicados en el proceso. Esto se ve reflejado en la forma en que describen el diseño, ya que utilizan algunos conceptos matemáticos y no matemáticos para consolidar el modelo y procedimientos asociados a la *geometrización.* Estos elementos conceptuales permiten al estudiante describir el objeto creado, puesto reconocen las proporciones entre las formas, los patrones de crecimiento y otras relaciones involucradas en el objeto terminado. A pesar de ello, la manera en que se presenta la información da cuenta de que los estudiantes utilizan las matemáticas para la descripción del objeto creado, pero no para establecer relaciones sobre cómo ellas afectan o posibilitan mejoras en el diseño del artefacto, en este caso una lámpara.

Discusión y conclusiones

Conforme se mencionó anteriormente, los modelos (entre ellos los matemáticos) involucran un sujeto y dos objetos (el que se modela y el que modela), los cuales a su vez están vinculados por una relación de representación. Explícitamente en el proceso formativo del Ingeniero de Diseño de Producto, el sujeto se reconoce como un estudiante, un objeto está asociado con aquello que se pretende diseñar y el otro con las formas usadas para representar el diseño (modelo a escala y modelos matemáticos).

La relación de representación está mediada por las maneras en que el usuario pone en diálogo estos dos objetos. Sin embargo, los datos presentados anteriormente, ponen en evidencia que la relación de representación no es lo suficientemente clara para dar cuenta de las necesidades que se pretenden atender a partir del objeto representado. En particular, los datos muestran que aunque las formas geométricas hacen explícita la materialización del diseño, las relaciones de representación no están en correspondencia con otras variables como: el costo, el uso de materiales, la luminosidad, el peso, entre otros. Tal situación implica que los estudiantes deben generar reflexiones frente al modelo y sus posibles usos.

Para un Ingeniero de Diseño de Producto las formas y las dimensiones son componentes fundamentales que se integran al conjunto de conocimientos geométricos. Según Velásquez (2007), el proceso de geometrización se considera como una herramienta de diseño que permite el control de la forma del producto para obtener una composición proporcionada. Este proceso establece las dimensiones, los contornos y ajusta el modelo no matemático para dar coherencia formal por medio de patrones de regularidad. Sin embargo, las producciones analizadas en este documento, ponen en evidencia que existen estudiantes que cuando inician su proceso de formación como Ingenieros de Diseño de Producto parecen centrarse en el componente estético del diseño y dejan de lado aspectos de tipo analítico en relación con el reconocimiento de variables, cantidades y otras herramientas matemáticas que podrían enriquecer la formulación del mismo.

Como se ha puesto en evidencia, la articulación entre los conocimientos matemáticos y específicos de la Ingeniería de Diseño de Producto no es automática, ni se deriva de manera directa del estudio de fenómenos elegidos por los estudiantes. Este tipo de situaciones sugieren que cuando se implementa la modelación matemática se debe propiciar un ambiente en el que se invite a la reflexión y se problematice acerca de la utilidad de las formas y los objetos matemáticos con relación a los objetos a diseñar. El análisis del episodio da cuenta de cómo los estudiantes, aunque se relacionan con un objeto “real” no establecen relaciones de representación que articulen la matemática y el diseño.

De acuerdo con la idea de modelo expuesta en la *Figura 1*, se puede plantear que no hay una relación explícita entre el objeto matemático y el objeto modelado que permita reconocer las posibilidades que la matemática ofrece en el estudio de fenómenos o situaciones. En ese sentido, se abre la necesidad de investigar, en un ambiente de modelación matemática, la relación de representación creada por el sujeto (grupo de estudiantes), siendo considerada de manera interdependiente de las demás relaciones existentes entre el sujeto, el objeto matemático y el fenómeno estudiado.

Indagar por la modelación matemática como un ambiente en el que se articulan los conocimientos propios del campo de formación de un ingeniero (y quizás de otros profesionales) y las matemáticas, así como una herramienta que armoniza con las necesidades de formación de este cierto tipo de profesionales, implica no agotar la modelación a la producción de representaciones matemáticas, sino que exige el reconocimiento de los aspectos que los sujetos determinan como fundante para la consolidación del modelo lo cual, a su vez, implica observar las dinámicas que se presentan entre los objetos y los sujetos descritos en la Figura 1. De otro modo, se hace necesario continuar indagando por las relaciones que se establecen entre los diferentes modelos (matemáticos y no matemáticos) que emergen en la situación pero que son interdependientes como se describe en este documento.

Lo anterior abre caminos de investigación, tanto para la Educación Matemática como para la Educación en Ingeniería, puesto que permitiría entender las relaciones de representación a partir de la modelación matemática. Dichas relaciones ayudarían a los estudiantes a comprender que este proceso no es estable sino que surge de la reflexión del sujeto al vincularse con los objetos reales y sus relaciones matemáticas.

Referencias y bibliografía

Aravena, M., Caamaño, C., & Giménez, J. (2008). Modelos matemáticos a través de proyectos. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa-Relime*, *11*(1), 49–92.

Beswick, K. (2011). Putting context in context: an examination of the evidence for the benefits of “contextualised” tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *9*(2), 367–390.

Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling–a theory for practice. *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics*, 145–160.

Blum, W., Galbraith, P., Henn, H., & Niss, M. (Eds.). (2007). *Modelling and Applications in Mathematics Education - The 14th ICMI Study* (Vol. 10). New York: Springer. Revisado http://www.springer.com/education+%26+language/mathematics+education/book/978-0-387-29820-7

Borba, M. C., & Villarreal, M. E. (2006). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: Information and Communication Technologies, Modeling, Visualization and Experimentation*. New York: Springer.

Borba, M., Meneghetti, R., & Hermini, H. (1997). Modelagem, calculadora gráfica e interdisciplinariedade na sala de aula de um curso de ciências biológicas. *Educação Matemática Da SBEM-SP*, *17*(3), 63–70.

Camarena, P. (2012). La modelación matemática en la formación del ingeniero. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência E Tecnologia*, *5*(3), 1–10.

Cardella, M. (2008). Which mathematics should we teach engineering students? An empirically grounded case for a broad notion of mathematical thinking. *Teaching Mathematics and Its Applications*, *27*(3), 150–159.

Cardella, M. (2010). Mathematical Modeling in Engineering Design Projects. In P. L. Galbraith, C. R. Haines, & A. Hurford (Eds.), *Modeling Students' Mathematical Modeling Competencies* (pp. 87–98). Springer US.

Córdoba, F. (2011). *La modelación en Matemática Educativa: una práctica para el trabajo de aula en ingeniería* (Tesis de maestría no publicada). Centro de Investigación en ciencia aplicada y tecnología avanzada IPN, México. Revisado de http://www.repositoriodigital.ipn.mx/handle/123456789/11708

Craig, T. (2013). Conceptions of mathematics and student identity: implications for engineering education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *44*(7), 1020–1029.

Diefes-Dux, H. A., Zawojewski, J. S., Hjalmarson, M. A., & Cardella, M. E. (2012). A Framework for Analyzing Feedback in a Formative Assessment System for Mathematical Modeling Problems. *Journal of Engineering Education*, *101*(2), 375–406.

EAFIT, U. (2006). Programa de Modelación Matemática. Revisado de http://www.eafit.edu.co/programas-academicos/pregrados/ingenieria-diseno-producto/acerca-programa/Paginas/que-es-idp.aspx#.U5m5lPmSx2A

Gainsburg, J. (2013). Learning to model in engineering. *Mathematical Thinking and Learning*, *15*(4), 259–290.

Giere, R. N. (1999). Using Models to Represent Reality. In L. Magnani, N. J. Nersessian, & P. Thagard (Eds.), *Model-Based Reasoning in Scientific Discovery* (pp. 41–57). New York: Springer US. Revisado de http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4615-4813-3_3

Greer, B. (1997). Modelling reality in mathematics classrooms: The case of word problems. *Learning and Instruction*, *7*(4), 293–307. doi:10.1016/S0959-4752(97)00006-6

Guerrero, G. (2010). La noción de modelo en el enfoque semántico de las teorías. *Praxis Filosófica*, (31), 169–185.

Masingila, J. O., Davidenko, S., & Prus-Wisniowska, E. (1996). Mathematics learning and practice in and out of school: A framework for connecting these experiences. *Educational Studies in Mathematics*, *31*(1-2), 175–200. doi:10.1007/BF00143931

Mendible, A., & Ortiz, J. (2003). Modelización Matemática en la Formación de Ingenieros. La Importancia del Contexto. *Enseñanza de La Matemática*, *12-16*, 133–150.

Rendón-Mesa, P., & Esteban, P. (2013). La modelación matemática en la Ingeniería de diseño. In Y. Morales & A. Ramirez (Eds.), *Memorias del I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe*. República Dominicana: REDUMATE-PUCMM. Revisado de http://www.centroedumatematica.com/memorias-icemacyc/387-483-1-DR.pdf

Rendón-Mesa, P., Esteban, P., & Villa-Ochoa, J. (2013). La modelación matemática en la ingeniería. *Revista Científica*, *Especial* (Educación Matemática). Revisado de http://revistas.udistrital.edu.co/ojs/index.php/revcie/article/view/4673

Reséndiz, D. (2011). *El rompecabezas de la ingeniería: Porqué y cómo se transforma el mundo*. Fondo de Cultura Económica.

Sunthonkanokpong, W. (2011). Future global visions of engineering education. *Procedia Engineering*, *8*, 160–164.

Velásquez, A. (2007). Geometrización. Memorias del curso Proyecto VI. Colombia: Universidad EAFIT.

Villa-Ochoa, J. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo. *Tecno Lógicas*, *19*, 63–85.

La Modelación Matemática: una experiencia en la economía familiar

Jonathan **Sánchez-Cardona**
Universidad de Antioquia
Colombia
jonathan.sanchezc@udea.edu.co
Angie Vanessa **Llano-Zapata**
Universidad de Antioquia
Colombia
angie.llano@udea.edu.co
Luis Daniel **Osorio-Franco**
Universidad de Antioquia
Colombia
daniel.osoriof@udea.edu.co
Paula Andrea **Rendón-Mesa**
Universidad de Antioquia
Colombia
paula.rendon@udea.edu.co

Resumen

En este artículo se analiza una experiencia en la que participa un conjunto de futuros profesores de matemáticas, quienes se enfrentan a procesos de modelación matemática en los que estudian algunos fenómenos de la economía familiar. Los datos fueron obtenidos de las producciones escritas por los participantes y de una sesión oral en la que socializaron los resultados de sus proyectos con los demás estudiantes. Los resultados del análisis de la experiencia muestran que cuando se crean espacios en los que los futuros profesores puedan vivenciar procesos de modelación en los que toman decisiones frente al fenómeno a estudiar, ellos logran construir reflexiones sobre el rol de la matemática en la sociedad, en su lectura y visión del mundo que de alguna manera posibilita posturas críticas y reflexivas acerca de las prácticas cotidianas.

Palabras clave: modelación matemática, prácticas cotidianas, economía familiar.

Las matemáticas en las prácticas cotidianas

Las matemáticas han estado presentes en diversidad de contextos y prácticas sociales, muestra de ellos es que la humanidad desarrolló la ciencia por medio de teorías adecuadas para intentar entender la naturaleza y las utiliza para tomar decisiones y actuar correctamente; en este sentido, se reafirma la importancia de las matemáticas en las actuaciones del hombre y en sus maneras de entender e interpretar los diferentes fenómenos que le rodean (Bassanezi, 2002).

Sin importar el grado de escolaridad de una persona, es común que se utilice, no siempre de manera explícita, conocimientos básicos de matemáticas en el momento de tomar decisiones frente a algunas de sus prácticas cotidianas. De este modo, como lo enuncia Barbosa (2003), las aplicaciones de las matemáticas están presentes en la sociedad y tienen implicaciones en la vida de las personas, tanto en el campo de la ciencia como en el mundo del trabajo e incluso en las tareas cotidianas; en todas esas actividades las matemáticas asume un papel vital, en ocasiones, como mediadoras en la toma de decisiones.

Cuando a las prácticas cotidianas se les otorga un carácter fundamental dentro de la actividad matemática escolar, se hace necesario develar de qué manera las matemáticas actúan en ellas y, por tanto, resulta fundamental una reflexión, análisis y validación de las interpretaciones que, a través de las matemáticas pueden producirse. Esas consideraciones frente a las relaciones entre matemáticas y prácticas cotidianas hace que la atención también se centre en los aspectos que fundamentan la *toma de decisiones* que en ocasiones parece corresponder a la experiencia acumulada y reflexionada por los sujetos implicados en ellas; sin embargo, en otras ocasiones, puede fundamentarse en miradas *ingenuas* frente a los fenómenos involucrados en las prácticas. En cualquier caso, la matemática escolar debería ofrecer miradas más informadas que argumenten la toma de decisiones.

En prácticas cotidianas como la economía del hogar se encuentran situaciones que demandan un análisis detallado sobre el manejo óptimo del dinero, se toman decisiones frente a la manera en que se deben llevar a efecto ciertas rutinas o frente al tipo de producto que se deben consumir. En este sentido, el aula de clase puede convertirse en un espacio para la reflexión y brindar la oportunidad de promover posturas críticas frente a los fenómenos involucrados en ese contexto. A su vez, los estudiantes pueden reconocer la necesidad de variables y condiciones que permitan direccionar los planteamientos para mayor beneficio, plantear y validar conjeturas y crear espacios para el reconocimiento del papel que las matemáticas cumplen.

Múltiples reflexiones sobre las posibilidades que ofrecen los contextos cercanos a los estudiantes han sido develadas en la literatura. Por ejemplo, el estudio de Muñoz, Londoño, Jaramillo y Villa-Ochoa (2014) sugiere que cuando se reconocen los contextos auténticos de los estudiantes como insumos para desarrollar actividad matemática escolar, no solo hay participación y empoderamiento en aspectos como la toma de datos, producción de modelos y significados, sino que también se presenta una mayor comprensión de los fenómenos asociados al contexto mencionado. Estos investigadores argumentan que el papel del contexto no es neutro cuando se modela matemáticamente sino que por el contrario puede articularse a las matemáticas escolares a través de un proceso de producción de modelos.

La utilización de las matemáticas en contextos cotidianos y cercanos puede verse reflejada en la modelación matemática, puesto que ella posibilita la solución de problemas de la "realidad" e interpretarlas en un lenguaje cotidiano. En este sentido la modelación matemática puede ser entendida como:

> […] el estudio de fenómenos o situaciones que pueden surgir tanto desde los contextos cotidianos, sociales y culturales de los estudiantes como de otras ciencias o disciplinas académicas. Dicho proceso de estudio involucra el uso y la construcción de modelos y otras herramientas matemáticas con los cuales puede ofrecerse una compresión del fenómeno y resolver el problema. (Villa-Ochoa, 2010, p. 9)

Así, la modelación matemática permite simplificar las variables que intervienen en la situación, creando modelos matemáticos que generan conclusiones y permiten validar la decisión tomada. En este sentido Villa-Ochoa, Bustamante y Berrio, (2010) plantean que:

> De modo general, la modelación puede surgir de un problema o situación del mundo real lo cual demanda actividades de simplificación y estructuración buscando una delimitación y precisión de la situación o problema. Con la recolección de datos, se provee más información sobre la situación y se sugiere el tipo de modelo matemático que puede ser apropiado para direccionar el problema del mundo real" (p.2).

Asumiendo que la modelación matemática puede aportar a la solución de un problema del contexto cercano y a la comprensión y estudio de prácticas cotidianas, se reconoció la necesidad de indagar por problemáticas o eventos propios que pudieran ser analizados detalladamente, para dar cuenta del papel que juega la matemática en la toma de decisiones o reflexiones sobre las prácticas cotidianas. Así, un grupo de futuros profesores indagó por las problemáticas relacionadas con la economía familiar, donde las concepciones propias fundamentaban las decisiones asociadas a ellas. En este artículo se da cuenta de las reflexiones que los participantes reconocieron frente al uso de la modelación matemática en las situaciones cotidianas y cómo ella permite transformar las prácticas con relación a las experiencias de vida.

Los participantes y las situaciones de modelación estudiadas

En una asignatura denominada *Seminario de Especialización*, ofrecido a profesores en formación inicial (futuros profesores de matemáticas), los participantes eligieron un tema de su interés y a partir de allí se comprometieron con el estudio del contexto en el cual se ubica ese tema, desarrollaron un proceso modelación. En este ámbito, un grupo conformado por tres futuros profesores se interesaron por las prácticas económicas vividas en el hogar; según los integrantes de este equipo, la elección del tema obedeció a que la economía en el caso analizado depende del trabajo independiente de sus miembros y, fundamentados en sus conocimientos, vieron la necesidad de incorporar la matemática en el análisis de las decisiones que realizaban sus familias.

El equipo se comprometió, de manera específica, en desarrollar dos proyectos. El primero (episodio 1) consistió en analizar la manera en que un transportador de alimentos (padre de uno de los integrantes del equipo) hace recorridos entre diferentes ciudades y en identificar el tipo de trayecto o conexión que podría realizar con el ánimo de optimizar los ingresos económicos; según los datos recogidos por los futuros profesores, el conductor tenía la creencia de que un tipo de viaje (viajes cortos) eran más rentable económicamente. En el segundo proyecto (episodio 2) el equipo de trabajo se propuso indagar sobre la producción y venta de un producto alimenticio de una microempresa (parte del patrimonio de otro de los integrantes del equipo), este proyecto se orientó con la siguiente pregunta ¿cuál es el precio real de producción? La intención del equipo de futuros profesores era determinar si el precio de venta del producto era el más rentable para la microempresa.

En el episodio 1, el equipo estudió las siguientes opciones: (i) realizar viajes que demandan alrededor de dos días de desplazamiento (viajes largos), o (ii) realizar viajes que tan sólo demandan un día desplazamiento (viajes cortos). Para lograr modelar dicha situación el equipo recolectó información, la cual fue sistematizada en tablas como un proceso inicial de modelación para su posterior análisis. Con la ayuda de la profesora del curso y de otros investigadores acompañantes; el equipo logró delimitar las variables y otras cantidades que intervenían en la situación, y, posteriormente, tomar decisiones para el análisis (este proceso se denomina simplificación en términos de Bassanezi, 2002). Entre las variables que se analizaron estuvieron: (i) el consumo de combustible por kilómetro recorrido, (ii) los gastos personales del conductor, (iii) el tiempo empleado, (iv) la cantidad de toneladas transportadas y (v) el valor pagado por cada tonelada. Otras variables como (i) el desgaste del carro, (ii) el estado de las carreteras, (iii) la accidentalidad de las vías, (iv) el estado del tiempo y temperatura, no fueron consideradas por los participantes, dado que, según ellos, son variables difíciles de manipular porque dependen de factores externos y en muchos casos imprevisibles.

En el episodio 2, el grupo de estudiantes se preocupó por realizar un estudio detallado de los aspectos que intervienen en la producción de un alimento elaborado en una microempresa familiar. Para lograrlo fue necesario acceder a información como: (i) precio de producción estimado por la microempresa (ii) precio de venta comercial (iii) insumos para la producción del alimento (iv) costo de la mano de obra y (v) costos generales de producción. Esta información fue organizada en tablas, ya que en éstas es posible observar de manera global los aspectos que intervienen en el costo de producción del alimento y dar respuesta a la pregunta que oriento el episodio.

En un diálogo realizado con los participantes, ellos manifestaron que a medida que fueron desarrollando ambos proyectos experimentaron algunos cuestionamientos e inquietudes como: *¿Cuáles son las variables que debemos escoger?, ¿Qué variables nos permiten llegar a conclusiones confiables? y ¿Qué posibles modelos funcionales ya elaborados y analizados podrían adecuarse a los episodios?* Para atender a estas circunstancias, el grupo de futuros profesores consultó a expertos en el tema de finanzas; de ese modo lograron contactar a un Analista Financiero y un Administrador Comercial. Tales expertos ayudaron a centrar la atención en las variables necesarias para analizar las situaciones y generar modelos que justificaran los procesos asumidos frente a ellas. Estas acciones permitieron a los participantes, por un lado, relacionarse con la modelación matemática, en los aspectos que implica reconocer la problemática a estudiar, la declaración y simplificación de variables, la matematización y la generación de conclusiones frente al contexto estudiado; por otro lado, ampliar los diálogos entre los dominios de saber, en este caso, las matemáticas con las finanzas.

Posterior al proceso de recolección y análisis de datos, los estudiantes prepararon una sesión de divulgación de sus resultados para cada uno de los episodios. La sesión de divulgación tuvo lugar al interior en el espacio de formación del Seminario; la profesora del curso y otros invitados expertos en el tema de la modelación matemática estuvieron presentes en esa jornada. Dicha presentación oral, fue grabada en audio y video, lo cual permitió que se convirtieran en material de análisis de la experiencia.

Los datos y algunos hallazgos

En la socialización que el equipo de trabajo realizó, sus integrantes señalaron que en ambos proyectos tuvieron que acudir a sus familiares para lograr obtener los datos requeridos para el análisis. A continuación se presentan algunos de los datos obtenidos por el equipo de trabajo en ambos proyectos.

Episodio 1

El equipo de estudiantes estableció diálogo con el conductor y con los expertos; como producto de ese diálogo, se logró consolidar una interpretación y análisis de las variables, que permitió determinar cuál era la decisión más adecuada para este caso específico. En las Tablas 1 y 2 se presentan los datos recolectados por el equipo de estudiantes sobre los costos e ingresos en los dos tipos de viajes.

Tabla 1
Costos e ingresos de viajes largos y cortos.

Costos por viaje	Viajes largos		Viajes cortos	
	Medellín-Barranquilla	Medellín-Cartagena	Barranquilla-Cartagena	Barranquilla-Montería
Toneladas por viaje	34	34	34	34
Valor Flete (valor/ton)	60.000	60.000	50.000	50.000
Peajes	270.000	270.000	80.000	80.000
Cargue/Descargue	200.000	200.000	200.000	200.000
Kilómetros recorridos por galón	6,33	6,33	6,33	6,33
Kilómetros recorridos	702	641	134	329
Valor galón ACPM	8.416	8.416	8.188	8.188
Tiempo de recorrido	20 horas (2 días)	20 horas (2 días)	1 día	1 día
Ingresos				
Beneficio operacional	636.661,6114	717.763,6651	1’246.667,93	994.430,9637
Ganancia del trabajador (10%)	204.000	204.000	170.000	170.000
Ganancia total	432.661,6114	513.763,6651	1’076.667,93	824.430,9637

Tabla 2
Comparación ganancias de viajes cortos Vs viajes largos.

Comparación ganancias por viaje		
Viaje	Tiempo recorrido teniendo en cuenta paradas entre el viaje	Ganancia
Largo	2 días	432.661,6114
Corto	1 día	1’076.667,93

Según los participantes analizados en este artículo, los datos presentados en la Tabla 1 fueron proporcionados por el conductor. En dicha tabla se presentan los gastos de cada una de las rutas recorridas, se consideraron como ejemplo de viajes largos los destinos de Medellín-Barranquilla y Medellín-Cartagena y viajes cortos los recorridos de Barranquilla-Cartagena y Cartagena-Montería. Con los datos organizados en la Tabla 1, el equipo logró hacer sus análisis y comparaciones de los viajes.

En la presentación oral final, los integrantes señalaron que: una de las conclusiones encontradas gracias al proceso de modelación es que en los viajes largos, se generan utilidades de 15% y 18%, mientras que en los viajes cortos se obtienen utilidades de 28% y 39%, encontrando así que en un viaje corto se gana entre 86% y 105% más de lo que se ganaría en un viaje largo. Esto sin considerar que en los viajes largos el desgaste del carro y el conductor es mayor.

En la Tabla 2 el equipo de trabajo presentó un contraste en cuanto al tiempo empleado para cada uno de los tipos de viaje. De acuerdo a los datos, los participantes afirmaron que la mayor ganancia para el conductor reside en hacer viajes cortos, puesto que, se optimiza el tiempo empleado y se aumentan las utilidades, lo que de alguna manera era conocido empíricamente por él y logró justificase matemáticamente. Este tipo de conclusiones, les permitió a los profesores en formación reconocer que la experiencia del conductor había jugado un papel importante en la determinación de esta misma conclusión. En este caso, para los profesores en formación, la matemática cumplió un papel de confrontación y validación de las decisiones que tomaba el conductor con base en su experiencia acumulada.

Al reconocer que las prácticas del conductor eran consistentes con los resultados ofrecidos por la matemática, el equipo de trabajo quiso indagar un poco más y comenzó a explorar otras posibilidades, entre ellas, aumentar la frecuencia con la que se podrían realizar dichos viajes. Para ello, los estudiantes tuvieron en cuenta que *el conductor vivía en Medellín, por ende tendría que realizar como mínimo dos viajes largos (ida y regreso) para lograr realizar los recorridos entre Barranquilla-Cartagena y Cartagena-Montería, que son los que generan mayor utilidad*. Por la situación descrita, los integrantes del equipo formularon la siguiente pregunta: *¿Cuál es el tiempo óptimo de espera para realizar un viaje corto?* Esta pregunta fue formulada por los integrantes del grupo a partir de las necesidades que tenía el conductor y, al mismo tiempo, para generar un modelo matemático que lo ayudara a tomar decisiones con relación a sus prácticas económicas. En el tiempo de espera de un viaje corto el conductor debe correr con gastos como hospedaje y alimentación, por lo que esperar un viaje corto por varios días resulta problemático, pues las utilidades adquiridas al realizar un viaje largo se podría disminuir significativamente. Sin embargo, si el conductor arriesga un 50% de la ganancia que obtuvo en el viaje largo, podría llegar a aumentar sus utilidades realizando más de un viaje corto. Este análisis es presentado por los participantes en la Tabla 3.

Tabla 3
Ganancia del conductor en un viaje largo y gastos por 1 día de espera.

Concepto	Valor
Ganancia del conductor viaje largo	204.000
Gastos hospedaje y alimentación por 1 día de espera	50.000
% dispuesto a perder	% 50
	102.000

Los análisis realizados por el equipo de trabajo los llevó a concluir que:

> Si el conductor arriesga un porcentaje de 50% para definirlo en pérdida, asumiendo que él estaría dispuesto a quedarse 2 días y asumir el riesgo de perder o aumentar la inversión a corto plazo, se surgieren dos escenarios para el conductor: uno favorable y otro desfavorable. Para el escenario favorable, se parte de la idea que la espera del conductor da buenos resultados y se logra realizar de 1 a 2 viajes cortos (un viaje por día) aumentando su ganancia, o el escenario desfavorable donde al esperar dos días no logra realizar el viaje corto por lo que tendría que tomar un viaje largo y perder los días de espera.

Los participantes reconocen los escenarios favorables y desfavorables y con la pericia de los profesionales involucraron múltiples variables con las cuales lograron identificar los intervalos de tiempo e inversión que debían ser considerados para que las decisiones tomadas por el conductor no afectaran sus ingresos. En este sentido, los futuros profesores manifestaron que para modelar matemáticamente una situación era necesario considerar el *porcentaje de riesgo.* Según los futuros profesores, esta noción emergió en la interacción con los especialistas en el área económica; a través de ella pudieron reconocer que cuando en el aula de clase se propone para estudiar una práctica cotidiana las matemáticas “conviven” con otros conocimientos.

Tabla 4

Ganancia del conductor al realizar uno y dos viajes cortos.

Concepto	Ganancia	Inversión	Utilidad	Ganancia total viaje corto más viaje largo
Ganancia por 1 viaje corto	$ 170.000	100.000	70.000	$ 274.000
Ganancia por 2 viajes cortos	$ 340.000	100.000	240.000	$ 444.000

Posteriormente, el equipo de trabajo logró señalar que en este escenario favorable se logra observar, que los viajes cortos en menor tiempo generan un porcentaje de utilidad alto, recuperando a corto plazo la inversión inicial de aproximadamente $100.000, esto teniendo en cuenta que el conductor debe quedarse esperando los dos días. Por otro lado, si se piensa en el escenario desfavorable podría pasar que esperando los dos días, no logre realizar ningún viaje corto, de esta manera su ganancia inicial se reduciría a $104.000, lo cual representaría una pérdida para el conductor. Según estas declaraciones, para los participantes el proceso de modelación matemática llevado a cabo permitió constatar las creencias del conductor, además de reconocer variables como el tiempo límite de permanencia en un lugar para que la economía no sea afectada sino que por el contrario, aumenten las ganancias.

Episodio 2

El segundo proyecto que el equipo de trabajo desarrolló se fundamentó en una situación que estuvo relacionada con la fabricación y venta de un producto alimenticio propio de la región: las arepas. El desarrollo del proyecto estuvo orientado por la siguiente pregunta: *¿Cuál es el costo real del producto?* Con el ánimo de responderla, los participantes reconocieron el precio manejado por la microempresa que fue quien proporcionó los datos de costos y gastos empleados para la producción. El propietario indicó que el precio de venta del producto al mercado es de $800 y el costo que se tiene estimado de producción es de $518. A partir de estos datos, el equipo de futuros profesores observó necesario reconocer las variables que inciden sobre el precio de producción, como lo son: (i) costos por adquisición de materiales directos (MD) (ii) costo de la mano de obra (MOD), (iii) costos generales de fabricación (CIF), que a su vez están compuestos por los que son fijos, por ejemplo, dotación, arrendamiento, salario de los empleados, seguros, entre otros y los que son variables como son los servicios públicos y algunos insumos de la producción (Tabla 5 y 6). Esto permitió a los participantes analizar el precio de venta del producto y reconocer el porcentaje de ganancia (Tabla 7) y generar una proyección de ganancia y un modelo (Tabla 8).

Tabla 5

Insumos para la producción del alimento, costos directos de fabricación y materiales directos en la producción

	Costos indirectos de fabricación (CIF)		
Materiales fijos (MD)	Dotación/precio por unidad	Precio materiales	Incremento al precio por paquete
	$ 35.000	$ 504.000	$ 1,46
Precios fijos	No aplica		

Precios variantes	Valor promedio mensual	Distribuido n° días	Valor diario
	$ 7.000.000	30	$ 233.333,33
Total	Materiales directos en la producción		
	Valor por paquete de arepa	Valor por cada 5600 paquete de arepa	
	$ 395	$ 2.229.252	
	Mano de obra		
Nómina por 14 operarios en 1 día		$ 392.000	

Tabla 6
Fijación del precio del producto alimenticio por unidad.

Fijación precio base					
Costo de operación		Fórmula	Total costos diarios	Producción diaria	Resultado precio por unidad
MD	$2.229.252	PB = (Σ MD + Σ MOD + Σ CIF) ÷ C.P.M	$2.854.586,33	5600	$509,75
MOD	$392.000				
CIF	$233.335				

Tabla 7
Precio de venta del producto y porcentaje de ganancia.

Precio de venta		
Precio base	% de ganancia	Precio al comercializador
$510	57%	$800

Tabla 8
Proyección de las ganancia de la microempresa: costo definido por la microempresa Vs costo definido en la modelación.

Proyección										
Costo definido por la empresa	Costo definido en la modelación	Diferencia	Se está dejando de ganar							
			Hora		Día		Mes		Año	
			Prod	Desprecia	Prod	Desprecia	Prod	Desprecia	Prod	Desprecia
$518	$510	$8	400	$3.200	6400	$51.200	192000	$1.536.000	2304000	$18.432.000

Según el equipo de trabajo, con la definición de los tres elementos de los costos de producción (Tabla 5) logró definir un precio base, es decir, consiguieron determinar el precio al que sale producir el alimento, esto gracias a los modelos realizados representado tanto en expresiones algebraicas funcionales como en las tablas. En la Tabla 6, los participantes observaron que el costo del producto se calcula al sumar los materiales directos, la mano de obra y los costos generales de la fabricación, así obtuvieron que el costo del alimento era de $510. La ecuación definida en dicha tabla (modelo matemático) fue el resultado que el grupo de futuro profesores divulgó a los demás integrantes del Seminario. Con la expresión representaron la totalidad de los datos de manera generalizada. Además, reconocieron que cada paquete del producto que se vende a $800 alcanza un 57% de utilidades (Ver Tabla 7). Con lo obtenido, los futuros profesores realizaron una proyección, en la que contrastan el precio dado por la empresa y el establecido como resultado de la modelación matemática; con ello encontraron una diferencia de $8. Los participantes proporcionaron esta cantidad con relación a una hora, mes o año e indicaron que la microempresa desprecia esta ganancia de $8, por cada producto, lo que en un año representaría un valor de $18.432.000. Los participantes analizados en este artículo afirmaron que *esta proyección a largo plazo se logra gracias al proceso de modelación realizado, ya que éste permitió una comprensión de la economía de la microempresa y un análisis exhaustivo de la información proporcionada*.

Los futuros profesores expresaron que: *a través de la matemática se observó que en la microempresa hay costos que no estaban siendo definidos en la producción*. Con el ánimo de evitar que se omitan costos e información que afectan los ingresos, se sugiere realizar mejoras en el análisis de éstos, detallar los datos de gastos y procesos de producción fortaleciendo el crecimiento comercial y económico de la microempresa. Esta idea hace suponer a los participantes que las decisiones tomadas por el microempresario pueden ser mejoradas si se incluyen los resultados proporcionados por el estudio hecho con la matemática y, por tanto, tomar decisiones que estén fundamentadas no solo en las experiencias cotidianas sino también en estudios matemáticos.

A modo de conclusión, el equipo de trabajo que divulgó su experiencia ante el auditorio afirmó que: en estas dos situaciones, la modelación matemática permite un estudio y lectura de los entornos sociales, como es la economía de empresas familiares, idea que se apoya en lo enunciado por Orey y Rosa (2007) quienes afirman que, "[...] utilizamos la modelación como un lenguaje para estudiar, entender y comprender situaciones-problemáticas en la comunidad" (p. 203).

Discusión y conclusiones

En los dos episodios presentados anteriormente, los estudiantes que componían el equipo de trabajo reconocieron que la modelación matemática permitió informar al conductor que sus prácticas eran correctas y al mismo tiempo reflexionar en aspectos que ayudarían a mejorar sus utilidades. En el caso de la microempresa se aportó un modelo funcional y la organización de la información de modo que optimiza los costos de producción del producto alimenticio, convirtiéndose éstas en potenciadoras para emprender acciones que transforman las prácticas sociales, aportando información organizada para elaborar análisis confiables. De este modo, como plantea Villa-Ochoa (2012) los futuros profesores pudieron vivenciar el papel que jugó la matemática en el estudio de fenómenos que se centran en el interés de los mismos participantes; de esta manera, las matemáticas y algunas prácticas económicas familiares permitieron observar a la modelación matemática como una actividad desde y para la cultura.

En correspondencia con las experiencias vividas por el equipo de trabajo, el diálogo e interacción de diferentes disciplinas fueron fundamentales para realizar un proceso de modelación que se articulara a las necesidades que se presentaron en sus prácticas cotidianas. En las situaciones expuestas los aportes y sugerencias tanto de la analista, el administrador, el microempresario y el conductor posibilitaron una reflexión desde diferentes perspectivas de los casos. La unión de estos saberes tanto académicos como empíricos ayudó a establecer posturas y determinar rutas que pueden posibilitar mejores prácticas financieras tanto del microempresario como del conductor. A pesar de que los participantes del estudio no eran expertos en finanzas ni en administración, compartieron e interactuaron con este tipo de profesionales; de ese modo, la modelación matemática entrelazó su saber matemático con las situaciones que afectaban a sus propias familias. Al respecto, Blomhøj (2004) puntualiza que:

> La modelización matemática tiende puentes entre la experiencia de vida diaria de los alumnos y la matemática. Esto motiva el aprendizaje de la matemática, provee de directo apoyo cognitivo a las conceptualizaciones de los alumnos y coloca a la matemática en la cultura, como medio de describir y entender situaciones de la vida diaria"(p. 32).

Para los participantes de este estudio, el interés al desarrollar el proceso de modelación radicó en comprender las decisiones empíricas que se toman en sus propias familias sobre la economía del hogar, conforme estos futuros profesores señalaron:

> las matemáticas se convirtieron en un medio para entender las problemáticas que se lograron identificar. Con esto comprobamos que el proceso de modelación es un aprendizaje de vida, en el que se lee el mundo desde otras miradas, además se relaciona con otras ramas del conocimiento e involucra agentes externos, siendo ésta, una forma de comprender la situación, transformando así las acciones.

Para que las decisiones sean informadas y fundamentadas, resulta necesario que las matemáticas pasen de ser intuitivas o empíricas a ser estructuradas, es decir, que problematicen y cuestionen las nociones que se tienen sobre la situación, con el ánimo de generar una relación entre la experiencia del sujeto y las matemáticas y posibilitar un panorama más amplio que lleva a tomar consciencia de los demás factores que influyen en la situación y por ende tomar postura a partir de las reflexiones obtenidas. Esta confiabilidad y precisión se puede lograr mediante la modelación matemática. Este campo de saber no sólo permite discriminar y organizar la información que se presenta, sino que da seguridad en las decisiones que se toman, permite reflexionar y tomar postura sobre determinadas situaciones. De esta forma, se emprenden acciones que dinamizan las prácticas cotidianas, la manera de ver el mundo y de actuar en él. La modelación matemática invita a ser críticos y reflexivos frente a las diversas situaciones, a ir más allá de lo que se percibe en torno a un caso, a ser conscientes de que las acciones diarias de un sujeto tienen efectos tanto en las prácticas propias como en las de las personas que lo rodean.

A través de esta experiencia, los futuros profesores lograron reconocer la modelación matemática como un proceso que dinamiza las prácticas cotidianas, puesto que ayuda a aproximar y fundamentar acciones sobre una situación dada y facilita su reflexión y análisis. La experiencia que se vive cuando se hace modelación matemática sensibiliza, la visión de una persona frente a una situación problemática, ya que no se limita a la resolución de una tarea, sino que por el contrario trasciende a la forma de vivir, influyendo en la manera de ver y concebir el mundo, como plantea Bassanezi, (2002) ésta se convierte en "[...] en el arte de transformar situaciones reales en problemas matemáticos cuyas soluciones tienen que ser interpretadas en el lenguaje usual" (p. 24). Los participantes reconocieron la importancia de contrastar las decisiones tomadas frente al manejo de la economía y la modelación matemática. Esto con el ánimo de analizar y reflexionar si en ambos casos las creencias y formas de tomar las decisiones respondían a la mejor opción y optimización de los recursos o por el contrario, existían aspectos que no eran tomados en cuenta y cómo, de alguna manera, la matemática justificaba la necesidad de transformar dichas prácticas cotidianas.

Agradecimientos

Agradecimientos a la Universidad de Antioquia por su apoyo a través del proyecto FPP01 (CODI-Facultad de Educación) y al Semillero de Investigación MATHEMA. Aunque no sean responsables de los planteamiento acá descritos, también queremos agradecer a la profesora Mónica Marcela Parra y a otros integrantes de la Red Colombiana de Modelación en Educación Matemática (www.recomem.com.co) por las lecturas y sugerencias realizadas a las diferentes versiones de este documento.

Referencias y bibliografía

Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática.* São Paulo: Editora Contexto

Barbosa, J. C. (2003). What is mathematical modelling? En S. J. Lamon, W. A. Parker, & S. K. Houston (Eds.), *Mathematical modelling: a way of life* (ICTMA11, pp. 227-234). Chichester: Horwood Publishing.

Barbosa, J. C. (2009). Mathematical modelling, the socio-critical perspective and the reflexive discussions. En M. Blomhøj, & S. Carreira (Eds), *Actas del tema de estudio grupo 21 (ICME 11)*, (pp. 133-143). Mexico: Roskilde Universitet.

Blomhøj, M. (2004). Mathematical modelling - A theory for practice. En B. Clarke, D. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johnansson, D. Lambdin, F. Lester, A. Walby, & K. Walby (Eds.), *International Perspectives on Learning and Teaching Mathematics. National Center for Mathematics Education* (pp. 145-159). Suecia. Traducción autorizada de María Mina (2008).

Muñoz, L. M., Londoño, S. M., Jaramillo; C. M., & Villa-Ochoa, J. A. (2014). Contextos Auténticos y la producción de modelos matemáticos escolares. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, *42*, 48-67.

Orey, D. C., & Rosa, M. (2007). A dimensão crítica da modelagem matemática: ensinando para a eficiência sociocrítica. *Horizontes*, *25*(2), 197-206.

Villa-Ochoa, J. (2010). *Modelación matemática en el aula de clase. Algunos elementos para su implementación.* Conferencia presentada en Primer Seminario en Educación Matemática, Historia y Etnomatemáticas (21 de octubre de 2010). Universidad de Medellín. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/1003/1/Ponencia_UdeM_octubre_2010.pdf

Villa-Ochoa, J., Bustamante, C., & Berrio, M. (2010). Sentido de realidad en la modelación matemática. En P. Leston (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa ALME, 23* (pp. 1087-1096). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa - Colegio Mexicano de Matemática Educativa.

Villa-Ochoa, J. (2012). Modelación matemática escolar: algunas reflexiones frente a su relación *con* la cultura. En M. C. V. Viana (Ed), *Relme 26: Reunião Latinoamericana de Educação Matemática*. Ouro Preto, Editora: EDUFOP. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/2346/1/MesaredondaRelme26BH.pdf

Mathematical Modeling and its critical and reflexive dimensions

Milton **Rosa**
Centro de Educação Aberta e a Distância, Universidade Federal de Ouro Preto
Brasil
milton@cead.ufop.br
Daniel Clark **Orey**
Centro de Educação Aberta e a Distância, Universidade Federal de Ouro Preto
Brasil
oreydc@cead.ufop.br

Abstract

Among the innovative teaching methodologies, it is important to highlight the use of critical and reflexive dimensions of approaches to mathematical modeling in diverse problem solving situations. In the last three decades, mathematical modeling, particularly the research related to its critical and reflexive dimension has been looking for an identity, is defining its own objectives, and is developing a sense of its own nature and potential of research methods and investigations in order to legitimize its pedagogical action. In this regard, the main objective of this paper is to discuss methodological and educational practices that allow students to analyze problems in order for them to become active participants of society by developing and broadening their critical and reflexive efficiency. The results of this theoretical discussion show that through their experiences, students are able to critically reflect on problems faced by communities in order to develop their rational discourse by creating necessary meanings for structural transformation of society.

Key words: mathematical modeling, critical and reflexive dimensions, sociocultural theory, social theory of knowledge, critical and reflexive efficiency, emancipatory approach.

Introduction

To begin we would like to reflect on the critical and reflexive dimensions of mathematical modeling. However, in order to discuss this issue, both inquiries are necessary:

- What is the role of schools in promoting of critical and reflexive efficiency in students?
- How do pedagogical practices currently used in the processes of teaching and learning mathematics impact critical and reflexive efficiency in students?

This context allows us to determine the main goals of schools elated to the development of creativity and criticality in students that enable them to apply different tools to solve problems faced in their daily lives as well as to the competencies, abilities, and skills that help them reflect about problems faced in contemporary society, diverse cultural groups, or in our communities.

Unfortunately, in most cases, these goals are established in the school curricula without the participation of communities in planning these actions. This curricular aspect may contribute to an authoritarian education whose main purpose is to promote demotivation and passivity in many students. Thus, this educational focus is necessary in order to prepare students to be active, critical, and reflective participants in society. However, in order to reach this goal, it is necessary that teachers promote teaching and learning processes that help students to develop critical and reflexive efficiency. This means that teachers should be adopting pedagogical practices that allow students to critically analyze problems that surround them in order for them to become active participants of society.

Conceptualizing Critical and Reflexive Efficiency

One of the most important characteristics of teaching for critical and reflexive efficiency is the emphasis on the critical analysis of students using the phenomena present in their daily lives. Another important feature of this kind of teaching is related to the students' reflections about social elements that underpin their globalized world. Thus, the critical perspectives in relation to social conditions that affect students' own experiences help them to identify common problems and collectively develop strategies to solve these problems. This is a type of transformatory learning based on previous experiences and the aims of students that empower them to create conditions that help them to solve relevant problems in their lives and possibly challenge worldviews and values predominant in society. In this regard, by using their own experiences and the critical reflect on these experiences, students are able to develop a data-based rational discourse in order to create meanings necessary for the structural transformation of society (D'Ambrosio, 1990).

Rational discourse is a special form of dialogue in which all parties have the same rights and duties to allow them to both claim and test the validity of their arguments. In so doing, rational discourse provides an action plan that allows participants to enter into dialogue, resolve conflicts, and engage collaboratively in the resolution of problems in accordance to a set of specific rules. In this type of discourse, intellectual honesty, elimination of prejudices, and critical analysis of the facts are important aspects that allow dialogue to happen rationally (Rosa & Orey, 2007).

This context is related to the rational transformation that involves critical analysis of social phenomena. In this kind of educational environment, discourse, conscious work, intuition, creativity, criticality, and emotion are important elements that work to help students to develop their own critical and reflexive efficiency.

Teaching for critical and reflexive efficiency

Education towards a critical and reflexive efficiency places students back at the center of the teaching and learning process. In this regard, classrooms are considered as learning environments in which teachers help, or coach, students to develop their own criticality and creative abilities by applying transformatory pedagogical approaches. However, in order for this form of pedagogy to be implemented in classrooms, it is necessary to discard transmissive traditional pedagogical approaches (Jennings, 1994). In other words, teaching is a social and cultural activity that introduces students to the creation of knowledge instead of passively being recipients of its transmission. This means that the pedagogical transformatory approach is the antithesis of traditional pedagogical transmissive approaches that seek to transform students into containers filled with academic information in what Paulo Freire called the *banking mode education* (Freire, 2000).

Currently, the debate between these two teaching approaches continues, but the discussions are centered in relation to the contents to be taught and limited in relation to the time required to teach of these contents. Regarding this discussion, there is a need to elaborate on a mathematics curriculum that promotes critical analysis, active participation, and reflection on social transformation by students (Rosa & Orey, 2007). Curriculum changes that seek to prepare students to become critical, reflexive, and responsible citizens form a mission that seeks practical solutions to the problem faced by society, which is necessary to be in accordance to the values and beliefs practiced by communities. This means that it is impossible to teach mathematics or other curricular subjects in a way that is neutral and insensitive to the reality experienced by students (Fasheh, 1997).

Thus, an important objective for schools in a democratic society is to provide necessary information through relevant activities so that students have the necessary tools to discuss and critically analyze curricular content by enabling them to solve daily problems and phenomena. In our point of view, mathematical modeling is a teaching methodology focused on critical and reflexive efficiency by students because it engages them in relevant and contextualized activities, which allow them to be involved in the construction of mathematical knowledge.

Theoretical basis for the critical and reflexive dimension of mathematical modeling

This theoretical basis for the social-critical dimension of mathematical modeling has its foundations in Sociocultural Theory and the Critical Theory of Knowledge.

Sociocultural theory

Learning occurs through socialization because knowledge is better constructed when students work in groups by acting cooperatively in order to support and encourage each other. This approach allows students to reflect on complex problems embedded in authentic situations that help them to construct their knowledge by connecting it to other knowledge areas in an interdisciplinary way. According to this perspective, individuals' engagement in a sociocultural environment helps them to be involved in meaningful and complex activities. It is through social interaction (Vygotsky, 1986) among students from distinct cultural groups that learning is initiated and established. However, it is important to highlight how learning is triggered according to the purpose of each student because they have different capacities to act, react, reflect and, change their own environment.

Thus, in the mathematical modeling process, social environments also influence student cognition in ways that are related to their own cultural context. In this learning environment, collaborative work among teachers and students makes learning more effective because it generates high levels of mathematical thinking through the use of activities that are both socially and culturally relevant This context allows for the use of *dialogical constructivism* because the source of knowledge is based on social interactions between students and environments in which cognition is the result of the use of cultural artifacts in these interactions. Thus, these artifacts act as vehicles that help students to internalize changes by allowing them to understand social difficulties faced by the members of their own community (Rosa & Orey 2007).

Critical Theory of Knowledge

Habermas' *Critical Theory of Knowledge* reinforces the importance of social contexts in the teaching and learning process. This theory promotes the development of students' critical consciousness so that they are able to analyze how social forces shape their lives. This analysis occurs through intellectual strategies such as interpersonal communication, dialogue, discourse, critical questionings, and proposition of problems taken from reality.

The effects of social structure influence distinct knowledge areas that are purchased by individuals in the social environment. These areas are partly determined by interests that both stimulate and motivate these individuals. Habermas (1971) recognized that there are three generic knowledge domains named *technical*, *practical* and *emancipatory*.

Technical knowledge or prediction

It is defined by the way individuals learn to control and manipulate their environments, and this is best gained through empirical investigations and governed by technical rules. In the mathematical modeling process, students apply this instrumental action when they observe the attributes of specific phenomena, verify if a specific outcome can be produced and reproduced, and know how to use rules to select different and efficient variables to manipulate and elaborate mathematical models (Brown, 1984).

Practical knowledge or interpretation and understanding

It identifies individuals' social interaction through communication. In the mathematical modeling process, students communicate by using hermeneutics (written, verbal, and non-verbal communication) to verify if social actions and norms are modified by communication. It is in the using of these kinds of knowledge that meaning and interpretation of communicative patterns interact to construct and elaborate the community understanding that serves to outline the legal agreement for the social performance.

Emancipatory knowledge or criticism and liberation

It can be defined as the acquisition of insights that seek to emancipate individuals from institutional forces that limit and control their lives. It is necessary to determine social conditions that cause misunderstandings in the communication process, tactics that may be used to release particular oppressive and repressive forces, and risks that are involved in these tactics. The objective of this kind of knowledge is to emancipate individuals from diverse modes of social domination. In the mathematical modeling process, insights gained through critical self-awareness in the elaboration of mathematical models are emancipatory in the sense that students may be able to recognize the correct reasons to solve problems faced by their communities. During this process, knowledge is gained by self-emancipation through reflection leading to a transformed consciousness.

However, learning begins to be generated in the technical knowledge in conjunction with the social existence through interactive and dialogical activities. In the mathematical modeling process, this approach helps students to take ownership of emancipatory knowledge, which is translated in an interdisciplinary and dialogical ways so they can be used as instruments for social transformation.

Determining an epistemology of the critical and reflexive dimension of mathematical modeling

Currently, there is no real or general consensus or a specific epistemology for critical and reflexive dimensions of mathematical modeling. However, we describe it as the process that involves the elaboration, critical analysis, and validation of a model that represents a system taken from reality. In this regard, mathematical modeling could be considered an artistic process because in the process of the elaboration of a model, the modeler needs to possess mathematical knowledge as well as a dose of significant intuition and creativity to be able to interpret its context (Biembengut & Hein, 2000). In so doing, students need to work in learning environments that provide necessary motivation so that they develop and exercise their creativity through critical analysis and the generation and production of knowledge. Research and investigations on critical and reflexive dimensions of mathematical modelling define its goals by establishing the nature and potential of research methods and investigative tools. In this dimension, the junction of theory and practice assists students in understanding systems taken from their own reality to acquire tools needed to exercise citizenship and to actively participate in society.

The main objectives of this approach are:

- Provide students with mathematical-pedagogical tools necessary to act, modify, change and transform their own reality.
- Teach that learning mathematics starts from the social and cultural context of the students by providing them with the opportunity to develop their logical reasoning and creativity.
- Facilitate the learning of mathematical concepts that help students build their knowledge in mathematics so that they are able to understand the social, historical and cultural context in which they live.

The use of critical and reflexive dimensions of mathematical modeling is based on:

- Comprehension and understanding of the reality in which students live through reflection, critical analysis and critical action.
- When students borrow existing systems they study them in symbolic, systematic, analytical and critical ways.
- Starting from a given problem-situation, students are able to make hypotheses, test them, fix them, draw inferences, generalize, analyze, conclude, and make decisions about the object under study.

According to this context, mathematical modeling is a paradigm for learning environments in which students are invited, indeed encouraged through the use of mathematics, to inquire and investigate problems that come from other diverse areas of reality. In this learning environment, students work with real problems by using mathematics as a language for understanding, simplifying, and solving these situations in an interdisciplinary fashion (Bassanezi, 2002). This means that mathematical modeling is a method of applied mathematics that was seized and transposed the field of teaching and learning as one of the ways to use reality in the mathematics curriculum. This enables them to intervene in their reality by obtaining a mathematical representation of the given situation by means of reflective and critical discussions on the development and elaborations of mathematical models (Rosa & Orey, 2007).

From this particular paradigm come three distinct mathematical modeling pedagogical practices that may be used in school curricula (Barbosa, 2001).

Case 1: Teachers Choose a Problem

In this pedagogical practice, teachers choose a situation or a phenomenon and then describe it to the students. According to the curriculum content to be developed, teachers provide students with the necessary mathematical tools suitable to the elaboration of mathematical models in order to solve proposed problems. In our opinion, this is the first step to integrate mathematical modeling into teaching and learning processes. However, for the development of the students' social-critical efficiency, there is also a need for active involvement in the process of teaching and learning mathematics (Rosa & Orey, 2007).

For example, in order to determine the height of a cliff, teachers choose a problem, situation or a phenomenon and then describe it to the students. This example is related to the *pragmatic* perspective of modelling. Mathematics is used in order to stimulate students' skills by using problem solving techniques during the modelling process. This perspective is also named *realistic* because problems and situations are authentic since they are also taken from other knowledge areas. It aims to enable the development of the skills of the students to solve problems that emerge during the mathematical modelling processes (Shiraman & Kaiser, 2006).

By considering a typical trigonometry exercise, which states that *From the top of a cliff, whose height is 100 m, a person sees a ship under an angle of 30°. Approximately, how far is the ship from the cliff?* (Rosa, Orey, & Reis, 2012) *s*tudents can use the tangent function, *tg30° = 100/d*, in order to determine the distance from the base of the cliff to the ship.

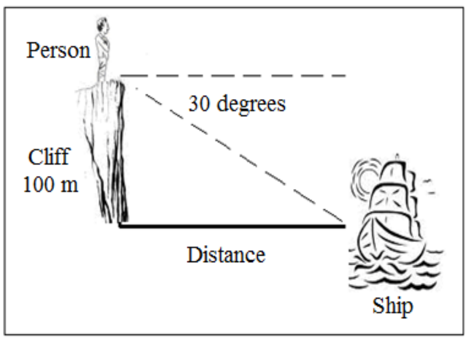


Figure 1: Representation of the problem presented by the teacher.

For many teachers, this trigonometric equation represents a simple mathematical model that demonstrates an application of trigonometry that illustrates the use of mathematics used to solve a problem. It is important to discuss with the students the assumptions that have been previously established as a critical analysis of the solution because this is an important aspect of the construction of mathematical models. During the process of mathematizing this problem, some generalized simplifications of reality were established that are not critically discussed nor reflected with students.

In this process of problem solving, it is assumed that the ocean is flat, the cliff is perfectly vertical to the straight line chosen to represent the distance from the base of the cliff to the ship, a straight line can reasonably approximate the distance from the base of the cliff to the ship, and that the curvature of the Earth is ignored. On a small scale, this fact is not problematic, however, in a large-scale it can lead to significant deviations in the process of preparation and resolution of the mathematical model. It is also assumed that the height of the person is approximately equal to 1.70 meters, which is negligible compared to the height of the cliff, which is 100 meters; the angle of depression was exactly measured, and the ship is a significant distance from the cliff.

In this regard, a point can reasonably represent the position of the ship in the ocean. However, this point can gain yet another mathematical meaning if the ship gets closer to the cliff. These assumptions are considered logical and needed to simplify the problem because they provide a reasonable estimate to determine the distance between the base of the cliff and the ship. It is important to discuss with students the answers to these types of problems are never absolutely accurate. A deeper analysis of mathematical models allows students to determine an accurate solution by using detailed representations of reality.

These assumptions are related to Halpern's (1996) *critical thinking* and involve a wide range of thinking skills leading toward desirable outcomes and Dewey's (1933) *reflective thinking* that focuses on the process of making judgments about what has happened. This approach allows students to solve word problems by setting up equations in which they translate real situations into mathematical terms, involve the observation of patterns, the testing of conjectures, and the estimation of results, and help students to mathematize systems taken from their own reality, while allowing them to construct distinct mathematical models.

Case 2: Teachers suggest and elaborate the initial problem

In this pedagogical practice, it may be necessary for students to investigate a given problem situation by actively collecting data, formulate hypotheses, and make necessary modifications in order to develop their mathematical model. Students are responsible for conducting the activities proposed in order to develop the modeling process. One of the most important stages of the modeling process refers to the elaboration of a set of assumptions, which aim to simplify and solve a mathematical model to be developed. In order to work with activities based on social-critical dimensions of mathematical modeling, it is necessary that students relate these activities to problems faced by their community (Rosa, Orey, & Reis, 2012).

For example, it is possible that teachers are free to propose problems and questions that students can investigate similar to the following situation: *A company discharges its effluent into a river located near their facilities. These waters contain dissolved chemical substances that can affect the environment in which the river flows. How can we determine the concentration of pollutants in that river? How can we make sure that pollutant concentrations in the river are below the standard limit allowed by law?*

Students then are given to support that allows them to investigate the problem by collecting data and are responsible for conducting activities in order to develop their modeling process. One of the most important stages of the modeling process referred to the elaboration of a set of assumptions, which are aimed towards simplifying and then solving mathematical models that must be elaborated as well as the development of critical reflections based on the data that they collected. It is also important to determine key questions that affect final concentrations of pollutants in the river, as well as the flow rates of the pollutants. In this context, it is important to discuss with the students certain modeling variables or constants, for example that:

1. If the average velocity and rate of water flow was constant.
2. If there is no seasonal change in the water level of the river.
3. If the rate of pollutant concentration in the river was constant.
4. If the pollutants and the water are completely miscible regardless of the seasonal change in temperature.
5. If there was no further precipitation during the period of data collection.
6. If the pollutant and water mix completely.
7. If the pollutant does not solidify in the sediments of the river.

8. If the solid particles were deposited along with sediments in the river.
9. If the pollutants are volatile when they are reduced to gas or vapor at ambient temperatures.
10. If the pollutants are chemically reactive.
11. If the shape of the river bed was uneven.

This activity help students to reflect on the mathematical aspects involved in this problem, enabling them to understand phenomenon they encounter in their daily lives so they can critically solve a situation by focusing on the data and the using mathematics to resolve conflict.

Case 3: Teachers facilitates the mathematical modeling process

In this particular pedagogical practice, teachers facilitate mathematical modeling processes by allowing students to freely choose a theme that is interesting to the members of the study group. Then, students are encouraged to develop a project in which they are responsible for all stages of the process, that is, from formulation of the problem to the validation of the solution. The supervision of the teachers is constant during the mediation of the teaching and learning process. This process enables students' social-critical engagement in the proposed activities.

However, even though there may be some disagreement regarding the use of a specific mathematical modeling and pedagogical practices, it is possible to conduct activities, experiments, investigations, simulations, and research projects that interest and stimulate students at all educational levels. Thus, the choice of a pedagogical practice is to be used by teachers depends on the content involved, the maturity level of the students and the teachers' experience with the use of mathematical modeling processes in the classroom. On the other hand, critical analysis is emphasized with the results obtained in either approach are highly encouraged.

During the development of mathematical modeling processes, problems chosen and suggested by teachers or selected by the students themselves are used to get them to critically reflect on all aspects involved in the situation to be modeled. These aspects are related to interdisciplinary connections, uses of technology, and in the discussion of environmental, economic, political, and social issues. The use of mathematical content in this process is directed towards the critical analysis of the problems faced by the members of the community.

For example, the results from a conversation during a morning walk with students along a street in Ouro Preto, Brazil encouraged exploration and the development of some simple models and allowed them to explore relationships between mathematical ideas, procedures, and practices by developing connections between community members and formal academic mathematics. By observing the architecture of the façade of the school, professors and students were able to converse and explore and to determine ways to relate functions of three types of curves: exponential, parabolic, and catenary to the patterns found on its wall (Rosa & Orey, 2013).

Further, by analyzing these shapes, it was observed how the curves on the wall were similar to exponential, parabolic, or catenary curves. They observed the existence of these similarities between the exponential curves, parabolas, and catenaries in the curves found along the wall. After examining the data collected when they measured various curves on the wall of the school and attempted to fit them to the exponential and quadratic functions through mathematical models they came to the conclusion that the curves on the wall of the school closely approximated a catenary curve function.

Figure 3. Curves on the wall of the school

The reflective aspect of this dimension is related to the emancipatory approach of the mathematics curriculum because its pedagogical practices offer *open* curricular activities that apply multiple perspectives to solve given problems, which require constant critical reflection on these solutions. However, the *open* nature of modeling activities may be difficult for students to establish and develop a model that satisfactorily represents the problem under study (Barbosa, 2001). Thus, the dialogical and mediator role of the teachers is very important during the modeling process.

The Emancipatory Approach of the critical and reflexive dimension of Mathematical Modeling

The critical and reflexive dimension of mathematical modeling may be considered an extension of the Critical Theory of Knowledge. In this regard, the emancipatory approach directs educational objectives by addressing social and political issues in the pedagogical practices used in educational systems. According to the Brazilian National Curriculum for Mathematics (Brazil, 1998), students need to develop an ability to solve problems, make decisions, work collaboratively, and communicate effectively.

This approach is based on emancipatory powers, which helps students face the challenges posed by society by turning them into flexible, adaptive, reflexive, critical, and creative citizens. This perspective is also related to the sociocultural dimensions of mathematics, which are closely associated with an ethnomathematics program (D'Ambrosio, 1990). This aspect emphasizes the role of mathematics in society by highlighting the necessity to analyze the role of critical and reflexive thinking about the nature of mathematical models as well as the role of the modeling process to solve everyday challenges present in the contemporary society.

The process of critical and reflexive dimensions of Mathematical Modeling

Mathematical modeling provides concrete opportunities for students to discuss the role of mathematics as well as the nature of mathematical models so they can study systems taken from reality (Shiraman & Kaiser, 2006), and may be understood as a language used to study, understand, and comprehend problems faced daily by the community. For example, mathematical modeling is used to analyze, simplify, and solve daily phenomena in order to predict results or modify the characteristics of these phenomena (Bassanezzi, 2002). Figure 2 shows the Critical and Reflexive Mathematical Modeling Cycle.

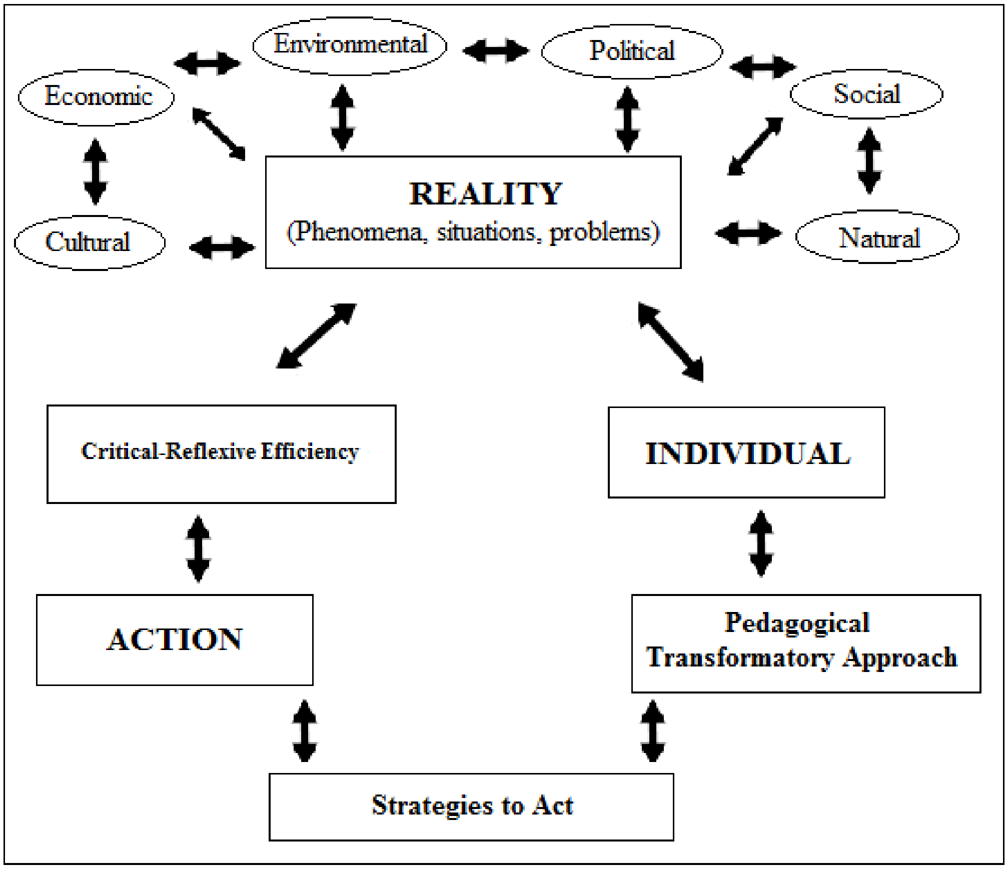


Figure 2: Critical and Reflexive mathematical modeling cycle.

In this process, the purpose of mathematical modeling is to develop critical and reflexive skills in students that enable them to analyze and interpret data, to formulate and test hypotheses, and to develop and verify the effectiveness of the mathematical models. In so doing, the reflection on the reality becomes a transforming action, which seeks to reduce the degree of complexity of reality through the choice of a system that it represents (Rosa & Orey, 2007). This isolated system allows students to make representations of this reality by developing strategies that enables them to explain, understand, manage, analyze, and reflect on all parts of this system. The process aims to optimize pedagogical conditions for teaching so that students are able to understand a particular phenomenon in order to act effectively on this phenomenon and to transform it according to the needs the community.

The application of critical and reflexive dimensions of mathematical modeling allows for mathematics to be seen as a dynamic and humanizing subject. This process fosters abstraction, the creation of new mathematical tools, and the formulation of new concepts and theories. Thus, an effective way to introduce students to mathematical modeling in order to lead them towards the understanding of social and critical dimensions is to expose them to a wide variety of problems or themes. As part of this process, it is important to value the questionings related to the themes used to explain or make predictions about the phenomena under study through the elaboration of mathematical models that represent these situations (Rosa & Orey, 2007).

Elaborating mathematical models mean that the development a set of variables become qualitative representations or quantitative analyses of the system because the models are understood as approximations of reality. In this direction, to model is a process that checks whether the parameters are critically selected for the solution of the models in accordance to interrelationships of selected variables from holistic contexts of reality. It is not possible to explain, know, understand, manage, and cope with reality outside holistic contexts (D'Ambrosio, 1990). In the critical and reflexive dimension of mathematical modeling, it is impossible to work only with theories or techniques that facilitate the solution of mathematical models because they can be memorized and forgotten. This aspect of traditional learning prevents students to have access to creativity, conceptual elaboration, and the development the logical, reflexive, and critical thinking.

However, the critical and reflexive dimension of mathematical modeling is based on the students' autonomy, which aims to facilitate the expansion of world view, the development of autonomous thinking, and to contribute to the full exercise of citizenship. According to this perspective, this dimension of mathematical modeling facilitates the development of competencies, skills, and abilities that necessary for students to play a transformative role in society (Rosa & Orey, 2007).

Final considerations

The fundamental characteristic of teaching towards critical and reflexive efficiency is the emphasis on the students' critical analysis of problems faced by a member of the contemporary society through the use of mathematical modeling. Another important feature of this kind of teaching is the importance of the personal reflection by students about the social elements that underpin the globalized world. Thus, critical perspectives of students in relation to the social conditions that affect their own experiences help them to identify common problems and collectively develop strategies to solve them (D'Ambrosio, 1990).

This is a paradigm that incorporates a type of transformatory learning that aims to create conditions that help students to challenge their own conditions, worldviews and values that are dominant in their environment and society. Through their experiences, they are able to critically reflect on them in order to develop a rational discourse by creating necessary meanings for structural transformation of society (Freire, 2000). This approach presents us with a rational transformation because it involves critical analysis of sociocultural phenomena through the elaboration of mathematical models. Mathematical modeling is therefore a teaching methodology that focuses on the development of critical and reflexive efficiency as engages students in a contextualized teaching-learning process by allowing them to get involved in the construction of the social significance of the world (Rosa & Orey, 2007).

The critical and reflexive dimension of mathematical modeling is based on the comprehension and understanding of reality in which students live by reflection, analysis and critical action on this reality. When we borrow systems from reality, students begin to study them symbolic, systematic, analytical and critically. In this regard, starting from problem situations, students can make hypotheses, test them, correct them, make transfers, generalize, analyze, complete and make decisions about the object under study.

Thus, critical mathematical modeling seeks to explain different ways of working with reality. Critically reflecting on their own reality becomes a transformational action that seeks to reduce its complexity by allowing students to explain it, understand it, manage it, and to find solutions to the problems that arise therein.

References

Barbosa, J. C. (2001). *Modelagem matemática*: concepções e experiências de futuros professores [Mathematical modeling: conceptions and experiences of prospective teachers]. Doctorate thesis in Mathematics Education. Rio Claro, SP: UNESP 2001.

Bassanezzi, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática* [Teaching and learning with mathematical modeling]. São Paulo, SP: Contexto.

Biembengut, M. S. & Hein, N. (2000). *Modelagem matemática no ensino* [Mathematical modeling in teaching]. São Paulo, SP: Contexto, 2000.

Brasil. (1998). *Parâmetros curriculares nacionais (PCNs):* matemática [National curricular parameters: mathematics]. Brasília, DF: MECSEF.

Brown, M. M. (1984). *Needed:* a critical science perspective in home economics. Meeting of the American Homes Economics Association, Anaheim, CA.

D'Ambrosio, U. (1990). *Etnomatemática* [Ethnomathematics]. São Paulo, SP: Editora Ática.

Dewey, J. (1933). *How we think.* Lexington, MA: D. C. Heath and Company.

Fasheh, M. (1997). Is math in classroom neutral or dead? A view from Palestine. *For the Learning of Mathematics*, *17*(20), 24-27.

Freire, P. (2000). *Pedagogy of the oppressed*. New York, NY: Continuum.

Habermas, J. (1971). *Knowledge and human interests*. Boston, MA: Beacon Press.

Halpern, D. F. (1996). *Thought and knowledge: an introduction to critical thinking*. Mahwah, NJ: L. Erlbaum Associates.

Jennings, T. (1994). Social justice in the elementary classroom. *Social Studies and the Young Learner*, *7*(1), 4-6.

Rosa, M.; & Orey, D. C. (2007). A dimensão crítica da modelagem matemática: ensinando para a eficiência sociocrítica [Critical dimension of mathematical modeling: teaching for social-critical efficiency]. *Horizontes, 25*(2), 197-206.

Rosa, M., & Orey, D.C. (2013). The mathematics of the curves on the wall of the colégio Arquidiocesano and its mathematical models: a case for ethnomodeling. *Journal of Mathematical Modelling and Application, 1*(8), 42-62.

Rosa, M.; Reis, F. S.; Orey, D. C. (2012). A modelagem matemática crítica nos cursos de formação de professores de matemática [Critical mathematical modeling in the mathematics teacher education program]. *Acta Scientiae, 14*(2), 159-184.

Shriraman, B.; & & Kaiser, G. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM, 3*(3), 302-310.

Vygotsky, L. (1986). *Thought and language*. Cambridge, MA: The MIT Press.

Mathematical Modeling in a long distance course: accessing higher education in Brazil

Milton **Rosa**
Centro de Educação Aberta e a Distância, Universidade Federal de Ouro Preto
Brasil
milton@cead.ufop.br
Daniel Clark **Orey**
Centro de Educação Aberta e a Distância, Universidade Federal de Ouro Preto
Brasil
oreydc@cead.ufop.br

Abstract

The authors led a group of diverse students by using long distance technologies to write mathematical models in relation to their experience with the nationwide protests related to a sudden and steep climb in transportation costs during June 2013. In this article the authors outline theories and work related to critical mathematical modeling, distance interaction, and transactional distance by using long-distance technologies in Brazil. Mathematical modeling became a teaching methodology that focuses on the development of a critical and reflexive efficacy that engages students in a contextualized teaching-learning process that allows them to become involved in the construction of solutions of social significance. This critical dimension of mathematical modeling is based on the comprehension and understanding of reality, in which students learn to reflect, analyze and take action on their reality. This approach coupled with long distance education allows students to access higher education in Brazil.

Key words: Critical Reflexive Mathematical modeling, Higher education, Long Distance Education, Virtual Learning Environment.

Introduction

In recent years, Brazil has experienced an accelerated social and economic growth and accompanying social changes. The country is now the 7th largest economy in the world. It sponsored the 2014 World Cup and it is sponsoring the Olympics in Rio de Janeiro in 2016, and is suffering a tremendous amount of modernization in relation to infrastructure, including that of health and education. Nation-wide a process of upgrading teacher competencies and the training of new teachers on a massive scale is making a difference in school and community quality of life. The most expedient, economical, indeed reasonable method to do this is by integrating the use of long distance and multimedia technologies. To increase access to a wider audience, the use of Moodle as the platform and freeware is used; which has enabled the Universidade Aberta do Brazil (UAB) system to the democratize the access of higher education. In this context, the study of new educational and methodological proposals become relevant as a result of social changes resulting from contemporary scientific and technological development. The need to update and upgrade professional development for teachers raises new institutional methods and resources in order to meet the demand for specialized teacher education programs such as in mathematics as imposed by technological developments.

The Long Distance Learning program in Brazil offers teacher education programs to prospective teachers in places and in contexts that have had extremely limited access to higher education, if at all. This was developed because face to face teacher education programs cannot currently meet the needs or allow people the time required by traditional face to face instruction to earn degrees. Instruction is performed by using a variety of technologies as well as special organizational and administrative arrangements (Moore & Kearsley, 2007). Several actions of the Brazilian Federal Government were developed for teaching and learning in a long distance modality and forms part of the Ministry of Education's plan representing the intention of the current government to invest in distance learning and a new digital era of informational and communicational technologies that support teaching practices and professional development (Brazil, 2005). This program aims at meeting the demands of the 21st century in which this program is mediated by emerging technologies and methodologies in order to cover all educational levels and social classes. According to the Brazilian Law No. 5622 promulgated in December, 19th 2005, Long Distance Education is characterized as an educational modality in which its didactical and pedagogical mediation is facilitated in the teaching and learning processes and occurs through the use of a variety of informational and communicational technologies. In this process, students and teachers develop educational activities in diverse and distinct local and times (Brazil, 2005). However, it is necessary to work beyond the concepts of this law in order to understand the didactical and pedagogical action plan for this educational modality, which has direct influence to the quality of education offered to students and communities.

It is important to emphasize the relevance of the preparation of a long distance course where it is necessary to know the learning needs of diverse groups of students and their unique conditions in which they live. However, it is not enough to enhance access to this kind of education without changing and adapting processes and methods of teaching and learning regarding available technological resources. This means that in order to establish processes and methods for a distance learning mathematics courses such as modeling, it is relevant to know its potentialities and possibilities that meets the expectations and aspirations of the institutions and people involved in this process. In this regard, it is necessary to establish a system of long distance learning process and methods based on existing theories regarding to these research fields and then analyze this model that was applied in a *Seminar in Mathematical Modeling* in a long distance mathematics undergraduate course in a federal university in Brazil. This course is offered entirely in a distance environment mediated through technology and internet. The development of the activities is conducted through the use of Moodle Platform that possesses interactional tools among teachers, tutors, and students. According to this context, the Centro de Educação Aberta e a Distância (CEAD) at the Universidade Federal de Ouro Preto (UFOP) have come to integrate instruction, technology, content and pedagogical methods in order to reach a diversity of students. In just this university alone, there are over 4500 students enrolled in four undergraduate majors (Mathematics, Geography, Pedagogy, and Public Administration), which represents 41% of UFOP students from three states (Bahia, Minas Gerais, and São Paulo) and access courseware and instruction via 31 *polos* (long distance learning centers). UFOP that is one of the oldest public institutions of higher education provides one of the largest distance education programs in Brazil.

Outlining Theories Related to Distance Learning and Critical Mathematical Modeling

In Brazil, push back in regards to long distance education is evident, especially in regards to its implementation in higher education, and amongst the attitudes of traditional face-to face faculty and colleagues. Despite these concerns, and in order to expand higher education in Brazil, UAB was developed. It has the mission of providing access to higher education to a population of prospective learners who has not had access. Paulo Freire's ideas related to literacy; primarily, his idea that links social justice, access and community development to literacy has made a great impact, and has influenced this initiative; as well, ethnomathematics has for years said that we should do the same in the context of mathematics education. According to the Brazilian National Curriculum for Mathematics (Brazil, 1998), students need to develop their own autonomous ability to solve problems, make decisions, work collaboratively, and communicate effectively. This approach is based on abilities, which help students to face challenges posed by society by turning them into flexible, adaptive, reflexive, critical, and creative citizens. This perspective is also related to the critical dimension of mathematics, which is closely associated with the ethnomathematics as program (D'Ambrosio, 1990). This aspect emphasizes the role of mathematics in society by highlighting the necessity to analyze the role of critical thinking in relation to the nature of mathematical models as well as the function of modeling that solves everyday challenges.

So, when Brazil suddenly erupted, it seemed the perfect opportunity to look at the question of transportation that people were concerned with. Having a number of diverse polos (educational centers) with a diversity of costs, populations and social contexts seemed a rich opportunity, not to be missed. This approach allows us to determine the main goals for schools that relate to the development of creativity and criticality to help students apply different tools to solve problems faced in their daily lives as well as competencies, abilities, and skills to help them to live in society. This context also allows for the development of a critical mathematical modeling, which enabled students to develop mathematical models related to the proposed theme of transportation. Unfortunately, in most cases, these goals are established in school curricula without the participation of community input. This curricular aspect contributes to an authoritarian education which unmotivates and promotes passivity in the teachers and students. The focus of education must be to prepare both teachers and students to be active, critical, and reflexive participants in society. However, in order to reach this objective, it is necessary that the community supports teaching and learning processes that help students to develop their social-critical efficacy. This means that teachers should be encouraged and supported to adopt pedagogical practices that allow their students to critically analyze problems that surround them in order to promote social justice.

Critical Mathematical Modeling

In the last three decades, critical mathematical modeling as a method for teaching and learning mathematics has been a central theme in mathematics education in Brazil; in teacher education programs this is a way to rebuild or restore part of fragmented knowledge students acquired during their previous mathematics learning experiences. Critical Mathematical modeling has become one of the most important lines of research for processes of teaching and learning of mathematics in Brazil. This work points out some reasons for teaching and learning of mathematics aimed at solving real world problems that makes use of critical mathematical modeling as a methodology that values and enables the connection between mathematics and reality. However, this aspect is not commonly reflected in the teaching practices of mathematics teachers. Much of the literature related to mathematical modeling and its critical perspective contributes to the formation of both critical and reflexive teachers and presents us with opportunities for the meaningful learning of mathematical concepts by students in virtual environments. As a methodology in a virtual learning environment in undergraduate courses for prospective mathematics teachers, it allows for the exploration of issues related to the context and interest of students and thus provides meaning for mathematical content under study.

By using this critical mathematical modeling perspective we encourage the examination of ways in which students develop and use certain mathematical procedures so that they learn to identify and propose solutions to problems faced in everyday life (Skovsmose, 1990). This process is crucial to the development of an informed, active, and critical citizenship. One of the necessary pedagogical practices for transforming the nature of mathematical teaching is the deployment and implementation of this perspective in long distance mathematics undergraduate courses, using the Moodle platform and a variety of freeware. This approach helps prospective teachers to examine, interpret and understand phenomena that affect our daily lives. The interpretation and understanding of these phenomena are due to the power provided by critical mathematical modeling, which occurs through the critical analysis of the applications of mathematical concepts during the development of mathematical models in a virtual learning environment. Thus, the process of developing mathematical models is not a neutral activity because the solution of a modeling a problem situation includes an understanding of how ideas and mathematical concepts are designed in the preparation, analysis, and resolution of these models. Thus, it is important that the mathematical results obtained in this process are linked to the reality of students (Barbosa, 2006).

During the process of constructing the model, it is necessary to describe, analyze, and interpret phenomena present in reality in order to generate critical and reflective discussions about the different processes of resolution of the models, which are prepared by students. These discussions occur through reflective argumentation about the influence needed to build models as well as comparisons between the different models that are built by students (Barbosa, 2006) criteria. Thus, it is important to enable true reflections on the reality, which becomes a transformative action that allows students to practice explanations, sharing their understandings, develop abilities to organize, manage, and find solutions to problems that present themselves (Rosa & Orey, 2007). This both critical and reflexive discussion triggers a cycle of construction of mathematical knowledge from the reality through the process of critical mathematical modeling. In this process, students develop skills that help them to process information and define essential strategies to perform actions that aim to modification and transformation of reality (Rosa & Orey, 2007). This kind of discussion provokes in students the ability to comprehend and debate about the implications of the mathematical results, which flow from the resolution of a particular problem situation. In this regard, critical mathematical modeling can be considered an artistic, indeed poetic process because in the process of elaboration of a model, the modeler needs to possess mathematical knowledge as well as develop a certain a sense of intuition or creativity that enables this interpretation (Biembengut and Hein, 2000).

This is akin to writing a poem. In so doing, students need to work in a motivating virtual learning environment (VLE) so that they are able to develop and exercise creativity and criticality through analysis and the generation and production of knowledge. According to this point of view, critical mathematical modeling may be considered a learning environment in which students are invited to inquire and investigate problems that come from other areas of reality. In this environment, students work with real problems and use mathematics as a language for understanding, simplifying, and solving these situations in an interdisciplinary fashion (Bassanezi, 2002). In other words, critical mathematical modeling is a method using applied mathematics that was transposed to the field of teaching and learning as one of the ways to use and connect reality in the mathematics curriculum (Barbosa, 2006).

In the context of critical mathematical modeling process, students communicate by using hermeneutics (written, verbal, and non-verbal communication) to verify if social actions and norms are modified by communication, which can be developed through the virtual learning environment (VLE). It is in this kind of knowledge that meaning and interpretation of communicative patterns interact to construct and elaborate the community understanding that serves to outline the legal agreement for the social performance. In this learning environment students control and manipulate technological tool, which is gained through empirical investigations and governed by technical rules in the (VLE). In the mathematical modeling process, students apply this instrumental action when they observe the attributes of specific phenomena, verify if a specific outcome can be produced and reproduced, and know how to use rules to select different and efficient variables to manipulate and elaborate mathematical models.

Long Distance Learning

Over the past few decades, and in many diverse locations, distance education has grown quickly. Beginning initially with the use of mail-order course, it transitioned to include radio and television. Once associated with mailed printed materials, it facilitated the dissemination and democratization of access and has now moved to the internet and MOOCS. It has become a key element in the democratization for many countries and now allows access to education and professional development opportunities once only given in face to face and elite members of society. In Brazil, as mentioned earlier, it has allowed a portion of the population that traditionally has had difficulty in accessing public education to advance. The basic idea of distance education is very simple: students and teachers are in different locations during all or most of the time in which they either learn or teach (Moore & Kearsley, 2007).

Although this type of education might in some ways hinder traditional teacher-student relationships, strangely enough it also allows students who had never had access to professors or teachers to gain contact. Distance educational technologies answer the need of a population who deserve initial or continuing education opportunities. Distance education allows for educators and learners to break barriers related to time and space, and allows for interactivity and information dissemination. Distance education environments are open systems that are composed of "flexible mechanisms for participation and decentralization, with control rules discussed by the community and decisions taken by interdisciplinary groups" (Moraes, 1997, p. 68). This approach also allows interactions between teachers who prepare instructional materials and strategies, with tutors, who in our case in Brazil provide hands-on face to face assistance at polos. In Brazil, tutors are tasked to assist students in their activities and tasks, guiding them in their doubts, helping them learn to use search tools, libraries, and offer help in writing and basic math skills. These interactions are triggered by lessons on “platforms” that are virtual learning environments (VLE) in Brazil and enables the use of technology and the teaching and learning of specific content. These features have enabled the development of large variety of educational methodologies that utilize web interaction channels and aim to provide needed support in the achievement of VLE curricular activities.

Theory of Distance Interaction

Interactional distance learning tools (Moore & Kearsley, 2007) seek to eliminate the gap in respect to the understanding and communication established between teachers, tutors and learners because by either time or geographic distance. Distance is considered an important feature or element of this form of education and is often supplanted by differentiating procedures, instructional and pedagogical tools that facilitate interactions. In this sense, distance education may need to be redefined because it cannot be considered only as the geographical separation between teachers, students and tutors, but as a different pedagogical concept for teaching and learning.

According to this theory, there is a real need for distance education students to exercise interactions in virtual learning environments that facilitate understanding and the comprehension of new content and activities. This interaction allows students the opportunity to make or answer questions and in most subjects also allows for the expression of opinions (Moore, 2007, p. 128). This theory considers that the time and space distances found between teachers, students and tutors needs to be overcome with the inclusion of differentiating elements in the process of teaching and learning (Moore & Kearsley, 2007). Many studies involving the research and investigation of distance education environments focus on communication media. In this sense, new learning tools are adapted for use in classrooms such as the use of mathematical modeling in mathematics courses.

We have learned to emphasize the need to introduce new methodologies based on changing pedagogical contexts; that is available technologies that students in diverse distance modalities can learn mathematical content through a diversity technological and methodological procedures, including access to computers, laptops, tablets or even the use of smartphones, that help them in breaking the barrier provided by the distance separating them from tutors and teachers (Neto, 2008). It is important to note here that new teaching methods in Brazil include the use of mostly freeware tools available in Moodle platforms, in addition to forums, posts, wikis, youtube and questions and responses, which can be performed in real time in live video and web conferences.

Theory of Transactional Distance

Before the development of the concept of the Theory of Transactional Distance (Moore, 1993) definitions of distance education were related to the physical separation of teachers and students. Transactional distance differs from the physical or temporal distance as it refers to the psychological and communicative space that separates teachers from teaching students of transactions triggered in an educational system in distance modality, and can occur in planned structured virtual learning environments (Moore, 1993).

Consistent with this perspective, this theory is preoccupied with pedagogical aspects of teaching and learning than with the geographical aspects of the students. In the greater educational process, this theory requires the presence of "students, teachers, [tutors] and a channel of communication" (Martindale, 2002, p. 4) in order to resolve situations of teaching and learning that involve different transactional distances and require different techniques or even specialized forms of instruction. The use of this theory is an invaluable contribution that guides complex practices of processes of teaching and distance learning (Garrison, 2000).

Transactional Distance Theory describes relationships and interactions that exist between teachers, students and tutors and were often established when these individuals were separated by time and space. However, for this interaction to satisfactorily take place there is a need to discuss the extension of the length of a particular transactional education program, which depends on a set of three distinct qualitative variables: dialogue, program structure and the range of autonomous possibilities for students. That is, students might work in groups, or individually. It is also emphasized that these many variables are not always technological, as they relate to the interaction between teaching and learning itself (Moore, 1993).

This theory seeks to utilize information, technology, and the inherent communication found in structuring coursework, which prioritizes an interactive educational process centered on learners. In this educational process, transactional distance is considered as a pedagogical phenomenon and not just a geographical issue. This means that it investigates its influence on distance teaching and learning of the disciplines of the curriculum, the organization and management educational program, and curriculum development (Moore & Kearsley, 2007). This theory also focuses on "the universe of teacher-learner relationships that exist when learners and instructor are separated by space and/or time" (Moore, 1993, p. 22). In general, it describes the interrelationship between three categories named dialogue, structure and learner autonomy as well as how the interactions of these elements influence the intensity and the quality of the transactional distance.

The theories presented here utilize information technology and communication in structuring coursework, which prioritizes interactive and collaborative educational process centered with learners. In this educational process, transactional distance is considered a pedagogical phenomenon and not just as a geographical issue, which seeks to investigate the influence that this has in distance teaching and learning, the curriculum, curriculum development and in the organization and management educational programs (Moore & Kearsley, 2007). This includes critical mathematical modeling.

Critical Mathematical Modeling Process in the VLE

In literacy and language learning environments learners very quickly learn to communicate through oral and or written forms of language. Early on, learners see the importance of written narratives, prose, and poetry that allow them to quickly see the beauty and power of language, and to incorporate that beauty into their lives. Contrast this to the learning of mathematics, where in the vast number of mathematics classes, learners are subjected to endless rote memorization of algorithms and grammar and pages of exercises, often without context to the learners' lives, experiences, values or communities. Rarely do they see a direct connection to what they are learning and how they actually will use mathematics.

Mathematics is often referred to as a language, but it seems that it has become a language that is taught without giving leaners the opportunity to communicate mathematically, or to even write the rudimentary forms of mathematical prose or poetry. It is not until learners reach advanced mathematics that the few that survive this process, are afforded the opportunity to engage in communicating and creating new ideas using the beauty and power found in the language of mathematics. It is why, no wonder, that most people detest mathematics, to them mathematics is stuck in endless boring drills in the use of mechanical and mathematical grammar without being able to write or communicate in this synthetic but powerful language.

To those of us who are privileged to understand the beauty and elegance of mathematics, this is deeply sad. In Brazil a strong culture of inquiry has developed in the mathematics education community by using critical mathematical modeling, and is influenced by the philosophies and work of Paulo Freire (2005) and Ubiratan D'Ambrosio (1986). In preparation for rigorous university entry exams, Brazilian students are encouraged to reflect upon, engage in, debate, and dialogue to resolve problems they find in their own contexts, neighborhoods and environments. These opportunities often use mathematical modeling and ethnomathematics and become the first opportunity that mathematics learners have to write, a mathematical poem, as it were (Rosa & Orey, 2011).

For example, data gleaned from a study about transportation conducted by Orey and Rosa (2014) in 2013 in a course offered to mathematics majors in mathematical modeling showed that students acquired information through interviews with citizens and public transport users in their respective towns. In this regard; questions related to the situations presented in the interviews served as starting point to the elaboration of mathematical models. According to this context; students determined different solutions to the problems outlined, and reflected regarding to the conclusions obtained in this process. In this study, 110 students in 10 *polos* in two states (Minas Gerais and São Paulo) made use of an historic event, the nation-wide 2013 demonstrations, to develop competency in mathematical modeling and how studied this raise in bus fares in their communities in Brazil and shared their findings with fellow students, faculty, and tutors.

As mentioned above, in June 2013, early in the Seminar on Mathematical Modeling, the country erupted in mass demonstrations against the growing problem of corruption and over spending in relation to preparation for the 2014 World Cup tournament. Just in the small college town of Ouro Preto, 10,000 people marched from the university campus to the main square of the city. What sparked this national mass movement was a sudden spike in transportation fares in urban transportation systems. What may seem to those who do not use mass transit as something minor (20 cent rise) created a difficult problem for many who live in the large megalopolises of São Paulo, Rio, and Brasilia. Some long daily commutes became R$30 (about U$14) roundtrips five or six times a week and for many became untenable.

Normally a week or so is devoted to bringing consensus with students and generating a number of themes, and to make use of this particular historic circumstance the instructor consulted with the tutors and students and together we agreed that transportation would be the theme. Eight polos were participating in the seminar. The instructor asked the tutors at each polo to organize the students into smaller working groups of 4 or 5 students. Over a period of 5 weeks students were led through the steps, and groups were required to post evidence of their work on line.

Synchronous virtual classes were held. Critical mathematical modeling lessons were transmitted through video conference. Lessons were organized and activities and projects were posted in the Moodle Platform. Discussion forums were also developed in order to prepare students for the modeling process. By the end of 16 weeks course there were 4 synchronous/virtual meetings in which the development of the mathematical models of each group of students was discussed. The course calendar that contained the description of the course, the terms of the proposed activities, and the dates and times of synchronous was published in the VLE. Approximately, every two weeks there were activities and questions to be worked on by the students and sent to the tutors and the professor through specific links in the Moodle Platform.

During the development of the course, the professor and the tutors, although geographically distant from the students used virtually tools to be connected with them.

Pedagogical and didactic strategies were used to promote professor and tutors interactions with the students in order to contribute to the process of teaching and learning critical mathematical modeling. The resources used for this purpose were the discussion forums and videoconference. Through these tools it was possible to promote dialogues between all participants in the VLE. In addition to promoting interaction, the professor took care that the preparation of teaching materials, such as the structure and policies of the activities available on the VLE. Thus, due to perceived needs of the students during this course, the professor created supplemental materials and short video-lessons in order to lead students step by step in the modeling process, so they were able to improve their performance in carrying out the modeling proposed activities.

It is important to highlight here the design of the use of digital communication technologies in the development of this course such as videoconferences and virtual learning environments guided the selection of procedures and techniques:

a) Videoconferences enabled the integration of students, tutors and the professor for socialization and clarification of questionings; which allowed for a collaborative environment for sharing experiences on the proposed themes and promoted students attendance in the polos to develop their modeling projects. The use of videoconference proved to be very effective because it has sufficient teaching resources for conducting synchronous classes. In this perspective, knowledge is translated in a dialogical way so these technological tools can be used as instruments to help students to critically think about problems they face daily.

b) The Virtual Learning Environment (VLE) allowed for continuous updates of the course content; the development of discussion forums concerning teaching practices in the critical mathematical modeling process and the elaboration of questions about the pedagogical and technical aspects of this process. VLE also allowed for the integration of students, tutors, and the professor through the tools to deliver messages; the provision of summaries of contents the course; the conduction of pedagogical monitoring such as sending messages to all participants and participation in the discussion forums; and technical support such students and tutors access reports in the VLE.

In this virtual environment, the learning occurred through socialization because knowledge was better constructed when the students worked in groups and act cooperatively in order to support and encourage each other. This approach allows students to reflect on complex problems embedded in real situations that help to construct knowledge by connecting it to other knowledge areas in an interdisciplinary way. According to this perspective, students' engagement with a sociocultural environment helps them to be involved in meaningful and complex activities. It is through social interaction (Vygotsky, 1986) among teachers and students from distinct cultural groups that learning is initiated and established.

Accessing the Virtual Learning Environment (VLE)

In the mathematical modeling process, the social environment also influences cognition in ways that are related to cultural context. In this context, collaborative work through Moodle Platform between groups of teachers, tutors, and students makes learning more effective as it generates levels of mathematical thinking through the use of socially and culturally relevant activities Thus context allows the use of a *dialectical constructivism* because the source of knowledge is based on social interactions between students and environments in which cognition is the result of cultural artifacts in these interactions (Rosa & Orey, 2007).

Critical mathematical modeling provides concrete opportunities for students to discuss the role of mathematics as well as the nature of their models as they study systems taken from reality through the use of technological tools in the VLE. In accordance to this point of view, critical mathematical modeling may be understood as a language to study, understand, and comprehend problems faced community (Bassanezi, 2002). For example, mathematical modeling is used to analyze, simplify, and solve daily phenomena in order to predict results or modify the characteristics of these phenomena. In this process, the purpose of critical mathematical modeling becomes the ability to develop critical skills that enable teachers and students to analyze and interpret data, to formulate and test hypotheses, and to develop and verify the effectiveness of mathematical models. In so doing, the reflections become a transforming action, seeking to reduce the degree of complexity through the choice of a system that can represent it (Rosa & Orey, 2007).

By developing strategies through technological tools provided by the Moodle Platform encourage students to explain, understand, manage, analyze, and reflect on all parts of this system, the process optimizes pedagogical conditions for teaching and learning so that students understand a particular phenomenon in order to act effectively and transform phenomenon according to the needs the community. In order to lead students towards the understanding of its social-critical dimension is to expose them to a wide variety of problems or themes. As part of this process, questionings are used to explain or make predictions about the phenomena under study through the elaboration of models that represent these situations (Rosa & Orey, 2007).

Recommendations

Based on the experience of the development of Critical Mathematical Modeling in a long distance environment this course transformed into a simple, yet elegant, pedagogical and didactical methodology. However, in a new edition of this course, it is possible to take into account adjustments that needed to be made in order to correct technical difficulties that occurred in the students' virtual learning environment. Thus, new challenges and needs arose when upgrading methodological and pedagogical processes according to the new context of long distance learning. According to this context, some recommendations related to this experience and implemented in future course offerings are:

Professors and tutors

There is a need to intensify the help given to the students by answering their questions and grading activities according to the schedule posted in the Moodle Platform, improve orientations and instructions regarding to the development of critical mathematical modeling steps as well as clarifying the description of policies and activities. It is also important to avoid too many changes in the schedule of the proposed synchronous classes as well as the delivery of the activities in the VLE; make more effective use of the forums for interaction and discussion of the proposed activities, enhance the use of virtual environments in order to provide the means for monitoring on the participation of students, including forums and synchronous activities such as seminars by videoconference presentation of the proposed activities.

Students

It goes with saying, and this is a difficult problem for us in Brazil but it is necessary that students have enough time to study and participate in the proposed activities in the VLE. Many students are working or do not have access to the internet or computers in their homes and must travel to the polos to do some or all coursework, which presents them with various logistical problems. On one occasion, a student needed to leave the polo in time to make her bus ride because her horse was tied to the bus stop and she need to ride home yet another hour by horse! As well we need to intensify the elaborations and use teaching resources and materials found closer to home and explore pedagogical support in order to clarify questioning and inquiries; and better organize groups to prepare their answer to activities regarding the elaboration of mathematical models. It is also recommended that it is important to use Freirean-Dambrosian perspectives in order to use this opportunity to teach prospective teachers to use real life contexts to engage learners. As well it allows us to gain the tools and experience to make useful arguments for what can be emotional topics. In so doing, modelers learn to create data, and thoughtfully engage in debate and dialogue in relation to the data, which enable them to take an active role in the process of the transformation of society.

Final Considerations

The study of new educational methodological proposals becomes relevant because it originates with ideas regarding social changes resulting from ongoing continuous contemporary scientific and technological developments. In order to enable teaching methods using structured learning materials and existing technological resources, it was developed the long distance learning, which refers to planned learning that normally occurs outside of school (Moore & Kearsley, 2007). On the other hand, in the last three decades, critical mathematical modeling as a teaching and learning methodology has been one of the central themes in mathematics education in Brazil and has come to offer a way to rebuild or restore what has become for many, a fragmented and meaningless mathematical knowledge. This approach appears to encourage them to develop more informed and research-based opinions in their real life.

In this context, mathematical modeling soon becomes a teaching methodology that focuses on the development of a critical and reflexive efficacy that engages students in a contextualized teaching-learning process that allows them to become involved in the construction of solutions of social significance (Rosa & Orey, 2007). This critical dimension of mathematical modeling is based on the comprehension and understanding of reality, in which students learn to reflect, analyze and take action on their own reality. When we explore examples and problems from their reality, students begin to study the symbolic, systematic, analytical, and critically contexts to their work through the use of technological tools provided in a virtual learning environment. In so doing, long distance learning modalities contribute and can assist students to overcome difficulties regarding the adoption of critical mathematical modeling courses because technological tools offered by the platforms such as Moodle are simple and funcional. Through the use of discussion forums and videoconferences, professors and tutors are able to and can better analyze interactions enabled by these tools, which contributed to development of the elaboration of mathematical models in the virtual learning environment.

References

Barbosa, J. C. (2006). Mathematical modelling in classroom: a sociocritical and discursive perspective. *ZDM, 38*(3), 293-301.

Bassanezi, R. C. (2002). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática.* São Paulo, SP: Contexto.

Biembengut, M. S., & Hein, N. (2000). *Modelagem matemática no ensino* (Mathematical modeling in teaching). São Paulo, SP: Contexto, 2000.

Brazil. (1998). *Parâmetros curriculares nacionais (PCNs):* matemática (National curricular parameters: mathematics). Brasília, DF: MEC/SEF.

Brazil. (2005). *Sistema universidade aberta do Brazil – UAB*: Decreto nº 5.800/2006. Brasília, DF: Casa Civil.

D'Ambrosio, U. (1986). *Da realidade a ação: reflexões sobre educação e matemática*. Campinas, SP: Unicamp; São Paulo: SUMMUS.

D'Ambrosio, U. (1990). *Etnomatemática* (Ethnomathematics). São Paulo, SP: Editora Ática.

Freire, P. (2005). *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à pratica educativa*. São Paulo: Paz e Terra.

Garrison, R. (2000). Theoretical challenges for distance education in the 21st century: a shift from structural to transactional issues. *International Review of Research in Open and Distance Learning, 1*(1), 1-17.

Martindale, N. (2002). *The cycle of oppression and distance education*. Athabasca, Canada: University.

Moore, M. G. (1993). *Theory of transactional distance*. In D. Keegan (Ed.), *Theoretical principles of distance education* (pp. 22-38). London, England: Routledge.

Moore, M., & Kearsley, G. (2007). *Educação a distância*: *uma visão integrada* (Translation: Roberto Galman). São Paulo, SP: Thomson Learning.

Moraes, M. C. (1997). *O paradigma educacional emergente*. Campinas, SP: Papirus.

Neto, A. S. (2008). *Cenários e modalidades da EaD*. Curitiba, PR: IESDE.

Orey, D. C., & Rosa, M. (2014). *The borrowers: using transportation, addresses, and paralelepípedos to prompt creativity using ethnomodeling*. Paper presented at Problem@Web International Conference. Algarve, Portugal: UAlg/FCT.

Rosa, M., & Orey, D. C. (2007). A dimensão crítica da modelagem matemática: ensinando para a eficiência sociocrítica. *Horizontes, 25*(2), 197-206.

Rosa, M., & Orey, D. C. (2011). Ethnomathematics: the cultural aspects of mathematics. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, *4*(2), 32-54.

Skovsmose, O. (1990). Reflective knowledge: its relation to the mathematical modelling process. *International Journal of Mathematics Education and Sciences and Technology, 21*(5), 765-779.

Vygotsky, L. (1986). *Thought and language.* Cambridge, MA: The MIT Press.

Modelación de una situación que implica el uso de la función exponencial

Diana **Tec** Escalante
Universidad de Quintana Roo
México
djte21@hotmail.com
Verónica **Vargas** Alejo
Universidad de Quintana Roo
México
vargas.av@gmail.com

Resumen

En este artículo se presenta y analiza una actividad mediante la cual se propone a los estudiantes que modelen con lápiz y papel una situación y, posteriormente, simulen una familia de problemas con algún software dinámico como Geogebra. La Actividad forma parte de un conjunto de actividades y problemas que se han estado diseñado en el marco de un proyecto de investigación, cuyo objetivo ha sido apoyar el surgimiento y desarrollo de conceptos matemáticos como variación, tasa de cambio y función. La fundamentación teórica que ha servido como sustento para el diseño y análisis de las actividades es la de Modelos y Modelación. La Actividad se elaboró para implementarse con estudiantes de nivel medio superior o superior, que estén aprendiendo el concepto de función, específicamente de función exponencial. Se ha encontrado que al resolver actividades de este tipo, los estudiantes conjeturan, observan patrones, generalizan y evalúan sus ideas matemáticas.

Palabras clave: Análisis de una Actividad, Nivel medio superior o superior, Función exponencial, Variación, Patrones, Generalización, Ciclos de comprensión, Modelos y modelación.

Introducción

De acuerdo con Steen (2003, p. 193) "Cambios de todo tipo influyen en nuestras vidas", es por ello que surge la importancia y necesidad de entender y controlar nuestro entorno. Así mismo, el medio eficaz para llevar a cabo esta tarea son las matemáticas. La comunidad de matemática educativa reconoce la importancia de generar procesos de enseñanza - aprendizaje en el aula que propicien en los estudiantes el aprendizaje de conceptos angulares de la matemática como variación, tasa de cambio y función (NCTM, 2011), por su importancia para desarrollar otros conceptos matemáticos y porque permiten describir, explicar y predecir situaciones del entorno real. Apoyar la transferencia de conocimiento matemático fuera del aula es cada vez más importante (Schoenfeld, 1992).

El tema de funciones exponenciales, actualmente se aborda en el sistema educativo mexicano desde el nivel medio superior. Se espera que el alumno al concluir el tema sea capaz de definir si la función es creciente o decreciente a partir de su expresión algebraica; obtenga valores de funciones exponenciales y logarítmicas utilizando tablas o calculadora; pueda trazar las gráficas de éstas funciones tabulando valores; utilice las propiedades de los logaritmos para resolver ecuaciones exponenciales y logarítmicas, así como logre aplicar las propiedades y relaciones de las funciones exponenciales y logarítmicas para modelar y resolver problemas. (Dirección Académica de la Dirección General del Bachillerato, 2014)

En este artículo se presenta y analiza una actividad matemática susceptible de ser usada en cursos de matemáticas del nivel medio superior o superior. Se diseñó para abordar conceptos como función exponencial, variación, tasa de cambio y ecuación (Ärlebäck, Doerr, O'Neil, 2013).

Antecedentes

Aprender el concepto de función exponencial y de función en general no se debe reducir a la memorización de definiciones, algoritmos y fórmulas, porque aprender matemáticas implica desarrollar conocimiento, y de manera simultánea: habilidades, destrezas, aptitudes y hábitos en los estudiantes (NCTM, 2000), quienes deben aprender a transferir su conocimiento a situaciones más allá de la escuela. ¿Cómo lograrlo? De acuerdo con perspectivas como la de Modelos y modelación (Lesh & Doerr, 2003) y la perspectiva de Resolución de problemas (Schoenfeld, 1992), entre los aspectos esenciales que deben cuidarse está el diseño y análisis del tipo de tareas a proponer en el aula; así como el tipo de ambiente de aprendizaje que se genere (NCTM, 2000).

La tecnología es reconocida como un elemento importante en la resolución de problemas, por su carácter dinámico y no estático, así como por la facilidad del uso de múltiples representaciones; estos aspectos pueden utilizarse para propiciar una reflexión más profunda de la situación y conceptos matemáticos relacionados y, por lo tanto, para promover una ampliación o modificación de los tipos y formas de razonamiento matemático que desarrollan los estudiantes (Kaput y Roschelle, 1998; Lesh y Doerr, 2003). La tecnología permite que los estudiantes puedan trabajar casos particulares, los cuales pueden ser la base para apoyar la observación de patrones y el desarrollo de procesos de generalización. Conceptos angulares de la matemática como variación y tasa de cambio, base para el desarrollo de conceptos como función y ecuación, pueden ser abordados de una manera no estática a través del software dinámico.

Fundamentación teórica

El aprendizaje de las matemáticas puede ser considerado un proceso de desarrollo de sistemas conceptuales o modelos que están constantemente cambiando, en la medida que un individuo interacciona con un problema o situación (Lesh y Doerr, 2003). El conocimiento matemático puede considerarse como un organismo viviente y el desarrollo conceptual como un proceso gradual y contextualizado, complejo y no lineal, dinámico y en continua adaptación y auto organización (Lesh y Yoon, 2004). Los sistemas conceptuales o modelos iniciales tienden a ser burdos, pero en la medida que los estudiantes interactúan con las situaciones pueden extenderse, modificarse y refinarse; dando lugar a diferentes ciclos de comprensión (Lesh y Yoon, 2004).

Aprender matemáticas implica medir, comparar, buscar patrones, generalizar y modelar (Kaput, 1999; Lesh y Doerr, 2003). Los procedimientos que los estudiantes emprenden son más importantes que las soluciones del problema. El énfasis en el aprendizaje de las matemáticas debe hacerse en las grandes ideas como variación, tasa de cambio, función y ecuación. “Las funciones son herramientas para describir, explicar y predecir las relaciones entre cantidades que están cambiando” (Ärlebäck, Doerr y O'Neil, 2013, p. 315). El concepto de función se construye sobre la base del concepto de variación. La tecnología por su carácter dinámico puede apoyar la comprensión del concepto de variación, y función y propiciar una ampliación, modificación y refinamiento de las formas de razonamiento matemático. El aprendizaje de los estudiantes está estrechamente relacionado con la creación de formas de pensamiento o modelos que el estudiante revela o construye durante el proceso de solución de un problema, las cuales le permiten interpretar, describir y explicar situaciones (Lesh, 2010).

Las actividades o situaciones son esenciales para la construcción y modificación de significados, así como el apoyo en tecnología y softwares, los cuales permiten a los estudiantes utilizar distintas representaciones. El papel del docente en el proceso de aprendizaje es esencial (Schoenfeld, 1992). Debe diseñar los problemas o situaciones, y generar un ambiente en el aula propicio para el desarrollo de conocimiento, habilidades, destrezas y hábitos. Al estudiante se le debe permitir utilizar sus propios conocimientos, procedimientos y hábitos al resolver una situación (Lesh y Doerr, 2003); el papel del profesor debe centrarse en apoyar que el estudiante los modifique, extienda o refine.

Metodología

La Actividad que en esta comunicación se presenta y analiza trata de relacionarse con problemas que comúnmente son señalados como de la "vida real" (Lesh y Doerr, 2003). Con el diseño de la Actividad, se pretende que los estudiantes modifiquen y refinen sus modelos o formas de pensar en torno al concepto de función, función exponencial y conceptos asociados, esto en el sentido de la concepción de aprendizaje de la perspectiva de Modelos y Modelación (Lesh, 2010).

La población de estudiantes con la cual puede trabajarse esta APM, como ya se mencionó, son estudiantes de nivel medio superior o superior (17 y 18 años) cuyo curso de matemáticas aborde el concepto de función exponencial. Puede trabajarse en un ambiente de Resolución de problemas, donde se entregue la Actividad al grupo conformado previamente en equipos de estudiantes. Una vez que los equipos tengan avances sustanciales, se sugiere se promueva una discusión grupal con énfasis en la exposición de los procedimientos. Se deben discutir los procedimientos de manera grupal, de tal manera que se desarrolle una mejor comprensión de la situación y de los conceptos matemáticos inmersos.

Se sugiere el uso de Geogebra o de Excel para simular una familia de problemas, una vez que se ha modelado uno de ellos.

Actividad Provocadora de Modelos (APM)

La APM se relaciona con el tema de la jubilación o el ahorro para el retiro y consiste en lo siguiente: Un artículo de periódico, preguntas sobre el contexto y un problema. Para la implementación de la actividad se sugiere que la disposición del grupo sea en equipos de tres integrantes. A cada equipo se le entregaría el artículo de periódico y se podría solicitar la lectura por equipo o en grupo. El objetivo del artículo es generar interés en el tema. Posterior a la lectura, se les entregaría una hoja con preguntas de comprensión con respecto a la lectura. Después de comentar las preguntas en el grupo se sugiere entregar a cada equipo el Problema *Ayuda a Mateo* (Figura 1) e indicar a los estudiantes que redacten una carta donde ayuden a Mateo a resolver sus dudas sobre el ahorro para el retiro. Durante el proceso de solución del problema, el docente debe recordar que lo importante es ese proceso de resolución del problema, más que responder las preguntas. En una APM el producto es el proceso (Lesh y Doerr, 2003).

Problema 1. Ayuda a Mateo

Mateo un chico Chetumaleño de 19 años, acaba de obtener su primera oportunidad de trabajo como cajero.

En la firma del contrato le dieron una pequeña orientación sobre el pago de su sueldo, el cual es de $1400 mensual. Le explicaron brevemente sobre las deducciones que se le deben de realizar conforme a la ley. Entre ellas la cuota obrera para cesantía y vejez con la cual le descuentan el 1.125% de su salario para aportarla a su fondo de ahorro para el retiro. La encargada de recursos humanos le comenta que este fondo genera un interés el cual se acumula al fondo al final de cada mes, esto dependiendo de la AFORE que elija.

Siendo su primer trabajo, Mateo sale de la firma del contrato con la duda de cómo elegir ello. Solicita información vía correo electrónico a la AFORE XXI Banorte donde tú eres parte del equipo de atención a clientes, por lo que deberás redactar una carta donde le ayudes a aclarar sus dudas a Mateo, explicándole detalladamente tus procedimientos:

1. ¿Cuánto dinero tendrá en su fondo al final del primer mes si su sueldo continúa siendo del mismo monto?
2. ¿Cuánto dinero tendrá en su fondo al final del segundo mes si su sueldo continúa siendo del mismo monto?
3. ¿Cuánto dinero tendrá en su fondo al final del cuarto mes si su sueldo continúa siendo del mismo monto?
4. ¿Cuánto dinero tendrá en su fondo al final del doceavo mes si su sueldo continúa siendo del mismo monto?
5. ¿Cuánto dinero tendría en el fondo cuando llegue a la edad de su jubilación si su sueldo continúa siendo del mismo monto?
6. ¿Por qué debería elegir tu AFORE y no otra?

Cuentas con la siguiente información:

La aportación total a una cuenta de Afore está compuesta por la parte del patrón 5.15%, la del empleado 1.125% y del Gobierno Federal 0.225%, calculado del Salario Base del empleado.

El rendimiento que genera tu fondo de ahorro, se acumula al capital final de cada intervalo de tiempo previsto.

Requisitos para tener derecho a pensión por cesantía (vejez) para la Ley de 1997, Artículo 162 de la Ley del Seguro Social

Tener 65 Años Cumplidos,
Tener como Mínimo 1,250 Semanas de Cotización.
Cumplir con los requisitos anteriores a la Ley del '73, (son los mismo)

Información de AFORES

AFORE	RENDIMIENTO	COMISION %
Sura	11.45	1.21
Profuturo	11.12	1.27
Banamex	10.85	1.16
MetLife	10.81	1.39
XXI Banorte	10.72	1.1
Principal	10.55	1.36
Azteca	8.9	1.45
Coppel	7.96	1.49
Afirme Bajío	7.61	1.4
Inbursa	5.79	1.17
FUENTE: CONSAR.		

Figura 1. Problema 1 Ayuda a Mateo

Análisis de la APM

Es importante mencionar que actividades como estas se han implementado desde el año 2010 en el marco de uno de los proyectos de la Universidad de Quintana Roo. Ello posibilita hacer un previo análisis de lo que puede ocurrir en el aula al presentar esta Actividad, además de que este análisis permite conocer la APM y su potencial para desarrollar conocimiento en el aula.

Cuando se presenta una actividad como ésta, la discusión de los estudiantes puede girar, inicialmente, en torno a experiencias personales o de un pariente, relacionadas con la temática. Es importante esta etapa porque denota cómo los estudiantes están inmersos en la Actividad. Enseguida, los estudiantes revisan la terminología que se maneja en el Problema, analizan la situación, de manera cualitativa, y conjeturan. En este caso, lo común es que manifiesten que el ahorro está creciendo. Inclusive, algunos estudiantes se podrán imaginar un crecimiento lineal. Posteriormente, los estudiantes podrían empezar a realizar cálculos con los datos identificados en el Problema.

Uno de los procedimientos iniciales podría ser que calcularan la aportación que entrará al ahorro administrado por la AFORE, así como el rendimiento neto.

Porcentaje total de la portación: $5.15 + 1.125 + 0.225 = 6.5$
Monto que entraría al fondo de ahorro: $1400(.065)=91
Rendimiento neto (Tabla 1): 10.72-1.1=9.62

Partiendo de ello los estudiantes podrían resolver el Problema empleando formas y representaciones diferentes. Una primera representación podría ser la representación numérica, usando procesos recursivos, y quizás auxiliándose con una tabla.

Procedimiento numérico recursivo. Los estudiantes podrían comenzar a responder las preguntas planteadas en el problema acudiendo a una forma recursiva en la que los alumnos sólo realicen operaciones numéricas obteniendo los montos ahorrados al final de cada periodo. Esto lo podrían realizar directamente en la calculadora, sin tomar nota de las estructuras matemáticas, sin observar algún patrón, de la siguiente forma:

En el primer pago de Mateo (cero meses transcurridos), sólo le realizan el descuento a ingresar a su fondo de ahorro que es de $91.

Transcurrido el primer periodo, Mateo tendrá la aportación del periodo al fondo más el monto inicial aportado con su 9.62% (0.0962) de rendimiento; es decir:

91+91+0.0962 (91)= 182+8.7542= 190.75

Para el monto del fondo de ahorro a final del segundo periodo, Mateo tendrá la aportación del periodo al fondo más el rendimiento correspondiente, así como lo que obtuvo el primer mes más 9.62% de esa cantidad; es decir:

91+190.75+0.0962 (190.75)=300.10

Los estudiantes podrían calcular el monto para el tercer periodo aunque no se le solicite, ya que en el procedimiento que se plantearon requeriría el monto generado en ese periodo para poder calcular el monto para el cuarto periodo.

Calculando el monto del fondo al final del tercer periodo 91+300.10+0.0962 (300.10)=419.96
Calculando el monto del fondo al final del cuarto periodo 91+419.96+0.0962 (419.96)=551.37

Para responder a la pregunta ¿Cuánto dinero tendrá en su fondo al final del doceavo mes si su sueldo continúa siendo del mismo monto? Es probable que algunos de los estudiantes sigan la misma lógica, calculando los montos predecesores a ese periodo.

⋮

Calculando el monto del fondo al final del onceavo periodo
91+1652.14+ 0.0962 (1652.14)=1902.08
Calculando el monto del fondo al final del doceavo periodo
91+1902.08+ 0.0962 (1902.08)= 2176.06

Este procedimiento les podría resultar accesible a los estudiantes en sus ciclos iniciales de comprensión (Lesh y Yoon, 2004), donde los montos a calcular son al final de periodos cortos y con lo cual podrían obtener respuestas rápidas. Algunos estudiantes seguramente se quedarían con este procedimiento y continuarían los cálculos hasta encontrar las respuestas a las preguntas planteadas.

La dificultad quizá iniciaría al intentar contestar la última pregunta. Los estudiantes preguntarían ¿Es necesario hacer todos los cálculos? ¿No hay alguna otra manera de obtener la cantidad solicitada? ¿Existe alguna fórmula?

Procedimiento numérico tabular. Otro procedimiento para abordar el Problema podría ser mediante el empleo de una tabla de datos. Podrían resolver el Problema empleando una tabla como la mostrada a continuación (Tabla 1). Donde quizás aún empleen procesos recursivos, pero organizados en una tabla de datos.

Tabla 1.
Ejemplo de representación tabular de los estudiantes

Periodos transcurridos	**Rendimiento**	**Monto del sueldo a fondo**	**Monto del periodo anterior**	**Intereses ganados de monto anterior**	**Monto final del periodo**
0	0.0962	91	0.00	0.00	91.00
1	0.0962	91	91.00	8.75	190.75
2	0.0962	91	190.75	18.35	300.10
3	0.0962	91	300.10	28.87	419.97
4	0.0962	91	419.97	40.40	551.38
5	0.0962	91	551.38	53.04	695.42
6	0.0962	91	695.42	66.90	853.32
7	0.0962	91	853.32	82.09	1026.41
8	0.0962	91	1026.41	98.74	1216.15
9	0.0962	91	1216.15	116.99	1424.14
10	0.0962	91	1424.14	137.00	1652.14
11	0.0962	91	1652.14	158.94	1902.08
12	0.0962	91	1902.08	182.98	2176.06
13	0.0962	91	2176.06	209.34	2476.40

Los estudiantes sin especificarlo podrían realizar los siguientes cálculos entre los valores de las columnas

Intereses ganados de monto anterior (Columna 5, Tabla 2): Rendimiento (Columna 2, Tabla 2)* Monto periodo anterior (Columna 4, Tabla 2)

Monto del periodo anterior (Columna 3, fila n, Tabla 2): Monto final del periodo (Columna 6, fila n-1, Tabla 2)

Monto final del periodo (Columna 6, Tabla 2): Monto del sueldo a fondo (Columna 3, Tabla 2) + Monto del periodo anterior (Columna 4, Tabla 2)+ Intereses ganados de monto anterior (Columna 5, Tabla 2)

Tabla 2.
Referencia para cálculos entre valores de columnas.

Tiempo transcurrido en meses	**Rendimiento**	**Monto del sueldo a fondo**	**Monto del periodo anterior**	**Intereses ganados de monto anterior**	**Monto final del periodo**
(Columna 1, Fila n)	(Columna 2, Fila n)	(Columna 3, Fila n)	(Columna 4, Fila n)	(Columna 5, Fila n)	(Columna 6, Fila n)
(Columna 1, Fila n+1)	(Columna 2, Fila n+1)	(Columna 3, Fila n+1)	(Columna 4, Fila n+1)	(Columna 5, Fila n+1)	(Columna 6, Fila n+1)

La tabla podría surgir entre los primeros *ciclos de comprensión* (Lesh y Yoon, 2004) de los estudiantes, o como un refinamiento de procedimientos numéricos recursivo o de operaciones escritas desorganizadamente. En la tabla los estudiantes podrían comenzar a organizar y sistematizar las operaciones llevadas a cabo.

El maestro podría apoyar con preguntas a los estudiantes para la identificación de patrones, lo cual sabemos es importante en la matemática de acuerdo con Schoenfeld (1992) y Lesh (2010) y se relaciona con los conceptos de función y variación. Las preguntas que se sugieren son del siguiente tipo ¿De qué otra forma se puede rescribir la expresión utilizando el monto anterior? ¿Qué datos empleas del cálculo del monto anterior para calcular el siguiente? Con ello se orientaría al estudiante a la siguiente forma de análisis:

Sistematización de la información al identificar patrones.

La aportación inicial al fondo de Mateo es de Mo = 91.
Al cabo de un mes, tendrá la cantidad de:

$$M_1=91+91+0.0962\ (91)=190.75$$

Esta cantidad, también puede ser escrita como:

$$M_1=91+\mathbf{Mo}+0.0962\ \mathbf{Mo}=190.75$$

Al cabo de dos meses, Mateo tendrá la aportación del periodo actual, así como lo que obtuvo el primer mes, más 9.62% de esa cantidad; es decir:

Partiendo de la forma numérica explicada anteriormente:

$$M_2 = 91 + \boldsymbol{M_1} + 0.0962\ \boldsymbol{M_1} = 300.1$$

Simplificando los términos en negritas

$$M_2 = 91 + 1.0962\ \boldsymbol{M_1} = 300.1$$

Para analizar el monto en el fondo al cabo de tres meses, Mateo tendrá la aportación del tercer mes, más lo que obtuvo el segundo mes con el rendimiento 9.62% de esa cantidad; es decir:

$$M_3 = 91 + \boldsymbol{M_2} + 0.0962\boldsymbol{M_2} = 419.97$$

Simplificando los términos en negritas

$$M_3 = 91 + 1.0962\boldsymbol{M_2} = 419.97$$

Así para el monto en el fondo al cabo de cuatro meses, se le orienta al estudiante a observar la misma relación, la aportación del cuarto mes, más el fondo que obtuvo el tercer mes más 9.62% de esa cantidad:

$$M_4 = 91 + 1.0962\boldsymbol{M_3} = 551.38$$

Respondiendo a la pregunta ¿Cuánto dinero tendrá en su fondo al final del doceavo mes si su sueldo continúa siendo del mismo monto? Los estudiantes podrían seguir la misma lógica, calculando los montos predecesores a ese periodo, el maestro debe conducir a los estudiantes a explicitar el patrón identificado para obtener la siguiente expresión (Lesh, 2010):

$$\vdots$$

$$M_{12} = 91 + 1.0962\boldsymbol{M_{11}} = 1902.08$$

Un análisis como éste podría ser aprovechado por el profesor para apoyar los procesos de generalización (mencionados por Schoenfeld, 1992) y la escritura en forma algebraica de los procedimientos.

A partir de este procedimiento, es importante el papel del docente (NCTM, 2003) para promover una reflexión que permita a los estudiantes proponer y escribir una relación funcional que permita contestar la pregunta ¿Cuánto dinero tendría en el fondo cuando llegue a la edad de su jubilación si su sueldo continúa siendo del mismo monto? sin hacer tantos cálculos.

Procedimiento algebraico. Las preguntas ¿Cuánto dinero tendrá en su fondo al final del primer mes si su sueldo continúa siendo del mismo monto? ¿Cuánto dinero tendrá en su fondo al final del segundo, cuarto y doceavo mes si su sueldo continúa siendo del mismo monto? tienen como finalidad que el alumno al ordenar la información y analizar las operaciones, pueda generalizar sus procedimientos hasta contestar la pregunta relacionada con la edad de la jubilación.

Hasta la pregunta ¿Cuánto dinero tendrá en su fondo al final del onceavo mes si su sueldo continúa siendo del mismo monto? el alumno podría realizar los procedimientos descritos anteriormente. Sin embargo, se sugiere que el docente junto con los estudiantes analicen sus operaciones de la siguiente manera.

La aportación inicial al fondo de Mateo es de Mo =91.

Al cabo de un mes, tendrá la cantidad de:

$$M_1 = 91 + Mo + 0.0962\ (Mo) = 190.75$$

Esta cantidad, también puede ser escrita como:

$$M_1 = 91 + 91 + 0.0962\ (91) = 190.75$$
$$M_1 = 91 + 91(1.0962) = \mathbf{91[1 + 1.0962]} = 190.75$$

Al cabo de dos meses, Mateo tendrá la aportación del periodo actual, así como lo que obtuvo el primer mes, más 9.62% de esa cantidad; es decir:

Partiendo de la forma numérica explicada anteriormente:

$$M_2 = 91 + \boldsymbol{M_1} + 0.0962\ \boldsymbol{M_1} = 300.1$$

Simplificando los términos en negritas

$$M_2 = 91 + 1.0962\ \boldsymbol{M_1} = 300.1$$

Cantidad que puede ser reescrita recordando que $\boldsymbol{M_1}$=**91[1+ 1.0962]**

$$M_2 = 91 + 1.0962[\mathbf{91} + \mathbf{91}(\mathbf{1.0962})] = 300.1$$
$$M_2 = 91 + 91 \cdot 1.0962 + \mathbf{91} \cdot \mathbf{1.0962^2} = 300.1$$
$$M_2 = 91(1 + 1.0962 + 1.0962^2) = 300.1$$

Para analizar el monto en el fondo al cabo de tres meses, Mateo tendrá la aportación del tercer mes, más lo que obtuvo el segundo mes con el rendimiento 9.62% de esa cantidad; es decir:

$$M_3 = 91 + \boldsymbol{M_2} + 0.0962\boldsymbol{M_2}$$

Simplificando los términos en negritas

$$M_3 = 91 + 1.0962\boldsymbol{M_2}$$

O bien:

$$M_3 = 91 + 1.0962 \cdot \mathbf{91}(\mathbf{1} + \mathbf{1.0962} + \mathbf{1.0962^2})$$

Simplificando los términos puede ser rescrita como

$$M_3 = 91 + 91(1.0962 + 1.0962^2 + 1.0962^3)$$
$$M_3 = 91[1 + 1.0962 + 1.0962^2 + 1.0962^3]$$

Así para el monto en el fondo al cabo de cuatro meses, se propone orienta al estudiante a observar la misma relación, la aportación del cuarto mes, más el fondo que obtuvo el tercer mes más 9.62% de esa cantidad:

$$M_4 = 91 + 1.0962M_3$$
$$M_4 = 91 + 1.0962 \cdot \mathbf{91[1 + 1.0962 + 1.0962^2 + 1.0962^3}]$$

O bien:

$$M_4 = 91 + 91[\mathbf{1.0962 + 1.0962^2 + 1.0962^3 + 1.0962^4}]$$

Cantidad que puede ser rescrita como

$$M_4 = 91(1 + \mathbf{1.0962 + 1.0962^2 + 1.0962^3 + 1.0962^4})$$
$$M_4 = 91(1 + \mathbf{1.0962 + 1.0962^2 + 1.0962^3 + 1.0962^4})$$

Para responder la pregunta ¿Cuánto dinero tendrá en su fondo al final del doceavo mes si su sueldo continúa siendo del mismo monto? Los estudiantes podrían seguir la misma lógica, calculando los montos predecesores a ese periodo, el maestro debe conducir a los estudiantes a identificar el patrón para obtener la siguiente expresión:

$$M_{12} = 91(1 + \mathbf{1.0962 + 1.0962^2 + 1.0962^3 + 1.0962^4} + \cdots + \mathbf{1.0962^{12}})$$

Donde las respuestas a las preguntas del Problema las podrían expresar de la siguiente forma:

a) Monto al final del primer mes:

$$M_1 = 91[1 + \ 1.0962]$$

b) Monto al final del segundo mes:

$$M_2 = 91(1 + 1.0962 + 1.0962^2)$$

c) Monto al final del cuarto mes:

$$M_4 = 91(1 + 1.0962 + 1.0962^2 + 1.0962^3 + 1.0962^4)$$

d) Monto al final del doceavo mes:

$$M_{12} = 91(1 + 1.0962 + 1.0962^2 + 1.0962^3 + \cdots + 1.0962^{12})$$

Ante la pregunta ¿Cuánto dinero tendría en el fondo cuando llegue a la edad de su jubilación si su sueldo continúa siendo del mismo monto?, el estudiante podría razonar que el tiempo a calcular es la diferencia de la edad para ello menos la edad actual de Mateo: 65-19=46 años. Conociendo que son 46 años, entonces deberán calcular el monto del fondo para ese tiempo en meses: 46(12)= 552 meses.

En otro *ciclo de comprensión*, a los estudiantes se les podría ocurrir que la solución correspondería a la siguiente expresión:

$$M_{552} = 91(1 + 1.0962 + 1.0962^2 + \cdots + 1.0962^{100} + \cdots + 1.0962^{300} + \cdots + 1.0962^{552})$$

El maestro debería preguntar a los estudiantes ¿Cuál es la expresión matemática que nos permitiría calcular la cantidad de dinero que tendrá Mateo al cabo de cualquier cantidad de años? Los estudiantes podrían analizar casos particulares que les permitieran responder preguntas como ¿Qué relación encuentras entre el periodo del fondo que se está calculando y el exponente de la expresión? ¿Podrías definir la expresión para calcular el monto del fondo de Mateo al momento de su retiro?

El docente podría apoyar la deducción de la forma general a partir de (1)

$$M_n = 91 + 91(1.0962) + 91(1.0962^2) + 91(1.0962^3) + \cdots + 91(1.0962^n) \quad (1)$$

$$1.0962M_n = 91(1.0962) + 91(1.0962^2) + 91(1.0962^3) + 91(1.0962^4) + \cdots + 91(1.0962^{n+1}) \quad (2)$$

Luego, restando (2) a (1)

$$M_n - 1.0962M_n = 91 - 91(1.0962^{n+1})$$

$$M_n(1 - 1.0962) = 91(1 - 1.0962^{n+1})$$

Despejando M_n

$$M_n = 91\frac{(1-1.0962^{n+1})}{(1-1.0962)} \quad (3)$$

Obteniendose así una relación funcional útil para los estudiantes para responder cualquier pregunta relacionada con la cantidad de dinero que tendrá Mateo al cabo de cualquier cantidad de años.

Para responder las primeras preguntas del Problema basta considerar situaciones particulares (monto ahorrado en determinado tiempo). Sin embargo, para generalizar, se requiere que los estudiantes sean capaces de organizar sus procedimientos, observar o identificar patrones y relaciones (Schoenfeld, 1992; Lesh y Doerr, 2003). Escribir la relación funcional no es un paso sencillo, aun cuando los estudiantes sean universitarios, lograr acceder a este *ciclo de comprensión* requiere con frecuencia del apoyo del docente. El apoyo puede brindarse a través del planteamiento de preguntas que promuevan la reflexión durante el trabajo en equipo o en sesiones grupales, donde cada equipo exponga sus avances. Inclusive a través de proponerles otras situaciones que les permitan evaluar su modelo. Por ejemplo, se les puede solicitar que respondan las mismas preguntas para otra situación similar, en este caso utilizando otro banco (AFORE), como se muestra a continuación.

Comparación de modelos y extensión hacia el análisis del ahorro para otras AFORES. Como respuesta a la pregunta ¿Por qué debería elegir tu AFORE y no otra? el alumno podría calcular el monto que tendría Mateo para los mismos periodos que se indican en las preguntas anteriores a éste, pero eligiendo AFORES con diferentes rendimientos. El maestro podría orientar la discusión hacia reflexionar la pregunta ¿Funcionan los modelos construidos para analizar el ahorro utilizando otras AFORES?

Con ello se pretende apoyar la comparación del monto final ahorrado considerando distintas AFORES y propiciar la construcción de modelos gráficos que permita al estudiante refinar sus *ciclos de comprensión* respecto a los conceptos matemáticos: variación y función, al comparar y analizar una familia de problemas. Debido a que el estudiante ya realizó un análisis a lápiz y papel de la situación, ésta sección es recomendable abordarla con el apoyo de software donde se trabajen hojas de cálculo y graficación (EXCEL, Geogebra). Con la meta de ahorrar tiempo en los cálculos que ya se analizaron anteriormente, e invertirlo mejor en el análisis de la situación y conceptos matemáticos desde modelos diferentes (Figura 1).

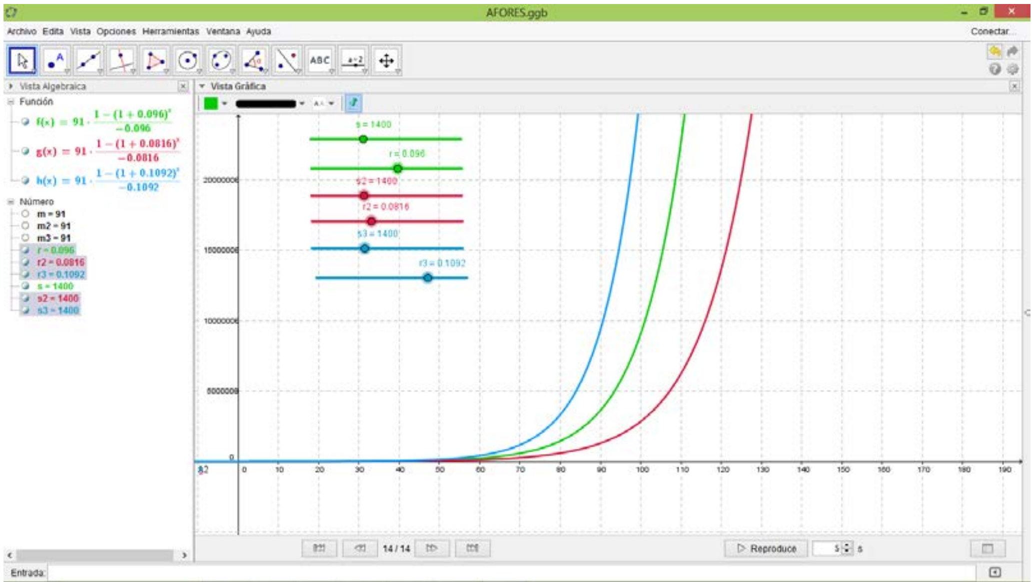


Figura 2. Ejemplo de representaciones tabulares y gráficas que se esperan analizar con estudiantes.

La ventaja de usar Geogebra para simular la situación es que los estudiantes pueden hacer uso tanto de tablas de datos, como gráficas y fórmulas previamente obtenidas. Estas representaciones pueden ser desplegadas en una sola pantalla (Figura 2). Al generar dichas tablas y gráficos, el profesor puede dirigir la discusión a cuestionar a los alumnos qué sucedería con una tasa de rendimiento neta mayor o menor a la que le ofrecieron originalmente a Mateo. Pedir que generen conjeturas al respecto, previo a la simulación, tales como: ¿Cómo es el incremento del monto del fondo en el tiempo, si consideramos diferentes tasas de rendimiento? ¿Qué podemos decir acerca del monto inicial? ¿Cómo es el monto después de un determinado tiempo? ¿Qué ocurre con la intersección de la curva con el eje y? Estas preguntas permitirían analizar el significado de los parámetros en una función exponencial (Ärlebäck, Doerr, O'Neil, 2013).

Es importante pedir a los estudiantes que, como última actividad, indiquen un procedimiento a Mateo para calcular el monto final de ahorro dependiendo de la AFORE elegida, el cual le permita hacer comparaciones y tomar decisiones. La comunicación de los procedimientos por escrito, no sólo verbal, es un aspecto importante en una Actividad Provocadora de Modelos, debido a que apoya la construcción de conocimiento.

Conclusiones

Las actividades o situaciones que se implementan en el aula son esenciales para propiciar la construcción y modificación de significados, así como el apoyo en tecnología y softwares. El análisis de la Actividad y de los procesos de solución que aquí se presentan se aborda considerando heurísticas para la resolución de problemas y direcciones instruccionales, que pueden explotarse durante y posterior al surgimiento de diversos modelos al resolver esta Actividad. Coincidimos con Lesh y Yoon (2004) en cuanto a que la construcción de modelos por los estudiantes no sigue precisamente un desarrollo lineal, el tipo de modelos que surgen dependen de los recursos de cada estudiante. El papel del profesor, tal como lo menciona el NCTM (2003) es importante para apoyar el desarrollo de conocimiento, por lo tanto con el análisis que aquí se presenta se pretende apoyar al docente dando elementos que puedan servirle de reflexión para que ayude al estudiante a adaptar, modificar, extender y refinar modelos (Lesh y Doerr, 2003) o ideas que ellos tienen alrededor del concepto de función exponencial.

La Actividad se está experimentando para refinarla como una Actividad Provocadora de Modelos (APM o MEA por sus siglas en inglés: Model Eliciting Activity; Lesh, 2010) porque hemos encontrado que al resolver actividades de este tipo, los estudiantes conjeturan, observan patrones, generalizan y evalúan sus modelos o ideas matemáticas, lo cual es importante en el aprendizaje de las matemáticas.

Bibliografía

Ärlebäck, J. B., Doerr, H., & O'Neil, A. (2013). A Modeling Perspective on Interpreting Rates of Change in Context. *Mathematical Thinking and Learning,* 15(4), 314-336.

Dirección Académica de la Dirección General del Bachillerato. (03 de Junio de 2014). Subsecretaría de educación media superior. Obtenido de Dirección general del bachillerato: http://www.dgb.sep.gob.mx/02-m1/03-iacademica/01/programasdeestudio/cfb_4sem/Matematicas-IV.pdf

Kaput, J. & Roschelle, J. (1998). The mathematics of change and variation from a millennial perspective: New Content, new context. En C. Hoyles, C. Morgan, & G. Woodhouse (Eds.), *Mathematics for a new millennium* (pp. 155-170). London: Springer-Verlag.

Lesh, R. & Doerr, H. (2003). *Beyond constructivism: models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Lesh, R. A. (2010). Tools, Researchable Issues & Conjectures for Investigating what it Means to Understand Statistics (or other topics) Meaningfully. *Journal of Mathematical Modeling and Application*, 1(2), 16-48.

Lesh, R. & Yoon, C. (2004). Evolving Communities of Mind –In Which Development Involves Several Interacting and Simultaneously Developing Strands. *Mathematical Thinking and Learning*, 6(2), 205-226.

National Council of Teachers of Mathematics. (2003). *Principios para la Educación Matemática*. (M. Fernández, Trad.). España: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales. (Trabajo original publicado en 2000).

National Council of Teachers of Mathematics. (2011). *Developing essential understanding of expressions, equations and functions*. Reston, VA: NCTM

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition and sense-making in mathematics. En D. Grows (Ed.), *Handbook for research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan.

Steen, L. A. (2003). *La enseñanza agradable de las matemáticas.* D.F., México: Limusa.

Torres, Y. (2013). En México no se ahorra lo suficiente para la jubilación. *El Economista.* Recuperado el 8 http://eleconomista.com.mx/finanzas-personales/2013/09/18/usted-apuesta-retiro-laboral-comodo.

Modelagem Matemática na Educação Matemática: análise de artigos sob critérios de cientificidade

Daniel Zampieri **Loureiro**
Universidade Estadual do Oeste do Paraná-Cascavel
Brasil
zampiieri@hotmail.com
Wellington Piveta **Oliveira**
Universidade Estadual do Oeste do Paraná-Cascavel
Brasil
wellingtonmat09@hotmail.com
Tiago Emanuel **Klüber**
Universidade Estadual do Oeste do Paraná-Cascavel
Brasil
tiagokluber@gmail.com

Resumo

Este trabalho investigou alguns aspectos, no que tange ao rigor e cientificidade das pesquisas em artigos de Modelagem Matemática na Educação Matemática. Para isso, estabelecemos a questão: "*Os artigos de Modelagem Matemática na Educação Matemática publicados na base do Scielo, atendem minimamente alguns dos critérios de cientificidades estabelecidos por Laperrière (2010)?"*. A partir dessa questão, nos pautamos nos seguintes critérios *validade interna*, *validade externa* e *confiabilidade*. Para o levantamento dos trabalhos analisados, recorremos a referida base, utilizando os termos como parâmetros, "Modelagem Matemática", "Educação" e "Educação Matemática". Os resultados dessa pesquisa qualitativa indicam o atendimento dos critérios, embora alguma delas apresentem fragilidades, por exemplo, na concepção metodológica adotada e nos instrumentos utilizados a fim de garantir a confiabilidade dos dados.

Palavras chave: Metaestudo, Revisão bibliográfica, Pesquisa qualitativa, Educação Matemática; Modelagem Matemática.

Introdução

As preocupações de como as pesquisas têm se apresentado, não só no Ensino de Ciências, como nas demais áreas do conhecimento, têm sido foco de discussões de vários pesquisadores. (André, 2001; Lüdke, 1988; Laperrière, 2010). Autores como André (2001, p. 54), têm refletido sobre a trajetória e os novos rumos que as pesquisas em Educação têm assumido no contexto brasileiro, apontando, por exemplo, para o "[...] questionamento dos instrumentais teórico-metodológicos disponíveis e dos parâmetros usuais para o julgamento da qualidade do trabalho científico". Segundo a autora, fruto de vários debates entre a perspectiva metodológica e epistemológica assumida no escopo das pesquisas, culminaram em discussões sobre conceitos de cientificidade, como realizou Laperrière (2010).

Partindo desse pressuposto, esse trabalho converge para as discussões fomentadas pelo projeto de pesquisa intitulado “Modelagem Matemática na Educação Matemática: Metapesquisa e Formação de Professores”, aprovado no edital universal da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES, sob o processo nº 406721/2013-0, aos quais os autores são vinculados. Justifica-se também pelo fato de propiciar nesse grupo, reflexões sobre os aspectos da pesquisa qualitativa, assim como, contribuir com a formação técnico-científica no que se refere à produção e análise de artigos científicos.

Nessa perspectiva, com intuito de fomentar discussões, vivenciar a análise de alguns critérios, e contribuir para a produção de pesquisas com um olhar mais criterioso, apresentamos nas próximas seções a descrição de alguns critérios de cientificidade, denominados por Laperrière (2010), critério de validade interna, validade externa e confiabilidade os quais subsidiaram teoricamente nossa investigação.

Partindo dessa reflexão, descrevemos uma análise empreendida nos trabalhos que emergiram da busca na Plataforma do *Scielo*, concernentes a uma abordagem da Modelagem Matemática na Educação Matemática[1], os quais foram selecionados por meio dos seguintes termos: “Modelagem Matemática”, “Educação” e “Educação Matemática”. Orientados pela questão: *“Os artigos de Modelagem Matemática na Educação Matemática publicados na base do Scielo, atendem minimamente alguns dos critérios de cientificidades estabelecidos por Laperrière (2010)?”*, lançaremos o olhar sobre os trabalhos, buscando fomentar discussões a fim de trazer a tona respostas para a questão estabelecida. Justificamos ainda a escolha dessa temática, por ser uma linha de investigação assumida por nós e por não termos identificado trabalhos com essa característica, no período de realização dessa pesquisa.

Critérios de cientificidades: uma compreensão

Durante décadas, a pesquisa qualitativa em Educação foi submetida aos processos de investigação referente aos métodos quantitativos e experimentais, que por consequência, neutralizavam as particularidades da subjetividade humana e do próprio contexto de desenvolvimento da pesquisa. Nesse sentido, indiciava-se uma lacuna entre o ambiente da pesquisa e a pertinência dos dados (Laperrière, 2010).

Entendemos por pesquisa qualitativa, aquela que busca através de um processo minucioso de investigação, por meio de métodos, técnicas e análises, explicitar a compreensão, daquilo que se mostram da essência dos fenômenos investigados (Bicudo, 2011), e nesse sentido podem ser considerados “[...] estudos do tipo etnográfico, pesquisa participante, estudos de caso, pesquisa-ação até análises de discurso e de narrativas, estudos de memória, histórias de vida e história oral” (André, 2001, p. 54).

É nesse contexto que, por volta de 1950, as ações por parte de pesquisadores, buscaram renovações nos aspectos qualitativos de pesquisa, tomando como base a sociologia interpretativa, a filosofia pragmática e a fenomenologia (Laperrière, 2010). Com essa nova perspectiva, as

[1] Para fins textuais, utilizaremos apenas Modelagem, quando nos referirmos a Modelagem Matemática na Educação Matemática. Visto que, a Modelagem neste contexto “[...] pode ser compreendida como um caminho para o processo de ensino e aprendizagem da Matemática ou para o ‘fazer’ Matemática em sala de aula, referindo-se à observação da realidade (do aluno ou do mundo) e, partindo de questionamentos, discussões e investigações, defronta-se com um problema que modifica ações na sala de aula, além da forma como se observa o mundo” (Meyer, Caldeira, Malheiros, 2011, p. 79).

metodologias de pesquisa passaram a redefinir diversos posicionamentos em contraposição ao positivismo, por exemplo, quando a realidade contextual, os papéis da intencionalidade do pesquisador, as diversas experiências do saber humano, o mundo complexo que permeia a sociedade, entre outros aspectos, passam a se manifestar nas descrições científicas em Ciências Humanas (Laperrière, 2010).

Caracterizada por novos debates e novos rumos metodológicos e epistemológicos acerca dos métodos qualitativos, "[...] uma nova definição do rigor nas ciências humanas [...]" (Laperrière, 2010, p. 412) se instaura de modo consensual entre a multiplicidade de critérios, estabelecendo-se, portanto os essenciais, visando maximizar a cientificidade dos resultados dessas pesquisas, cuja abordagem é qualitativa.

Esses critérios foram organizados, portanto, para que os pesquisadores possam refletir continuamente, quanto ao seu objeto de pesquisa, os procedimentos utilizados, as linhas que sustentaram teoricamente sua investigação, e principalmente a fim de propiciarem a qualidade e ênfase nas análises, quando estas são fruto de um processo interativo entre sujeito e pesquisador. Outros aspectos influentes que dizem dessa renovação das metodologias qualitativas podem ser notados quando Laperrière (2010) discute a necessidade de se compreender amplamente tanto o contexto quanto o objeto de pesquisa, e delimitá-lo de modo suficiente, garantindo uma análise em profundidade.

Esse processo faz surgir efeitos positivos quanto à confiabilidade dos dados da pesquisa, visto que, "[...] é por meio da implicação prolongada do pesquisador nas situações naturais, bem como pela análise destas enquanto processo, que os metodologistas qualitativos esperam apreender as flutuações dos fenômenos sociais" (Laperrière, 2010, p. 421). Em consonância, essa validação consiste quando os "[...] objetivos perseguidos pelo pesquisador, suas orientações teóricas e seus dados empíricos, sejam finamente articulados" (idem, 2010, p. 419). Diríamos que, mais ainda, o rigor é pré-estabelecido "[...] da solidez das ligações estabelecidas entre nossas interpretações teóricas e nossos dados empíricos" (ibidem, 2010, p. 419).

Em resumo, Laperrière (2010, p. 421) afirma que:

> [...] o conjunto das considerações precedentes, sobre a complexidade e a fluidez do mundo, levou os pesquisadores qualitativos a privilegiar uma abordagem indutiva e a implicação prolongada do pesquisador no contexto natural, visando permitir levar em conta a esfera do real, simultaneamente à apreensão dos diversos níveis de realidade, e também das diferentes perspectivas sobre esta e de suas interações.

Essa nova perspectiva assumida, trouxe contribuições à diversas áreas do conhecimento, por exemplo, às Ciências Humanas, quando passaram a redefinir os critérios convencionais de cientificidade. Essa redefinição foi subdividida pela autora em três grandes eixos, com vistas a resultados de pesquisas mais consistentes. Sejam eles, critérios de: *1) validade interna; 2) validade externa;* e *3) confiabilidade.* Explicitaremos a seguir, alguns elementos gerais desses critérios, visto que, a autora os descreve com precisão em sua obra[2].

O critério de *validade interna* consiste em contemporizar e "[...] garantir a exatidão e a pertinência da ligação entre interpretações e observações empíricas, restituindo ao *sentido* seu lugar central na análise dos fenômenos humanos, pela consideração do papel da *subjetividade*

[2] Laperrière, Anne. Os critérios de cientificidade dos métodos qualitativos. In: *A pesquisa qualitativa*: enfoques epistemológicos e metodológicos. 2 ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2010.

[...]" (Laperrière, 2010, p. 429, grifos da autora), assim como a consideração de todas as influências que recebe do "contexto natural". Ou seja, devemos considerar a subjetividade humana, a observação no contexto natural e a concordância entre as observações empíricas e sua interpretação. Assim, subtende-se que, o que está em jogo nesse processo de investigação não é só o posicionamento do pesquisador e dos sujeitos, ou o contexto em que a pesquisa se desenvolve, mas, o saber administrar o confronto entre as bases teóricas (objetividade) e o posicionamento do pesquisador (subjetividade), e sim procurar de certa forma estabelecer uma "concordância" entre os dados empíricos e sua interpretação (Laperrière, 2010). Além da integração de análises contínuas, críticas, reflexivas e descrições mais aprofundadas, podemos afirmar que esta modalidade agrega às pesquisas "[...] a condição de que sejam rigorosamente especificadas as ligações entre as observações empíricas e os objetivos, a perspectiva teórica e as metodologias específicas da pesquisa" (Laperrère, 2010, p. 430).

Os critérios de *validade externa*, "[...] visam estabelecer a utilidade geral dos resultados de pesquisas qualitativas" (Laperrière, 2010, p. 431). Entretanto, há dois grandes grupos de pesquisadores qualitativos com posicionamentos distintos. Um deles rejeitando totalmente essa possibilidade de generalização. E outro que divergem dessa possibilidade de generalização dos resultados. Esse segundo grupo subdivide-se em: afirmar que é possível esse processo de generalização, quando aplicados a outras situações, os caracterizando como hipóteses de trabalho; e outro, que não sustenta essa posição, a menos que, ocorra uma reestruturação "[...] em termos de profundidade da análise" (Laperrière, 2010, p. 431). Assim sendo, compreendemos que é possível depararmo-nos com ambas visões no decorrer das análises efetuadas.

Já o critério de *confiabilidade,* toma como essencial a "[...] estabilidade dos resultados, para substituí-la por uma definição mais flexível, na qual a reprodutibilidade significa aplicabilidade extensiva das análises no tempo e no espaço;" (Laperrière, 2010, p. 432)". Parafraseando, a busca pela confiabilidade se traduz em uma *descrição em profundidade;* em uma *implicação a longo termo* no campo de pesquisa, em que diminui as incertezas dos resultados; em utilizar *vários instrumentos*, por exemplo, a triangulação de dados.

Após tecermos algumas ideias gerais sobre os critérios de cientificidade, esclarecemos na próxima seção os procedimentos metodológicos que direcionaram nossa pesquisa.

Aspectos metodológicos

Ao olharmos para a questão *"Os artigos de Modelagem Matemática na Educação Matemática publicados na base do Scielo, atendem minimamente alguns dos critérios de cientificidades estabelecidos por Laperrière (2010)?"*, buscaremos elucidar os procedimentos que delinearam o desenvolvimento do trabalho. Consideramos ainda o cunho qualitativo de pesquisa, visto que,

> Nessa forma de conceber a investigação estão considerados enfoques de corte antropológico, fenomenológico, etnográfico e todos aqueles que se caracterizam por ser uma variedade da "observação participante". Oferece uma visão alternativa da objetividade e os métodos adequados para estudar o comportamento humano. Tais métodos são parte de uma tradição de investigação desenvolvida pelos antropólogos, quando contrários ao paradigma da Ciência Moderna, conforme (Santos, 2006 apud Burak; Klüber, 2008, p. 104).

Nessa perspectiva de pesquisa, desenvolvemos as seguintes etapas: coletamos os dados, realizamos a leitura de todos os resumos, subdividimos os artigos a serem analisados, estabelecemos os critérios, empreendemos as análises e descrevemos os resultados. De acordo com essas etapas, das quais constituíram a metodologia da pesquisa, recorremos à análise textual como procedimentos de análise, já que, não focamos a totalidade numérica dos trabalhos, mas sim o sentido das produções. Dessa forma, a análise textual nos permite:

> [...] preparação do texto; trabalhar sobre unidades delimitadas (um capitulo, uma seção, uma parte, etc., sempre um trecho com pensamento completo); fazer uma leitura rápida e atenta da unidade para se adquirir uma visão do conjunto da mesma; levantar esclarecimentos relativos ao autor, ao vocabulário especifico, aos fatos, doutrinas e autores citados, que sejam importantes para a compreensão da mensagem; esquematizar o texto evidenciando sua estrutura redacional (Severino, 2007, p. 63, sic).

Nesse sentido, recorrendo a Plataforma do *Scielo* como fonte de pesquisa, utilizamos os termos "Modelagem Matemática, Educação e Educação Matemática" para a coleta dos dados. Obtendo como resultado, oito artigos publicados em periódicos disponibilizados que discutiam a Modelagem, no período de 2005 a 2013, tendo em vista que este foi o recorte temporal previamente estabelecido. Na sequência, foi efetuada a leitura dos resumos de todos os trabalhos, o que possibilitou o conhecimento das temáticas que tratavam. Inteirando-se dos assuntos que discutiam os trabalhos, sentimos a necessidade de refinar a seleção. Esta foi realizada de acordo com a afinidade temática de cada um dos autores, olhando para, objeto de pesquisa, objetivos e metodologias de cada um dos trabalhos. Foram selecionados aqueles trabalhos em que os resumos indiciavam a falta de alguns elementos estruturantes[3]. Resultando assim, na escolha de seis trabalhos[4], conforme quadro 1 os quais foram subdivididos para que cada autor pudesse realizar as respectivas análises.

Quadro 1.
Trabalhos selecionados para análise

Trabalho analisado	***Código de identificação dos trabalhos***
Atividades de Modelagem Matemática: que sentidos os alunos podem lhe atribuir (Almeida; Brito, 2005)	A1
Os "Mundos da Matemática" em atividades de Modelagem Matemática (Almeida; Palharini ,2012)	A2
Semiótica e as ações cognitivas dos alunos em atividades de Modelagem Matemática: um olhar sobre os modos de inferência (Almeida; Silva ,2012)	A3
Modelagem e o ensino de ajuste de funções: um caderno pedagógico (Pereira; Júnior, 2013)	A4
Quais Elementos Caracterizam uma Atividade de Modelagem Matemática na Perspectiva Sociocrítica? (Silva; Kato ,2012)	A5
Reflexões a respeito do uso da Modelagem Matemática em aulas dos anos inicias do ensino fundamental (Tortola; Almeida, 2013)	A6

Fonte: dos autores.

Nossas categorias de análise foram construídas a partir da questão supracitada e, a partir daqueles critérios apresentados por Laperrière (2010). Desse modo, revelaram-se as seguintes indagações, as quais serão expressas no Quadro 2:

[3] Consideramos como elementos estruturantes: objetivos, metodologia da pesquisa e resultados.
[4] *Os trabalhos que não foram utilizados nesta análise são, Modelagem na sala de aula: resistências e obstáculos* (Silveira; Caldeira, 2012) e *Ser crítico em projetos de modelagem em uma perspectiva crítica de educação matemática (*Araujo, 2012).

Quadro 2
Categorias emergentes a partir dos critérios de cientificidades

Critérios de Cientificidades (Laperrière, 2010)	**Indagações emergentes**	**Categorias**
Validade interna	O(s) autor(es) estabelece(m) ligações entre os objetivos e os resultados apresentados? Ou seja, há coerência entre o que se propõe a investigar com as implicações?	C1
Validade externa	O(s) autor(es) define(m) a metodologia utilizada, assim como explicita a concepção de pesquisa assumida?	C2
	Descreve o contexto em que ocorre a pesquisa, assim como, os sujeitos investigados e a capacidade de generalização ou não?	C3
Confiabilidade	Utiliza de vários instrumentos para coleta dos dados apresentados?	C4

Fonte: dos autores.

Explicitadas a metodologia empregada, bem como, as categorias emergentes, passaremos a descrição das análises.

Descrições das análises

Com objetivo de sistematizar as análises realizadas por nós, procurando estabelecer um maior entendimento por parte do leitor, transformamos nossos questionamentos (critérios) em categorias. Na sequência explicitamos nossas compreensões sobre o perfil dos trabalhos analisados, correspondentes a cada uma delas, e descrevemos em forma de citação alguns fragmentos dos trabalhos analisados. Desse modo, apresentamos as análises:

C1 – O(s) autor(es) estabelece(m) ligações entre os objetivos e os resultados apresentados? Ou seja, há coerência entre o que se propõe a investigar com as implicações resultantes?

À luz dos critérios estabelecidos por Laperrière (2010), no que tange a proposta referente à C1, pode-se dizer, que todos os trabalhos analisados cumpriram tal critério, pois no desenvolver do texto destacam-se conexões entre os objetivos e os resultados, os quais são explicitados nas descrições de cada investigação proposta pelos autores. Como evidenciam os seguintes fragmentos extraídos de A5 e A2 respectivamente:

> Neste artigo, propomos o estabelecimento de um conjunto de ações que caracterizam uma atividade de Modelagem Matemática na perspectiva sociocrítica. Foram construídos alguns dos principais elementos que evidenciam as características gerais desta perspectiva, tomando como base alguns referenciais teóricos publicados sobre este tema, no Brasil, por autores que apresentavam um histórico de pesquisa nesta temática (Silva; Kato, 2012, p.820).

Ou ainda, "[...] este trabalho se debruça sobre a identificação de alguns elementos que podem sinalizar manifestações de pensamento matemático dos alunos envolvidos em atividades de Modelagem Matemática [...]" (Almeida; Palharini, 2012, p. 909).

> [...] ao desenvolver a atividade de Modelagem Matemática, a aluna traça caminhos próprios pelos mundos da matemática, utilizando de percepções e objetos corporificados bem como de símbolos, generalizações e abstrações para a identificação do problema, a definição das variáveis, a formulação do modelo matemático e validação do mesmo. Os processos associados ao pensamento matemático, como os processos de representar, generalizar e

> sintetizar são fundamentais para a definição de hipóteses e construção dos modelos, bem como para sua interpretação e análise em relação ao problema em estudo. (Almeida; Palharini, 2012, p. 929).

Os textos apresentam de forma clara os objetivos de cada trabalho, assim como, os resultados alcançados, estabelecendo uma consonância entre os dois, mostrando que a coesão esperada para este critério ocorre de fato. Corroborando a assertiva, o fragmento de A3, descreve o resultado da pesquisa realizada, quando objetivavam investigar as relações cognitivas em atividades de Modelagem.

> [...] a análise que realizamos revela que, no decorrer do desenvolvimento da atividade, há fortes indícios de que as alunas realizaram ações cognitivas importantes. Além disso, inferências dos alunos também puderam ser evidenciadas em diversos momentos (Almeida; Silva, 2012, p. 639).

C2 – O autor define a metodologia utilizada, assim como explicita a concepção de pesquisa assumida?

Segundo os critérios propostos por Laperrière (2010), notamos que em alguns textos, como, A1, A2, A3, A4 e A6 os autores não deixaram clara a metodologia que utilizaram para a realização da pesquisa. Embora deixem indícios implícitos de que a pesquisa se constitui de caráter qualitativo, como apresentamos no recorte a seguir, não contemplam o entendimento, por exemplo, do que seja a pesquisa qualitativa. "A partir da leitura deste texto, considerando as informações qualitativas e quantitativas apresentadas, as alunas visualizaram uma situação-problema e que é passível de investigação" (Almeida; Silva, 2012, p. 633).

Já em outros artigos, por exemplo, as autoras Silva e Kato (2012) deixam explícita a metodologia utilizada para o desenvolvimento do trabalho, quando afirmam:

> Este estudo seguiu os pressupostos teóricos e metodológicos da Análise de Conteúdo, conforme Bardin (1977), que utilizou procedimentos sistemáticos em busca de uma compreensão acerca dos elementos, explícitos ou implícitos, indicadores dos conteúdos dos textos. Para tanto, a análise deste *corpus* foi orientada, inicialmente, pelas hipóteses adotadas buscando-se sínteses coincidentes ou divergentes de ideias (Silva; Kato, 2012, p. 821).

Desse modo, percebemos a pluralidade das pesquisas, no que tange a importância de explicitar ou não, a metodologia empregada. Podemos afirmar que nesta categoria houve dissonância quanto aos critérios analisados, apresentando fragilidade em algumas pesquisas. Considera-se importante, o emprego dessa categoria nas pesquisas, porque "[...] visa assegurar a ela precisão, solidez, coesão e extensão" (Laperrière, 2010, p. 423).

C3 – Descreve o contexto em que ocorre a pesquisa, assim como, os sujeitos investigados e a capacidade de generalização ou não?

Os trabalhos que discutem experiências com Modelagem Matemática, realizadas tanto com alunos da Educação Básica, quanto no âmbito do Ensino Superior, os autores deixaram explícitos, de forma clara e objetiva, os critérios estabelecidos.

> As informações que subsidiam as argumentações deste trabalho foram obtidas com alunos de uma turma do Ensino Superior, durante a disciplina de Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática, no último ano de um curso de Licenciatura em Matemática. Os alunos desenvolveram atividades de modelagem sob orientação das autoras deste texto, sendo que uma era a professora da disciplina (Almeida; Palharini, 2012, p. 917).

O contexto onde se desenvolveu as atividades, por exemplo, em cursos extracurriculares e laboratórios das instituições, o público alvo envolvido perfazendo um número "*x*" de estudantes, e a elucidação das atividades desenvolvidas, é claramente definido. Como mostram, por exemplo, as seguintes citações:

> A turma de 4º ano cujos alunos desenvolveram as atividades de modelagem matemática possuía 36 estudantes, com idades que variavam entre 8 e 9 anos. Era uma turma numerosa, mas com alunos participativos e comprometidos com as atividades que lhes eram propostas (Tortola; Almeida, 2013, p. 623).

> A análise se deu de acordo com as fases propostas por Moraes (2003) para a análise textual discursiva. Assim, procedemos à desmontagem destes relatos em fragmentos, que foram posteriormente confrontados com as características da perspectiva sociocrítica, apresentada na seção anterior (Silva; Kato, 2012, p.832).

Alguns trabalhos ainda trouxeram figuras, evidenciando alguns momentos das atividades, meio pelos quais os autores buscaram sistematizar cada etapa do desenvolvimento das atividades. Além disso, os autores buscaram fazer uma interlocução direta com o tema apresentado, possibilitando ao leitor, além de conhecer em que solo permeou a investigação, também compreender as teorias em que a pesquisa foi embasada. Desse modo, caracterizamos indícios de uma profundidade dos processos sociais, garantindo assim, uma possibilidade de generalização nas pesquisas em Modelagem Matemática, dada a especificidade dessa análise.

C4 – Utiliza de vários instrumentos para coleta dos dados apresentados?

No que diz respeito ao critério intrínseco à confiabilidade, é possível notar que há uma divergência no que concerne às análises realizadas pelos autores. Nem todos os trabalhos contemplam esse critério em sua totalidade. Por exemplo, quando identificamos em um dos trabalhos a análise de apenas uma atividade com Modelagem Matemática realizada por um grupo de alunas de um curso de Licenciatura em Matemática. De certo modo, essa análise pode sinalizar a ainda que profunda, a ausência de outras manifestações quando o pesquisador de outras ferramentas para a coleta e análise, respectivamente. Ou seja, pode evidenciar a fragilidade no que diz respeito à triangulação de dados, tornando passível de dúvida a validade dos dados. Outros trabalhos que não contemplaram esse critério foram A1, A2, A3, A4 e A5. Ressaltamos ainda que, pudemos identificar trabalhos que utilizam vários instrumentos para coleta de dados como consta em A6, quando utilizam gravações em áudio e vídeo, registro produzido pelos alunos e anotações feitas pelo pesquisador.

Diante dessa perspectiva, Laperrière (2010, p. 423, inserções nossas), afirma que "[...] o contexto natural contém uma diversidade de fontes de dados [em que, adotando vários instrumentos] permite melhor delimitar as fontes de divergências entre as interpretações dos sujeitos envolvidos na situação".

Essa constatação é dada pelo recorte: "As aulas foram gravadas em áudio e em vídeo a fim de coletar dados para a pesquisa, todavia, as principais fontes de informações foram os registros produzidos pelos estudantes e as anotações feitas pelo pesquisador" (Tortola; Almeida, 2013, p. 626).

De modo geral, a confiabilidade manifesta-se dentre outras possibilidades quando é possível identificar que os trabalhos apresentam seus resultados, segundo uma diversidade de instrumentos, como, a realização de analogias referentes ao objeto da pesquisa.

Considerações finais

Procuramos pautar as análises efetuadas nesse trabalho, à luz do texto apresentado por Anne Laperrière (2010) intitulado “Os critérios de cientificidade dos métodos qualitativos”, donde elencamos três critérios.

> [...] os métodos experimentais e qualitativos, ativeram-se a três tarefas, visando estabelecer o valor de seus resultados: verificar a exatidão dos resultados de pesquisa (critério de validade interna), especificar os limites de sua possível generalização (critério de validade externa), e por fim, garantir que os resultados não esteja ligados a circunstâncias acidentais, e que outros pesquisadores, empregando os mesmos procedimentos junto a populações similares chegariam às mesmas conclusões (critério de confiabilidade) (Laperrière, 2010, p. 410).

Procuramos estabelecer como alicerces para nossas análises os critérios de validade interna; validade externa; e confiabilidade da pesquisa qualitativa. Empregamos uma leitura crítica e minuciosa, explorando as entrelinhas dos textos, buscando compreensões que podem passar apercebidas em leituras menos criteriosas.

Em relação ao exposto nas análises, como resultado do objeto de pesquisa, que seria identificarmos se esses trabalhos atendem minimamente alguns critérios por nós estabelecidos à luz dos de Laperrière (2010), notamos que, no que concerne à C1 - *O(s) autor(es) estabelece(m) ligações entre os objetivos e os resultados apresentados? Ou seja, há coerência entre o que se propõe a investigar com as implicações resultantes?* - os trabalhos respondem em sua totalidade os anseios esperados, deixando claros, objetivos e resultados. Destaca-se ainda a clara conexão entre o que é proposto em cada uma das investigações com as implicações resultantes.

Considerando os artigos que selecionamos alguns autores não deixam clara a metodologia utilizada para a realização de sua investigação, pois o pesquisador deve citar e explicar os procedimentos metodológicos utilizados em sua pesquisa. Consideramos, portanto, que a C2 - *O autor define a metodologia utilizada, assim como explicita a concepção de pesquisa assumida?* - é um aspecto relevante para a qualidade do artigo, quanto à importância da metodologia, no sentido de explicitar ao leitor os procedimentos adotados na pesquisa:

> [...] são os procedimentos operacionais que servem de mediação prática para a realização das pesquisas. Como tais, podem ser utilizadas em pesquisa conduzidas mediante diferentes metodologias e fundadas em diferentes epistemologias. Mas, obviamente, precisam ser compatíveis com os métodos adotados e com os paradigmas epistemológicos adotados (Severino, 2008, p. 124).

A análise segundo a C3 - *Descreve o contexto em que ocorre a pesquisa, assim como, os sujeitos investigados e a capacidade de generalização ou não?,* mostrou-se bastante satisfatória, o que revela a preocupação e o comprometimento dos autores com o desenvolvimento das atividades envolvendo a Modelagem. Nesse sentido, os trabalhos supriram o critério estabelecido, pois estão descritos com precisão os ambientes onde se desenvolveram as atividades, com quem foi desenvolvida e ainda os procedimentos que permitiram chegar-se aos resultados.

Em relação ao que contempla C4 - *Utiliza de vários instrumentos para coleta dos dados apresentados?,* quando indagávamos se tais trabalhos apresentavam utilização de algum tipo da triangulação, ou seja, se estes apresentavam em seu escopo uma diversidade de instrumentos para a coleta de dados, que garantissem a confiabilidade dos dados. Foi possível notar que os trabalhos não se dedicam a explicitar esse critério, visto que, houve trabalhos que atenderam aos critérios analisados e trabalhos que apresentaram uma fragilidade no que diz respeito ao critério de confiabilidade.

Em resposta a indagação levantada: “Os artigos de Modelagem Matemática na Educação Matemática publicados na base do Scielo, atendem minimamente alguns dos critérios de cientificidades estabelecidos por Laperrière (2010)?”, destacamos que, o embasamento teórico adquirido, tal como a prática na realização das atividades, proporciona um fluxo de ideias que contribuirá de forma a elevar as capacidades e competências não só nas análises futuras, como também na produção de artigos científicos. Mostrou-nos também que, mesmo algumas pesquisas sendo vinculadas a instituições de ensino, produzidas por pesquisadores que são influentes nos estudos de Modelagem, ainda apresentam algumas fragilidades. Ainda que os trabalhos sejam quantitativamente irrelevantes, podemos, pela inserção dos pesquisadores vinculados dizer que os artigos convergem, assim como, sinaliza para um empreendimento frequente desse exercício, em cursos de pós-graduação, visto que é neles que o processo de construção da identidade do pesquisador é consolidado em primeira instância e vários trabalhos estão articulados a pesquisadores em formação inicial.

Ressaltamos que com a ascensão da área e a variedade de trabalhos publicados em que a Modelagem Matemática constitui-se como escopo principal, nossa pesquisa mostra-se limitada, no entanto salvaguarda suas características, corroborando com os resultados registrados no trabalho de Klüber e Burak (2012). No qual os autores apontam algumas fragilidades na pesquisa qualitativa em Modelagem Matemática.

Referências e bibliografia

André, M. (2001). Pesquisa em educação: buscando rigor e qualidade. *Cadernos de Pesquisa*, São Paulo, *113*, 51-64.

Bicudo, M. V. (2011). Aspectos da pesquisa qualitativa efetuada em uma abordagem fenomenológica. In Bicudo, M. A. V. (Org.), *Pesquisa qualitativa segundo a visão fenomenológica* (pp. 29-40). São Paulo: Cortez.

Burak, D., & Klüber, T. E. (2008). Educação Matemática: contribuições para a compreensão de sua natureza. *Acta Scientiae* (ULBRA), *10*, 93-106, jul-dez.

Klüber, T. E. (2009). Um olhar sobre a Modelagem Matemática no Brasil sob algumas categorias fleckianas. *ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, *2*(2), 219 - 240, jul. Florianópolis.

Klüber, T. E., & Burak, D. (2012). *Sobre a pesquisa qualitativa na Modelagem Matemática em Educação Matemática*. Bolema, *26*(43), 883-905. Ago. Rio Claro, SP.

Laperrière, A. (2010). Os critérios de cientificidade dos métodos qualitativos. In *A pesquisa qualitativa:* enfoques epistemológicos e metodológicos (2ª ed.). Petrópolis, RJ: Vozes.

Lüdke, M. (1988). Como anda o debate sobre metodologias quantitativas e qualitativas na pesquisa em educação. *Cadernos de Pesquisa*, *64*, 61-3.

Severino, A. J. (2008). *Metodologia do trabalho científico* (23ª ed.). São Paulo: Cortez.

Trabalhos analisados

Almeida, L. M. W., & Brito, D. dos S. (2005). Atividades de Modelagem Matemática: que sentidos os alunos podem lhe atribuir?. *Ciência & Educação*, *11*(3), 483-498. Disponível em: < http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1516-73132005000300011&lng=pt&nrm=iso>. Acesso em: 16 de jan. 2014.

Almeida, L. M. W., & Palharini, B. N. (2012). Os "Mundos da Matemática" em Atividades de Modelagem Matemática. *BOLEMA – Boletim de Educação Matemática*, *26*(43), 907–934, ago. 2009, Rio Claro, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP. Disponível em: < http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-636X2012000300008&lng=pt&nrm=iso>. Acesso em: 16 de jan. de 2014.

Almeida, L. M. W., & Silva, K. A. P. da. (2012). Semiótica e as ações cognitivas dos alunos em atividades de modelagem matemática: um olhar sobre os modos de inferência. *Ciência e Educação* (UNESP. Impresso), *18*,623-642. Disponível em: < http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1516-73132012000300009&lng=pt&nrm=iso>. Acesso em: 16 de jan. de 2014.

Pereira, R. dos S. G., & Júnior, G. dos S. (2013). Modelagem Matemática e o Ensino de Ajuste de Funções: um caderno pedagógico. *BOLEMA – Boletim de Educação Matemática*, *27*(46), 531-546, ago. Rio Claro, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, p. Disponível em: < http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-636X2013000300013&lng=pt&nrm=iso>. Acesso em: 16 de jan. de 2014.

Silva, C. da, & Kato, L. A. (2012). Quais Elementos Caracterizam uma Atividade de Modelagem Matemática na Perspectiva Sociocrítica?. *BOLEMA - Boletim de Educação Matemática*, *26*(43), 817-838, ago. Rio Claro, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP, p. Disponível em: < http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0103-636X2012000300004&lng=pt&nrm=iso>. Acesso em: 16 de jan. de 2014.

Tortola, E., & Almeida, L. M. W. de (2013). Reflexões a respeito do uso da modelagem matemática em aulas nos anos iniciais do ensino fundamental. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos.* (online), *94*(237), 619-642 maio/ago. Brasília, Disponível em: < http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2176-66812013000200014&lng=pt&nrm=iso>. Acesso em: 16 de jan. de 2014.

O sentido e o significado no processo de determinação de problemas num contexto de Modelagem Matemática

Tiago **Weingarten**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
tiago_weingarten@hotmail.com
Rodrigo Dalla **Vecchia**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
rodrigovecchia@gmail.com

Resumo

Este artigo tem como objetivo discutir o processo de determinação de problemas que ocorre na Modelagem Matemática, quando as situações investigadas são trazidas pelos estudantes. Adentro à problemática, buscaremos compreender os aspectos referentes à triangulação que o problema faz com o sentido e significado, representados pelas proposições. O contexto de pesquisa envolveu problemas oriundos do cotidiano dos alunos matriculados na disciplina de Pesquisa Operacional (PO) 1 e 2 do curso de Engenharia de Produção de uma universidade do estado do Rio Grande do Sul. As atividades que serão apresentadas foram trabalhadas em sala de aula.

Palavras chave: Educação Matemática, proposição, transformação.

Introdução

O presente artigo é um recorte de uma pesquisa, em nível de Mestrado, que busca compreender o processo de determinação do problema e seu entrelaçamento com a visão de Modelagem Matemática (MM) assumida por nós. Nesse contexto, almejamos responder a seguinte questão norteadora de pesquisa: **Como se dá o processo de transformação da determinação do problema em Modelagem Matemática ocorridos na disciplina de Pesquisa Operacional quando as situações investigadas partem das vivências dos estudantes?** Para embasarmo-nos teoricamente na ideia de problema, trazemos a perspectiva de Deleuze (1988) e Saviani (1996) que, embora distintas, podem ser consideradas complementares. Conforme Deleuze (1988) o problema não pode ser confundido com sua determinação, tangenciando assim a esfera do virtual. Já para Saviani (1996), o problema abrange duas dimensões, uma objetiva e outra subjetiva. A subjetiva, está ligada à necessidade de resolução do problema e a objetiva, aos aspectos empíricos que geraram essa necessidade.

Tanto os aspectos objetivos, quanto os subjetivos, ao serem expressos, são abordados por meio de proposições que o determinam. Embora os aspectos referentes à subjetividade sejam importantes para a investigação, no recorte que fazemos nesse artigo avaliaremos o processo de determinação apenas sob o ponto de vista do sentido e do significado

A presente pesquisa assume caráter qualitativo, consequência imediata da natureza que envolve o questionamento e impede uma ação quantitativa, uma vez que o enfoque se dá na busca de uma compreensão dos aspectos que influenciam o processo como um todo. O entrelaçamento entre as concepções Deleuzianas e a MM emergem da dinamicidade e imprevisibilidade característica deste proces`so de obtenção de modelos (Dalla Vecchia, 2012). A ulterioridade da determinação do problema, aliada a multiplicidade de possibilidades de atualização (Deleuze, 1988) impede-nos de admitir uma solução estanque, ou mesmo que esta solução já exista enquanto este é proposto.

Para apreciação dos dados, adotaremos aspectos relacionados à análise de discurso (Alvez-Mazzotti, 1999), que utilizaremos para avaliar excertos das conversações entre os alunos durante as aulas de Pesquisa Operacional (PO) 1 e 2, do curso de Engenharia de Produção, ocorridas no primeiro e no segundo semestre de 2013, respectivamente. A disciplina de PO está relacionada com a aplicação da matemática para a otimização de processos industriais. Em função disto, a transformação da determinação do problema pode apoiar-se, também, em concepções matemáticas relacionada a tópicos específicos.

Nas próximas seções, apresentaremos, primeiramente o problema nas visões de Deleuze (1988) e Saviani (1996). Seguindo, discorreremos sobre as concepções de proposição, sentido e significado. Ainda, distinguiremos como procedemos para produção e análise dos dados, especificando quais recursos e técnicas foram utilizadas. Por fim, discutiremos dois excertos que estão associados às ideias de Deleuze (1988, 2011) que estarão associadas às nossas interpretações que envolvem a pesquisa.

Fundamentação teórica: problema, proposição, significado e sentido

Segundo o dicionário de Filosofia Abbagnano, a noção de problema tem uma de suas primeiras interpretações dadas pela Matemática e era entendida como "[...] uma proposição que parte de certas condições conhecidas para buscar alguma coisa desconhecida" (Abbagnano, 2007, p. 796). De acordo com o dicionário, esta visão fora concebida na matemática antiga para diferenciá-la da noção de teorema, entendido por qualquer proposição anteriormente demonstrada. Essa visão de problema relacionada a uma determinação matemática influenciou muitos pensadores, chegando a extremos como os ocorridos no final do século XIX e início do século XX, que subordinavam toda determinação a aspectos lógico-matemáticos (Körner, 1986). Entretanto, entendemos ser necessário trabalhar com visões diferentes das que confundem o problema com sua determinação, uma vez que estas podem trazer diferentes modos de observar o processo de desdobramentos dos problemas que se desejam encaminhar e, por conseguinte, contribuir para que novas metodologias e encaminhamentos possam surgir. Sendo assim, assumimos as perspectivas de Saviani (1996) e Deleuze (1988) como norteadoras do nosso trabalho.

Para Saviani (1996) um problema, para definir-se como tal, não depende apenas do objeto em questão e sua existência, também, perpassa pela necessidade de resolvê-lo, ou, nas próprias palavras do autor, a "[...] essência do problema é a necessidade" (Saviani, 1996, p.14). Nesse sentido, acrescenta que:

> No processo de produção de sua própria existência o homem se defronta com situações iniludíveis, isto é: enfrenta necessidades de cuja satisfação depende a continuidade mesma da existência (não confundir existência, aqui empregada, com subsistência no estrito sentido

> econômico do termo). Ora, este conceito de necessidade é fundamental para se entender o significado essencial da palavra problema (Saviani, 1996, p.14).

Porém, Saviani (1996) engendra que a necessidade, apesar de ser uma característica fundamental, forma apenas um dos aspectos do problema. Em suas ideias, esse autor defende que o problema apresenta dois aspectos, um subjetivo, caracterizado pela necessidade e outro objetivo, que se constitui pela situação concreta que gerou a necessidade.

Já Deleuze (1988), defende a concepção de que o problema é anterior à proposição que o determina. Sendo mais específico, este autor entende que um problema "[...] se determina ao mesmo tempo em que é resolvido; mas sua determinação não se confunde com a solução: os dois elementos diferem por natureza, e a determinação é como que a gênese da solução concomitante" (Deleuze, 1988, p.159).

Quando Deleuze (1988, p.159) diz que "[...] a determinação é como a gênese da solução concomitante", entendemos a determinação como uma espécie de vetor, que indica o sentido e a direção da solução para o referido problema (Dalla Vecchia; Maltempi, 2012). Em outras palavras, determinação e solução se imbricam de tal modo que o modo como o problema é expresso é considerado como uma forma de conduzir o problema, já indicando possíveis respostas e o caminho pelo qual o problema vai se desvelar, ou seja, a determinação já é solução (Deleuze, 1988).

Esse modo de compreender problema traz como consequência a existência de um complementar que sempre foge ao signo e ao expresso quando se trata de procurar um modo de expressá-lo. Por outro lado, não há outro caminho para apresentar o problema, em termos linguísticos, senão por meio da proposição (falada, escrita) que o determina. Sendo assim, decalcamos nossa atenção na compreensão da proposição. Entretanto, não se trata de apenas apreender o significado das proposições, mas sim, se este conjunto estabelece sentido perante o problema, pois "[...] as proposições só encontram sentido no problema subjacente que as inspira (Deleuze, 1988, p. 265)

Nesse contexto, entendemos haver um entrelaçamento entre o problema, o significado e o sentido, intermediada pelas proposições. Para Deleuze (1998), nenhum destes três conceitos pode ser restringido à proposição, mas ao mesmo tempo, de forma indireta, necessitamos das proposições para garantir a existência destes, até mesmo da sua triangulação. Este devir entre propor e não uma situação, garante que todo o problema é resolvível e insolúvel ao mesmo tempo (Deleuze, 2011), garantindo a atemporalidade deste conceito. Logo, as proposições e os significados estabelecidos devem aludir ao problema, fomentando o sentido em todo o processo problemático, incluindo, na especificidade da pesquisa, as determinações envolvendo o processo de Modelagem Matemática.

A proposição, segundo Deleuze (2011) opera em quatro dimensões: designação, manipulação, significação e sentido. Embora em nossas pesquisas consideramos todas, focaremos, nesse artigo, apenas as dimensões relacionadas ao significado e ao sentido.

A significação, é entendia por Deleuze (2011) como a relação existente entre a palavra com conceitos universais ou gerais e das ligações sintáticas com implicações de conceito. Sob esse aspecto, os elementos de uma proposição são sempre considerados significantes do conjunto de implicações de conceitos que podem remeter a outras proposições, que podem servir de premissas à primeira. Para Deleuze (2011, p. 15) a significação "[...] se define por esta ordem de implicação conceitual em que a proposição considerada não intervém senão como elemento de uma "demonstração[1]", no sentido mais geral da palavra, seja como premissa, seja como conclusão".

Já o sentido, para Deleuze (2011, p. 20), é o "[...] expresso da proposição, este incorporal na superfície das coisas, entidade complexa e irredutível, acontecimento puro que insiste ou subsiste na proposição". Essa insistência e subsistência implica em uma inferência que não ocorre de modo direto, mas indireto, dada na ordem da compreensão dos desdobramentos das demais dimensões da proposição. Em outras palavras, "[...] podemos, [...] tomar o sentido, isto é, o exprimido de uma proposição, como o designado de uma outra proposição, da qual, por sua vez, não dizemos o sentido, e assim indefinitivamente" (Deleuze, 1988, p. 152). Assim, ao mesmo tempo que o sentido reside na proposição (é a proposição que deve fazer/ter sentido ou não), não é possível de descrever o sentido por meio da própria proposição[2], sendo necessário apresentá-lo em outra para descrevê-lo. O sentido tem a função de fronteira entre o estado das coisas e as proposições, é o próprio acontecimento. Já o significado remete ao conceito empregado e como este refere-se aos objetos.

Metodologia

Perseguindo elucidações para nossa pergunta norteadora, **Como se dá o processo de transformação da determinação do problema em Modelagem Matemática ocorridos na disciplina de Pesquisa Operacional quando as situações investigadas partem das vivências dos estudantes?**, a presente pesquisa assume caráter qualitativo, consequência imediata da natureza que envolve o questionamento e impede uma ação quantitativa (Bogdan, Blinken, 1994), uma vez que o enfoque se dá na busca de uma compreensão dos aspectos que influenciam o processo como um todo.

Segundo Ramos (2009), a pesquisa deve moldar a transformação do conhecimento em ações significativas, práticas e úteis. No presente artigo, por ser tratar de um estudo pontual e exploratório, somos impedidos de assumir uma postura enrijecida e metódica. Desta forma, a busca pelos aspectos tranformativos da determinação do problema se dará analisando o sentido, entendido por nós como os desdobramentos, por vezes instáveis, atrelados aos aspectos objetivos, subjetivos e matemáticos da situação problemática estudada para posterior determinação da função objetivo.

Para a presente investigação, assumimos uma visão de MM no âmbito da Educação Matemática (EM) que se mostra consonante com a ideia de que o processo problemático não se apresenta necessariamente de forma linear. Essa visão é apresentada por Dalla Vecchia (2012), que entende a MM como "[...] um processo dinâmico e pedagógico de construção de modelos sustentados por ideias matemáticas que se referem e visam encaminhar problemas de qualquer dimensão abrangida pela realidade" (Dalla Vecchia, 2012, p. 125). Entendemos que o contexto investigativo apresentado abarca a definição de MM trazida por Dalla Vecchia (2012), pois esta engloba os aspectos pedagógico, matemático, de problema e de realidade propostos. Os aspectos pedagógico e matemático estão imbuídos na ementa das disciplinas e no próprio professor que

---

[1] Deleuze (2011, p. 15) entende demonstração em um sentido mais geral, que quer dizer "[...] que a significação da proposição se acha sempre assim no procedimento indireto que lhe corresponde, isto é, na sua relação com outras proposições das quais é concluída, ou, inversamente, cuja conclusão ela torna possível".

[2] Conforme Deleuze (1988, p. 151)"[...] nunca dizemos o sentido daquilo que dizemos".

media os objetivos pedagógicos e matemáticos da disciplina com os seus. Já os aspectos relativos ao problema e a realidade em questão estão imbricados e perfazem-se nos levantamentos dos alunos, tanto na sua proposição problemática, quanto na sua resolução.

Para a produção de dados, foram investigados cerca de 35 estudantes das disciplinas de Pesquisa Operacional 1 e Pesquisa Operacional II, ocorridas no primeiro e segundo semestres de 2013, respectivamente. Os estudantes, pertencentes ao curso de Engenharia de Produção de uma universidade do sul do Brasil, foram divididos em 7 grupos, contendo em média 5 pessoas. Dadas as características particulares dos estudantes dessa universidade que, em sua grande maioria já estão no mercado de trabalho, foi solicitado que trouxessem problemas relacionados com seu cotidiano vivenciado em empresas, para que pudessem ser discutidos, modelados e analisados com o intuito de encaminhar possíveis soluções. Os trabalhos foram iniciados no primeiro semestre (PO I) e finalizados no segundo semestre (PO II). Os dados foram produzidos por meio de filmagens, transcritos e analisados à luz do referencial teórico (Bogdan, Biklen, 1994; Alves-Mazzoti, 1999), com o intuito de buscar indícios para a pergunta diretriz

Atentaremos para o processo de construção dos modelos que surgiram por meio dos desdobramentos de todo contexto problemático, constituído aqui de forma a contemplar as ambições tanto dos alunos, quanto do professor. Os alunos, por si só, almejam solucionar os problemas de suas empresas e, também, obter sucesso na disciplina. Por sua vez, o professor têm outros objetivos, entre eles o matemático e o pedagógico. Adentro os objetivos, seja por parte dos alunos, seja por parte do professor, estes forneceram o sentido ao processo de determinação do modelo, fomentando-o.

Análise de dados

A análise de dados, segundo Bogdan e Biklen (1994), caracteriza-se pela compreensão dos dados produzidos, permitindo apresentar avanços teóricos e metodológicos destes. Assumiremos, então, uma perspectiva de busca de aspectos importantes inseridos nas amostras produzidas, devidamente organizadas de forma sistemática. Adentro a triangulação que propomos inicialmente, entre o problema, o sentido e o significado, atentaremos nossa análise para este entrelaçamento, que em nossa concepção é conduzido pelo sentido.

Consideramos importante relembrar que o significado, conforme Deleuze (2011), está associado à ideia de conceito. Dada a multiplicidade de pontos de vista que a associação com o conceito pode ter, atingindo uma dimensão rizomática (Deleuze, 2011), focaremos na associação exclusiva com os conceitos matemáticos. Reconhecemos que se trata de um recorte (uma limitação), mas entendemos que a particularização, além de não contrariar a ideia principal, permite com que tenhamos um olhar mais atento ao foco de nossa problemática, que é compreender os desdobramentos do problema apresentado pelos alunos. Já o sentido, para Deleuze (2011), está associado diretamente ao problema. Embora o problema tenha sua fundamentação no virtual (Deleuze, 1988), o mesmo só pode ser observado por meio de suas atualizações, dadas pelos signos da fala e/ou por sua expressão imagética ou simbólica. Desse modo, nesse conjunto de análise, nos referimos ao já dito e manifestado a respeito do problema, que chamamos de aspectos objetivos do problema.

É sob essa perspectiva que buscaremos analisar as proposições que se referem ao problema trazido pelos alunos, desde sua primeira manifestação até a construção do modelo que o determinou. Esse movimento, focará na busca por uma compreensão de como se deu o processo que associa a situação problema e a matemática.

Para o escopo desse artigo, analisaremos um processo problemático desenvolvido pelos alunos das disciplinas de PO 1 e 2. O referido grupo almejou a antecipação da receita da montagem de equipamentos elétricos, de uma empresa prestadora de serviços para o Pólo Petroquímico. Para tanto, otimizaram o processo de montagem, primando pelos elementos que demandavam maior lucro para a empresa.

O projeto desenvolvido por este grupo, culminou com o seguinte modelo matemático:

Função Objetivo (FO): Maximizar $\sum_{i=1}^{7} x_i r_i$.

Onde x_i é a porcentagem de cada tipo de material utilizado e r_i sua respectiva receita, atribuída a unidade percentual da meta a ser atingida. A Função Objetivo busca uma maximização da captação de receitas, associadas diretamente ao lucro, e que leva em consideração a curva de metas já usada pela empresa, dadas pelo índice EAP (Estrutura Analítica de Processo) que trabalha sobre 7 aspectos: Tubing (x_1), Cabo (x_2), Instrumento (x_3), Eletrocalha (x_4), Eletroduto (x_5), Caixas de Junção (x_6) e Painéis (x_7).

Cabe ressaltar que o grupo utilizou uma variação de 20% para os valores da porcentagem de cada tipo de material. Com isso, foram consideradas as seguintes restrições:

$0{,}8Px_1 \leq x_1 \leq 1{,}2Px_1$

$0{,}8Px_2 \leq x_2 \leq 1{,}2Px_2$

$0{,}8Px_3 \leq x_3 \leq 1{,}2Px_3$

$0{,}8Px_4 \leq x_4 \leq 1{,}2Px_4$

$0{,}8Px_5 \leq x_5 \leq 1{,}2Px_5$

$0{,}8Px_6 \leq x_6 \leq 1{,}2Px_6$

$0{,}8Px_7 \leq x_7 \leq 1{,}2Px_7$

Onde Px_i é a meta percentual do mês de construção do elemento x_i.

Avaliando sob o ponto de vista somente matemático, este modelo é simples e direto. Entretanto, seu processo de construção envolveu uma gama de discussões, que avaliaremos sob a ótica das dimensões das proposições expressas pelos participantes. Neste contexto, adentro a problemática desenvolvida, selecionamos recortes das falas que entendemos encaminhar os aspectos matemáticos na determinação da referida função objetivo. Nos excertos, A1 é o Aluno 1, proponente do problema, A2 é o Aluno 2, participante do grupo e P é o professor.

Excerto 1: aspectos matemáticos na determinação da função objetivo

A1 20’19” : "[...] eu não posso botar gente pra montar todos os itens, por exemplo, então a ideia é **mix** mesmo.

A1 20’19”: O bom é que são **seis itens**

A1 23:16 A ideia é, de repente, a gente conseguir, porque são muitas variáveis, a gente conseguir limitar, eu quero, eu vou, o que acontece, **são seis itens** que a gente tem de montagem, que a gente tem pra montar.

P (28'02"): O que tu tem que fazer pra ganhar, ou qual a tua programação pra ter o maior retorno financeiro? Bom, esse é teu problema, O que **significa** o retorno financeiro? O menor custo? Ou...

A2 (28'27"): Mais lucro com menor [quantidade de] pessoas.

Nos diálogos apresentados, é possível observar alguns aspectos matemáticos que implicaram na produção da função objetivo. Inicialmente, o aluno A1, ao apresentar o problema, traz a palavra mix, que se refere à uma parte da Pesquisa Operacional que se refere à escolha do melhor conjunto de aspectos de tal forma a atender um conjunto de restrições e, ao mesmo tempo, maximizar ou minimizar uma função que entrelaça todos os aspectos importantes para os problemas. De fato, se observarmos atentamente a função objetivo proposta, há uma escolha entre as porcentagens de cada tipo de trabalho proposta, de tal forma a maximizar a receita. Desse modo, pode-se dizer que a ideia inicial apresentada pelo Aluno 1 veio a se configurar. Nas falas seguintes, o Aluno A1 apresenta a quantidade de item como sendo 6. Embora esses seis aspectos tenham se verificado, ao final do processo foi acrescentado mais um, totalizando 7 itens.

Na quarta fala, o professor faz alguns questionamentos buscando especificar o problema. Esse aspecto, aparece também nesse conjunto de falas, agora visando especificar mais a proposta, almejando uma proposição que possa ser descrita por meio da matemática abordada na disciplina. Desse modo, ao questionar :"O que tu tem que fazer pra ganhar, ou qual a tua programação pra ter o maior retorno financeiro? Bom, esse é teu problema, O que significa o retorno financeiro? O menor custo?", ou quando A2 fala: " Mais lucro com menor [quantidade de] pessoas", entendemos haver uma busca por essas determinações, de tal modo que a matemática conhecida possa se referir ao caso discutido. Ocorre, nesse caso, aquilo que entenderemos como uma busca pela significação.

Segundo Deleuze (2011) a significação é uma das dimensões da proposição que relaciona as palavras ao conceito. Avaliando sob essa ótica, pode-se observar que intrínseco às palavras usadas nesse excerto (mix, maior retorno, menor custo,...), há uma série de aspectos teóricos matemáticos (otimização de processos, função objetivo, programação linear) que são trazidos constantemente pelos envolvidos. Há nesse contexto, buscas por significações. A medida que vão sendo desenvolvidas as manifestações que determinam o problema, busca-se implicitamente modos de determiná-las de tal sorte que possam ser atribuídos significados matemáticos para as mesmas. Entendemos ser esse o processo ocorrido nas falas que compõem o Excerto 1.

Entretanto, a significação, por assumir um caráter fundamentado em aspectos lógicos e conceituais, pode gerar algumas armadilhas, conduzindo a expressões que embora tenham significado, em termos de sentido podem apresentar aspectos de não senso (DELEUZE, 2011). Desse modo, entendemos a necessidade de analisar o processo de construção da função objetivo, em termos de sentido. Conforme já discutido, entenderemos o sentido como sendo o "[...] expresso da proposição "[...] entidade complexa e irredutível, acontecimento puro que insiste e subsiste na proposição" (Deleuze, 2011, p. 20). Embora o sentido só exista e subsista na proposição, o autor o associa diretamente ao problema. Desse modo, discute o sentido ou não de uma proposição frente à problemática que está sendo manifestada/designada.

Para discutir sentido e sua importância no processo de MM, trazemos a última fala do Excerto 1 proferida pelo Aluno 2: *Mais lucro com menor* [quantidade de] *pessoas*. Observamos que a função objetivo envolveu, sob certos aspectos, a primeira parte da fala (mais lucro). Entretanto, a segunda parte que fala cobre a menor quantidade de pessoas não foi abordada. Em termos matemáticos, diminuir a quantidade de pessoas que trabalham envolve redução de custos e consequentemente aumento do lucro. Trata-se de um possível desdobramento da determinação do problema que poderia ter sido desenvolvido, pois do ponto de vista matemático teria significado. Porém, apesar de ter um significado, entendemos que o mesmo não tinha sentido para as condições do problema. Para poder observar esse aspectos, temos que entrelaçar a sequencia de falas que ocorrem após a fala de A2 e, que por motivos de análise foi classificada em outro ramo do fluxo.

Excerto 2: relação entre sentido e significado na escolha por caminhos nos fluxos de determinação.

> A2 (28'27"): Mais lucro com menor [quantidade de] pessoas.
>
> A1 (28'28"): É, o que eu já..., as pessoas eu tenho que usar as 85, se eu não usar as 85 eles demitem gente. Eu tenho que demandar trabalho para as 85 pessoas.

Embora a primeira fala do Excerto 2 tenha um significado, associado aos conceitos e consequências lógicas permitidas pela matemática, o caminho que poderia ter sido seguido e consistia na redução das pessoas foi invalidado pelo Aluno 1. Por ser proponente do problema e vivenciar o problema no dia a dia, o Aluno A1 logo apresentou a impossibilidade da opção, que pode ser observado de modo explícito quando diz: *"*[...] *as pessoas eu tenho que usar as 85* [...] *Eu tenho que demandar trabalho para as 85 pessoas."*. Observando essas falas em relação ao nosso referencial, entendemos que essa invalidação se deu frente aos aspectos objetivos do problemas. Em outra palavras, dizemos que, embora o que o Aluno 2 tenha significado em termos lógicos, analisando a expressão frente ao problema, a **mesma não faz sentido**, uma vez que "[...] o sentido está no próprio problema" (DELEUZE, 1988). Desse modo, no processo de determinação de um problema, a significação pode não ser o único aspecto levado em consideração ao optar por seguir um dos múltiplos caminhos/fluxos nos quais o problema pode se desdobrar. Há de se considerar, como foi o caso, a importância da determinação fazer sentido ou não frente aos aspectos (objetivos) que envolvem o problema.

Observamos que estamos avaliando a expressão dada pelo Aluno 2. Conforme Deleuze (2011) o sentido é próprio da proposição, insistindo e subsistindo nela. Entretanto, para avaliar o sentido é preciso sempre outra proposição que na especificidade do Excerto 2 foi dada por A1. É levando em consideração essa necessidade de haver sempre outra proposição para explicar o sentido, que Deleuze (1988, p 152) diz que "[...] nunca podemos dizer o sentido daquilo que dizemos".

Dadas as discussões apresentadas até o momento, podemos fazer uma análise mais consistente frente as falas do Excerto 2. Quando o professor afirma que "*Então ela* [a EAP] *já te dá algo, então a gente vai jogar em cima das metas da EAP, para estruturar elas da melhor maneira possível",* está buscando significações matemáticas, para tratar dos aspectos do problema. Entretanto, há a necessidade destes aspectos fazerem sentido para o problema, o que é confirmado pelo proponente do problema quando diz *"Exatamente".* Desse modo, há uma culminância tanto de uma proposição que possa ser abordada por meio da matemática, isto é, tenha significado matemático, quanto de uma proposição que faça sentido para o problema, consolidado por A1 na proposição subsequente.

Desse modo foi possível observar que o processo de determinação da proposição que gerou a função objetivo, somente se deu no momento em que houve a instauração de significado e de sentido. Nesse contexto, o significado das determinações esteve diretamente associado ao fluxo dado pela matemática, o sentido foi validado pelos aspectos objetivos do problema, perfazendo-se um entrelaçamento entre o problema, o sentido e o significado matemático empregado.

Consideração Parciais

Buscamos com a presente pesquisa mostrar os aspectos teóricos que consideramos relevantes para a determinação do problema: o significado e o sentido. Segundo Deleuze (1988) um "[...] Um problema não existe fora de suas soluções" (DELEUZE, 1988, p.159). Todavia o processo problemático é carregado de multiplicidades, constituindo-se de forma heterogênea (DELEUZE, 2011) e não podendo ser considerada como uma única série, mas sim em multisséries. Entendemos esta multisseriação pelo entrelaçamento proposto anteriormente, pois as sucessivas proposições discutidas nos excertos, além de aludirem ao problema, tiveram um significado matemático. Consideramos, com base em nossa análise, que essa ligação entre o problema e o significado foi proporcionada pelo sentido.

Apesar do sentido ser incorporal, este não pode ser confundido com a proposição, nem com problema, nem com o significado, sendo o expresso destes (DELEUZE, 2011). O sentido, então, fomenta todo o processo problemático, atuando como uma fronteira entre o problema e o significado, no caso, a matemática, potencializando o próprio acontecimento, traduzido pelas sucessivas proposições.

Neste artigo, focamos a análise, nas especificidades da determinação do problema, mais precisamente o como estas determinações fizeram sentido para o problema dos estudantes. Entretanto, nossos dados indicam outros aspectos que podem influenciar, dados principalmente pelas características subjetivas do problema. É nesse sentido, que pretendemos avançar nossa pesquisa, buscando um entendimento profundo acerca da determinação dos problemas e sua relação com o processo de Modelagem Matemática no âmbito da Educação Matemática.

Referências e bibliografia

Abbagnano, N.(2007). *Dicionário de Filosofia*. São Paulo: Martins Fontes.

Alves-Mazzoti, A. J. O Método nas Ciências Sociais. In: Alves-Mazzoti, A. J.; Gewandsznajder, F. *O Método nas Ciências Naturais e Sociais:* Pesquisa Quantitativa e Qualitativa. 2. ed. São Paulo: Pioneira, 1999.

Bogdan, R; Biklen, S.(1994). *Investigação Qualitativa em Educação*: uma introdução à teoria e aos métodos. Lisboa: Porto Editora.

Dalla Vecchia, R. (2012). *A Modelagem Matemática e a realidade no mundo cibernético*. Universidade Estadual Paulista. Rio Claro.

Dalla Vecchia, R.; Maltempi, M. V. (2012). Modelagem Matemática e Tecnologias de Informação e Comunicação: a realidade do mundo cibernético como um vetor de virtualização. *Bolema*, v. 26.

Deleuze, G. (1988). *Diferença e Repetição*. São Paulo: Graal.

Deleuze, G. (2010). *A ilha deserta*. São Paulo: Iluminuras.

Deleuze, G. (2011). *Lógica do Sentido*. 4ª Edição. ed. São Paulo: Perspectica S/A.

Deleuze, G.; Guattari, F. (2011). *Mil Platôs*. 2ª Edição. ed. São Paulo: 34, v. I.

Gamboa, S. S. (2012). *Pesquisa em educação*: métodos e epistemologias. 2ª Edição. ed. Chapecó: Argos.

Korner, S. (1985). *Uma introdução à Filosofia da Matemática*. Rio de Janeiro: Zahar.

Lopes, E. S. (2005). A realidade do virtual. Psicologia em Revista, Belo Horizonte, v. 11, p. 96-112.

Moreira, D. A. (2007). *Pesquisa Operacional:* curso introdutório. São Paulo: Thomson Learning.

Ramos, A. (2009) *Metodologia da Pesquisa Científica*: como uma monografia pode abrir o horizonte para o conhecimento. São Paulo: Atlas.

Saviani, D. (1996). *Educação*: do senso comum à consciência filosófica. 11. ed. Campinas, SP: Autores Associados.

Por que a Modelagem Matemática não chega à sala de aula?

Amauri Jersi **Ceolim**
Universidade Estadual do Paraná/Campus de Campo Mourão
Brasil
ajceolim@gmail.com
Ademir Donizeti **Caldeira**
Universidade Federal de São Carlos
Brasil
mirocaldeira@gmail.com

Resumo

Neste artigo, investigamos os obstáculos apontados pelos professores, egressos de cursos de Licenciatura em Matemática das instituições de ensino superior públicas de um estado brasileiro, o Paraná, que cursaram a disciplina de Modelagem Matemática na graduação, na perspectiva da Educação Matemática, com relação à aplicação da mesma no cotidiano da sala de aula. A opção metodológica para a compreensão dos dados foi pela Análise Textual Discursiva. A coleta de dados foi realizada por meio de questionário enviado via Google Docs a 57 professores recém-formados, até dois anos após a graduação, que estavam lecionando na Educação Básica do Estado do Paraná. Destes, 26 responderam o questionário. As análises dos dados mostram que os professores não estão preparados para trabalhar com a Modelagem em suas aulas, e que a estrutura escolar vigente não é apropriada para o desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática[1].

Palavras chave: educação matemática, modelagem matemática, obstáculos.

Introdução

A Modelagem na perspectiva da Educação Matemática nas últimas décadas tem se tornado um campo de conhecimento em evidência no Brasil, isto pode ser constatado pelo número crescente de publicações científicas em eventos, periódicos, trabalhos de pós-graduação *stricto sensu,* dentre outros, e também pelo interesse de pesquisadores e professores por essa área (Silveira, 2007, Biembengut, 2009, Araújo, 2010).

Em relação à produção de livros com abordagens em Modelagem na perspectiva da Educação Matemática no Brasil também tem aumentado significativamente nos últimos anos. Segundo informações do Centro de Referência de Modelagem Matemática no Ensino (CREMM, 2014), até 2007, existiam 4 livros de autores brasileiros sobre o tema. Atualmente, são 11 livros, sendo seis deles editados no período de 2011 a 2014.

[1] Este trabalho está vinculado ao projeto de doutorado do primeiro autor e tem apoio da UNESPAR-Campus de Campo Mourão, da UFSCar, e da Fundação Araucária.

Apesar de ser um campo que pode ser considerado como consolidado no cenário brasileiro, a literatura nos mostra alguns indícios de obstáculos em relação à utilização da Modelagem em sala de aula da Educação Básica (Silveira, 2007, Oliveira & Barbosa, 2011, Silveira & Caldeira, 2012, Ceolim & Caldeira, 2013).

Em função desses apontamentos de obstáculos, sentimos-nos motivados em investigar e analisá-los em relação ao desenvolvimento da Modelagem na sala de aula da Educação Básica brasileira. Assim este artigo tem o objetivo de descrever e analisar os obstáculos apontados pelos professores, egressos dos cursos de Licenciatura em Matemática das instituições públicas de ensino do Estado do Paraná-Brasil, que cursaram na graduação a disciplina de Modelagem na perspectiva da Educação Matemática, conforme descrita na próxima seção.

Contextualização e procedimentos Metodológicos

O Estado do Paraná foi selecionado devido estar evidenciado no cenário brasileiro em relação à pesquisa e disseminação da Modelagem Matemática. Pesquisadores deste Estado, nos últimos anos, tem se destacado com apresentações e publicações em eventos científicos, tanto no estado como no cenário brasileiro. Ainda nesse Estado foram realizados cinco Encontros Paranaenses de Modelagem em Educação Matemática (EPMEM). O primeiro foi realizado em 2004 e o último em 2012. Ressaltamos também que a Modelagem é contemplada em disciplinas de programas *stricto sensu* de cursos de mestrado e/ou doutorado em três instituições de ensino superior. Salientamos que dos 11 livros nacionais com abordagem de Modelagem na perspectiva da Educação Matemática, quatro são de pesquisadores do Estado do Paraná. Além disso, a Modelagem está inserida nas Diretrizes Curriculares da Educação Básica do Estado do Paraná (Paraná, 2008).

Diante desse quadro, definimos e escolhemos para nossa pesquisa, conhecer a opinião de professores recém-formados, até dois anos após a conclusão da graduação, de cursos públicos de Licenciatura em Matemática do Estado do Paraná, que cursaram na graduação a disciplina de Modelagem na perspectiva da Educação Matemática e estão lecionando, ou já lecionaram em escolas da Educação Básica.

Para a identificação e a classificação da disciplina de Modelagem, dos cursos de Licenciatura em Matemática com características da Educação Matemática, foram consultadas as ementas/programas de cada curso e analisados, se a/o mesma/mesmo constava/constavam a aplicação da Modelagem Matemática na Educação Básica. Dessa forma, se verificado essa característica, a disciplina de Modelagem Matemática foi considerada na perspectiva da Educação Matemática para fins da pesquisa.

Dos 20 cursos de Licenciatura em Matemática no Estado do Paraná, sete[2] apresentam a disciplina de Modelagem na perspectiva da Educação Matemática. Desses sete cursos, selecionamos seis, pois não conseguimos os dados dos estudantes de uma das instituições. Salientamos que os dados foram obtidos via site das instituições, coordenadores de cursos, secretaria acadêmica e e-mails.

A escolha desses professores ocorreu em dois momentos, no primeiro, precisávamos saber quais estudantes desses seis cursos estavam lecionado, ou já tinham lecionado. Assim foi

[2] UNESPAR/Campus de Campo Mourão; UNESPAR/Campus de União da Vitória; UNESPAR/Campus de Paranavaí; UNESPAR/Campus de Paranaguá; UENP-Campus de Cornélio Procópio, UENP - Campus de Jacarezinho e a Universidade Estadual de Londrina (UEL).

enviado e-mails para 134 graduados dos seis cursos. Destes, obtivemos um total de 57 professores egressos que estão lecionando, ou já lecionaram na Educação Básica, os outros 77 egressos ficaram fora do processo, pois 21 deles apresentaram problemas no endereço de e-mails, 13 responderam que não lecionaram e não estão lecionando e 43 não responderam ao questionário.

No segundo momento, foi enviado um segundo questionário, construído no Google Docs[3] aos 57 professores selecionados e desses, 26 responderam e 31 não responderam ao questionário. Dos 26 professores que responderam ao questionário, 11 desenvolvem ou já desenvolveram atividades de Modelagem em suas aulas e 15 não trabalharam ou não trabalham com a Modelagem em suas aulas. Nesse trabalho, mostraremos as análises somente dos 15 professores que não trabalharam com Modelagem em suas aulas[4].

Identificados os professores que se enquadravam nos nossos critérios, os dados foram obtidos por meio de três questões construídas no Google Docs: 7) Caso sua resposta para a questão 6 for sim, comente suas principais dificuldades. Caso for não, aponte os obstáculos. A questão 6 perguntava se o professor (a) já havia trabalhado com Modelagem em suas aulas. 8) O que é necessário para que a Modelagem Matemática seja aplicada em sala de aula da educação básica? 9) Sugestões e contribuições sobre o uso da Modelagem Matemática na sala de aula da educação básica.

Para a interpretação e análise dos dados da pesquisa, optamos pela Análise Textual Discursiva (Moraes, 2003). Nesse sentido, o *corpus* foi organizado em três etapas previstas nesta metodologia: 1) desmontagem do texto ou fragmentação; 2) estabelecimento de relações ou categorização; e 3) captando o novo emergente ou construção do metatexto.

Na etapa 1, o texto de cada respondente foi lido e relido numerosas vezes para que as ideias de cada professor envolvido pudessem ser impregnadas. Feito isso, iniciamos o trabalho de desmontagem do texto, ou seja, a retirada dos fragmentos. Esses fragmentos que comportam os significantes os quais contribuíram na construção de novos significados sobre o fenômeno educacional em questão.

Para sabermos a procedência de cada fragmento criamos um código alfanumérico de identificação composto por três partes ordenadas da esquerda para a direita, conforme o exemplo, P12.7.5 - Professor 12, questão 7, fragmento 5.

Após a fragmentação do corpus, passa-se para a etapa 2, a categorização desses fragmentos, apresentado no quadro 1. A emersão das categorias e subcategorias foram acontecendo no momento em que atentamos para a convergência de ideias presentes nos fragmentos do corpus, ou seja, elas foram surgindo com base no conhecimento tácito ou teorias implícitas do pesquisador.

[3] Pacote aplicativo do Google que funciona totalmente *online* diretamente no browser, permite a edição colaborativa em tempo real com diversos usuários, composto de vários aplicativos, dentre eles, um editor de formulários.

[4] A análise completa faz parte da pesquisa de doutorado do primeiro autor que se encontra em andamento. A definição dos sujeitos e a coleta de dados ocorreram em 2013.

Desse processo, emergiram quatro categorias de convergência, algumas contendo subcategorias: Insegurança dos professores em utilizar a Modelagem em suas aulas; Formação insuficiente em Modelagem; Dificuldades em aplicar a Modelagem devido a postura tradicional e conservadora do sistema escolar; Dificuldades em envolver os estudantes num ambiente de Modelagem, conforme apresentadas no quadro abaixo.

Quadro1
Categorias de obstáculos em relação ao uso da Modelagem em Sala de aula.

<table>
<tr><td colspan="2">Categoria I: Insegurança dos professores em utilizar a Modelagem em suas aulas</td></tr>
<tr><td>Fragmentos</td><td>Subcategoria</td></tr>
<tr><td>P2.8.1 falta uma preparação melhor do próprio professor;
P2.8.3 o professor deveria pesquisar, buscar mais sobre o assunto;
P7.7.1 pouco conhecimento da área;
P12.7.2 o conhecimento não visa somente o ensino da matemática, mas outras áreas, por isso, a necessidade de muito conhecimento;
P12.8.2 muito planejamento, conhecimento;
P1.8.7 tais inseguranças só podem ser amenizadas, a partir do momento que conhecemos sua teoria, aprendemos como usá-la e tenhamos aprendido por meio dela;
P13.8.1 capacitação dos professores com relação a questão do ensino de matemática com a modelagem matemática;</td><td>Conhecimento insuficiente sobre Modelagem</td></tr>
<tr><td>P3.7.1 insegurança por minha parte;
P12.7.3 medo do novo, e se dará certo;
P2.8.4 sempre tenho dúvidas se o que proponho aos meus alunos é investigação matemática, modelagem matemática;
P8.8.1 o professor tem que estar apto para desenvolver este trabalho;
P11.8.4 participação da família nas escolas para que os alunos se dediquem de forma intensa nas aulas;</td><td>Insegurança com o novo, acostumado com práticas tradicionais</td></tr>
<tr><td colspan="2">Categoria II: Formação insuficiente em Modelagem</td></tr>
<tr><td colspan="2">Fragmentos</td></tr>
<tr><td colspan="2">P2.7.1 o que estudei na graduação, é pouco para desenvolver a modelagem em sala de aula;
P2.8.2 na graduação é iniciado esse estudo, porém não é o suficiente;
P8.8.1 é necessário uma formação de qualidade para o professor de matemática;
P8.7.2 não houve aulas de modelagem suficientes para tal aperfeiçoamento;
P14.8.1 formação decente para os futuros professores;
P2.9.1 os professores dessa disciplina deveriam ter, por obrigação, um curso discutindo e resolvendo situações com a modelagem, aí sim, eu acredito que poderia ser aplicada com maior facilidade na educação básica.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Categoria III: Dificuldades em aplicar a Modelagem devido a postura tradicional e conservadora do sistema escolar</td></tr>
<tr><td>Fragmentos</td><td>Subcategoria</td></tr>
<tr><td>P5.7.1 o sistema exige que seja cumprido a matriz curricular;
P13.8.3 preocupação de "passar" o conteúdo e não trazer na ementa.</td><td>Dificuldades com Currículo</td></tr>
<tr><td>P6.7.2 laboratórios em situação precária;
P10.8.1 menor número de alunos em sala de aula;
P11.7.3 o número de alunos por sala;
P11.8.1 uma reestruturação no sistema;
P11.8.2 um número menor de alunos por aula;
P10.7.1 muitos alunos;</td><td>Dificuldades com a estrutura da escola</td></tr>
</table>

P11.8.3 número maior de aulas por sala para que o professor possa desempenhar um trabalho mais significativo; **P15.7.1** estrutura precária das escolas;.	
P8.7.1 dificuldade de se encontrar exemplos simples (que possam ser facilmente compreendidos pelos alunos) de aplicações dos conceitos matemáticos; **P8.7.2** os exemplos geralmente encontrados são complexos e exigem um amplo conhecimento dos conceitos matemáticos, o que dificilmente se verifica em sala de aula; **P9.7.1** falta de material; **P9.7.2** os livro didáticos não utilizam, apenas sugere; **P9.8.1** material com real aplicabilidade; **P12.9.1** um número maior de materiais didáticos que focassem a modelagem matemática.	Dificuldades com material didático
P10.7.2 pouca carga horária; **P12.7.1** planejamento fica em aberto, pois não se sabe o que vai acontecer no decorrer do processo; **P13.8.2** ementa flexível que garanta ao professor um tempo adequado para o trabalho com a modelagem; **P15.7.2** falta de disponibilidade de horário; **P1.7.1** falta de tempo para melhor preparação das aulas; **P1.9.1** maior tempo para preparo das atividades; **P3.8.2** mais tempo para planejamento de atividades como estas que demoram para serem planejadas; **P6.7.1** falta de tempo; **P11.7.4** o tempo destinado as aulas que não é suficiente; **P5.8.1** mais tempo para desenvolver as atividades;	Dificuldades com o planejamento e o tempo gasto com a aplicação da Modelagem em sala de aula
Categoria IV: **Dificuldades em envolver os estudantes num ambiente de Modelagem**	
Fragmentos	**Subcategoria**
P3.7.2 falta de interesse dos alunos em estudar; **P4.7.1** os alunos não consideram; **P14.7.2** pensar, o que eles não fazem, a maioria não consegue realizar operações básicas de adição e subtração, quem dirá desenvolver um projeto de modelagem.	Práticas tradicionais incorporadas nos estudantes
P1.8.1 alunos encontram-se despreparados para determinadas formas de aprendizagem diferenciada; **P3.8.1** maior comprometimento dos alunos com sua aprendizagem; **P4.8.1** conscientização dos alunos da importância deles em sua aprendizagem; **P11.7.2** os alunos não possuem a maturidade necessária para o desempenho de uma atividade satisfatória relacionada a este tipo de metodologia; **P14.7.3** falta de conhecimento dos alunos de conteúdos (básicos) das séries anteriores; **P14.7.1** o aluno tem que interpretar as informações.	Exige uma postura critica e investigativa dos estudantes

Fonte: o próprio autor.

A terceira etapa, a construção do Metatexto que se constitui numa tentativa de compreensão mais abrangente do fenômeno investigado, buscando encontrar novos sentidos, diferentes daqueles já existentes nos textos originais dos discursos. “Os metatextos são constituídos de descrição e interpretação, representando o conjunto um modo de compreensão e teorização dos fenômenos investigados” (Moraes, 2003, p. 202).

Nesse sentido, procuramos olhar os dados com essa perspectiva, analisando as categorias e subcategorias para compreendermos de forma mais abrangente os obstáculos apontados pelos egressos de cursos em Licenciatura em Matemática do Estado do Paraná em relação ao uso de Modelagem na sala de aula da Educação Básica. Para isso nos embasamos em pesquisadores do campo da Modelagem e da área de Formação de professores que tiveram pesquisas relacionadas a essa temática.

Insegurança dos professores em utilizar a Modelagem em suas aulas

A categoria *Insegurança dos professores em utilizar a Modelagem em suas aulas* contempla duas subcategorias.

A primeira, *conhecimento insuficiente sobre Modelagem,* aponta obstáculos em relação ao uso da Modelagem em suas aulas devido à falta de conhecimento. Ressaltamos que o trabalho com Modelagem, como afirma Almeida (2009), possibilita ao estudante *aprender sobre, aprender por meio e a refletir sobre*. Pensamos que isto possa acontecer também com o professor, porque trabalhar com Modelagem é estar num ambiente imprevisível, uma vez, que se trata de temas ou problemas relacionados à realidade em que os estudantes estão inseridos, assim o professor também aprende ao trabalhar com a Modelagem, adquire conhecimento trabalhando com ela, e amplia seu campo teórico.

Corroboramos também com as reflexões de Ferreti e Kluber (2009) em relação ao conhecimento que o professor necessita para trabalhar com Modelagem nos anos iniciais. Para eles, “nenhum professor está *totalmente pronto* para atuar, nem mesmo os que se formam em matemática têm total domínio para usar a Modelagem Matemática em suas aulas” (p.11, grifo nosso).

São elucidados também que o trabalho com Modelagem exige conhecimento além da matemática, devem estar se referindo as características ou concepções da Modelagem, ou seja, a Modelagem pode ser abordada de forma interdisciplinar, envolvendo temas que não estão relacionados a matemática. Como relata Araújo (2007), a Modelagem pode ser trabalhada por meio de “um problema não-matemático da realidade, ou de uma situação não-matemática da realidade, escolhida pelos alunos reunidos em grupos” (p. 30). Essa forma de abordagem, dentre outras, exige do professor uma conduta diferente, que esteja aberto para novos desafios, que esteja preparado para buscar novos conhecimentos.

A segunda subcategoria*, a insegurança com o novo, acostumado com práticas tradicionais,* explicita a questão de sair da ‘zona de conforto’ e assumir uma ‘zona de risco’, como relata Skovsmose & Penteado (2008), a zona de conforto representa “um alto grau de previsibilidade tanto para alunos quanto para professores” (p. 49). A zona de risco contrapõe a zona de conforto. Para os autores, “segurança e previsibilidade podem estar associadas à zona de conforto, enquanto novas oportunidades de aprendizagem podem estar associadas à zona de risco” (p. 49).

A insegurança com o novo pode ser devido ao fato de estarem acostumados com práticas tradicionais, se encontrarem numa zona de conforto, em que tudo é previsível, e na maioria das vezes corroboram com práticas para a aceitação da realidade como posta.

A Modelagem exige outra conduta, o professor não trabalha com resultados previsíveis, os temas podem ser abertos, as questões podem estar relacionadas com fatores econômicos, culturais, sociais, etc., o professor está sempre numa zona de risco e de busca. Ou como afirma Tardif (2008), a insegurança e o medo do novo podem estar relacionados com a impossibilidade de controlar os saberes disciplinares, curriculares, e da formação profissional, e nesse sentido, "produz ou tenta produzir saberes através dos quais ele compreende e domina sua prática" (p. 48).

A opção por abordagens que já domina, por atividades já experienciadas em algum momento de sua formação ou prática profissional faz com que o professor se sinta numa zona de conforto, ou seja, para o professor realizar um trabalho cotidiano burocratizado, em que as atividades planejadas são previsíveis, repetitivas e padronizadas é muito confortável.

Formação insuficiente sobre Modelagem

Nessa categoria, os fragmentos mostram que os professores saem da graduação e não se sentem preparados para trabalhar com a Modelagem na Educação Básica. Dentre outros fatores, destacamos que a disciplina de Modelagem, nos cursos investigados, apresenta uma carga horária que varia de 60 horas a 144 horas, e que apenas dois cursos apresentam 144 horas, isso significa que a maioria dos cursos (quando apresenta) contempla uma carga horária ínfima para a disciplina de Modelagem.

Verificamos também que muitos dos cursos selecionados, tinham um percentual significativo de conteúdos matemáticos sem relação com a Educação Básica. Ressaltamos que na grade dos cursos de Licenciatura em Matemática do Estado do Paraná, as disciplinas voltadas para as áreas da Educação Matemática e Conhecimentos Gerais de Educação representam em média 23,7% do total das disciplinas ofertadas (Cyrino, 2013). Um percentual pequeno de disciplinas voltadas para a área da Educação Matemática, e a Modelagem se encontra neste contexto com uma média de 1,3%, ficando nítida a predominância de disciplinas voltadas aos conteúdos matemáticos.

Meyer, Caldeira & Malheiros (2011) relatam que a maioria dos programas de Licenciaturas em Matemática no Brasil apresenta ainda fortes aspectos relacionados ao cientificismo, e que muitas práticas educacionais contidas nestes programas estão vinculadas ao Iluminismo do século XVIII.

Verificamos que no estado do Paraná há muitos cursos de Licenciatura em Matemática que trabalham a disciplina de Modelagem desvinculada da Educação Básica. Como relata o professor P2.9.1 *"os professores dessa disciplina deveriam ter, por obrigação, um curso discutindo e resolvendo situações com a modelagem, aí sim, eu acredito que poderia ser aplicada com maior facilidade na educação básica".* Se o professor não teve uma boa base de conhecimento sobre a Modelagem e uma boa discussão sobre o processo de ensino e aprendizagem com ênfase na Educação Básica, pode acontecer dele se adaptar as atividades já desenvolvidas na escola, como diz Ferreira (2003) "deixando-se levar pelos modismos ou conveniências" (p. 36).

Os fragmentos dos professores refletem aspectos de como foi trabalhada e discutida a Modelagem na graduação, talvez não tenha sido abordada numa perspectiva como diz Grillo (2001) que contemple "um ensino aberto à realidade, buscando integrar o cotidiano às atividades, possibilitando o conhecimento contextual e culminando, se possível, com ações concretas na comunidade" (p. 42). E nesse sentido, apontam que a base de conhecimento e as práticas recebidas na formação inicial sobre Modelagem não foram suficiente para embasar o trabalho de Modelagem em suas aulas.

Dificuldades em aplicar a Modelagem devido a postura tradicional e conservadora do sistema escolar

Nesta categoria são abordados e apontados obstáculos dos professores relacionados ao currículo, a estrutura da escola, ao material didático, ao planejamento e o tempo gasto com atividades de Modelagem em sala de aula.

Na subcategoria *dificuldades com o currículo,* fica evidenciada a preocupação com o cumprimento do currículo escolar vigente, com atividades planejadas por aulas, e também com material didático adotado pela escola. Ou seja, a escola já tem constituído uma estrutura fechada de currículo, com viés linear, e alicerçado por práticas tradicionais, em que as aulas acontecem na maioria das vezes entre quatro paredes, com alunos enfileirados, dando ênfase às questões disciplinares dos estudantes.

E é devido a esta estrutura de currículo, já estabelecida, em que se dá pouca ou quase nenhuma liberdade para o professor flexibilizá-la, que torna o principal fator causador de obstáculos aos professores em relação ao uso de Modelagem em suas aulas.

Burak (2010) ressalta que o currículo escolar da forma como se encontra nas escolas "subtrai-lhe a possibilidade de desenvolver sua autonomia, a iniciativa, liberdade de conjecturar e, com isso inibe o desenvolvimento de muitas competências necessárias a formação de um cidadão" (p. 19).

O autor relata que a visão linear do currículo é predominante na maioria das escolas, e isto dificulta o desenvolvimento de atividades de Modelagem. Para Kluber (2010), a "ruptura com o currículo linear – que se constitui em umas das características mais importantes da modelagem, pois com ela, não são os conteúdos que determinam o problema, mas o contrário" (p. 98).

Como relatam Meyer, Caldeira & Malheiros (2011), o currículo escolar da forma como se encontra hoje, pode ser um grande obstáculo à prática de Modelagem nas salas de aula, por sua característica linear e dominante, estimulando práticas tradicionais ao ensino de matemática. Para os mesmos autores, o currículo deveria ser "em forma de espiral em que, muitas vezes, temos que fazer o movimento de ir e de voltar, o que pode acontecer de termos de "misturar" os elementos que estão dentro das gavetas" (p. 40).

Para Tardif & Lessard (2005), o professor é considerado como um corpo executor, "nunca participou da seleção da cultura escolar e da definição dos saberes necessários para a formação dos alunos [...]. Seu lugar de agir é a sala de aula, mas a classe é, ao mesmo tempo, o limite de seu poder" (p.78).

Neste sentido a função do professor é de executor, de transmissor dos conteúdos já estabelecidos pelo currículo e pelo sistema escolar. Os fragmentos dos professores parecem retratar esta realidade, pois fica implícito a não participação dos mesmos na elaboração do currículo, bem como a não contemplação de atividades de Modelagem no currículo, o que vem confirmar o que Tardif & Lessard (2005) relatam, "ensinar na escola, naturalmente, é seguir um programa e tentar realizar seus objetivos" (p. 207).

A subcategoria *dificuldades com a estrutura da escola* não aborda somente a estrutura física, aponta questões referentes à infraestrutura, como por exemplo, o estado precário dos laboratórios, o número elevado de alunos por turma, e a necessidade de um maior número de aulas de matemática para trabalhar com Modelagem. P6.7.2 aponta a situação precária dos laboratórios deve estar se referindo aos laboratórios de informática, e P15.7.1 explicita a *"estrutura precária das escolas"* deve estar se referindo as condições físicas, por exemplo, falta de espaço para desenvolver outras atividades além das programadas em sala de aula.

Para esses professores há necessidade de ambientes diferente do tradicional para que a Modelagem possa ser desenvolvida em sala de aula. E nas escolas, na maioria delas, a sala de aula é o único espaço destinado ao ensino, como dizem Tardif & Lessard (2005), "espaços relativamente fechados (na maior parte do tempo fechados), nos quais os professores trabalham separadamente cumprindo aí essencialmente sua tarefa" (p. 60).

Os fragmentos de P10.8.1, P11.8.2, P11.8.2, P10.7.1 e P11.8.3 explicitam que a Modelagem não é trabalhada em sala de aula, devido a questão do tempo, da carga horária e do número elevado de estudantes por turma. Estes pontos vêm sendo objeto de estudo e preocupação de vários pesquisadores, dentre eles, Barbosa (1999), Silveira (2007), Meyer, Caldeira & Malheiros (2011). Esses autores apontam a necessidade de mudanças no currículo para que a Modelagem possa ser desenvolvida na sala de aula da Educação Básica. Para eles, o trabalho com Modelagem na Educação Básica rompe com a estrutura rígida do currículo vigente, pois, os estudantes são convidados a indagar e/ou investigar situações/problemas da realidade em que estão inseridos.

Na subcategoria *dificuldades com material didático* os professores relatam que há pouco material didático contemplando atividades de Modelagem, e isto é considerado como um obstáculo para a prática em suas aulas. Os professores estão acostumados com a estrutura escolar vigente, ou seja, como relatam Tardif & Lessard (2005) "seguir um programa e tentar realizar seus objetivos" (p. 207). Ou ainda como afirmam Burak & Aragão (2012) prevalecendo um ensino "centrado na repetição e na reprodução" (p. 9), enfatizando uma abordagem de ensino numa perspectiva tradicional, em que prevalece a opção por manter-se numa 'zona de conforto'. Como afirma Skovsmose (2007) "o ensino tradicional de matemática é dominado pelo uso do livro-texto. [...] O livro-texto ocupa a cena" (p. 33-34).

Na subcategoria *dificuldades com o planejamento e o tempo gasto com a aplicação da Modelagem em Sala de aula* é apontada como obstáculos a falta de tempo para preparar as atividades. E os professores entendem que a Modelagem necessita de um planejamento flexível, por abordar problemas do contexto em que os estudantes estão inseridos, e muitas vezes necessita ser trabalhada de forma interdisciplinar.

E é nesse sentido que os professores apresentam dificuldades com o planejamento, pois, preparar/planejar atividades com Modelagem exige um tempo maior, se comparando com a forma que geralmente são abordados os conteúdos de matemática contemplados nos livros didáticos ou apostilas adotadas pelas escolas. Em que o professor atua como 'executor' como afirmam Tardif & Lessard (2005), e geralmente não participa do planejamento do mesmo.

Dificuldades em envolver os estudantes num ambiente de Modelagem

Esta categoria foi dividida em duas subcategorias, uma denominada de *práticas tradicionais incorporadas nos estudantes*, e a outra, *exige uma postura crítica e investigativa dos estudantes.*

Na primeira subcategoria, os fragmentos dos professores explicitam que os estudantes estão acostumados com um trabalho escolar previsível e já estruturados pela escola, ou seja, um ensino centrado no professor, como ressalta Garnica (2001), "um processo de ensino restrito à transmissão cumpre apenas a função de conservação" (p. 43). E nesse sentido, torna-se um obstáculo para os professores envolverem os estudantes em atividades de Modelagem que exigem mais dedicação, por lidar com um trabalho de investigação e interpretações das informações vindas da realidade.

Como salienta Barbosa (2001), os estudantes são convidados a indagar e/ou investigar situações/problemas da realidade, que "se diferencia da forma que o ensino tradicional – visivelmente hegemônico nas escolas - busca estabelecer relações com outras áreas e o dia-dia" (p. 8).

Na segunda subcategoria *exige uma postura crítica e investigativa dos estudantes,* as respostas dos professores apontam obstáculos suscitando que os estudantes não estão preparados para lidar com metodologias inovadoras, no caso a Modelagem.

Fica evidente, a preocupação em sair da 'zona de conforto' e ir para a 'zona de risco', pois, a Modelagem por sua característica contempla uma perspectiva interdisciplinar, sendo desenvolvida no contexto em que os estudantes estão inseridos, por meio de situações/problemas escolhidos pelos estudantes e o professor, de forma que a resolução dessas situações/problemas possam contribuir para transformar aquela realidade. Como salienta Garnica (2001) para a escola "exercer a função transformadora é preciso abertura, confrontação com a realidade, pois esta dá credibilidade à teoria estudada" (p. 43).

Algumas Considerações

Os professores, egressos dos cursos de Licenciatura aqui apresentados alegam que não têm conhecimento suficiente para trabalhar com Modelagem, dizem que o que aprenderam na graduação não respalda o desenvolvimento de atividades de Modelagem em suas aulas.

Identificamos alguns fatores que corroboram para isso, a questão da carga horária das disciplinas de Modelagem na graduação é muito baixa, os conteúdos da disciplina de Modelagem, a maioria deles, não tem relação com o que é trabalhado na Educação Básica. Além disso, a grade dos cursos de Licenciatura em Matemática em geral apresenta um percentual baixo de disciplinas voltadas para as áreas de Educação Matemática, e mesmo assim, algumas disciplinas são desenvolvidas sem fazer relação com as áreas da Educação Básica. Porém, concordamos com Ferreti & Kluber (2009) ao afirmarem que o professor sai da graduação e não está totalmente preparado para atuar em suas aulas.

Outro ponto considerado como obstáculo para o desenvolvimento de Modelagem em suas aulas foi em relação a estrutura escolar. A estrutura da escola vigente não propicia um ambiente para desenvolver atividades de Modelagem, apresenta um currículo já estruturado, com um viés linear, e em grande parte, fundamentado por práticas tradicionais em que as salas são o único espaço para o ensino.

Salientamos também que as escolas adotam materiais didáticos que, geralmente, são seguidos de forma linear, com tempo pré-determinado, não permitindo flexibilidade ao professor em relação a práticas inovadoras, no caso da Modelagem.

Enfatizamos que os professores investigados nessa pesquisa estão atuando na Educação Básica, tanto em escolas públicas como em particulares, e cursaram a disciplina de Modelagem na perspectiva da Educação Matemática na graduação, mesmo assim não trabalham com a Modelagem em suas aulas.

Referências e bibliografia

Almeida, R. N. (2009). *Modelagem matemática nas atividades de estágio: saberes revelados por futuros professores* (Dissertação de Mestrado). Programa de Pós-Graduação de Educação e Ciências Humanas da Universidade Federal de São Carlos, São Carlos – SP.

Araújo, J. L. (2007). Relação entre matemática e realidade em algumas perspectivas de modelagem matemática na educação matemática. In J. C. Barbosa, A. D. Caldeira, & J. L. Araújo (Orgs.), *Modelagem Matemática na Educação Matemática Brasileira: pesquisas e práticas educacionais* (Vol. 3, pp.17-31). Recife: SBEM.

Araújo, J. L. (2010). Brazilian research on modelling in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, *42*, 337–348. ISSN: 2211-1670.

Barbosa, J. C. (1999). O que pensam os professores sobre a modelagem matemática? *Zetetiké: Revista de Educação Matemática, 11*, 67-85.

Barbosa, J. C. (2001). Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico. In: *Reunião Anual da ANPED*, *1*, 1-15. ISSN: 2238-1529.

Biembengut, M. S. (2009). 30 anos de Modelagem Matemática na Educação Brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. *Alexandria-Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, 2*, 7-32.

Burak, D. (2010). Modelagem Matemática sob um olhar de Educação Matemática e suas implicações para a construção do conhecimento matemático em sala de aula. *Revista de Modelagem na Educação Matemática***,** *1*, 10-27.

Burak, D., & Aragão, R. M. R. A. (2012). *A Modelagem matemática e relações com a aprendizagem significativa***.** Curitiba-PR: Editora CRV.

Ceolim, A. J., & Caldeira, A. D. (2013). Modelagem Matemática em sala de aula: obstáculos e resistências apontados por pesquisadores brasileiros. In *VIII CIBEM- Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática*. ISSN: 2301-0797.

Cyrino, M. C. C. T. (2013). A formação inicial de professores de matemática no Paraná. In *XI ENEM – Encontro Nacional de Educação Matemática* (pp. 1-17). ISSN: 2178-034X.

CREMM - Centro de Referência de Modelagem Matemática no Ensino. (2014). Disponível em: <http://www.furb.br/cremm/portugues/cremm.php?secao=Publicacoes&parte=start>. Acesso em: jul 2013.

Ferreira, A. C. (2003). Um olhar retrospectivo sobre a pesquisa brasileira em formação de professores de Matemática. In D. Fiorentini (Org.), *Formação de Professores de Matemática: explorando novos caminhos com outros olhares* (pp. 19-50). Campinas-SP: Mercado de Letras Edições e livraria Ltda.

Ferreti, P. A. G., & Kluber, T. E. (2009). Levantamento das dissertações e teses no Paraná sobre Modelagem Matemática na Educação Matemática – 1999 a 2008: um estudo preliminar. In: *X EPREM- Encontro Paranaense de Educação Matemática* (pp. 1-14). ISSN: 187-349.

Garnica, A. V. M. (2001). É necessário ser preciso? “Um estudo sobre argumentação matemática” ou “Uma investigação sobre a possibilidade de investigação”. In H. N. Cury (Org.)*, Formação de Professores de Matemática: Uma visão Multifacetada* (pp. 49-88). Porto Alegre: Edipucrs.

Grillo, M. (2001). Prática docente: referência para formação do educador. In H. N. Cury (Org.), *Formação de Professores de Matemática: Uma visão Multifacetada* (pp. 29-47). Porto Alegre: Edipucrs.

Kluber, T. E. (2010). Modelagem matemática: revisitando aspectos que justificam a sua utilização no ensino. In C. F. Brandt, D. Burak, & T. E. Kluber, *Modelagem Matemática: uma perspectiva para a Educação Básica* (pp. 97-114). Ponta Grossa-PR: Editora UEPG.

Meyer, J. F. C. A., Caldeira, A. D., & Malheiros, A. P. S. (2011). *Modelagem em Educação Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.

Moraes, R. (2003). Uma tempestade de luz: a compreensão possibilitada pela análise textual discursiva. *Revista Ciência e Educação*, *2*, 1911-2011.

Oliveira, A. M. P., & Barbosa, J. C. (2011). Modelagem Matemática e Situações de Tensão na Prática Pedagógica dos Professores. *BOLEMA -Boletim de Educação Matemática*, *38*, 265-296.

Paraná. (2006). *Diretrizes Curriculares de Matemática para a Educação Básica.* Secretaria de Estado da Educação. Curitiba-PR.

Silveira, E. (2007). *Modelagem Matemática em educação no Brasil: entendendo o universo de teses e dissertações* (Dissertação de Mestrado). Programa de Pós-graduação em Educação da Universidade Federal do Paraná, Curitiba-PR.

Silveira, E., & Caldeira, A. D. (2012). Modelagem na Sala de Aula: resistências e obstáculos. *BOLEMA Boletim de Educação Matemática*, *43*, 249-275.

Skovsmose, O. (2007). *Educação crítica: incerteza, matemática, responsabilidade* (Tradução de Maria Aparecida Viggiani Bicudo). São Paulo: Cortez.

Skovsmose, O., & Penteado, M. G. (2008). Riscos trazem possibilidades. In O. Skovsmose, *Desafios da Reflexão em Educação Matemática Crítica* (pp. 41-50). São Paulo: Papirus.

Tardif, M., & Lessard, C. (2005). *O trabalho docente: Elementos para uma teoria da docência como profissão de interações humanas* (7ª ed.). Petrópolis-RJ: Vozes.

Tardif, M. (2008). *Saberes docentes e formação profissional* (9ª ed.). Petrópolis-RJ: Vozes.

Praxeologías y empiremas.
Recursos extremos para la construcción de conocimiento

Alberto **Camacho** Ríos
Instituto Tecnológico de Chihuahua II
México
camachoalberto@hotmail.com
Bertha Ivonne **Sánchez** Luján
Instituto Tecnológico de Ciudad Jiménez
México
ivonnesanchez10@yahoo.com

Resumen

El objetivo es elaborar un análisis praxeológico en la determinación de la ecuación diferencial: $k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$, que desarrollan Zill y Cullen (2008, p. 533, vol. 1). En la determinación de la ecuación destaca la transposición de técnicas empíricas que se corresponden con la fenomenología física, que no se pueden justificar con los elementos tecnológicos supuestos en el modelo de organización matemática de Chevallard (1999). Como objetivo colateral del trabajo se deja ver cómo esa carencia de justificación hace necesarios otros argumentos tecnológicos ausentes en la TAD para su propia justificación.

Palabras clave: técnica práctica, tecnología teórica, empirema, Institución.

Abstract

The purpose is to develop a praxeological analysis in determining the differential equation: $k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$, which develop Zill and Cullen (2008, p 533, vol. 1). In determining the equation stands transposing empirical techniques, which correspond to the physical phenomenology, which cannot be, justified with the assumptions technological elements in the mathematical model organization Chevallard (1999). As a side objective of the work is left to see how this lack of justification makes necessary absent other arguments in the TAD technology for its own justification

Key words: Technical practice, theoretical technology, empirema, Institution.

Introducción

El objetivo es elaborar un análisis praxeológico en la determinación de la ecuación diferencial parcial de difusión de calor que desarrollan Zill y Cullen (2008, p. 533, vol. 1). En la determinación de la ecuación destaca la transposición de técnicas empíricas que se corresponden con la fenomenología física, que no se pueden justificar con los elementos tecnológicos supuestos en el modelo de organización matemática (OM) de Chevallard (1999). Como objetivo colateral del trabajo se deja ver cómo esa carencia de justificación hace necesarios otros argumentos tecnológicos ausentes en la TAD para su propia justificación. Se plantea así un proceso de transposición y circulación de praxeologías entre diferentes instituciones, tanto de utilización como de producción de saberes.

En la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) las OM, también reconocidas como praxeologías canónicas, son integradas por objetos y técnicas que se consagran en la práctica matemática hacia la resolución de tareas T a partir de una teoría matemática. Las OM son así concebidas como la Institución de producción de saberes matemáticos, los cuales son validados según las normas de demostración matemática. Las OM se contemplan en la cuádrupla de análisis $[T, \tau, \theta, \Theta]$, la cual muestra que T es un tipo de problema por resolver, τ es la técnica con la cual se puede abordar el problema, θ la tecnología de la que se desprende la técnica: teoremas, axiomas, definiciones, etc., y Θ el marco axiomático que soporta la organización.

Desde este enfoque, las actividades de la matemática escolar pueden estructurarse por OM cuyos objetos dejan fuera concepciones que dieron origen a la construcción social de los saberes sobre los que descansa actualmente la enseñanza de la matemática. Es así que la TAD no acepta la modelación de conceptos fundamentales cuya definición se advierte empírica, por ejemplo: aquellos de *variable* y *función* mirados a través del estado del *movimiento,* percibido éste último como *variabilidad*. La razón es que movimiento y variabilidad no son conceptos que pertenezcan a la teoría matemática y son más bien admitidos en la fenomenología física y los modelos estocásticos.

El uso de recursos de la física y otras disciplinas en la enseñanza de la matemática, ha servido para *motivar* los tópicos y objetos matemáticos de modo que a través de ellos se puedan interpretar algunos resultados de los problemas *prácticos* que con esos recursos y otros conceptos se puedan resolver y cuya resolución se exige en los planes y programas de estudio, principalmente en aquellos de las carreras de ingeniería. Es así que la introducción de conceptos externos a la práctica matemática, involucra otro tipo de técnicas *prácticas* intermediarias, que se unen con las *técnicas matemáticas* que se despliegan de los teoremas y definiciones, cuya asociación sirve de puente para la resolución de tareas.

Al menos para la enseñanza, el uso de ese tipo de ostensivos para la adquisición del conocimiento ha sido convenido tanto por los autores de textos, los profesores y quienes han diseñado los planes de estudio, sin un cuestionamiento al centro de la teoría matemática que valide su uso. Esa actividad es común en la matemática escolar, principalmente en el nivel superior de ingeniería, y es marcado por una tradición en la resolución de problemas de *aplicación* para cada tema específico, que supuestamente tienen que ver con las especialidades de las carreras.

¿Cómo modelar la actividad de enseñanza aprendizaje bajo esas condiciones?

A partir de la fenomenología física de los sistemas de fluidos, se muestra en el escrito la ley empírica del *gasto*, la cual cuenta con técnicas empíricas que determinan la ecuación diferencial parcial de difusión del calor. La práctica que involucra el gasto Q en la determinación de las ecuaciones diferenciales, arroja rupturas epistemológicas al centro de la teoría matemática. Es así que para una modelación praxeológica de la transposición de este concepto en la definición del objeto:

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \ldots (1)$$

se hace necesario definir otro tipo de organizaciones.

Se consideran dos tipos de praxeologías que se ubican en un nivel más bajo de racionalismo respecto a las OM: las primeras se conocen como *praxeologías matemáticas*, y designan las funciones a que da lugar la utilidad de las OM determinadas por los procesos de transposición del saber, admitiendo argumentaciones arbitrarias que surgen de la práctica matemática, en las instituciones usuarias de la matemática misma. Las segundas se conciben como *praxeologías no-canónicas*, las cuales admiten conocimientos empíricos de otras ciencias no-matemáticas. En ambos casos, se presenta un fenómeno de co-determinación entre los elementos de las OM y aquellos de las actividades prácticas, que llevan a la construcción de praxeologías no-canónicas.

Para la justificación de los elementos tecnológicos que integran ambos tipos de praxeologías, el modelo chevallardiano $[T, \tau, \theta, \Theta]$ deja de funcionar. Es así que para su utilidad en la incorporación de conocimientos externos a la matemática, se asumirá el *modelo extendido* de Castela y Romo-Vázquez (2011): Un modelo de praxeología no-canónica en proceso de construcción, que admite tanto las tecnologías teóricas θ^{th} como tecnologías prácticas θ^{p}.

$$\left[T, \quad \tau, \begin{matrix}\theta^{th} \\ \theta^{p}\end{matrix}, \quad \Theta\right] \begin{matrix}\leftarrow P(M) \\ \leftarrow I_u\end{matrix}$$

Esquema 1. Modelo praxeológico extendido propuesto por Castela y Romo-Vázquez (2011), en el que se incluye a la unidad básica de análisis $[T, \tau, \theta, \Theta]$ una tecnología práctica θ^{p}.

En el Esquema 1, I_u representa la institución usuaria de la matemática, en este caso los sistemas de fluidos, de los que se desprenden tecnologías prácticas θ^{p}, en tanto $P(M)$ son aquellos investigadores que producen matemáticas y justifican a θ^{th}.

Experimentación y empiremas

El uso del gasto en la demostración de la ecuación diferencial parcial citada, muestra la transposición de saberes entre instituciones no necesariamente matemáticas y da pie para aceptar la existencia de argumentos externos conocidos como *empiremas,* en la forma en que los define De Gortari (2000, p. 166).

Los empiremas se reconocen por el contenido de proposiciones obtenidas como resultado de actividades prácticas o experimentales, los cuales son susceptibles de ser sometidos a verificación para probar su validez. Vidal y Rogalsky (2007) enuncian proposiciones de este tipo llamándolos *conceptos pragmáticos*, es decir, *entidades* que no son parámetros directamente observables o medibles vía instrumentos, ni tampoco, en l**o** inmediato, conceptos técnicos de carácter científico:

> (…) representaciones esquemáticas y operativas elaboradas por y para la acción, que son producto de un proceso histórico y colectivo, y que son transmitidas esencialmente por experiencia y por compañerismo (p. 51)[1].

De manera semejante a los teoremas, los empiremas se determinan primero en calidad de hipótesis, como consecuencia de una serie de razonamientos, para posteriormente ser sometidos a pruebas experimentales. La característica de las proposiciones y fórmulas contenidas en los empiremas, es que estas pueden ser "(…) *el preludio de conceptos científicos* (…)", toda vez que

---

[1] (…) représentations schématiques et opératives, élaborées par et pour l'action, qui sont le produit d'un processus historique et collectif, et qui sont transmises essentiellement par expérience et par compagnonnage.

son "(…) *provistos de cualidades teóricas"* (op. cit., p. 52), sin necesariamente ser considerados objetos pre-construidos como aquellos que forman parte de las OM, en el sentido de Schneider (2007).

Este punto de vista se apega a la aceptación del concepto de empirismo como sustento de la construcción de conocimiento, semejante a la postura que adopta Priest (2007, p. 6):

Considero que el conocimiento se "fundamenta sobre" la experiencia si y sólo si la experiencia es necesaria para el conocimiento[2].

El planteamiento deja ver que el empirismo es *necesario* para la adquisición y formulación de conceptos, más allá de su concepción a priori.

En el Esquema 2 la tecnología práctica θ^p justifica el empleo de las técnicas empíricas externas, toda vez que tiene por límite a las tecnologías teóricas θ^{th} dominantes. En esa estructura, el bloque $[T_p, \tau_p]$ se reconoce como un *saber-hacer* de carácter práctico, mientras que el bloque tecnológico $[\theta^p, \theta^{th}]$ finca un puente epistemológico entre las tecnologías práctica y teórica, que son validadas por la institución usuaria I_u, que además *produce* las actividades prácticas τ_e. Ambas tecnologías establecen un nivel de discurso tecnológico mixto que enriquece la justificación de las técnicas prácticas involucradas.

$$[T, \quad \tau, \theta^p, \quad \Theta] \longleftarrow I_u$$

Esquema 2. Modelo de *empirema* en el que θ^p justifica las técnicas empíricas externas τ_e toda vez que tiene por límite a la tecnología teórica θ^{th}. En este caso, la institución I_u valida su posición.

Para mejorar la explicación anterior se propone el siguiente caso.

De la Pascua (1876, pp. 95-96) propone dos definiciones para el gasto en tanto[3]: *"cantidad de agua que sale en un tiempo dado por una abertura cualquiera".* La primera de ellas es una *definición teórica* expresada por la fórmula (2) de Torricelli.

$$Q = \frac{2tK\sqrt{ah}}{t'} \quad \ldots 2$$

en la cual Q representa el gasto, K la superficie o área del orificio, t el tiempo en que se produce dicho gasto, h la altura del nivel y a la altura de que caería un cuerpo pesado en el tiempo t'. La fórmula (2) es deducida de las leyes del movimiento uniformemente acelerado y representa lo que se conocía a finales del siglo XIX como *gasto teórico*. Para determinar el *gasto práctico,* De la Pascua comprobó *por la experiencia,* es decir, a través de una constatación empírica, la expresión (2) usando un depósito en el que la altura del nivel era constante en todo momento, de modo que midió las cantidades de agua a través del orificio para diferentes tiempos. A partir de esto último dedujo que el "(…) *gasto práctico es en proporción menor que el gasto teórico"*, ello a partir de que la *velocidad práctica* del flujo *es de dos tercios respecto de la teórica* (p. 95).

De la Pascua atendió el problema geométrico que se suscita y que le llevó a determinar la proporción de dos tercios de diferencia entre la velocidad práctica y la velocidad teórica, concluyendo que el depósito utilizado para la experimentación no era del todo cilíndrico sino que asumía cierta forma cónica, de modo que las proporciones entre gasto práctico y gasto teórico

[2] I suggest knowledge is 'based on' experience if and only if experience is necessary for knowledge.
[3] El libro de física de De la Pascua se usó como manual para la enseñanza de esa disciplina en la Escuela Nacional Preparatoria mexicana durante el último tercio del siglo XIX.

son lo suficientemente aceptables de acuerdo a la experimentación, lo cual valida en ese contexto a la expresión (2).

La ley empírica del gasto en la difusión de calor. El punto de vista en los manuales

Por lo general los textos de matemáticas involucran nociones y conceptos empíricos para validar la definición de conceptos matemáticos que les constituyen, sin justificar la inmersión de dichos argumentos al centro del contenido del discurso matemático que da estructura al texto. Un caso particular se puede ver en el libro de ecuaciones diferenciales de Zill y Cullen (2008, p. 533, vol. 1). Estos autores hacen uso de la ley empírica del gasto:

$$Q = -\gamma m u. . . \ (3)$$

expresión que como es sabido fue fincada a través de la experimentación en las corrientes de agua durante el año de 1625 por el italiano B. Castelli, fue además experimentada por Galileo en 1656, hasta lograrse un uso práctico en la determinación del volumen de agua que atraviesa por una sección trapezoidal en los canales, en los trabajos desarrollados por Chézy en 1768 y en los estudios sobre el movimiento de los fluidos de Navier en 1821[4] (Levy, 1989, p. 226)[5]. En la fórmula (2), *Q* es la velocidad con la que ocurre el flujo por un elemento de sección transversal de un tramo de tubo de masa homogénea, *m* es la masa del flujo y *u* la cantidad de flujo que se acumula en la sección por unidad de tiempo *t*.

Tijonov y Samarsky (1972, p. 189) usan la ley del gasto en la forma:

$$Q = -k\frac{u_2-u_1}{I}S = -k\frac{\partial u}{\partial x}S \ . . . (4)$$

donde *S* es una sección de la barra y $\frac{u_2-u_1}{I}$ el calor que *permanece* en la sección por unidad de tiempo. En todos los casos el uso del gasto *Q* facilita la práctica matemática importando así las *disquisiciones físicas* (Godunov, 1978, p. 36) que llevan a la determinación de la ecuación diferencial.

La misma idea en la utilidad del gasto *Q* fue la pieza clave que llevó a Fourier a establecer la ecuación de calor. Fourier describe el equilibrio térmico del flujo de calor a partir de una descomposición geométrica de los cuerpos (sólidos o líquidos), que deviene *método canónico* (Dalmedico, 1992, pp. 133-134). La cantidad de calor *u* que permanece en una sección entre las superficies de un paralelepípedo elemental, condujo a Fourier a la ecuación de propagación, que se muestra en (5).

$$\frac{du}{dt} = \frac{k}{C_\rho}\left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2u}{dy^2} + \frac{d^2u}{dz^2}\right) \ . . . (5)$$

donde *C* es el calor específico, ρ la densidad y *k* la constante de conductividad

El calor va de las regiones de calor más altas hacia las regiones más frías a una velocidad proporcional a la variación de la temperatura.

[4] Navier (1821). *Sur les lois des mouvements des fluides, en ayant égard à l´adhésion des molécules. Annales de Chimie et Physique, col. 19, 244-260.* De la reproducción parcial de La Houille Blanche, núm. 6 (1967), 673-677

[5] La obra de Castelli, en la cual determina el gasto, es citada por Levi: Castelli, B (1765): *Della misura delle aqcue correnti,* en *Raccolta d´autori…,* vol. 1, Florencia.

El método canónico es resultado de la definición del gasto fincada originalmente por Castelli, que a su vez utilizó Fourier a partir del conocimiento que tenía de ley de enfriamiento de Newton, cuyas articulaciones pone en evidencia la ya citada Dalmedico (1992):

> (…) El calor se difunde por un área elemental que es igual al producto de la superficie de difusión por el coeficiente conductibilidad externa que multiplica a la diferencia de temperaturas[6] (p. 131).

El engranaje que señala fundamental la fórmula del gasto, evidencia una fenomenología física que esconde la génesis del modelo matemático de las ecuaciones diferenciales que organizan el problema de difusión de calor. Dicha fenomenología es estrechamente relacionada con la estabilidad de los sistemas de fluidos incorporado a la obra de Newton: Las *cantidades fluyentes,* las *fluxiones*, así como el método del gasto para determinar la cuadratura de las curvas[7], dejan ver en este último su filiación ante ese sistema, del cual Fourier es partícipe.

Se presentan así dos dominios diferentes en dependencia recíproca: la teoría de calor que se desprende de un modelo del todo experimental y otra que de ella se deduce, la teoría de las ecuaciones diferenciales, que se contempla actualmente en un modelo teórico matemático. No obstante, la explicación a través del método canónico para la definición del modelo matemático de las ecuaciones diferenciales hace inevitable en la práctica matemática el uso del gasto.

Los autores de los libros de texto de ecuaciones diferenciales, formulan estas últimas a partir de los principios de la física para motivar los tópicos y objetos matemáticos, de modo que a través de ello se puedan interpretar los resultados que las ecuaciones arrojan. ¿Pero, de veras esos autores contarán con herramientas matemáticas para formular las ecuaciones diferenciales citadas y así evadir en la práctica matemática las propias herramientas que provee la fenomenología física? Un intento de evadir el gasto es describir la ecuación de difusión a partir de la divergencia como:

$$u_t = \frac{k}{c_\rho} div(\nabla u) \text{ , o bien } u_t = \frac{k}{c_\rho} \nabla u \ . . . \ (6)$$

No obstante, la divergencia de un campo vectorial mide la diferencia entre el flujo que entra y el flujo que sale del campo, determinando así al propio gasto. Koepfler (2001, p. 26) desarrolla un planteamiento semejante, con lo cual intenta una demostración más apegada a la teoría matemática, sin poder evitar las referencias a la fenomenología física.

La técnica del gasto es determinada y validada por instituciones externas a la matemática sin poder disociarse de los modelos praxeológicos por su estatus en la enseñanza de los modelos de ecuaciones diferenciales.

Modelación praxeológica de la definición de la ecuación de calor a través del gasto

La ley que determina el gasto (1) es transpuesta sin mucho cuestionamiento por Zill y Cullen (2008) al caso de la difusión de calor sobre una barra delgada de longitud L, de condiciones análogas al flujo de líquidos. Para ello establecen cuatro supuestos:

---

[6] (…) La chaleur diffusée par une aire élémentaire est égale au produit de la surface de diffusion par le coefficient de conductibilité externe que multiplie la différence de température.

[7] Además de la gran cantidad de problemas de difusión: calor, flujo de partículas, etc., que se atienden en los *Principia.*

- Dentro de la varilla, el flujo de calor tiene lugar sólo en la dirección *x*.
- La superficie lateral está aislada.
- No se está generando calor dentro de la varilla.
- La varilla es homogénea, esto es, su masa por unidad de volumen ρ es constante.
- El valor específico γ y la conductividad térmica *K* del material son constantes.

El problema se puede esquematizar a través de una praxeología no-canónica de la siguiente manera:

T: Determinar la ecuación diferencial

$$k\frac{d^2u}{dx^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \ldots \ (1)$$

"Para deducir la ecuación diferencial parcial que se satisface mediante la temperatura u(x, y), necesitamos dos leyes empíricas de conducción de calor" (p. 533).

Las leyes empíricas se describen enseguida como θ^p, según el modelo de Castela y Romo-Vázquez (2011).

θ_1^P: En un elemento de masa m, la cantidad de calor Q es

$$Q = -\gamma m u \ \ldots (4)$$

donde *u* representa la temperatura del elemento.

θ_2^P: La velocidad del flujo de calor Q_1 a través de la sección transversal (…) es proporcional al área A de la sección transversal y a la derivada parcial de la temperatura respecto a x:

$$Q_1 = -kAu_x \ \ldots(5)$$

En el siguiente planteamiento se esbozan técnicas experimentales τ_e: empiremas, que llevan a establecer una expresión para la cantidad de calor *Q* al involucrar elementos como la masa *m* en función de la densidad ρ, y el área de la sección circular de la varilla.

τ_e: "Como el calor fluye en la dirección que desciende la temperatura, el signo menos se utiliza en (5) para asegurar que Q_1 sea positiva para $u_x<0$ (…) y negativa $u_x>0$ (…).

τ_e: Si la sección circular de la varilla (…) entre *x* y $x+\Delta x$ es muy delgada, entonces $u(x, t)$ puede considerarse como la temperatura aproximada en cada punto del intervalo.

Ahora la masa de la sección circular es $m = \rho(A\Delta x)$, por ello, a partir de (4). Puede deducirse que la cantidad de calor en tal masa es,

$$Q = \gamma\rho A\Delta x u" \ldots (6)$$

A partir de las expresiones (5) y (6) los autores combinan actividades empíricas con técnicas matemáticas para establecer el incremento de calor que se acumula en la sección transversal:

"(…) cuando fluye calor en la dirección positiva de x, a partir de (5) observamos que el calor se incrementa en la sección transversal a una velocidad neta de

$$-KAu_x(x,t) - [-KAu_x(x+\Delta x), t)] = KA[u_x(x+\Delta x, t) - u_x(x,t)] \ldots (7)$$

El resto de las actividades refieren técnicas matemáticas τ para concluir con la determinación de la ecuación diferencial parcial:

τ_1:"Diferenciamos (6) respecto a t y observamos que la velocidad neta está dada también por

$$Q = \gamma \rho A \Delta x u_t \ldots (8)$$

τ_2: Al igualar (7) y (8) obtenemos

$$\frac{K}{\gamma P}\frac{u_x(x+\Delta x,t)-u_x(x,t)}{\Delta x} = u_t \ldots \ (9)$$

τ_3: Calculamos el límite de (9) como $\Delta x \to 0$ para finalmente obtener (1) en la forma

$$\frac{K}{\gamma P}u_{xx} = u_t$$

τ_4: Es muy común establecer $k = \frac{K}{\gamma P}$ y llamar esta constante positiva **difusividad térmica**.

La demostración concluye estableciendo un objeto matemático que se puede distinguir como un elemento tecnológico de $[T, \ \ \tau_e, \theta^p, \ \ \theta^{th}] \longleftarrow I_u$, es decir:

$$\theta^{th}: \ k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t}$$

Conclusiones

La noción de gasto fue en su origen provisto de cualidades teóricas que sirvieron de ensayo para la determinación de objetos matemáticos fundamentales como la ya vista ley de transferencia de calor de Fourier, así como el concepto de divergencia. Sin embargo, y como se ha puesto en evidencia, el gasto vincula dos niveles de racionalismo que permiten dar cuenta de procesos de construcción de saberes que se determinan a partir de conocimiento empírico, toda vez que permite incorporar en las praxeológicas no-canónicas empiremas donde se presentan esos conocimientos. Sin ser un saber descontextualizado, el gasto cuenta con amplios atributos operatorios, siendo objeto de intercambio y de manipulaciones transpositivas entre las instituciones involucradas.

En este caso, comunidades de escritores de textos para la enseñanza de las ecuaciones diferenciales parciales transmiten saberes prácticos a un nivel local de investigación matemática, donde la justificación que asumen es al centro de una serie de suposiciones de la fenomenología física.

El modelo extendido de Castela y Romo-Vázquez (2011) fue originalmente diseñado para justificar los conocimientos empíricos que surgen al centro de la práctica matemática —principalmente en las actividades escolares— más no para justificar la utilidad del empirismo en la construcción del conocimiento, como es el caso analizado. Sin embargo, Castela (2008) atribuye a la noción de tecnología seis funciones que permiten tomar en cuenta la utilidad de las matemáticas en las disciplinas intermediarias y principalmente en profesiones como la ingeniería, no obstante, la tecnología práctica se corresponde con una modalidad diferente de validación institucional (Romo-Vázquez, p. 54).

Es por esta razón que se propuso el modelo de empirema que se muestra en el Esquema 2, en el que se incorporan actividades prácticas, no obstante este último se ubica en un nivel de racionalismo muy alejado de las praxeologías matemáticas canónicas.

Referencias y bibliografía

Castela, C. (2008). Travailler avec, travailler sur la notion de praxéologie mathématique pour décrire les besoins d'apprentissage ignorés par les institutions d'enseignement. *Recherches en didactique des mathématiques,* 28(2), 135-179.

Castela C. & Romo Vázquez, A. (2011). Des mathématiques a l´Automatique: Étude des effets de transposition sur la transformée de Laplace dans la formation des ingénieurs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, (31), 1, 79-130.

Dalmedico, A.D. (1992). *Mathématisations, Augustin-Louis Cauchy et l´école française*. France: Édition du Choix, Librairie Scientifique de A. Blanchard.

De Gortari, E. (2000). *Diccionario de la lógica*. México: Plaza y Valdés, S. A de C. V, primera reimpresión.

De la Pascua (1876). *Introducción al estudio de la física*. México: Imprenta de la Viuda é Hijos de Murguía.

Chevallard, Y. (1999). *L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique*. Consultado el 20 de abril de 2013, en: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/IMG/pdf/Analyse_des_pratiques_enseignantes.pdf

Godunov, S. K. (1978). Ecuaciones de la física matemática. Moscú: Editorial MIR.

Koepfler, G. (2001). Équations aux dérivés partielles. UFR de Mathématiques et Informatique, Paris 5, Université René Descartes.

Levy, E. (1989). *El agua según la ciencia*. México: Ediciones Castell Mexicana S.A, Conacyt.

Priest, F. (2007). The British empiricists. New York: Taylor & Francis e-Library.

Romo-Vázquez, A (2009). La formation mathématique des futurs ingénieurs. Université de Paris Diderot (Paris VII). Thèse doctorale inédite.

Schneider, M. (2007). Entre recherche et développement: quel choix de valeurs pour l'ingénierie curriculaire? Intervention aux journées mathématiques organisées par l'INRP, 12 juin 2007, http://www.inrp.fr/.

Tijonov, A. & Samarsky, A. (1972). Ecuaciones de la física matemática. Moscú: Editorial MIR.

Vidal-Gomel C., & Rogalsky J. (2007). La conceptualisation et la place des concepts pragmatiques dans l'activité professionnelle et le développement des compétences. *@ctivités,* 4(1) 49–84. http://www.activités.org/v4n1

Zill, D. & Cullen M. (2008). Matemáticas avanzadas para ingeniería, Vol. 1. Ecuaciones Diferenciales. México: McGraw-Hill Interamericana, Tercera edición impresa en China.

Un contexto de modelación para la enseñanza de Matemáticas en las ingenierías

Rita **Vázquez** Padilla
Academia de Matemáticas, Universidad Autónoma de la Ciudad de México
México
rita.vazquez@uacm.edu.mx
Avenilde **Romo** Vázquez
Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, Instituto Politécnico Nacional
México
aromov@ipn.mx
María **Trigueros** Gaisman
Instituto Tecnológico Autónomo de México
México
trigue@itam.mx

Resumen

En esta comunicación hacemos un análisis desde la TAD del problema de la Separación Ciega de Fuentes (BSS) como el punto de partida para desarrollar actividades de modelación para la enseñanza de las matemáticas en las escuelas de ingenierías. Lo anterior constituye el resultado de la primera etapa de una propuesta metodológica basada en el análisis de uso de modelos matemáticos en contextos de ingeniería para el diseño de actividades didácticas. La propuesta responde a una problemática en la que se percibe un desfase entre las matemáticas que se enseñan en la formación del ingeniero y el uso de éstas en la práctica profesional, basándose en el análisis praxeológico del uso de modelos desde una perspectiva institucional. Como resultado del análisis del contexto BSS se reconoce un modelo matricial Ax=b, hipótesis y formas que permiten utilizarlo en diferentes contextos de ingeniería. La naturaleza del modelo matemático identificado y la diversidad de uso nos hace considerar que su análisis praxeológico es una base para el diseño de actividades de modelización para formaciones de ingenieros.

Palabras clave: modelación, matemática, educación, ingeniería, modelos.

La Modelación en la formación matemática de ingenieros

La pregunta ¿qué papel tienen las matemáticas en las formaciones profesionales actuales? es una cuestión abierta. La especialización y diversificación del conocimiento así como el uso masivo de la tecnología imprimen características particulares a las necesidades matemáticas de cada formación, mismas que deberían tomarse en cuenta en las decisiones sobre currículos y orientaciones de los cursos. En particular nos interesan las formaciones de ingenieros y la forma de adaptar los cursos de matemáticas a las necesidades del futuro ingeniero en la Universidad Autónoma de la Ciudad de México, una institución pública de educación superior. En esta sección revisaremos la importancia de las matemáticas en las formaciones no matemáticas en general y en las ingenierías en particular, y el uso de la Modelación como herramienta de enseñanza de matemáticas que se ha ido constituyendo como alternativa para afrontar las necesidades ya mencionadas.

Antecedentes

Matemáticas como disciplina de servicio

En el tercer estudio ICMI publicado en 1988 con el título *Mathematics as a service subject* los editores argumentan de manera profusa que la enseñanza de las matemáticas en formaciones no matemáticas es una necesidad social innegable, y ponen en evidencia los retos que plantea esta necesidad al incluirse dentro de las formaciones universitarias y la urgencia de que la educación matemática se adapte a tales necesidades. En relación a este aspecto, Howson, Kahane, Laugine y Turkheim (1988) señalan que: "las formas de enseñanza deben adaptarse para corresponder a estos tipos distintos de demandas" (p.5)

Así, las formaciones que contemplan cursos de matemáticas en sus currículos se enfrentan a la necesidad de hacer elecciones respecto a los métodos de enseñanza de esta disciplina. En este sentido, Howson. Kahane, Laugine y Turkheim (1988) identifican dos posibles criterios para hacer tales elecciones: el primero, elegir los tópicos que uno imagina como los más útiles para el trascurso de la vida profesional del estudiante, y el segundo, enseñar lo que necesitan inmediatamente para el aprendizaje de la disciplina principal. Contrario a lo que sucede en general, los autores afirman que "el primer criterio debería ser el más importante" (Howson, Kahane, Laugine y Turkheim, 1988, p.7). Por tanto, es necesario que al elegir formas de enseñar las matemáticas se piense no sólo en el conocimiento que se pretende adquieran los estudiantes, sino también, en las formas de pensamiento asociadas a estos conocimientos. Lo expuesto anteriormente pone en evidencia la importancia social e histórica que han tenido y tienen actualmente las matemáticas dentro de las formaciones no-matemáticas, y la necesidad de adaptar su enseñanza a las exigencias de cada formación particular. Veremos a continuación el lugar que tiene la matemática dentro de las carreras de ingeniería.

Matemáticas en la formación de ingenieros

La importancia de incluir matemáticas en los currículos de ingeniería ha sido una constante histórica. En el siglo XVIII Pierre Simon de Laplace creo un modelo de formación matemática para los ingenieros de la École Polytechnique en Francia, respecto del cual se argumentaba que "un conocimiento profundo del análisis matemático dotaba a los estudiantes de una base sólida que les permitiría dominar posteriormente, la geometría, la mecánica y los cursos de aplicación" (Romo-Vázquez, 2009, p.11).

Sin duda los argumentos anteriores siguen siendo válidos, como se puede deducir a partir de la fuerte presencia de cursos de matemáticas que prevalece en la mayoría de los programas curriculares de las distintas ingenierías. En la actualidad, existen además nuevos retos que plantear a partir del uso de la tecnología. La utilidad de las matemáticas como herramienta para acceder a otros saberes se ve ahora apuntalada además, con una serie de habilidades que el ingeniero requiere para responder a las exigencias profesionales actuales. Según Dujet (2006):

> Para hacer frente a estos nuevos desafíos, el ingeniero, no solo tiene que demostrar que es capaz de adaptarse a la sociedad en la cual va a trabajar, sino que también debe poder usar con gran maestría las nuevas herramientas tecnológicas puestas a su disposición. Dichas

> herramientas se basan generalmente en nuevas y emergentes teorías matemáticas que hubieran podido considerarse todavía, hace apenas una o dos décadas, como inmaduras, pero que ahora han demostrado cumplidamente en el mundo de la producción que son capaces de producir herramientas (programas de simulación…) o métodos (de apoyo en la decisión…) apropiados y fructíferos para proporcionar respuestas, ya sean parciales o imperfectas en este nivel de complejidad e incertidumbre en el cual nos hallamos inmersos" (Introducción, párrafo 6).

Esta visión se reafirma con las políticas educativas actuales que señalan la importancia de promover métodos de enseñanza y aprendizaje basados en la solución de problemas reales, particularmente en las ingenierías (Swain, 2011; Kent y Noss, 2002; Kent, Noss, Guile, Hoyles y Bakker, 2007). Los modelos matemáticos, vistos como una conexión entre la teoría matemática y el mundo real, se convierten así en una posibilidad didáctica: la enseñanza de matemáticas a través del uso de modelos matemáticos, resulta ser un posible puente para conectar la teoría con la práctica profesional y un medio adecuado para desarrollar las habilidades matemáticas que los ingenieros o profesionistas (no matemáticos) requieren en su actividad laboral.

Pollak (1987) había ya establecido la importancia de los modelos matemáticos en la formación de ingenieros. Más recientemente, Kent y Noss (2000) mencionan la importancia de la modelación como una "actividad central" (p. 2) y consideran que esta debe incluirse en el currículo de las ingenierías. En (Hamilton, 2008) se mencionan las habilidades relacionadas con la modelación como elementos de desarrollo del pensamiento crítico y sistémico, esencial en las formaciones de ingenieros. Las consideraciones anteriores sustentan la importancia de la modelación en las formaciones no matemáticas.

Modelación en la Matemática Educativa

La modelación como herramienta de enseñanza tiene ya varias décadas en el panorama educativo mundial. En 1993, Werner Blum expuso el estado del arte en relación a la modelación matemática en la enseñanza (Blum, 1993) haciendo énfasis en la diferencia entre modelación y la resolución de problemas aplicados, su antecedente más cercano. En los problemas aplicados (w*ord problems*), la teoría se complementa con la presentación de modelos que ilustran un uso de la matemática. En esta aproximación, el estudiante resuelve un problema similar al presentado como ilustración del modelo con la técnica aprendida de manera teórica, lo que reduce la posibilidad de que el estudiante tome decisiones sobre el modelo a elegir, las variables relevantes, o bien que ponga a prueba distintas formas de representar la situación-problema. Tales habilidades, consideradas importantes en la formación matemática, son potenciadas si se expone al estudiante a la creación de un modelo matemático, en vez de uno que ya se presenta hecho y adecuado para resolver el problema. En (Niss, Blum, Galbraith y Henn, 2007) se discuten más ampliamente estas diferencias.

A continuación revisaremos algunos elementos de dos documentos de gran relevancia en el panorama de la Modelación que sientan las bases sobre esta perspectiva educativa: el primero es el estudio ICMI 14 titulado *Modelling and Applications in Mathematics education* (Niss, Blum, Galbraith, Henn, 2007). En éste los autores definen la modelación como un proceso cíclico que se lleva a cabo entre el mundo extra-matemático y las matemáticas (un modelo es en ese sentido, una triada formada por estos dos ámbitos y una correspondencia entre ellos). Si bien existen distintas formulaciones del ciclo de modelación, una descripción general del proceso puede ser la siguiente: se inicia con una situación del mundo real (o extra-matemático). La situación tiene que ser simplificada, estructurada y precisada por quien resuelve el problema, lo que lleva a la creación de un *modelo* de la situación. Luego el modelo es traducido al lenguaje matemático produciendo un *modelo matemático* de la situación. El proceso continúa a través de elegir métodos matemáticos adecuados al modelo, a partir de lo cual se obtienen resultados que deben ser interpretados en relación a la situación original. Si existen discrepancias entre la situación real y los resultados obtenidos, se regresa a revisar la situación y reconsiderar el modelo, con lo que se inicia un nuevo ciclo.

El ciclo de modelación ha sido estudiado desde diversos enfoques teóricos (Borromeo-Ferri, 2006). Blum y Borromeo-Ferri (2009) proponen por ejemplo un modelo que contempla siete etapas (construcción, simplificación/estructuración, matematización, trabajo matemático, interpretación, validación, exposición) y que permite ilustrar las rutas que sigue un estudiante para resolver una tarea de modelación, o bien para distinguir puntos conflictivos para la implementación de actividades de modelación en el aula. En relación al último, se identifican tres principales obstáculos, cada uno proveniente de un actor del proceso de enseñanza-aprendizaje: con respecto a la instrucción y la evaluación, la modelación es una actividad que toma mucho tiempo y tiene poca cabida en los programas de cursos, que generalmente están saturados de contenidos; en relación al estudiante, hay una resistencia de parte de éste debido a que los resultados del proceso no son predecibles, y en cuanto al profesor, las tareas de modelación son demandantes, requieren investigar y comprender contextos no matemáticos y un cambio en el paradigma de enseñanza que centra el trabajo en los estudiantes y no en la exposición por parte del profesor (Borromeo-Ferri, 2011).

El segundo documento es producto del grupo de trabajo 21 en el ICME 11. El grupo reconoce a la modelación como una teoría coherente dentro de la Matemática Educativa, que sin embargo no está sustentada en un único paradigma de investigación. Se busca por tanto, categorizar los artículos presentados en esta conferencia a partir de una clasificación propuesta ya antes por Kaiser y Sriraman (2006) en siete perspectivas, de acuerdo a sus intereses y fundamentos teóricos (Blomhøj y Carreira, 2009, p.15). Una de ellas es la perspectiva contextual, en la que se enmarcan investigaciones que hacen uso de enfoques de tipo cognitivo para el análisis de la construcción de conocimiento matemático relacionado con el Álgebra Lineal (Possani, Trigueros, Preciado y Lozano, 2010). En esta clasificación subyace un elemento común a seis de las categorías, que es el ciclo de modelación. En ellas, el ciclo juega un rol distinto de acuerdo a distintos intereses de investigación (por ejemplo, en la perspectiva *cognitiva* el ciclo se usa para estructurar el proceso de modelación y para identificar habilidades cognitivas necesarias para modelar, mientras que en la perspectiva *realista* el ciclo se usa para analizar la situación real, extra-matemática). El proceso cíclico descrito anteriormente ha sido cuestionado en otras investigaciones que se enfocan más en el uso que se da a los modelos en la práctica profesional.

El modelo de formación en la UACM

La UACM es una institución de educación superior de financiamiento público creada en 2002 para los habitantes de la ciudad de México. El modelo tiene entre sus preceptos formar estudiantes con una sólida formación crítica, científica y humanista, independientemente de la carrera profesional. El ingreso es irrestricto, sin examen de admisión ni requisitos particulares por carrera. Así, la población que ingresa a las ingenierías es heterogénea en relación particularmente a sus conocimientos matemáticos. Uno de los ejes principales del modelo educativo es la no especialización temprana. (UACM, 2007). Este eje se cristaliza en la división de la carrera en un ciclo básico, donde se pretende que el estudiante integre conocimientos científicos y culturales amplios, trascendiendo lo disciplinario, y en un ciclo superior, donde se abordan los conocimientos especializados. En la práctica, la división anterior ha conducido a una desvinculación en lo que al uso de matemáticas se refiere, si bien resulta una ventaja en relación a la formación científica integral de los estudiantes. Los cursos de matemáticas son impartidos por matemáticos únicamente en los primeros dos años de la carrera y están ausentes en el ciclo superior. Los estudiantes tienen dificultades para conectar las matemáticas que aprenden en el ciclo básico y las que requieren usar en los cursos de ingeniería en el superior. Consideramos que el uso de actividades de modelación matemática en los primeros años de carrera puede resultar un puente para conectar mejor los dos ámbitos. En particular, es posible considerar actividades basadas en contextos de uso real dentro de la ingeniería que permitan al estudiante poner en práctica algunas de las habilidades reportadas en la literatura sobre el uso de modelos, al mismo tiempo que profundicen en los conceptos matemáticos involucrados.

Diseño actividades de modelación basadas en contextos de uso real

En un intento por tomar en cuenta las ventajas didácticas de la modelación en el aula y las características del uso de modelos por profesionales de otras disciplinas, estamos desarrollando una investigación que propone analizar contextos de uso real para determinar de qué forma está presente en ellos la matemática. El objetivo es usar los resultados del análisis para diseñar actividades didácticas que conecten el uso con el aprendizaje de conceptos matemáticos en los primeros años de formación de ingenieros, particularmente en la UACM, pero que puede ampliarse a otros modelos educativos.

Para ello es necesario considerar en una primera instancia, cómo está presente el conocimiento matemático en el uso profesional y cómo este se traspone para poder ser llevado al aula. Entonces, abordamos la primera parte del problema del diseño de actividades de modelación desde una perspectiva institucional, en la que interesa tomar en cuenta tanto elementos de la enseñanza de matemáticas como de la práctica profesional del ingeniero, por lo que la Teoría Antropológica de lo Didáctico resulta un marco teórico adecuado.

Dado que el objetivo es estudiar la circulación de dichos saberes entre las instituciones usuarias y las de enseñanza las preguntas de investigación que surgen de lo anterior para esta primera etapa y que estudiaremos con base en la TAD son: (1) ¿Qué saberes matemáticos están presentes en el contexto elegido? (2) ¿Qué transposiciones pueden evidenciarse de estos saberes cuando se considera el uso profesional, las disciplinas de ingeniería y la enseñanza de las matemáticas?

Tomar en cuenta el uso: la Teoría Antropológica de lo Didáctico

La circulación de saberes entre instituciones es susceptible de ser analizada mediante la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1999). La TAD parte del supuesto de que el conocimiento es el resultado de enfrentar cuestiones o tareas problemáticas, que al abordarse, producen formas de resolverse (técnicas) y discursos (tecnologías) que las justifican. En buena medida, la TAD ha sido una herramienta esencial para estudiar el problema de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas concibiendo éstos como todo aquello que se hace para enfrentar las tareas problemáticas que se plantean en el seno de una cierta institución – entendida como una organización estable, interesada en la producción o en la transmisión del conocimiento-.. En ese sentido, el interés está en la dimensión institucional del saber y la teoría provee de herramientas que permiten analizar en particular el cambio que el conocimiento y la práctica sufren cuando se adaptan de una institución a otra. La TAD propone la noción de *praxeología* como la unidad mínima para analizar el conocimiento. Este término suele traducirse como el "estudio sobre la práctica" (Bosch, 2011). Las praxeologías están formadas de cuatro elementos que pueden representarse con la cuaterna (T, τ, θ, Θ) donde T representa el tipo de tarea, ó lo que se hace; τ la técnica, es decir la manera en que se hace, θ la tecnología, que es un discurso que produce, justifica y explica la técnica y finalmente, Θ es la teoría que produce, explica y justifica la tecnología. Estos elementos surgen, son regulados y condicionados por una institución, en el sentido de organización estable mencionado anteriormente. Así, el conocimiento puede estudiarse a través de describir las praxeologías presentes en él.

En esta propuesta usamos las herramientas de la TAD para analizar cómo el conocimiento matemático inmerso en un modelo matemático de uso real en la ingeniería se traspone al aula de matemáticas, lo que constituye la primera etapa de una metodología cuyo objetivo es acercar la enseñanza con la práctica profesional. Esto se logra a través analizar las praxeologías de modelación a través de dos ejes principales: el primero, localizar tareas y técnicas matemáticas que aparecen en el uso y tienen lugar en los cursos de matemáticas del primer año de las ingenierías, y el segundo, evidenciar otros elementos tecnológicos propios del uso ingenieril. Lo anterior, resulta en una base para diseñar actividades de modelación cuyo objetivo es abordar las tareas matemáticas desde una perspectiva más cercana a la formación, poniendo en práctica elementos tecnológicos propios del uso.

Metodología

Situamos el punto de inicio en la ingeniería, partiendo de una situación problemática proveniente del uso (práctica profesional) y analizando las praxeologías de Modelación Matemática presentes en él a través de la TAD. Se identifican así elementos y nociones emergidos de dicho análisis que pueden tomarse en cuenta en el diseño de la actividad de modelación. Lo anterior corresponde a las fases I y II de un plan metodológico más general, que se presenta en el siguiente cuadro.

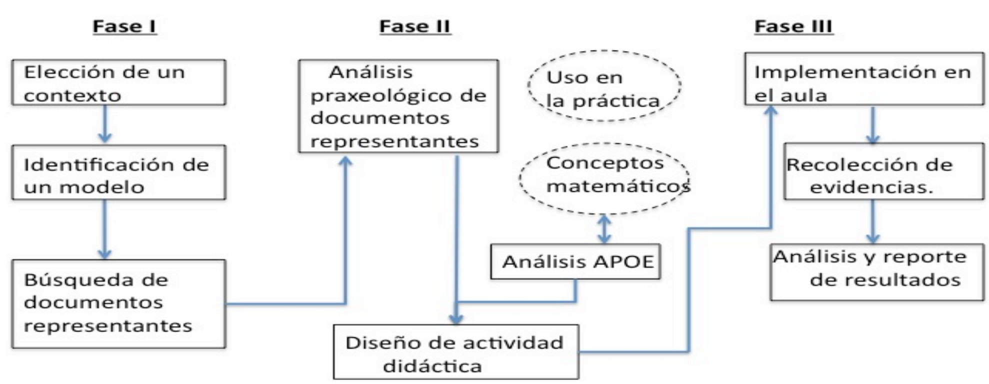


Figura 1. Plan metodológico en tres fases.

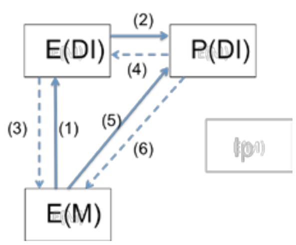
Fase 1: BSS como situación problemática generatriz.

La figura 1 muestra las Fases I y II de la metodología consistentes en la elección y el análisis praxeológico de un contexto de uso real. Una premisa para la elección es la existencia de un modelo matemático en el cual estén presentes saberes o praxeologías de modelación matemática que tengan lugar en la enseñanza de las matemáticas en una formación de ingenieros durante el primer año universitario. En este reporte el contexto que se analiza es el conocido como Separación Ciega de Fuentes (BSS por *Blind Source Separation*) proveniente del Análisis de Señales.

La elección del contexto se hizo a partir del trabajo (Romo, Romo y Vélez, 2012) en correspondencia con la hipótesis metodológica (el modelo presente tiene cabida en los cursos de ciclo básico, concretamente en el curso de Álgebra Lineal). La separación de señales se plantea como un problema (situación generatriz) que surge de una necesidad de la práctica y se modela matemáticamente.

Fase II: Análisis praxeológico de la BSS

Para identificar y analizar las praxeologías de modelación en este contexto de uso se consideró la nomenclatura propuesta en (Romo, 2009) que identifica a las siguientes instituciones relacionadas con la enseñanza y el uso de las matemáticas en las formaciones de ingenieros: E(M) o Enseñanza de las matemáticas, que corresponde a los cursos de matemáticas del primer año en el tronco común de las ingenierías; E(DI) o Enseñanza de Disciplinas intermediarias, o Ciencias del ingeniero, que corresponde a los cursos de ingeniería y P(DI) la práctica profesional, en este caso, representada por los productos de investigación en el tema de BSS. El interés de analizar cómo está presente el conocimiento matemático en el modelo de uso y cómo se traspone este al aula puede abordarse mediante el análisis de los posibles recorridos que las praxeologías de modelación hacen entre estas instituciones: (ver figura 2).



Se analizó la relación 6 centrada en la praxeología de separación de fuentes a través de una revisión biliográfica, para ello, se buscaron documentos en internet que incluyeran principalmente los términos *Separación ciega de fuentes, modelo matemático* -en inglés y español- y se seleccionaron documentos que representaran a P(DI) mostrando alguna componente matemática. Estos son: tres artículos de investigación sobre métodos BSS (Puntonet, 2003), (Georgiev y Theis, 2004), (Oursland, de Paula y Mahmood, s.f.) y un Handbook sobre los métodos ICA (Common y Jutten, 2010). El nivel de especialización de los documentos anteriores hizo necesario recurrir a fuentes inscritas en E(DI) a un nivel avanzado: una tesis doctoral sobre BSS (Clemente, 2000) y dos más sobre uso de BSS en electroencefalografía (Sánchez-Morillo, 2008). Se consideraron también dos artículos de divulgación sobre BSS (Carrión, Ródenas y Sánchez, 2007), (Caiafa, s.f.), un tutorial en línea de los métodos ICA (Delorme, s.f.). Dos textos dentro de E(DI) más cercanos a P(M) y E(M) también considerados fueron un texto sobre métodos matemáticos en análisis de señales (Moon, 2000) y el libro de texto oficial en el curso de Análisis de señales en la UACM (Oppenheim, 1997). La revisión bibliográfica se complementó con entrevistas a dos ingenieros docentes de la UACM.

Como producto de la revisión se identificaron tres documentos representativos a partir de los cuales se establecieron las praxeologías a analizar, estos son:

- El texto *Handbook of Blind Source Separation: Independent component analysis and applications*, de Common y Jutten, un compendio de los métodos ICA para la BSS. En capítulo 1 se establece el origen del problema de separación de fuentes. El texto da además un panorama amplio sobre los métodos BSS y sus aplicaciones.

- El artículo de investigación de Georgiev y Theis, sobre un enfoque matricial de separación de mezclas lineales, que aborda aspectos matemáticos formales del problema de la BSS.
- La comunicación de Oursland, De Paula, y Mahmood, que explicita un algoritmo de separación y lo ejemplifica en casos concretos de audio, aportando elementos tecnológicos desde el uso.

Las praxeologías de modelación encontradas se analizaron describiendo el tipo de tareas a resolver, con énfasis en la formulación matemática de las mismas, e identificando elementos técnicos y tecnológicos que pueden tener presencia en los cursos de matemáticas. Algunos de estos elementos fueron discutidos con ingenieros docentes del área de Procesamiento de Señales, desde una perspectiva educativa. Se ubicó el problema de la BSS en distintos contextos de uso dentro de la ingeniería. Como consecuencia de lo anterior, se identificaron nociones matemáticas centrales para el modelo BSS susceptibles de considerar en un diseño didáctico para el curso de Álgebra Lineal.

Resultados y discusión

La revisión da cuenta de que la BSS es un contexto con amplitud de aplicaciones en distintas áreas, entre ellas: biomedicina, audio, procesamiento de imágenes y radiostronomía. Por ejemplo, la BSS se utiliza para el análisis de electrocardiogramas (ECG) en los que se busca extraer la información de los latidos del corazón de un feto (fuentes) a partir de señales obtenidas por sensores colocados sobre la piel de la madre (observaciones). Las observaciones contienen los latidos de la madre, del feto y componentes de ruido en forma de combinaciones lineales (Common y Jutten, 2010, p. 685).

En el caso del electroencefalograma (EEG) los sensores (o electrodos) se colocan sobre el cuero cabelludo del paciente y registran la actividad cerebral. Las observaciones en un EEG miden las fluctuaciones de voltaje que resultan de flujos de corriente iónicos dentro de las neuronas del cerebro. Las observaciones combinan linealmente señales que provienen de distintos órganos (por ejemplo, ojo, corazón). En el caso imágenes, los satélites utilizan sensores ópticos para obtener imágenes del planeta formadas por píxeles. Cada tipo de material presente en la Tierra, como la vegetación o el agua está asociado a una cantidad física o espectro que lo identifica. Lo que el sensor mide es una combinación lineal de los espectros de los materiales presentes en cada píxel, éstas serían las observaciones. En este caso, los coeficientes de la combinación lineal son los porcentajes de materia presente en un píxel. Se utilizan algoritmos BSS para determinar estos porcentajes. Se considera que las fuentes, al tratarse de porcentajes, suman 1 y esto ocasiona una dependencia estadística que hace que los algoritmos ICA no funcionen del todo bien. (Caiafa, s.f). Como se ve, el tipo de restricciones produce hipótesis en el modelo que genera otras formas de abordar el problema. El procesamiento de audio es uno de los contextos clásicos para BSS, abordado con amplitud mediante la aproximación ICA. Se busca identificar las fuentes de sonido a partir de los registros obtenidos, como podría ocurrir cuando se analizan grabaciones obtenidas en p micrófonos colocados en una sala en donde hay N personas hablando al mismo tiempo (Carrión, 2007). Lo anterior da cuenta de la amplitud de contextos que pueden derivarse de la BSS, lo que convierte a este problema en una cuestión generatriz rica y con gran potencial para el desarrollo de actividades e modelación den la formación matemática de ingenieros.

Conclusiones

En esta comunicación hemos analizado un contexto proveniente del Análisis de Señales, en concordancia con la metodología propuesta en la figura 1 para adaptar contextos de uso real al diseño de actividades de modelación, permitiendo así acercar la formación teórica matemática a la práctica profesional del ingeniero. El contexto resultó ser amplio en sus aplicaciones y complejo en su formulación matemática. El análisis praxeológico, aún en una fase preliminar, ha permitido dar cuenta de elementos matemáticos cuyas transposiciones tienen cabida en los cursos del primer año universitario, concretamente en Álgebra Lineal y Cálculo Diferencial y cuyo aprendizaje por parte de los estudiantes puede verse beneficiado al relacionar dichos conceptos matemáticos con el uso. Los elementos identificados son: el concepto de vector, la relación entre transformación lineal y matriz, y la forma matricial de un sistema de ecuaciones lineales. Se considera que en la siguiente fase del análisis podrán identificarse praxeologías puntuales que faciliten el diseño didáctico. Desde E(DI) surge la noción de señal y su transposición al concepto de función, donde se observan diferencias desde la enseñanza. Asimismo, resalta el significado de linealidad a través del término "mezcla lineal". Otros elementos que surgen del análisis y que pueden tener lugar en momentos posteriores de la formación son la noción de variable aleatoria e independencia estadística. La praxeología de BSS se reconoce con un nivel de organización local, con tareas determinadas por las hipótesis sobre las fuentes, mismas que generan distintas técnicas (algoritmos de separación). La amplitud de contextos de uso convierte a la BSS en un elemento potencial para el desarrollo de actividades de modelación en distintas áreas de la ingeniería.

Cabe mencionar que al abordar documentos de este tipo, desde la posición del profesor de matemáticas, es necesario adentrarse en una terminología particular y conceptos propios de la disciplina para identificar praxeologías de uso, una complejidad que está en concordancia con el segundo obstáculo identificado en (Borromeo-Ferri, 2011) pero que resulta indispensable afrontar si se busca trabajar con contextos reales que reflejen la práctica profesional.

Referencias y bibliografía

Blomhøj, M., & Carreira, S. (2009). *Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics* (461). Dinamarca: IMFUFA.

Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be thaught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Applications*, *1*(1), 45-48.

Blum, W. (1993). *Mathematical modelling in mathematics education and instruction*. En Breiteig (Ed.), *Teaching and learning mathematics in context* (3). Chichester: Ellis Horwood Limited.

Borromeo Ferri, R. (2011). *Effective mathematical modelling without blockages.* En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo Ferri, & G. Stillman (Eds.), *Trends in teaching and learning of mathematical modelling* (Vol. 1, pp. 181-186). ICTMA.

Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *Zentralblarr für Didaktik der Mathematik*, *38*(2), 86-95

Bosch, M., et al. (2011) En Bosch, et.al. (Eds.) *Presentación. Un panorama de la TAD* (p.9) Barcelona: Centre de Recerca Matemática.

Carrión, P., Ródenas, J., & Sánchez, C. (2007). *Aplicaciones de la ingeniería electrónica e informática en medicina.* Universidad de Castilla-La Mancha: España.

Caiafa, C. (s.f) *Tópico en Procesamiento de señales: separación ciega de fuentes y aplicaciones.* Recuperado el 1 de agosto de 2014 de http://sccn.ucsd.edu/~arno /indexica.html

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en didactique des mathématiques, 19*(2), 221-266.

Comon, P., & Jutten, C. (2010). *Handbook of blind source separation: Independent component analysis and applications.* Oxford: Academic Press

Delorme, A. Arnaud Delorme home page. http://sccn.ucsd.edu/~arno/indexica.html.

Congedo, M. (2013). *EEG Source Analysis* (Habilitación para dirigir investigaciones presentada en la Escuela Doctoral). Universidad de Grenoble, Francia.

Clemente, R. (2000). *Ecuaciones lineales para el problema de la separación ciega de fuentes* (Tesis doctoral). Universidad de Sevilla, España.

Dujet, C. (2006). *Mathématiques pour l'ingénieur*. Obtenido de http://amerinsa.insa-lyon.fr/

Georgiev, P., & Theis, F. (s.f.). *Blind Source separation of linear mixtures with singular matrices.* Recuperado el 01/08/2014 de http://www.helmholtz-uenchen.de/fileadmin/ CMB/PDF/Georgiev/Blind%20source%20separation%20of%20linear%20mixtures.pdf

Hamilton, R., Lesh, R., & Lester, M. (2008). Model eliciting activities as a bridge between engineering education research and mathematics education research. *Advances in Engineering Education*, *1*(2), 1-25.

Howson, A., Kahane, J., Lauginie, P., & Turckheim, E. (Eds.). (1988). *Mathematics as a service subject.* Cambridge: Cambridge University Press.

Kaiser, G., Blomhoj, M., & Sriraman, B. (2006). Towards a didactical theory for Mathematical modelling. *ZDM*, *38*(2), 82-85.

Kent, P., y Noss,R. (2000). The visibility of models: using Technologies as a bridge between Mathematics and engineering. *International Journal of Mathematics Education, Science and Technology, 31*(1), 61-69

Kent, P., & Noss, R. (2002). *The mathematical components of engineering expertise: the relationship between doing and understanding mathematics*. I.E.E.E. Second annual symposium on engineering education.

Kent, P., Noss, R., Guile, D., Hoyles, C., & Bakker, A. (2007). Characterizing the use of mathematical knowledge in boundary-crossing situations at work. *Mind, Culture, and Activity, 14*(1-2), 64-82.

Moon, T., & Stirling, W. (2000). *Methods and algorithms for signal processing.* New Jersey, Estados Unidos: Prentice Hall.

Niss, M., Blum, W., Galbraith, P., & Henn, H. W. (2007). *Modelling and applications in mathematics education- the 14th ICMI study* (pp. 3-32). Springer.

Oppenheim, A., & Willsky, A. (1998). *Señales y sistemas.* México: Pearson.

Oursland, A., De Paula, J., & Mahmood, N. (s.f.). *Case Studies of Independent Component Analysis.* Disponible en: http://www.oursland.net/tutorials/ica/ica-report.pdf

Pollak, H. (1987). Mathematics as a service subject: why? En A. Howson, J. Kahane, P. Lauginie, & E. Turckeim (Eds.), *Mathematics as a service subject* (pp. 28-34). Gran Bretaña: Cambridge University Press.

Possani, E., Trigueros, M., Preciado, J. G., & Lozano, M. D. (2010). Use of models in the teaching of linear algebra. *Linear Algebra and its Applications*, *432*(8), 21-25

Puntonet, C. (2003). *Procedimientos y aplicaciones en separación de señales: BSS-ICA*. Recuperado de: http://www.researchgate.net/publication/228456658_

Romo-Vázquez, A. (2009). *La formation mathématique des futurs ingénieurs* (Tesis de doctorado). Université Paris 6.

Romo, A., Romo, R., & Vélez, H. (2012). *De la ingeniería biomédica al aula de matemáticas.* ReCIBE, 1 (1). Recuperado de http://recibe.cucei.udg.mx/revista/es/vol1-no1/biomedica.html

Sánchez-Morillo, D. (2008). *Procesado y transmisión de señales biomédicas para el diagnóstico de trastornos y enfermedades del sueño* (Tesis doctoral). Universidad de Cádiz, España.

Swain, R. (2011). Órgano informativo oficial de la asociación nacional de facultades y escuelas de ingeniería. En C. Arcudia, F. Delgado, R. Garza, & O. Gonzáles (Eds.), (Vol. 8, pp. 2-5). ANFEI.

UACM (2007). Ley de Autonomía. Recuperado de http://transparencia.uacm.edu.mx oip/Portals/0/articulos/14/Frac/NormatividadActualizada/