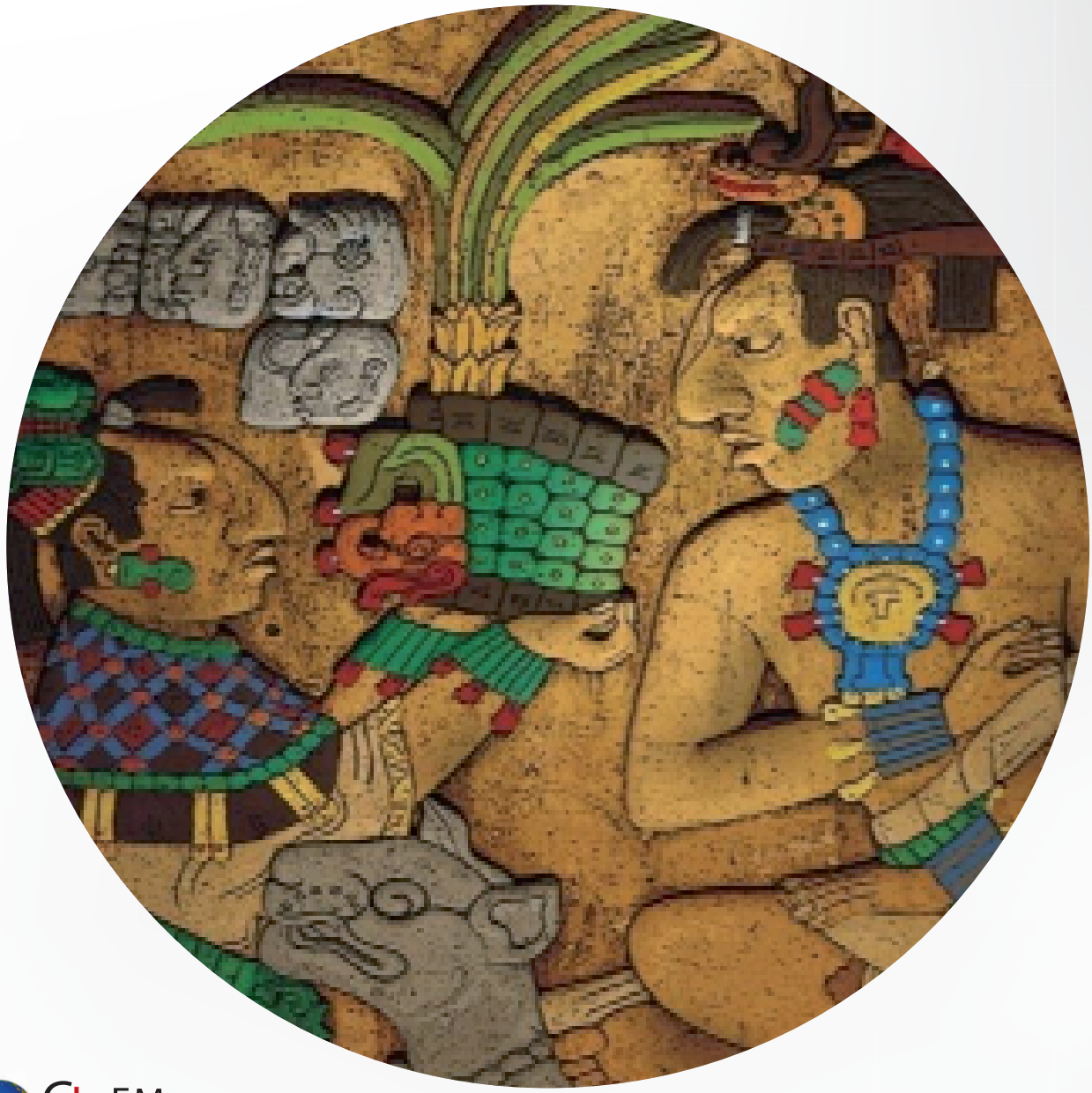
Educación Matemática en las Américas 2015

Volumen 15: Resolución de Problemas



CIAEM CME
Fundado Founded: 1961

© 2015
Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM)
Paseo de la Reforma 383., 7° Piso,
Colonia Cuauhtémoc, Delegación Cuauhtémoc,
México D.F. CP 06500, MÉXICO

www.ciaem-iacme.org
ciaem.iacme@gmail.com

Educación Matemática en las Américas 2015
Volumen 15: Resolución de Problemas
Editado por Patrick (Rick) Scott y Ángel Ruiz
Colaboradora: Sarah González.

ISBN Volumen: 978-9945-603-12-5
ISBN Obra Completa: 978-9945-415-97-1

El Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM) es una organización fundada en 1961 asociada a la International Commission on Mathematical Instruction. Busca potenciar la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en las Américas.

Se permite la reproducción de cualquier parte de este libro para fines no lucrativos siempre que se consignen los créditos a los autores y al Comité Interamericano de Educación Matemática.

Para citar este libro y este volumen:

Comité Interamericano de Educación Matemática (2015). *Educación Matemática en las Américas: 2015. Volumen 15: Resolución de Problemas*. Editores: Patrick (Rick) Scott y Ángel Ruíz. República Dominicana.

Tabla de Contenidos

Presentación i-iii

A (des)contextualização de problemas matemáticos como obstáculo na aprendizagem de estudantes da educação de jovens e adultos 1-11
Edilene Rozal-BR, Maria Lídia Ledoux-BR, Roberta Braga-BR

A criatividade na aula de Matemática: revisitar a resolução de problemas 12-21
Isabel Vale-PT, Ana Barbosa-PT

A Resolução de problemas como metodología integradora da disciplina Matemática aos cursos técnicos em agropecuária 22-30
Adenise Vieira de Souza-BR, Maria Deusa Ferreira da Silva-BR

Alumnos tutores en la Resolución de Problemas 31-38
Guadalupe Leal Zamorano-MX, Guianelli de Jesús Olivas Arias-MX

Análise da avaliação diagnóstica da estratégia de situações problemas em expressões algébricas 39-47
Jeneffer Assunção-BR, Adriana Chirone-BR, Héctor Mendoza-BR, Oscar Tintorer-BR

Análisis lingüístico de errores en la solución de problemas Geometría Euclidiana 48-58
Marisol Radillo Enríquez-MX, Vladimir Efremov-MX

Criatividade em Matemática e resolução de problemas no ensino fundamental 59-68
Mônica Dias-BR, Ninna Jane Alves-BR

Desafíos para llegar a la generalización de un problema 69-75
Candelaria González Polo-MX, Sara Arteaga Rivera-MX

Desarrollo de habilidades metacognitivas a través de la solución de problemas matemáticos 76-84
Grace Vesga -CO, Cielo Roa-CO, Julys Pinilla-CO

Desempenho de alunos dos anos iniciais do ensino fundamental na resolução de problemas aditivos e multiplicativos 85-95
Jutta Justo-BR, Janaína Santos-BR, Margarete Borga-BR, Kelly Rebelo-BR

Determinaciones mutuas entre certeza, duda y comprensión 96-107
Benjamín Martínez Navarro-MX, Mirela Rigo Lemini-MX

Ejercicio y problema dos caras de la misma moneda 108-117
Jorge Hernández Márquez-MX, Octaviano García Robelo-MX

El aprendizaje cooperativo: un estudio sobre las interacciones entre docente y estudiantes en una clase de Matemática 118-128
Zuleyka Suárez Valdés-Ayala-CR

El rol de las situaciones-problema en la enseñanza y la gestión docente 129-140
Analia Bergé-CA, Betina Duarte-AR

Proporcionalidade e função afim: uma possível conexão através da Resolução de Problemas 141-152
Manoel Costa-BR, Norma Allevato-BR

Questões sobre a emergência da heurística nas aulas de Matemática 153-164
Valteni Chaves-BR, Marcos Neves-BR

Resolução de Problemas e atividades lúdicas contextualizados: estratégias de alunos do 2o ano do ensino médio 165-177
Maria Braga-BR, Antônio Villar de Sá-BR

Resolução de Problemas na formação do professor de Matemática: desafios e possibilidades 178-190
Vladimir Raiva-BR, Marcos de Moraes-BR, Renato Guerra-BR

Resolver problemas: uma aprendizagem cultural 191-198
Lucélida de Fátima Costa-BR, José Mafra-BR, Lino Verdial do Rosário-BR

Resolução de Problemas: abordagem ao ensino da Função Quadrática 199-211
Poliana Cordosa Rodrigues-BR, Marcelo da Silva Corrêa-BR, Waidson Bitão Suett-BR, Marta Duarte de Barros-BR

Trabalhando registros de representação semiótica em atividades de Matemática no ensino fundamental 212-219
Raimundo Neres-BR

Trilhos Matemáticos e a criação de problemas 220-228
Ana Barbosa-PT, Isabel Vale-PT

Presentación

La **XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática** realizada en Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México, del 3 al 7 de mayo del 2015, contó con la participación de cerca de 1000 personas de 23 países y la presentación de más de 500 trabajos (conferencias plenarias y paralelas, mesa redonda, minicurso, diálogos, comunicaciones, talleres y posters) Esta fue una reunión regional de la *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI). El CIAEM es la organización afiliada al ICMI con mayor antigüedad. Su creación se remonta al año 1961 cuando se realizó la primera conferencia en Bogotá, Colombia.

Un gran nivel científico dominó los trabajos, en un ambiente cultural muy especial, con una gran hospitalidad por parte de los colegas de Chiapas.

Los conferencistas plenarios fueron Michèle Artigue (Francia), Carlos Vasco (Colombia), Diane Briars (USA), Abraham Arcavi (Israel-Argentina), Celia Hoyles (Reino Unido), María Teresa Tatto (USA) y Alicia Ávila (México). Ellos también desarrollaron *Diálogos* especiales, espacios adicionales de conversación e intercambio.

Una mesa plenaria organizada por la *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe* contó con la participación de Carlos Sánchez (Cuba), Nelly León (Venezuela), Edison de Faría (Costa Rica), Luis Carlos Arboleda y Jhony Villa (Colombia).

El evento tuvo conferencias paralelas y minicursos impartidos por académicos invitados, entre ellos: Gabriele Kaiser (Alemania), Richard Noss (Reino Unido), Manuel Santos (México), Gert Schubring (Alemania), José Chamoso (España), José Luis Lupiáñez (España), Arthur Powell (USA), Alessandro Ribeiro (Brasil), Roberto Araya (Chile), Gilberto Obando (Colombia), Uldarico Malaspina (Perú).

Los dos temas principales fueron la *Preparación de docentes que enseñan matemáticas* y el *Uso de tecnologías en la Educación Matemática*.

El congreso tuvo el valioso patrocinio de varias instituciones internacionales y nacionales: International Commission on Mathematical Instruction; Universidade Luterana do Brasil; Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas, y Centro de Investigación y Formación en Educación Matemática de la Universidad de Costa Rica; Secretaría de Educación del Estado de Chiapas; Universidad del Valle de México; Sindicato de Trabajadores de la Educación de México; Centro Regional de Formación Docente e Investigación Educativa (CRESUR); Oficina de Convenciones y Visitantes de Chiapas; Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas de México; Escuela Normal Superior de Chiapas; Universidad de Costa Rica; HP; CASIO; y EduSystems.

Desde el 2007 el CIAEM ha logrado, entre otras cosas:

- Potenciar la calidad académica en los trabajos, la organización eficiente y la proyección de las conferencias interamericanas
- Consolidar la publicación de trabajos seleccionados de la Conferencias en la revista *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* (editada en Costa Rica)

- Fortalecer la relación del CIAEM con la comunidad internacional de Educación Matemática, especialmente con el ICMI y la *International Mathematical Union*.
- Crear y consolidar la Medalla *Luis Santaló*
- Apoyar el desarrollo del *Capacity and Networking Project* del ICMI en América Latina (Costa Rica 2012, Perú 2016)
- Auspiciar la creación y las actividades de la *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe*
- Apoyar la organización del *I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe*, celebrado en Santo Domingo, República Dominicana, en noviembre del 2013
- Consolidar el uso intenso de tecnologías de la comunicación en todas las actividades del CIAEM
- Crear una comunidad virtual del CIAEM de gran proyección tanto a través de su sitio web principal como de su página en Facebook
- Fundar en México el *Comité Interamericano de Educación Matemática* con personalidad jurídica para atender los múltiples compromisos formales que posee
- Traducir al español y publicar algunos textos del NCTM relacionados con la temática *Principles to actions* y continuar una línea importante de colaboración con el *National Council of Teachers of Mathematics* de los USA

En la XIV CIAEM fue confirmada la decisión de tener la XV CIAEM en Medellín, Colombia, en el 2019. Será desde hará 58 años la segunda ocasión en que se realizará una CIAEM en tierra colombiana.

CIAEM es el evento internacional más importante en Educación Matemática en América Latina. Constituye un punto de referencia para investigadores, docentes y estudiantes en todo el continente.

La mayoría de los textos de base para las presentaciones plenarias o paralelas ha sido incluidas en el número 15 de los *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* que se edita en Costa Rica: http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem.

Las comunicaciones, talleres, minicursos y posters han sido incluidas en esta colección digital de volúmenes que titulamos *La Educación Matemática en las Américas: 2015.* Los trabajos se han organizado de la siguiente manera:

- Volumen 1 *Educación Matemática en las Américas 2015: Formación Inicial para Primaria*
- Volumen 2 *Educación Matemática en las Américas 2015: Formación Inicial para Secundaria*
- Volumen 3 *Educación Matemática en las Américas 2015: Formación Continua*
- Volumen 4 *Educación Matemática en las Américas 2015: Uso de Tecnología*
- Volumen 5 *Educación Matemática en las Américas 2015: Etnomatemática y Sociología*
- Volumen 6 *Educación Matemática en las Américas 2015: Currículum, Evaluación y Competencias*
- Volumen 7 *Educación Matemática en las Américas 2015: Investigación*
- Volumen 8 *Educación Matemática en las Américas 2015: Estadística y Probabilidad*
- Volumen 9 *Educación Matemática en las Américas 2015: Geometría*
- Volumen 10 *Educación Matemática en las Américas 2015: Álgebra y Cálculo*

- Volumen 11 *Educación Matemática en las Américas 2015: Educación Primaria*
- Volumen 12 *Educación Matemática en las Américas 2015: Historia y Epistemología*
- Volumen 13 *Educación Matemática en las Américas 2015: Nuevos Enfoques y Relación con Otras Áreas*
- Volumen 14 *Educación Matemática en las Américas 2015: Necesidades Especiales*
- Volumen 15 *Educación Matemática en las Américas 2015: Resolución de Problemas*
- Volumen 16 *Educación Matemática en las Américas 2015: Modelación*
- Volumen 17 *Educación Matemática en las Américas 2015: Talleres y Minicursos*
- Volumen 18 *Educación Matemática en las Américas 2015: Posters*

El CIAEM desea agradecer a todos los autores que presentaron sus trabajos en la XIV CIAEM y que incluimos en esta colección de volúmenes. Y a todos los revisores, directores de tema, y colaboradores que participaron en la revisión científica de las ponencias de este magno evento.

La organización detallada y la edición en sus diversas dimensiones fue realizada por nuestro segundo vicepresidente Patrick Scott (Estados Unidos) quien dedicó un esfuerzo extraordinario para tener estas *Memorias* disponibles. Quiero expresar en nombre de nuestra organización nuestro agradecimiento a Rick. Nuestra compañera Sarah González (Vocal para El Caribe) se encargó de tramitar su registro en República Dominicana que contó con el apoyo de la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra de ese país, a las que también expresamos nuestra gratitud.

Los enlaces de estos volúmenes se han colocado en las páginas web oficiales del CIAEM.

Esperamos que la publicación de todos estos trabajos contribuya al progreso de la investigación y la acción de aula en la Educación Matemática de las Américas.

Angel Ruiz
Presidente
Comité Interamericano de Educación Matemática

A (des)contextualização de problemas matemáticos como obstáculo na aprendizagem de estudantes da educação de jovens e adultos

Edilene Farias **Rozal**
Universidade Federal do Pará
Brasil
lenefarias@ufpa.br
Maria Lídia Paula **Ledoux**
Universidade Federal do Pará
Brasil
paulaledoux@ufpa.br
Roberta Modesto **Braga**
Universidade Federal do Pará
Brasil
robertabraga@ufpa.br

Resumo

Este artigo é resultado da pesquisa realizada por meio de uma Intervenção Pedagógica com estudantes de uma turma de Educação de Jovens e Adultos – EJA de uma escola pública do município de Castanhal – Pará, Brasil, que objetivou identificar as dificuldades encontradas pelos estudantes da 4ª Etapa da EJA para compreender os problemas matemáticos quando estes são aplicados de forma descontextualizada. As informações foram constituídas por meio de uma atividade com problemas matemáticos envolvendo o conteúdo de sistemas de equações do primeiro grau. Os resultados sinalizam que a linguagem utilizada pelo professor, a falta de atenção por parte dos estudantes ao resolverem os problemas matemáticos, as dificuldades com o jogo de sinais e com as operações fundamentais, a falta de afinidade com as variáveis utilizadas em cálculos matemáticos e a (des)contextualização dos conteúdos, podem ser vistos como obstáculos para aprendizagem dos estudantes da EJA.

Palavras chave: Ensino, Matemática, Contextualização, Resolução, Problemas.

Introdução

A aprendizagem dos conteúdos matemáticos ainda é vista como uma das maiores dificuldades encontradas por estudantes na Educação Básica. E quando o ensino ocorre, em turmas da Educação de Jovens e Adultos EJA, nos parece que essas dificuldades tornam-se ainda mais evidenciadas pelas próprias características dos estudantes dessa modalidade de ensino, que em geral já vivenciaram uma história de exclusão escolar ou já tiveram que fazer escolhas motivadas por questões de ordem cultural, econômica ou por insucesso escolar. Ao se ensinar os conteúdos matemáticos para esses estudantes, há de se ter o cuidado com a forma de como estes são ensinados e inseridos dentro dos problemas matemáticos, pois em algumas situações, a dificuldade pode ocorrer por falta de entendimento da forma em que estão escritos. Para Curi

(2008), a falta de entendimento pode estar relacionada com aos conteúdos que não se apresentam explícitos em um contexto propriamente dito.

Outro aspecto relevante nesta discussão é o que se refere ao significado dado pelo estudante ao conteúdo que é ensinado na sala de aula, considerando que o ensino desses conteúdos matemáticos ainda é baseado na memorização de regras ou de estratégias para resolver problemas, ou centrado em conteúdos pouco significativos para o estudante e, que certamente, não contribui para sua formação matemática (Brasil, 2002). Essa falta de significado pode ser ocasionada pelo distanciamento entre o conteúdo ensinado e a realidade do estudante, o que compromete a leitura, a interpretação e a resolução de um problema matemático.

Para trabalhar determinado problema, que contenha determinado conteúdo, é importante e necessário que este esteja ancorado em uma base de conhecimento prévio adquirido pelo estudante em estudos e aprendizagens anteriores, fato este que pode determinar a facilidade e/ou a dificuldade de entendimento por parte do estudante do problema matemático proposto. Em outras palavras, o estudante aprende aquilo que tem significado para ele. Para Ausubel, a aprendizagem significativa ocorre quando a nova informação ancora-se em conceitos relevantes (subsunçores) preexistentes na estrutura cognitiva do aprendiz (Moreira, 1999). Portanto, para a aquisição de novos conhecimentos é importante considerar os conhecimentos prévios do estudante. E em se tratando da aprendizagem de jovens e adultos, além de considerar esses conhecimentos prévios, deve-se levar em conta sua vivência, sua interação social e sua experiência (Brasil, 2002).

Nessa proposição, abordamos um termo/palavra que atualmente se ouve com certa frequência em ambientes de aprendizagem – *contextualização*. Muito se ouve falar que para o estudante aprender, necessariamente, o professor deve contextualizar aquilo que ele vai ensinar. No entanto, em se tratando de conteúdos matemáticos, nem todos os conteúdos podem ser contextualizados. Na tentativa de fazer esse contexto, ou seja, ensinar o conteúdo matemático formal a partir de um conhecimento matemático informal que o aluno já traz para ao ambiente de sala de aula, acabamos não conseguindo fazer este processo e os resultados podem não ser tão exitosos. Para melhor explicitar a questão em estudo, consideramos relevante fazer esta abordagem a partir de uma investigação *in loco* para que as informações constituídas possam trazer dados significativos nessa discussão. Para tanto, realizamos a pesquisa com 22 estudantes de uma turma de 4ª Etapa da Educação de Jovens e Adultos de uma escola do município de Castanhal-Pará, Brasil.

Inicialmente fizemos abordagem sobre o Ensino da Matemática em turmas de Educação de Jovens e Adultos, como uma das questões que causa preocupação para pesquisadores da área da educação, por tratar-se uma modalidade de ensino que por natureza apresenta limitações (cansaço pela jornada de trabalho, dificuldades de compreensão e falta de identificação com a disciplina etc.), na aprendizagem dos conteúdos matemáticos.

Ensino da Matemática na Educação de Jovens e Adultos - EJA

A Matemática está presente na vida do homem desde o início da história da civilização humana. Portanto, aprender os conhecimentos matemáticos antes de ser uma necessidade básica de todo indivíduo, é um direito.

Em se tratando do ensino da Matemática na Educação de Jovens e Adultos, é um direito que deve ser garantido, considerando que esse estudante "*vive, em geral, uma história de*

exclusão, que limita seu acesso a bens culturais e materiais produzidos pela sociedade. Com a escolarização, ele busca construir estratégias que lhe permitam reverter esse processo" (Brasil, 2002, p. 11).

Assim, o ensino da Matemática para jovens e adultos é uma necessidade básica para que esse estudante desenvolva sua capacidade intelectual para o enfrentamento das situações da vida prática, se tornando um agente transformador de sua própria realidade. Portanto, o ensino da Matemática na Educação de Jovens e Adultos, deve ser um processo capaz de promover a interação da tríade – estudante, professor e conhecimento matemático – e as relações que se estabelecem entre eles (Brasil, 2002). Porém, ainda que haja a interação na tríade anunciada, o processo de ensinar e aprender matemática ainda ocorre em meio a obstáculos que estão presentes em ambientes de aprendizagem e que comprometem o atendimento as necessidades formativas desses estudantes.

Obstáculos da aprendizagem

O ensino da matemática na Educação de Jovens e Adultos é permeado por obstáculos que interferem diretamente no desenvolvimento da aprendizagem na sala de aula. Esses obstáculos podem vistos como o grande desafio enfrentado por professores que ensinam matemática, que além de deter os conhecimentos necessários para compreender esses obstáculos, devem pensar, organizar e planejar suas aulas para atendimento aos estudantes que irão receber esses conhecimentos. Segundo Brasil (2002), esses obstáculos podem ser de natureza *epistemológica* e de natureza *didática.*

Obstáculos de natureza epistemológica

Na concepção de Bachelard, **'***a noção de obstáculo epistemológico pode ser estudada no desenvolvimento histórico do pensamento científico e na prática da educação'*. (1996, p. 21). Em nossa concepção os obstáculos epistemológicos podem estar situados na dificuldade, no medo e na insegurança que os estudantes sentem para fazer do conhecimento já adquirido, a base de sustentação para o conhecimento novo. Para Lecourt, *os obstáculos preenchem a ruptura entre o conhecimento comum e o conhecimento científico e restabelece a continuidade ameaçada pelo progresso do conhecimento científico.* (1980, p. 26). Neste pensar, podemos inferir que quando já temos o domínio sobre determinado conhecimento, fazemos o processo de acomodação, este fato pode ser considerado como obstáculo epistemológico para o novo conhecimento. Ainda nessa direção, Pais (2001) afirma que "esses obstáculos não se constituem na falta de conhecimento, mas pelo contrário, são conhecimentos antigos, cristalizados pelo tempo, que resistem à instalação de novas concepções que ameaçam a estabilidade intelectual de quem detém esse conhecimento" (p. 39).

A esta afirmativa, consideramos que os estudantes da Educação de Jovens e Adultos de forma inconsciente, criam resistência para que outros conhecimentos sejam instalados, fato este observado durante a pesquisa de campo, onde alguns estudantes criaram resistência para realizar a atividade proposta, afirmando que não seriam capazes de resolver, mesmo sem ter tentado. Essa resistência é um elemento fortemente presente em turmas da EJA e que limita o desenvolvimento da aprendizagem desses estudantes.

Obstáculos de natureza didática

Os obstáculos didáticos podem ser vistos como aqueles que estão situados em meio aos procedimentos, fazeres e saberes da própria prática docente. Para Louro (2004) "*os obstáculos*

didáticos são provenientes das escolhas didáticas oriundas das estratégicas do professor. Dessa forma, a opção por metodologias inadequadas que não conseguem atingir a todos os alunos acaba se tornando um obstáculo de natureza didática" (p. 4).

Dessa forma, o professor deve ter o cuidado ao fazer seu plano de aula e a escolha do método a ser utilizado para ensinar determinado conteúdo, pois uma escolha errada e/ou equivocada pode gerar os obstáculos didáticos que "*são conhecimentos que se encontram relativamente estabilizados no plano intelectual e que podem dificultar a evolução da aprendizagem do saber escolar"* (Pais, 2001, p. 44).

Gusmão e Emerique (2000) apontam além dos obstáculos de natureza epistemológica e didática, *o obstáculo emocional*. Este obstáculo é muito comum na sala de aula, especialmente, nas aulas de matemática, por ser nesta disciplina a maior incidência de erros cometidos por estudantes na resolução de problemas matemáticos. Nas turmas de Educação de Jovens e Adultos, um erro cometido pelo estudante em determinada operação matemática pode ser visto como um obstáculo emocional. E dependendo da forma como esse erro é visto pelo professor, pode ser fator determinante para a permanência ou não do estudante na sala de aula, o mesmo não se sente seguro e perde todo o interesse em tentar aprender, pois "*o obstáculo emocional induz ao erro, este desencadeia emoções como: frustração de expectativa, angústia, raiva, sentimento de inferioridade, entre outras* (Gusmão & Emerique, 2000, p. 63).

Esses obstáculos que acabam se transformando em dificuldades de aprendizagem no ensino da matemática, levou especialistas da área a realizarem estudos na perspectiva de criar propostas metodológicas de ensino como alternativas para facilitar o ensino e a aprendizagem dos conteúdos matemáticos de forma criativa, crítica e contextualizada.

Essas propostas são vistas como Tendências no Ensino da Matemática, entre os quais se destacam – História da Matemática, Etnomatemática, Jogos Matemáticos, Modelagem Matemática, Informática Educativa, Resolução de Problemas, que fazem parte da macrotendência denominada Didático-Pragmática (Cavalcanti, 2012), que se refere ao ensino da Matemática, particularmente, no que diz respeito às metodologias, métodos e concepções de ensino-aprendizagem.

Entre essas tendências, fizemos abordagem acerca da Resolução de Problemas que cabe nesta discussão, por se tratar de uma proposta metodológica que visa facilitar o ensino da matemática, especialmente, para estudantes da educação de jovens e adultos que já vivenciaram experiências anteriores não exitosas no que se refere à aprendizagem dos conteúdos matemáticos. No entanto, apesar de ser esta uma proposta que pode facilitar o trabalho do professor de matemática, "*a grande maioria dos professores ainda desconhece a abordagem baseada na resolução de problemas como eixo orientador da aprendizagem em matemática"*. (Brasil, 2002, p. 14), o que é lamentável, pois esta abordagem poderia ser uma aliada para que estudantes e professores pudessem ter uma relação mais próxima com a matemática.

Resolução de Problemas

Em tempos atuais, o ensino da matemática poderia ser feito de forma diferenciada. No entanto, o que se ensina e como se ensina, ainda ocorre em termos tradicionais onde o professor ainda restringe ao livro didático, o recurso utilizado para ensinar os conteúdos matemáticos. Este instrumento é elaborado de forma mecânica e os problemas matemáticos trazidos para a sala de aula por meio de livros didáticos são distanciados da realidade e na maioria das vezes, acabam

sendo ensinados sem nenhum significado para o estudante. Neste sentido, consideramos a resolução de problemas como uma importante contribuição para a aprendizagem dos conteúdos matemáticos pelos estudantes da Educação de Jovens e Adultos.

Ao fazer uso desta abordagem, o professor poderá proporcionar ao estudante, a oportunidade de aprender conhecimentos matemáticos de forma mais significativa, considerando que,

> A resolução de problemas tem a ver com a produção de conhecimentos significativos para aquele que aprende. O conhecimento que se valoriza pela sua significação não é o conhecimento transmitido, mas o conhecimento produzido por quem está em situação de aprender. Assim, se a resolução de problemas deve ser o lugar da produção do conhecimento, a tarefa de resolver problemas é uma tarefa privilegiada para a aprendizagem (Huete & Bravo, 2006, p.118-119).

Na afirmativa acima, observa-se que a resolução de problemas pode ser uma ferramenta pela qual o estudante pode conseguir dar significado ao conhecimento aprendido, considerando que a produção desse conhecimento dar-se-á a partir da iniciativa de quem está aprendendo, pois a "*resolução de problemas envolve aplicar a matemática ao mundo real, atender a teoria e a prática de ciências atuais emergentes e resolver questões que ampliam as fronteiras das próprias ciências matemáticas"* (Onuchic, 1999, p. 204).

Compreendemos que para a matemática ser aplicada ao mundo real, é necessário fazer uso de metodologias que desenvolvam o ensino de uma matemática que atenda às necessidades locais dos estudantes. Nesta proposição, a metodologia de ensino por meio da Resolução de Problemas, pode ser vista como uma alternativa para que o processo de ensinar e aprender matemática, seja de forma clara, contextualizada e significativa, considerando que "*o aluno é agente da construção do seu conhecimento, pelas conexões que estabelece com seu conhecimento prévio num contexto de resolução de problemas"* (Brasil, 1998, p. 40).

O ensino da matemática por meio da Resolução de Problemas pode ser mais uma ferramenta para professores de Matemática, desde que seja compreendida e aperfeiçoada na prática a partir da experiência dos estudantes, não deixando que esta seja mais uma teoria sem nenhuma aplicação na vida prática. Vale considerar que a abordagem de Resolução de Problemas não é algo tão fácil para os estudantes da Educação Básica, algumas vezes se torna difícil porque esses estudantes não compreendem o comando ou sentem dificuldades em acertar na utilização de um conteúdo matemático que dê conta de tal resolução.

Na pesquisa realizada para a produção deste texto, observamos que as dificuldades dos estudantes em resolver problemas matemáticos podem ocorrer pela falta de entendimento na escrita do problema matemático ou por dificuldades na compreensão dos conteúdos matemáticos. Observamos ainda, que ao contextualizar um determinado problema matemático, o professor faz uso de uma linguagem que o estudante desconhece (*Escaravelho* palavra usada nos problemas usados na pesquisa) o que dificulta a compreensão e induz ao erro.

A intenção neste estudo foi investigar a (des)contextualização de problemas matemáticos destacando incompreensões, dúvidas, dificuldades apresentadas pelos estudantes da EJA, buscando analisar que dificuldades ocorrem na compreensão de problemas contextualizados quando aplicados em turmas dessa modalidade de ensino, razão esta que nos levou a fazer abordagem sobre a temática.

Contextualização e (Des)contextualização

O termo contextualização tem se tornado comum em ambientes de aprendizagem. Sempre ouvimos professores, estudantes e profissionais da área da educação falar sobre a importância de contextualizar determinado conteúdo, de associar ao conhecimento do cotidiano etc. Porém, é importante ressaltar alguns aspectos que perpassam por esse caminho que podem contribuir para a compreensão do que seja contextualização.

Para esse entendimento, necessariamente precisamos entrar no campo do pensamento e da lógica formal que foram considerados modelos de racionalidade humana. Esse pensamento era contrário ao conhecimento cotidiano, pois este era "*definido como aquele que não está incluído nas fronteiras do conhecimento formal ou acadêmico"* (Gómez-Granell, 1989, p. 15), ou seja, o conhecimento cotidiano é visto como superficial, portanto, não deveria ser visto como indicativo para o ensino formal.

Em se tratando do ensino dos conteúdos matemáticos, estes são baseados no conhecimento formal e distanciados do conhecimento cotidiano. E por ser formal, os enunciados desse conhecimento são quase sempre descontextualizados, o que contribui de certa forma para que o estudante tenha maior dificuldade para compreender o enunciado. Pires (2006) destaca que os enunciados não-contextualizados são aqueles que demandam aplicação direta de fórmulas, propriedades e definições no intuito de treinamento matemático, e essa aplicação é percebida diretamente no enunciado.

A autora faz referência ao treinamento matemático, que em nosso entendimento não atende a proposta de ensinar o conteúdo matemático na sala de aula, especialmente, em turmas de Educação de Jovens e Adultos que é o foco de nossa investigação. Ainda nesta direção, a autora afirma que é importante que se explore, nas aulas de Matemática, enunciados que sejam contextualizados, visto que a contextualização sociocultural dos conhecimentos matemáticos contribui para a compreensão e a utilização de conceitos desta área do conhecimento.

Desta forma, a contextualização dos conteúdos matemáticos é uma questão que vem sendo tema de discussão pelos especialistas da área da educação, pois que, a contextualização é considerada como a forma mais adequada para apresentar determinado conteúdo na perspectiva de que este faça sentido e que o estudante consiga dar significado a situação de aprendizagem e relacionar a questões reais vivenciadas por estes.

No entanto, é importante que o estudante seja estimulado a sair de sua zona de conforto para ser capaz de transferir o conhecimento aprendido a outros contextos. Em outras palavras, os conhecimentos devem ser descontextualizados, para serem novamente contextualizados. (Brasil, 2002). Isto significa dizer que, quando o estudante aprende ele é capaz de fazer uso desse conhecimento em outros ambientes.

Neste pensar, voltamos nosso olhar para o livro didático da matemática que comumente tem em suas páginas textos descontextualizados que não contribuem muito para uma aprendizagem duradoura dessa área do conhecimento, como afirma Curi (2008).

> Um olhar nos livros didáticos mostra a tradição dessa área do conhecimento: textos despersonalizados e descontextualizados, textos econômicos como *Calcule, Resolva, Efetue*, ...Na maior parte dos textos matemáticos escolares, a leitura solicitada é sempre concisa, associada a instruções, comandos, situações problemas e símbolos e específicos (Curi, 2008, p. 138).

Neste sentido, contextualizar o conteúdo matemático a ser ensinado na turma de Educação de Jovens e Adultos, pode contribuir para que esses estudantes sejam capazes de associar esses conteúdos a situações já vivenciadas favorecendo para que a aprendizagem seja significativa.

Procedimentos e desenvolvimento da Intervenção Pedagógica

Por ser esta uma pesquisa de abordagem qualitativa, os dados foram constituídos por meio de uma intervenção pedagógica, planejada e executada considerando alguns critérios para que o objetivo deste estudo fosse alcançado. Inicialmente, elegemos como universo a ser investigada, uma escola pública que oferta o ensino na modalidade Educação de Jovens e Adultos, por considerarmos que nesta modalidade, as dificuldades para aprender os conteúdos matemáticos são mais evidenciadas pelas próprias características desses estudantes, que são trabalhadores que vem à noite para a escola, cansados de um dia de trabalho ou são jovens que não realizaram seus estudos em tempo devido, o que de certa forma contribui para que a aprendizagem seja mais lenta. Optamos em realizar a intervenção pedagógica em uma turma de 4ª Etapa, por ser nesta etapa que os estudantes estão aprendendo o conteúdo matemático correspondente ao sistema de Equação de 1º grau.

A intervenção pedagógica, na forma de atividade matemática com questões diretas e questões por meio da resolução de problemas, foi realizada em uma turma de 4ª Etapa, do turno da noite, de uma escola municipal do município de Castanhal – PA, Brasil, durante três aulas da disciplina de matemática. A turma escolhida tinha 30 estudantes regularmente matriculados. No dia em que realizamos a intervenção pedagógica, estiveram presentes 22 estudantes, um número expressivo considerando que a frequência média em dias de aula de matemática é de 13 estudantes, de acordo com informações dadas pelo professor de matemática da turma. Acreditamos que o número (22), tem a ver com a curiosidade dos estudantes, pois o professor já havia conversado com a turma sobre a proposta de intervenção pedagógica.

Inicialmente, apresentamos a proposta de intervenção pedagógica, explicando passo a passo como a atividade seria desenvolvida e que a proposta objetivava identificar as dificuldades encontradas pelos estudantes da 4ª Etapa da Educação de Jovens e Adultos para compreender os problemas matemáticos quando estes são aplicados de forma (des)contextualizada. Em seguida, a turma foi organizada em duplas (11) e o material impresso foi entregue a cada um dos 22 estudantes. Orientamos os estudantes que os problemas matemáticos deveriam ser resolvidos em dupla. Mas, cada estudante deveria colocar as respostas no material recebido de forma individual, porém cada um deveria indicar o nome da dupla. Essa orientação foi necessária em atendimento a uma solicitação do professor da disciplina que faria uso da atividade como parte dos procedimentos avaliativos do bimestre. Após o encerramento da atividade, o material recolhido seria entregue uma cópia para o professor e outra ficaria com as pesquisadoras para ser utilizado na análise.

A atividade aplicada tratava-se de sistemas de Equações do 1º Grau e continha duas questões com alternativas **a**, **b** e **c**. Na primeira questão havia três sistemas básicos de simples resolução. Na segunda questão, foram colocados os mesmos sistemas básicos, porém em forma de problema matemático, conforme apresentamos a seguir o enunciado das questões:

QUESTÃO 01: Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 14 \\ 3x + 4y = 47 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + y = 10 \\ 20x + 5y = 140 \end{cases}$

QUESTÃO 02: Resolva os problemas abaixo:

a) Por um refrigerante e um hambúrguer paguei a quantia de R$ 7,00. Nas mesmas condições, paguei R$ 10,00 por dois refrigerantes e por um hambúrguer. Qual o preço de cada um dos itens?

b) Todos sabem que um escaravelho tem 6 patas e uma aranha tem 8 patas. Um dia, um colecionador desses animais encontra 14 bichos. Se tivesse de calçá-los precisaria de 47 pares de sapatos. Quantas aranhas e quantos escaravelhos encontrou? (Retirado do texto de Gómez-Granell, 1989, p. 20).

c) Luciano, aluno da 4ª etapa A da escola Graziela Gabriel, usou apenas notas de R$ 20,00 e de R$ 5,00 para fazer um pagamento de R$ 140,00. Descubra quantas notas de cada tipo ele usou, sabendo que no total foram 10 notas. (Adaptado de Dante, 2009).

Quando o material impresso foi entregue aos estudantes, houve certa agitação e mesmo antes de ler e compreender o comando das questões colocaram dificuldades para solucionar as questões. Essa falta de leitura e compreensão por parte dos estudantes não deixou que percebessem que as duas questões tratavam do mesmo problema. Que as respostas da questão 01 eram as mesmas da questão 02. E somente após algum tempo do início da aplicação da atividade, somente duas duplas conseguiram perceber que as respostas tanto da questão 01 quanto da questão 02, eram as mesmas.

Analisando os dados observados

Com relação aos dados que foram observados e registrados durante o desenvolvimento da atividade, nos preocupamos em interpretá-los no sentido de identificar que dificuldades ocorrem na compreensão de problemas contextualizados quando aplicados aos estudantes da 4ª Etapa da Educação de Jovens e Adultos do turno da noite, durante as 3h/aulas de Matemática. Na perspectiva de responder ao objetivo da pesquisa, destacamos os pontos de maior relevância na linha de investigação da proposta e que consideramos pertinente discutir.

Conforme já sinalizado, fizemos a intervenção pedagógica aplicando duas questões com sistemas de Equações do 1º grau com alternativas **A**, **B** e **C**. A primeira continha três questões referente a sistemas básicos de simples resolução. E a segunda com os mesmos sistemas básicos, porém colocado em forma de problema matemático. Observamos que os estudantes tiveram dificuldades para responder as duas questões propostas.

Considerando que na questão um (01), havia três sistemas básicos de simples resolução, 13 estudantes acertaram a alternativa **A**, 15 acertaram a alternativa **B** e 13 a alternativa **C**. O resultado aponta que os estudantes tiveram menor dificuldade para resolveram as questões propostas, é o que se observa pelo número de acertos em todas as alternativas. Quanto à questão dois (02), apenas 03 estudantes acertaram a alternativa **A**, nenhum acertou a alternativa **B** e apenas 02 estudantes acertaram a alternativa **C**. Foram colocados os mesmos sistemas básicos,

porém em forma de problema matemático. Observa-se que o número de acertos é menor, inclusive não havendo acertos na alternativa **B**, onde houve o maior número de acertos na questão 01.

A este resultado, atribuímos à dificuldade que os estudantes da EJA têm em ler, interpretar e encontrar a resolução do problema proposto. Neste resultado fica caracterizado que o ensino ainda é feito de forma mecânica e a resolução também ocorre mecanicamente. A afirmação deste resultado ocorreu a partir de observações feitas no momento que os alunos resolviam os problemas matemáticos.

Percebemos ainda que quando as questões são colocadas de forma contextualizada, onde o estudante necessita fazer a leitura e a interpretação do que lê para poder encontrar a resolução, isto torna-se um fator complicador, pois esse estudante não foi habituado a ler e fazer a interpretação daquilo que lê, especialmente quando se trata de problema matemático, onde além de fazer a interpretação textual, ele deve compreender as operações matemáticas que estão situadas no texto. Esse processo deve passar pelo reconhecimento da essencialidade da impregnação mútua entre a língua materna e a linguagem matemática (Machado, 2001).

Durante a atividade, observamos que os estudantes apresentaram maior dificuldade de compreensão durante a atividade de intervenção pedagógica e destacamos alguns aspectos por considerarmos os mais relevantes.

A palavra “Escaravelho" colocada no problema de forma proposital no enunciado, contribuiu para que os estudantes apresentassem maior dificuldade para a compreensão do problema, pois a palavra não é comum razão esta de não conseguirem relacionar a palavra ao contexto do problema matemático. Portanto, é importante que ao construirmos um problema matemático, este deve conter palavras e expressões claras e objetivas, e preferencialmente, que as palavras/expressões sejam conhecidas dos estudantes, como forma de evitar dificuldades na resolução do problema.

A percepção dos estudantes em relação às duas questões que eram iguais. Acreditamos que este fato está relacionado ao comando das questões, ou seja, na questão 01 era de simples resolução, que de certa forma não exigia do aluno tanto esforço, bastando para isso, ter o domínio das operações matemáticas. Contrariamente da questão 02 que exigia a leitura e a interpretação para encontrar a resolução, fato este que contribuiu para que os estudantes acreditassem que não seriam capazes de resolver a questão.

O Jogo de sinais foi outro aspecto em que os estudantes encontraram maior dificuldade na resolução dos problemas. A todo instante os estudantes solicitavam ajuda tanto ao professor da turma, quanto destas pesquisadoras. A dificuldade com o jogo de sinais é um problema recorrente no ensino da matemática que deve ser olhado com muita atenção pelos professores.

Um aspecto que nos chamou a atenção, a que se refere às dificuldades encontradas dos estudantes para resolver as questões fazendo uso das operações fundamentais, principalmente com a multiplicação e divisão.

Os estudantes encontraram dificuldades para armar os sistemas e perceberem quem era “x” e quem era “y”. Os estudantes não conseguiam associar os números dos problemas às variáveis.

Outro aspecto observado se refere à dificuldade dos estudantes na compreensão e relacionarem o isolamento das variáveis para encontrarem os valores propriamente ditos.

Considerando os aspectos acima apontados, vários são os elementos que estão inseridos no contexto da sala de aula que interferem diretamente no desenvolvimento da aprendizagem dos conteúdos matemáticos. E quando os problemas foram colocados aos estudantes da 4ª Etapa da Educação de Jovens e Adultos, percebemos que as dificuldades ficaram mais evidenciadas, posto que "*as dificuldades envolvidas na resolução de problemas ocorrem, em grande parte, pelo fato de os alunos não conseguirem ler nem interpretar textos, pois o desempenho nas atividades que não dependem tão diretamente de compreensão de enunciados"*(Curi, 2008, p. 138), mas, especialmente, do significado que a linguagem matemática representa no cotidiano desse estudante. E ainda sobre o aspecto da linguagem, Gómez-Granell (1989, p.29), afirma que "*um dos problemas mais importantes que o ensino de matemática tem de enfrentar reside na enorme dificuldade que, para alunos e alunas, representa o domínio da linguagem matemática, especificamente a algébrica"*.

Neste sentido, por termos feito a atividade utilizando o conteúdo de Sistemas de Equações, acreditamos que muitas vezes a escola é reprodutora de um conhecimento matemático que acaba não tendo sentido para o educando.

Considerações finais

A pesquisa nos levou a concluir que parte das dificuldades apresentadas pelos estudantes da 4ª Etapa da Educação de Jovens e Adultos está centrada na leitura e interpretação dos enunciados dos problemas matemáticos, pois a resolução desses problemas depende em grande parte da leitura desse problema. Assim, consideramos relevante destacar a importância da realização de estudos sobre as dificuldades que estudantes em qualquer nível de ensino encontram no que se refere à leitura e as consequências que são ocasionadas na aprendizagem dos conteúdos matemáticos. Questões desta natureza também devem ser pesquisadas em trabalhos futuros sobre Investigações Matemáticas no sentido de compreender situações matemáticas que podem ocorrer em qualquer nível de ensino.

Referências e bibliografia

Bachelard, G. (1996). *A formação do espírito científico*. Rio de Janeiro: Contraponto.

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental, Ministério da Educação e do Desporto (1998). *Parâmetros curriculares nacionais:* terceiro e quarto ciclos: apresentação dos temas transversais. Brasília, DF.

Brasil, Ministério da Educação. (2002). *Proposta Curricular para Educação de Jovens e Adultos*. Segundo Segmento do Ensino Fundamental (5ª a 8ª Série). Secretaria da Educação Fundamental. Brasília.

Cavalcanti, J. D. (2012). As tendências contemporâneas no ensino de Matemática e na pesquisa em Educação Matemática: questões para o debate. Texto, na modalidade de resumo expandido, elaborado para participação na Mesa Redonda *A Matemática e as Tendências Contemporâneas no Ensino e na Pesquisa*. 2012. Disponível em: www.academia.edu. Acesso em: 22.06.2014.

Curi, E., & Silva. J. (2008). Características de enunciados de problemas: reflexões teóricas e análises. In C. E. LOPES, & E. Curi, *Pesquisas em Educação Matemática: um encontro entre a teoria e a prática.* São Carlos, Pedro & João Editores.

Dante, L. R. (2009). *Tudo é Matemática*. 7º Ano, editora: Ática.

Gómez-Granell, C. (1989). La adquisición del lenguaje matemático: un difícil equilibrio entre el rigor y el significado. In *Comunicación, Lenguaje y Educación*.

Gusmão, Tânia Cristina Rocha Silva, & Emerique, Paulo Sérgio. (2000). Do Erro Construtivo ao Erro Epistemológico: Um Espaço Para Emoções. *BOLEMA, 13*(14). Unesp, SP.

Huete, J. C., & Bravo, J. A. (2006). *O ensino da matemática*: *fundamentos teóricos e bases psicopedagógicas* (Tradução Ernani Rosa). Porto Alegre: Artmed.

Lecourt, D. (1980). Para uma crítica da epistemologia. (2ª ed., pp. 25-32). Lisboa: Assírio e Alvim.

Louro, D. (2004). *Erros e Obstáculos Epistemológicos na Aprendizagem*. *Reflexões Sobre o Futuro da Aprendizagem*. IMA, São Paulo.

Machado, N. J. (2001). *Matemática e língua materna: análise da impregnação mútua*. São Paulo: Cortez.

Moreira, M. A. (1999). *Aprendizagem significativa.* Brasília: Editora Universidade de Brasília.

Onuchic, L. de la R. (1999). Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In M. A. V. Bicudo (Org.), *Pesquisa em educação matemática*: concepções & perspectivas. São Paulo: Editora da Unesp.

Pais, L C. (2001). *Didática da matemática: uma análise da influência francesa*. Belo Horizonte: Autêntica.

Pires, C. M. C. (2006). *Os textos nas aulas das disciplinas da área de ciências da natureza, matemática e suas tecnologias* [material impresso]. In Documento do Ensino médio em rede. São Paulo. www.matematicamuitofacil.com. Acesso em: 25 de Março de 2014.

A criatividade na aula de Matemática: revisitar a resolução de problemas

Isabel **Vale**
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Viana do Castelo, Portugal
isabel.vale@ese.ipvc.pt
Ana **Barbosa**
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Viana do Castelo, Portugal
anabarbosa@ese.ipvc.pt

Resumo

A criatividade desempenha um papel importante nos dias de hoje em educação matemática, sendo uma característica dinâmica que os alunos podem desenvolver se os professores lhes proporcionarem oportunidades de aprendizagem adequados, onde a formulação e resolução de problemas surge como um contexto privilegiado para a desenvolver. Este estudo, no âmbito da formação inicial de professores, procura compreender o desempenho dos futuros professores em tarefas de formulação e resolução de problemas que desenvolvam a criatividade e identificar que tarefas permitem atingir esse objetivo. Utilizamos uma abordagem qualitativa, tendo recolhido dados de forma holística, descritiva e interpretativa. Os resultados preliminares, baseados principalmente em produções escritas, sugerem que as tarefas utilizadas têm potencial para identificar nos futuros professores algumas características de criatividade.

Palavras chave: Tarefas. Desafio. Criatividade. Resolução e Formulação de Problemas. Formação Inicial de Professores.

Introdução

Nas últimas décadas, a resolução de problemas tem desempenhado um papel importante como eixo organizador do currículo de matemática um pouco por todo o mundo. No entanto, não teve o impacto esperado sobre as práticas dos professores e, consequentemente, na aprendizagem dos alunos. Esta aprendizagem da matemática pelos alunos deve, para além das tarefas rotineiras, ser enriquecida com outras tarefas de natureza desafiadora, como a resolução de problemas. A investigação tem mostrado que a resolução e a formulação de problemas em matemática estão intimamente relacionadas com a criatividade. Um ensino da matemática que não proporcione momentos em que os alunos sejam criativos, nega-lhes qualquer oportunidade de desenvolver as suas capacidades em matemática, mas também de apreciar a beleza desta ciência. Com base nestas premissas, desenvolvemos um estudo exploratório, ainda em curso, com professores do ensino básico em formação inicial, durante uma experiência didática, baseada na resolução de tarefas desafiadoras como contributo para o desenvolvimento do pensamento criativo.

O professor e as tarefas

Na aula de Matemática, a aprendizagem é fortemente dependente do professor e das tarefas que são propostas aos alunos (e.g. Doyle, 1988; Stein & Smith, 1998). Muitas das fragilidades que estes apresentam ao longo da sua aprendizagem, são devidas às conceções e atitudes dos professores, que influenciam as suas ações na sala de aula, mas também às manifestas lacunas no conhecimento matemático, assim como à falta de estratégias de ensino inovadoras e eficazes. As tarefas que os professores selecionam para as suas aulas são um importante mediador entre o conhecimento e os alunos no processo de ensino e aprendizagem da matemática. Essas tarefas, para além de terem o papel supracitado, caracterizam e evidenciam o trabalho do professor (e.g. Stein & Smith, 1998). A orientação do questionamento e da discussão, bem como a reflexão de ideias influenciam a aprendizagem dos alunos, mas isto apenas sucede quando os professores têm um bom conhecimento do assunto que ensinam, como o ensinam e quando o ensinam. Assim, é importante que desenvolvam certas capacidades, incluindo as criativas, com base num profundo conhecimento matemático e didático dos assuntos, permitindo-lhes construir, adaptar, e explorar boas tarefas matemáticas para a sala de aula. Por um lado, os professores devem propor tarefas que os ajudem a motivar os seus alunos para aprender e a desenvolver o pensamento criativo, por outro lado devem ser eles próprios criativos nas tarefas e estratégias de ensino que propõem e no modo como as propõem. É, por isso, fundamental que os professores possam tirar proveito de todo o potencial contido numa tarefa e, para isso, precisam de ter oportunidades para as explorar e resolvê-las da mesma forma que pensam explorá-las com os seus próprios alunos.

A perspetiva prescritiva sobre a resolução de problemas, reduzindo-a ao ensino de estratégias, revelou-se insuficiente. Temos que encontrar outras alternativas. Precisamos de envolver os alunos em processos de descoberta e invenção, refinamento de métodos e formas de representação, na dúvida e na crítica, na procura de maneiras diferentes para utilizar o conhecimento matemático, e ser persistentes durante a resolução de problemas. Essas tarefas devem permitir aos alunos definir estratégias, discutir e promover a comunicação matemática, terminando com uma síntese das principais ideias aprendidas, e este é um trabalho feito pelos alunos juntamente com o professor. Um ensino exploratório em que o professor promove condições para que os alunos descubram e construam o seu próprio conhecimento é fundamental para atingir esse objetivo.

Para Stein e Smith (1998), uma tarefa é um segmento da atividade da aula dedicado ao desenvolvimento de uma ideia matemática específica e a sua natureza afeta o tipo de aprendizagem produzido. Mason e Johnston-Wilder (2006) identificam como tarefa matemática aquilo que os alunos são convidados a fazer, que pode ser um cálculo, a manipulação de símbolos, a utilização de várias representações ou a resolução de um problema. Consideramos que uma tarefa é tudo o que o professor utiliza, no processo de ensino e aprendizagem da matemática, para ilustrar uma ideia, para envolver os alunos na resposta/resolução de uma situação (e.g. exercícios, problemas, investigações, perguntas, definições, demonstrações, projetos, construções, jogos, relatórios) que promova a aprendizagem. Holton, Cheung, Kesianye, Losada, Leikin, Makrides, Meissner, Sheffield e Yeap (2009) defendem a importância do desafio na aula de matemática quando afirmam: "Os alunos podem tornar-se desmotivados e entediados muito facilmente numa sala de aula 'rotineira' a menos que sejam desafiados e ainda é comum limitar os nossos alunos mais brilhantes" (p. 208). Deste modo as situações desafiantes proporcionam uma oportunidade para pensar matematicamente. Esses desafios devem responder à situação em causa com flexibilidade e imaginação (e.g. Barbeau, 2009). A expressão *tarefa*

desafiante é normalmente usada para descrever uma tarefa que é interessante e talvez agradável, mas nem sempre é fácil de lidar ou alcançar, e que deve envolver ativamente os alunos na construção de uma diversidade de ideias e estilos de aprendizagem. Um desafio apropriado é aquele para o qual o indivíduo possui os conhecimentos e habilidades matemáticas necessários, mas precisa de usá-los de uma forma não padronizada ou inovadora.

Temos dado uma atenção particular às tarefas em contextos visuais/figurativos e também às que envolvem a procura de padrões. A escolha por contextos figurativos deve-se à importância que têm em toda a atividade matemática, sendo uma componente de aprendizagem com muitas potencialidades e muitas vezes negligenciada na trajetória escolar dos alunos. Tal importância vem do facto de que a visualização não está apenas relacionada com a mera ilustração, mas por ser reconhecida como uma componente relevante do raciocínio - profundamente envolvida com o conceptual e não apenas com o percetual – da resolução de problemas e da demonstração. É por vezes mais fácil perceber ou mesmo explicar um conceito criando uma imagem, já que é rapidamente compreendida e retida de forma mais prolongada, do que uma sequência de palavras. As características visuais de uma tarefa podem ajudar os alunos a ultrapassar algumas dificuldades com conceitos e procedimentos matemáticos, resolvendo com sucesso uma dada situação problemática. *Ver* é uma componente importante para explorar a generalização e esta capacidade só pode ser desenvolvida através de experiências que requerem esse tipo de pensamento (e.g. Barbosa, 2013; Rivera & Becker, 2005; Vale & Pimentel, 2011). Por outro lado, a opção por tarefas com padrões, justifica-se pelo facto da descoberta de padrões ser uma estratégia poderosa de resolução de problemas e que torna possível o desenvolvimento de ideias matemáticas centrais, como a generalização. Estas tarefas podem ser propostas em diversos contextos, visuais e não visuais, permitindo a utilização de diferentes abordagens e, dependendo do problema, os alunos podem evidenciar a sua fluência, flexibilidade e originalidade. A investigação tem mostrado que os contextos figurativos são mais intuitivos para a maior parte dos alunos e, em particular, para os dos níveis mais elementares e/ou com fragilidades no conhecimento matemático, em que o modo de ver o arranjo pode ajudar a estabelecer relações e consequentemente a produzir a generalização (Vale, 2013).

Criatividade e resolução de problemas

Mann (2006), ao analisar a investigação centrada na definição de criatividade matemática, descobriu que não existe uma definição universalmente aceite, uma vez que existem inúmeras formas de a expressar. Em contexto educativo, os estudos realizados sobre a criatividade têm revelado preocupação com o reforço criativo na qualidade do ensino e aprendizagem abarcando todos os alunos (e.g. Presmeg, 1986). O termo criatividade é normalmente usado para referir a capacidade de produzir novas ideias, abordagens ou ações. A criatividade começa com curiosidade e envolve os alunos em tarefas de exploração e experimentação, nas quais podem manifestar a sua imaginação e originalidade (e.g. Barbeau, 2009). É notória a existência de similaridades nas diversas tentativas de definir criatividade, nomeadamente: (1) envolve pensamento divergente; (2) tem principalmente três componentes/dimensões, que são a fluência, a flexibilidade e a originalidade; e (3) está relacionada com a resolução e formulação de problemas. Clarificando, *Fluência* é a capacidade de gerar um grande número de ideias e refere-se à continuidade dessas ideias, ao fluxo de associações e à utilização de conhecimentos básicos. *Flexibilidade* é a capacidade de produzir diferentes categorias ou perceções em que há uma variedade de ideias diferentes sobre o mesmo problema ou situação. *Originalidade* é a

capacidade de criar ideias ou produtos novos, únicos, ou extremamente diferentes. (e.g. Presmeg, 1986; Silver, 1997; Vale, Pimentel, Cabrita, Barbosa & Fonseca, 2012).

Os resultados de algumas investigações mostram que a formulação de problemas e a resolução de problemas em matemática estão diretamente relacionadas com a criatividade (e.g. English, 1997; Silver, 1997). Tarefas que podem promover as dimensões acima referidas devem ser abertas, assumindo a forma de resolução de problemas, formulação de problemas, explorações matemáticas e investigações. Em vez de problemas fechados, com uma única solução, os alunos devem resolver problemas abertos, com uma grande diversidade de métodos alternativos de resolução (Mann, 2006). A formulação de problemas pode ser uma estratégia poderosa para desenvolver capacidades de resolução de problemas e de ter bons resolvedores de problemas, por outro lado, a formulação de problemas matemáticos é necessária para se ser um bom resolvedor de problemas. Ao aprender a resolver problemas e ao aprender através da resolução de problemas, os alunos têm inúmeras oportunidades para estabelecer conexões entre ideias matemáticas e desenvolver a sua compreensão conceptual. Defendemos as tarefas com múltiplas soluções, uma vez que consideram diferentes soluções para o mesmo problema, utilizam diferentes representações e envolvem diferentes propriedades de um conceito matemático (Vale et al., 2012).

Como já se referiu, a criatividade tem fortes conexões com os problemas e o processo de criação de problemas tem sido definido de várias formas e com termos diferentes, mas, na essência, os autores referem-se aos mesmos aspetos. Outros termos são usados como inventar, criar, propor, formular. Silver (1997) considera que a formulação de problemas implica gerar (criar) novos problemas ou reformular um determinado problema. Stoyanova (1998) considera a formulação de problemas como o processo pelo qual, com base na experiência matemática, os alunos constroem interpretações pessoais de situações concretas e formulam-nos como problemas matemáticos significativos. A atividade de formulação de problemas é para o aluno a problematização de situações, usando a sua própria linguagem, experiências e conhecimento. Esta atividade tem sido uma componente bastante negligenciada nas aulas de matemática e, em particular, no estudo da resolução de problemas, mas é crucial na aprendizagem da matemática.

Brown e Walter (2005) propõem duas estratégias de formulação de problemas que os alunos podem usar. A primeira estratégia é *aceitando os dados*, quando os alunos partem de uma situação estática, que pode ser uma expressão, uma tabela, uma condição, uma imagem, um diagrama, uma frase, um cálculo ou simplesmente um conjunto de dados, a partir da qual formulam questões de modo a ter um problema, sem mudar a situação de partida. A segunda estratégia consiste em estender uma dada tarefa alterando o que é dado, usando a estratégia *E se em vez de*. A partir da informação contida num problema, identifica-se qual é o problema, o que é conhecido, o que é pedido e quais as limitações que a resposta ao problema envolve. Modificando um ou mais destes aspetos ou questões, pode gerar-se novas e mais questões.

Contextos onde os alunos têm a oportunidade de resolver problemas matemáticos utilizando diversas estratégias e formular os seus próprios problemas, permitem-lhes estar envolvidos, aumentar a sua motivação e incentivá-los a investigar, para tomar decisões, para procurar padrões e conexões, generalizar, comunicar e identificar alternativas. Por exemplo, English (1997) afirmou que as tarefas de formulação de problemas que usou num dos seus estudos, ajudaram os alunos a ser criativos, divergentes e flexíveis no seu pensamento. Para além de que formular problemas proporciona aos professores informações importantes sobre como os alunos compreendem e utilizam os conceitos e processos matemáticos, permitindo também

identificar quais as suas atitudes em relação à matemática. Em particular, a formulação de problemas geralmente permite que os alunos reduzam os níveis de ansiedade sobre a sua aprendizagem da matemática, ao mesmo tempo que ajudam a promover um maior nível de criatividade (Brown & Walter, 2005).

Metodologia

Neste estudo as tarefas propostas incorporam ideias da resolução de problemas (e.g. Polya, 1973; Silver, 1997) e da formulação de problemas (e.g. Brown & Walter, 2005; Silver, 1997; Stoyanova, 1998). Na categoria da resolução de problemas, as tarefas são maioritariamente problemas de processo ou problemas de natureza aberta, que permitem diferentes resoluções e/ou soluções, que dependem das capacidades e conhecimentos de cada aluno, requerem pensamento flexível e o resolvedor pode usar múltiplas estratégias e representações. Na categoria da formulação de problemas, consideramos situações semi-estruturadas nas quais é solicitado aos alunos que criem problemas (escrever um problema ou formular uma questão a partir de uma situação estática), usando a estratégia *aceitando os dados*. Todas as tarefas foram desenhadas ou selecionadas com base na identificação de uma das dimensões da criatividade, e com a finalidade de serem desafiantes para os alunos. Sempre que possível, foram privilegiados contextos figurativos e problemas com padrões, pelas razões já evidenciadas no enquadramento teórico.

Um dos objetivos deste estudo era identificar tarefas que possibilitem o desenvolvimento da criatividade matemática através das produções escritas apresentadas pelos alunos às tarefas propostas. Optamos por uma abordagem qualitativa, com um design exploratório (Yin, 2012). Os dados foram recolhidos de uma forma holística, com um carácter descritivo e interpretativo, incluindo principalmente as resoluções escritas das tarefas, assim como observações em sala de aula. A experiência didática que fundamenta este trabalho foi desenvolvida com 20 alunos, futuros professores do ensino básico, durante as aulas de Didática da Matemática, onde se discutiu e trabalhou a criatividade em matemática durante cerca de dez horas. Esta experiência assumiu uma dinâmica exploratória durante as aulas em que: (a) a resolução de problemas era o contexto de trabalho; (b) os alunos analisavam e discutiam as tarefas propostas; e (c) a comunicação era privilegiada, particularmente, através do questionamento e da utilização de múltiplas representações. Para analisar o potencial das tarefas no desenvolvimento da criatividade dos alunos na formulação de problemas, foram usadas as mesmas dimensões associadas à resolução de problemas: fluência, flexibilidade, originalidade. Não se pretendia atribuir uma classificação a cada aluno no que refere a estas dimensões, mas antes efetuar uma análise global do trabalho apresentado, considerando-se a frequência das respostas mais comuns e mais originais (e.g. Conway, 1999; Silver, 1997; Vale et al., 2012). Em anexo encontram-se algumas tarefas.

Resultados preliminares

Apresentam-se alguns dos resultados obtidos em algumas das tarefas utilizadas. Nesta fase do estudo podemos dizer que os resultados indicam que as contagens em contexto visual e as tarefas de padrão (as *Cerejas*, as *Cruzes* e os *Cubos*) foram as que deram origem a mais resoluções, dando aos alunos oportunidade de serem criativos. Esta situação parece estar relacionada com a natureza das tarefas em si, mas também com o trabalho prévio que foi feito com estes alunos no âmbito dos padrões. Por exemplo, a tarefa das *Cruzes*, que envolve um padrão de crescimento, pressupõe uma exploração que tem por base um trabalho prévio com contagens em contextos figurativos e que pode ser uma importante abordagem para desenvolver

capacidades de *ver* (e.g. identificação, decomposição, rearranjo), que facilitam a generalização nesta tarefa, pois aborda processos semelhantes. Os alunos apresentaram muitas resoluções diferentes, tendo-se, por isso, identificado fluência na resolução da tarefa. De notar que este é um tema recente nas aprendizagens destes alunos onde se introduz o estudo de padrões como um modo de abordar desde cedo o pensamento algébrico. A Figura 1 mostra algumas das soluções mais comuns, apresentadas pelos alunos, e a Figura 2 apresenta as soluções mais originais.

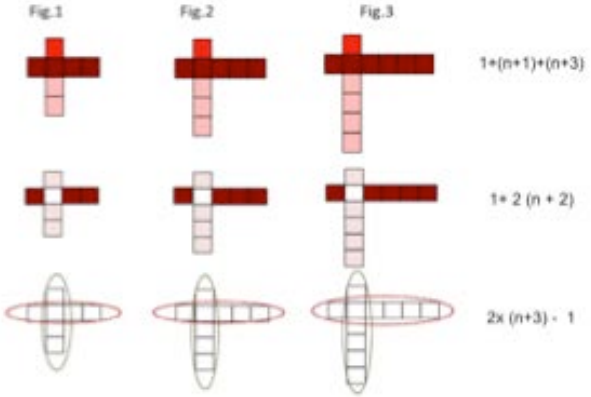


Figura 1. As soluções mais comuns na tarefa das *Cruzes*

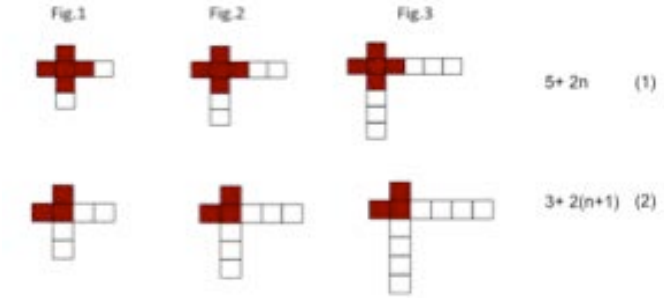


Figura 2. As soluções mais originais na tarefa das *Cruzes*

Nas tarefas como os *Bilhetes*, o *Fio* e a *Expressão*, onde os alunos tiveram que formular um problema, concluiu-se que seguiram o caminho mais óbvio e elementar, e as propostas apresentadas não são muito diferentes das que os estudantes do ensino básico acabariam por apresentar. Todos mostraram pensamento convergente, porque construíram problemas muito semelhantes na estrutura, recorrendo ao uso de operações aritméticas básicas, sendo que as propostas eram quase todos do mesmo tipo, variando apenas em pequenos pormenores de contexto, o que se traduz na falta de flexibilidade de pensamento. As propostas mais comuns centraram-se em problemas de um passo ou em problemas de dois ou mais passos, no âmbito do tema Números e Operações. Este tipo de tarefa não constituiu qualquer dificuldade para os alunos que mostraram fluência nas propostas apresentadas. Em particular na tarefa a *Expressão*, as propostas que os alunos apresentaram foram problemas com a mesma estrutura, variando apenas os contextos (e.g. bolos, animais, frutas, CDs, conchas, mesas, chocolates, flores). Na Figura 3 apresenta-se um desses exemplos.

A tia da Maria deu três euros a cada um dos seus três sobrinhos e quarto euros à Maria.
Escreve uma expressão que traduza o total de dinheiro que a tia da Maria gastou.

Figur*a 3*. Uma das propostas mais comuns na tarefa a *Expressão*

Contudo, apesar da tarefa não ser apresentada na forma de contexto visual, poderia eventualmente sugerir a formulação de um problema nesse âmbito. Um dos alunos evidenciou este raciocínio, sendo, por isso, considerada a produção mais original, tendo formulado um problema de contagens visuais, mobilizando o conhecimento previamente adquirido durante as aulas (Figura 4).

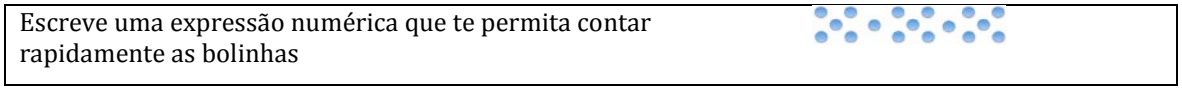


Figura 4. A proposta mais original na tarefa a *Expressão*

Em termos gerais, a maior parte dos alunos foi capaz de apresentar diferentes resoluções, evidenciando fluência. Um número reduzido de alunos revelou originalidade na forma como resolveram e formularam problemas. A flexibilidade foi a dimensão da criatividade com menos expressão nas suas produções, sobretudo nas tarefas de formulação de problemas. Cada tarefa não foi intencionalmente concebida para avaliar uma dimensão específica da criatividade matemática, embora em alguns casos, uma dessas dimensões possa ser mais relevante. Observou-se que a análise das dimensões da criatividade não é fácil de concretizar. Os alunos precisam de ser incentivados a procurar respostas incomuns e únicas, uma vez que esta componente é uma forma de obter soluções para problemas difíceis ou um caminho para soluções criativas.

Discussão e Principais conclusões

Ao longo das últimas décadas, tem havido um incontável ciclo de currículos de matemática que balançam entre o foco na resolução de problemas e nas competências essenciais. E, apesar do grande número de estudos na área de resolução de problemas, esta ainda se revela uma tarefa complexa de implementar nas aulas de matemática. Acreditamos que ser criativo na aula de matemática é um tema emergente em debate e tem fortes ligações com a resolução de problemas, bem como com a formulação de problemas, e que pode contribuir para o sucesso na resolução de problemas e consequentemente em matemática. A formulação de problemas é uma parte da resolução de problemas. Polya (1973) afirmou que toda a atividade de resolução de problemas não está completa se não se der aos alunos a oportunidade de formular problemas. No entanto, esta tem sido uma componente praticamente sem visibilidade nas aulas de matemática. Estas duas capacidades devem ser desenvolvidas em paralelo, incentivando os alunos a criar os seus próprios problemas (Polya, 1973; Silver, 1997), com base em situações ou experiências específicas e, ao mesmo tempo, resolver problemas por meio de uma crescente variedade de estratégias. Ambas exigem pensamento divergente e as diferentes componentes da criatividade.

Muitos investigadores têm tentado definir criatividade, sem chegar a uma definição aceitável. No entanto, todas as definições de criatividade consideram a produção de algo novo. Assim, podemos dizer que o termo criatividade é normalmente usado para se referir à capacidade de produzir novas ideias, abordagens ou ações. Mas, mais do que encontrar uma definição, é importante para nós, como educadores detetar algumas características que podem ser ensinadas e úteis para os alunos. As produções dos futuros professores ao longo das tarefas propostas evidenciaram algumas características da criatividade (várias representações, várias maneiras de resolver, formular diferentes tipos de problemas), o que significa que as tarefas utilizadas têm algum potencial para desenvolver essas características nos estudantes. Os alunos mostraram motivação na procura de muitas e diferentes resoluções. As tarefas mais bem sucedidas foram aquelas relacionadas com padrões, como era expectável. As produções relacionadas com a

formulação de problemas revelaram menos criatividade, tendo os alunos apresentado dificuldades em pensar de forma divergente.

A criatividade é um campo que ainda estamos a explorar, contudo esta experiência proporcionou a construção e identificação de algumas tarefas que, para além da exploração dos conceitos e processos matemáticos envolvidos, permitiu múltiplas resoluções por parte dos alunos. Um ponto forte neste trabalho foi a identificação de tarefas com potencial para desenvolver a criatividade dos alunos. De facto, embora a análise das componentes da criatividade, emergentes da realização das tarefas, não tivesse a intenção de categorizar os alunos, contribuiu para o refinamento das tarefas, juntamente com a mobilização de diferentes temas e processos matemáticos. Bons resolvedores de problemas matemáticos têm pensamento flexível e fluente. São também curiosos e reflexivos, procurando por padrões e conexões. Se, conjuntamente com estas características, tiverem originalidade, podemos afirmar que são criativos. Os programas de formação de professores devem ser repensados, discutindo de forma sistemática o modo como os professores podem desenvolver os seus conhecimentos matemáticos e didáticos no sentido de melhorar a criatividade dos seus alunos e consequentemente o seu desempenho em matemática.

Referências

Barbeau, E. (2009). Chapter 0 - Introduction. In Edward J. Barbeau and Peter J. Taylor (Eds.), *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom – New ICMI Study Series 12* (pp. 1-10). NewYork: Springer.

Barbosa, A. (2013). O contributo da visualização no desenvolvimento do raciocínio funcional. In A. Domingos, I. Vale, M. J. Saraiva, M. Rodrigues, M.C. Costa & R. Ferreira. (Orgs.), *Investigação em Educação Matemática - Raciocínio Matemático* (pp. 51-80). Penhas da Saúde: SPIEM

Brown, S., & Walter, M. (2005). *The art of problem posing.* Mahwah, NJ: Erlbaum.

Conway, K. (1999). Assessing open-ended problems. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *4, 8,* 510-514.

Doyle, W. (1988). Work in Mathematics Classes: The Context of Students' Thinking During Instruction. *Educational Psychologist,* 23 (2), 167-180.

English, L.D. (1997). The development of 5th grade students problem-posing abilities. *Educational Studies in Mathematics,* 34, 183-217.

Holton, D., Cheung, K., Kesianye, S., Losada, M., Leikin, R., Makrides, G., Meissner, H., Sheffield, L. & Yeap, B. (2009). Teacher development and mathematical challenge. In Edward J., Barbeau & Peter J. Taylor (Eds.), Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom. – *New ICMI Study Series 12* (pp. 205-242). New York: Springer.

Mann, E. (2006). Creativity: The Essence of Mathematics. *Journal for the Education of the Gifted, 30*(2), 236-260.

Mason, J. & Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and Using Mathematical Tasks*. St. Albans: Tarquin.

Polya, G. (1973). *How to solve it.* Princeton, NJ: Princeton University Press.

Presmeg, N. (1986). Visualization and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics*, 17, 3, 297-311.

Rivera, F. & Becker, J. (2005). Figural and Numerical Modes of Generalizing in Algebra. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *11*, 4, 198-203.

Silver, E. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *International Reviews on Mathematical Education, Essence of Mathematics, 29*(3), 75–80. Retrieved March 10, 2003, from http://www.fizkarlsruhe.de/fix/publications/zdm/adm97

Stein, M. & Smith, M. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(4), 268-275.

Stoyanova, E. (1998). Problem posing in mathematics classrooms. In A. McIntosh & N. Ellerton (Eds.), *Research in Mathematics Education: a contemporary perspective* (pp. 164-185). Edith Cowan University: MASTEC

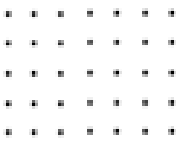
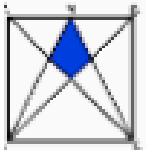
Vale, I. (2013). Padrões em contextos figurativos: um caminho para a generalização em matemática. *REVEMAT, 8*, 2, 64-81.

Vale, I. & Pimentel, T. (2011). Mathematical challenging tasks in elementary grades, In M. Pytlak, T. Rowland & E. Swoboda, *Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, pp.1154-1164. Rzeszow: ERME.

Vale, I., Pimentel, T., Cabrita, I., Barbosa, A. & Fonseca, L. (2012). Pattern problem solving tasks as a mean to foster creativity in mathematics. In Tso, T. Y. (Ed.), *Proceedings of the 36 th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 4*, pp. 171-178. Taipei, Taiwan: PME.

Yin, R. (2012). *Application of case study research.* Thousand Oaks, USA: Sage.

ANEXO

Resolução de problemas	Formulação de problemas
As Cerejas Descubra diferentes modos de contar as cerejas. Escreva a expressi numérica que traduz cada um desses processos de contagem. 	**Os Dois Quadrados** Observe a figura onde dois dos lados dos quadrados têm o ponto médio em comum. Formule tantos problemas quantos consiga baseados na figura e resolva-os.
Frações no Geoplano Descubra tanto modos quantos consiga de representar no geoplano 4x6 as seguintes frações: 1/3, 1/4, 1/6, 1/8, 1/12 e 1/24. Pinte de cores diferentes cada uma dessas partes. 	**O Fio** Temos um fio flexível com 36 cm de comprimento. Formule algumas questões baseadas na informação dada que lhe permita obter um problema.
Quadrados com Palitos Pode fazer quadrados usando palitos, de modo que se toquem apenas nas extremidades. Existem muitas possibilidades de dispor os palitos para obter cinco quadrados. Descubra o maior número possível de soluções e desenhe-as.	**As Joaninhas** Crie problemas ou formule questões com base na figura.
As Cruzes Observe a sequência de crescimento: 1. Desenhe a figura seguinte. 2. Descubra diferentes expressões que traduzam diferentes modos de ver a formação das cruzes que permitam calcular a área de cada cruz. 3. Imagine que as cruzes apresentadas são a 3ª, 4ª e 5ª figuras de uma sequência de crescimento. Desenhe a 1ª e a 2ª figuras dessa sequência.	**Os Bilhetes** O Rui e o seu pai foram ao cinema ver o filme " Os incríveis". Na imagem, estão os bilhetes de cinema do Rui e do seu pai. Formule problemas com base na situação apresentada.
Papagaio no Quadrado No quadrado [ABCD] M é o ponto médio do lado [AB]. Traçando as diagonais do quadrado e os segmentos [DM] e [CM] obtém-se o quadrilátero sombreado.  Que fração da área total representa a área sombreada?	**A Expressão** Imagine que é professor e tenciona propor aos seus alunos um problema que pode ser traduzido pela expressão numérica: 3 x 5 + 2. Invente um problema que se adeqúe a esta expressão.

A Resolução de Problemas como metodología integradora da disciplina Matemática aos cursos técnicos em agropecuária

Adenise Vieira de **Souza**
Instituto Federal Norte de Minas Gerais, Campus Januária
Brasil
adenise.vieira@ifnmg.edu.br
Maria Deusa Ferreira da **Silva**
Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia
Brasil
mariadeusa@gmail.com

Resumo

Nesta comunicação científica (CC) vamos apresentar um recorte da dissertação de mestrado realizada no programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional –PROFMAT, Campus UESB, conduzida pela primeira das autoras sob a orientação da segunda. No referido trabalho propomos a resolução de problemas como metodología integradora da matemáticas às disciplinas técnicas e no bojo do trabalho relatamos as dificuldades e estratégias encontradas durante a resolução e a elaboração de problemas matemáticos na área de agropecuária. Os sujeitos foram alunos do 1º ano do Curso Técnico em Agropecuária do Instituto Federal do Norte de Minas Gerais – Campus Januária. Tal proposta visou motivar os alunos no processo de Ensino Aprendizagem da Matemática, bem como mostrar a aplicação dessa disciplina em diversas áreas do Curso Técnico em Agropecuária Integrado ao Ensino Médio. Ainda, nessa CC trazemos a discusão de parte dos resultados obtidos na pesquisa.

Palavras chave: Ensino médio entegrado, metodología, resolução de problemas, matemática

Introdução

No Brasil, os cursos Técnicos Integrados ao Ensino Médio oferecidos pelos Institutos Federais de Educação Ciências e Tecnologias -IF, tem uma grande importancia na formação de futuros profissionais para as diversas áreas. Assim, uma das exigencias do Ministério da Educação e Cultura - MEC, atravéz do decreto nº 5.154 de 23 de julho de 2004, é que haja uma integração entre as disciplinas técnicas e as propedéuticas. No Instituto Federal do Norte de Minas Gerais – IFNMG, Campus Januária, na semana pedagógica de 2013, foi realizada a palestra sob o título: "Currículo Integrado: história, concepções e prática" (Ramos, 2005). A partir dessa palestra ficou mais latente a necessidade de integrar o ensino da matemática as outras disciplinas, especialmente no curso Técnico em Agropecuária.

Destacamos ainda, que desde a implementação do decreto **nº 5.154 de 23 de julho de 2004,** que estabeleceu a modalidade de Ensino Médio Integrado a Educação Profissional, as

discussão sobre desafios de como encontrar um caminho para a integração do ensino, vem sendo intensificada nos diversos Institutos Federais. Muitas vezes, fazendo um paralelo entre os debates e as aulas de matemática ministrada nos sentimos impotentes por não conseguir atingir os objetivos da instituição, ou seja, trabalhar com uma concepção mais ampla de educação, na qual os estudantes deverão adquirir uma visão critica do meio em que estão inseridos e que vão se inserir futuramente.

Além disso, das observações feitas no ambiente de trabalho, percebemos necessidades e dificuldades que os professores de matemática encontram em integrar o ensino dessa disciplina às outras disciplinas técnicas do curso. Daí nasceu à proposta de trabalhar com ***Resolução de Problemas Matematicos*** na agropecuária. Isso também nos levou a propor o seguinte questionamento que direcionou nossa pesquisa de coclusão do curso de Mestrado já mencionado: D***e que modo a resolução de problemas matemáticos pode se constituir em elemento integrador da matemática às disciplinas técnicas?***

Diante do até aqui exposto, nessa CC vamos trazer um recorte, apresentando e analisando como os estudantes do 1º ano do curso Técnico em Agropecuária do IFNMG, campus Januária, responderam as situações problemas, por nós propostas em oito atividades, presentes nas práticas agrícolas. Ainda, se é possível, a partir da metodología de resolução de problemas, integrar o ensino da matemática com outras disciplinas, e se essa metodologia é adequada para motivar os estudantes no estudo matemática.

O desenvolvimento da pesquisa

Um primeiro momento no desenvolvimento da pesquisa foi aplicar um questionário para diversos professores das disciplinas técnicas do referido curso Técnico com objetivo obter informações sobre quais problemas específicos dessas disciplinas técnicas necessitam de conteúdos matemáticos e quais conteúdos são necessários para resolvê-los. Todavia o número de questionários respondidos pelos professores foram insufientes para um diagnóstico mais elaborado sobre a presença da matemática nessas disciplinas. Assim, foi necessário recorrer a outras formas de levantamento de dados sobre como a matemática está incerida nas disciplinas técnicas. Isso nos levou a vistoriar os cadernos dos alunos, bem como interrogar os próprios alunos sobre que matemática utilizavam nas disciplinas técnicas.

Com base nessas informações e em pesquisas realizadas nos site de orgãos que orientam a agricultura no Brasil, como a Empresa de Assistência Técnica e Extensão Rural – EMATER, Empresa Brasileira de Pesquisa Agropecuária - EMBRAPA e de outros Institutos Federais, que também oferecem o curso Técnico em Agropeuária, foi possível montar um conjunto de situações problemas presentes na agropecuária e que podem ser resolvidas com o auxilio da matemática. A seguir apresetamos alguns desses problemas e relatamos resultados parciais da aplicação em sala de aula.

A metodología da Resolução de Problemas na concepção de alguns autores

Existem vários significados para a palavra problema, segundo o minidicionário Gama Kury da língua portuguesa (2001, p. 633), problema é "questão matemática proposta para que se ache sua solução". O significado da palavra problema vai além disso. Sabemos que um problema pode ou não ter solução e que para um indivíduo uma situação pode ser considerada um problema enquanto para outro essa mesma situação pode ser simples de ser resolvida. Toledo e Toledo (1997) considera que dependendo do grau de envolvimento de cada um, de questões

socioculturais, da experiência e do conhecimento relacionado àquela situação, esta pode ser considerada como um problema para uma pessoa e para outra não.

Desse modo, nas salas de aulas, encontramos alunos que temem quando o professor refere-se a um exercício como problema, às vezes nem tenta resolvê-lo, pois julgam-se incapazes de conseguir resolver tais situações. Na realidade, todos têm a capacidade de resolver problemas, mas muitas vezes ainda não adquiriram as habilidades suficientes para resolvê-los. É o que diz Vila e Callejo:

> No entanto, o conceito de problema é relativo ao sujeito que tenta resolvê-lo e ao contexto específico em que é proposto. Pensamos que todos são capazes de resolver problemas, mas o que para uma pessoa é uma atividade simples, um mero exercício, para outras é um verdadeiro problema, isso devido as suas capacidades, seus conhecimentos, seu estado emocional, suas atitudes em relação à matemática e também suas crenças sobre as próprias capacidades, sobre a tarefa em si e a maneira de abordá-la. (Vila & Callejo, 2006, p. 63/64)

Ainda na sua fala, mais adiante, Vila e Callejo (2006) continuam sua colocação a respeito da resolução de problemas e enfatizam as dificuldades e os motivos encontrados pelos indivíduos que faz com que essa tarefa torne-se complexa.

> Resolver problemas é uma das atividades humanas mais complexas. Nela estão envolvidos diferentes tipos de conhecimentos, como as estratégias heurísticas que dão indicações sobre possíveis caminhos a seguir, embora seja preciso tentar selecionar adequadamente e adaptar à situação concreta, assim como processos de controle e auto-regulação, as emoções, as atitudes e crenças. É necessário, portanto, incidir em todos eles para a aprendizagem e a melhora da resolução de problemas: não há receita e cada pessoa tem seu estilo próprio relacionado com suas capacidades cognitivas e afetivas. (Vila & Callejo, 2006, p. 68).

Nesse sentido, é importante que os professores criem em suas salas de aula um ambiente agradável e motivador, onde os alunos sintam confiantes na sua capacidade de resolver problemas e que não tenham medo de apresentar novas estratégias ou soluções diferentes para o mesmo problema, ou até apresentem soluções que os conduzam ao erro. Para isso, é imprescindível que os problemas sejam interessantes e contextualizados e o mais próximo possível da realidade dos alunos. Além disso, é necessário que os professores valorizem os "caminos" utilizados pelos alunos para chegarem à solução e não apenas o resultado final. Toledo e Toledo (2007, p.84) cita que é também tarefa do professor, "mostrar as possíveis estratégias de resolução para os problemas e, ao mesmo tempo, abrir espaço para que a classe discuta os vários métodos encontrados pelos próprios alunos".

Santos (2003), aborda sobre o momento em que uma questão passa a ser um problema para um indivíduo, quando afirma:

> Uma questão torna-se um problema para o aluno apenas se este necessitar, desejar ou for instigado a buscar, para ele, uma solução sua. Um problema só é problema quando o indivíduo se apropria dele e é apropriado por ele, quando deseja pensar a respeito dele, é instigado a estabelecer uma busca contínua para compreensão e solução. No problema, enfim, é preciso que o sujeito se correlacione intencionalmente com o objeto de investigação. É preciso que haja participação intelectual do sujeito, que aprende, na construção do conhecimento. É isto que significa uma participação ativa do aluno e não a simples manipulação física de objetos. (Santos, 2003, p. 40).

Se uma situação for acatada como problema para um indivíduo e ele já tenha adquirido conhecimentos suficientes para resolvê-la, ele tomará para si tal situação como um desafio e irá à busca da solução. Segundo Menegat (2007, p.24) "para que uma determina situação seja considerada um problema, deverá implicar em um processo de reflexão, de tomada de decisões quanto ao caminho a ser utilizado para sua resolução."

No entanto, fica a questão: Então, o que é problema? Vila (2006) tenta responder essa pregunta do seguinte modo:

> Reservaremos, pois, o termo problema para designar uma situação, proposta com a finalidade educativa, que propõe uma questão matemática cujo método de solução não é imediatamente acessível ao aluno/resolvedor ou ao grupo de alunos que tenta resolvê-la, porque não dispõe de um algoritmo que relaciona os dados e a incógnita ou de um processo que identifique automaticamente os dados com a conclusão e, portanto, deverá buscar, investigar, estabelecer relações e envolver suas emoções para enfrentar um situação nova. (Vila, 2006, p. 29).

Já Onuchic e Allevado (2004) afirmam que "problema é tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em fazer" (p. 221). Enquanto, Dante (2007) define problema, de maneira geral, como situações que exija o pensar do indivíduo no momento de solucioná-la, já o problema matemático, para ele, "é qualquer situação que exija uma maneira matemática de pensar e necessita de conhecimentos matemáticos para solucioná-la" (p.10).

Ainda segundo Dante (2007), existe vários tipos de problemas como:

1) Exercícios de reconhecimento – que tem por objetivo fazer com que os alunos identifiquem ou lembre um conceito.
2) Problemas-padrão – sua resolução não exige qualquer estratégia e envolve a aplicação direta de algoritmos anteriormente aprendidos, tem por objetivo recordar e fixar fatos básicos através dos algoritmos das quatro operações.
3) Problemas-processo ou heurístico – são problemas que não podem ser traduzidos diretamente para a linguagem matemática, eles exigem dos alunos tempo para pensar em um plano de ação.
4) Problemas de aplicação – eles retratam situações reais do dia a dia que podem ser matematizadas através de técnicas e procedimentos e em geral envolvem pesquisa e levantamento de dados.
5) Problemas de quebra-cabeça – são problemas desafiadores, sua solução, quase sempre depende da sorte ou da facilidade em perceber um *truque*.

Enquanto que Toledo e Toledo (2007) classificam de forma diferente de Dante (2007) os tipos de problemas que podem aparecer na sala de aula, com:

1) Arme e efetue – problemas desse tipo constituem simples treino de técnicas operatórias e em geral não estimula o aluno a se empenhar na busca da solução, por isso nem pode ser classificado como problema;
2) Problemas de enredo – são problemas tradicionais que envolvem operações que estão sendo estudadas no momento;

3) Problemas não convencionais – o processo de resolução envolve a coordenação de experiências anteriores e intuição. Esse tipo de problemas desenvolve nos alunos a capacidade de planejar, elaborar estratégias para a compreensão, tentar soluções e avaliar o raciocínio desenvolvido e resultados encontrados.
4) Problemas de aplicação - são problemas elaborados a partir de situações de vivencia dos alunos, eles envolvem obrigatoriamente a integração de disciplinas, tão enfatizada e tão pouco praticada.

Pereira et al. (2002), acredita que ao trabalhar bons problemas a matemática torna-se mais interessante. Assim, ela divide os problemas matemáticos para o ensino da matemática em quatro tipos:

1) Problemas de sondagem: é utilizada na introdução de um conceito recente;
2) Problemas de aprendizagem: serve para reforçar e acompadrar o aluno com um conceito que ele acaba de estudar;
3) Problemas de análise: é utilizado para a descoberta de novos resultados derivados de conceitos aprendidos anteriormente.
4) Problemas de revisão e aprofundamento: é utilizado para revisar os assuntos já estudados e aprofundar conceitos.

Assim, com base nessas considerações vimos na resolução de problemas a metodología ideal para permitir uma maior aproximação das disciplinas técnicas e o ensino de matemática

O desenvolvimento do trabalho em sala de aula

No desenvolvimento da pesquisa, em especial no momento da aplicação das situações problemas, adotamos a postura de pesquisadores e orientadores das tarefas dos alunos. Dante (2007) diz que o professor deve funcionar como incentivador e moderador das ideias geradas pelos próprios alunos. Polya (2006) referesse ao assunto e fala que a melhor coisa que pode um professor fazer por seu aluno é propiciar-lhe, discretamente, uma ideia luminosa, as indagações e sugestões que passamos a discutir tendem a provocar tal ideia.

Assim, para a realização da pesquisa, os recursos metodológicos utilizados para a constituição dos dados e, posterior, apresentação dos resultados foram observações com anotações (diários de bordo), questionário respondido pelos alunos e um conjunto de oito (08) situações problemas propostas e respondidas pelo grupo pesquisado. Foram propostos problemas adaptados nas diversas disciplinas técnicas. A turma participante da pesquisa foi dividida em grupos de 04 a 05 componentes. Sendo assim, os dados apresentados na sequencia dessa CC refere-se a uma pequeña parte domontante dos dados analisados e distutidos frente a teoría que vimos tratando anteriormente.

Discussão de um dos problemas trabalhados em Sala de Aula

Após análise da ementa da disciplina Introdução a Zootecnia e observações feitas nos cadernos dos alunos, não foram possíveis identificar a aplicação direta da matemática nessa disciplina. Assim, tendo em vista a Base Tecnológica - Importância Socioeconômica da Zootecnia - buscamos informações sobre essa importância e identificamos a produção de algumas espécies animais no Brasil e seu valor econômico. Com base nisso elaboramos um

problema voltado para essa disciplina e que contemplasse um conteúdo matemático já trabalhado em sala de aula.

Assim, como já havíamos estudado função exponencial, aproveitamos esse momento para explorar questões que envolva lei de formação da função exponencial. Desse modo, elaboramos a LISTA 02, nela estão presentes problemas escolares típicos, que segundo Vila e Callejo (2006), são problemas que requerem a aplicação de conhecimentos que foram apresentados anteriormente. Conforme a seguir:

Quadro 1.
Problema proposto na Lista-02

PROBLEMA 01: Segundo dados do USDA - Departamento de Agricultura dos Estados Unidos, o rebanho mundial de suínos estimado em 2012 foi de 797,6 milhões de cabeças, representando uma redução de 0,4% em relação ao rebanho de 2011.

Suinocultura - Análise da Conjuntura Agropecuária, SEAB – Secretaria de Estado da Agricultura e do Abastecimento, DERAL - Departamento de Economia Rural**,** fevereiro de 2013.

Suponha que essa redução seja mantida nos próximos anos. Faça uma tabela para representar o rebanho mundial dos suínos estimados em 2013, 2014 e 2015. Em seguida determine a lei da função que representa o rebanho mundial (y) daqui a x anos após 2012.

As análises feitas nesse problema envolveram todos os grupos concomitantemente. Veja alguns questionamentos levantados pelos alunos:

Alunos A[1]: *Para achar o rebanho mundial dos suínos no ano de 2013 devemos fazer 797,6 – 0,4%?*

Percebemos no questionamento do aluno que ele resolve questões de porcentagem utilizando a calculadora e sem o uso da calculadora não pode ser feita a mesma operação. Assim, fizemos o seguinte questionamento:

- *Assim você utilizará à calculadora não é? Veja qual o resultado dessa operação utilizando apenas a lousa e o pincel.*

A nossa resolução feita na lousa, possibilitou aos alunos perceberem que o procedimento adotado pelo aluno-A só estava correto quando feito na calculadora. E que nem sempre as operações realizadas na calculadora tem a mesma resposta quando resolvidas no papel ou mentalmente.

Então outro aluno indica o seguinte caminho para resolver o problema:

Aluno B: *A cada ano que passa diminui 0,4% então temos que em 2013 diminuiu 0,4%, em 2014 diminui 0,8% e em 2015 diminui 1,2%. É isso?*

Diante do questionamento do aluno fizemos nova interpelação:

- *Atenção! O problema diz que essa redução deve ser mantida nos próximos anos, isso é, ocorre uma redução de 0,4% em relação a cada ano anterior.*

Então outro aluno faz a seguinte colocação:

Aluno C: *Ah professora, esse problema envolve função exponencial, são parecidos com aqueles que fizemos na aula anterior.*

[1] Notação utilizada para identificar as perguntas dos alunos, independente do grupo em estavam.

E ai respondemos: - *Isso mesmo.*

Depois desses diálogos ocorreram as seguintes resoluções:

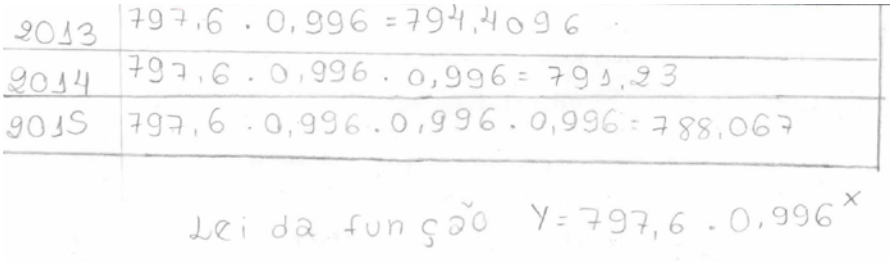


Figura 1. Resolução do problema 01da lista 02 - Grupo 01

Foi possível notar que o grupo 01 entendeu corretamente o problema e utilizou estratégia já estudada anteriormente quando trabalhamos o conteúdo função exponencial. Mas porque os outros grupos não tiveram a mesma ideia, já que presenciaram as mesmas aulas? Nesse sentido, Polya (2006), diz que para conceber um plano e chegar à ideia da resolução, não é preciso apenas de conhecimentos anteriores, mas também são necessários bons hábitos mentais e concentração no objeto. Diante disso, constatamos que nem todos os alunos conseguem recordar conceitos já estudados e, ainda, aplicá-los em situações-problema, outros não se concentram no momento das resoluções e não conseguem traçar um caminho para resolver o problema.

Vejamos a resolução de outro grupo:

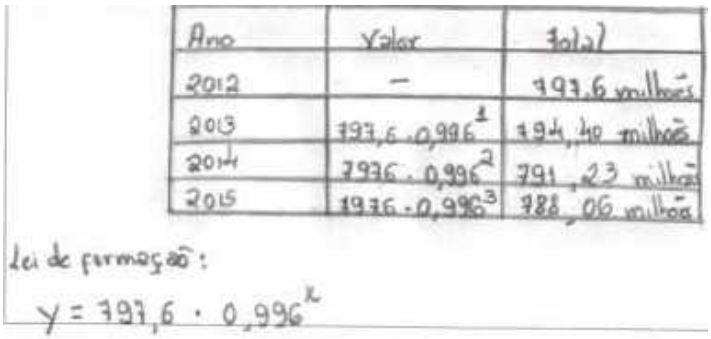


Figura 2. Resolução do problema 01da lista 02 - Grupo 02

O grupo 02 utilizou o mesmo procedimento do grupo 01, porem eles recordaram todos os passos que já havíamos estudado em aulas anteriores, e colocaram a multiplicação em forma de potenciação. Assim conseguiram visualizar a lei de formação.

Já o grupo 03, resolveu o problema da seguinte forma:

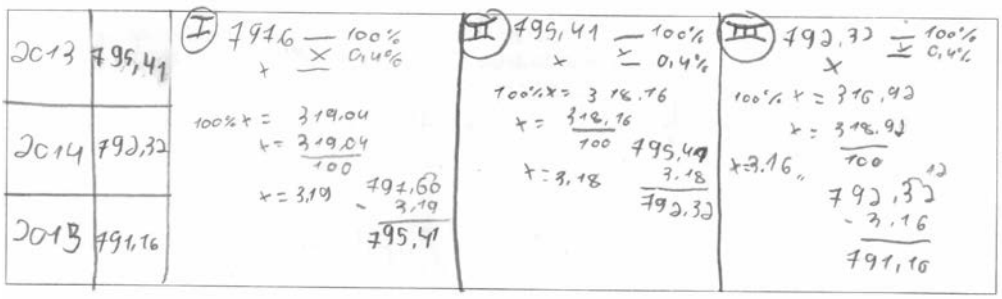


Figura 3. Resolução do problema 01da lista 02 - Grupo 03

É possível identificar que o grupo 03, utilizou uma estratégia diferente da do grupo 01, mas não acertaram o problema, pois, ao subtrair 3,19 de 797,60 encontraram 795,41 e correto seria 794,41. Com isso, os demais cálculos apresentaram uma pequena diferença. No momento em que identificamos o erro na subtração chamamos a atenção dos alunos, esclarecendo que sempre é interessante voltar ao problema e conferir os resultados. Se tivessem voltado ao problema, também identificariam que faltava encontrar a lei de formação. Nesse sentido, Polya (2006), considera que o aluno contenta-se apenas em obter a resposta, e quando encontra, deixa a questão de lado e não se assusta com os resultados, por mais estranho que eles sejam.

Vejamos a resolução do grupo 04:

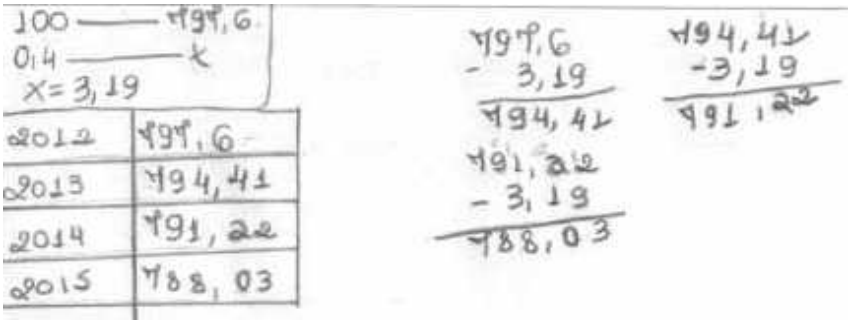


Figura 4. Resolução do problema 01da lista 02 - Grupo 04

Esse grupo calculou o rebanho mundial de suínos corretamente apenas no ano de 2013 e considerou que a diminuição de suínos de 3,19 milhões fosse constante nos demais anos. Assim, não responderam corretamente a questão. Nesse momento, reforçamos que esse problema não se tratava de juros simples e sim de juros compostos, ou seja, para o ano de 2014 a redução do número de suínos não seria mais de 3,19 milhões e sim 0,4% de 794,41. Nesse momento, ainda foi explanado qual a diferença entre juros simples e compostos e quais desses juros que geralmente são cobrados pelos bancos.

Foi possível observar que os grupos 01 e 02 tiveram facilidade para elaborar a lei de formação. Isso em função de terem feito a solução do problema utilizando as ideias já estudadas em aulas anteriores que abordou função exponencial. Polya (2006) diz que é formidável relacionarmos um problema velho com um novo, uma vez que ao fazermos isso colocamos elementos importantes do velho no novo, o que é uma ajuda no momento da resolução. Por outro lado, os grupos 03 e 04 não conseguiram identificar tal lei, resolveram o problema apenas para situações pontuais.

Portanto, analisando as respostas desses grupos percebemos que muitas vezes, ao resolver um problema, os alunos não conseguem visualizar neles conteúdos já trabalhados, ou seja, aplicar a teoria na prática. Sobre isso, segundo Smole & Diniz (2001): "enfrentar e resolver uma situação-problema não significa apenas a compreensão do que é exigido, a aplicação das técnicas ou fórmulas adequadas e a obtenção da resposta correta, mas, além disso, uma atitude de "investigação científica" em relação aquilo que está pronto". (Smole & Diniz, 2001, p. 92). Daí a importância de adotar a resolução de problemas como uma metodologia contínua.

Breves Conclusões

Ao resolver um problema, o educando, além de aplicar as "técnicas de resolução" adquiridas durante as aulas ou em sua vida cotidiana, eles também mobilizam saberes que lhes

propiciará resolver situações novas que podem aparecer no seu dia a dia. Segundo Dante (2007) é necessário formar cidadãos matematicamente alfabetizados, que saibam como resolver, de modo inteligente, seus problemas de comércio, economia, medicina, previsão do tempo e outros da vida diária. Sobretudo a resolução de problemas é uma estratégia eficiente e fundamental para o ensino da matemática e requer muita dedicação do professor, que necessita de trazer problemas interessantes que motivam os alunos.

Ao resolver vários problemas das práticas agrícolas estamos utilizando conceitos e conteúdos matemáticos, desde os mais básicos, como razão, proporção e regra de três, até os mais complexos, envolvendo logaritmos. Assim, trabalhar resolução de problemas voltados para área agrícula é um fator que motiva os alunos, já que eles estão inseridos em um curso Técnico em Agropecuária e, provavelmente, serão futuros profissionais dessa área.

Referencias bibliográficas

Dante, L R. (2007). Didática da Resolução de problemas de matemática. Ática, 1ª a 5ª série, São Paulo, Brasil.

Menegart, T. M. C. (2007).Textos de divulgação científica como solução de problemas visando a aprendizagem significativa dos conceitos de eletricidade no Ensino Médio. 77f. Dissertação de Mestrado – Centro Universitário Franciscano, Santa Maria, 2007.

Onuchic, L. R; Allevato, N. S. G. (2004). Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: Bicudo M. A. V. ; Borba, M. C. (Orgs). Educação Matemática pesquisa e movimento. São Paulo: Cortez.

Polya, George. (2006). *A arte de resolver problemas*. Interciência, Rio de Janeiro, Brasil.

Ramos, Marise 2005). Possibilidades e Desafios na Organização do Currículo Integrado. In: In: Ramos, Marise N. (Org.); Frigotto, Gaudêncio (Org.); Ciavatta, Maria (Org.) Ensino Médio Integrado: Concepção e Contradições. 1. ed. Cortez São Paulo, Brasil.

Santos, F. A. (2003). Práxis docente nas aulas de matemática: Reflexões de uma Supervisora – Itinerant**e.** 135f. Dissertação de Mestrado – Universidade de Uberaba, Uberaba.

Smole, K. S; Diniz, M. I.(2001). Ler, escrever e resolver problemas: hbilidades básicas para aprender matemática. ARTMED. Porto Alegre, Brasil.

Toledo, M.; Toledo M. (1997) *Didática de matemática: como dois e dois: a construção da matemática.* São Paulo: FTD.

Vila, A.; Callejo, M. L. (2006). *Matemática para aprender a pensar: O papel das crenças na resolução de problemas***;** tradução Ernani Rosa. Porto Alegre- Artmed, 2006.

Polya, G. (2006). *A arte de resolver problemas*. Interciência, Rio de Janeiro, Brasil.

Alumnos tutores en la Resolución de Problemas

M. Guadalupe **Leal** Zamorano
Unidad de Servicios de Educación Básica en el Estado de Querétaro
México
gpeleal07@hotmail.com
Guianelli de Jesús **Olivas** Arias
Unidad de Servicios de Educación Básica en el Estado de Querétaro
México
guianelli1982@gmail.com

Resumen

Esta investigación tiene como propósito identificar las principales orientaciones para *formar alumnos tutores en la resolución de problemas matemáticos*. Se implementó en la escuela secundaria general "Las Américas", en Querétaro, México, con una muestra de diez alumnos tutores de segundo grado, de los cuales se estudiaron tres casos. El objeto de estudio se inscribe en la estrategia "Retos matemáticos", que se desarrolló en cuatro momentos: publicación semanal del reto, sesión de tutoría, recepción de los retos resueltos y publicación de las soluciones creativas; siendo la sesión de tutoría el espacio ideal para la formación de alumnos tutores. Se utilizó el estudio de casos y se desarrolló un proceso analítico inductivo, en el que se concluyó que la formación de alumnos tutores es un recurso educativo económico, de fácil acceso y con un potencial incalculable en la resolución de problemas matemáticos.

Palabras clave: Tutoría entre iguales, Solución de problemas, Enseñanza de las matemáticas.

Tema objeto de estudio

En la educación secundaria, último nivel de la Educación básica del Sistema Educativo Nacional Mexicano y con fundamento en el Plan de estudios vigente se implementó, en el segundo semestre del ciclo escolar 2013-2014, el proyecto "Alumnos tutores en la resolución de problemas", para dar respuesta a la pregunta: ¿Cuáles son las principales orientaciones para formar a los alumnos de segundo grado, destacados en la Olimpiada de Matemáticas, como alumnos tutores en la resolución de problemas matemáticos?, por lo que se planteó el siguiente objetivo: identificar las principales orientaciones para la formación de alumnos tutores en la resolución de problemas matemáticos mediante el análisis del proceso de tutoría entre iguales. Una vez señalado el rumbo de la investigación surgió la necesidad de crear las condiciones propicias para impulsar la tutoría entre iguales, y es así como se puso en marcha la estrategia "Retos Matemáticos" en cuatro principales momentos: publicación semanal del reto (problema matemático), sesión de tutoría, recepción de los retos resueltos y publicación de las soluciones creativas.

El presente estudio se desarrolló en la escuela secundaria general "Las Américas", ubicada en la ciudad de Querétaro, México. La escuela está integrada por 36 grupos, 18 en cada turno, de 43 alumnos en promedio. La muestra se conformó por 10 alumnos de segundo grado para

desempeñar el rol de tutor, seleccionados bajo los siguientes criterios: alumnos destacados en la resolución de problemas matemáticos, con base en los resultados obtenidos en la olimpiada de matemáticas a nivel zona escolar del ciclo 2012-2013; disposición para trabajar en el proyecto, tomando en cuenta el antecedente de haber sido entrenados en horario extra clase durante dos meses, para preparar su participación hacia la etapa estatal de la olimpiada de matemáticas en la que se desempeñaron de manera sobresaliente; e interés por implicarse en un proyecto de colaboración. Por su lado los tutorados fueron alumnos de la escuela que participaron voluntariamente en la estrategia Retos Matemáticos, no importando el grado ni el turno al que pertenecen.

Antecedentes y fundamentación teórica

Teniendo en cuenta que la tutoría entre iguales es una estrategia educativa propicia para la construcción compartida de los aprendizajes entre alumnos, para analizar el objeto de investigación "formación de alumnos tutores en la resolución de problemas"*,* se considera la *participación activa en su propio aprendizaje,* encaminada a la formación de tutores mediante la búsqueda conjunta de estrategias y la organización de lo que el tutorado demanda; *la ayuda entre iguales* que se presenta en espacios abiertos con la participación voluntaria, en los que se genera una relación asimétrica entre tutor y tutorado potenciando la zona de desarrollo próximo; y lo*s vínculos interpersonales* entre los que destacan la escucha atenta, la empatía y la confianza en sí mismo. Por otro lado se retoma el concepto de *problema matemático,* sus elementos y en el proceso de resolución los *componentes cognitivos en los alumnos tutores,* es decir, los recursos que son los conocimientos previos, las heurísticas entendidas como las estrategias de resolución, el control que implica el monitoreo del proceso y el sistema de creencias del alumno tutor que influye en la forma de cómo resuelve el problema.

Participación activa en su propio aprendizaje

En base a que la ayuda entre iguales es un potente recurso educativo resulta conveniente orientar el trabajo de tutoría para *formar alumnos tutores*, por lo que los alumnos seleccionados son entrenados en la resolución de problemas durante la fase previa a la sesión de tutoría, propiciando de esta manera la *búsqueda conjunta de estrategias* en la resolución anticipada del reto matemático, para luego *organizar lo que el tutorado demanda* al inferir las dudas que pueden presentar los alumnos tutorados al solicitar la ayuda de los tutores. Al respecto Mosca y Santiviago (2012) establecen que la búsqueda conjunta de estrategias posibilita la construcción compartida de conocimientos y que el tutor aprende en el esfuerzo de compartir y de organizar lo que el tutorado demanda. Por su parte Valdebenito y Durán (2013) afirman que la preparación previa de los tutores facilita la construcción de aprendizajes de los tutorados.

En cuanto a los procesos formativos para el desempeño del rol tutor, Mosca y Santiviago (2012) consideran también que es importante sensibilizar a los involucrados porque en el trabajo de tutoría juega un papel decisivo la capacidad mediadora de los estudiantes entre sí, ya que al ofrecer ayuda el tutor genera determinados mecanismos, como nuevas y diferentes formas de explicar las estrategias de resolución, incidiendo en forma positiva en su propia formación porque "enseñar es una de las mejores formas de aprender"(Mosca y Santiviago, 2012. p 31).

La ayuda entre iguales

Generalmente se presenta con la formación de parejas de alumnos, haciendo uso de *espacios abiertos* con la *participación voluntaria* y se manifiesta a partir de una *relación*

asimétrica que impacta en la *zona de desarrollo próximo*. Retomamos la idea de Mosca y Santiviago (2012) para considerar la instalación de espacios abiertos de tutoría fuera del aula y en extra horario, con la participación voluntaria de tutores y tutorados. Para llevar a cabo este proyecto, el tutor es seleccionado porque manifiesta interés en la resolución de problemas matemáticos y el alumno tutorado participa voluntariamente en esta actividad, para la cual se ha diseñado la estrategia "retos matemáticos" en un espacio abierto a la comunidad escolar, regulada por sesiones de tutoría y publicaciones de las soluciones creativas.

Valdebenito y Durán (2013) dicen que la tutoría entre iguales se fundamenta en la creación de parejas que asumen una relación asimétrica, derivada de la adopción de un rol tutor o de tutorado que trabajan por un objetivo común, conocido y compartido, para este caso la resolución correcta del reto matemático. El rol del tutor se caracteriza por el conocimiento anticipado de los procesos y resultados del reto y el rol del tutorado deviene del desconocimiento parcial o total del proceso de resolución. En cuanto a la Zona de Desarrollo Próximo Valdebenito y Durán (2013) confirman que el tutorado aprende gracias a la mediación del compañero tutor y a la ayuda personalizada que le permite el avance desde su nivel de desarrollo real al nivel de desarrollo potencial, así la zona de desarrollo próximo de acuerdo a Vygotsky (1979) no es otra cosa que la distancia entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz, en este caso del alumno tutor.

Vínculos interpersonales

La relación tutora promueve vínculos entre las personas como son: *escucha atenta, empatía y confianza en sí mismo*, entre otros; Mosca y Santiviago (2012) sugieren que es elemental que en el vínculo entre el tutor y tutorado se internalicen representaciones y valores favoreciendo el interés por el aprendizaje, la asunción de compromisos y la confianza en sí mismo, sin olvidar que esta construcción es gradual y para conformar la diada tutor-tutorado tiene que haber un sujeto con deseo de ayudar a otro con la visión de ser ayudado; por lo que la estrategia de retos matemáticos muestra al alumno tutor la posibilidad de verse capaz de ofrecer ayuda a sus iguales durante la relación tutora y al alumno tutorado la oportunidad de recibir apoyo de un compañero.

Por consiguiente la ayuda entre iguales fomenta una serie de procesos motivacionales y relacionales que inciden positivamente en el aprendizaje de los alumnos. De acuerdo con Moliner (2010) los tutores tienen que enseñar, ayudar a los compañeros y compañeras, tener paciencia si el tutorado no sabe algo, ser agradables y estar pendientes; en primer lugar el tutor pregunta al tutorado o tutorada ¿cuál ha sido su avance para resolver el reto matemático?, con la intención de entablar un diálogo, en seguida escucha muy atento para poder ofrecer las ayudas requeridas por el tutorado y cuando ambos se sienten escuchados fluye la conversación y surge la empatía, generando un clima de mayor confianza dada la proximidad que se crea entre tutor y tutorado.

Problemas matemáticos

Uno de los temas principales de investigación para la Educación Matemática es la Resolución de problemas por ser un excelente recurso para el aprendizaje de las matemáticas, por tal motivo en el campo de la Educación Básica del Sistema Educativo Nacional Mexicano, los planes de estudio y los programas de matemáticas de la educación secundaria han adoptado a

la resolución de problemas como eje central a partir de 1993 y actualmente el programa de matemáticas enfatiza que los alumnos han de encontrar diferentes formas de resolver problemas y formular argumentos que validen los resultados. Para efectos del presente estudio "Se denomina problema a toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo. La vía para pasar de la situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida tiene que ser desconocida y la persona debe querer hacer la transformación". (Campistrous, L y Rizo, C. 1996; p. IX y X).

Componentes cognitivos en los alumnos tutores

Schoenfeld (en Barrantes, 2006) propone cuatro componentes cognitivos que intervienen en el proceso de la resolución de problemas matemáticos: Los Recursos, las Heurísticas, el Control y el Sistema de creencias. Los recursos son los conocimientos previos que posee el alumno tutor, pueden ser conceptos, fórmulas, algoritmos y cualquier noción relacionada con el reto a resolver.

Las Heurísticas son las técnicas y estrategias que se diseñan para resolver el problema, el conocimiento de algunas de ellas en muchas de las ocasiones facilitan la resolución, sin embargo como cada tipo de problema necesita el uso de heurísticas específicas no se recomienda dedicar mucho tiempo al aprendizaje de éstas, más bien a la búsqueda conjunta de estrategias para que durante el proceso de resolución de problemas se generen las condiciones para encontrar diversas formas de llegar al resultado, de esta manera se fortalece paulatinamente la adquisición de estas técnicas. Algunas heurísticas generales son: hacer un dibujo, confeccionar una tabla, buscar problemas relacionados, ensayo y error, establecer metas intermedias y trabajar hacia atrás.

Por su parte el control incluye planificar, estimar y tomar decisiones; se refiere a cómo el alumno tutor controla su trabajo, si comprende el problema, si propone más de una heurística, si es capaz de cambiar de estrategia al darse cuenta que la primera no le funciona. Las acciones que involucra el control son: tener claridad acerca de lo que trata un problema antes de iniciar su resolución, considerar varias formas posibles de solución para seleccionar una específica, esto es, hacer un diseño; monitorear el proceso, decidir cuándo abandonar un camino no exitoso para elegir uno nuevo, y revisar el procedimiento de resolución. El cuarto componente se refiere al sistema de creencias que incide en la forma en que los alumnos abordan la resolución de los problemas, en este estudio se retoman dos de las creencias más comunes: los problemas matemáticos tienen una y sólo una respuesta correcta y la matemática es una actividad solitaria, realizada por individuos en aislamiento, mismas que se revocan al implementar en el proyecto la búsqueda conjunta de estrategias en la resolución de los retos matemáticos.

Diseño y metodología

El presente estudio es de corte cualitativo y la metodología para abordar el objeto de investigación se desarrolló a partir del estudio de casos con el uso del método inductivo. Se tomaron tres casos (Alma, Gil y Daniel) que cumplieron con estas características: fáciles de abordar por ser participantes disponibles a colaborar en el proyecto, su asistencia en las sesiones de tutoría fue constante, mostraron una actitud comprometida con el trabajo de tutoría, fueron perseverantes en la resolución de problemas y manifestaron agrado por ayudar a sus compañeros. Se triangularon las categorías teóricas, derivadas de la bibliografía revisada, la observación participante de las docentes coordinadoras del proyecto y la interpretación de los hallazgos encontrados en los registros mediante categorías empíricas.

Resultados

La presentación de los resultados de acuerdo a las categorías analíticas y empíricas responde a la pregunta de investigación: ¿Cuáles son las principales orientaciones para formar a los alumnos de segundo grado, destacados en la Olimpiada de Matemáticas, como alumnos tutores en la resolución de problemas matemáticos?, con la determinación de confirmar las teorías existentes y de conseguir nuevas aportaciones. Luego el análisis de los datos puso de manifiesto que los tres momentos de participación de los alumnos tutores favorecieron notablemente su formación, debido a que cada vez que participaron en la búsqueda conjunta de estrategias de la resolución anticipada del reto, en la relación tutora al ayudar a los alumnos tutorados en la resolución del reto y en la socialización de las experiencias vividas en la relación tutora para su retroalimentación, fueron adquiriendo elementos que les permitieron un mejor desempeño como alumnos tutores en la resolución de problemas matemáticos.

En cuanto a la *Participación activa en su propio aprendizaje,* durante el desarrollo del proyecto los alumnos tutores participaron activamente en su propio aprendizaje impulsando su formación como tutores, desde la fase previa a la sesión de tutoría en la que resolvieron el reto de la semana en una búsqueda conjunta de estrategias, en la que adquirieron las herramientas necesarias para el momento de ofrecer las ayudas en la relación tutora, luego en la organización de lo que el tutorado demanda, tomando como base las siguientes orientaciones: se establecieron los conceptos o procedimientos matemáticos que pudieran generar duda, no dar la respuesta o resultado, de preferencia que el tutorado inicie explicando su avance de resolución o si ya lo resolvió comente la forma en que lo hizo.

En los tres casos estudiados se observó que en esta primera fase los alumnos tutores adquieren una serie de recursos que les da mayor seguridad para su desempeño como tutores, por lo tanto se confirmaron las ideas de Mosca y Santiviago (2012) en cuanto a que la búsqueda conjunta de estrategias posibilita la construcción compartida de conocimientos y que el tutor aprende en el esfuerzo de compartir y organizar lo que el tutorado demanda, así como la propuesta de Valdebenito y Durán (2013) quienes establecen que la preparación previa de los tutores facilita la construcción de aprendizajes de los tutorados porque "enseñar es una de las mejores formas de aprender" (Mosca y Santiviago, 2012. p 31).

En relación a *la ayuda entre iguales* se puede decir que, al instalar un espacio abierto fuera del aula y en horario extra clase para contar con la participación voluntaria de los alumnos tutorados, se requirió promover la actividad mediante visitas a los grupos de la escuela en las que los alumnos tutores, en compañía de las docentes coordinadoras, dieron a conocer el objetivo de la resolución de los retos matemáticos y las ventajas para el tutorado al hacer uso del espacio de tutoría. Esta idea de abrir un espacio abierto para la relación tutora es planteada por Mosca y Santiviago (2012), como una de las recomendaciones producto de su estudio sobre las experiencias relacionadas con las tutorías entre iguales vividas en secundaria, bachillerato y universidad en Montevideo, la cual se retomó en este proyecto coincidiendo con ellos sobre las grandes ventajas que implica su instalación, porque el alumno contó con un apoyo académico de su misma edad que maneja el mismo código de lenguaje y la participación de los alumnos fue voluntaria, tomando en cuenta que la única motivación para los tutores fue aprender y para los tutorados ver publicadas sus soluciones en la pizarra designada para este fin.

De acuerdo a la investigación se percibe que no basta con abrir un espacio para la ayuda entre iguales sino además propiciar relaciones asimétricas, entre el tutor como experto del

proceso de resolución y el tutorado con necesidad de aprender del tutor, formando parejas con un objetivo en común que es la resolución correcta del reto matemático, teniendo en cuenta que el tutor conoce estrategias y resultados y que el tutorado asume el compromiso de participar en este proceso, por lo que se potencia la Zona de Desarrollo Próximo (ZDP) con la intervención del alumno tutor. Al respecto se detectó en los tres casos estudiados que en la atención de los tutorados se presentan cuatro situaciones distintas: cuando el tutorado asistía con el reto matemático resuelto correctamente pero deseaba conocer más estrategias, cuando tenía la resolución pero dudaba del resultado, cuando intentaba resolver el problema pero no lo finalizaba, y cuando no tenía ningún intento. En las cuatro situaciones mencionadas se pone de manifiesto que el tutorado aprende gracias a la mediación del compañero tutor y a la ayuda personalizada que le permite el avance desde su nivel de desarrollo real al nivel de desarrollo potencial (Valdebenito y Durán, 2013), dicho proceso definido por Vygotsky (1979) como Zona de Desarrollo Próximo.

En relación a *Los Vínculos interpersonales* podemos decir que se promueven durante la relación tutora mediante la escucha atenta, la empatía y la confianza en sí mismo, ya que en el transcurso de la investigación y en particular en la revisión del desempeño de los tres casos estudiados, se puso en evidencia que ser escuchado es una necesidad esencial en la relación con el otro, por ejemplo cuando un alumno acudía a la sesión de tutoría para solicitar ayuda, el tutor iniciaba el diálogo a partir de una pregunta relacionada con la resolución del reto matemático, luego el tutorado platicaba sobre sus dudas y el tutor se sentía obligado a escuchar con mucha atención para dar una explicación o proponer la búsqueda de estrategias de solución. El tutorado al sentirse escuchado atendía con agrado las sugerencias del tutor y seguía participando en la conversación, el tutor continuaba la ayuda paso a paso, favoreciendo la empatía y en consecuencia la confianza en sí mismo. Con lo anterior se reafirmó la propuesta de Moliner (2010) que dice: los tutores tienen que enseñar, ayudar a los compañeros y compañeras, tener paciencia si el tutorado no sabe algo, ser agradables y estar pendientes.

Al hacer el análisis de los vínculos interpersonales durante las sesiones de tutoría se verificó lo señalado por Mosca y Santiviago (2012) al argumentar que el vínculo entre tutor y tutorado favorece el interés por el aprendizaje, la asunción de compromisos y la confianza en sí mismo, impulsando una serie de procesos motivacionales y relacionales.

En el momento de revisar los *Componentes cognitivos en los alumnos tutores como resolutores de problemas,* se pusieron de manifiesto los cuatro componentes cognitivos que inciden en el proceso de resolución de problemas matemáticos, propuestos por Schoenfeld (en Barrantes, 2006): recursos, heurísticas, control y sistema de creencias. Este planteamiento fue considerado para analizar los procesos de resolución del reto por los alumnos tutores, logrando destacar que activaron los componentes cuando hicieron uso de sus recursos manifestados con los conocimientos previos, al identificar y comprender contenidos matemáticos relacionados con el problema. Luego cuando aplicaron heurísticas como dibujos, tablas, ensayo y error, y trabajar hacia atrás, intuyeron lo que planteaba la exigencia del problema; al organizar y presentar la información demostraron la comprensión de las condiciones del problema poniendo en juego el control. También es preciso destacar que a través de la relación tutora se provocó un cambio en el sistema de creencias al considerar que los problemas se pueden resolver en conjunto y que no siempre presentan una solución única.

Conclusiones

De los tres casos estudiados (Alma, Gil y Daniel) a lo largo de seis sesiones de tutoría, se concluyó que todos obtuvieron un gran avance en su formación como alumnos tutores, en especial Alma, al tener la oportunidad de atender tutorados en todas las sesiones, se caracterizó por lograr un excelente desempeño como alumna tutora en la resolución de problemas matemáticos. Por lo anterior y en respuesta a la pregunta guía de la presente investigación, se presentan a continuación las orientaciones para la formación de alumnos tutores en la resolución de problemas matemáticos:

Como punto de partida seleccionar alumnos sobresalientes en la resolución de problemas matemáticos a través de un diagnóstico planteado con problemas, en el cual activen sus componentes cognitivos y muestren su habilidad resolutora. Dichos alumnos tienen que contar con la disposición para ayudar a sus iguales, en este caso la tarea del docente es compartir con ellos la importancia de desempeñar el papel de tutor y su trascendencia al contribuir con el aprendizaje de sus compañeros no sólo del grupo sino del grado y de la escuela.

Una vez seleccionado el equipo de tutores se procede a entrenarlos en la resolución de problemas matemáticos, para activar y potenciar sus componentes cognitivos mediante las siguientes fases: plantearles un problema que implique un reto para ellos pero de fácil acceso desde sus recursos; resolver de manera individual el problema, diseñando y aplicando distintas estrategias; exponer la estrategia o estrategias aplicadas para resolver el problema; en equipo los tutores llegar a conclusiones con respecto a las estrategias más funcionales que conducen a resultados correctos y en caso de que los alumnos no puedan resolver el problema de manera individual, es conveniente que en conjunto puedan exponer sus dudas y diseñar una estrategia de resolución. Posteriormente se requiere atraer el interés de los alumnos de la escuela para que participen como tutorados a través de una estrategia que los motive para que se involucren en el proyecto; en la propuesta "retos matemáticos" el motor principal es la publicación de las soluciones creativas. Otro factor determinante es la difusión para dar a conocer los atributos del proyecto.

Al contar con la participación de tutores y tutorados se sugiere destinar con los alumnos tutores un momento para organizar lo que el tutorado demanda, tomando en cuenta los siguientes aspectos: aclaración de conceptos matemáticos, planteamiento de estrategias para la organización y análisis de los datos del problema y orientación hacia el planteamiento de otras estrategias de resolución. Por su parte la elección del espacio para la sesión de tutoría es determinante debido a que se requiere de un lugar adecuado porque la relación tutora implica escuchar atentamente las dudas o procedimientos, retroalimentar ideas para guiar al tutorado de la zona de desarrollo real a la zona de desarrollo potencial. Asimismo es recomendable que al finalizar la sesión de tutoría los alumnos tutores se reúnan para compartir sus experiencias en relación a las formas que les fueron útiles para aclarar dudas y sobre cómo enfrentaron y superaron las dificultades, con la finalidad de mejorar su desempeño en las próximas sesiones de tutoría.

Es importante resaltar que el impacto de la formación de alumnos tutores, a partir de la puesta en marcha del proyecto "Alumnos tutores en la resolución de problemas matemáticos", es incalculable, considerando que los momentos y espacios de resolución no se limitan a la sesión de tutoría planeada, porque muchos de los alumnos participantes resuelven el reto de manera natural con otros, entre clases en el aula, en los patios de la escuela, en el parque, en casa o en cualquier otro espacio.

Finalmente a manera de resumen y como resultado de la presente investigación se define al alumno tutor como: experto en la resolución de problemas matemáticos; participante voluntario y constante; interesado en ayudar a sus compañeros, despertando su interés y gusto por aprender; receptor de lo que el tutorado demanda a partir de la escucha atenta; generador de un clima de confianza, al guiar paso a paso al tutorado; solidario al compartir su experiencia con los otros tutores para ser retroalimentado; y facilitador de aprendizajes al trascender su labor, promoviendo la relación tutora desde el aula.

Bibliografía y referencias

Barrantes, H. (2006). Resolución de problemas. El trabajo de A. Schoenfeld. Centro de Investigaciones Matemáticas y Meta-Matemáticas, UCR Escuela de Ciencias Exactas y Naturales UNED. *Cuadernos de investigación y Formación en Educación Matemática, 1*(1). Recuperado de http://www.cimm.ucr.ac.cr/hbarrantes.

Campistrous, L., & Rizo, C. (1996). *Aprender a resolver Problemas Aritméticos*. La Habana, Cuba: Pueblo y Educación.

Moliner, L., Gambaro, M. L., & Prades, X. (2010). Aprender mientras enseñas. *Cuadernos de Pedagogía, 405*, 28-30.

Mosca, A., & Santiviago, C. (2012). *Fundamentos conceptuales de la tutoría entre iguales. La experiencia de la universidad de la República.* Montevideo: Universidad de la República.

SEP (2011). *Plan de Estudios 2011*. Educación Básica, México.

SEP (2011). Programas de estudio 2011 Guía para el maestro. Educación Básica Secundaria. Matemáticas. México.

Stake, R.E. (1999). *Investigación con estudio de casos* (2a. ed.). Madrid, España. Morata, S. L.

Valdebenito, V., & Durán, D. (2013). La tutoría entre iguales como un potente recurso de aprendizaje entre alumnos: efectos, fluidez y comprensión lectora. *Perspectiva educacional, formación de profesores*, *52*(2), Chile: Redalyc. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.09?id=333328170008

Vygotsky, L. (1979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. España: Crítica Grupo Editorial Grijalbo.

Análise da avaliação diagnóstica da estratégia de situações problemas em expressões algébricas

Jeneffer Araújo de **Assunção**
Universidade Estadual de Roraima
Brasil
jenefferassuncao@gmail.com
Adriana Regina da Rocha **Chirone**
Universidade Estadual de Roraima
Brasil
a_chirone@hotmail.com
Héctor José García **Mendoza**
Universidade Federal de Roraima
Brasil
hector.mendoza@ufrr.br
Oscar **Tintorer** Delgado
Universidade Estadual de Roraima
Brasil
tintorer@bol.com.br

Resumo

O fator singular mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já conhece, cabendo ao professor descobrir o que o aluno já sabe e desenvolver estratégias metodológicas para inserir novos conhecimento. Este trabalho tem o objetivo de verificar os conhecimentos prévios através da avaliação diagnóstica utilizando a estratégias de situações problema em matemática para a promoção da aprendizagem significativa, usando categorias relacionadas a estratégia de solução de Problemas para refletir sobre o processo de ensino aprendizagem. Conclui-se que os alunos têm os conhecimentos prévios suficientes para serem ancorados com o novo conhecimento a ser apresentado.

Palavras chave: Resolução de problemas; aprendizagem significativa; avaliação diagnóstica.

Introdução

A didática utilizada na sala de aula, geralmente é dotada de uma metodologia cuja ordem é: exposição de conteúdo, aplicação de exercícios, testes e pesquisas. As aulas são cheias de regras, fórmulas e atividades de fixação, além disso, não são relacionadas com a realidade e com o cotidiano aluno. Este modo de ensino não abre espaço para a efetiva participação aluno promovendo o interesse pela matemática e o desenvolvimento de habilidades e competências, onde muitos educadores são relutantes a novas práticas de ensino.

No âmbito nacional, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCNs (1997), quando tratam da relação saber, professor e aluno, indicam novos caminhos para fazer matemática em sala de

aula. Sendo assim se faz necessário a busca de caminhos metodológicos para o ensino dessa disciplina onde conteúdos propostos devem ser abordados por meio de tendências metodológicas da Educação Matemática que fundamentam a prática docente.

A pesquisa encontra-se fundamentada nos estudos da teoria da Aprendizagem Significativa apresentadas por Ausubel, onde segundo ele, o ser humano aprende a partir daquilo que já conhece. Considerando ainda que esta relação depende da atuação de um mediador (professor), nosso objetivo é analisar a avaliação diagnostica através da Resolução de Problemas como metodologia de ensino, fundamentada na teoria da aprendizagem significativa no conteúdo de expressões algébricas no 7º ano do Ensino Fundamental do Colégio de Aplicação da Universidade Federal de Roraima (UFRR). O problema deve ser meio e fim do trabalho docente para alcançar qualidade na aprendizagem de seus estudantes para que adquiram conhecimentos mais duradouros e com maiores possibilidades de transferi-los para novas situações.

A teoria da aprendizagem significativa

A Teoria da Aprendizagem Significativa tem sido desenvolvida por David Paul Ausubel na década de 60, esta teoria parte de uma abordagem cognitivista enfatizando o estudo do processo de assimilação, retenção e aquisição do conhecimento.

A aprendizagem cognitiva é aquela que resulta do armazenamento organizado de informações na mente do ser que aprende, e esse complexo organizado é conhecido como estrutura cognitiva (Moreira, 2011), portanto é necessário que haja uma organização na estrutura cognitiva do indivíduo, uma hierarquia de conceitos, que conhecimentos prévios mais inclusivos sejam ancorados com o novo conceito a ser apresentado.

Ausubel enfatiza a importância do conhecimento prévio, onde para ele “se quiséssemos reduzir a psicologia educacional a um único princípio diríamos: O fator singular mais importante que influencia a aprendizagem é aquilo que o aprendiz já conhece. Descubra isto e ensine-o de acordo" (Ausubel, 1980). Enfatiza-se a importância dos conhecimentos prévios dispostos na estrutura cognitiva do estudante, sendo necessário que o professor identifique tais conhecimentos, e organize suas aulas de acordo com aquilo que o ele já sabe, preocupando-se com o processo que o aprendiz utiliza para armazenar o conhecimento na sua estrutura cognitiva.

A aprendizagem significativa, é um processo pelo qual uma nova informação se relaciona, de maneira não-arbitrária e substantiva, a um aspecto relevante da estrutura cognitiva do indivíduo (Moreira, 2006), não arbitrária nos transmite ideias de interações não aleatória sem uma concordância entre os conhecimentos, ou seja, não é com qualquer conhecimento prévio que o novo conhecimento vai interagir, e sim com o mais relevante. A substantividade significa que o que é essencial na nova informação é que deve ser interiorizada pela estrutura cognitiva, não as palavras ou símbolos específicos usados para expressá-la (Moreira, 1997).

Neste aspecto, há uma interação entre o que o aluno tem de conhecimento específico mais relevantes disposto na sua estrutura cognitiva, e a nova informação a ser apresentada ao estudante, no qual Ausubel chama de subsunçor existente na estrutura cognitiva do aprendiz.

O subsunçor é uma ideia, conceito, existente na estrutura cognitiva do estudante e que serve de ancoradouro para as novas informações a serem adquirida. Essa ancoragem e interação entre o novo conhecimento e o subsunçor adequado, é que permite ao aprendiz atribuir significado à nova informação aprendida (Moreira, 2006).

Uma das condições para que ocorra a aprendizagem significativa é apresentação de material potencialmente significativo ao aprendiz, onde este material deve ser apresentado ao aprendiz de forma não arbitrária e substantiva, porém não é necessário somente que o material seja potencialmente significativo, também deve haver uma disposição do aluno em aprender, relacionando o material apresentado de maneira não arbitrária e substantiva.

A aprendizagem pode ser por recepção ou por descoberta, por recepção o aluno recebe todo o conteúdo em sua forma final através de ensino expositivo, onde este apenas internaliza o material que lhe é apresentado, incorporando-o na estrutura cognitiva para ser reproduzido em ocasiões futuras. Por descoberta o conteúdo é descoberto pelo aluno, "onde as características essenciais da aprendizagem por descoberta, seja na formação de conceitos ou na solução de problemas, é que o conteúdo a ser aprendido não é dado, mas deve ser descoberto antes que possa ser incorporado na sua estrutura cognitiva". (Ausubel, 1980).

De acordo com a teoria de Ausubel há três tipos de aprendizagem significativa: representacional, de conceitos e proposicional.

A aprendizagem representacional, ocorre quando o aluno atribui os significados de símbolos particulares (palavras), ou o que eles representam. Isto é, a identificação, do significado de símbolos com seus referentes (objetos, eventos, conceitos). (Moreira, 2011).

A aprendizagem conceitual pode ser considerada, uma aprendizagem representacional, já que conceitos podem ser representado por símbolos. Os conceitos podem ser adquiridos através da formação de conceitos que ocorre principalmente nas crianças em fase pré-escolar, onde são adquiridos pela experiência direta e formulação de hipóteses, e a assimilação de conceitos ocorre nas crianças em idade escolar e nos adultos.

A aprendizagem proposicional, refere-se ao significado de ideias em forma de proposição. "A tarefa não e aprender o significado dos conceitos e sim, o significado das ideias expressas verbalmente, por meio desses conceitos, sob forma de proposição." (Moreira, 2006).

As formas de aprendizagem também podem ser: subordinada, superordenada e combinatória. Subordinada ou aprendizagem de subsunção, ocorre quando uma nova informação interage de forma significativa com ideias específicas da estrutura cognitiva. Superordenada é quando as ideias estabelecidas, mais estáveis e menos inclusivas, se vinculam e reconhecem-se como exemplos mais específicos das novas ideias, mais inclusivas. Portanto é necessária uma organização hierárquica conceitual na estrutura cognitiva do aluno, de forma que os subsunçores possam interagir formando ideias mais gerais. Por sua vez, a aprendizagem significativa combinatória é quando as novas proposições que não geram nenhuma relação subordinada, nem superordenada, apresentam ideias relevantes particulares na estrutura cognitiva. (Ausubel, 2000). Ou seja, as ideias são relacionadas de forma não arbitraria, relevante de maneira geral a estrutura cognitiva do aluno.

Quando uma nova informação é submetida a um conceito ou proposição, sendo esta aprendida por subordinação, ocorre uma modificação. A diferenciação progressiva está relacionada com a aprendizagem subordinada, onde primeiramente as ideias mais gerais e mais inclusivas são apresentadas ao aluno, de forma específica. A reconciliação integradora, ocorre quando o novo conhecimento ao se relacionar de forma substancial e não arbitrária com os conhecimentos prévios relevantes, os desestruturam provocando uma reorganização dos conhecimentos já existentes na estrutura cognitiva do aprendiz (Moreira, 2006).

Ausubel, enfatiza a necessidade de uma organização das disciplinas no qual os conceitos estariam organizados hierarquicamente, partindo dos mais gerais e inclusivos. Do ponto de vista Ausubeliano, o desenvolvimento de conceitos ocorre da melhor forma quando os elementos mais gerais e inclusivos são introduzidos em primeiro lugar e, então, o conceito é progressivamente diferenciado, em termos de detalhes e especificidade. (Moreira, 2006).

No princípio do processo de assimilação novos significados são elaborados mediante o resultado da interação entre os novos conhecimentos e os já existentes na estrutura cognitiva. O produto desse processo interacional modifica os significados do novo conhecimento e dos subsunçores que com eles interagem. Já na assimilação obliterante subordinada o significado menos estável e mais específico de uma ideia subordinada reduz-se, ao significado mais estável, mais geral e inclusivo da ideia subordinante e relevante da estrutura cognitiva que a assimila; e o significado menos estável de uma ideia combinatória assimila-se, de igual modo, aos significados mais estáveis e menos especificamente relevante da estrutura cognitiva, á qual se relaciona.

Na aprendizagem superordenada, existe uma dissociabilidade entre a nova ideia (agora mais estável) que a ideia estabelecida (agora menos estável), as ideias estabelecias representadas pelo aluno a1, a2 e a3 são consideradas como exemplos mais específicos da nova ideia **A** e passam a associar-se a **A**. Segundo Ausubel (1980) neste novo produto interacional, **A' a', a'** não perde completamente sua identidade, uma vez que o equilíbrio da dissociação, **A' a'** $\Longleftrightarrow$**A' + a'** é estabelecido de tal forma que **a'**, dependendo das condições dominantes, tem um determinado grau de dissociação enquanto uma entidade identificável. A ideia superordenada **A** é definida por um novo conjunto de atributos essenciais que abrange as ideias subordinativas. Ao final, devem começar a assimilação obliteradora da ideia menos inclusiva.

Estratégias de Resolução de Problemas como metodologia de ensino.

De acordo com Dante (2008), a resolução de problema como metodologia de ensino, auxilia o estudante na apreensão de significados, a resolução de problema estimula estudante no desenvolvimento do raciocínio lógico, a saber enfrentar situações novas, ajuda a preparar o cidadão para vida.

Para Ausubel, tanto a resolução de problemas como a criatividade são formas de aprendizagem por descoberta, orientada por hipóteses, exigindo a transformação e reintegração do conhecimento existente, porém é receptiva, na compreensão do problema e a assimilação da solução do mesmo (Ausubel, 1980). Entretanto é necessário que o aluno tenha disponível na estrutura cognitiva, conceitos e princípios que relevantes para o problema a ser resolvido.

Segundo Ausubel (1980) as características das fases sucessivas da solução de problemas, são descritas em cinco etapas:

1º- Um estado de dúvida, perplexidade cognitiva, frustação ou consciência da dificuldade;
2º- Uma tentativa para identificar o problema, incluindo uma designação um tanto não específica dos fins procurados, das lacunas e serem preenchidas, ou alvo a ser alcançado, como definido pela situação que propões o problema;
3º- Relacionar estas proposições de colocação do problema à estrutura cognitiva, desta forma ativando ideias de fundo relevante e soluções de problemas previamente alcançadas; o que por sua vez é reorganizado sob a forma de proposições de solução de problemas ou hipóteses;

4º- Comprovação sucessiva das hipóteses e reformulação do problema, se necessário;
5º- Incorporação da solução bem sucedida na estrutura cognitiva (compreende-la) e sua posterior aplicação ao problema à mão e a outros tipos do mesmo problema.

Serão construídas categorias de análise a partir das características citadas por Ausubel e Mendoza (2009), se desenvolverá uma estratégia de resolução de problemas como metodologia de ensino, dividida entre categorias e parâmetros.

A 1ª categoria, "*compreender o problema"* está formada pelos parâmetros: ler o problema e extrair todos os elementos desconhecidos; estudar os dados e suas condições e determinar o(s) objetivo(s) do problema. Um estado de dúvida, perplexidade cognitiva, frustação ou consciência da dificuldade (está relacionada em Ler o problema e extrair os elementos desconhecidos); Uma tentativa para identificar o problema (está relacionado a determinar os dados e as condições) incluindo uma designação um tanto não específica dos fins procurados, das lacunas e serem preenchidas, ou alvo a ser alcançado (está relacionado em Determinar os objetivos do problema). Portanto a 1ª e 2ª etapa descrita por Ausubel está relacionada a categoria compreender o problema.

A 2ª categoria é "*construir o modelo matemático",* onde é necessário relacionar as proposições, variáveis e incógnitas, formular os dados e condições do problema, construir o modelo a partir das variáveis, incógnitas e condições. Relacionar estas proposições de colocação do problema à estrutura cognitiva, desta forma ativando ideias de fundo relevante [...] (relaciona-se aos parâmetros relacionar as proposições, variáveis e incógnitas, formular os dados e condições do problema, construir o modelo a partir das variáveis, incógnitas e condições). Portanto a 3ª etapa descrita por Ausubel está relacionada a categoria construir o modelo matemático.

A 3ª categoria, *"Solucionar o modelo matemático",* está formada pelos parâmetros: selecionar o(s) método(s) matemático(s) para solucionar o modelo. [...]soluções de problemas previamente alcançadas; o que por sua vez é reorganizado (transformado) sob a forma de proposições de solução de problemas ou hipóteses;(parte da 3º etapa relaciona-se ao parâmetro solucionar o modelo e a categoria solucionar o modelo matemático).

A 4ª categoria é "*interpretar a solução",* ela está formada pelos parâmetros: Interpretar o resultado obtido na solução do modelo; analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta ou não com os objetivos do problema, a possibilidade de reformular o problema e solucionar se necessário; aplicar o problema em outras situações-problema. Comprovação sucessiva das hipóteses e reformulação do problema, se necessário; (está relacionada com o parâmetro interpretar o resultado obtido na solução do modelo, analisar a partir de novos dados e condições que tenham relação direta [...]), Incorporação da solução bem sucedida na estrutura cognitiva (compreende-la) e sua posterior aplicação ao problema à mão e a outros tipos do mesmo problema. (Está relacionada com o parâmetro aplicar o problema em outras situações-problema), ambos estão relacionados a categoria interpretar a solução.

Assim as estratégias de resolução de problemas refletem a influência do tipo de problema envolvido e as condições nas quais a resolução de problema ocorre, assim como aspectos do funcionamento cognitivo do indivíduo.

Procedimentos metodológicos

A avaliação diagnóstica realizada nesta pesquisa, foi aplicada na turma do 7º ano do Colégio de Aplicação da Universidade Federal de Roraima-UFRR, onde o instrumento utilizado como avaliação na pesquisa é a prova de lápis e papel, com o intuito de buscar informações através das categorias da estratégia de solução de problemas em Matemática e o processo de assimilação da teoria da aprendizagem significativa.

Como a pesquisa está em realização, nosso objetivo é ressaltar a importância da avaliação diagnostica, sendo que a mesma foi elaborada com objetivo de verificar os conhecimentos dos alunos sobre expressões algébricas e valor numérico. Composta por quatro questões onde se pretende determinar os conhecimentos prévios dos alunos, analisando se os mesmos possuem em sua estrutura cognitiva subsunçores suficientes para apreender equações do 1º com uma variável, utilizando a resolução de problema como metodologia de ensino.

Questão 1

1- Vamos escrever as expressões algébricas que correspondem as sentenças matemáticas abaixo. Em seguida, calcule o valor numérico de cada uma delas para X = 3.

a) A soma de um número com 4.

b) O quíntuplo de um número menos 7.

Nesta questão se pretende que o aluno saiba transformar a linguagem usual em expressão algébrica e calcular o valor numérico, realizando assim da categoria 1, 2 e 3 de compreender o problema, construir o modelo matemático e solucionar o modelo matemático.

Questão 2

2- Calcule o valor numérico das expressões algébricas abaixo para X = - 2 e Y= - 3

a) X + 5Y

b) 3X – 8

Essa questão está relacionada com a 3ª categoria tendo o aluno que determinar o valor numérico das expressões algébricas, substituindo corretamente o valor das variáveis realizando em seguida as operações de multiplicação e adição com números inteiros.

Questão 3

3- Durante a campanha eleitoral uma empresa especializada em aluguel de carros de som cobra R$ 85,00 (oitenta e cinco reais) a diária mais um real e cinquenta centavos por quilômetro rodado anunciando propaganda de candidatos. Chamando de X a quantidade de quilômetros rodados para anunciar uma reunião com o candidato do partido A, podemos utilizar a expressão algébrica 1,50X + 85,00 para calcular o valor pago.

a) Quanto deve pagar um candidato que aluguel um carro de som por um dia rodando exatamente 126 km?

b) Explique com suas palavras o que significa o valor que você encontrou.

c) Considerando os dados da questão anterior. Quanto deve pagar um candidato que alugar um carro por um dia e rodar 96 km?

Nesta questão é dado informação sobre as duas primeiras categorias e o aluno deve calcular o valor numérico da expressão algébrica, realizando a 3º categoria que é solucionar o problema para responder os itens "a" e "c" e a 4º categoria de interpretar o resultado no item "b".

Questão 4

4- O jequitibá é uma árvore nativa da Mata Atlântica brasileira. Seu nome, que em tupi-guarani significa gigante da floresta, deve-se a suas grandes dimensões, podendo atingir até 45 m. O pau-brasil é outra árvore de grande altura que deu nome a nosso país. Sabendo que o pau-brasil pode atingir uma altura equivalente ao quádruplo da altura do jequitibá menos 140 m, faça o que se pede:

a) Determine os dados do problema.

b) O que queremos saber com esse problema?

c) Escreva uma expressão que represente a situação.

d) Calcule quantos metros de altura pode atingir o pau-brasil.

e) Explique com suas palavras o que significa o valor encontrado.

Nesta questão é apresentado uma situação problema e está relacionada com as quatro categorias da estratégia de resolução de problemas, sendo os itens "a" e "b" com a categoria de compreender o problema, os itens "c", "d" e "e" com a categoria de construir o modelo, solucionar o problema e interpretar a solução respectivamente.

Análise e discussão dos resultados da prova diagnóstica

Nosso objetivo é analisar a avaliação diagnóstica utilizando como metodologia a resolução de problemas e refletindo a partir da teoria de Aprendizagem Significativa de Ausubel. Portanto será utilizado para a análise um único estudante para examinarmos com mais detalhes.

Tabela 1
Análise da Questão 1.

Categoria	Análise
Construir o problema e solucionar o modelo matemático	No item a) e b) o estudante constrói a expressão algébrica, substitui corretamente o valor da variável x e realiza as operações.

Tabela 2
Análise da Questão 2.

Categoria	Análise
Construir o problema e solucionar o modelo matemático	Substitui o valor corretamente das variáveis, e realiza as operações corretamente.

Tabela 3
Análise da Questão 3.

Categoria	Análises
Construir o problema, solucionar o modelo matemático e Interpretar a solução	No item a) Substitui a variável x por 126 que corresponde aos km rodados, porem ao realizar o produto de 126 por 1,50 constrói com imprecisão o algoritmo da multiplicação com decimais, não chegando a solução. Item b) Interpreta corretamente o valor encontrado no item corresponde ao valor do aluguel do carro. Item c) o estudante compreende o problema, porém ao solucionar. Constrói com imprecisão o algoritmo da multiplicação com decimais, não chegando a solução.

Tabela 4
Análise da Questão 4.

Categoria	Análises
Compreender o problema, construir e solucionar o modelo matemático e interpretar a solução	No item a) Identifica que a altura do pau-brasil corresponde ao quadruplo do jequitibá, no entanto e compreende o problema, determina os dados, e soluciona com êxito. b) compreende o objetivo do problema; c) Constrói com precisão o modelo matemático.(a expressão algébrica). d) Soluciona corretamente o modelo encontrado o valor corresponde ao valor numérico da expressão escrita pelo estudante no item "c". e) Compreende que o valor encontrado corresponde à altura do pau-brasil.

De um universo de 25 estudantes que realizaram a prova diagnostica, foram obtidos os seguintes resultados: Na 1º questão 91% dos estudantes compreendem o problema, constroem a expressão algébrica e solucionam o modelo matemático calculando corretamente o valor numérico. Na 2ª questão 77,2% dos estudantes realizam com precisão a solução do modelo matemático correspondendo a substituir o valor da variável e calcular o valor numérico da expressão algébrica. Na 3ª questão 4,3% constrói e/ou calcula com imprecisão o algoritmo da multiplicação com números decimais, no entanto 95,4% interpreta corretamente a solução, ou seja, o valor encontrado deveria corresponder ao valor pago pelo aluguel do carro. Para finalizar apresentamos os resultados da 4ª questão onde foram analisadas as quatro categorias da estratégia de resolução de problemas, tendo como resultado 95,4% dos estudantes compreendem o problema e interpretam a solução, sendo que 95,4% constroem o modelo e 86,3% solucionam corretamente o modelo matemático.

Conclusão

A avaliação diagnóstica nos permite refletir sobre o processo de aprendizagem do aluno no qual o professor coleta informações dos conhecimentos que o aluno já possui, segundo Ausubel (1980) "o fator mais importante que influencia na aprendizagem é aquilo que o aprendiz já sabe, descubra isso e ensine-o de acordo."

Nas questões apresentadas buscou-se analisar os conhecimentos prévios dos alunos sobre expressões algébricas, utilizando como metodologia de ensino estratégias de resolução de problemas, com o intuito de verificar se os alunos possuem subsunçores suficientes que possa servir de ancora para o novo conhecimento a ser apresentado, que será equações de primeiro grau

com as seguintes hipóteses para aquisição do significado da ideia nova têm-se 1ª: o aluno tem conhecimento prévio sobre a ideia nova a ser apresentada pelo professor(a). Essas ideias estabelecidas são mais inclusivas e mais estáveis; 2ª: o aluno não tem ainda o conhecimento prévio e o professor(a) verifica através de uma análise diagnóstica. Posteriormente prepara os organizadores antecipatórios e apresenta para os alunos.

O resultado da avaliação foi satisfatória, de acordo com as análises os alunos possuem subsunçores suficientes para ser ancorado com o novo conhecimento que lhes será apresentado, analisamos também que os alunos possuem conhecimentos específicos do assunto faz-se necessário que o professor utilize a reconciliação integradora enfatizando as diferenças e semelhanças entre os exemplos, eliminando as contradições e conflitos. Entretanto ao iniciar o conteúdo de equações do primeiro grau, iniciaremos com a diferenciação progressiva, dando ênfase às ideias mais gerais para as mais particulares e a reconciliação integradora elaborando e escolhendo situações problemas que permitam o estudante ampliar seus conhecimentos sobre o assunto estudado e aplicando os problemas em outras situações.

Referências bibliográficas

Ausubel, D. P.(2000). *Aquisição e retenção do conhecimento: uma perspectiva cognitiva.* Lisboa Tradução Lígia Teopisto. Plátano.

Ausubel, D. P.; Novak, J. D.; Hanesian, H. (1980). *Psicologia educacional***:** Um ponto de vista cognitivo**.** Rio de Janeiro.Tradução Eva Nick. Melhoramentos.

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental(1997). *Parâmetros curriculares nacionais:*Matemática. Brasília. Secretaria de Educação Fundamental. MEC/SEF.

Dante, L. R. (2008). *Tudo é Matemática*. São Paulo: Ática.

Mendoza, Héctor J. García (2009). *Estudio del efecto del sistema de acciones en el proceso de aprendizaje de los alumnos en la actividad de situaciones problemas en Matemática, en la asignatura de Álgebra Lineal, en el contexto de la Facultad Actual de la Amazonia*. Dissertação doutoral publicada, Faculdade de Humanidade e Ciência na Educação, Universidade de Jaén, Espanha.

Moreira, Marco A. (2006). *A Teoria da Aprendizagem Significativa e sua implementação em Sala de aula.* Brasília: UNB.

Moreira, M. A. (1997). *Aprendizagem Significativa: um conceito subjacente*. Encuentro Internacional sobre Aprendizaje Significativo. Actas. Burgos, Espanha. Servicio de Publicaciones de la Universidad de Burgos

Moreira, Marco Antônio. (2011). *Teorias de Aprendizagem***.** (2ª ed.) São Paulo-EPU

Análisis lingüístico de errores en la solución de problemas Geometría Euclidiana

Marisol **Radillo** Enríquez
Departamento de Matemáticas, Universidad de Guadalajara
México
marisol.radillo@red.cucei.udg.mx
Vladimir **Efremov**
Departamento de Matemáticas, Universidad de Guadalajara
México
efremov@cencar.udg.mx

Resumen

Se reportan los resultados de una investigación exploratoria cualitativa cuyo objetivo consistió en identificar y clasificar los errores relacionados con los procesos de traducción entre los códigos del lenguaje matemático, en la solución de problemas de la geometría euclidiana. El estudio se llevó a cabo con estudiantes de licenciatura del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) de la Universidad de Guadalajara. La base teórica del análisis lingüístico consiste en los códigos o conjuntos de normas que rigen los diversos tipos de representación utilizados en la materia; la metodología se centra en una descripción sobria de las diferencias demostrables entre el tipo de texto que requiere la solución de cada tipo de problema y las respuestas redactadas por los estudiantes, consideradas éstas como registros lingüísticos y objetivos de su actividad cognitiva al resolver un problema.

Palabras clave: lenguaje matemático, representación, procesos de traducción, geometría, lingüística

Introducción

El interés sobre la naturaleza y las consecuencias de los errores que se presentan en el aprendizaje de las matemáticas no es reciente, pues los primeros antecedentes se remontan a principios del siglo XX, durante el auge de la Psicología Experimental (Rico, 1995). En esa época el conductismo predominaba en la enseñanza y el error era considerado como una falla o equivocación, lo cual era inaceptable en el proceso de aprendizaje de los alumnos; por lo tanto los esfuerzos didácticos se orientaron a evitar su aparición en el proceso educativo.

Sin embargo, la revisión histórica del desarrollo del conocimiento científico se encuentra plena de conocimientos que inicialmente fueron rechazados por ser considerados falsos o erróneos, ya que contradecían las teorías establecidas (Khun, 2004; Kline, 1985). Al paso del tiempo y a la luz de los nuevos descubrimientos, algunas de las antiguas teorías científicas son ahora catalogadas como errores, mientras que otras han sido ampliadas. Ante esta evidencia se puede concluir que el error es una realidad y una posibilidad permanente en el desarrollo del conocimiento científico, el cual a su vez es presentado de manera sistematizada en el aprendizaje escolar.

En consideración al desarrollo del conocimiento científico, para los teóricos constructivistas del aprendizaje, los errores no son solo equivocaciones, como se consideraba desde los inicios de la pedagogía empírica, sino "oportunidades de aprendizaje"; los errores no necesariamente revelan un error o deficiencia en al aprendizaje, pues existen evidencias de situaciones en las cuales se aplican conocimientos correctos pero inadecuados para la situación por resolver (Brousseau, 2001; Astolfi, 2003). Bajo esta premisa se recomienda a los profesores diseñar situaciones que partan de los errores detectados para propiciar nuevo aprendizaje, en lugar de tratar de erradicarlos y surgió el interés por la investigación científica de errores.

Al analizar las publicaciones existentes sobre el estudio de errores en la Didáctica de las Matemáticas, Rico y Castro (1994) identificaron cuatro líneas principales en la investigación de los errores en aprendizaje escolar: (1) análisis de errores, causas que los producen o elementos que los explican, y taxonomías o clasificaciones de los errores detectados; (2) tratamiento curricular de los errores en el aprendizaje de las Matemáticas; (3) planes de formación de profesores, dedicados a la observación, análisis, interpretación y tratamiento de los errores; (4) trabajos de carácter técnico que implementan y sostienen una determinada clase de análisis sobre errores, con un tratamiento estadístico.

El trabajo que se reporta pertenece a la primera línea de investigación, ya que su objetivo consistió en identificar cuáles son los errores relacionados con el dominio del lenguaje matemático que enfrentan los estudiantes de Geometría Euclidiana del Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías (CUCEI) de la Universidad de Guadalajara, México, y cuál es su influencia en la solución de problemas de esta disciplina matemática.

En la primera parte de este trabajo se presentan la discusión teórica acerca del lenguaje matemático y la conformación de los códigos verbal, simbólico y gráfico. A continuación se da cuenta de la metodología del análisis lingüístico y en la tercera parte se reportan algunas respuestas de los estudiantes, los resultados de su análisis lingüístico y una clasificación tentativa de los errores detectados. Finalmente se presentan las conclusiones y se plantean algunas reflexiones para futuros trabajos relacionados.

Lenguajes especializados

La base teórica de la presente investigación proviene de la Lingüística Aplicada, en la cual se considera que un *lenguaje especializado* está conformado por mucho más que un simple listado de términos técnicos (léxico) creados *ex profeso* para referirse a la temática específica de un campo del conocimiento humano, pues se tienen recursos léxicos, sintácticos, morfológicos y textuales especiales para comunicarse adecuadamente en un contexto profesional determinado (Cabre, s/f). Tal es el caso del *lenguaje especializado de las matemáticas* o *lenguaje matemático*, el cual tiene además el propósito de caracterizar los hechos y las reglas de razonamiento con precisión, así como las relaciones y conexiones entre los objetos matemáticos y sus propiedades.

La ventaja principal de considerar la perspectiva teórica de los lenguajes especializados consiste en que permite especificar la gramática que rige al lenguaje matemático, y en consecuencia se definen los recursos necesarios para su aprendizaje y enseñanza. Por ejemplo, los códigos que se reportan en este trabajo constituyen la base para realizar un análisis lingüístico de las producciones escritas de los estudiantes de Geometría; los resultados del análisis permitieron identificar algunas causas y consecuencias de los errores cometidos por los alumnos y, posteriormente, modificar el diseño instruccional del curso (Radillo, 2009).

Representación de las proposiciones matemáticas

El concepto de representación que se utiliza en la Didáctica de las Matemáticas se aproxima a una "señal externa que muestra y hace presente un concepto matemático, también como signo o marca con el que los sujetos piensan las matemáticas e, incluso, como aquellos esquemas o imágenes mentales con los que la mente trabaja sobre ideas matemáticas" (Rico, 2000). En la opinión de Duval (1998), "ningún objeto real" se puede considerar como un representante perfecto de los objetos matemáticos, si se tiene acceso a ellos por medio de la percepción, por lo que es necesario referirse a ellos a través de alguna de sus formas de representación; se necesitan por lo menos dos representaciones diferentes, el lenguaje natural y el lenguaje matemático, para tener una idea de dicho objeto (Duval, 1998).

Representación de las proposiciones matemáticas en la Geometría Euclidiana. Desde la Lingüística, es posible establecer que el lenguaje matemático está conformado por diversos conjuntos de normas o códigos que rigen las diversas formas de representación utilizadas: (a) *Verbal*. Descripción de un objeto o enunciado matemático expresado solo en palabras, ya sea de manera oral o escrita; (b) *Simbólica*. Descripción de uno o más objetos matemáticos, sus propiedades y/o relaciones, expresada únicamente con la notación matemática tradicional (SIM); (c) *Gráfica*. Imagen de uno o más conceptos matemáticos y las relaciones entre ellos. Suele incluir letras que asignan nombres específicos a los componentes de la figura (GRAF). El pasaje de una forma de representación a otra se denomina proceso de traducción.

La relación entre estas tres formas de representación se pone de manifiesto en diferentes tipos de problemas de la Geometría Euclidiana. Por ejemplo, el planteamiento de una demostración requiere el pasaje de una representación verbal a sus correspondientes representaciones gráfica y simbólica.

Los códigos del lenguaje matemático

Las partes de la Lingüística aplicables a los códigos del lenguaje matemático son la sintaxis, el léxico y la morfología (Leal, 2000), por lo que para llevar a cabo el análisis lingüístico de la solución a un problema, se establecieron los códigos lingüísticos para cada tipo de representación utilizada en la materia: simbólica, gráfica y verbal. Estos códigos no fueron creados con propósitos docentes, sino para contrastar las respuestas de los estudiantes con las normas estructuradas conforme a la Lógica Teórica y el desarrollo axiomático propio de la geometría euclidiana.

El código verbal. La construcción del código verbal consistió en (a) una lista de términos geométricos que constituyen el léxico de la geometría euclidiana, con las normas institucionales que se proporcionan a los estudiantes y (b) la clasificación de los sustantivos y un listado de adjetivos con los que pueden ser utilizados en la formación de proposiciones y enunciados. Por ejemplo, el adjetivo "perpendiculares" solamente se aplica al sustantivo "rectas", es decir no se utiliza con otros sustantivos como "puntos" o "círculos" puesto que constituyen un "sin sentido"; el adjetivo "circular" puede ser aplicado a sustantivos tales como "arco", "sector", "segmento", "sección", "cilindro", "cono" y "trapecio". El sustantivo "recta", en singular, admite la utilización de adjetivos diferentes (oblicua, 'perpendicular a', secante, tangente) que su expresión en plural, "rectas" (concurrentes, determinadas, distintas, oblicuas, paralelas, 'perpendiculares entre sí').

Aunque los autores de la Didáctica de las Matemáticas se refieren a las "palabras" del lenguaje matemático (Pimm, 1999; Alcalá, 2002), desde el punto de vista lingüístico es preferible referirse a *términos,* los cuales pueden estar compuestos por una o más "palabras", *v. gr*. la expresión *ángulos alternos internos* es un término formado por tres "palabras" que al aparecer juntas en ese orden tienen un significado determinado y pueden ser considerados *grosso modo* como "sintagmas nominales".

El código simbólico. Otro aspecto del lenguaje matemático que merece especial atención se relaciona con las normas o convenciones no escritas que se tienen en el ámbito escolar, las cuales debilitan el rigor del código simbólico y dan origen a polisemia o ambigüedad. Tal es el caso de escribir ***sen 2x***, en vez de ***sen (2x)***, de uso frecuente en los textos y cursos de cálculo, aunque el hecho de eliminar los paréntesis propicia que el estudiante inexperto interprete de dos maneras diferentes la expresión mencionada a saber: *sen (2)x* o bien ***sen (2x)*** (Díaz, 06). Este tipo de situaciones conflictivas se solucionan si se conoce el código o conjunto de reglas de sintaxis, semántica y morfología que se utiliza a partir de un léxico dado. Ahí estriba la importancia de definir los códigos utilizados en la Geometría Euclidiana para realizar un análisis lingüístico de los textos producidos por los estudiantes y detectar los posibles obstáculos en la solución de problemas que están relacionados con el lenguaje matemático.

Las normas establecidas para la representación simbólica en la Geometría Euclidiana se reorganizaron desde una perspectiva de Lingüística y Lógica Teórica. Se consideran las reglas aprobadas para su uso por la academia de geometría euclidiana del CUCEI. El código comienza con la definición de términos, los cuales se clasifican en constantes numéricas y variables individuales tanto en expresiones simples como en las expresiones compuestas. Se finaliza con las reglas de formación de enunciados a partir de las variables individuales. Algunas de las reglas se sintaxis de la representación simbólica en la geometría euclidiana son las siguientes:

- A, B, C, … letras latinas mayúsculas designan puntos (excepto 'R' en las expresiones de medidas angulares)
- α, β, … letras griegas representan planos o ángulos (excepto 'π' en las expresiones de medidas angulares)
- a, b, c… letras latinas minúsculas con el diacrítico superpuesto '↔' representan rectas.
- AB, CD, PQ… pares de letras latinas mayúsculas representan longitudes.
- $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{PQ}$... pares de letras latinas mayúsculas con el diacrítico superpuesto '‾' representan segmentos de recta.
- $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{PQ}$ …pares de letras latinas mayúsculas con el diacrítico superpuesto '↔' representan rectas.
- ζ ⊥ ξ es enunciado si y sólo si ζ y ξ representan segmentos, rayos, rectas o planos.
- ζ ∥ ξ∥ η es enunciado si y sólo siζ, ξ y η representan segmentos, rayos, rectas o planos.
- ζ ∩ ξ = η es un enunciado si y sólo si ζ y ξ representan segmentos, rectas, rayos o circunferencias y η representa un conjunto de puntos

La reformulación de las reglas de la notación simbólica de acuerdo a la Lingüística y a la Lógica Teórica se hizo con propósitos de investigación, ya que la lista de símbolos y su uso,

elaborada por los profesores del CUCEI se hizo como una referencia para unificar el lenguaje, pero no es adecuada para el análisis lingüístico de los textos producidos por los alumnos. Por ejemplo, las reglas para la formación de enunciados simbólicos no se explicitan en tal documento, sino que se proporcionan ejemplos que cada profesor deberá explicar en clase, pero para el análisis y clasificación de los errores detectados en el trabajo de campo es indispensable explicitar todas estas reglas.

El código gráfico. En el ámbito escolar es inusual encontrar el planteamiento de problemas que utilicen solamente el código gráfico, pues este se usa para complementar la información dada en expresiones simbólicas y/o verbales; por esta razón se detecta poco rigor en el cumplimiento de las normas de este código. Un ejemplo muy común es la marca especial de los ángulos rectos, que suele omitirse en los esquemas y se deja a la percepción visual, lo cual es completamente inaceptable en los códigos simbólico o verbal.

Otra dificultad para establecer un código gráfico es la falta de rigor en la representación de los elementos básicos, como la línea recta. En la figura 1 se aprecian tres formas de la representación gráfica de una línea recta. La característica esencial en este caso es la longitud indefinida de una recta, que suele ser representada con puntas de flecha en los extremos (inciso a), aunque no existe una convención universal al respecto; suele añadirse nombre a dos puntos sobre la recta para referirse a ella en los códigos verbal y/o simbólico. En el inciso b la recta se representa con prolongaciones punteadas, aunque dichas prolongaciones también suelen representarse en línea continua después de los puntos marcados sobre la recta.

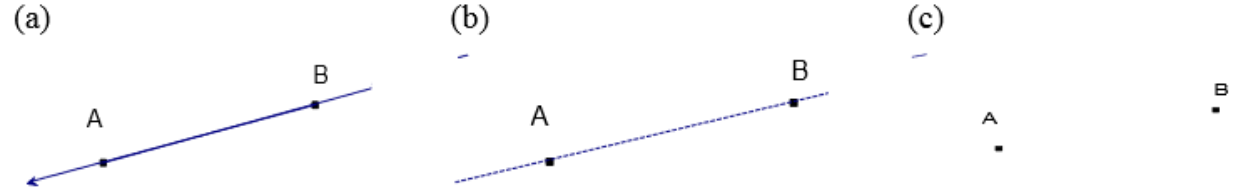


Figura 1. Tres formas equivalentes de representación gráfica de una recta.

El código gráfico se distingue del simbólico y del verbal en que no contiene oraciones en sentido estricto, ya que los trazos no son signos ordenados (n-tuplos de signos), y por ende pueden ser leídos de diversas maneras. Mientras que las oraciones de los otros dos códigos son conjuntos ordenados de signos que no pueden ordenarse de cualquier manera puesto que se altera su significado, en el código gráfico es más adecuado referirse a "combinaciones" de elementos.

Metodología

El objeto de estudio fue construido desde una perspectiva teórica que parte de la Lingüística, la Lógica Teórica y la Axiomática como disciplinas normativas, por lo que la metodología se centra en una descripción sobria de las diferencias demostrables entre el tipo de texto que se requiere en la solución de cada tipo de problema (demostración, solución numérica, traducción entre códigos) y las respuestas redactadas por los estudiantes, consideradas como registros lingüísticos y objetivos de su actividad cognitiva al resolver el problema.

Dado que las tipologías disponibles en la Didáctica de las Matemáticas son insuficientes para analizar los errores desde la Lingüística, pues sus categorías omiten los aspectos específicos relacionados con los códigos lingüísticos y los procesos de traducción entre ellos (Rico y Castro, 1994; Rico, 1997; Socas y Palarea, 1997; Brousseau, 2001; Alcalá, 2002; Astolfi, 2003; Franchi y Hernández, 2004; Pochulu, 2005;Radill Radillo, 2010), se propuso una tipología más adecuada

para distinguir entre aquellos errores relacionados con el lenguaje matemático y los relacionados con fallas en el razonamiento deductivo y/o el desarrollo axiomático propio de la Geometría Euclidiana.

Para los propósitos de esta investigación se estableció el supuesto de que los errores que cometen los estudiantes en la solución de problemas de la materia se clasifican en tres tipos, no excluyentes entre sí: (a) *De representación* de objetos y enunciados matemáticos, (b) *Deductivos*, relativos al razonamiento propio de esta disciplina, (c) *Axiomáticos o de aplicación de la teoría* (definiciones, propiedades, axiomas, teoremas, lemas, corolarios, construcciones) en el procedimiento de solución.

Esta clasificación es meramente operacional y tiene como único propósito separar los errores relacionados con el lenguaje matemático de otros errores que suelen presentarse en la solución de problemas de la materia. El objetivo del proyecto consiste en clasificar los errores relacionados con el lenguaje matemático, lo cual se llevó a cabo después del análisis lingüístico.

La base teórica se completó con una clasificación de los diferentes tipos de problema que se solucionan en los cursos de geometría euclidiana, sus posibles soluciones y las características del texto que corresponde a la solución correcta. De esta manera fue posible analizar los textos producidos por los estudiantes, detectar los errores cometidos y clasificarlos de acuerdo al factor lingüístico y a las características esenciales de la materia (errores de representación, deductivos y/o axiomáticos).

En la siguiente fase de la investigación se procedió a diseñar los instrumentos de recolección de datos, que consistieron en cuestionarios integrados tanto por problemas típicos de la materia como por planteamientos de traducción entre pares de códigos de la geometría. También se utilizaron algunas tareas y exámenes que los profesores aplicaron a sus estudiantes para evaluar su aprendizaje, sin perder de vista que el propósito de esta investigación es la detección y análisis de errores relacionados con los procesos de traducción intercódigos.

La recolección de datos se llevó a cabo en dos etapas separadas, cada una de las cuales incluyó dos cuestionarios fueron respondidos por dos grupos de estudiantes de un mismo profesor. El primer cuestionario se diseñó para detectar los errores cometidos en ejercicios de traducción entre códigos de la Geometría Euclidiana al inicio de cada curso, mientras que el segundo cuestionario tuvo como propósito identificar los errores cometidos en la solución de los diversos tipos de problemas del curso, y se aplicó en el último mes del ciclo escolar.

Dado que la población de estudio es reducida y los sujetos de la investigación no fueron seleccionados mediante un procedimiento aleatorio, las cifras que se proporcionan no pretenden ser representativas respecto al total de estudiantes de la institución en que se llevó a cabo (CUCEI), sino que constituyen una referencia para la parte exploratoria y descriptiva de la investigación.

Resultados

Sobre los resultados del análisis lingüístico fue posible identificar algunas causas y consecuencias de estos errores y establecer una tipología de errores en la solución de problemas de la geometría euclidiana, la cual consta de tres grupos de acuerdo a las características esenciales de esta materia (razonamiento deductivo y desarrollo axiomático) y al factor lingüístico (errores de representación gráfica, simbólica y verbal; errores de traducción entre los códigos correspondientes a cada forma de representación).

Errores de representación

En el análisis de las respuestas se detectaron algunos términos código verbal que condensan mucha información y cuya traducción a alguno de los otros dos códigos representa un obstáculo o dificultad para los estudiantes.

Tal es el caso de la representación simbólica del término "mediatriz de un segmento", pues es necesario expresar que existe una recta (la mediatriz) perpendicular a un segmento ($\overleftrightarrow{MN} \perp \overline{AB}$) y que lo divide en dos partes iguales ($AM = MB$). También es importante simbolizar cuál es el punto de intersección, lo cual se puede hacer de diversas maneras: $\overleftrightarrow{MN} \cap \overline{AB} = M$, ó $\overleftrightarrow{MN} \perp \overline{AB}$ en M, o con dos enunciados de pertenencia: $M \in \overleftrightarrow{MN}$, $M \in \overline{AB}$. Solamente de esta manera, las traducciones EE → SIM y SIM → EE darán el mismo resultado de traducción en ambas direcciones (figura 2).

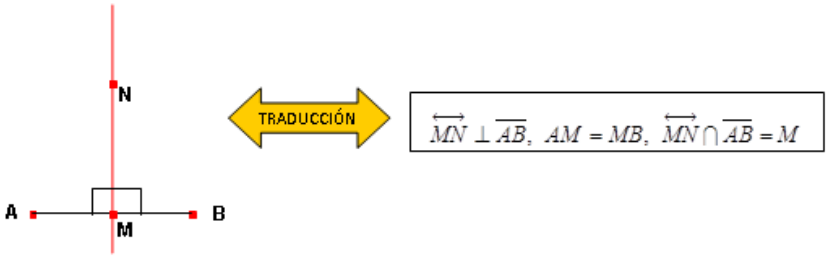


Figura 2. Al planteamiento simbólico dado corresponde la representación gráfica de la mediatriz de un segmento, y viceversa. SIM → GRAF, GRAF → SIM.

Si faltase alguna de estas tres expresiones simbólicas, su traducción a gráfica o a enunciado verbal podría ser diferente; esto significa que las funciones de mapeo entre los códigos del lenguaje matemático no siempre son unívocas, como se expone a continuación. En la notación simbólica que aparece en la figura 3 se omite que M es el punto de intersección entre la mediatriz y el segmento; por tanto hay más de un esquema que le corresponde a la traducción, puesto que en ambos casos se cumple la condición AM = MB.

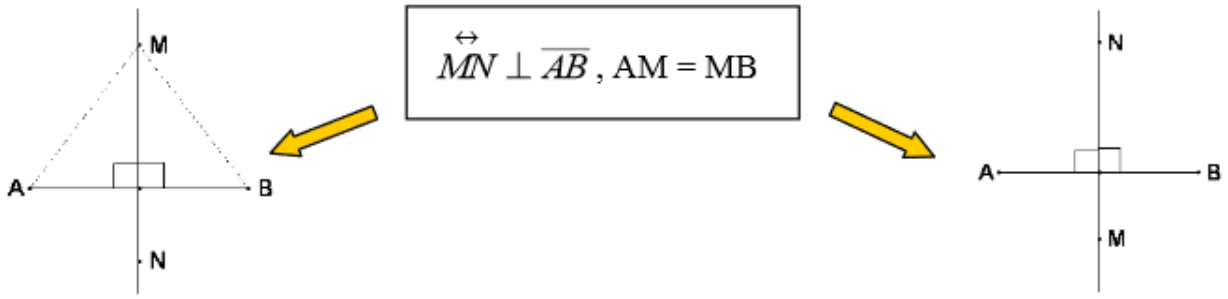


Figura 3. Dos de las posibles representaciones gráficas que corresponden a un mismo planteamiento simbólico. SIM → GRAF

Errores en solución de problemas

En la figura 4 se aprecia la respuesta de un estudiante que contiene errores de representación sin consecuencias en los otros dos tipos de error, ya que el resto de la demostración es correcta. El primer error de representación está en la hipótesis (1), pues el texto

del problema se refiere a una circunferencia (⊙) pero el estudiante utiliza el símbolo de círculo (0) lo cual se cataloga como un error de representación en la traducción EE →SIM, de acuerdo a las normas institucionales del CUCEI-U. de G.

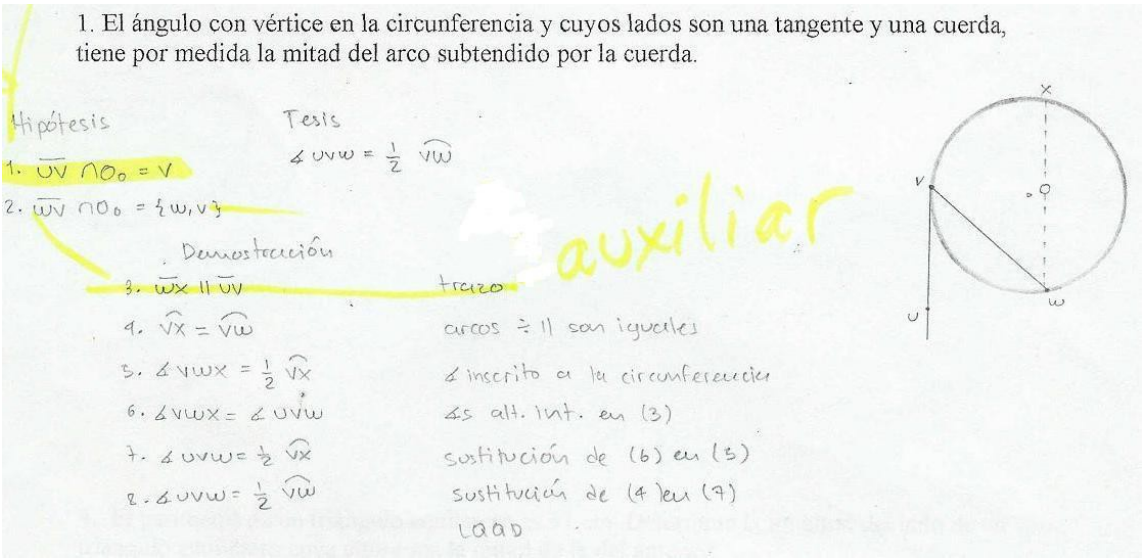


Figura 4. Errores de representación en una demostración (alumno #45).

Otro error de representación en el mismo enunciado consiste en simbolizar la tangente a la circunferencia utilizando un segmento en vez de una recta, lo cual tiene otras interpretaciones. Si se parte de la expresión simbólica utilizada por el estudiante, $\overline{UV} \cap \odot_O = V$ para la traducción SIM → GRAF, se obtendrían las siguientes representaciones gráficas que no corresponden a una tangente (figura 5).

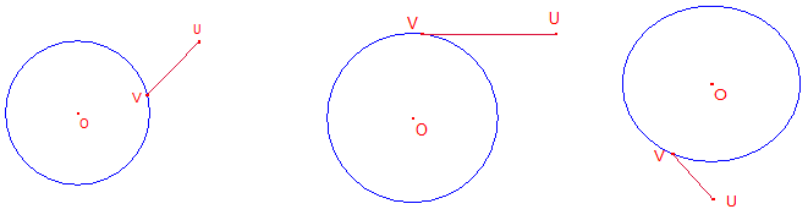


Figura 5. Representaciones gráficas correspondientes a la expresión

En otro problema planteado a los mismos estudiantes se pide demostrar que "si del vértice del ángulo recto de un triángulo rectángulo se traza una perpendicular a la hipotenusa, la perpendicular es media proporcional entre los dos segmentos de la hipotenusa". A continuación se muestran algunas respuestas de los estudiantes, su análisis lingüístico y los errores detectados.

La respuesta que se muestra en la figura 6 contiene varios tipos de error:

- Las hipótesis están incompletas, pues no se estipuló que ABC es un triángulo rectángulo; puesto que esta información es indispensable para establecer la semejanza de los triángulos formados, este error cataloga tanto de representación (traducción incompleta EE→ SIM), como de tipo deductivo.
- La tesis está mal planteada, lo cual se considera tanto un error de representación como axiomático. En cuanto a la representación, hay un error de traducción VERB → SIM, pues no se ha simbolizado una media proporcional como se especifica en el teorema; también es un error axiomático (aplicación de teoría) ya que dicha tesis no es una proporción válida

entre los triángulos que se forman en la figura, de los cuales tampoco se puede demostrar que sean semejantes porque falta una hipótesis.

- Otro error está en la justificación de la semejanza de triángulo (paso 4), por el criterio "*la*", que no existe. Este último error es de tipo axiomático y está ligado al anterior, de representación y deductivo, ya que forma parte de la cadena de proposiciones que parten de las hipótesis para demostrar la validez de la tesis.

Es de llamar la atención que el estudiante "concluye" la demostración con la tesis que planteó.

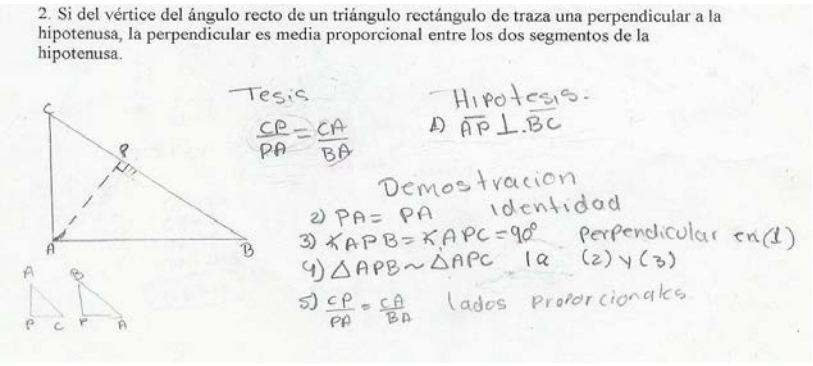


Figura 6. Errores axiomáticos y de aplicación de teoría en la demostración de un teorema (alumno #15).

Conclusiones

Si bien fue posible identificar algunas causas y consecuencias de estos errores, las limitaciones el estudio no son suficientes para hacer generalizaciones. Es necesario continuar la línea de investigación y ampliar la población de estudio.

Aun así, se estableció una tipología de errores en la solución de problemas de la geometría euclidiana, la cual consta de tres grupos de acuerdo a las características esenciales de esta materia (razonamiento deductivo y desarrollo axiomático) y al factor lingüístico (errores de representación gráfica, simbólica y verbal; errores de traducción entre los códigos correspondientes a cada forma de representación).

Aunque los errores detectados corresponden a diferentes categorías de acuerdo al análisis lingüístico, tienen en común los siguientes factores, aunque las causas que los originan pueden ser diversas:

- Al no percatarse de la estructura lógica y el desarrollo axiomático de la geometría, los estudiantes fallan en la estrategia de solución de problemas al no incorporar las definiciones pertinentes ni los teoremas previamente demostrados.
- Otro fallo importante se los estudiantes consiste en no apreciar el carácter "denso" de términos en alguno de los tres códigos, ya que al traducirlos les corresponden varios enunciados en los otros códigos. Tal es el caso de términos como "bisectriz", "mediatriz", "equidistar", "circunscrito", "inscrito", "semi-inscrito" y los sintagmas que se forman con ellos en la representación verbal, ya que les corresponden varias proposiciones en los códigos simbólico y gráfico. En el código simbólico también existen términos complejos desde el punto de vista lingüístico, ya que fue creado para condensar mucha información, y puede obtenerse mucha información de ellos. Tal es el caso de expresiones como {A,B,C,D}

- El tercer factor recurrente en los errores es la dificultad que representa para los estudiantes establecer el caso de la generalidad que involucra un enunciado matemático, lo cual repercute tanto en errores al construir la figura correspondiente como en la comprensión de los cuantificadores, los cuales no siempre están explícitos en el código verbal y suelen no incluirse en las representaciones simbólica y gráfica.

Los dos últimos factores repercuten en errores de representación, los cuales se dividen en aquellas respuestas que quebrantan las normas de algún código en particular y los errores relacionados con los procesos de traducción intercódigos.

La clasificación de los errores relacionados con los procesos de traducción intercódigos consta de los siguientes tipos:

I. Traducción de Español Especializado de la Geometría Euclidiana al Código Gráfico (EE →GRAF):

- *Ausente* (no hay figura alguna).
- *Figura incorrecta* (que no corresponde al problema).
- *Figura correcta, pero incompleta,* porque faltan elementos esenciales a la traducción, p.ej. las letras que designan los puntos sobre los que se debe razonar o el símbolo de ángulo recto entre las rectas perpendiculares.
- *Insuficiencia de generalización*, o caso particular de las condiciones expresadas en el problema, como el trazo de triángulos equiláteros o isósceles en lugar de escalenos, o dibujar rectas perpendiculares en vez de oblicuas.

II. Traducción de Español Especializado de la Geometría Euclidiana a la Notación Simbólica (EE → SIM) en los planteamientos de demostración:

- *Ausente* (no se usa notación simbólica).
- *Ausencia parcial*: (i) no se simboliza la tesis, (ii) no se simboliza una de las hipótesis, (iii) no se simboliza ninguna de las hipótesis.
- *Traducción incorrecta*: (i) de la tesis, (ii) de una de las hipótesis, (iii) de todas las hipótesis.
- *Traducción correcta, pero incompleta de la tesis*.

Por otra parte, los errores en la solución de problemas y demostración, dejando a un lado el planteamiento, son de los siguientes tipos:

- *Ausencia de estrategia*, es decir, afirmaciones válidas pero que no contribuyen a demostrar la tesis (error deductivo); por lo general se aprecia una falta de estrategia influida por un mal planteamiento de la demostración (errores de traducción intercódigos).
- *Errores deductivos "puros"*, por un orden equivocado de las afirmaciones. Por ejemplo, el afirmar que dos longitudes son iguales y justificar por ser "lados homólogos", sin haber demostrado previamente la congruencia de dos polígonos.
- *Errores axiomáticos* relacionados con una mala aplicación de teoría, como justificar una afirmación con un teorema que no corresponde, por ejemplo el justificar la congruencia de triángulos por alguno de los criterios de semejanza.

Esta tipología tiene un carácter práctico que permitirá a los profesores de geometría no solamente identificar los obstáculos lingüísticos en la solución de problemas, sino que también establece una distinción entre los errores relacionados con el lenguaje matemático de aquéllos

debidos a fallas en la aplicación de teoría y/o de razonamiento, que es uno de los propósitos del proyecto. La posibilidad de detectar en las respuestas de los estudiantes el tipo de error, es una potente herramienta para el docente, la cual puede ser utilizada para mejorar tanto el diseño instruccional del curso como los procesos de evaluación del aprendizaje.

Otra aportación del presente trabajo es la detección de que la dificultad lingüística del código simbólico y algunos términos complejos del español especializado, v. gr. "equidista", "mediatriz", "bisectriz", "circunscrito", "inscrito", "media proporcional" estriba en su carácter sintético, es decir, cada una de estas expresiones involucra varios conceptos matemáticos y/o condiciones necesarias para operar con ellos. Sería necesario explicar a quienes se inician en el lenguaje matemático que algunos de sus códigos contienen términos que condensan mucha información aunque su equivalente en otro código puede ser un término simple.

Bibliografía

Alcalá, M. (2002). *La construcción del lenguaje matemático*. Barcelona: Grao

Astolfi, J. P. (2003). *El "error", un medio para enseñar* (2ª Edición). Sevilla: Diada Editora. Brousseau, G. (2001). Les erreurs des élèves en mathématiques. Études dans le cadre de la Théorie des Situations Didactiques. *Petit x, 57,* 5-29

Cabre, M. T. (s/f). Recursos lingüísticos en la enseñanza de lenguas de especialidad. Consultado el 24 de septiembre de 2011 en http://cvc.cervantes.es/lengua/aeter/conferencias/cabre.htm

Díaz, P. (2006). *Lenguaje matemático y lenguaje audiovisual. Dos componentes de los programas de estudio de la enseñanza de la matemática del siglo XXI.* Consultado el 17 de abril de 2008 en: http://www.uned.ac.cr/MemEncMate/Ponencias/Aspectosteoricos/Lenguaje%20Matem%C3%A1tico%20y%20Audiovisual-%20Msc.%20Pedro%20D%C3%ADaz.pdf

Franchi, L., Hernández de R, A. I. (2004). Tipología de errores en el área de geometría plana. *Educere, Investigación Arbitrada, 8*(24), 63-71.

Kline, M. (1985). *Matemáticas: La pérdida de la certidumbre*. México: Siglo XXI

Kuhn, T. (2004). *La estructura de las revoluciones científicas*. México: Fondo de Cultura Económica. Leal C., F. (2000). Diez preguntas sobre el lenguaje, y un intento por responderlas desde una perspectiva principalmente sintáctica. En V. Alcaraz (coord.), *Una mirada múltiple sobre el lenguaje* (pp. 33-92), México: Editorial Universidad de Guadalajara.

Pimm, D. (1999). *El lenguaje matemático en el aula* (2ª Edición). Madrid: Ed. Morata.

Pochulu, M. D. (2005*).* Análisis y categorización de errores en el aprendizaje de la matemática en alumnos que ingresan en la universidad. *Revista Iberoamericana de Educación 35*(4).

Radillo, M. (2009). *Obstáculos relacionados con las deficiencias en la traducción entre códigos en la solución de problemas de la Geometría Euclidiana en el nivel de licenciatura* (Tesis de doctorado no publicada). Universidad de Guadalajara, México.

Rico, L. (1995). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En J. Kilpatrick, J., Gómez, P., & Rico, L. (Eds.). *Educación matemática* (pp. 69-108). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Rico, L. (1997). *Reivindicación del error en el aprendizaje de las matemáticas*. *Épsilon, 38,* 185-198. Rico, L., & Castro, E. (1994). *Errores y dificultades en el desarrollo del pensamiento numérico*. Consultado en enero de 2006 en http://ddm.ugr.es

Socas, M, & Palarea, M. (1997)**.** Las fuentes de significado, los sistemas de representación y errores en el álgebra escolar. *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas, 14*, 7-24.

Criatividade em Matemática e resolução de problemas no ensino fundamental

Mônica **Souto** da Silva Dias
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense
Brasil
msoutodias@gmail.com
Ninna Jane da Silva **Alves**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense
Brasil
ninnajane@hotmail.com

Resumo

Este artigo trata de uma pesquisa em andamento para elaboração de um trabalho de conclusão do curso de licenciatura em Matemática. O objetivo da investigação é: i)verificar se a modelagem geométrica possibilita ao aluno a percepção da Geometria em situações reais com movimento, no que diz respeito às definições, propriedades dos objetos geométricos e as relações entre estes; ii) averiguar se a metodología Resolução de Problemas contribui para o desenvolvimento da criatividade em Matemática. A metodologia que melhor se adequou à questão de pesquisa foi estudo de caso, cuja unidade de estudo é uma turma composta por sete alunos do 9.º do Ensino Fundamental de uma escola particular do interior da cidade de Campos dos Goytacazes-RJ(Brasil). As primeiras análises permitem inferir que o desenvolvimento da criatividade pode estar atrelado à situações escolares que enfatizam a resolução de problemas, e não somente ao uso da tecnologia nas aulas de Matemática.

Palavras chave: criatividade; modelagem geométrica; resolução de problemas.

Introdução

A capacidade de inovar e criar está sendo cada vez mais exigida no mercado de trabalho. As empresas buscam crescer e se desenvolver e, para isso, precisam de pessoas criativas, assim, na esperança de que cooperadores tenham ideias inovadoras, é comum investirem em programas de incentivo à criatividade.

Para tanto, torna-se, indispensável à formação dos indivíduos e o desenvolvimento da criatividade. O sistema de ensino deve ficar atento ao indicar os conteúdos que integrarão as disciplinas da Educação Básica, além de se preocupar em estimular a criatividade de modo que ela seja um dos objetivos de cada componente curricular. A não observância do descrito implica em não contemplar uma das finalidades que a Lei de Diretrizes e Bases da Educação – Lei nº3.394/96 (Brasil, 1996) constitui para a educação brasileira, que é a de favorecer, "o pleno desenvolvimento do educando, seu preparo para o exercício da cidadania e sua qualificação para o mercado de trabalho" (Art.2º).

Gontijo (2006) enfatiza que a imaginação, originalidade, flexibilidade, elaboração de ideias e inventividade devem ser contempladas pelas finalidades educacionais. Disciplinas tais

como Línguas, Matemática, Ciências, Tecnologia, entre outras, são corresponsáveis por desenvolver a criatividade, entendida como a geração de novas ideias (Gontijo, 2006).

Em Matemática, variadas situações didáticas permitem o desenvolvimento da criatividade. Nas investigações matemáticas (Ponte, 2003), por exemplo, o aluno tem a possibilidade de criar estratégias para resolver um problema, analisá-las e revê-las caso a solução não seja adequada. Na modelagem matemática, o educando é incentivado a elaborar questões acerca de um problema e buscar soluções para ele, recorrendo também a outras áreas do conhecimento.

Em um dos objetivos do Ensino Fundamental prescritos nos Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática (PCN) (Brasil, 1998), a criatividade surge ao lado do raciocínio lógico, intuição e capacidade crítica como ferramenta para questionar a realidade e analisá-la, propondo soluções. Além desse aspecto, os PCN enfatizam o desenvolvimento da criatividade, seja para aguçar a capacidade de aprendizagem, seja para contribuir para a formação do cidadão.

Diante do exposto nos parágrafos anteriores, busca-se, nesta investigação, analisar a criatividade na área de Matemática, levando em consideração, como metodologia a Resolução de Problemas (Polya, 1995), utilizando a modelagem geométrica. Tal proposta de ensino aborda a geometria plana de uma forma criativa. As autoras concordam com Meier (2012) que um trabalho com essa característica pode contribuir para o desenvolvimento de hábitos do pensamento tais como visualizar, reconhecer padrões ou invariantes, fazer experiência e exploração, criar e ser inventor, fazer conjecturas, descrever formal e informalmente relações e processos e raciocinar por continuidade (Goldemberg, 1998 apud Meier, 2002).

A modelagem geométrica retrata uma matemática que vai além dos números e das fórmulas e possibilita um olhar atento aos objetos que nos rodeia. Utiliza-se da modelagem para favorecer o desenvolvimento de habilidades matemáticas, da geometria para extrair suas formas e propriedades presentes no mundo e da geometria dinâmica para compor as configurações (Figuras 1 e 2).

Figura 1. Guindaste.

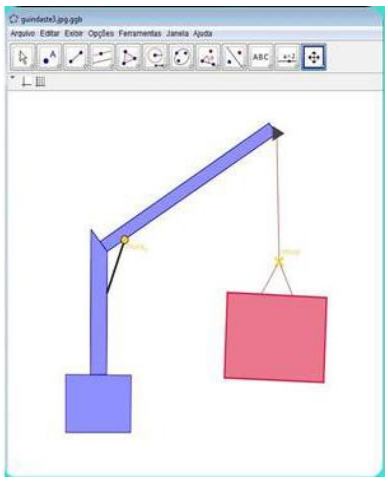


Figura 2. Modelo geométrico do guindaste.

Neste trabalho, foi empregado o software GeoGebra, desenvolvido por Markus Hohenwarter em 2001. Tal software é de fácil utilização, trabalha com applets, ou seja, as produções podem ser colocadas na Web, é gratuito e de código aberto, além do recurso protocolo

de construção, que permite conhecer o roteiro que o aluno criou para determinada construção, o que é fundamental para análise dos dados.

O software GeoGebra, além de ser a ferramenta para construir a modelagem, é o meio no qual a percepção da matemática em cada objeto modelado será materializada pelo aluno, que poderá explorar e fazer investigações, interagindo e buscando novas experiências e, possivelmente, tendo sua criatividade aguçada, uma vez que o GeoGebra por suas potencialidades, é o instrumento que possibilita sair de uma matemática abstrata para a visual. Essas características conduzem a uma aprendizagem mais dinâmica, na qual o indivíduo se sente motivado (Meier, 2012).

O presente trabalho procurou unir a necessidade de buscar situações didáticas para desenvolver a criatividade na escola e as contribuições do trabalho com a modelagem geométrica para esta tarefa, Deste modo, elaborou-se a seguinte questão de pesquisa: De que modo a metodologia Resolução de Problemas contribui para o desenvolvimento da criatividade? Nos próximos itens, serão apresentados o referencial teórico, a metodologia de pesquisa, a experimentação e as conclusões parciais.

Modelagem geométrica

O termo Modelagem Geométrica foi cunhado por Gravina (2011), que a define do seguinte modo:

> [...] a modelagem geométrica é uma representação que usa a linguagem da geometria – trata-se de construção baseada em pontos, retas, segmentos, perpendicularidade e paralelismo, círculos, dentre outros elementos. (Gravina et al., 2011, p. 26).

A modelagem geométrica utiliza os objetos geométricos, suas propriedades e suas relações para criar situações nas quais é necessário mais do que, apenas, calcular áreas, perímetros, ângulos e distâncias. É preciso usar os conhecimentos geométricos para compor configurações com ou sem movimento. Uma configuração geométrica sem movimento é, por exemplo, a vista lateral de um silo formado por uma semi-esfera em cada base de um cilindro reto (Figura 3). Um exemplo de uma configuração geométrica com movimento é uma porta pantográfica (Figura 4), que é movimentada a partir do deslocamento de um dado ponto. O trabalho do aluno é criar os mecanismos necessários para possibilitar essa movimentação.

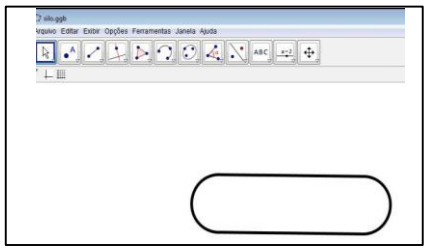


Figura 3.Vista lateral de um silo - configuração geométrica sem movimento elaborada no GeoGebra.

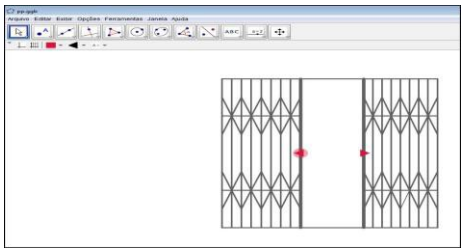


Figura 4. Porta pantográfica - configuração geométrica com movimento elaborada no GeoGebra.

Na sala de aula, pode-se propor ao aluno que investigue uma configuração geométrica com ou sem movimento. Gravina (2011, p. 32) afirma que "a primeira atitude é ter um olhar atento ao mecanismo que se pretende modelar". Desse modo, o aluno pode perceber que, no simples

movimento dos objetos presentes em seu meio, há conceitos geométricos envolvidos. A partir daí, ele analisa os conhecimentos geométricos necessários para a construção do seu projeto.

A modelagem geométrica com movimento constitui o foco deste trabalho. Tal movimento pode ser observado a nossa volta como: o movimento do ventilador, da janela basculante, do elevador, dos brinquedos presentes no parque de diversões, entre outros.

Metodologia Resolução de Problemas segundo Polya

Polya (1995) ao escrever sobre Resolução de Problemas buscou mostrar aos professores a importância de incentivar os alunos a participar da aula de Matemática. Mais do que isso, Polya (1995), apresenta em seu texto, formas variadas de indagar os alunos, de modo a conduzi-los a traçar estratégias de resolução de problemas. O autor exemplifica, por meio de diálogos fictícios entre um aluno e um professor, como conduzir, o primeiro, na compreensão do problema e na construção de estratégias para solucioná-lo, além de orientá-lo na discussão da solução encontrada.

A metodologia Resolução de Problemas já foi bastante mencionada como uma possibilidade de otimizar o ensino e aprendizagem de Matemática. Contudo, observa-se que a sua utilização nas aulas de Matemática está muito distante de ocorrer. Uma justificativa para este fato é a dificuldade dos professores em lidar, de forma rigorosa e, ao mesmo tempo, flexível com este tipo de atividade em sala de aula, sem contar com uma orientação especializada e a compreensão de tal metodologia. Esta dificuldade ainda é maior para os professores que não estudaram a metodologia Resolução de Problemas no curso de licenciatura (Reis; Zuffi, 2007). Deste modo, este texto busca contribuir com a compreensão de como esta metodologia pode ser utilizada pelos professores e futuros professores em suas práticas docentes, ao apresentar os resultados de uma pesquisa desenvolvida no âmbito do trabalho de conclusão do curso de Licenciatura em Matemática de uma das autoras.

Neste contexto, os problemas apresentados aos alunos consistem em modelagens geométricas de objetos do cotidiano que possuam movimento (portas, janelas, brinquedos, ferramentas, etc.), utilizando o ambiente de geometria dinâmica GeoGebra.

Criatividade em Matemática

Este tópico apresenta o referencial teórico sobre criatividade matemática e está baseado em Gontijo (2006).

Não há muitos trabalhos, no Brasil, que busquem investigar a criatividade em Matemática. Destacam-se os brasileiros Dante (1980, apud Gontijo, 2006), que retrata a importância da criatividade em Matemática na resolução de problemas, e D'Ambrósio (2004, apud Gontijo, 2006), o qual apresenta um modelo para explicar a criatividade em Matemática. Ambos os estudos não apresentam dados empíricos. Na literatura internacional são encontradas algumas definições engajadas nas resoluções de problemas (Gontijo, 2006). Por exemplo, a criatividade em matemática, segundo Krutetskii (1976, apud Gontijo, 2006), é a habilidade de formular problemas e encontrar meios para resolvê-los e, para Makiewicz (2004, Gontijo, 2006), refere-se à atitude e sensibilidade frente aos problemas matemáticos.

Henri Poincaré é considerado por muitos autores (Hadamard, 1954; Muir, 1988; Sriramand, 2004) como o primeiro a estudar sobre a criatividade matemática. Seu trabalho consiste num questionário cujo objetivo era conhecer sobre o processo de criação dos matemáticos, publicado no ano de 1902.

Observa-se que não há um consenso sobre esse tipo de criatividade (Gontijo, 2006). Assim, para fundamentar este presente trabalho, escolheu-se utilizar a definição apresentada por Gontijo (2006), pois foi percebido que este conceito abrange a matemática em seus três aspectos: numérico, algébrico e gráfico, considerando-se, neste último, também a geometria:

A criatividade em matemática é a capacidade de apresentar inúmeras possibilidades de solução apropriadas para uma situação problema, de modo que estas focalizem aspectos distintos do problema e/ou formas diferenciadas de solucioná-lo, especialmente formas incomuns (originalidade), tanto em situações que requeiram a resolução e elaboração de problemas como em situações que solicitem a classificação ou organização de objetos e/ou elementos matemáticos em função de suas propriedades e atributos, seja textualmente, numericamente, graficamente ou na forma de uma sequência de ações (Gontijo, 2006, p. 4).

Nesta investigação, é analisada a questão que considera se atividades com modelagem geométrica pode contribuir para o desenvolvimento da criatividade em Matemática.

Considerações metodológicas

A metodologia adotada é o estudo de caso que visa conhecer uma entidade bem definida com o objetivo de compreender suas ações, evidenciando suas características próprias. Nesta pesquisa, a investigação baseia-se em um trabalho de campo com uma turma do 9.º ano do Ensino Fundamental, composta por sete alunos com idade entre 12 e 14 anos, de uma escola particular, localizada em um distrito da cidade de Campos dos Goytacazes-RJ.

O estudo de caso possibilita analisar tal grupo de alunos em sua totalidade em um contexto real, sem pretender modificar a situação, mas compreendê-la, não tendo a intenção de manipular o comportamento e os resultados obtidos pelos participantes.

Esta metodologia debruça-se sobre um estudo específico que implica a configuração de um objeto geométrico com movimento. A construção se dá no ambiente de geometria dinâmica GeoGebra, e o caso a ser explorado é um exemplo relativamente neutro, pois serão consideradas situações inesperadas em relação ao objeto de estudo. Ou seja, não se sabe em que medida a metodologia Resolução de problemas, influencia na criatividade. São observados aspectos como a utilização dos entes geométricos para compor o movimento, a estratégia de construção adotada por cada aluno, os erros cometidos por eles, e o desenvolvimento da criatividade dos alunos no contexto da elaboração da figura.

Segundo Ponte (2006), o estudo de caso pode ser exploratório, quando fornece informações prévias sobre o objeto de interesse, descritivo, ao ter a finalidade de descrever sobre o caso considerado, e analítico, que procura construir ou desenvolver nova teoria ou confrontá-la com a teoria pré-existente. Nesta pesquisa, destaca-se o aspecto descritivo, pois o que se pretende é descrever o processo de construção das modelagens geométricas feitas pelos alunos, buscando indícios da possível influência no desenvolvimento da criatividade. Outro aspecto contemplado é o analítico, uma vez que os dados obtidos são analisados à luz do referencial teórico, buscando compreender a relação entre a modelagem geométrica e o desenvolvimento da criatividade em Matemática, confrontando-os com as situações relatadas na literatura.

Esta pesquisa é considerada uma investigação empírica, ou seja, está fundamentada na observação e na experimentação. Os dados foram coletados por meio de fontes diversas, tais como: entrevistas escritas realizadas antes e após a experimentação, observação do participante e dos documentos (arquivos das construções realizadas pelos alunos no GeoGebra).

Para realizar a experimentação, foi necessário que os alunos conhecessem alguns comandos de software GeoGebra e alguns tópicos de Geometria Plana, como: segmentos, retas paralelas e perpendiculares, ponto médio, ângulo, triângulos, quadrilátero, circunferência e círculo. Deste modo, optou-se por uma revisão dos tópicos citados concomitantemente com a apresentação do GeoGebra. Foram elaborados roteiros impressos para apoiar os alunos na construção das primeiras modelagens, e proposta a observação de estruturas com movimento do mundo físico, tais como: portas, janelas, etc.

A experimentação ocorreu em duas sessões de 2h30min cada uma, inspirada na metodologia de ensino Resolução de Problemas (POLYA, 1995). No decorrer de cada sessão, as autoras buscavam incentivar os alunos a tentar construir as modelagens sugeridas, sendo apoiados por elas em caso de bloqueios.

Ocorreu um teste exploratório, com a finalidade de verificar a adequação da sequência didática, para atender aos objetivos traçados e, consequentemente, responder à questão de pesquisa, além de verificar o tempo necessário para aplicação em uma turma regular do 9º. ano do Ensino Fundamental.

A experimentação

Neste item, são relatados o teste exploratório e a experimentação na turma do 9.º ano.

O teste exploratório ocorreu com 11 alunos do 3°. período de um curso de Licenciatura em Matemática, diurno, de uma instituição pública da cidade de Campos dos Goytacazes (RJ), durante 2h30min, devido à disponibilidade dos participantes. Eles já haviam cursado um período da disciplina Educação Matemática e Tecnologia, na qual aprenderam a manipular vários softwares educativos e discutiram o uso educacional da informática. Cursaram também dois períodos de Geometria Plana e dois de Construções Geométricas, e estavam concluindo um período de Geometria Espacial.

Na primeira parte, para relembrar conceitos de Geometria e conhecer o software, os participantes não apresentaram dificuldades e ficaram entusiasmados ao verem a construção final: a modelagem geométrica de uma janela basculante (Figura 5).

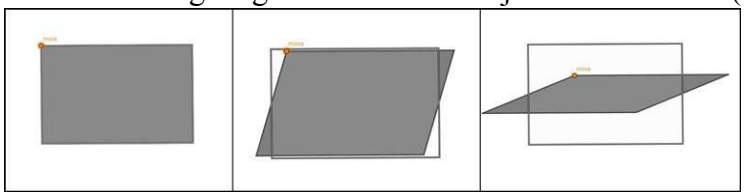


Figura 5: Modelagem da janela basculante de uma folha.

As dificuldades surgiram ao tentar reproduzir as modelagens apresentadas pelas autoras, a saber: ventilador, balanço, porta pantográfica e janela basculante (Figura 5). Os licenciandos observavam as construções, que foram entregues no CD, mas não conseguiam reproduzir, apesar de terem à disposição uma lista com características do movimento e estratégia para a construção. Careciam de explicação por várias vezes, as dificuldades eram diversas, tais como: perceber na modelagem os conceitos geométricos necessários para a construção, escolher adequadamente os recursos do software, execução de processos de construções geométricas como, por exemplo, a divisão da circunferência em partes iguais. As dificuldades continuaram também durante a consulta ao protocolo de construção, uma ferramenta do software localizada na barra de menus, que não havia sido removida.

Das quatro modelagens, apenas duas foram construídas e, dos 11 participantes, apenas um as construiu sem o auxílio do protocolo de construção. Dentre os dez alunos restantes, seis construíram seguindo fielmente o protocolo, e os outros desistiram ou não conseguiram terminar no tempo disponível.

Observou-se que os participantes, com exceção de um, reproduziram não só o processo de construção como também as modelagens apresentadas em todos os seus detalhes, como cor e textura. Segundo a definição de Gontijo (2006), os alunos não se mostraram criativos em Matemática, uma vez que não desenvolveram soluções distintas das exibidas para a construção das modelagens geométricas propostas. Não houve tempo para os alunos criarem seu próprio modelo geométrico.

A experimentação ocorreu com sete alunos do 9.º ano do Ensino Fundamental, dos quais cinco não conheciam o GeoGebra. Não foi investigado o nível de conhecimento sobre o software dos outros dois alunos. As pesquisadoras conduziram os alunos na elaboração das modelagens, seguindo as orientações de Polya(1995). Os participantes não apresentaram dificuldades na primeira parte, executando corretamente as instruções das autoras. Entusiasmaram-se com a janela basculante de uma bambinela, construída, junto com a professora em formação.

As dificuldades surgidas foram próprias de usuário iniciante. Os alunos não dominavam as ferramentas do GeoGebra, na medida necessária para escolher os recursos adequados para construção das modelagens. Na modelagem do ventilador (Figura 6), por exemplo, eles perceberam o movimento circular, mas não conseguiram, sozinhos, determinar as hastes que se moviam a partir de um ponto. Isso ocorreu porque não conheciam a ferramenta "ângulo com amplitude fixa" e não sabiam dividir uma circunferência em partes iguais pelo ângulo central.

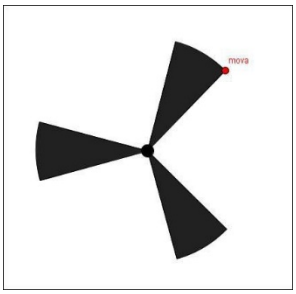


Figura 6. Modelagem do Ventilador.

Na porta pantográfica (Figura 7), a parte fixa foi facilmente construída, mas a móvel careceu da intervenção das autoras. Estas encaminharam para uma solução, sem dar as respostas, indicando que o espaço entre as grades da porta tinham a mesma distância, o que levava àdivisão de segmento em partes iguais. A experimentação do dia 26 de maio foi encerrada com essa atividade.

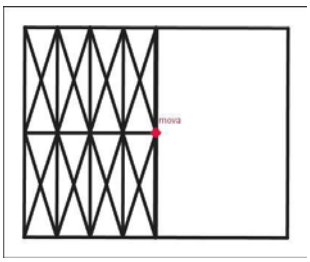


Figura 7. Modelagem da porta pantográfica.

O segundo e último encontro, ao qual todos os alunos compareceram ocorreu no dia 9 de junho. Retomou-se o trabalho a partir da construção da janela basculante (Figura 8). Eles ficaram a observar o movimento do modelo entregue sem saber como começar a construção. Diante desse fato, as autoras iniciaram a construção com eles, e, aos poucos, os estudantes foram recordando os recursos do programa e conseguiram concluir a modelagem.

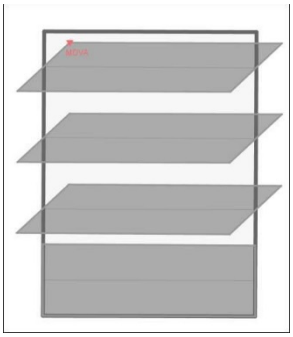


Figura 8. Modelagem da janela basculante.

A última modelagem geométrica foi o balanço (Figura 9). Analisaram o arquivo e iniciaram a construção. O único empecilho foi o esquecimento de algumas ferramentas (compasso, reta, segmento, arco determinado por três pontos) como, por exemplo, onde se localizavam na barra de ferramentas e como utilizá-las, sendo orientados pelas autoras. Todos concluíram a construção do balanço.

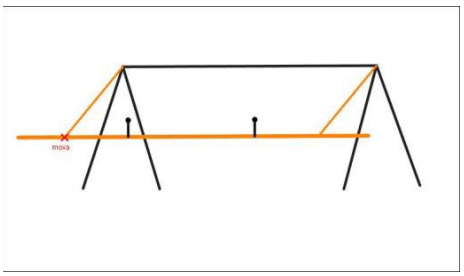


Figura 9. Modelagem do balanço vai-e-vem.

Em seguida, foi sugerido que cada aluno criasse uma nova modelagem. Todos abraçaram a tarefa com empenho. Alguns precisaram de um estímulo para dar início à construção do seu próprio modelo, tal como analisar imagens e vídeos, nos quais o objeto estivesse presente. As construções foram uma porta de abrir, uma roda gigante, uma gangorra e um caminhão. Na Figura 10, estão representadas três modelagens construídas pelos alunos.

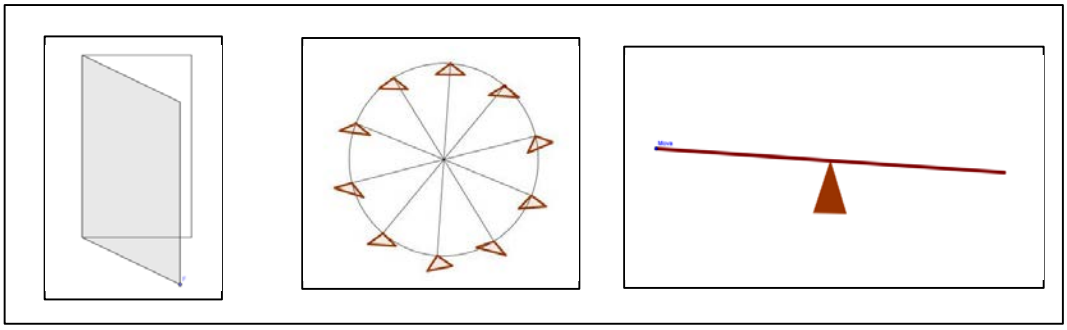


Figura10. Modelagens construídas pelos alunos.

As dificuldades apresentadas foram as mesmas citadas anteriormente, o que é perfeitamente normal, pois os alunos estavam trabalhando com o software pela segunda vez e, portanto, não possuíam domínio das ferramentas e da sua utilização. Um dos alunos comentou que "era preciso prática para a construção".

Com base no breve relato anterior, pode-se inferir que esses educandos foram influenciados pelo dinamismo e possibilidades do software GeoGebra. Observou-se que eles estavam sempre motivados para realizar as construções solicitadas, envolvendo-se com as etapas de cada uma, buscando as ferramentas adequadas num processo de erros e acertos, testando as estratégias.

Tendo em vista a definição de criatividade em Matemática de Gontijo (2006) e baseadas numa análise inicial das construções, as autoras perceberam que os alunos tiveram um enfoque criativo, inventaram modelos diferentes, não apresentaram soluções distintas, mas inovaram ao construir modelagens que ainda não haviam sido mostradas. Estão em fase de análise os protocolos de construção elaborados no GeoGebra, o que permitirá um exame mais acurado.

Conclusões

O foco do trabalho é o desenvolvimento da criatividade, com o auxílio da modelagem geométrica. As primeiras análises apontam que essa proposta de ensino pode ser o gatilho para despertar no aluno o pensamento criativo em Matemática, pois é possível aplicar os conhecimentos de geometria (ponto, retas, ângulos, circunferência, arcos, entre outros) para apresentar soluções na construção das modelagens.

As dificuldades que os alunos participantes do teste exploratório e da experimentação apresentaram foram condizentes com as descritas em outra pesquisa (MEIER, 2012), o que permite inferir que esse fato talvez seja inerente a esse tipo de proposta, não consistindo em uma particularidade do grupo pesquisado. Cabe ressaltar que é necessário a realização de experimentos com um maior número de alunos.

As dificuldades que os participantes do teste exploratório apresentaram em comparação com as demonstradas pelos estudantes da experimentação causaram estranheza, uma vez que os primeiros já conheciam o software e seus conhecimentos geométricos eram superiores aos dos alunos do 9.º ano, portanto era esperado pelas autoras um desempenho melhor daqueles. Entretanto, como já relatado no item anterior, o grupo da experimentação surpreendeu ao ter maior desenvoltura na realização das construções e na aprendizagem dos recursos do software, tendo em vista o tempo de familiarização e de estudo de tópicos geométricos, além da profundidade de abordagem.

Assim, a criatividade está presente na proposta, desde a investigação das modelagens apresentadas com vista a sua construção, até a elaboração de um modelo próprio. Contudo os participantes do teste exploratório, por já conhecerem o programa, acessaram o protocolo de construção da modelagem entregue, ocorrendo interrupção do processo criativo, pois apenas reproduziram-se os passos do roteiro.

Foi observado que a metodologia Resolução de Problemas pode contribuir para o desenvolvimento da criatividade em Matemática, uma vez que as indagações da pesquisadora auxiliaram os alunos a traçar estratégias de solução para construir as modelagens geométricas.

Referências

Gontijo, Cleyton Hércules (2006). Resolução e Formulação de Problemas: caminhos para o desenvolvimento da criatividade em Matemática. Anais do Sipemat.

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental(1998). Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (ensino de 5ª a 8ª série). Brasília: MEC/SEF.

Ponte, João Pedro da; Brocardo, Joana; Oliveira, Hélia (2003). Investigações Matemáticas na Sala de Aula. Belo Horizonte: Autêntica.

Ponte, João Pedro da (2006). Estudos de caso em educação matemática. Bolema, 25, 105-132.

Polya, George (1995). A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático. Rio de Janeiro: Interciência.

Desafíos para llegar a la generalización de un problema.

Candelaria **González**
Polo Escuela Normal de Atlacomulco
México
canditapolo@gmail.com
Sara **Arteaga** Rivera
Benemérita Escuela Normal de Maestros
México
arteagasa@yahoo.com.mx

Resumen

En un estudio exploratorio de resolución de problemas con estudiantes de Educación Básica Primaria fue evidente que los niños dominan hábilmente los algoritmos de la suma y resta, pero no van más allá de obtener el resultado. Situación que, según reportes de investigación, tiene su origen en los docentes que centran su atención en la tarea de verificar el nivel de mecanización de los algoritmos de las operaciones que poco tienen que ver con los procesos de generalización de las propiedades de los números y sus operaciones. Como resultado del estudio, se realizó un proyecto bajo la forma de investigación acción para trabajar problemas que permiten a los niños aprender a partir de los conocimientos previos, dar sentido y significado a los objetos matemáticos, pensar por sí mismos, disfrutar y desear seguir aprendiendo matemáticas y lograr que la generalización forme parte de sus aprendizajes cotidianos.

Palabras clave: resolución de problemas, Educación Básica, conocimientos previos, objetos matemáticos, algoritmos.

Introducción

Durante el ciclo escolar 2012-2013 se desarrolló la propuesta japonesa denominada *Estudio de Clases* incluida en el curso Aritmética: su aprendizaje y su enseñanza (2012) en sus tres etapas, con estudiantes de Licenciatura en Educación Primaria en México. En el mencionado estudio se obtuvieron importantes hallazgos para desarrollar en el ciclo escolar 2013-2014 un proyecto de resolución de problemas con un grupo de primer grado de Educación Básica Primaria en México.

El estudio de clases es una estrategia japonesa que empezó a finales del siglo XIX y tomó su forma actual a principios del siglo XX. Es una estrategia que Japón comparte con el mundo, específicamente con países en vías de desarrollo con historia propia, y contextos distintos para "ampliar y enriquecer la cooperación hacía la educación básica" (JICA, 2005). La experiencia japonesa consta de tres etapas. En la primera etapa se consideran los propósitos y la forma de presentación del contenido; se incluyen conocimientos, habilidades, actitudes y valores que se pretende que los alumnos aprendan; se desarrolla un plan de clase donde se especifica el inicio, desarrollo y cierre de la misma, para alcanzar sus propósitos de acuerdo al contenido de la unidad que será enseñada en donde el maestro predetermina ciertas conjeturas a las posibles respuestas de los alumnos y a las preguntas que puedan surgir en relación al propósito. También

es importante el manejo del pizarrón, elemento fundamental en el Estudio de Clases, ya que lo plasmado en él, es parte de los insumos para la etapa de reflexión y evaluación. Para el estudio exploratorio se diseñó un plan de clase considerando principios didácticos sugeridos desde 2008 por la Dirección General de Educación Superior para Profesionales de la Educación [DGESPE] y validados a priori con base a criterios establecidos.

En la segunda etapa del Estudio de Clases, se pone en práctica el plan de clase en condiciones reales de trabajo docente, en está, es importante que el maestro se prepare para cualquier contingencia en el aula, pues las respuestas de los niños son impredecibles. En el estudio exploratorio, se llevó a cabo el plan de clase con dos grupos de segundo y uno de cuarto grado de Educación Básica Primaria. La clase en el primer grupo de segundo grado fue conducida por una docente en formación y asistieron como observadores: docentes en formación, directores de escuelas primarias, profesores de segundo grado de otras escuelas primarias, profesores con perfil en el área de matemáticas, administradores educativos de la Escuela Normal y profesores invitados. En el segundo grupo de segundo grado de Educación Básica Primaria una alumna en formación condujo la clase y estuvieron como observadores dos estudiantes en formación, la profesora del grupo y un docente con especialidad en matemáticas. Para el grupo de cuarto grado, cada uno de los veinte docentes en formación atendió a un niño de manera particular, considerando las recomendaciones obtenidas durante las dos experiencias con los grupos de segundo grado. En esta última experiencia, cada docente en formación diseñó su propio material didáctico y desarrolló su particular estrategia para el logro del propósito con el niño a su cargo.

La tercera etapa del Estudio de Clases consiste en la evaluación y reflexión de lo acontecido durante la *clase;* la reflexión sucede inmediatamente después de haber concluido la clase. Durante esta fase, en plenaria, el maestro que conduce la sesión de trabajo, expone su experiencia, las dificultades y fortalezas vividas durante la clase en función a los propósitos, los contenidos y los resultados de aprendizaje esperados. Posteriormente los observadores participan con los resultados de su observación para analizar y hacer sugerencias acerca de la clase y cómo mejorarla. En el primer grupo del estudio exploratorio, la evaluación y reflexión se llevó a cabo en una mesa redonda en la que se expusieron y se hicieron las recomendaciones emanadas de una guía de observación previamente asignada; en el segundo grupo se filmó la clase y se analizó con los docentes en formación en una sesión plenaria con base en la guía de observación y se obtuvieron conclusiones. Y con el grupo de cuarto grado, los estudiantes en formación informaron sobre sus hallazgos. Entre los comentarios y reflexiones obtenidos sobresalieron los siguientes: se evidenció en el primer caso, que los niños obtienen los resultados de las sumas y restas acertadamente pero dejan hasta allí el proceso; que el exceso de imágenes y figuras en el material utilizado dificultó su eficiencia; y que el desorganizado uso del pizarrón privó de estrategias para desarrollar los procesos de inducción matemática necesarios para el logro del propósito. Es relevante mencionar que en el Estudio de Clases el uso adecuado del pizarrón significa organizar la información de forma que apoye hallar patrones para llegar a la generalización. En el segundo caso, los niños resolvieron varias de las sumas y restas incluidas en los materiales a resolver sin distinguir algún patrón que revelara generalidades, y hubo también un desorganizado uso del pizarrón y en el tercer caso los niños operaban hábilmente las sumas y restas pero no llegaban más allá de obtener el resultado. Después de cada experiencia se consideraron las debilidades presentadas y se reorientaron en el plan de clase, en los materiales utilizados tanto grupales como individuales y en el uso del pizarrón.

A partir de las tres experiencias, se identificó que los niños manejan correctamente los algoritmos de la suma y la resta, pero difícilmente logran descifrar la "magia" implícita en los planteamientos propuestos. En reportes de Block D., Dávila M. y Martínez P. (1995) y la experiencia muestra que si la educación matemática que han recibido los niños no va más allá de la mecanización de algoritmos y que si los docentes consideran que aprender matemáticas es desarrollar hábilmente un algoritmo convencional, es casi imposible que los estudiantes hagan matemáticas por sí mismos, disfruten desarrollar procesos matemáticos, deseen seguir aprendiendo con base a sus conocimientos previos y lleguen a generalizaciones, es decir, aprendan matemáticas. Bajo estos planteamientos pensamos que el éxito para llegar a la generalización de un problema y lograr que los niños sientan el deseo de aprender matemáticas por ellos mismos depende de las condiciones y del tipo de problemas que se manejan con los niños en el salón de clases generados a partir de buenas preguntas para esperar buenas respuestas por parte de los alumnos.

A partir de los resultados del estudio exploratorio descrito y los reportes de investigación, se diseñó un proyecto bajo la forma de investigación acción con características propuestas por Elliott (2005), para reflexionar sobre la propia práctica y a la vez impulsar el desarrollo profesional de los docentes con procesos de enseñanza que promuevan el aprendizaje para la comprensión; con el propósito de trabajar con problemas abiertos con los niños de primer grado de Educación Básica Primaria, para suscitar en los niños aprender a partir de los conocimientos previos, dar sentido y significado a los objetos matemáticos, a pensar por sí mismos, el disfrute de sus aprendizajes y la identificación de patrones para obtener generalizaciones.

Desarrollo

Definimos un problema abierto, aquel desafío que principalmente da origen a múltiples soluciones y a un entendimiento generalizado al comprender la idea matemáticamente. En el proyecto llevado a cabo con el grupo de primer grado de Educación Básica Primaria durante el ciclo escolar 2013-2014, se buscó que los problemas a trabajar con los niños tuviesen las características descritas en los problemas abiertos.

Se inició con el plan "La Descomposición de un Número Par y su Consecutivo", a dos meses del inicio del ciclo escolar. El propósito de esta experiencia fue identificar que para un número par n y para su consecutivo $n+1$ que es impar, existen $n/2$ descomposiciones diferentes. El tema se ubicó en el eje "sentido numérico y pensamiento algebraico" de primer grado del plan de estudios de Educación Básica Primaria.

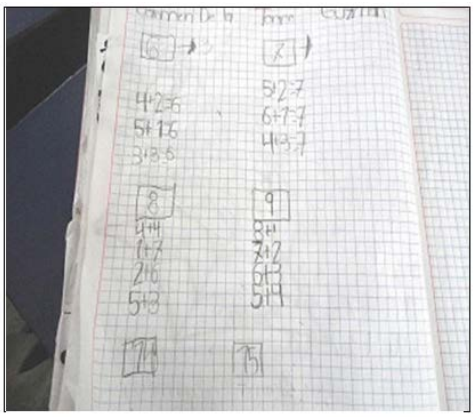


Figura 1. Ejemplo de descomposiciones hechas por los niños.

En la etapa de inicio del plan se solicitó a los niños responder ¿en cuántas formas diferentes se pueden descomponer el número 6? Se recalcó que las descomposiciones fuesen de dos números solamente. De manera individual los niños hicieron sus descomposiciones: 3 y 3, 4 y 2, 5 y 1 y en el pizarrón se fueron colocando en orden. Durante las intervenciones de los niños se les indicó que descomposiciones como 4, 2 y 2, 4 se considerarían como una porque solo se invierten los dígitos. Un alto porcentaje de los niños aún no sabía leer y a pesar de ello hacían sus propuestas mostrando nociones de la suma y habilidad en la descomposición de los números. Después de agotar las participaciones se les cuestionó ¿cuántas descomposiciones diferentes existen?, e inmediatamente después se les solicitó ¿en cuántas formas diferentes se puede descomponer el consecutivo del número 6 o sea el 7? Los mismos cuestionamientos se hicieron con otros dos números pares y sus consecutivos. Posterior a estos primeros ejemplos colocados en orden en el pizarrón, se invitó a los niños a observar los procesos presentados y se les hicieron cuestionamientos como ¿ven algo sorprendente en los resultados?, ¿qué magia encuentran en estos ejemplos?

En la etapa de desarrollo, se solicitó a cada niño seleccionar un número par menor que 30 y su consecutivo para encontrar las descomposiciones diferentes posibles. En orden se colocaron en el pizarrón los ejemplos planteados por los niños y nuevamente se les solicitó identificar regularidades.

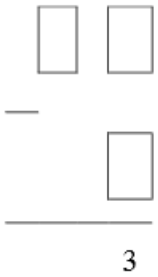
En la etapa de cierre se les mostró a los niños ejemplos donde ellos tenían que encontrar sin desglosar el número de descomposiciones diferentes que tiene cada número par y su consecutivo. Por ejemplo se mostró a los niños el número 24 y se pretendía que ellos respondieran que tiene 12 descomposiciones diferentes, luego se mostró el 25 para que respondieran lo que habían aprendido. Durante los 50 minutos de la clase no se llegó a la generalización esperada, pero se identificaron regularidades como hallar las descomposiciones a partir de ordenar los números de mayor o menor y viceversa.

Durante todo el proceso se procuró orientar a los niños al logro del propósito con la visión prospectiva de buscar lo que le falta a una cierta cantidad para llegar a otra al saber que para n y para el consecutivo $n+1$ que es impar, existen $n/2$ descomposiciones diferentes que pueden utilizar.

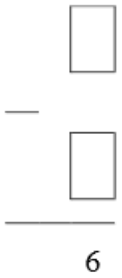
En esta sesión se mejoró el uso del pizarrón al colocar en orden los ejemplos de forma que permitieran a los niños visualizar regularidades. Se consideraron todas las posibilidades presentadas por los niños para encontrar el número de descomposiciones y de esa forma, se promovió la colaboración de todos a aprender juntos. Cuando algún niño repetía el ejemplo de descomposición solamente se aclaraba que diera nuevos ejemplos y de esa forma se le dio relevancia a todas las participaciones. Si alguna participación era dudosa, se presentaba al grupo y los mismos niños exponían sus razones y reorientaban la respuesta.

En una segunda sesión se trabajó en el mismo eje "sentido numérico y pensamiento algebraico", el plan "restas mágicas" cuyo propósito era identificar que la cantidad de restas posibles $ab-c=d$ es igual a d. Este problema lo han presentado los japoneses como un ejemplo del Estudio de Clases. En nuestro caso, el plan, la puesta en práctica y el análisis es parte de lo que hemos venido trabajando en nuestros contextos.

De inicio se solicitó a los niños construir una resta de un número de dos cifras menos un número de una cifra cuyo resultado sea 3.



Los niños hacían sus propuestas y en el pizarrón se colocaron en orden las posibilidades ofrecidas 10-7=3, 11-8=3, 12-9=3. Las propuestas se colocaban de acuerdo al algoritmo convencional de la resta Posteriormente se solicitó construyeran restas con las mismas condiciones cuyo resultado fuese 5. En cada ejemplo el profesor preguntaba ¿qué observan?, ¿pueden hallar algo mágico en cada caso?, e insistía en cuestionar si había algo sorprendente en los resultados. Con estos ejemplos, los niños predijeron que en el primer caso había 3 posibilidades y en el segundo 5. Pero eso no era suficiente para llegar a una generalización, por lo que en la etapa de desarrollo se solicitó al grupo construir restas del mismo tipo cuyo resultado fuese 1, 4, 6 y 8. Se colocaron los ejemplos en orden en el pizarrón para que en grupo los niños pudiesen hallar las regularidades presentadas. Durante estas dos etapas se solicitó a los niños explicaran cuál era el secreto. Concluyeron que había otros casos de restas cuyo resultado era alguno de los números expuestos, pero se modificaba la regla de usar números de dos cifras menos un número de una cifra. Se cuestionó además al grupo si las regularidades expuestas se cumplen para casos como



Los niños exponen sus razones, explican en qué condiciones se cumple cierto patrón y comienzan a inferir generalizaciones a partir de las regularidades encontradas.

En el cierre de la clase el profesor mostró ejemplos esperando que los niños sin hacer operaciones encontraran el número de restas posibles de acuerdo al resultado o en las que indicaran si se cumple o no la regularidad previamente hallada. A diferencia de las clases previas, se logró en buenos términos los aprendizajes esperados. Los niños identificaron que el número de restas posibles de un número de dos cifras menos un número de una cifra es igual a la resta dada con la visión prospectiva de la resolución de problemas de resta que permitan iniciar el análisis del valor posicional de números de hasta de dos cifras, sin usar el algoritmo convencional.

Una tercera sesión consistió en abordar el plan “Restas Equivalentes”. Se planteó en la etapa de planificación, el propósito de que los niños identificaran y aplicaran la propiedad matemática a-b=($a \pm c$)-($b \pm c$). En la fase de inicio del plan de clase se sugirió a los niños jugar a “adivina adivinador”. El juego consiste en plantear una resta, que los niños piensen un

número y lo sumen al minuendo y sustraendo, que ejecuten la resta con las cantidades resultantes y el profesor adivine el resultado. Una variedad es pensar un número y en lugar de sumarlo, ahora restarlo al minuendo y sustraendo"; en este caso considerar restricciones como $c \leq b$, para evitar desviar el propósito de la clase a otros conjuntos de números. Desde el inicio se procuró plantear situaciones interesantes y divertidas a los niños para promover el deseo de seguir aprendiendo matemáticas por ellos mismos.

Figura 2. Aplicación de la propiedad aprendida.

Para la etapa de Desarrollo se diseñó un material impreso con planteamientos que en nuestra opinión demandaban de los niños encontrar el "truco" con el que se llegaría al propósito establecido. En la etapa de cierre, el docente en formación mostraría operaciones como (8+56)-(4+56) = __ para que el niño aplicara la propiedad aprendida y adivinara el resultado lo más rápido posible. El plan se desarrolló con la visión prospectiva de que los niños pudiesen usar la propiedad matemática $a- b=(a \pm c)-(b \pm c)$ para resolver restas que requieren de la composición y descomposición de números al construir restas equivalentes que no requieren transformación.

Fue evidente el hallazgo de regularidades por parte de los niños y no solo la solución adecuada de las sumas y restas insertas en la actividad, a pesar de la deficiente promoción de la colaboración entre los mismos niños para el logro del propósito. Los niños disfrutaban de sus hallazgos, usaban estrategias como tachar o cancelar el valor de "c" para obtener el resultado, mostraban alegría cuando se tomaban en cuenta sus participaciones y se presentaban ante el grupo, llegaron a realizar más de 10 operaciones en sus notas sin usar el algoritmo convencional y sin necesidad de colocarles una serie de sumas y restas a ejecutar como regularmente se acostumbra. Recordemos que para estos momentos no se ha trabajado el algoritmo convencional de dichas operaciones. Esto muestra cómo los niños a partir de lo que saben le dan sentido a objetos matemáticos y al visualizar los ejemplos en conjunto pueden distinguir patrones que les permiten construir generalizaciones.

El tipo de problemas planteados en este documento permite varias soluciones y a su vez impulsa la participación de todos los niños en su solución a partir de sus saberes individuales. La amplia gama de soluciones bien organizada facilita visualizar las posibilidades para hallar patrones y llegar a generalizaciones. Bajo estas condiciones los niños explican sus razones por las que ciertas situaciones se cumplen y es cuando disfrutan sus propios procesos, le dan sentido

a los objetos matemáticos y generan matemáticas por sí mismos. Y entonces no parece haber final en las actividades porque surgen nuevos desafíos y nuevos aprendizajes interesantes por descubrir.

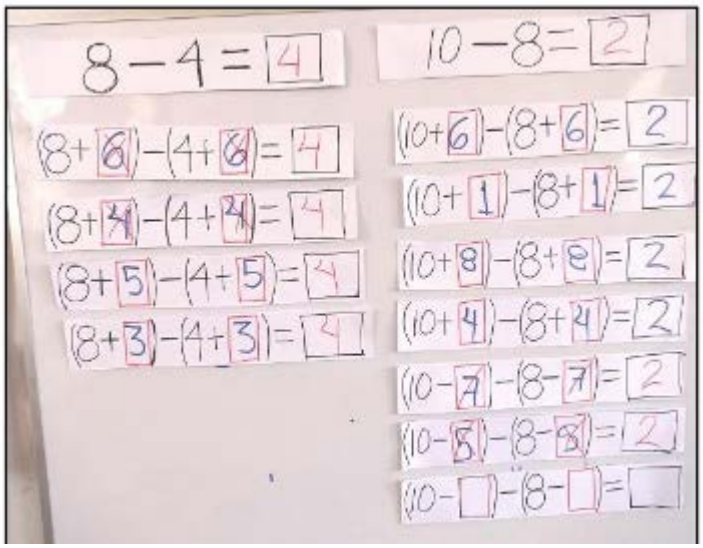


Figura 3. Procesos para promover la inducción matemática

Conclusiones

Hemos mostrado a partir de ejemplos con problemas abiertos, que para llegar a la generalización y lograr que los niños sientan el deseo de aprender matemáticas por ellos mismos depende de las condiciones y del tipo de problemas que se manejan con los alumnos en el salón de clases. Trabajar con problemas abiertos permite acceder a una concepción distinta de la resolución de problemas en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática; genera reflexionar acerca de las ventajas y desventajas que tiene el considerar las producciones individuales de los niños para la construcción grupal del conocimiento matemático, incentiva disfrutar y desear seguir aprendiendo matemáticas y lograr que la generalización forme parte de los aprendizajes cotidianos de niños y profesores. La creación de nuevos ambientes de aprendizaje promueve resultados impresionantes.

Referencias Bibliográficas

Block, D., Dávila, M., & Martínez, P. (1995). Resolución de problemas: una experiencia de formación de maestros. *Educación Matemática, 7(3), 5-26.* DIE-CINVESTAV-IPN, Editorial Iberoamérica.

Elliott, J. (2005). *La investigación acción en educación* (5a ed.). Madrid: Edición Morata, S. L.

Instituto para la Cooperación Internacional. Agencia de Cooperación Internacional del Japón (JICA). (2005). *La historia del Desarrollo de la Educación en Japón. Qué implicaciones pueden extraerse para los países en vías de desarrollo.* Shinjuku-ku, Tokio.

Secretaría de Educación Pública. (SEP)(2012). Dirección General de Educación Superior para profesionales de la Educación [DGESPE]. *Aritmética: su aprendizaje y su enseñanza* (1a ed.). México, D. F.

Desarrollo de habilidades metacognitivas a través de la solución de problemas matemáticos

Grace Judith **Vesga** Bravo
Facultad de Educación, Universidad Antonio Nariño
Colombia
gvesga@uan.edu.co
Cielo Jazmín **Roa** Poveda
Facultad de Educación, Universidad Antonio Nariño
Colombia
ciroa@uan.edu.co
Julys Jheany **Pinilla** Alvarado
Facultad de Educación, Universidad Antonio Nariño
Colombia
julpinilla@uan.edu.co

Resumen

Se presenta el resultado de un proceso investigativo cuyo objetivo fue fomentar el desarrollo de habilidades metacognitivas en estudiantes de secundaria, a través del trabajo en solución de problemas matemáticos utilizando el modelo propuesto por Yimer y Ellerton (2006). Se realizó un diseño pre experimental con preprueba y posprueba con un sólo grupo conformado por 35 estudiantes de un colegio público en Colombia. Las estudiantes antes y después de la implementación respondieron el Inventario de Habilidades Metacognitivas (MAI) desarrollado por Schraw y Dennison (1994). Los resultados muestran que hubo diferencias significativas luego de la intervención, por lo cual se puede afirmar que se logró el objetivo propuesto.

Palabras clave: metacognición, MAI, solución de problemas, funciones

Introducción

El término metacognición es un concepto relativamente joven, en general diferentes investigadores coinciden en afirmar que fue introducido a principios de los años 70 por Flavell, psicólogo americano, cuando desarrollaba investigaciones sobre los procesos de memoria. La metacognición hace referencia a los procesos reflexivos de las personas sobre su propio conocimiento, al conocimiento que tienen acerca de propia actividad cognitiva (Flavell, 1979, 1999). Cuando las personas ejecutan una actividad cognitiva y al mismo tiempo la vuelven un objeto de reflexión esto se convierte en una actividad metacognitiva. El conocimiento que tiene una persona sobre su propio quehacer cognitivo le permite, cuando realiza alguna tarea, por una parte monitorear lo que hace, esto es ejercer una supervisión mientras avanza en su actividad, y por otra, dirigir el curso de sus cogniciones, es decir, ejercer control.

Flavell (1979) plantea un modelo de control cognitivo, en el cual considera que el control de una variedad de aspectos cognitivos se producen a través de acciones e interacciones entre: el conocimiento metacognitivo, las experiencias metacognitivas y las metas cognitivas. El conocimiento metacognitivo hace referencia al conocimiento que se tiene sobre las personas (los

procesos cognitivos propios y los de los demás, cómo se aprende y cómo lo hacen los demás), la tarea (conocimiento de actividades cognitivas que deben usarse al enfrentar con éxito una actividad determinada) y las estrategias (conocimiento que se tiene sobre la eficacia de diferentes procedimientos para la realización de una tarea concreta). Esto implica que el conocimiento metacognitivo es un elemento esencial porque incluye conocimiento sobre sí mismo, sobre la tarea y sobre las estrategias. Las experiencias metacognitivas son los sentimientos, pensamientos y sensaciones que acompañan la actividad cognitiva. Finalmente las metas cognitivas son los fines que la persona se propone ante una situación particular.

Ann Brown, de manera paralela a Flavell también hizo significativos aportes al concepto metacognición, quien lo define como el control deliberado y consciente de la propia actividad humana y distingue como fenómenos metacognitivos el conocimiento sobre la cognición, referido al aspecto declarativo del conocimiento (saber qué) y señala que son relativamente estables, en el sentido de que lo que una persona sabe sobre la cognición no varía mucho de una situación a otra; y por otra parte la regulación de la cognición, que por el contrario considera que es relativamente inestables y dependientes del tipo de tarea (Brown, 1987).

Shoenfeld (1992) retoma los trabajos de Flavell y afirma que la metacognición implica tener en cuenta al menos tres subcategorías: el conocimiento declarativo de los individuos sobre su conocimiento cognitivo, los procedimientos de autorregulación, y las creencias y sus efectos en el rendimiento. Por otra parte señala la importancia de la metacognición para resolver problemas matemáticos, establece que las heurísticas propuestas por Polya no son suficientes para tener éxito al enfrentarse a un problema y afirma que hay cinco elementos fundamentales que deben ser considerados: conocimiento base, estrategias para la resolución de problemas, monitoreo y control o autorregulación, el sistema de creencias y la práctica. En la investigación realizada por Artzt y Armour-Thomas (1997) señalan que la principal dificultad que tienen los estudiantes en la resolución de problemas puede atribuirse a su fracaso para iniciar una vigilancia activa y una posterior regulación de sus procesos cognitivos, es decir, ejercer acciones de monitoreo y control sobre el aprendizaje.

Schraw & Moshman (1995) hacen una recopilación de teorías metacognitivas y señalan que, en general, se identifican dos componentes de la metacognición el conocimiento de la cognición y la regulación de la cognición. El primero está relacionado con el conocimiento que tienen las personas sobre su propio conocimiento o sobre la cognición en general y tiene tres subprocesos relacionados respectivamente con “saber sobre”, “saber cómo” y “saber por qué y cuándo” y que se denominan conocimiento declarativo, el conocimiento procedimental y el conocimiento condicional. El segundo componente hace referencia a las actividades metacognitivas que ayudan a controlar el pensamiento o el aprendizaje y tiene cinco subprocesos: planeación, organización, monitoreo, depuración y evaluación. En la planeación el sujeto asigna tiempos de estudio, metas de aprendizaje y selecciona recursos; en la organización, como su nombre lo indica, se ejercen acciones de organización de las actividades en torno al aprendizaje; en el monitoreo se tiene conciencia de la comprensión y ejecución de tareas mientras se están desarrollando; durante la depuración el sujeto identifica debilidades y toma medidas; y, en la evaluación se hace una valoración o juicio de los aprendizajes logrados y la pertinencia de las estrategias implementadas.

En el trabajo realizado por Wilson y Clarke (2004) señalan que la metacognición tiene un papel importante tanto en el aprendizaje de la matemática en general, como en el trabajo en solución de problemas en particular y la definen como la conciencia que tienen los individuos de

su propio pensamiento, la evaluación de su pensamiento y la regulación de su pensamiento. El conocimiento metacognitivo está relacionado con la conciencia del individuo de dónde se encuentran en el proceso de aprendizaje o en el proceso de solución de problemas o en conocimiento de contenido específico y de su conocimiento sobre su forma de aprender o resolver problemas. La evaluación metacognitiva está relacionada con los juicios que hace el individuo sobre sus procesos de pensamiento, capacidades y limitaciones como éstas se emplean en una situación en particular o como autoatributos, esta función permite anticipar una posible regulación de estos aspectos. Finalmente señalan que la regulación metacognitiva se da cuando los individuos usan sus habilidades metacognitivas para dirigir su conocimiento y pensamiento, con base en el conocimiento que tienen sobre su conocimiento y estrategias, cómo, cuándo y por qué las utilizan, utilizan habilidades como planificación, autocorrección y fijación de metas para mejorar el uso de sus recursos cognitivos.

Por otra parte, Pennequin, Sorel, Nanty y Fontaine (2010) señalan que la metacognición es fundamental para tener éxito en la solución de problemas matemáticos ya que permite a las personas manejar de mejor forma sus habilidades matemáticas e identificar las debilidades que tienen y que pueden ser superadas mediante el desarrollo de nuevas habilidades. Por otra parte, Stillman y Mevarech (2010) afirman que la metacognición es un terreno fértil para la investigación en la educación y que es poco lo que se ha hecho sobre metacognición y solución de problemas en la educación matemática.

Lo presentado muestra, como también lo afirma Clements (1999), que es importante que los estudiantes tengan la habilidad de revisar los procesos de pensamiento que realizan para aprender matemáticas, especialmente en la resolución de problemas, y esto los conduce a hacerse preguntas sobre lo que ocurre en la mente de los estudiantes cuando están realizando estas actividades, es decir, que desarrollar habilidades metacognitivas es fundamental para mejorar el aprendizaje de las matemáticas. En ese sentido el objetivo de este estudio fue desarrollar habilidades metacognitivas en estudiantes de secundaria a través del trabajo en solución de problemas relacionados específicamente con funciones.

Antecedentes

Artzt & Armour-Thomas (1992, 1997) han realizado varios estudios encaminados a examinar las percepciones que tienen los estudiantes sobre sí mismos como solucionadores de problemas, en los resultados señalan que dichas creencias tienen influencia tanto en cada persona como en el grupo acorde con diferentes niveles de habilidad metacognitivo. Señalan la importancia de trabajar en grupos pequeños y que es necesario que se propicie la interacción continúa tanto aspectos cognitivos como metacognitivos para que los estudiantes tengan mayor participación y más éxito en la solución de problemas.

Desoete (2007) realizó un estudio con niños de tercer y cuarto grado para investigar el aprendizaje de la matemática y las habilidades metacognitivas. Estas últimas fueron evaluadas, entre otros instrumentos, a través de calificaciones de los maestros y protocolos verbales. A partir de estos resultados se pudo concluir que la metacognición puede ser desarrollada por medio de entrenamiento y tiene un valor agregado en la intervención de los niños pequeños para resolver problemas matemáticos; y que las habilidades metacognitivas se deben enseñar explícitamente con el fin de mejorar y no se puede suponer que se desarrollaran libremente a partir de la experiencia.

Pennequin et al. (2010) en su trabajo con niños de tercer grado señalaron que la metacognición es fundamental para tener éxito en la solución de problemas matemáticos ya que permite a las personas manejar de mejor forma sus habilidades matemáticas e identificar las debilidades que tienen y que pueden ser superadas mediante el desarrollo de nuevas habilidades. Adicionalmente, mostraron que luego de un entrenamiento de habilidades metacognitivas en la solución de problemas, los niños con bajo desempeño tuvieron un mejor resultado frente a la mejora en sus habilidades metacognitivas.

Yimmer y Ellerton (2010) utilizaron un modelo propuesto por ellos mismos en un estudio preliminar en el 2006 para determinar si las habilidades metacognitivas de los estudiantes aumentaban con la edad y para ver si existe relación entre habilidad metacognitiva y la capacidad intelectual como predictores de rendimiento en matemáticas también con respecto a la edad. Trabajaron con veintinueve estudiantes de segundo año de educación secundaria con edades entre 13 y 14 años, y con 30 estudiantes de tercer año de 14 a 15 años de edad. Con respecto al primer objetivo pudieron determinar que sí hay un incremento en uso y calidad de diferentes habilidades metacognitivas a medida con respecto a la edad, pero que esto no se uniforme en todas las fases de la solución de problemas del modelo propuesto y que depende en gran medida de las experiencias de los sujetos. Con respecto al segundo, determinaron, entre otros aspectos, que en el grupo más joven, la capacidad intelectual es el predictor más importante de rendimiento en matemáticas, mientras que en el grupo de mayor edad, de la contribución de la calidad de la metacognición es mayor que la de la capacidad intelectual.

Así mismo, Jacobse y Harskamp (2012) señalaron que el monitoreo y la regulación metacognitiva juegan un papel esencial en la solución de problemas matemáticos., en su estudio con estudiantes de quinto grado, propusieron e hicieron una validación de un instrumento llamado VISA, específicamente para analizar las habilidades metacognitivas en la resolución de problemas matemáticos, el cual les mostró resultados semejantes a los protocolos en voz alta.

Las investigaciones anteriores muestran que luego de un trabajo en solución de problemas se mejora el desarrollo de habilidades metacognitivas, en cada uno de ellos medidas a partir de diferentes instrumentos, la mayoría de carácter abierto. Por otra parte, varias investigaciones muestran el uso del inventario de habilidades metacognitivas (MAI, por sus siglas en inglés) desarrollado por Schraw y Dennison (1994) para determinar las habilidades metacognitivas de las personas (Stewart, Cooper y Moulding, 2007; Young y Fry, 2008; Ulas, Kolaç y Sevim, 2011; Alci y Karatas, 2011), el cual también ha sido traducido a otros idiomas (Akin, Abaci y Cetin, 2007) y adaptado para hacer otras versiones específicas como para docentes (Balcikanli, 2011)

Diseño de la investigación y metodología

Para el desarrollo de la investigación se contó con la población de un colegio oficial de la ciudad de Bogotá (Colombia). La muestra correspondió a 35 estudiantes, todas mujeres, con edades entre los 15 y 18 años, de grado undécimo, y la implementación se realizó durante su clase regular de matemáticas, una vez a la semana durante ocho semanas seguidas.

Las estudiantes resolvieron problemas que involucraban el uso de funciones definidas a trozos y la composición de diferentes tipos de funciones. Los problemas fueron diseñados tomando situaciones de la vida real, incluían preguntas relacionadas con las diferentes fases propuestas en el modelo de Yimer y Ellerton (2006), en general, eran abiertas y de respuesta múltiple. Con base en un estudio empírico, estos autores formularon un modelo de cinco fases

para ser usado en el trabajo en solución de problemas, el camino entre las diferentes fases no es lineal ni unidireccional. Las cinco fases y sus características se describen a continuación:

Fase 1. Comprensión. Esta es una fase de confrontación inicial con el problema para darle sentido, analizar la información relevante y reflexionar sobre el problema.

Fase 2. Transformación y formulación del problema. Se trata de transformar los datos iniciales para idear un plan para resolverlo. En esta fase el estudiante puede explorar mediante análisis de casos, hacer conjeturas y ver su viabilidad o no, elaborar diferentes estrategias y reflexionar sobre la pertinencia de las acciones.

Fase 3. Implementación: En esta fase se ejecuta el plan propuesto y se ejercen permanentemente acciones de monitoreo sobre la ejecución de los mismos, de manera que se pueda identificar si la información se está organizando correctamente o se pueda identificar en qué se está fallando.

Fase 4. Evaluación. Se realizan juicios de aprobación sobre lo adecuado de los planes, acciones y soluciones dadas al problema. Se trata de ver la coherencia entre los resultados alcanzados y las condiciones establecidas que lleven a tomar una decisión sobre si la solución de acepta o se rechaza.

Fase 5. Internalización. Se trata de reflexionar sobre todo el proceso de solución, la confianza en el manejo del proceso y el grado de satisfacción con los resultados obtenidos. Se espera que en esta fase se identifique si el proceso puede adaptarse para ser usado en otras situaciones y cuáles fueron los aspectos críticos

Se escogió este modelo, porque como lo plantean sus autores, tiene características distintivas con respecto a otros, en primer lugar, la reflexión es una parte integral y explícita de cada fase y de todo el modelo; y en segundo lugar, la fase de internalización en otros modelos está inmersa en otras fase, y esta es importante porque muestra el grado de satisfacción o insatisfacción con la solución propuesta y el estudiante reflexiona sobre su confianza en manejo de problemas similares. Durante el desarrollo de la propuesta se privilegió el trabajo en grupo y se hacían momentos de socializaciones generales que permitiera a los diferentes equipos analizar cómo iba su proceso de solución y tomar las medidas necesarias para lograr el objetivo propuesto en cada taller.

Para medir las habilidades metacognitivas se utilizó el Inventario de Habilidades Metacognitivas (MAI) desarrollado por Schraw and Dennison (1994). Este instrumento tiene 52 preguntas referidas a dos categorías el conocimiento de la cognición y la regulación de la cognición, cada una de las cuales se divide en otras subcategorías. En el conocimiento de la cognición se encuentra el conocimiento declarativo (5, 10,12, 16, 17, 20, 32, 46), conocimiento procedimental (3,14, 27, 33) y el conocimiento condicional (15, 18, 26, 29, 35). La regulación de la cognición tiene como subcategorías la planificación (4, 6, 8, 22, 23, 42, 45), la organización (9, 13, 30, 31, 37, 39, 41, 43, 47, 48), el monitoreo (1, 2, 11, 21, 28, 34, 49), la depuración (25, 40, 44, 51, 52) y la evaluación (7, 19, 24, 36, 38, 50). El MAI es de autorreporte y sus opciones de respuesta se encuentran en una escala Likert que se asocia con una escala cuantitativa de la siguiente manera: 1. Completamente en desacuerdo, 2. En desacuerdo, 3. Ni en desacuerdo ni de acuerdo, 4. De acuerdo y 5. Completamente de acuerdo.

Se planteó un diseño de tipo pre experimental, las estudiantes respondieron el MAI antes y después del desarrollo de la propuesta. Las hipótesis planteadas fueron:

Hipótesis experimental: El modelo propuesto por Yimer y Ellerton (2006) para la solución de problemas matemáticos no tiene un efecto en el desarrollo de las habilidades metacognitivas

Hipótesis nula: las estudiantes no desarrollan habilidades metacognitivas a través de la solución de problemas matemáticos utilizando el modelo propuesto por Yimer y Ellerton (2006).

Y como variables las siguientes. Variable independiente: Talleres de solución de problemas matemáticos utilizando el modelo propuesto por Yimer y Ellerton (2006). Variable dependiente: desarrollo de habilidades metacognitivas.

Resultados

Para determinar las diferencias en el desarrollo de las habilidades metacognitivas antes y después del desarrollo de la propuesta, se realizó un análisis de muestras relacionadas con ayuda del SPSS (Statistical Package for the Social Sciences, versión 20). La variable independiente fue los talleres de solución de problemas con uso del modelo propuesto por Yimer y Ellerton (2006) y la variable dependiente correspondió al desarrollo de las habilidades metacognitivas, las cuales fueron evaluadas por medio de las dos categorías del MAI (conocimiento de la cognición - CC, regulación de la cognición - RC) y sus ocho subcategorías (conocimiento declarativo - CD, conocimiento procedimental - CP, conocimiento condicional - CCd, planificación - RP, organización - RO, monitoreo - RM, depuración - RD, y evaluación - RE).

En la tabla 1 se presenta la prueba t para muestras relacionadas para cada una de las dos categorías del MAI, y en la tabla 2 para cada una de las ocho subcategorías.

Tabla 1
Prueba t para muestras relacionadas categorías MAI

	Diferencias relacionadas					t	gl	Sig. (bilateral)
	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media	95% Intervalo de confianza para la diferencia				
				Inferior	Superior			
CC pre CC post	-0,460	0,464	0,078	-0,620	-0,301	-5,870	34	,000
CR pre CR post	-0,255	0,449	0,076	-0,410	-0,101	-3,369	34	,002

Se observa que las estudiantes presentaron mejores habilidades después de la implementación, las pruebas de significancia muestran que en el conocimiento de la cognición t=-5,870 y p= 0,00*;* y en la regulación de la cognición, t=-3,369 y p= 0,002. Por lo que se puede afirmar que existen diferencias significativas entre los promedios de las pruebas, en la gráfica 1 se muestra que las diferencias están a favor de los resultados posteriores a la implementación, es decir, hubo un efecto positivo de la intervención basada en el modelo de Yimer y Ellerton (2006). Por otra parte, al revisar en detalle las subcategorías de cada uno de las categorías del MAI se puede ver que hubo diferencias significativas en cinco de las ocho como se muestra en la Tabla 2.

Tabla 2
Prueba t para muestras relacionadas subcategorías MAI

	Diferencias relacionadas					t	gl	Sig. (bilateral)
	Media	Desviación típ.	Error típ. de la media	95% Intervalo de confianza para la diferencia				
				Inferior	Superior			
CD pre CD post	-0,161	0,473	0,080	-0,323	0,002	-0,161	34	0,052
CP pre CP post	-0,504	0,661	0,112	-0,731	-0,276	-0,504	34	0,000
CCd pre CCd post	-0,717	0,627	0,106	-0,933	-0,502	-0,717	34	0,000
RP pre RP post	0,037	0,615	0,104	-0,174	0,249	0,037	34	0,722
RO pre RO post	-0,446	0,599	0,101	-0,652	-0,241	-0,446	34	0,000
RM pre RM post	-0,435	0,502	0,085	-0,608	-0,263	-0,435	34	0,000
RD pre RD post	-0,488	0,698	0,118	-0,728	-0,248	-0,488	34	0,000
RE pre RE post	0,055	0,644	0,109	-0,166	0,276	0,055	34	0,617

Se observa que se presentaron diferencias significativas en dos subcategorías del conocimiento de la cognición: lo procedimental y condicional. La primera relacionada con el conocimiento que tiene un sujeto sobre el uso que hace de sus estrategias de aprendizaje; la segunda, referida al saber cuándo y por qué utilizar diferentes estrategias de aprendizaje.Las otras tres hacen parte de la categoría de la regulación de la cognición, a saber: la organización proceso realizado por el sujeto y que le permite organizar las actividades en torno al aprendizaje; monitoreo, supervisión que ejerce el sujeto del proceso de aprendizaje durante el desarrollo de tareas; y, depuración, proceso realizado por el sujeto y que le permite identificar debilidades en el aprendizaje y ajustar las estrategias para mejorar su desempeño. En la siguiente gráfica se ratifica que las diferencias se presentaron luego de la intervención, ya que se aumentaron los promedios luego de la misma.

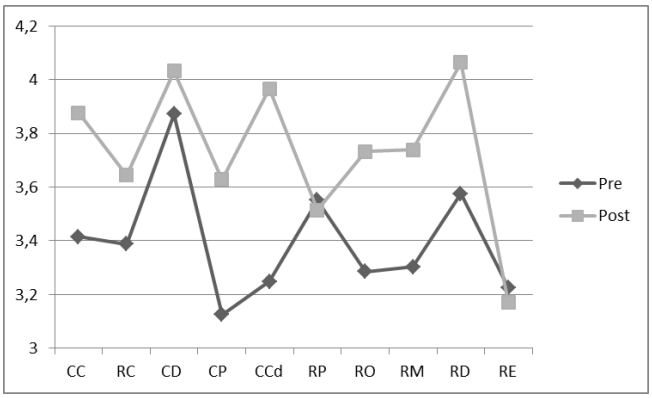


Figura 1. Medias pre y post implementación.

En la gráfica se puede apreciar que también aumentó el promedio en el conocimiento declarativo luego de la intervención, sin embargo, en este caso las pruebas de significancia reflejan que no fue suficiente el aumento.

Discusión y conclusiones

El objetivo central era desarrollar habilidades metacognitivas en estudiantes de secundaria a través del trabajo en solución de problemas matemáticos utilizando el modelo propuesto por Yimer y Ellerton (2006). Los resultados muestran que tanto en el conocimiento de la cognición como en la regulación de la cognición las estudiantes tuvieron diferencias significativas luego de la intervención, es decir, que se pudo comprobar que el trabajo en solución de problemas favorece el desarrollo de habilidades metacognitivas lo cual concuerda con otras investigaciones (Artzt & Armour-Thomas, 1992, 1997; Pennequin et al., 2010, Yimer y Ellerton, 2010,). también se pudo comprobar que es posible, a través de actividades encaminadas de manera explícita al desarrollo de la metacognición, lograr importantes resultados, es decir, si bien la metacognición también se va desarrollando con la edad (Yimer y Ellerton, 2010), es posible mediante entrenamiento desarrollar estas habilidades (Desoete, 2007; Pennequin et al. ,2010). El entrenamiento tuvo un mayor impacto en las subcategorías referidas a que el sujeto tenga un conocimiento sobre los diferentes procedimientos que puede utilizar y reconozca cuáles son los apropiados para cumplir eficazmente con las diferentes tareas de aprendizaje; también las referidas a que las personas organicen apropiadamente las actividades a desarrollar para cumplir una meta de aprendizaje, a monitorear constantemente el desarrollo de las mismas, esto es estar consciente a lo largo de la ejecución de la tarea y de ese modo poder identificar si se presentan fallas o dificultades y tomar acciones que permitan superarlas.

La limitación de este estudio está referida a que se trató de una muestra pequeña y por tanto no pueden hacerse generalizaciones a todo tipo de poblaciones, también a que simplemente se está dando cuenta del desarrollo de habilidades metacognitivas, no pueden hacerse inferencias sobre la solución misma de los problemas.

Futuros estudios pueden orientarse a profundizar en el uso del modelo y hacer diseños de orden cualitativo que muestren la manera en que puede ayudar para la solución de problemas, también es posible que se usen otros instrumentos para analizar el tipo de habilidades metacognitivas que utilizan los estudiantes, y que muestren que efecto tiene en la solución de problemas matemáticos.

Referencias y bibliografía

Akin, A., Abaci, R., & Cetin, B. (2007). The Validity and Reliability of the Turkish Version of the Metacognitive Awareness Inventory. *Educational Sciences: Theory & Practice, 7*(2), 671-678.

Alci, B., & Karatas, H. (2011). Teacher candidates' metacognitive awareness according to their domains and sex. *International Journal of Multidisciplinary Thought, 1*(6), 255-263.

Artzt, A. F., & Armour-Thomas, E. (1992). Development of a cognitive–metacognitive framework for protocol analysis of mathematical problem solving in small groups. *Cognition and Instruction*, 9, 137–175

Artzt, A. F., & Armour-Thomas, E. (1997). Mathematical problema solving in small groups: Exploring the interplay of students' metacognitive behaviours, perceptions, and ability levels. *Journal of Mathematical Behavior*, 16, 63–74.

Balcikanli, C. (2011). Metacognitive Awareness Inventory for Teachers (MAIT). *Journal of Research in Educational Psychology, 9*(3), 1309-1332.

Brown, A. (1987). Metacognition, executive control, self-regulation and other mysterious mechanisms. In W. R. H. Kluwe (Ed.), *Metacognition, motivation and understanding*, 65-116.

Clements, M. (1999). Planteamiento y resolución de problemas: ¿es relevante Polya para las matemáticas escolares del siglo XXI? *SUMA 30*, 27-36.

Curotto, M. M. (2010). La metacognición en el aprendizaje de la matemática. *Revista Electrónica Iberoamericana de Educación en Ciencias y Tecnología*, 11-28.

Desoete, A. (2007). Evaluating and improving the mathematics teaching-learning process through metacognition. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 5(3), 705-730

Flavell, J. (1976). Metacognitive Aspects of Problem Solving: The Nature of Intelligence. *Hillsdale: N.J. Erlbaum.*

Flavell, J. (1979). Metacognition and cognitive monitoring- A new area of cognitive–developmental inquiry. *American Psicology, 34*, 906-911.

Jacobse, A. E., & Harskamp, E. G. (2012). Toward efficient measurement of metacognition in mathematical problem solving. *Metacognition and Learning*, 7, 133-149.

Pennequin, V., Sorel, O., Nanty, I., & Fontaine, R. (2010). Metacognition and low achievement in mathematics: The effect of training in the use of metacognitive skills to solve mathematical word problems. *Thinking and Reasoning, 16(3),* 198-220.

Schraw, G., y Dennison, R. (1994). Assessing metacognitive awareness. *Contemporary Educational Psychology, 19*, 460-475. doi: 10.1006/ceps.1994.1033

Stillman G. and Mevarech Z. (2010). "Metacognition research in mathematics education: From hot topic to mature field", *ZDM Mathematics Education*, Vol. 42, pp. 145–148.

Stewart, P., Cooper, S., & Moulding, L. (2007). Metacognitive Development in Professional Educators. *The Researcher, 21*(1), 32-40.

Shoenfeld, Alan H;. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. En *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (págs. 334-370). New York: MacMillan.

Ulas, H., Kolaç, E., & Sevim, O. (2011). Metacognition awareness levels of Turkish teacher candidates. *e-Journal of New World Sciences Academy, 6(1), 121-134*

Veenman, M., Van Hout-Wolters, B., & Afflerbach, P. (2006). Metacognition and learning: conceptual. *Metacognition Learning*, 3-14.

Wilson, J., & Clarke, D. (2004). Towards the modelling of mathematical metacognition. *Mathematics Education Research Journal, 16*(2), 25-48.

Yimer, A., & Ellerton, N. F. (2006). Cognitive and metacognitive aspects of mathematical problem solving: An emerging model. In P. Grootenboer, R. Zevenbergen, & M. Chinnappan (Eds.), Identities, cultures, and learning spaces (pp. 575–582).

Yimer, A., & Ellerton, N. (2010). A five-phase model for mathematical problem solving: Identifying synergies in pre-service-teachers' metacognitive and cognitive actions. *ZDM*, 42, 245-261.

Young, A., & Fry, J. (2008). Metacognitive awareness and academic achievement in college students. *Journal of the Scholarship of Teaching and Learning, 8*(2), 1-10

Desempenho de alunos dos anos iniciais do ensino fundamental na Resolução de Problemas aditivos e multiplicativos

Jutta Cornelia Reuwsaat **Justo**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
jcrjusto@gmail.com
Janaína Freitas dos **Santos**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
janainafrsantos@gmail.com
Margarete Fátima **Borga**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
mborga@brturbo.com.br
Kelly da Silva **Rebelo**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
rebelokelly@gmail.com

Resumo

O artigo apresenta parte dos resultados de uma pesquisa que teve como intenção contribuir com a aprendizagem de problemas matemáticos e investigou a formação continuada de professores que atuavam no Ensino Fundamental de uma escola pública. O estudo teve duração de 4 anos e iniciou em 2011, em uma escola pública no sul do Brasil. A realização de pré-testes e pós-testes com a resolução de problemas matemáticos aditivos e multiplicativos foi necessária para a coleta de dados que evidenciasse a melhora ou não do desempenho dos alunos no período da formação continuada de seus professores. Neste trabalho apresentamos uma comparação dos resultados dos testes ao longo da pesquisa. Os resultados corroboram que o professor tem um efeito maior do que anteriormente se pensava no desempenho do aluno.

Palavras chave: Educação matemática, resolução de problemas, ensino fundamental.

Introdução

A pesquisa apresentada neste artigo[1] fez parte do projeto aprovado[2] no Edital 2010 do Programa Observatório da Educação (OBEDUC) que se propôs a realizar a formação continuada de professores do Ensino Fundamental. Trata-se de uma pesquisa quase experimental que

[1] Contribuíram para a coleta de dados: a bolsista de iniciação científica, Mauren Poças (PROICT/Ulbra); a doutoranda, bolsista do OBEDUC, Janaína Dias Godinho; e as mestrandas Jamille Mineo Carvalho de Magalhães e Joelma Fátima Torrel Mattei do PPGECIM/Ulbra.

[2]Projeto financiado pela CAPES e pelo INEP no âmbito do Programa Observatório da Educação Edital 2010.

investigou a resolução de problemas matemáticos por estudantes de uma escola pública municipal de São Leopoldo/RS, município localizado no sul do Brasil. A Escola possuía classes da Educação Infantil ao 6º ano do Ensino Fundamental, sendo que os alunos da Educação Infantil e do 1º e 2° ano não fizeram parte das investigações. O objetivo era buscar o aprimoramento no desempenho dos alunos do Ensino Fundamental em resolução de problemas matemáticos aditivos e multiplicativos, qualificando a prática docente a partir de estratégias de formação continuada de professores *in loco*.

O estudo foi realizado durante quatro anos (2011 a 2014) em uma escola do sul do Brasil, Escola Municipal de Ensino Fundamental Franz Louis Weinmann. Entende-se que, para ter resultados mais concretos e verossímeis quanto à influência de um programa de formação continuada, tendo como conteúdo básico a resolução de problemas matemáticos, é preciso que os dados sejam coletados por um período mais longo de tempo. Assim, a cada ano da pesquisa, buscaram-se informações e evidências sobre o ensino e a aprendizagem de problemas matemáticos aditivos e multiplicativos, que alimentaram as ações de formação dos professores regentes de turmas. Deste modo, a formação foi norteada pelas dificuldades em matemática evidenciadas nos testes de desempenho dos educandos, assim como, pelas necessidades e dificuldades relatadas pelos professores da escola.

Resolução de problemas matemáticos e a formação continuada *in loco*

A resolução de problemas é uma atividade indispensável para construir o sentido dos conhecimentos. Os problemas oferecem a possibilidade de construção de conhecimentos matemáticos e de modelização de situações, o que ajuda a compreender o mundo que nos rodeia (Chamorro, 2003). Resolver um problema matemático exige conhecimentos que vão além de realizar contas adequadamente. Para escolher uma operação adequada que resolve um problema é necessário que se tenha uma rede de conceitos sobre as operações matemáticas, construindo significados ligados a diversas situações a que elas pertencem.

Um campo conceitual define-se pelo conjunto de situações cuja compreensão necessita do domínio de vários conceitos de naturezas diferentes. Segundo Vergnaud (1990), a primeira entrada de um campo conceitual é a das situações e a segunda entrada seria a dos conceitos e dos teoremas. Para ele, é através das situações e dos problemas a resolver que um conceito adquire sentido para a criança. O campo conceitual aditivo é definido por Vergnaud (1990) como o conjunto de situações que pedem uma adição, uma subtração ou uma combinação das duas operações para serem resolvidas e, ao mesmo tempo, pelo conjunto dos conceitos e teoremas que permitem analisar essas situações como tarefas matemáticas. Analogamente, o campo conceitual multiplicativo se define, no entanto, com situações de multiplicação e de divisão.

Enfocar a estrutura do problema e não as operações aritméticas utilizadas para resolver problemas se tornou dominante na pesquisa em educação matemática. Esse enfoque está baseado em algumas hipóteses sobre como as crianças aprendem matemática, três das quais Nunes e Bryant (2009) explicitam: a) para compreender adição e subtração corretamente, as crianças também devem compreender a relação inversa entre elas; o mesmo acontecendo com a multiplicação e a divisão. Assim, um foco específico em operações distintas, que era o modo mais típico de pensar no passado, se justifica apenas quando o foco do ensino está nas habilidades de cálculo; b) as relações entre adição e subtração, por um lado, e multiplicação e divisão, por outro lado, são conceituais: elas se relacionam com as conexões entre as quantidades de cada um destes domínios de raciocínio; c) as conexões entre adição e multiplicação e entre

subtração e divisão são processuais: a multiplicação pode ser realizada por adições repetidas e a divisão usando repetidas subtrações. É necessário reconhecer que a conexão entre multiplicação e adição não é conceitual e, sim, está centrada no processo de cálculo, ou seja, o cálculo da multiplicação pode ser feito usando-se a adição repetida porque a multiplicação é distributiva com relação à adição. Assim, supõe-se que, apesar das ligações processuais entre adição e multiplicação, essas duas formas de raciocínio são diferentes o suficiente para serem consideradas como distintos domínios conceituais. Portanto, os termos raciocínio aditivo e multiplicativo são usados para as relações conceituais ao invés de se referirem às operações aritméticas.

A semântica dos problemas matemáticos verbais influencia a compreensão dos problemas pelas crianças. A compreensão do problema implica em que o resolvedor interprete a situação-problema através da semântica e, a partir dela, estabeleça relações entre os números do problema, para então buscar a operação matemática que o auxiliará a encontrar a solução (Justo, 2009).

Vinte tipos de problemas aditivos foram classificados em quatro categorias semânticas: transformação, combinação, comparação e igualação (Miranda *et al*., 2005, García, Jiménez, & Hess, 2006, Orrantia, 2006). Duas dessas categorias referem-se explicitamente a uma ação - transformação e igualação, enquanto as outras duas estabelecem uma relação estática entre as quantidades do problema - combinação e comparação (Orrantia, 2006). Cada categoria semântica pode identificar distintos tipos de problemas dependendo da quantidade desconhecida. Em função da posição da incógnita, ou seja, dependendo de qual valor é desconhecido, os problemas possuem diferentes níveis de dificuldade. Os problemas que são resolvidos pela operação expressa no enunciado são chamados de canônicos e aqueles que exigem a resolução pela operação inversa da situação apresentada são denominados não canônicos.

Em relação aos problemas multiplicativos, Nunes e Bryant (1997) afirmam que há níveis diferentes de raciocínio e classificam os seguintes tipos de problemas: Correspondência um a muitos envolvendo os subtipos: multiplicação, problema inverso de multiplicação e produto cartesiano; Relação entre variáveis (covariação); e Distribuição. Os problemas de correspondência um a muitos envolvem a ideia de proporção, trabalhando com a ação de replicar.

De modo semelhante, os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997) diferenciam quatro grupos de situações envolvendo problemas multiplicativos: Comparativa; Proporcionalidade; Configuração retangular; e Combinatória. Os problemas de combinatória se assemelham aos de produto cartesiano, classificados por Nunes e Bryant (1997).

Smole e Diniz (2001) consideram que o ensino baseado na resolução de problemas precisa compreender a aprendizagem de conceitos, a construção de estratégias e de procedimentos, além de habilidades metacognitivas. A metodologia de resolução de problemas leva em conta as habilidades cognitivas e metacognitivas, correspondentes à leitura do problema, à sua compreensão, à análise da situação, ao planejamento de uma solução, à avaliação de resultados; e está vinculada a aspectos didático-metodológicos, como a discussão em classe de diferentes procedimentos de solução encontrados pelas crianças, promovendo a ampliação dos conhecimentos, a partir da interação entre os alunos e professor (Polya, 1986, 1997, Vergnaud, 1990, 1996, 2003, Krulik & Reys, 1997, Nunes & Bryant, 1997, 2009, Magina *et al*., 2001, Kilpatrick & Swafford, 2005, Vicente *et al*., 2008, Justo, 2009). Os objetivos atitudinais a serem

desenvolvidos para atingir a disposição em aprender são os seguintes: desenvolver confiança e convicção em suas habilidades; estar disposto a correr riscos e perseverar; e gostar de fazer matemática (Van de Walle, 2009).

No âmbito da pesquisa, entende-se que o rendimento escolar do aluno não é consequência direta, ou somente, da prática do professor, pois, se o fosse, não teríamos rendimentos tão diferenciados em uma mesma sala de aula. Sabemos que há outros fatores intervenientes no rendimento escolar. No presente estudo, entretanto, enfatizamos que a prática do professor também é um fator relevante para o rendimento satisfatório ou não do aluno, mesmo que não seja o único.

A pesquisa

Como já citado, o objetivo da pesquisa foi aprimorar o desempenho dos alunos na resolução de problemas matemáticos, através da qualificação da prática docente a partir de estratégias de formação continuada. Para isso, a pesquisa articulou-se da seguinte forma: no início de cada ano letivo, antes dos encontros de formação com os professores da escola, eram realizados pré-testes de resolução de problemas matemáticos com os alunos. Após a formação, no final de cada ano, foram aplicados pós-testes para comparar o desempenho dos estudantes a fim de verificar a influência da formação continuada de professores nas aprendizagens.

No ano de 2014, realizou-se apenas o teste no início do ano letivo, já que não seria possível aplicar um pós-teste devido ao prazo de encerramento da pesquisa. O objetivo deste teste foi verificar a estabilidade das aprendizagens construídas pelos estudantes. Assim, diferente dos anos anteriores, o teste aplicado foi o mesmo da série anterior. Ou seja, no 6º ano foi aplicado o teste realizado pelo 5º ano nos anos anteriores; o 5º ano realizou o teste aplicado no 4º ano em anos anteriores e assim sucessivamente. Por conseguinte, este teste também pode ser analisado como um pós-teste postergado.

Os testes aplicados em cada período eram sempre os mesmos e propunham a resolução de problemas matemáticos aditivos e multiplicativos, sendo 15 problemas para o 3º ano e 16 problemas para o 4º, 5º e 6º anos. As crianças recebiam os problemas por escrito e resolviam da forma que considerassem conveniente (com ou sem uso de material de contagem, através de desenhos). Deveriam, no entanto, escrever um cálculo matemático ou expressar através de desenho a estratégia utilizada para resolver o problema, assim como, fornecer a resposta escrita ao questionamento proposto pelo problema.

Ao final do primeiro ano da pesquisa (2011), após a correção e análise dos pós-testes, considerou-se a possibilidade de que pelo menos uma turma de alunos tivesse recebido auxílio do aplicador (professora regente) para resolução dos problemas no pós-teste, visto que houve grande diminuição nos erros cometidos por estes estudantes. Assim, nos anos seguintes, buscando uma padronização da aplicação dos testes, os mesmos foram aplicados por uma bolsista de iniciação científica ligada diretamente à pesquisa e por duas mestrandas e uma doutoranda vinculadas ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática.

Os encontros de formação foram realizados em grupo, na própria escola, fora do período de aula. Embora tenha sido um projeto da escola, a adesão à formação por parte dos professores regentes de turma era voluntária. Desta forma, 13 de 23 professores participaram dos encontros no primeiro ano da pesquisa (2011). Nos anos seguintes, a formação contou com a presença de todos os professores da escola investigada, inclusive professores cujos alunos não faziam parte

da pesquisa. O programa de formação docente pretendeu assegurar o conhecimento dos diferentes problemas matemáticos pertencentes aos campos aditivo e multiplicativo e, ainda, privilegiar um componente psicopedagógico que permitisse ao professor aprender como atuar na sala de aula para favorecer a aprendizagem dos problemas matemáticos. Nos encontros com os professores, foi repensada a prática como o espaço de aprendizagem e de construção do pensamento prático do professor, permitindo e provocando o desenvolvimento de capacidades e competências sempre em diálogo com a situação real encontrada (Justo, 2009). Coube às professoras pesquisadoras organizar e coordenar o processo na escola, propiciando uma assessoria permanente ao trabalho do professor (Santos & Justo, 2013).

Discussão dos resultados

Para realizar a correção dos testes categorizou-se os erros cometidos pelos estudantes. Os erros considerados na correção foram de raciocínio, de procedimento de cálculo, de falta de atenção, de erro na resposta escrita e em branco.

Entendeu-se por erro de *raciocínio*, quando os sujeitos não conseguiam chegar ao cálculo que resolvesse o problema. Os de *procedimento de cálculo* ocorriam quando os sujeitos encontravam o cálculo adequado para resolução do problema, no entanto não conseguiam desenvolver este cálculo corretamente. Os erros de *falta de atenção* surgiam quando os sujeitos apresentavam o raciocínio adequado, desenvolviam o procedimento de cálculo correto, porém, copiavam erradamente os números do problema, ou ainda realizavam a operação correta, mas indicavam outra. O erro na *resposta escrita* ocorria quando o problema era solucionado corretamente, mas a resposta escrita não coincidia com a resposta encontrada, ou a resposta escrita não respondia a pergunta proposta pelo problema. Houve, ainda, questões em que os estudantes não tentavam resolver o problema, deixando o mesmo *em branco*. Outros casos de erros não puderam ser avaliados, por exemplo, quando o sujeito só escrevia a resposta sem apresentar o desenvolvimento da questão.

É importante enfatizar que a sistemática de correção dos testes considerou o processo de resolução do problema desenvolvido pelo aluno, buscando identificar como o aluno chegou àquele resultado e o porquê não encontrou a resposta adequada à questão proposta no problema matemático.

Neste trabalho apresentamos uma comparação dos resultados de 2012, 2013 e 2014. Uma série de cruzamentos de dados puderam ser analisados. No entanto, para este texto, analisam-se os pré-testes de 2012 e 2013, e o pós-teste postergado de 2014.

Conforme já informado, em 2011, constatou-se a possibilidade de intervenções de professores na aplicação dos testes, o que pode ter influenciado o desempenho de algumas turmas. Portanto, nos anos seguintes, 2012 a 2014, modificou-se a forma de aplicação dos testes, sendo, então, possível a comparação do desempenho apenas neste período.

Comparação dos resultados de 2012, 2013 e 2014

Para verificar o desempenho dos estudantes ao longo da pesquisa tornou-se necessário comparar os resultados dos testes dos anos de 2012, 2013 e 2014. Cabe lembrar que o teste aplicado em 2014 foi o mesmo da série anterior. Ou seja, no 6º ano foi aplicado o teste realizado pelo 5º ano nos anos anteriores; o 5º ano realizou o teste aplicado no 4º ano em anos anteriores e, assim, sucessivamente.

Portanto, as comparações dos dados e análise apresentadas a seguir foram realizadas de forma longitudinal. Desta maneira, procurou-se evidenciar os avanços dos mesmos grupos de alunos, ou seja, das mesmas crianças ao longo dos anos.

Comparação do 3º Ano de 2013 com o 4º Ano de 2014

Esta comparação tornou-se possível, pois o teste aplicado em 2014 no 4º ano foi o mesmo da série anterior, ou seja, 3º ano. Desta forma, os testes possuíam o mesmo número de questões.

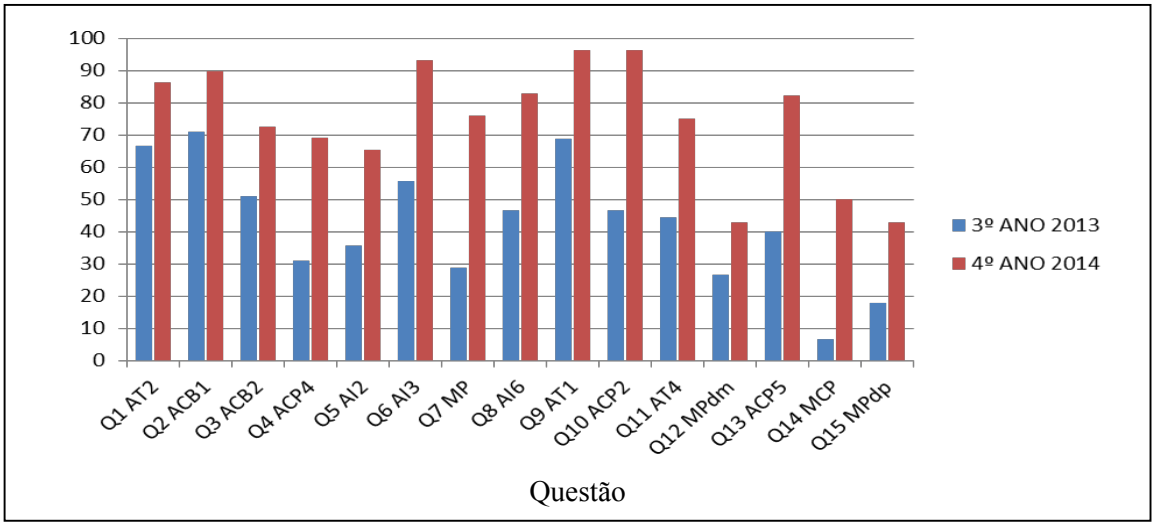


Gráfico 1. Percentual de acertos por questão – 3º Ano 2013 e 4º Ano 2014
Fonte: A Pesquisa.

Pode-se observar um maior percentual de acerto em todas as questões, o que evidencia um melhor desempenho dos estudantes. Os problemas multiplicativos de comparação (MCP), de proporcionalidade (MP), com a ideia de divisão por partilha (MPdp) e de divisão por medida (MPdm) foram os problemas com menor percentual de acerto em 2013. Com exceção do problema multiplicativo (MP), os demais continuaram representando a maior dificuldade em 2014. O exemplo a seguir apresenta o problema com menor índice de acerto no 3º ano. Trata-se de um problema multiplicativo de comparação, no qual quantidades que estão sob relação constante são comparadas.

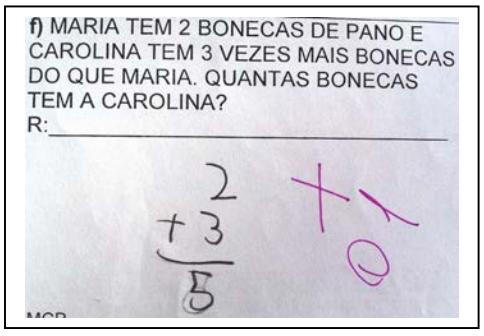


Figura 1. Problema com menor índice de acerto no 3º ano.

O baixo índice de acerto nos problemas multiplicativos nestas séries pode ser explicado por estes problemas não terem sido trabalhados de maneira formal durante o 2º ano do Ensino Fundamental. Estes problemas são introduzidos formalmente no currículo da Escola a partir do

3º e 4º ano, o que justifica a dificuldade encontrada pelos alunos em resolver este tipo de problema.

Comparação do 4º Ano de 2013 com o 5º Ano de 2014

Ao compararmos os resultados do 4º Ano de 2013 com o 5º Ano de 2014, observou-se um aumento no percentual de questões nas quais os estudantes obtiveram êxito na resolução.

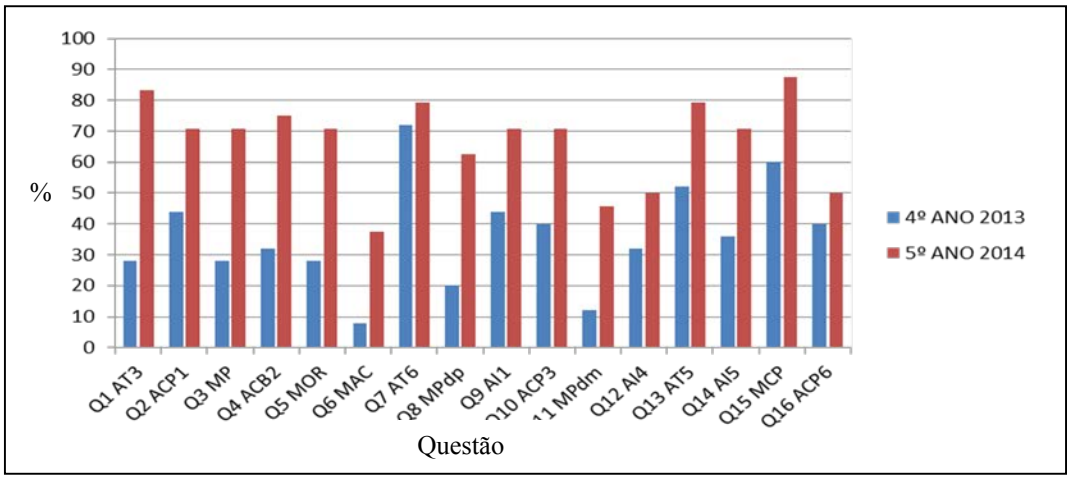


Gráfico 2. Percentual de acertos por questão – 4º Ano 2013 e 5º Ano 2014.
Fonte: A Pesquisa.

Embora quatro questões, dois problemas aditivos (AI4 e ACP6) e dois problemas multiplicativos (MAC e MPdm), ainda tenham apresentado baixo índice de acerto, inferior a 60% em 2014, é importante salientar a melhora do desempenho deste grupo de estudantes. Em 2013, das 16 questões contidas no teste, apenas uma questão (problema aditivo AT6) apresentou uma porcentagem de acerto acima de 60%. Já, em 2014, 12 questões apresentaram índice de acerto superior a 60%.

Comparação entre o 4º Ano de 2012, 5º Ano de 2013 e 6º Ano de 2014

Esta comparação revela a evolução do mesmo grupo de estudantes ao longo dos três anos de pesquisa.

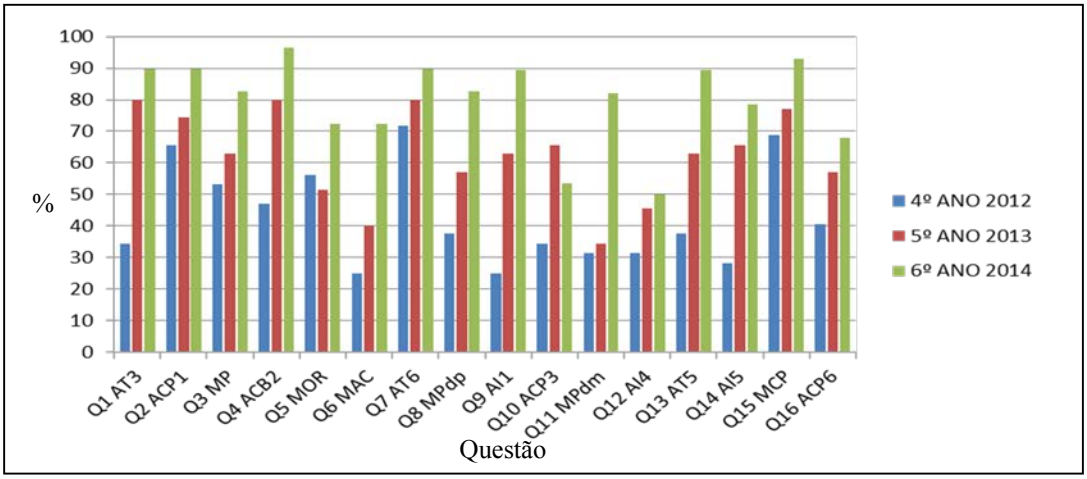


Gráfico 3. Percentual de acertos por questão – 4º Ano 2012, 5º Ano 2013 e 6º Ano 2014.
Fonte: A Pesquisa.

Com exceção do problema aditivo de comparação (ACP3), todas as questões apresentaram avanços no percentual de acertos ao longo da pesquisa. Percebeu-se que do 4º para o 5º ano houve progressos na resolução dos problemas de estrutura multiplicativa, porém, esta evolução foi mais significativa do 5º para o 6º ano, o que demonstrou uma maior familiaridade dos estudantes com problemas desta estrutura.

A maior dificuldade foi encontrada nos problemas aditivos não canônicos de igualação (AI4) e comparação (ACP6 e ACP3). O exemplo abaixo apresenta a questão de igualação (AI4) que, como se pode ver no gráfico 3, em nenhum momento ultrapassou o percentual de 50% acerto.

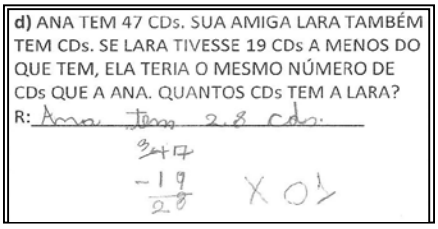


Figura 2. Problema com menor índice de acerto.

O exemplo usado mostra um problema de igualação não canônico. O enunciado apresenta uma expressão que lembra uma subtração "19 CDs **a menos do que** tem". Este fato, provavelmente, influenciou o estudante a resolver o problema com um cálculo de subtração, levando-o ao erro. Mais um aspecto a ser considerado é que a categoria semântica de igualação é composta por duas categorias, pois, para resolvermos estes problemas, é necessário realizar a comparação entre as quantidades e a mudança (transformação) de uma dessas quantidades para que a igualdade seja estabelecida.

A evolução dos estudantes pode ser evidenciada pelo percentual de acerto das questões ao longo dos três anos de pesquisa. Em 2012, apenas três problemas (MCP, AT6 e ACP1) apresentaram o índice de acerto maior que 60%. Já em 2013 o número de questões que ultrapassou esta marca subiu para 10. Em 2014, do total de 16 questões, 14 apresentaram o índice superior a 60%, sendo que dessas, 10 questões superaram os 80% de acerto.

A melhora no desempenho dos estudantes, evidenciada ao longo da pesquisa, também pode ser observada através dos resultados da Avaliação Nacional do Rendimento Escolar - Anresc (também denominada "**Prova Brasil**"). O gráfico abaixo apresenta o desempenho dos estudantes do 5º Ano desta escola em **Matemática na Prova Brasil** de 2009, 2011 e 2013.

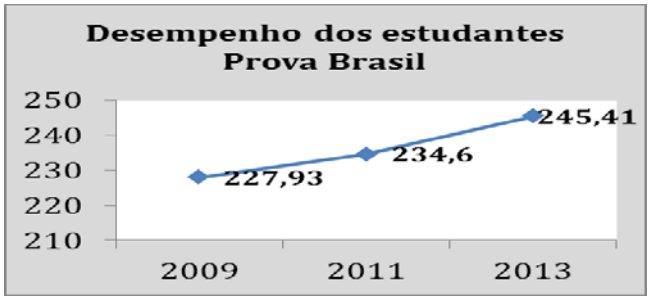


Gráfico 4. Desempenho dos estudantes participantes da pesquisa em Matemática na Prova Brasil, 2009, 2011 e 2013.
Fonte: Elaborado pelas pesquisadoras a partir dos resultados da Prova Brasil de Matemática de 2009, 2011 e 2013 disponíveis em http://portal.inep.gov.br/web/saeb/resultados.

Observa-se uma melhora no desempenho dos estudantes de 2009 para 2011. De 2011 para 2013, período em que se realizou a pesquisa nesta escola, ou seja, ocasião em que os professores participaram da formação continuada verifica-se que há uma inclinação mais ascendente do que no período anterior, evidenciando, desta forma, a influência da formação continuada no desempenho dos educandos.

Mendonça *et al*. (2007) justificam que esse é um resultado já esperado, pelo menos em parte, devido ao grau de maturidade inerente a faixa etária das séries estudadas. Conforme já indicado por Vergnaud (1990), um campo conceitual é construído normalmente pela criança através da experiência na vida diária e na escola, sendo um conhecimento desenvolvido dentro de um longo período de tempo por meio da experiência, maturação e aprendizagem.

A queda significativa no número de erros cometidos pelos estudantes, assim como o aumento no percentual de acerto das questões evidenciados nos resultados apresentados, demonstram que, ao longo da pesquisa, os estudantes encontraram, gradativamente, mais facilidade em encontrar o cálculo que resolvia adequadamente o problema, como também efetuar este cálculo corretamente. Estes resultados corroboram os resultados de outras pesquisas da área da eficácia escolar e o que vários pesquisadores atualmente estão apontando: que o professor tem um efeito maior do que anteriormente se pensava no desempenho do aluno (The Boston Consulting Group & Instituto Ayrton Senna, 2014, Brooke & Soares, 2008, Justo, 2009, Marzano, Pickering & Pollock, 2008).

Concluindo

Acreditamos que a maneira como o professor ensina a resolução de problemas matemáticos faz diferença na aprendizagem do aluno.

As turmas tiveram melhora em seu desempenho porque, segundo nossa interpretação, o programa de formação foi relevante para a melhor aprendizagem das crianças. Da mesma forma, o avanço gradual na Prova Brasil de Matemática de 2009 a 2011 e o avanço mais acentuado de 2011 a 2013 nos levam a pensar que, quando há maior intencionalidade no ensino, maior planejamento, maior acompanhamento do professor sobre a aprendizagem, assim como maior envolvimento dos alunos sobre o seu fazer, a aprendizagem avança melhor.

Apesar disso, entendemos que o conhecimento do conteúdo e o conhecimento didático do conteúdo não são os únicos saberes necessários ao professor e nem os únicos fatores intervenientes para a aprendizagem. Certamente, a complexidade que encontramos em cada sala de aula relacionada a características individuais dos estudantes, composição das turmas, características individuais e profissionais dos professores, entre tantos outros fatores têm a sua influência. O jeito de olhar e entender o espaço e o tempo escolar precisa compreender a escola como um lugar de individualidades e de coletividades, de diversidades e de igualdades, de diferentes aprendizagens, de existência própria e independente do querer de uma única pessoa (o professor ou o aluno); a escola é um espaço de relações, por isso dinâmico. O espaço e tempo escolar exigem uma ação planejada, intencionada pelo professor, prevendo uma reação dos estudantes que nem sempre será a esperada por ele – o que solicita uma nova ação planejada e intencional por parte do professor. Ação e reação previsível, mas incerta.

Referências

Brasil. Secretaria de Educação Fundamental. (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEF.

Brooke, N., & Soares, J.F. (Orgs.). (2008). *Pesquisa em eficácia escolar*. Belo Horizonte: Editora UFMG.

Chamorro, M. C. (Coord.). (2003). *Didáctica de las Matemáticas para Primaria*. Madrid: Pearson Educación.

García, A. I., Jiménez, J. E., & Hess, S. (2006). Solving Arithmetic Word Problems. *Journal of Learning Disabilities*, 39(3), 270-281, May/June.

Justo, J. C. R. (2009*). Resolução de problemas matemáticos aditivos: possibilidades da ação docente* (Tese de Doutorado em Educação). Programa de Pós-Graduação em Educação, Faculdade de Educação. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre: UFRGS.

Kilpatrick, J., & Swafford, J. (Eds.). (2005). *Helping Children Learn Mathematics***.** Washington, DC, USA: National Academy Press.

Krulik, S., & Reys, R. E. (1997). *A resolução de problemas na matemática escolar.* São Paulo: Atual.

Magina, S., Campos, T. M. M., Nunes, T., & Gitirana, V. (2001). *Repensando Adição e Subtração***.** São Paulo: PROEM Editora.

Marzano, R. J., Pickering, D. J., & Pollock, J. E. (2008). *O ensino que funciona.* Porto Alegre: Artmed.

Mendonça, T. M., Pinto, S. M., Cazorla, I. M., & Ribeiro, E. (2007). As estruturas aditivas nas séries iniciais do Ensino Fundamental: um estudo diagnóstico em contextos diferentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10*(2), 219-239.México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa,

Miranda, A. C., Acosta, G. E., Tárraga, R. M., Fernández, M. I., & Rosel, J. R. (2005). Nuevas tendencias en la evaluación de las dificultades de aprendizaje de las matemáticas: el papel de la metacognición. *Revista de Neurologia*, *40*(supl 1), 97-102.

Nunes, T., & Bryant, P. (1997). *Crianças fazendo matemática.* Porto Alegre: Artmed.

Nunes, T., & Bryant, P. (2009). Paper 4: Understanding relations and their graphical representation. *Key understanding in mathematics learning*. Nuffield Foundation, London. Recuperado em 20 maio, 2011, de http://www.nuffieldfoundation.org

Orrantia, J. (2006). Dificultades en el Aprendizaje de las Matemáticas: una perspectiva evolutiva. *Revista de Psicopedagogia*, *23*(71), 158-180.

Polya, G. (1986). *A arte de resolver problemas.* Rio de Janeiro: Interciências.

Polya, G. (1997). Sobre a resolução de problemas de matemática na high school. In: Krulik, S., Reys, R.E. *A resolução de problemas na matemática escolar.* São Paulo: Atual.

Santos, J. F., & Justo, J. C. R. (2013). Da Prática à Teoria: Explorando Novos Caminhos de Formação Continuada no Lócus Escolar. In *Anais do VI CIEM*. VI Congresso Internacional de Ensino da Matemática, Canoas.

Smole, K.S., & Diniz, M. I. (Orgs). (2001). *Ler, escrever e resolver problemas*. Porto Alegre: Artmed.

The Boston Consulting Group. Instituto Ayrton Senna. (2014). *Formação continuada de professores no Brasil: Acelerando o desenvolvimento dos nossos educadores.* São Paulo. Recuperado em 16 agosto, 2014, de http://educacaosec21.org.br/formacaocontinuada/

Van de Walle, J. A. (2009). *Matemática no Ensino Fundamental*. Porto Alegre: Artmed.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, *10*(23), 133-170.

Vergnaud, G. (1996). A Trama dos Campos Conceituais na Construção do Conhecimento. *Revista do Geempa*, 9-19. Porto Alegre.

Vergnaud, G. (2003). A gênese dos campos conceituais. In E. P. Grossi (Org.), *Porque ainda há quem não aprende?* A teoria. Petrópolis, RJ: Vozes.

Vicente, S., Orrantia, J., & Verschaffel, L. (2008). Influencia del conocimiento matemático y situacional en la resolución de problemas aritméticos verbales. *Infancia y Aprendizaje*, *31*(4), 463-483.

Determinaciones mutuas entre certeza, duda y comprensión

Benjamín **Martínez** Navarro
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional
México
benjaminmartinezn@gmail.com
Mirela **Rigo** Lemini
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional
México
mrigolemini@gmail.com

Resumen

La investigación cuyos resultados parciales aquí se exponen se centra en el análisis interpretativo de estados internos (como la certeza, la presunción o la duda) en torno a hechos de las matemáticas que vivencian asesores en formación que participan en un foro virtual; específicamente se examinan posibles determinaciones mutuas que se dan entre esos estados y la construcción de conocimientos. Para el análisis que se expone en este documento se elaboró un marco interpretativo sobre la comprensión.

Palabras clave: certeza, duda, comprensión, sustentos, foro virtual.

Antecedentes

La investigación cuyos resultados parciales aquí se exponen se centra en el análisis de estados internos como el convencimiento, la convicción, la certeza, la presunción o la duda en torno a hechos de las matemáticas (los que se representan a través de afirmaciones de contenido matemático) que vivencian agentes de clase, específicamente, estudiantes-asesores (i. e., asesores en formación) que participan en un foro virtual. En otros reportes (Martínez & Rigo, 2013; Martínez & Rigo, 2014[a]; Martínez & Rigo, 2014[b]) se han analizado las relaciones entre la comprensión y esos estados internos, que aquí se les denominan 'estados epistémicos'. Específicamente en Martínez & Rigo (2013) se mostró el caso de una estudiante-asesora que acompañaba y retro-alimentaba su certeza en los hechos de las matemáticas con su comprensión conceptual. En este documento se expone cómo la estudiante-asesora modificó sus estados internos conforme modificó su comprensión.

Investigaciones sobre los estados epistémicos –sostienen Martínez & Rigo (2014[b]) - se han orientado hacia el ámbito del profesional de las matemáticas como al de su instrucción. Para el matemático, el convencimiento y la certeza son motores que impulsan su actividad en las etapas de desarrollo heurístico, y una guía para certificar sus resultados durante los procesos de prueba (Tymoczko, 1986). La comunidad de educación matemática ha realizado diversos estudios que implícitamente parten del supuesto de que, a semejanza de lo que sucede con los matemáticos, la certeza también importa en la construcción del conocimiento matemático en el aula. Algunos de esos trabajos se han recreado en ambientes extra-clase y se han focalizado ya sea en los estudiantes (e. g., el de Balacheff, 2000) o bien en los profesores (e.g., el de Harel & Sowder, 2007); otros, desarrollados en ambientes intervenidos de clase, se han centralizado básicamente en alumnos (e. g., el de Krummheuer, 1995). A diferencia de esos estudios, en el presente se

analizan algunas posibles mutuas determinaciones que se dan entre esos estados epistémicos y la construcción de conocimientos en el contexto de un foro virtual.

Marco interpretativo

Los esquemas epistémicos

Los alumnos suelen sustentar sus afirmaciones o procedimientos de contenido matemático de modos diversos. Rigo (2013) ha propuesto una clasificación de estos recursos de sustentación a los que llama "esquemas epistémicos"; ella sugiere que algunos de esos esquemas se organizan y orientan en torno a razones matemáticas, como los que poseen una estructura lógica de tipo deductivo (e. g., ejemplos genéricos o las instanciaciones, v. Balacheff, 2000), o los que surgen a partir de la acumulación de evidencia empírica (e. g., a partir del análisis de casos particulares). En otros casos -continúa Rigo (2013)-, los esquemas que una persona construye para sustentar la verdad de un enunciado matemático responden a consideraciones extra-matemáticas haciéndose a un lado el contenido disciplinar del enunciado, como por ejemplo, cuando un estudiante explica el uso de un algoritmo recurriendo a su facilidad ("es más fácil resolverlo así"), o a la autoridad del profesor ("porque me lo dijo la maestra"), en cuyo caso se está soportando la verdad de las aseveraciones en esquemas epistémicos basados en razones prácticas y en la autoridad, respectivamente. Otro tipo de esquemas basados en consideraciones extra-matemáticas son los que se basan en la familiaridad, mismos que son resultado de la repetición, la memorización y las costumbres. Los esquemas que se basan en la repetición pueden provenir de reiterar sistemáticamente algún enunciado o hecho de las matemáticas, mientras que otros esquemas pueden proceder de costumbres institucionales en torno a lo que deben ser las tareas matemáticas que deben resolver los niños en la clase, como cuando los estudiantes sustentan la validez de un algoritmo por ser habitual o por su facilidad.

Instrumento para distinguir estados epistémicos de certeza, presunción o duda.

En la investigación se considera, siguiendo lo expuesto en Martínez & Rigo (2014[b]), que, asociadas a sus aseveraciones de contenido matemático, los sujetos pueden experimentar estados internos de certeza (cuando le asocian el máximo grado de probabilidad a lo creído) o de presunción o duda (cuando le asocian grados menores de probabilidad a lo creído). A estos estados Rigo (2013) les llama "estados epistémicos", como se dijo. Para fijar ideas, en la investigación nos hemos constreñido sólo a los estados epistémicos aludidos (certeza y duda, dejando fuera el convencimiento, la convicción o la persuasión, entre muchos otros).

En el diseño del instrumento teórico-metodológico que se propone a continuación (v. Martínez & Rigo, 2013) convergieron perspectivas provenientes de distintas disciplinas: de la filosofía (Wittgenstein), la psicología (Bloom, Hastings & Madaus), la sociología (Abelson) y la educación matemática (Rigo, 2011). Particularmente relevante para el estudio resultó la aportación de trabajos lingüísticos como los de Hyland (1998), que permitieron recurrir al análisis del meta-discurso de los participantes en el foro virtual, con el fin de desvelar las intenciones comunicativas (muchas inconscientes) que ellos proyectan a través de su escritura.

En esta investigación se considera que una persona (que participa en un foro virtual) vivencia un grado de certeza, o bien de presunción o duda, en un enunciado matemático, cuando cumple con alguno(s) de los criterios que aparecen en la Tabla 1. Estos criterios son suficientes pero no necesarios.

Tabla 1
Instrumento para distinguir estados epistémicos de certeza y presunción o duda

Elementos del habla	La persona recurre a enfatizadores del lenguaje que pueden revelar un mayor grado de compromiso con la verdad de lo que dice, por ejemplo, cuando la persona usa el modo indicativo de los verbos (e. g., tengo).
Acción	El sujeto realiza acciones consecuentes con su discurso.
Familiaridad	La persona recurre a esquemas epistémicos basados en la familiaridad (resultado de la repetición, la memorización y las costumbres).
Determinación	La persona manifiesta de manera espontánea y determinada su adhesión a la veracidad de un enunciado matemático indicando algún grado de determinación. Este grado puede ser mayor cuando el sujeto sostiene una creencia, a pesar de tener al colectivo en su contra. Incluso puede llegar a esforzarse por convencer a otros de la verdad de su posición.
Interés	Las participaciones de una persona que interviene con interés en torno a un hecho matemático específico en un foro virtual son:
	-Sistemáticas. Es decir, el sujeto contesta todas las preguntas dirigidas a él de la manera más detallada posible.
	-Informativas. Sus afirmaciones, procedimientos y/o resultados son suficientemente informativos (no necesariamente correctos).
Consistencia	La persona muestra consistencia en sus distintas intervenciones.

Indicadores de comprensión

En ese documento y siguiendo a Schoenfeld (2011), se establece una diferencia entre el conocimiento procedimental "basado en cómo hacer las cosas", y el conocimiento conceptual "asentado en los racionales (*rationales*) intelectuales a través de los cuales se explica cómo las cosas funcionan juntas, y porqué así sucede" (2011, p. 26). De lo anterior y de otras consideraciones (provenientes de Rigo, 2013; Duval, 2009; Salcedo, 2007) se desprendieron algunos indicadores para caracterizar la comprensión conceptual en general y la comprensión procedimental (aplicada a la variable y al signo igual), que se describen en lo que sigue.

Sobre la comprensión conceptual

En el presente documento fue necesario incluir, dentro de los criterios sobre comprensión conceptual elaborados en trabajos previos (Martínez & Rigo, 2014[b]) aspectos relacionados con la teoría de la cognición implícita, conforme a la cual la construcción del conocimiento (en particular del conceptual) está basada en procesos de explicitación de representaciones implícitas. Los fenómenos de cognición implícita, que subsisten inconscientemente, se caracterizan porque el individuo dispone de representaciones activas de las que él no puede informar, o sólo lo puede hacer parcialmente, aunque esas representaciones estén influyendo en su conducta (Dienes y Perner, 1999). Estas consideraciones aparecen en la Tabla 2 bajo el rubro de 'Explicitación' y de 'Transferencia'.

Tabla 2
Indicadores de comprensión conceptual (aplica a todo concepto matemático)

CC.1. Esquemas epistémicos basados en razones matemáticas	El nivel de comprensión conceptual está relacionado con el tipo de esquema epistémico que se pone en juego: a comprensiones más profundas le corresponden esquemas epistémicos basados en razones matemáticas más generales (e. g. esquemas de tipo deductivo apoyado en axiomáticas abstractas) y a comprensiones de menor penetración le atañen esquemas de menor generalidad (como las instanciaciones o el análisis de casos particulares). Estos esquemas deben de converger o ser consistentes con los esquemas epistémicos de la matemática disciplinar o la matemática escolar.
CC.2. Explicitación de representaciones implícitas	La persona da muestras de haberse percatado de representaciones implícitas pero que estaban presentes en su conducta.
CC.3. Transferencia	La persona interpreta adecuadamente un concepto en diferentes contextos.
CC.4.Interpretación acorde a la acepción matemática aceptada	La persona confiere a las representaciones simbólicas y a los conceptos matemáticos interpretaciones que son acordes con la acepción matemática aceptada (de la disciplinar y/o escolar).
CC.5.Claridad y precisión	La persona explica sus puntos de vista con claridad y precisión (y preferentemente se apega a los puntos de vista disciplinares avalados intersubjetivamente).
CC.6.Conocimiento promedio	La persona tiene más conocimiento que lo que posee el promedio.

Se dice que una persona tiene bajos niveles de comprensión conceptual si activa esquemas epistémicos extra-matemáticos y/o no cumple con la mayoría de los criterios anteriores. En relación al signo del signo igual, se dice que una persona tiene incomprensión conceptual si lo interpreta como indicador, separador y como operador (ver apartado siguiente sobre signo igual), incumpliendo así el criterio CC.4.

Sobre la variable y la comprensión procedimental

En el Modelo 3UV se distinguen distintos aspectos de la variable como incógnita (Ursini, Escareño, Montes & Trigueros, 2005). Algunos de ellos se describen en la Tabla 3.

Tabla 3
Aspectos de la variable como incógnita del modelo 3UV. Indicadores de comprensión procedimental.

La variable como incógnita	
I1	Reconocer e identificar la presencia de algo desconocido que puede ser determinado.
I5	Simbolizar las cantidades desconocidas y utilizarlas para plantear ecuaciones.
I2	Interpretar la variable que aparece en una ecuación como un valor específico.
I4	Determinar la cantidad desconocida que aparece en ecuaciones o problemas.
I3	Sustituir la variable por el valor o valores que hacen de la ecuación un enunciado verdadero.

En este escrito se considera que un estudiante tiene una **comprensión procedimental** cuando en sus producciones cumplen con los criterios de la Tabla 3 y llegan a resultados correctos.

Sobre el signo igual y la comprensión procedimental

En el ámbito de las matemáticas, Bouvier y George (2000) definen a la igualdad como una relación binaria que asocia símbolos que representan un mismo objeto matemático. Dentro del álgebra escolar, Godino y Font (2003) entienden a la igualdad asociada a expresiones que contienen el signo igual y que indican dos maneras de designar o escribir un mismo objeto matemático. Estos autores distinguen tres tipos de igualdades. El primer tipo (identidad) se refiere al caso en el que la igualdad es verdadera para cualquier valor que tomen las variables. El segundo tipo (ecuación o *equivalencia condicional*) se refiere al caso en el que la igualdad incluye variables pero solo es cierta para determinados valores; a ésta la denominan ecuación. Finalmente, el tercer tipo (las fórmulas) son aquellas que expresan una relación de dependencia entre dos o más variables. Estas interpretaciones del signo igual coinciden con los distintos usos de la variable que distingue el Modelo 3UV (Ursini 2005) que en este documento se ha adoptado como parte del marco para distinguir la comprensión en torno al concepto de variable. En el caso en el que las producciones de los estudiantes coincidan con estas interpretaciones del signo igual y lleguen a resultados correctos, en el marco de este escrito se dice que ellos poseen una **comprensión procedimental** del signo igual.

Por otra parte, los estudiantes confieren distintas interpretaciones al signo igual, algunas de las cuales resultan ser matemáticamente incorrectas o imprecisas. Molina (2006) categorizó estos usos del signo igual. Entre ellos se encuentra el signo igual como *operador*, interpretación en el que dicho signo es usado en sentencias unidireccionales compuestas por una cadena de operaciones dispuestas a su izquierda y un resultado a su derecha (e.g. 12+3=15+21=36-9=25). Otro uso es el signo igual como *separador*, mediante el cual se utiliza como separador de los pasos realizados en la resolución de una actividad (e. g. X+5=10+5 = 15=15).Un uso más al que hace referencia la autora es el de indicador de cierta *conexión o correspondencia*, interpretación imprecisa del signo igual con base en el cual se hace referencia a objetos no matemáticos o de distinta naturaleza (e. g. estuche=3).

Consideraciones relacionadas con el método

La investigación cualitativa que aquí se presenta está centrada en un estudio de caso de tipo interpretativo (Denzin & Lincoln, 1994). El estudio empírico se llevó a cabo en el Diplomado de Temas Fundamentales de Álgebra impartido por el Instituto Nacional para la Educación de los Adultos (México); el diplomado tiene el propósito de fortalecer la formación de personas que asesoran en temas de álgebra a adultos que se encuentran en proceso de obtener su certificado de secundaria (estudiantes-asesores). El diplomado está compuesto por cuatro Módulos de contenido matemático y cada módulo está organizado por semanas que contienen, entre otras cosas, un foro virtual al que deben ingresar los estudiantes-asesores. Para este reporte se tomaron cuatro participaciones correspondientes al Módulo cuatro en el que se abordan aspectos de la variable como incógnita: la primera participación fue tomada de la semana uno en la que se busca conocer los conocimientos previos con los que cuentan los asesores para resolver situaciones que involucren incógnitas; la segunda y tercera participación fueron tomadas de la semana tres cuyo objetivo es profundizar en la resolución de ecuaciones; finalmente, la cuarta participación se tomó de la semana cuatro en la que se abordan situaciones problemáticas que pueden modelarse con sistemas de ecuaciones .Las participaciones elegidas fueron publicadas por una estudiante-asesora que llamaremos Jeymi y su elección obedece a que en esas participaciones la estudiante aborda aspectos de la variable como incógnita, hace uso del signo igual y ella parece experimentar distintos estados internos. Martínez fungió como tutor del

grupo, quien deliberada y sistemáticamente instó a que sus estudiantes explicitaran los sustentos en los que apoyaban sus afirmaciones.

Análisis de resultados

En la semana uno del Módulo cuatro se les solicitó a los estudiantes resolver la siguiente situación problemática: Una pluma con estuche, cuesta $ 120.00. La pluma cuesta $48.00 más que el estuche. ¿Cuál es el precio de la pluma y del estuche? Se esperaba que los estudiantes resolvieran el problema utilizando estrategias propias que muy probablemente eran resultado, en parte, de su labor como asesores. En lo que sigue aparece la resolución textual de Jeymi.

Primera participación de Jeymi: Situación inicial

(1.1) hola hola, buenos días aquí está mi participación
(1.2) datos
precio total de la pluma con estuche = 120
incógnita = estuche = x
constante= pluma= x+ 48
(1.3) ecuación = estuche +pluma = 120 = x + (x + 48) = 120
(1.4) x+(x+48)=120; x+x+48=120; 2x=120-48; 2x=72; x=72/2; x=36
(1.5) ahora comprobemos sustituyendo valores
estuche=x = 36
pluma=x+48 = 36+48=84
ecuación= x+ (x+48)=)120 = 36+36+48 =120 = 120=120
(1.6) por lo tanto el estuche cuesta $36.00 y la pluma cuesta $84.00 y la suma de todo nos da un total de $120.00. Espero y este bien si no corríjanme saludos . . .

Comprensión procedimental e incomprensión conceptual. En su resolución, Jeymi mostró una comprensión procedimental del signo igual cuando ella planteó la ecuación que resuelve el problema (1.3) y aplicó las reglas correspondientes a la trasposición de términos para obtener correctamente el valor de la literal (en 1.4). En estos casos ella interpretó el signo igual como *equivalencia condicional* para obtener el valor de la literal. Asimismo, ella dejó ver su comprensión procedimental al poner en juego los aspectos de la variable como incógnita: en (1.2) ella identificó la incógnita del problema (como 'el estuche', aunque de su resolución se desprende que se refería a su precio) y le asignó una literal (x); en (1.3), la estudiante planteó correctamente la ecuación que resolvía el problema; en (1.4) obtuvo el valor de la incógnita usando la trasposición de términos y en (1.5) ella comprobó sus resultados.

Sin embargo, la estudiante asesora también mostró baja comprensión del signo igual lo que se aprecia por las interpretaciones imprecisas que le otorgó a dicho signo (contraponiéndose al criterio CC.4): en principio, porque lo interpretó como *indicador* de cierta correspondencia entre objetos de distinta naturaleza (e. g. en 1.2, en donde establece que incógnita=estuche=x; en 1.3, cuando relacionó la expresión 'estuche+pluma' y el número '120', y en 1.5 cuando establece que 'estuche=x'); adicionalmente, porque interpretó al signo igual como *separador* (e. g. en 1.3, entre la expresión 'estuche+pluma=120' y la ecuación x+(x+48)=120, y en 1.5 entre la operación 36+36+48=120 y la igualdad 120=120), finalmente, porque la estudiante asesora también significó al signo igual como *operador* (e. g., en 1.5, donde determinó que 36+36+48=120).Adicionalmente, Jeymi también mostró cierta incomprensión conceptual en

relación a la variable (contraponiéndose otra vez a CC.4), porque no pudo identificar como incógnitas a las dos cantidades desconocidas involucradas en el problema, lo que dejó ver, de paso, un *conocimiento menor al promedio*, ya que sus compañeros no incurrieron en ese error.

Complementariamente, Jeymi dio otras muestras generales de incomprensión conceptual. De entrada, porque pareciera que los esquemas que guían su resolución de forma predominante son *de tipo extra-matemático*, en particular, los basados en la familiaridad resultado de la memorización (e. g., la memorización de los aspectos de la variable como incógnita que subyacen a su procedimiento). Además, porque la estudiante dejó sin *explicitar* los principios y sustentos en los que se podrían apoyar sus acciones y procedimientos y dejó con ello de *explicar su punto de vista*.

Altos niveles de presunción. Asociada a la comprensión procedimental que Jeymi mostró en torno al uso del signo igual y a la variable como incógnita, la estudiante parece haber experimentado altos niveles de presunción. Es plausible esta suposición por el uso de *enfatizadores* como el modo indicativo de los verbos en su resolución (e. g., "cuesta" o "da" en 1.6) y de que *actuó* en consecuencia con reglas que seguramente le eran *familiares* en su labor como asesora. Adicionalmente, mostró *determinación* para publicar su respuesta y cierto *interés* al resolver todas las preguntas que componían la actividad. Sin embargo, el *mitigador* "corríjanme" en 1.6 la distancia de un estado de certeza.

Segunda participación de Jeymi: punto de inflexión en su comprensión y en sus estados internos

Una vez que los estudiantes-asesores mostraron sus propias estrategias para resolver situaciones que involucraban a la variable como incógnita, el tutor y los estudiantes reflexionaron en torno a la interpretación que ellos daban a cada uno de los elementos de la ecuación y en particular al signo igual. Para tal fin el tutor solicitó a los estudiantes que resolvieran ecuaciones en un interactivo en el que ellos debían usar las propiedades de la igualdad. La respuesta textual de Jeymi aparece en lo que sigue.

(2.1)

Lado izquierdo de la balanza(Primer miembro)	Signo igual (Equilibrio)	Lado derecho de la balanza (Segundo miembro)
2x-8	=	5x-2

(2.2) Para "dejar sola a la x" realizo lo siguiente:
1.-Sumo a ambos miembros. La ecuación nos queda:

Lado izquierdo de la balanza(Primer miembro)	Signo igual (Equilibrio)	Lado derecho de la balanza (Segundo miembro)
2x	=	5x

(2.3) 2.-Sumo a los dos miembros 2.La ecuación nos queda:

Lado izquierdo de la balanza(Primer miembro)	Signo igual (Equilibrio)	Lado derecho de la balanza (Segundo miembro)
-6	=	3x

(2.4) 3.-Divido a los dos miembros entre 3.La ecuación nos queda:

Lado izquierdo de la balanza(Primer miembro)	Signo igual (Equilibrio)	Lado derecho de la balanza (Segundo miembro)
-2	=	x

Comprensión e Incomprensión. En este fragmento se identificaron dos tipos de fenómenos epistémicos. Por una parte, para el caso de las ecuaciones aritméticas (en donde

la literal aparece sólo en uno de los lados de la ecuación. V. Rojano (2002)), la estudiante mostró comprensión procedimental y conceptual. En 2.3 la estudiante recuperó una ecuación equivalente a la inicial posiblemente como resultado de un proceso de transposición que ella hiciera en lápiz y papel (de otra manera no se podría explicar de dónde surge dicha ecuación), mostrando (ahí y en 2.4) una comprensión procedimental al interpretar el signo igual como *equivalencia condicional* para obtener el valor de la literal. Asimismo mostró cierta comprensión conceptual cuando enunció con *precisión* la propiedad de la igualdad que ella usó en congruencia con los *procedimientos matemáticos aceptados*. Esta comprensión no la mostró en el caso de situaciones más complejas, como las ecuaciones algebraicas (en las que la literal aparece en ambos lados de la ecuación. V. Rojano (2002)). En este segundo caso, la estudiante expresó incomprensión en el manejo del signo igual, la que se manifiesta por la *imprecisión* al enunciar la regla aplicada (e.g. en 2.2 al no explicitar la cantidad sumada; y en 2.3; *CC.5*), y del hecho de que las ecuaciones 2.1 y 2.2 no son equivalentes, *contraviniendo los procedimientos convencionales de la matemática (CC.4).*En este caso, ella también dejó ver cierta incomprensión procedimental y conceptual del uso de la variable como incógnita. Su incomprensión procedimental se puede deducir del hecho de que la estudiante sólo puso en juego el aspecto I2 de la variable al encaminar sus acciones a obtener el valor de la literal y no comprobó su resultado (I5) como lo hiciera en (1.5), aunque ella obtuvo el valor correcto de la literal. Su incomprensión conceptual la dejó ver cuando enunció reglas *ambiguas e imprecisas* (e. g en 2.2 y 2.3) y del hecho de que no siguió los *procedimientos aceptados* o convencionales para calcular el valor de la incógnita.

Bajos niveles de presunción. En su segunda participación Jeymi experimentó bajos niveles de presunción, que se pueden apreciar a partir de la relativa *incongruencia entre las reglas que enuncia y sus acciones* (e. g. en 2.3 advirtió que aumentó dos, lo que no se reflejó en la ecuación); que se perciben también considerando su *interés* en publicar su respuesta y el uso del modo indicativo de los verbos como *enfatizadores*. La familiaridad que Jeymi mostró con las reglas que usó en su primera participación parece diferenciar los altos niveles de presunción que ahí expresó, de los bajos niveles de presunción que exhibió en esta segunda, en el que parece que las reglas le son *ajenas*.

Tercera participación de Jeymi: Reconstrucción de la comprensión y de sus estados internos.

Como respuesta a la participación de Jeymi uno de sus compañeros le solicitó que volviera a explicar sus procedimientos al hacerle ver que no eran claros, lo que motivó que la estudiante publicara su siguiente participación (se retoma la publicación textual):

(4.1) Hola, hola creo que me confundí pero aquí les dejo paso a paso mi respuesta corregida

(4.2) 2x - 8 = 5x - 2

(4.3) primero hay que sumar ambos términos, hay que pasar el -8 al término de la derecha y para pasarlo se suma +8 en ambos miembros y se suman ambos miembros

(4.4) y nos quedaría así 2x= 5x +6

(4.6) ahora hay que poner las x en un sola lado y pasamos al 5x al lado de la izquierda y para hacerlo tenemos que cambiarlo con signo cambiando

(4.7) y nos quedaría así -5x + 2x = 6

(4.8) Y si sumamos los términos

(4.9) quedaría así -3x = 6

(4.10) ahora para dejar sola a x tenemos que dividir ambos términos entre -3

(4.11) y nos quedaría así -3x/-3 = 6/-3
(4.12) y nos quedaría x= -2
(4.14) espero y esté bien Saludos…

Aumento en los niveles de comprensión. Tomando como referencia la segunda participación, destaca en la tercera intervención de Jeymi un aumento en los niveles de comprensión conceptual en torno al signo igual, ya que en esta oportunidad le dio un significado acorde con lo matemático (CC.4). En principio, porque ella aplicó adecuadamente las propiedades de la igualdad (la de sumar o dividir ambos términos la misma cantidad) en ecuaciones aritméticas (4.11) que quizás como resultado de un proceso de *transferencia* (CC.3) en esta tercera intervención aplicó también a ciertas ecuaciones algebraicas (en 4.4). Seguidamente, porque ya hay consistencia en su discurso algebraico ya que la ecuación 4.2 es equivalente a la 4.4 y ésta lo es a la 4.9. En tercer lugar, porque en esta intervención se dieron procesos de *explicitación* (CC.5) que no están presentes en su segunda participación: de entrada, porque para la obtención de dichas ecuaciones equivalentes en esta tercera ella reformuló (en 4.3, CC.2) las reglas que usó en 2.2 y en 2.3, apelando ahora a las propiedades de la igualdad que en esta nueva participación ya enunció con precisión y que usó en congruencia con los *procedimientos matemáticos aceptados* (en 4.4), y porque explicitó (en 4.6) la transposición que muy probablemente hizo en 2.3, la que enunció también con *precisión* y que usó en *congruencia con los procedimientos matemáticos aceptados*. En todos estos casos ella utilizó el signo igual de acuerdo a la acepción matemática en el sentido de designar un mismo objeto matemático, mostrando, además, un *conocimiento promedio* en torno al concepto. En cuanto al uso de la variable como incógnita Jeymi dejó ver un aumento en su comprensión procedimental cuando la estudiante puso en juego los aspectos I2 al encaminar sus acciones a la obtención del valor de la literal y el aspecto I4 sin violar las propiedades de la igualdad. Sin embargo, Jeymi no comprobó su resultado (I5) como lo hiciera en (1.5). Su incomprensión conceptual la dejó ver al dejar *implícitos* los aspectos de la variable como incógnita que subyacen su procedimiento.

Aumento en los niveles de presunción. En esta segunda participación Jeymi pareció experimentar un aumento en los niveles de presunción en torno a las reglas que enunció, con respecto a su segunda. Estos altos niveles se dejan ver por su uso de *enfatizadores* ("hay que" en (4.3) o "tenemos" en (4.10)) al enunciarlas, de que *actuó* en consecuencia de esas reglas (e. g. en 4.10 enunció que tenía que dividir ambos miembros de la ecuación entre tres, acción que ejecutó en 4.11), de que mostró *interés* en la resolución de la ecuación al contestar la actividad y precisar las reglas que utilizó, de que mostró *determinación* por corregir su respuesta ante sus compañeros y de que mostró *consistencia* en los criterios anteriores. Sin embargo, al aplicar esas reglas ella usó mitigadores (e. g. "quedaría" en 4.12 o "espero y estar bien" en 4.14) que la distancian del estado de certeza.

Después de las dos participaciones anteriores en la semana 3, el tutor explicitó las propiedades de la igualdad y pidió a Jeymi resolver ecuaciones utilizando esas propiedades, mismas que la estudiante resolvió exitosamente.

Cuarta participación de Jeymi: Aumento en los niveles de comprensión y en su certeza

En una semana posterior (la cuarta semana de actividades del Módulo 4) el objetivo era que los estudiantes desarrollaran la habilidad de plantear un sistema de ecuaciones que resolviera una situación en la que dos incógnitas están involucradas. El tutor colocó

entonces una situación problemática que puede modelarse de forma similar al usado en la primera participación de Jeymi: En un salón de clases hay 61 alumnos. El número de mujeres excede en 7 al número de hombres. ¿Cuántos hombres y cuantas mujeres hay en el salón? La respuesta textual de la estudiante fue la siguiente:

(3.3) primeramente hay que analizar muy bien los datos que se nos dan
(3.4) datos
salón de clases 61 alumnos; x hombres; x + 7 mujeres
(3.5) por lo cual hay 2 datos desconocidos
(3.6) pero de uno se resuelve el otro
(3.7) y tenemos una incógnita denominada "X"
(3.8) que significa hombres
(3.10) Ahora plantearemos la ecuación
(3.11) x + (x + 7) = 61
(3.18) y nos queda así 2x=54
(3.19) ahora vamos a dejar sola la x
(3.20) y para eso hay que dividir entre 2 ambos miembros
(3.21) 2x/2=54/2
(3.22) y nos queda x=27.
(3.24) mujeres X + 7 = 27+7= 34
(3.26) en el salón de clases tenemos 27 hombres y 34 mujeres
(3.27) dando un total de 61 alumnos.

Comprensión conceptual y procedimental. A diferencia de sus anteriores intervenciones, Jeymi mostró mayor comprensión conceptual del signo igual: al usarlo en *concordancia con la acepción matemática aceptada (CC.4)* cuando ella utilizó de forma diferenciada la trasposición de términos (3.18) y una propiedad de la igualdad (3.21) para obtener el valor de la literal (en 3.22); al explicitar *(CC.2)* aspectos relacionados con el signo igual que en su primera intervención dejó implícitos (e. g., en 3.20 explicitó de manera *clara y precisa* la propiedad de la igualdad que usaría y en 3.10 advirtió el planteamiento de una ecuación; CC.5). Asimismo, la verbalización de la propiedad de la igualdad que usó en (3.20) deja ver la posibilidad de una *transferencia* (*CC.3*) del uso de esa propiedad en el contexto de la balanza al contexto de la resolución de problemas. Todo lo anterior muestra en Jeymi un *conocimiento mayor que el promedio* (*CC.6*) en torno al signo igual, ya que sus demás compañeros sólo exhibieron cierta comprensión procedimental sobre ese tema. Cuando ella restringió el uso del signo igual como consecuencia del aumento en su comprensión parece que se vio en la necesidad de sustituir su uso por sustentos que acrecentaron su comprensión conceptual en torno a la variable como incógnita. Por ejemplo, en lugar de colocar expresiones del tipo "incógnita=estuche" (como lo hiciera en 1.2), de 3.5 a 3.8 elaboró un *sustento basado en razones matemáticas* que le permitió plantear la ecuación que resolvía el problema. En ese sustento logró identificar dos incógnitas (3.5) en lugar de sólo una, como lo hiciera en su primera intervención (1.2), apegándose así a la *acepción matemática aceptada*. Asimismo la estudiante *explicitó* los aspectos de la variable como incógnita que guiaron su resolución, a diferencia de su primera intervención en donde los dejó implícitos. Adicionalmente, ella verbalizó con *claridad y precisión* esas reglas. Todo lo anterior muestra un *conocimiento promedio* de la variable.

Asimismo en su resolución Jeymi mostró comprensión procedimental del signo igual que interpretó como equivalencia condicional y de la variable al poner en juego los aspectos que se enuncian en Tabla 3. Cabe aclarar que cuando la estudiante comprobó sus resultados

ella acudió a usos imprecisos del signo igual, que utilizó como *separador* (entre la expresión x+7 y la expresión 27+7=34) y como *operador* (27+2=34). En resumen, en su cuarta intervención Jeymi parece mostrar una mayor comprensión procedimental y conceptual en torno al signo igual y a la variable como incógnita con respecto a sus intervenciones anteriores.

La certeza. Cuando Jeymi mostró un aumento en sus niveles de comprensión conceptual parece que ella experimentó certeza. Es posible identificar este estado epistémico cuando ella acudió a *enfatizadores* (e. g. hay que en 3.3 y en 3.20); cuando *actuó* en consecuencia con las reglas que enunció (e.g. en 3.10 anuncia que planteará la ecuación y en 3.11 actúa en consecuencia), reglas que seguramente le empezaban a ser *familiares* al usarlas sin que se le pidiera explícitamente; adicionalmente, porque la estudiante mostró *interés* por resolver el problema cuando precisó las reglas que utilizó, mostró claridad en una exposición que fue lo suficientemente informativa; dejó ver *determinación* al plantear una resolución distinta a la que sus compañeros habían presentado hasta ese momento y mostró *consistencia* en los aspectos anteriores a lo largo de su resolución.

Conclusiones

El análisis empírico aporta evidencias de las mutuas y complejas determinaciones que se pueden dar entre los estados epistémicos y la construcción de conocimientos. En el caso estudiado es posible observar cómo en su primera intervención, la estudiante asesora experimentaba un estado inicial de seguridad relativa. De ahí pasó a la duda (en su segunda intervención), estado que posiblemente actuó como un motor para que ella re-elaborara sus conceptos y explicitara sus procedimientos (ya en la tercera participación), lo que le permitió adquirir nuevos niveles de seguridad pero ahora basados en contenidos matemáticos reformulados sobre los que profundizó en su última participación. Es posible que con la re-elaboración de contenidos y construcción de sustentos que ella consiguió hacer en esta última intervención, Jeymi haya logrado alcanzar altos grados de presunción o incluso certeza. En este estudio se puede apreciar cómo los estados epistémicos pueden ser un freno para la construcción de conocimientos (cuando éstos se sostienen con relativa seguridad), y cómo esos estados epistémicos, como la duda, pueden actuar también como un acicate para el aprendizaje. Por otro lado, se aprecia cómo la construcción de saberes sustentados matemáticamente pueden ser una fuente de certeza. En futuros escritos se pretenden mostrar otras influencias entre los estados epistémicos y la construcción de conocimientos. Sería deseable que el profesor fuera consciente de dichas relaciones.

Referencias bibliográficas

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas*. Bogotá: Universidad de los Andes.

Bouvier, A., & George, M. (2000). *Diccionario de matemáticas* (2ª edición). Madrid: Akal ediciones.

Dauben, J. W. (1980). El desarrollo de la teoría de conjuntos cantoriana. En I. Grattan-Guines (Ed.), *Del cálculo a la teoría de conjuntos, 1630-1910.* (pp. 235-282). Madrid: Alianza Editorial.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (1994). Introduction. In N. K. Denzin, & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 1-18). California: Sage.

Dienes, Z., & Perner, J. (1999). A theory of implicit and explicit knowledge. *Behavioral and Brain Sciences*, *22*(5), 735-808.

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano*. Cali: Universidad del Valle.

Godino, J., & Font, V. (2003). *Razonamiento algebraico y su didáctica para maestros*. Granada: Universidad de Granada.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspective on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester, Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805-842). Charlotte: NCTM.

Hyland, K. (1998). Persuasion and context: The pragmatics of academic metadiscourse. *Journal of Pragmatics*, *30*, 437-455.

Krummheuer, G. (1995). The ethnography of argumentation. In P. Cobb & H. Bauersfeld (Eds.), *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures* (pp. 229–270). Hillsdale: Lawrence ErlbaumAssociates.

Martínez, B. & Rigo, M. (2013).Criterios de certeza en el contexto de un foro virtual. En A. Ramírez y Y. Morales (Eds.) *I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe* (I CEMACYC) (pp. 548-558). República Dominicana: ICMI.

Martínez B. & Rigo M. (2014[a]).Mathematical certainties in history and distance education. En Liljedahl, P., Oesterle, S., Nicol, C., & Allan, D. (Eds.) *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA, 36*(4), 177-184. Vancouver, Canada: PME.

Martínez, B. & Rigo, M. (2014[b]). ¿Certeza implica comprensión? En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 445-454).Salamanca, España: SEIEM.

Molina M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria* (Tesis Doctoral). Universidad de Granada, España.

Rigo, M. (2011). La convicción, la comprensión y las prácticas de racionalidad en la primaria. Estudio del profesor. En A. B. Alcaraz, G. Gutiérrez, A. Estepa, & N. Climent (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XVII* (pp. 460-466). Bilbao: SEIEM y Universidad del País Vasco.

Rigo, M. (2013). Epistemic schemes and epistemic states. A study of mathematics convincement in elementary school classes. *Educational Studies in Mathematics*, *84*(1), 71-91.

Rojano, T. (2002). Mathematics Learning in the Junior Secondary School: Students´ Access to Significant Mathematical Ideas. En L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (pp. 143-163). Mahwak, NY: Lawrence Erlbaum Associates.

Salcedo, A. (2007). *Anatomía de la persuasión*. Madrid: ESIC Editorial.

Schoenfeld, A.H. (2011). *How we think*. New York: Routledge.

Tymoczko, T., (1986). The four-color problem and its philosophical significance. In T. Tymoczko (Ed.), *New directions in the philosophy of mathematics* (pp. 243-266). Boston: Birkhäuser.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., & Trigueros M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental: Una propuesta alternativa*. México: Editorial Trillas.

Ejercicio y problema dos caras de la misma moneda

Jorge **Hernández** Márquez
Área de Ciencias de la Educación, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
México
jhmpren@yahoo.com.mx
Octaviano **García** Robelo
Área de Ciencias de la Educación, Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo
México
droctavianogarcia@gmail.com

Resumen

El presente documento es parte del reporte final de investigación, en él, se aborda el plantear y resolver problemas en la escuela primaria como objeto de estudio. La investigación se desarrolla bajo el enfoque etnográfico; se hace uso de la entrevista, la observación y el análisis documental para el levantamiento de la información de campo; la investigación teórica se recuperó de las bases de datos de REDIE, SCIELO, REDALYC, entre otras; así mismo, se consultaron las Actas Latinoamericanas de Matemática Educativa (ALME) y las actas de la Conferencia Interamericana de Educación Matemática (CIAEM). Los resultados evidencian las confusiones que tienen los profesores sobre el ejercicio y el problema, lo que representa la mecanización en contraposición al desarrollo de habilidades de pensamiento matemático.

Palabras clave: Problema, ejercicio, etnografía y programa de estudio.

Antecedentes

Las matemáticas, en el imaginario popular, han tenido el papel de ser una disciplina difícil de entender y aprobar en la escuela, entre otras razones, porque exige altos niveles de razonamiento abstracto del aprendiz, las formas de enseñanza de los profesores centradas en el reconocimiento social-personal y el temor y el control en la clase con los alumnos; convirtiéndose en una disciplina alejada de la realidad inmediata de los sujetos.

Sin embargo, las citadas afirmaciones se desvanecen cuando se adentra al estudio de los procesos didácticos que se desarrollan en el aula, en las formas de aprendizaje de los estudiantes definidas por prácticas culturales específicas del contexto social de pertenencia, y los contenidos matemáticos definidos en el currículo formal para la enseñanza en la educación primaria, entre los que destacan la resolución de problemas de naturaleza aritmética y geométrica.

Con referencia a los procesos didácticos, por mucho tiempo se ha considerado a la enseñanza y el aprendizaje como dos fenómenos que se producen simultáneamente y constituyen un solo proceso, es decir, el aprendizaje como una consecuencia directa de la enseñanza. En la actualidad se cuestiona esta simbiosis, se apuesta por la necesidad de comprender al aprendizaje como elemento fundamental de estudio para explicar las condiciones que lo favorecen, cómo se produce y cómo se potencia. Al respecto se han construido diferentes perspectivas: el empleo del

ejercicio repetido y la práctica; la matemática como comprensión conceptual y como resolución de problemas, etnomatemáticas, socioepistemología, entre otras.

Así mismo, en el contexto del aprendizaje confluyen explicaciones desde el campo de la psicología, tales como: el conductismo, la psicogenética constructivista, la cognitiva del procesamiento de la información, el sociocultural y el histórico cultural.

En relación a los conocimientos matemáticos, en los planes y programas de estudio para la educación primaria se ha transitado por diferentes perspectivas; así, se pasó de una matemática axiomática a una matemática entendida como lenguaje en la cual la resolución de problemas se convierte en el eje central de aprendizaje, dado que a través de ellos, el alumno activa una serie de estrategias y procesos mentales alejándola de los aprendizajes mecánicos e irreflexivos de la matemática axiomática.

Problema

¿Cuáles son las características que diferencian los ejercicios de los problemas en la enseñanza de las matemáticas con estudiantes de educación primaria?

Fundamentación teórica

Vila y Callejo (2004) hacen un recuento de los estudios que abordan la enseñanza de las matemáticas a partir de la resolución de problemas y reconocen la existencia de tres enfoques por los que ha transitado.

El primero refiere entender el problema como una tarea; lo único que importa es la estructura matemática y el esfuerzo por planificar la sesión de clase reduciéndola a efectuar el análisis de la tarea en la más pura tradición conductista.

El segundo hace hincapié en los destinatarios (alumnos), se ve la distinta dificultad que puede suponer la tarea en diferentes estudiantes, lo cual implica tener presente los conocimientos previos y las distintas capacidades personales, pero siempre asociado a la idea de aplicación rutinaria de problema – algoritmo previamente visto – corriendo el riesgo de un proceso de mecanización.

El tercero considera al profesor como el sujeto que determina el problema y el proceso de resolución; ello tiene presente el contexto donde se desarrolla el problema y la dimensión afectiva del estudiante. Esto supone que plantear y resolver problemas en la escuela no puede desligarse de los estudiantes, la intencionalidad del profesor que lo selecciona y la situación concreta de la enseñanza y el aprendizaje.

Así el término problema designa:

> Una situación planteada con finalidad educativa, que propone una cuestión matemática cuyo método de solución no es inmediatamente accesible al alumno/resolutor o grupo de alumnos que intentan su solución, porque no dispone de un algoritmo que relacione los datos y la incógnita o de un proceso que identifique automáticamente los datos con la conclusión, y por lo tanto deberá buscar, investigar, establecer relaciones, implicar sus efectos, etcétera; para afrontar una situación nueva (Vila y Callejo, 2004: 31-32).

En este sentido, el problema es una herramienta para pensar matemáticamente.

Ávila afirma que la "resolución de problemas se apoya en la idea de que los niños tienen conocimientos adquiridos fuera de la escuela, en el entorno familiar y social que les permiten

solucionar diversos problemas" (2004: 20) al mismo tiempo los posibilita en el diseño de procedimientos iníciales informales cuando se le plantean problemas en la escuela.

La perspectiva de la enseñanza centrada en la resolución de problemas asume que las interacciones entre los sujetos son un elemento fundamental en la apropiación del conocimiento matemático; entre otras razones, porque desde el origen mismo de las matemáticas se identifica el plantear y resolver problemas prácticos como eje fundamental por el cual se crearon.

> No obstante, a partir del periodo Griego la Historia nos muestra la necesidad de hacer un paso hacia delante, la evolución histórica de la matemática sitúa los métodos de razonamiento como centro de la investigación en la matemática… y la resolución de problemas como el medio más eficaz para coronar este objetivo (D' Ambrosio, 1999: 29).

Acevedo y Falk (1996) comparten la idea de D'Ambrosio y agregan que la actividad central que permite la construcción personal del saber matemático, desde los primeros años de la escuela hasta su culminación, es la resolución de problemas. Aseguran que un problema bien formulado o una secuencia de problemas bien diseñados permiten la profundización, extensión, exploración o investigación en el proceso de apropiación de un concepto matemático por parte del estudiante. Cada estudiante debe tener la oportunidad de formular sus propios problemas, tanto de situaciones cotidianas como matemáticas, como refuerzo a la construcción del significado de cada concepto y la adquisición de confianza para encontrar utilidad a la matemática. Lo anterior supone que los problemas deben ser contextualizados y vinculados con diferentes disciplinas del conocimiento.

En su realidad cotidiana el niño está expuesto permanentemente a una serie de eventos y situaciones problema que exigen un conocimiento en relación a las matemáticas, por ello su aprendizaje se inicia mucho antes del ingreso del niño a la escuela. Es necesario distinguir entre la lógica del contenido (matemáticas como ciencia) y los procesos de construcción del aprendizaje de los niños (Guerrero, 2003).

Miranda, Navarro y Sugey (2007), y Martínez González (2007) analizan la resolución de problemas desde la óptica de las creencias y emociones que las matemáticas despiertan en los estudiantes, aseguran que el éxito de su aprendizaje radica en el gusto y el nivel de autoconfianza, es decir, el enfrentarse a una problema matemático despierta ciertas emociones de desconfianza e inseguridad que si no son controladas pueden causar bloqueos cognitivos y consecuentemente abandonar la resolución del problema.

Rubio, López y Andino (2007) plantean que en la resolución de problemas no basta la aplicación cuidadosa de reglas matemáticas. Se necesita educar la capacidad de análisis, síntesis, correlación, e intuición. López y Mochón (2007) agregan que se parte de un problema y de éste los estudiantes generan nuevos, lo que involucra el pensamiento reflexivo.

Diseño y metodología

Recuperando el hecho de que en la investigación cualitativa coexisten diferentes formas de hacerla y con el fin de lograr el objetivo de esta investigación, que es identificar las características de los problemas y los ejercicios, se requiere usar el enfoque etnográfico como dispositivo metodológico, entendido como:

> Una descripción o reconstrucción analítica de escenarios y grupos culturales intactos […] recrea para el lector las creencias compartidas, prácticas, artefactos, conocimiento popular y comportamiento de un grupo de personas […] el etnógrafo comienza examinando grupos y

> procesos, incluso muy comunes, como si fueran excepcionales o únicos, ello le permite apreciar los aspectos, tanto generales como de detalle, necesarios para dar credibilidad a su descripción […] en cuanto a procesos la etnografía es uno de los modelos generales de investigación […] para el estudio del comportamiento humano (Gotees y Le Comte, 1998: 28-29).

Para Bertely (2002) las investigaciones etnográficas pueden organizarse de distintas maneras gracias al contexto en que los investigadores elaboran sus particulares organizaciones, y a los problemas teóricos metodológicos o epistemológicos que les interesa resolver.

En este sentido, los estudios cualitativos manejan las percepciones subjetivas de los involucrados y el contexto sociocultural en el que se producen, así, la etnografía es una forma naturista de la investigación; cuyo objeto es combinar el punto de vista del observador interno con el externo para describir el marco social, "la etnografía es un enfoque cualitativo construido en sus orígenes por supuestos teóricos funcionalistas de la antropología y de la fenomenología en el ámbito de la sociología cualitativa. Su articulación metodológica e instrumental se deriva de su coherencia entre estos diferentes niveles" (Reynaga, 2003: 131), sería erróneo reducirla a una mera técnica de investigación.

El proceso de investigación etnográfica implica: Acceder, mantener y desarrollar una relación con las personas generadoras de datos. Esta fase es la que generalmente se denomina acceso al campo. Exige ciertas habilidades y recursos. Emplear variedad de técnicas para reconocer el mayor número de datos y/o informaciones, aspecto que redundará en la validez y fiabilidad del estudio. Permanecer en el campo el tiempo suficiente para asegurar una interpretación correcta de los sucesos observados y recriminar entre lo regular e irregular. Utilizar teorías y conocimientos para guiar e informar las propias observaciones de lo visto y oído, desarrollar hipótesis específicas y categorías de observación, definir el tema y depurar el proceso de estudio (Wilcox citado por Colás 1998: 259).

En apego al carácter flexible, característico de la etnografía, se definió el proceso metodológico a seguir en la presente investigación; cuyos pasos fueron: El objeto de estudio. Las preguntas de investigación y su análisis. Los espacios de investigación. Métodos e instrumentos de investigación. El tratamiento de la información. Primeras inferencias y conjeturas. La construcción del informe de investigación

Resultados

Entender al problema como un obstáculo para el sujeto y que éste, no cuenta con un dispositivo inmediato para resolverlo, pero si le exige ciertas situaciones de análisis y reflexión en la definición del proceso de solución, nos conduce a diferencia un verdadero problema de situaciones similares como pueden ser los ejercicios, veamos como el docente recurrentemente utiliza el ejercicio como sinónimo de problema.

En el pizarrón se observaba. Multiplicación con números decimales.
Una familia gasta $ 47.39 diarios ¿Cuánto gastará en 365 días? (El alumno inmediatamente plantea el algoritmo de la multiplicación).
Escribe:

47. 39
X 365
123704
28434
14217
17297.44

La leyenda escrita en el pizarrón (multiplicación con números decimales) sugiere la resolución inmediata del cuestionamiento que planeta el profesor sin que el alumno invierta recursos cognitivos para definir el proceso, lo cual, reduce la situación a un ejercicio.

Sin embargo, la deficiencia está en el manejo de la técnica, entendida como el uso eficiente del procedimiento de la multiplicación y su forma de representación al efectuar los cálculos, lo cual obliga a diferenciar entre un problema y el uso de la técnica.

Visto así, el algoritmo de la multiplicación es el problema, sin embargo, sólo se trata de la ejercitación mecánica de una operación aritmética, es decir, el alumno muestra dominio sobre el valor posicional, pero carece de las mecanizaciones parciales que implican multiplicar cinco por nueve, cinco por tres, entre otros.

En múltiples momento de la investigación se observó que el manejo eficiente o deficiente de las técnicas matemáticas establece la diferencia entre quienes solucionaban los ejercicios de manera óptima y quienes lo hacían de manera deficiente, al mismo tiempo, el profesor hace un sinónimo entre problema y uso de la técnica. De esta manera pareciera que la finalidad de la enseñanza de las matemáticas es apropiarse de técnicas matemáticas y no del desarrollo de procesos cognitivos complejos como el uso de estrategias, la toma de decisiones, en otros, ejes centrales de la resolución de problemas.

Pero no se puede despreciar el "valor didáctico del ejercicio en el aprendizaje de la matemática porque posibilita consolidar habilidades instrumentales básicas" (Pozo 1998; p.18) el obstáculo es convertirlo en el único medio para aprender.

Continuando con el análisis de la clase podemos establecer otras relaciones entre ejercicio y problema.

En el salón se escuchan murmullos de cómo se tiene que resolver la operación.
(Mientras tanto 4 estudiantes se auxilian de los dedos de la mano para resolver el problema, tres se mantienen expectantes a lo que hace el alumno que está frente al pizarrón pero no hacen nada en su cuaderno. Al terminar el alumno).
M. ¿Está bien?
AT. No (En coro).
M. Haber Edwin pasa (Edwin escribe en el pizarrón).

```
  2  1  2
  4  1  5
  3  2  4
 47.39
X 365
 123597
 28416
 14717
1728355
```

(Cuando Edwin termina y se aleja del pizarrón).
A22. Maestro en el 97 está bien con el 35, pero el 12 no (se refería al resultado de la multiplicación del primer digito del multiplicador.

El establecimiento de una sola tarea escolar para todos los estudiantes no garantiza que se planteen problemas o ejercicios, porque depende, entre otras cosas, del cúmulo de conocimientos y habilidades de cada uno, los cuales están íntimamente relacionados al contexto social y cultural

de procedencia, así mismo, de los fines que tiene el estudiante al resolverlo, es decir, los tres alumnos que se mantienen expectantes no manifiestan la intención de hacerlo.

Lo anterior impone la necesidad de aplicar actividades de aprendizaje diferenciadas a los conocimientos y habilidades de los alumnos para poder entender cuando se resuelve un ejercicio o un problema.

La solución de problemas y la realización de ejercicios demandan de los profesores conocer los límites entre uno y otro, para poder definir las actividades didácticas que habrán de desarrollarse en el salón de clases.

Durante la investigación, el ejercicio no solo se manifiesta en el aprendizaje de las operaciones básicas de suma, resta, multiplicación y división, fue frecuente en el trazo de figuras geométricas y en el cálculo de perímetros y áreas.

El trazo de figuras geométricas se relaciona con la reproducción o construcción de gráficos que se hacen de los objetos geométricos.

La reproducción constituye una copia de un modelo dado; como se muestra en la figura 4. Se realizó a partir de las instrucciones verbales del profesor.

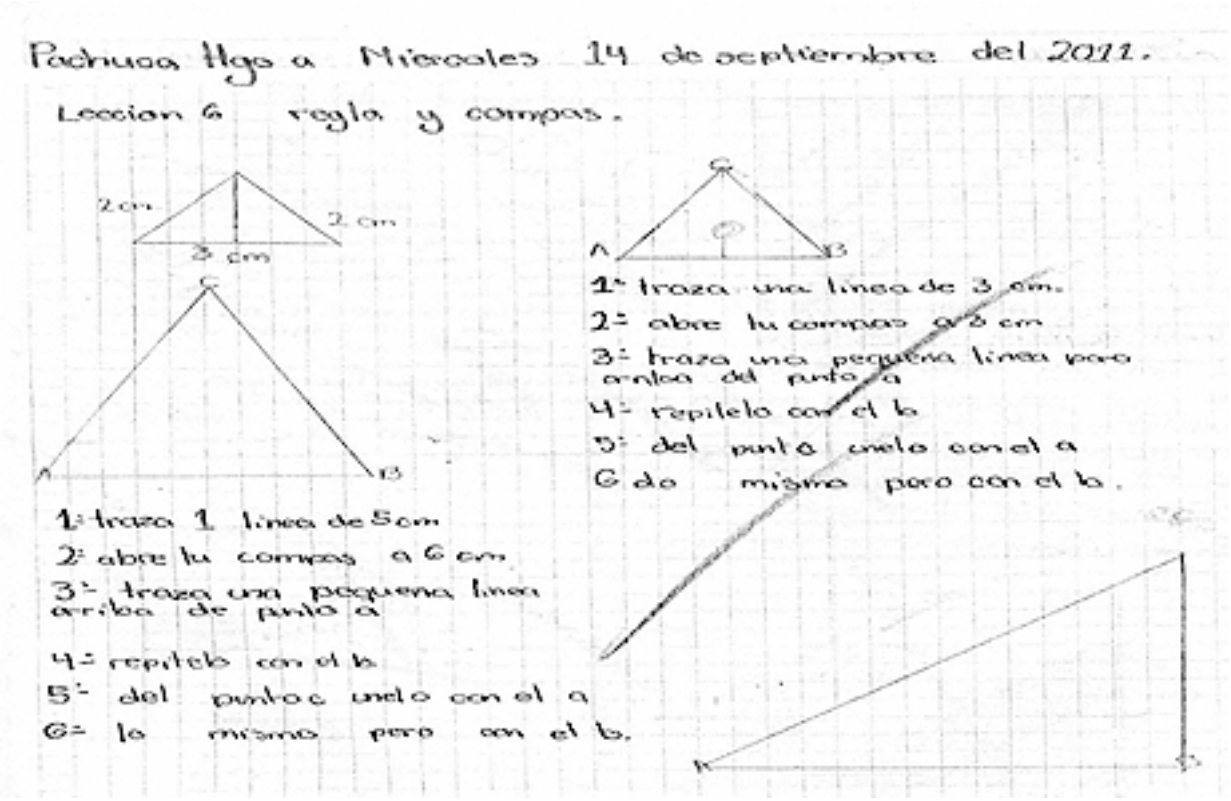


Figura 1. Trazo de figuras geométricas.
Fuente: Cuaderno del alumno.

El haber dado las indicaciones precisas lo convirtió en un ejercicio para el uso de la regla y el compás, sin embargo, limitó a los alumnos en el análisis de otras relaciones y propiedades de los triángulos, tales como, ángulos internos, ángulos externos, ángulos rectos, obtusos, agudo, etcétera, y con ello, seguir ejercitando y profundizando en el lenguaje matemático.

En este contexto, la figura 4 evidencia errores del profesor en el uso del lenguaje matemático; por ejemplo:

Traza una línea de 5 centímetros. La indicación debió haber sido: traza un segmento de 5 centímetros; el segmento está limitado en ambos extremos por puntos; En el trazo se definieron como A y B. Porque la línea recta tiene longitud infinita; toda línea recta que contenga puntos del interior de un círculo o de cualquier figura cerrada, necesariamente corta el borde de ese círculo o de esa figura cerrada, la línea recta es la distancia más corta entre dos puntos.

Traza una pequeña línea arriba del punto a. En realidad se tenía que trazar un arco con centro en A y radio AB, un arco con centro en B y radio AB, para definir el punto C en el lugar donde se cortan los dos arcos.

Las imprecisiones en el vocabulario matemático conducen a confusiones y deficiencias en los procesos de comunicación matemática. Al respecto Lee (2010) seña: existen problemas que surgen del vocabulario matemático.

> Las palabras utilizadas en clase de matemáticas pueden ser similares a las palabras utilizadas en la vida diaria, ocasionalmente el alumno precisa pensar en ellas de modo diferente cuando se trata de matemáticas. Esto se debe a que en matemáticas, el contexto de un problema a menudo no se pretende que sea visto como una realidad. Por ejemplo, si un problema plantea el número de viajes que tiene que hacer un ascensor para transportar a determinada cantidad de personas hasta la última planta, es razonable deducir que si tarda mucho, unas cuantas personas decidirán subir a pie. En un problema matemático esto no se considera cuando se intenta dar con la solución. Los problemas del "mundo real" se introducen para demostrar que esta ciencia es accesible, real y tangible. Sin embargo, la facultad de las ideas matemáticas es que son abstractas y no contextuales, y reparar en ello ayuda a los estudiantes (p. 40).

Durante la investigación se encontró que el profesor asocia el término problema al planteamiento de un enunciado en el cual se combina lenguaje materno y lenguaje matemático, y no considera el grado de complejidad como elemento fundamental de la enseñanza con problemas, en este sentido el enunciado se puede convertir en ejercicio.

Para Chamorro (2006) un enunciado matemático describe un estado o suceso, más o menos corriente, o que tiene que ver con el universo imaginario familiar del niño. A la descripción le viene una o varias preguntas a las que los alumnos deben responder. La situación que se describe en el enunciado está completada de una manera particular, resaltan los aspectos cuantitativos dando ciertos datos numéricos. La elaboración de la respuesta implica inferencias que ponen en marcha que ponen en marcha competencias de tipo lógico–matemático. La respuesta, la solución del problema, debe ser presentada de una manera particular, utilizando el lenguaje matemático.

Lo anterior hace que las dificultades de lectura del enunciado de un problema sean significativamente diferentes de las dadas en la comprensión del lenguaje común, entre otras razones, porque los enunciados matemáticos no tienen como misión clarificar el problema, esto es función del alumno con ayuda de los datos que le dan.

En la figura 5 se presenta: ¿Obtén el perímetro de un decágono regular que mide 16.54 m por lado? para solucionarlo le pide defina la formula, señalen las operaciones, presenten la sustitución y muestren el resultado. El enunciado, para su solución, solo implica recordar el número de lados del decágono y la fórmula de su perímetro, para lo cual, sólo requiere de la mecanización esencia misma del ejercicio.

Figura 2. El ejercicio como enunciado.
Fuente: Cuaderno del alumno.

Sin embargo, los ejercicios como enunciados, juega un papel fundamental en la construcción del lenguaje matemático, porque el alumno necesita recordar definiciones, axiomas, teoremas, propiedades, entre otros, para poder expresar sus ideas matemáticas y establecer diálogos con los demás en el discurso matemático.

Al respecto Lee (2010) señala:

> Si los alumnos tienen que involucrarse plenamente en el discurso matemático tanto dentro como fuera del aula, deben comprender los convencionalismos del lenguaje matemático y los profesores deben ayudarles en el proceso […] El modo en que se expresan las matemáticas en los libros de texto, al igual que por parte de muchos profesores no corresponde con los hábitos lingüísticos normales del alumnado. En el aula es normal oír decir a los alumnos "cuentas tantas veces el largo por el ancho y te da el área", que la forma matemática más pasiva y convencional "el área de un rectángulo es igual a la longitud multiplicada por la anchura". Aunque ambas frases expresan el mismo concepto, la segunda se considera convencionalmente más matemática, ya que se expresa en un estilo conciso, impersonal e inmutable" (p. 34).

Finalmente, las imprecisiones que surgen en la apropiación del lenguaje matemático, detienen el uso adecuado de los conocimientos por los alumnos.

Discusión

En el currículo prescrito para quinto grado se plantean 18 contenidos donde la resolución de problemas se toma como un aprendizaje, sin embargo, siempre se asocia a un contenido específico de la matemática, por ejemplo: resolver problemas que impliquen multiplicar números fraccionarios y decimales por números enteros. Lo anterior permite al profesor, primero, ejercitar el algoritmo de la multiplicación de fracciones y decimales con números enteros y después plantear problemas para ser resueltos por los estudiantes, los cuales se convierten en mecanizaciones de nociones y procedimientos, entendida la noción como el sistema de numeración y el procedimientos como el valor posicional de la cifra, siendo diferentes en cada operación aritmética. Así la resolución de problemas pierde riqueza en el desarrollo del

pensamiento matemático, al respecto Resnick y Ford (1998) y Alcalá (2002) coinciden, los ejercicios reiterados no pueden desarrollar el pensamiento cualitativo porque interpretan a la matemática como una colección de vínculos aislados, lo cual impide al sujeto singular construir un saber integrado y de principios. El ejercicio como medio para el aprendizaje sólo cultiva el adiestramiento, es decir, el aprendizaje superficial que impide el desarrollo del razonamiento y la comprensión conceptual. En tanto partir de un problema, a decir de Ausubel y Novak (2009), estimula la disponibilidad de conceptos y principios en la estructura cognitiva pertinentes para los problemas particulares que se vayan presentando; las características cognitivas de personalidad como la agudeza, la capacidad de integración de conocimientos, flexibilidad del pensamiento, la curiosidad intelectual, la capacidad verbal y la disposición cognitiva general.

Conclusiones

En este contexto, durante la investigación fue frecuente encontrar enunciados, que a decir del profesor, eran problemas, sin embargo al momento de resolverlos resultaban ser ejercicios. Lo cual aleja las finalidades del currículo con las prácticas de enseñanza de los profesores. El sujeto que aprende sólo responde a los estímulos externos, el aprendizaje es la suma de relaciones o asociaciones entre estímulos y respuestas, sin ninguna organización estructural. Por ello no existe ningún cambio cualitativo entre un estado inferior de conocimiento con otro superior, son meras modificaciones cuantitativas.

Para Ávila (2004), la no modificación de las prácticas de enseñanza de los profesores reflejan: el nivel de conocimientos, las opciones de actualización con que han contado y por las competencias didácticas desarrolladas. De esta manera, entre lo propuesto por currículo prescrito y lo realizado en la cotidianeidad de las aulas media una serie de interpretaciones y ajustes que signan el tránsito de la utopía a la realidad de las escuelas.

Prospectiva

A partir de los resultados de la investigación diseñar un proceso de intervención en aula, haciendo énfasis en la identificación, planteamiento y resolución de problemas; entendiendo al problema desde tres dimensiones: enfoque, contenido de aprendizaje y estrategia de aprendizaje.

Bibliografía

Acevedo, M., & Falk, M. (1996). *Logros para la matemática escolar: Escuela primaria (Santafé De Bogotá). Educación y Cultura, 36 – 37*, (Marzo).

Alcalá, M. (2002). *La Construcción del Lenguaje Matemático*. España: Graó.

Ausbel, D., Novak, J. (2009). *Psicología Educativa; Un Punto de Vista Cognitivo.* Reimpresión. México: Trillas.

Ávila, A. (2003). Introducción. *Saberes Científicos, Humanísticos y Tecnológicos: Procesos de Enseñanza y Aprendizaje. La Investigación Educativa en México, 1992 – 2002*. Ángel D. López Y Mota (Coord.). México: COMIE.

Ávila, A. (2004). Introducción. *La Reforma Realizada; La Resolución de Problemas como Vía del Aprendizaje en Nuestras Escuelas*. México: Secretaria De Educación Pública.

Ávila, A., Block, D., & Carvajal, A. (2003). Investigaciones sobre educación preescolar y primaria. *Saberes Científicos, Humanísticos y Tecnológicos: Procesos de Enseñanza y Aprendizaje. La Investigación Educativa en México, 1992 – 2002*. Ángel D. López y Mota (Coord.). México: COMIE.

Beterly B. M. (2002). *Conociendo Nuestras Escuelas; Un Acercamiento Etnográfico a la Cultura Escolar*. México: Paidós.

Chamorro María Del Carmen. (2006). *Didáctica de las Matemáticas*. España: Pearson.

Colás, Bravo, Pilar. (1998). Enfoque en la metodología cualitativa: sus prácticas, de investigación. *Métodos de Investigación en Psicopedagogía*. Buendía, Leonor, & Fuensanta Hernández (Coord.). México: Mc Graw.

D´Ambrosio, J. (1998). El problema de plantear el problema (Sevilla). *Investigar en la Escuela, 35.*

D´Ambrosio, J. (2005). Sociedade, Cultura, Matematica e seu Ensino (Brasil). *Educacao E Pesquisa. 31* (1).

D´Ambrosio, J. (1999). Educacio Matematica Per a una Civilitzacio en Proces de Calvi (España). *Temps D' Eduacio. 22* (Jul – Des).

Gotees, J. P. & Le Compte, M. D. (1998). *El Rol del Etnógrafo. Etnografía y Diseño Cualitativo en Investigación Educativa*. Madrid: Morata.

Guerrero, A. (2007). Análisis de las Estrategias de Solución para Problemas Aditivos (España). *Iberoamericana De Educación*. (33).

Lee C. (2010). *El Lenguaje en el Aprendizaje de las Matemáticas*. España: Morata.

López, I., & Mochón, S. (2007). El Uso de Computadora y Cañón para el Desarrollo del Entendimiento Matemático de Fracciones En 4° De Primaria (México). *Acta Latinoamericana*.

Miranda, N., Navarro, C., & Elika S. (2007). Conflictos Cognitivos que Emergen en la Resolución de Problemas Relativos Al Límite (México). *Acta Latinoamericana De Matemática Educativa (Clame). XX,* 3 - 9.

Pozo, J. I. (1998). *La Solución de Problemas*. (pp. 14-50). México: Santillana.

Reynaga, S. (2003). Perspectivas Cualitativas De La Investigación en el Ámbito Educativo. La Etnografía y la Historia de Vida. *Tras Las Vetas de la Investigación Cualitativa, Perspectivas y Acercamientos Desde La Práctica*. Rebeca Mejía y Sergio Antonio Sandoval (Coord.). México.

Resnick, L. & Ford, W. (1998). *La Enseñanza de las Matemáticas y sus Fundamentos Psicológicos*. España: Paidós.

SEP. (1993). *Libro Para el Maestro*. México.

SEP. (1993). *Plan y Programas de Estudio para la Educación Primaria*. México.

SEP. (1999*). La Enseñanza de las Matemáticas en la Escuela Primaria. Taller para Maestros. Segunda Parte* (Programa Nacional de Actualización Permanente). México.

SEP. (2009). *Programa de Estudio para la Educación Primaria*. México.

Vila, A., & Callejo, M. L. (2004). *Matemáticas para Aprender a Pensar; el Papel de las Creencias en la Resolución de Problemas*. México: Narcea.

El aprendizaje cooperativo: Un estudio sobre las interacciones entre docente y estudiantes en una clase de Matemática

Zuleyka **Suárez** Valdés-Ayala
Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica
Costa Rica
zsuarez@itcr.ac.cr

Resumen

El propósito de esta investigación cualitativa fue estudiar las interacciones que se producen en el aula, tanto entre la docente con sus estudiantes como entre los estudiantes entre sí, cuando el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática de un grupo de sexto grado de una escuela pública de Costa Rica incorpora el aprendizaje cooperativo como estrategia didáctica. Los hallazgos de la investigación corroboran que esta metodología es una opción para el aprendizaje de la matemática en la educación primaria que favorece el intercambio entre pares y la toma de conciencia de que la docente no es la única fuente de consulta. El papel desempeñado por docentes y estudiantes cuando se emplea esta metodología, evidencia cambios favorables pero para esto se requiere de un acompañamiento inicial por parte de un profesional experimentado que pueda servir de apoyo

Palabras clave: Aprendizaje cooperativo, interacciones, docente, estudiantes.

Introducción

El Estado de la Educación (2013) reporta que Costa Rica ocupó el puesto 55 de las 74 naciones participantes en la prueba PISA del 2009.

El 56,7% de los costarricenses tuvo un desempeño de nivel 1 o inferior, lo cual indica que más de la mitad de los estudiantes evaluados no tienen las destrezas básicas que les permitirán utilizar la Matemática como herramienta esencial para su futuro (Estado de la Educación, 2013, pp. 66-67).

Estas cifras son alarmantes. Costa Rica ha venido haciendo esfuerzos por mejorar a nivel nacional los resultados y el desempeño de los estudiantes en una asignatura como matemática. El Estado de la Educación (2011) propone por ejemplo, abordar la matemática, con la aplicación de metodologías que mejoren el desempeño y el rendimiento de los estudiantes (Estado de la Educación, 2011, p. 134). Esta posibilidad me planteó el desafío y la oportunidad de analizar las interacciones que se producen a través de las actividades generadas por una metodología didáctica como el aprendizaje cooperativo que generan el conocimiento para poder considerar de manera holística su impacto en el proceso educativo. Es por ello que se realizó una experiencia en un aula de sexto grado de primaria durante el curso lectivo del 2012.

Se seleccionó el nivel de primaria porque mejorar la calidad del aprendizaje a ese nivel determinará en buena medida la formación de actitudes de aceptación o rechazo y la fijación de ideas acerca de la naturaleza y utilidad de la matemática para los estudiantes en su futuro.

Antecedentes

Se entenderá por aprendizaje cooperativo, coincidiendo con Aguirre, Amaya y Espinosa (2001, p. 2) "un recurso pedagógico de sin igual valor en la construcción del conocimiento a partir de estrategias metodológicas interactivas y dialogales".

Se ha constatado, a través de múltiples investigaciones revisadas, que la metodología del aprendizaje cooperativo puede ser aplicada en todos los niveles educativos: primaria, secundaria y universitario. Los niveles donde más se ha aplicado son el secundario y el universitario, siendo la primaria un nivel con pocas investigaciones reportadas.

Pero el aprendizaje cooperativo, ligado a la parte académica de la matemática debe ligarse también a los aspectos emocionales y sociales de los estudiantes. Se coincide entonces con Lucas (2009, p. 7) quien afirma que: "La educación se ha centrado tradicionalmente en el desarrollo cognitivo, con un olvido generalizado de la dimensión emocional. Esto implica que el desarrollo cognitivo y el desarrollo emocional han de contemplarse conjuntamente de manera interdependiente".

La educación actual debe integrar lo académico y lo emocional de cada quien, de esta forma los estudiantes desde pequeños aprenden a interactuar en forma adecuada, aprendiendo a valorar la matemática cuando resuelven problemas utilizando diversas metodologías, donde el aprendizaje cooperativo es una de ellas. Godino, Batanero y Font (2004) consideran que cuando se promueve la interacción social dentro de la instrucción matemática, se propicia la cooperación y la comunicación, afirmando que al existir comunicación oral o escrita, no solo del docente hacia los estudiantes, sino entre los niños y de estos hacia el docente, "los alumnos aprenderán unas matemáticas distintas y adquirirán una visión diferente" (p. 71).

Por lo anterior, se desarrolló una investigación como parte de una tesis doctoral que se centró en analizar las interacciones a nivel de aula cuando el proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática en un grupo de sexto año se complementa con la metodología del aprendizaje cooperativo aplicado a la resolución de problemas ya que interesa conocer que aspectos emergen cuando se propician las mismas.

Para esto se utilizó la técnica JIGSAW (rompecabezas) que Traver y García (2006, p. 5) afirman que "ha mostrado su eficacia para educar en actitudes; para promocionar actitudes positivas hacia la escuela, el estudio y los compañeros; y particularmente, para la enseñanza-aprendizaje de la actitud de solidaridad entre el alumnado".

Los objetivos de la investigación fueron los siguientes:

1. Determinar los procesos de interacción en el aula que se manifiestan al utilizar el aprendizaje cooperativo como recurso para el aprendizaje de las matemáticas.
2. Develar el papel que los alumnos desempeñan en el proceso de aprendizaje y los que perciben que les corresponde desarrollar, cuando se emplean metodologías que promueven el aprendizaje cooperativo en relación con las interacciones desarrolladas.
3. Determinar el papel que la docente desempeña y el que percibe que le corresponde desarrollar, cuando se emplean metodologías que promueven el aprendizaje cooperativo en relación con las interacciones desarrolladas.

De acuerdo a los objetivos propuestos se definieron las siguientes categorías de análisis:

Tabla 1.
Categorías de análisis

Categoría y subcategorías	**Descripción**
Categoría: Elementos que dificultan poner en práctica en forma eficiente una metodología innovadora como el aprendizaje cooperativo Subcategorías: 1. Elementos externos al aula 2. Elementos internos del aula 3. Requerimientos profesionales docentes	Esta categoría agrupará en tres subcategorías a algunos elementos que impiden que la docente y sus estudiantes interacciones mediante la metodología del aprendizaje cooperativo en forma eficaz en el aula.
Categoría: Los procesos de interacción en el aula Subcategorías: 1. Procesos de interacción entre la docente y sus estudiantes 2. Procesos de interacción entre los estudiantes	Se describe en dos subcategorías como se perciben las interacciones en el aula entre la docente y sus alumnos y entre los estudiantes. Se entenderá la interacción como la acción que se ejerce recíprocamente entre dos o más personas.

Fuente: Elaboración propia.

Esta fue una investigación cualitativa donde se utilizaron la observación no participante, directamente en el aula durante trece ocasiones; la entrevista en profundidad, tanto a la docente, en seis ocasiones, como a siete estudiantes seleccionados y el desarrollo de un taller de cierre con los estudiantes con actividades que les permitieron externar sus opiniones fuera de la clase de matemática. Para este último se contó con la colaboración de dos personas que tienen un bachillerato en Trabajo Social. El taller consistió en la aplicación de tres actividades denominadas "El cuaderno del vinazo", "El círculo de preguntas rápidas" y "El buzón *Comepesadillas*".

Para el trabajo en el aula, se utilizaron dos instrumentos. Uno de ellos es el que aporta Pujolás (2003) titulado "Plan de equipo", el cual se entregó a los grupos formados para que se evaluaran y puede apreciarse en la Tabla 2.

Tabla 2.
Instrumento para trabajo en grupos de estudiantes

Reflexión sobre el equipo cooperativo y establecimiento de objetivos de mejora			
Nombre (o número) del Equipo:			
Responsable:	Fecha:		
¿Cómo funciona nuestro equipo?	***Necesita mejorar***	***Bien***	***Muy bien***
1 ¿Terminamos las tareas?			
2 ¿Utilizamos el tiempo adecuadamente?			
3 ¿Hemos progresado todos en nuestro aprendizaje?			
4 ¿Hemos avanzado en los objetivos del equipo?			
5 ¿Cumplimos los compromisos personales?			
6 ¿Practica cada miembro las tareas de su cargo?			
¿Qué es lo que hacemos especialmente bien?			
¿Qué debemos mejorar?			
Objetivos que nos proponemos:			

Fuente: Pujolás, 2003, p. 12.

Otro, es un instrumento individual denominado "Caritas" diseñado por la investigadora, el cual se utilizó con la finalidad de conocer cómo se sentían los estudiantes al aprender con una metodología de aprendizaje cooperativo en la clase de matemática.

Este puede observarse en la Figura 1.

Fecha

Cuando participo en las lecciones de matemática en las que aprendo con mis compañeros/as usando el aprendizaje cooperativo, me siento:

(marca en la carita que refleje cómo te sientes)

Me siento así porque: _____

Figura 1. Instrumento "Caritas"

Ambos instrumentos se aplicaron en dos ocasiones distintas: la primera al finalizar el trabajo en grupos y conformar una nueva distribución y la segunda en octubre cuando la investigadora finalizó el trabajo de campo.

Discusión de resultados

A continuación se mencionarán por categoría los principales hallazgos**.**

1. **Categoría: Elementos que dificultan poner en práctica en forma eficiente una metodología innovadora como el aprendizaje cooperativo**

a) Subcategoría: elementos externos al aula que dificultan poner en práctica en forma eficiente una metodología innovadora como el aprendizaje cooperativo

Durante las visitas a la escuela se detectaron frecuentes interrupciones en tiempo lectivo del trabajo desarrollado por la docente y que constituye uno de los elementos externos que dificultan poner en práctica en forma eficiente una metodología innovadora como el aprendizaje cooperativo.

Existen además una importante cantidad de actividades de carácter formativo externo al proceso de aula, que desde el punto de vista de la docente tienen más incidencia en la eficiencia del tiempo que en los alcances pedagógicos.

Por último existen directrices que puede dificultar o limitar el buen desempeño de la aplicación de nuevas metodologías que requieran de ciertas flexibilidades o de una mayor horizontalidad en la interacción docente-alumno. Por ejemplo, la maestra exigía que los estudiantes escribieran el título en su cuaderno, aun cuando sea innecesario en la lección orientada por una innovación educativa, solo con el propósito de evitar la reacción de algunos padres de familia.

b) Subcategoría: elementos internos al aula que dificultan poner en práctica en forma eficiente una metodología innovadora como el aprendizaje cooperativo

La organización del aula es uno de los elementos que puede entorpecer las interacciones y la aplicación de metodologías innovadoras como el aprendizaje cooperativo.

Figura 2. Trabajo en el aula sin interacciones.
Fuente: Observación de aula #9, 2012.

Otro elemento que puede obstaculizar la implantación exitosa de una metodología didáctica innovadora es la aplicación de ciertas normas, como, por ejemplo, que la maestra exija que todos los estudiantes de un grupo levantaran la mano para aclarar alguna duda generada durante las lecciones cooperativas y que esperaran su turno, lo cual no es necesario en la dinámica generada por el uso de esa metodología.

Figura 3. Alumnos esperando para que se les aclare una duda.
Fuente: Observación de aula #5, 2012.

Esta situación pudo haberse evitado si la docente hubiera permitido la aclaración de conceptos y de dudas entre grupos, mediante la designación de roles a los estudiantes.

Las interacciones generan ruido a lo interno del aula, como parte de las interacciones los estudiantes deben conversar y ponerse de acuerdo. Para solucionar esa situación, Johnson, Johnson y Holubec (1999, p. 24) sugieren ciertos roles para desempeñar dentro de los grupos cooperativos, sin embargo si estos no se implementan, generan malestar en la docente y en sus colegas de aulas vecinas.

Por último, como señala Robert (2007), las condiciones del aula influyen en el ánimo con que docentes y estudiantes enseñan y aprenden. En el aula observada se detectó deficiente ventilación, pupitres en mal estado, piso con huecos, iluminación inadecuada, falta de pintura en las paredes y cortinas en mal estado.

c) Subcategoría: Requerimientos profesionales docentes

La maestra mostró errores conceptuales en matemática, los que fueron detectados en tres ocasiones durante la revisión por parte de la investigadora de los ejercicios diseñados para implementar la metodología cooperativa.

La docente afirmó que sentía la necesidad de que la investigadora actuara como "ente supervisor" para revisarle con anterioridad las actividades a desarrollar en el aula, al tener poco dominio de los objetivos del programa de matemáticas. Lo anterior devela una seria problemática: es difícil para una maestra innovar debido no solo al desconocimiento de la metodología que desea introducir, sino también a la falta de conocimientos propios de la materia que debe enseñar. Al respecto Cañal de León (2005) cita un "pecado capital" (usando sus propias palabras) que atenta contra la innovación educativa y es la formación del profesorado ya que se detectan grandes lagunas en la formación inicial y permanente.

Es importante reafirmar este hallazgo con un aporte de Shulman (1986, p. 19), quien plantea que un docente debería tener tres tipos de conocimientos: el conocimiento matemático, el conocimiento pedagógico del contenido matemático (PKC= Pedagogical Content Knowledge) que es la forma en que el contenido matemático se hace comprensible a los otros y el conocimiento curricular (conocimiento de los programas y materiales adecuados).

2. **Categoría: Los procesos de interacción en el aula**

a) Subcategoría: Procesos de interacción entre la docente y sus estudiantes

De los 27 estudiantes que tenía el grupo participante en la investigación, 14 hombres y 13 mujeres, se entrevistó a siete. En forma unánime, en cuanto a la percepción que tienen los estudiantes de la maestra, los entrevistados afirman que la relación existente entre ellos y la docente es buena.

En las dos observaciones realizadas que la docente trabajó en forma tradicional, esta interaccionó en forma individual con cada estudiante, pero no creó condiciones que favorecieran la interacción entre los estudiantes, con la finalidad de que pudieran poner sus ideas en común. Los estudiantes no podían hablar con el compañero que tenían a la par, solamente podían conversar con la docente en caso de tener dudas. En las sesiones de aprendizaje cooperativo los estudiantes pudieron interactuar dentro del grupo correspondiente y estos con la docente, sin embargo la maestra no permitió la interacción entre grupos, salvo durante los cierres para una puesta en común de la soluciones.

Abrantes (2002), considera que una forma en que los estudiantes puedan relacionarse es mediante la resolución en grupos de problemas utilizando la metodología de aprendizaje cooperativo, la cual implica ciertas interacciones entre los estudiantes y del docente con los distintos grupos que se conforman.

La investigadora observó diferencias en el papel desempeñado por la docente en una clase tradicional y en una clase cooperativa. Por ejemplo, en la clase tradicional la docente repartía fotocopias y se sentaba en su escritorio a esperar que en forma individual los estudiantes

trabajaran y vinieran a solicitarle ayuda si tenían alguna duda, la docente le revisaba y le decía como hacerlo, en cambio, en la clase con aprendizaje cooperativo, la docente se encontraba desplazándose por todos los grupos de estudiantes, atenta a las intervenciones y cuestionándolos para ayudarlos a encontrar el camino para continuar la resolución del ejercicio.

b) Subcategoría: Procesos de interacción entre los estudiantes

Dentro de los grupos formados para trabajar en el aula, la relación entre los estudiantes fue muy cordial, se ayudaban unos a otros para poder resolver el ejercicio en cuestión. Ferreiro y Espino (2011) son claros en que ésta metodología enfatiza la comunicación horizontal y asertiva.

El impedimento establecido por la maestra para que los estudiantes se levantaran de su pupitre a interactuar con otros grupos, pudo haber sido la causa más importante que impidió las interacciones entre más estudiantes, ya que los subgrupos no podían aclarar dudas entre ellos.

Sin embargo, las interacciones entre los estudiantes pueden verse afectadas por errores en su formación matemática. Estos errores quedaron evidenciados en varias oportunidades a lo largo de las observaciones. Uno de ellos se muestra en la figura 4.

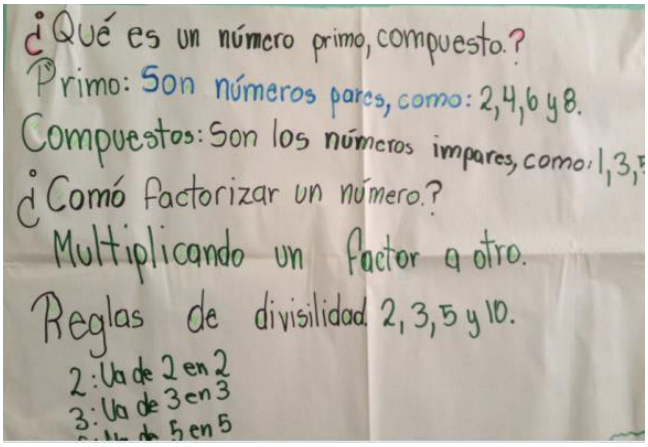


Figura 4. Errores conceptuales por parte de los estudiantes. Grupo # 2.
Fuente: Observación de aula # 1, 2012.

En el taller de cierre, los estudiantes durante una de las actividades realizadas titulada El cuaderno del vinazo, debían exponer alguna razón de si le gustaba trabajar en matemática utilizando el aprendizaje cooperativo. Estas son algunas de las frases obtenidas:

Me gusta el aprendizaje cooperativo en matemática porque:

- Se trabaja en grupo
- La carga no se le deja a una persona
- Compartimos y nos ayudamos
- Aprendemos más
- Todos aprendemos
- Enseñamos a otros lo que les cuesta
- Así es más fácil
- Es más práctico y uno aprende más fácil

Aunado a esto, tenemos frases obtenidas en las entrevistas como la siguiente: "Me siento importante al saber que aclaro dudas en mi grupo, prefiero trabajar cooperativamente, nosotros nos preguntamos entre nosotros y si no entendemos algo le preguntamos a la profe" (entrevista individual a Allan).

Relevancia de esta investigación

Esta investigación es importante puesto que el conocimiento generado constituye un insumo valioso para las universidades formadoras de educadores de primer y segundo ciclos de la educación general básica, así como para el Ministerio de Educación Pública (MEP), en los procesos de capacitación de las y los educadores en servicio, a la vez que puede actuar como soporte de los procesos de innovación educativa que se impulsan en Costa Rica.

El conocimiento generado es de valor para las personas involucradas en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática comprometidas con la innovación y la investigación educativa en procura de mejorar los procesos de aprendizaje.

La investigación también tiene valor desde el punto de vista teórico, pues como afirma Lerman (2001, p. 20):

> Falta mucho para consolidar líneas de investigación que integren lo afectivo, lo cultural y lo social en la educación matemática. Desarrollar metodologías en este sentido es crucial porque ha de facilitar una mejor comprensión de los procesos de aprendizaje de todos los alumnos.

Conclusiones

Las principales conclusiones a las que arriba este estudio de acuerdo con los objetivos propuestos se indican a continuación:

1. **Interacción entre la docente y los estudiantes**
   i. Se logró observar que el empleo de la metodología del aprendizaje cooperativo en la enseñanza de la matemática favorece interacciones entre la docente y los estudiantes con potencial para generar transformaciones en la dinámica del aula. Por ejemplo: los estudiantes aclaran dudas entre ellos mismos y mejoran su relación afectiva, en efecto se identificó que favorece una actuación de mayor interdependencia de los estudiantes, que demanda que la docente asuma un papel diferente al que desempeña en las lecciones con la metodología tradicional: los estudiantes son capaces de autogestionar sus propios procesos y la docente actúa como mediadora.
   ii. Las interacciones entre la docente y los estudiantes cuando se emplea una opción metodológica innovadora se pueden ver condicionadas por la eficiencia en el uso del tiempo y no solo por la mediación pedagógica que se establece. Lo anterior por cuanto la docente puede limitar las interacciones en sus clases, al restringir las necesarias para esta mediación pedagógica, por la falta de tiempo en relación con el cumplimiento del programa oficial del MEP.
2. **Interacción entre estudiantes**
   i. La agrupación de los estudiantes en grupos heterogéneos no generó ningún conflicto para que estos interactuaran y resolvieran los problemas por medio de la utilización de la metodología del aprendizaje cooperativo.

ii. Las interacciones entre los estudiantes inducidas por el empleo del aprendizaje cooperativo facilita la resolución de problemas matemáticos, al generar un mayor interés por parte de los educandos por la materia, tal como lo expresaron en las entrevistas realizadas.

iii. Las interacciones entre los estudiantes pueden verse afectadas por errores en su formación matemática, pues de no permitirse la interacción con otros grupos, un mismo error conceptual debe esperar largo tiempo para su corrección.

iv. La investigación permite conocer que los estudiantes se sienten a gusto con metodologías distintas a las que han vivido previamente, lo que según su percepción les permite un mejor aprendizaje de la asignatura y mejorar la interacción con sus compañeros y con la docente.

v. La investigación también muestra que al favorecerse el intercambio entre pares, se propicia la aclaración de dudas, la identificación de los errores dentro del equipo y la toma de conciencia por parte de los estudiantes de que la docente no es la única fuente de consulta.

3. Papel de los estudiantes cuando se emplean metodologías que promueven el uso del aprendizaje cooperativo

i. El proceso de aprendizaje con la metodología del aprendizaje cooperativo muestra un tránsito del papel pasivo de los estudiantes de una metodología tradicional, que no les permite interactuar, a un escenario donde se propician interacciones y se redefinen sus papeles, convirtiéndose en agentes activos.

4. Papel de la docente cuando se emplean metodologías que promueven el uso del aprendizaje cooperativo

i. A pesar de utilizar una metodología que propicia la resolución de problemas, como lo es el aprendizaje cooperativo, el estudio de los contenidos matemáticos son vistos en forma fragmentada, lo cual puede incidir en que el tiempo sea limitado para el cumplimiento de los contenidos del programa oficial de matemáticas del MEP.

ii. En el papel que deben desempeñar los docentes como mediadores dentro de la metodología del aprendizaje cooperativo, se reconoce la detección de los errores de manera más efectiva cuando los alumnos interaccionan entre sí que con la metodología tradicional, lo que favorece las actividades de intervención oportuna para realimentar el aprendizaje. Esto debe verse como una fortaleza, pues generalmente el error se castiga y no se acostumbra a retomarlo para aprender a partir de ellos.

Otras conclusiones que permite esta investigación que emergieron de acuerdo con las categorías que se definieron son las siguientes:

5. Aspectos que deben ser considerados para poner en práctica en forma eficiente una metodología innovadora como el aprendizaje cooperativo

i. La investigación devela que existen obstáculos, tanto internos como externos al aula, para la implementación del aprendizaje cooperativo de la matemática y que dificultan las interacciones entre los estudiantes y de la docente con ellos. Existen actividades que consumen tiempo de las lecciones (revisión de uniformes, entrega de circulares, interrupción de las lecciones con suspensión parcial o total de las actividades, entre

otras) que entorpecen la efectiva puesta en práctica de dicha metodología y las interacciones que con esta se generan. Es por ello que se debe tomar en cuenta que las actividades externas al aula que no tengan un papel pedagógico puede esperar a repartirse al finalizar la lección, y las demás actividades pueden estructurarse de forma tal que no implique una fragmentación y desvinculación de objetivos, sino que puedan aprovecharse para trabajarse como un eje transversal dentro de la materia que se abarque.

6. **Las vivencias de la docente al enseñar mediante aprendizaje cooperativo**

   i. Se detectó que la docente que desea innovar con el empleo del aprendizaje cooperativo de la matemática requiere de un acompañamiento de parte de un profesional experimentado en el uso de la metodología.

   ii. La formación matemática del docente aparece como un factor clave para el buen desempeño cuando utiliza el aprendizaje cooperativo como estrategia didáctica. Conocer una metodología didáctica no parece ser suficiente, si el docente tiene vacíos en los conocimientos matemáticos.

Referencias bibliográficas

Abrantes, P. (2002). *El papel de la resolución de problemas en un contexto de innovación curricular*. En *La resolución de problemas en matemáticas*. Teoría y experiencias. España: Graó.

Aguirre, A., Amaya, R., & Espinosa, L. (2001). *Trabajo cooperativo. Una técnica pedagógica de gran impacto. Revista de Ciencias Humanas*, *26*. Recuperado de *http://www.utp.edu.co/~chumanas/revistas/revistas/rev26/aguirre.htm*

Cañal de León, P. (2005). *La Innovación Educativa.* Madrid: Akal.

Ferreiro, R. & Espino, M. (2011). *El ABC del aprendizaje cooperativo* (2°ed). Trillas: México.

Godino, J; Batanero, C. & Font, V. (2004). *Didáctica de las matemáticas para maestros*. Proyecto Edumat- maestros. Universidad de Granada.

Johnson, D., Johnson, R. & Holubec, E. (1999).*El aprendizaje cooperativo en el aula.* Paidós: Argentina

Lerman, S. (2001). Cultural, discursive psychology: A sociocultural approach to studying the teaching and learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *46*(1). 87-113.

Lucas, B. (2009). Mejora del rendimiento académico y de la competencia emocional a través del aprendizaje cooperativo . *Revista Digital Eduinnova*, *14*, 1- 35. Septiembre Recuperado de http://www.eduinnova.es/sept09/APRENDIZAJECOOPERATIVO.pdf

Programa Estado de la Nación. (2013). *Cuarto Informe Estado de la Educación.* San José, Programa Estado de la Nación. Recuperado de www.estadonacion.or.cr

Programa Estado de la Nación. (2011). Tercer Informe Estado de la Educación. San José, Programa Estado de la Nación. Recuperado de www.estadonacion.or.cr

Pujolás, P. (2003). *El aprendizaje cooperativo: algunas ideas prácticas.* Recuperado de http://www.deciencias.net/convivir/1.documentacion/D.cooperativo/AC_Algunasideaspra ctica s_Pujolas_21p.pdf

Robert, P. (2007). *La educación en Finlandia: Los secretos de un éxito asombroso.* Recuperado de http://bibliotecavirtual.educared.org/index.php/site/default/detalle/id/00000000504/la- educacion-en-finlandia-los-secretos-de-un-exito-asombroso

Shulman, L. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Traver, J., & García, R. (2006). *La técnica puzzle de Aronson como herramienta para desarrollar la competencia "compromiso ético" y la solidaridad en la enseñanza universitaria*. Revista Iberoamericana de Educación. n.º 40. España. Recuperado de http://www.rieoei.org/deloslectores/1519Traver.pdf

El rol de las situaciones-problema en la enseñanza y la gestión docente

Analía **Bergé**
Université du Québec à Rimouski
Canadá
analia.berge@uqar.ca
Betina **Duarte**
Universidad Pedagógica
Argentina
betina.duarte@ba.unipe.edu.ar

Resumen

Analizamos el papel de la resolución de problemas en clase de matemática desde la perspectiva docente así como también los condicionantes para la gestión docente de la utilización de situaciones-problema. A través de cuestionarios y entrevistas a docentes semi-dirigidas cuyo análisis a priori incluimos, mostramos que el sistema estudiado (el primer ciclo de la escuela secundaria de una pequeña ciudad canadiense), se encuentra en equilibrio: la necesidad de dar seguridad a los alumnos, de homogeneizar los procedimientos del aula, de sostener el trabajo de los alumnos más flojos y de responder a las evaluaciones ministeriales, comanda las decisiones didácticas de los docentes en detrimento de una producción matemática exploradora y creativa.

Palabras clave: didáctica de la matemática, resolución de problemas matemáticos, situación-problema, gestión docente, investigación interpretativa/cualitativa

Introducción

Esta comunicación forma parte de un proyecto de investigación en colaboración entre dos investigadoras en didáctica de la matemática que trabajamos en Argentina y Canadá. Con el propósito de analizar, en primer lugar, el papel de la resolución de problemas en clase de matemática desde la perspectiva docente y más específicamente los condicionantes para la gestión docente de la utilización de situaciones-problema, hemos elaborado un cuestionario y lo hemos distribuido entre docentes en ejercicio del conurbano bonaerense en Argentina y de una ciudad de la provincia de Quebec en Canadá. A posteriori, hemos realizado entrevistas semi-dirigidas para comprender mejor algunas de las respuestas recibidas.

Comenzaremos por posicionarnos desde el punto de vista teórico y metodológico, para continuar por el análisis del cuestionario y de dos entrevistas que elegimos para esta comunicación al CIEAM; terminaremos compartiendo algunas conclusiones que nos parecen de interés didáctico.

Marco de referencia

Partiendo de nuestro interés por conocer de qué modo la enseñanza aborda la actividad de resolución de problemas en las clases de matemática del nivel secundario, encontramos que esta

actividad forma parte de muchos diseños curriculares siguiendo dos grandes objetivos: desarrollar el aprendizaje de matemática mediante la resolución de problemas y también desarrollar el aprendizaje de procesos de resolución de problemas, como un objetivo en sí mismo (Fagnant y Vlassis, 2010). Es el caso del diseño curricular quebequense (PFÉQ: Programme de formation de l'école québécoise, MELS 2006 et 2007) que incluye la resolución de problemas como una competencia transversal a la formación escolar y que la desarrolla particularmente para los niveles primario y secundario en los capítulos dedicados a la matemática. En efecto, los programas de matemática de la escuela se basan en el desarrollo de tres *competencias* de las cuales una es la *resolución de situaciones-problemas matemáticos*; las otras dos son *desplegar un razonamiento matemático* y *comunicar utilizando un lenguaje matemático*. En un artículo reciente, Lajoie et Bednarz (2012) ilustran la evolución de la resolución de problemas en los programas y documentos pedagógicos de Quebec de los últimos cien años. Las autoras señalan que los problemas fueron concebidos durante mucho tiempo con el doble objetivo de aplicar conceptos y desarrollar el razonamiento, mediante enunciados cortos, centrados en cuestiones de la vida cotidiana y graduados en dificultad. Las especialistas Lajoie et Bednarz muestran que a lo largo de los años, el rol de la resolución de problemas se ha ampliado, pasando de *razonar* y *aplicar nociones matemáticas* a *desarrollar habilidades intelectuales, reinvertir conocimientos y construir nociones nuevas.* Es a partir de los años 80 que se admite que un problema pueda ser ubicado al principio, durante o al final de una unidad de enseñanza.

Ciertamente, la forma en la que un sujeto - que resuelve un problema y que está aprendiendo matemática - pone en juego las nociones matemáticas inherentes al mismo, puede variar dependiendo de la relación de ese sujeto con la disciplina y del momento en que los problemas entran en su esfera de actividad. Los didactas dan cuenta de estas diferencias cuando distinguen tipos de problemas para la enseñanza (Boublil-Ekimova, citando a Charnay Mante, pág. 34, la traducción es nuestra):

- "situaciones-problema" (problemas destinados embarcar a los alumnos en la construcción de nuevos conocimientos)
- "problemas de reutilización" o "de aplicación" (problemas destinados a dar lugar a que los alumnos utilicen conocimientos ya adquiridos)
- "problemas de transferencia" (problemas destinados a dar lugar a que los alumnos extiendan el campo de utilización de una noción ya estudiada)
- "problemas integradores o de síntesis" (problemas más complejos en los que los alumnos deben usar de manera conjunta varias categorías de conocimientos)
- "problemas de evaluación" (problemas cuyo objetivo es permitir al docente y a los alumnos hacer un balance sobre el modo en el que los conocimientos son dominados)
- "problemas abiertos" (problemas destinados a poner a los alumnos en situación de búsqueda y de desarrollo de competencias del orden metodológico).

En los manuales escolares quebequenses otro tipo de problema se suma a los anteriores: "problemas motivadores". Ubicados habitualmente al principio de un capítulo, tocan las nociones que serán presentadas en las páginas siguientes. Los alumnos no están en general en condiciones de resolverlos ni de intentar estrategias parciales de resolución en esa etapa inicial. Esos problemas tienen la función de motivar a los alumnos a querer avanzar en la lectura o el tratamiento de los temas que seguirán; sin embargo en la mayoría de los casos, la relación con el tema que sigue es solamente perceptible para los ojos de quien ya domina el tema.

Frecuentemente esos problemas son presentados bajo la rúbrica *situación-problema* lo cual genera confusiones. Boublil-Ekimova (2010) señala que muchos de los problemas presentados bajo el título de situación-problema en los manuales quebequenses no constituyen lo que se conoce como situación-problema para la Teoría de Situaciones Didácticas (Brousseau, 1998). La lectura de autores que se posicionan adhiriendo a esta teoría nos permite seleccionar distintos criterios para identificar a las situaciones-problema en ese marco. Para Guy Brousseau, la necesidad de dar sentido a los saberes que se enseñan exige del docente elegir problemas (en el sentido común de la palabra) que permitirán al alumno entrar en una situación, utilizar su propio repertorio o sistema de conocimientos y modificarlo de manera autónoma y personal en función de la situación y no del deseo del docente (Brousseau, 1994). Para que esa situación sea una situación de aprendizaje es necesario que la respuesta inicial del alumno al problema planteado no sea la que se desea enseñarle y que permita al alumno utilizar estrategias de base y conocimientos de los que dispone. Cuando esta estrategia resulta insuficiente, el alumno es llevado a modificar su sistema de conocimientos (Brousseau, 1994). Boublil-Ekimova (2010) menciona que una situación–problema es un problema que tiene el objetivo de producir un aprendizaje. Esta autora muestra que a veces los términos *problema* y *situación-problema* son utilizados indistintamente, por ejemplo ella menciona que lo que Vergnaud (1991, citado por Boublil-Ekimova, 2010) describe como situación-problema coincide con las descripciones que hacen Brun (1997) y Ragot (1991) de problema. Para Vergnaud (1991) una situación-problema se caracteriza por la ausencia de un esquema de tratamiento "listo para ser utilizado" en la resolución. Sin embargo, la ausencia de esquemas listos para usar no alcanza para que un problema adopte la forma de situación-problema. Es preciso también que el problema presentado esté al alcance de los alumnos. Esto significa no solo que resulte comprensible sino que también sea posible para el alumno pensar en estrategias parciales o totales de resolución del mismo a partir de recortes del propio problema o de simplificaciones del mismo eventualmente. De este modo el alumno podrá acercarse a nociones matemáticas, seguramente en forma contextualizada, al producir estas estrategias parciales. No obstante la posibilidad -por parte del alumno - de producir algunas ideas parciales para abordar el problema - tales como hipótesis o conjeturas - se espera que la situación plantee al alumno un enigma a resolver (Astolfi, 1993). Para el MELS (Ministerio de educación de la provincia de Quebec) las situaciones-problema deben suscitar un conflicto cognitivo o una necesidad de resolución (MELS, 2007). Astolfi enfatiza la necesidad de procurar un equilibrio entre la resistencia que genera el obstáculo al que se enfrentarán los alumnos que no disponen de las nociones matemáticas en juego y la devolución que el docente necesita se produzca para que los alumnos tomen el problema como propio y se encaminen hacia su resolución lo que derivará en una producción de relaciones en contexto. Mucho antes Charlot (1976, citado por Pallascio, 2005) afirmaba que el aprendizaje mediante la resolución de situaciones-problema invierte los dos momentos canónicos de la enseñanza tradicional: el problema precede a la presentación de las nociones que serán puestas en juego durante la elaboración de una solución, en lugar de ser ubicado al final. Esta inversión de momentos favorece la producción de una variedad de estrategias de los alumnos y el desarrollo de su capacidad de descubrimiento y exploración; Pallascio (2005) afirma entonces que resolver una situación-problema es una actividad de producción y no de reproducción. Sadovsky estudia condiciones para que en una clase los alumnos puedan situarse en el rol de productores de conocimiento matemático (Sadovsky, 2005). Por otro lado Vlassis (2001) recalca que una situación-problema no se define solamente por la situación (el problema) sino también por la manera en la que el docente explota esa situación. Esta autora retiene tres elementos que

considera fundamentales en la definición de lo que es una situación-problema: primeramente, y aunque parezca redundante, resulta necesario plantear un verdadero problema (en el sentido de plantear un desafío intelectual), en segundo lugar aceptar que los problemas deben estar anclados en las nociones a enseñar y que eso no es siempre posible de ser realizado en contextos de la vida cotidiana y la tercera característica es que las nociones a enseñar sean herramientas necesarias adaptadas al problema.

Esto muestra que en referencia a la conceptualización de la noción de situación-problema hay puntos de encuentro y de divergencia entre distintos autores como los mencionados. En función de nuestros intereses de investigación, en lo que sigue de esta comunicación nos referiremos a una situación-problema como un problema que tiene por intención hacer aprender una nueva noción para el cual esa noción es necesaria, en donde se haga presente un desafío intelectual o un conflicto cognitivo, que posea un contexto extra o intramatemático de modo que permita al alumno formular relaciones matemáticas y constatarlas (o confrontarlas) para poder avanzar. Estos requerimientos se ubican en tensión y se espera que la situación-problema los sostenga en equilibrio.

No podemos dejar de mencionar que este escenario ubica a los docentes en un lugar de incertidumbre. La falta de tiempo, la selección de temas que podrían ser trabajados mediante la resolución de situaciones-problema, la poca confianza de los docentes en que los alumnos podrán trabajar en esta modalidad, la complejidad que implica el trabajo en pequeños equipos en la clase son algunos de los puntos mencionados por los docentes como principales trabas para desarrollar este tipo de trabajo (Vlassis, 2001). Es cierto además que la clase se torna más incierta en términos de lo que en ella va a ocurrir: por un lado, la variedad posible de resoluciones requiere del docente un conocimiento muy profundo de las nociones en juego, por otro lado, el docente deberá partir de estas resoluciones contextualizadas y personales para generar la reflexión necesaria que permita descontextualizarlos lo cual exige de su parte una toma de decisiones permanente. Finalmente, los manuales de los que disponen los docentes no están mayoritariamente escritos de manera de favorecer un aprendizaje por medio de la resolución de situaciones-problema.

Metodología y análisis a priori

Nos ubicamos en un tipo de investigación « interpretativa /cualitativa ». ¿Cuáles son algunas marcas de este paradigma en nuestra investigación? En primer lugar no se trata de conocer una realidad externa a nosotros mismos sino que imaginamos una realidad que está en proceso de construcción, por otra parte se busca comprender mejor un aspecto de la vida cotidiana para eventualmente actuar sobre ella, se adopta una perspectiva interactiva y finalmente los resultados obtenidos están enraizados en una cultura, en un contexto, en una temporalidad (Karsenti y Savoie-Zajc, 2000).

A través de esta investigación buscamos conocer de qué manera los docentes trabajan la resolución de problemas en clase de matemática, más precisamente si utilizan en clase situaciones-problema en el sentido que hemos mencionado en el marco de referencia y por qué las utilizan o no. Con ese objetivo hemos buscado indagar: qué papeles atribuyen a la resolución de problemas en clase, cómo realizan la gestión de su clase cuando se trabaja en resolución de problemas, en qué medida utilizan la resolución de problemas como un medio para construir nuevos conocimientos y cuáles son, en su opinión, las ventajas y los inconvenientes de trabajar en clase con la resolución de problemas. Para lograrlo hemos confeccionado un cuestionario

dirigido a docentes, desarrollado en dos partes. En la primera, los docentes eligen un problema que ya han utilizado previamente en sus clases y responden a ciertas preguntas formuladas en diálogo con ese problema. En la segunda, responden a las mismas preguntas pero esta vez sobre un problema propuesto por nosotras (un problema pensado para potencialmente construir la noción de función lineal) que analizaremos un poco más adelante. Las preguntas para ambos problemas están ordenadas temáticamente en cuatro bloques: acerca del problema, de las estrategias de los alumnos, de la gestión de clase y de las razones que llevaron al docente a elegir ese problema.

En el primer bloque, dos preguntas fueron redactadas especialmente para indagar si el docente considera que es posible construir un cierto conocimiento a partir de la resolución de problemas; siendo la primera: *¿qué nociones matemáticas están involucradas en este problema?*, y la segunda: *¿qué nociones matemáticas deberían ser ya dominadas o conocidas por los alumnos para poder abordar el problema?* Las similitudes o diferencias entre las respuestas a estas dos preguntas nos permiten avanzar en nuestra indagación, ya que si el conocimiento que debe ponerse en juego para resolver un problema está disponible para quien lo resuelve, no hay forma de construirlo. Una tercera pregunta contribuye a confirmar lo respondido en las dos anteriores: *¿considera que este problema contribuye al aprendizaje de una nueva noción? Si su respuesta es afirmativa le pedimos que nos indique cuál sería esa nueva noción y por qué usted considera esto.* Finalmente, las respuestas que los docentes den a esas mismas preguntas pero ahora respecto del problema propuesto por nosotras nos permiten avanzar en el mismo sentido, pues este problema puede funcionar como una situación-problema.

La intención del segundo bloque es conocer, por un lado, el posicionamiento del docente frente a la posibilidad de que sus alumnos sean productores de conocimiento matemático (en el sentido de Pallascio (2005) y de Sadovsky (2005) (*¿Qué procedimientos, qué formas de resolución y/o qué relaciones o ideas usted espera que sus alumnos produzcan/pongan en juego para iniciar la resolución del problema?*) y por otro, las anticipaciones que él hace sobre su problema y los posibles escenarios en su clase (*¿Qué dificultades usted anticipa que sus alumnos afrontarán? ¿De qué manera considera que se podrían superar las dificultades que usted menciona en el punto anterior?*).

Las preguntas del tercer bloque buscan informarnos sobre el rol que el docente atribuye a las interacciones en clase (*¿Prefiere usted una resolución individual, en equipo o con toda la clase? ¿Considera la opción de dejar un tiempo para el trabajo individual seguido del trabajo en pequeños grupos? Si es así le pedimos que nos precise las razones que lo motivan*) y qué gestión de la diversidad concibe *(¿Cómo se lleva a cabo la corrección del problema? Si el problema admite diversas estrategias de resolución, ¿cómo gestiona usted esta diversidad?*).

Las preguntas del cuarto bloque tienden a completar la información de los otros bloques, en caso que eso fuera necesario. El hecho de proponer al docente responder sobre un problema de su elección da lugar a desplegar su experiencia. Claramente el docente tendrá más material para compartir respecto de las preguntas del tercer y cuarto bloque para su problema que para el problema propuesto por nosotras.

El problema que presentamos a los docentes, en la segunda parte del cuestionario, es un problema que -desde nuestra perspectiva- está en condiciones de funcionar como situación-problema. El enunciado del problema es el siguiente:

El problema del barril

En un laboratorio de química, hay un barril con una capacidad de 20 litros que se utiliza para conservar una sustancia. Esta sustancia es siempre la misma. A medida que el barril se va llenando se van tomando los siguientes datos sobre el peso del barril:

Cantidad de sustancia (en litros)	*1*	*2*	*4*
Peso del barril (en kilogramos)	*8,5*	*13,5*	*23,5*

a) ¿Qué peso tendrá el barril cuando contiene 3 litros de sustancia?

b) ¿Qué peso tendrá el barril estando vacío?

c) ¿Cuál será el peso máximo del barril? ¿por qué?

d) Encontrar el peso del barril cuando contiene 7, 10 y 13 litros de sustancia.

e) Encontrar una regla de correspondencia que permita obtener el peso del barril en función de los litros de sustancia que contiene.

f) ¿Cuál sería según tu opinión, el interés de tener tal regla de correspondencia? Inventa una pregunta en la cual la regla resulta necesaria para poder dar una respuesta.

Como ya hemos señalado, una situación-problema se constituye alrededor de un desafío intelectual. Esto nos lleva a afirmar en primera instancia que es necesario que los alumnos no hayan abordado el estudio de la función lineal para que este problema pueda pensarse como una situación-problema. Una vez más, el problema no se constituye como tal aislado del sujeto que lo tiene que enfrentar.

Los alumnos de más de 12 años (y algunos más pequeños también) dominan la idea de que el volumen de líquido es proporcional a su peso: dos litros de agua pesan el doble que un litro, por ejemplo. El contexto requerirá que pongan en juego esta idea para considerar la cuestión del peso del barril. Por otra parte, el problema es comprensible sin la presencia de nociones matemáticas en juego: la escena de un barril que se completa con un líquido y cambia de peso en la medida que cambia la cantidad de líquido que posee no apela a nociones matemáticas.

La tabla permite que los alumnos elaboren conjeturas y que las analicen a la luz de los datos que disponen: evidentemente el peso del barril no cambia en forma proporcional al líquido que tiene ya que la tabla muestra que el peso con dos litros no es el doble que el peso con un litro y que el de cuatro tampoco es el doble que el de dos. No obstante, resulta esperable que algún alumno sume los valores del peso del barril para un litro y dos litros para obtener el peso del barril con tres libros. Esta estrategia podrá ser objetada ya que no funciona sumar dos veces el peso de dos litros para obtener el de cuatro. Estas consideraciones podrán dar lugar a que se considere la resta del peso del barril cuando tiene dos litros y del peso cuando tiene un litro para conocer "cuál es el aporte -en peso- de un litro del líquido". Consideramos que es entonces donde se pondrá en juego una forma contextualizada de la idea de pendiente. Será éste un contexto a evocar a la hora de introducir esta noción en otro momento.

Este aporte de un litro en el peso del barril podrá ser utilizado -por medio de una operación de resta- para conocer el peso del barril vacío. Del mismo modo, por medio de sumas reiteradas (sumas que se aplicarán al peso del barril con un litro) se podrá conocer el peso del barril para los distintos contenidos en volumen que se les pide a los alumnos. El peso del barril vacío

permitirá hablar más adelante, en otro momento de la enseñanza, de la ordenada al origen y las sumas reiteradas, o múltiplos del peso de un litro "sin barril", serán un contexto que abonará a la idea de pendiente.

Este análisis parcial del problema nos permite considerar como posible que:

a) los alumnos produzcan soluciones parciales o totales del problema,
b) la validación de las producciones sea interna del problema y por lo tanto pueda estar a cargo de los alumnos,
c) la producción de soluciones invita a la producción de conjeturas ligadas al contexto tales como ¿será cierto que ante una medida de volumen de líquido cualquiera estamos en condiciones de encontrar su peso conociendo simplemente el peso del barril vacío? Estas conjeturas se irán despegando del contexto por medio de la gestión del docente y darán lugar a la construcción de la noción matemática de función lineal.

Es por eso que este problema puede, para nosotras, ser utilizado como una situación-problema.

El cuestionario fue respondido por todos los docentes (salvo uno) del primer ciclo del secundario (1er y 2do año) de una ciudad canadiense de alrededor de 50.000 habitantes. La cantidad de cuestionarios facilitó el tratamiento no informático de los mismos. Posteriormente al cuestionario hemos entrevistado a todos los docentes que lo respondieron. Las entrevistas fueron semi-dirigidas. Además de profundizar y aclarar las respuestas volcadas a los cuestionarios, uno de los objetivos comunes a todas las entrevistas realizadas fue saber si el problema elegido por los docentes resulta representativo del tipo de trabajo que ellos llevan a cabo en resolución de problemas en sus clases.

Análisis y resultados

Decíamos que buscamos conocer de qué manera los docentes trabajan la resolución de (situaciones-) problemas en clase de matemática. Un conjunto de hallazgos es el resultado de la compilación y el análisis de los cuestionarios y las posteriores entrevistas; elegimos tres de ellos y los presentamos a continuación bajo la forma de tres afirmaciones:

Primera afirmación: los problemas viven en la clase como problemas de aplicación y de evaluación, no como situación-problema.

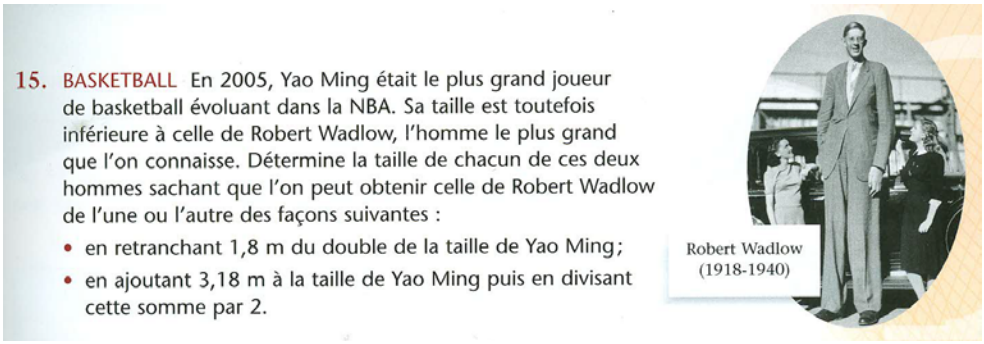
Segunda afirmación: el trabajo de resolución de problemas en clase se realiza en un primer momento de forma individual, y es seguido de la presentación por parte del docente de una solución correcta al conjunto de la clase; de este modo las interacciones sociales no están presentes en la fase de resolución de los problemas, quedando reservadas a las instancias de corrección y de presentación de las actividades a realizar.

Tercera afirmación: la resolución de problemas en clase tiene una función adicional: la de presentar a los alumnos e institucionalizar formas de hacer destinadas a homogeneizar los métodos de trabajo de los alumnos.

Frente a esta descripción de la realidad que hemos observado nos preguntamos: ¿por qué, en un sistema escolar que promueve desde su diseño curricular la resolución de situaciones-problema, parece no haber lugar para ese tipo de prácticas?

En lo que sigue, tomaremos como fuente una de las entrevistas semi-dirigidas realizada a dos docentes de un mismo establecimiento para desarrollar y dar sustento a estas afirmaciones y

aportar a la comprensión acerca de la forma en la que las situaciones-problema encuentran su lugar en la enseñanza. Los docentes de este relato dictan clases en el mismo año y respondieron en forma conjunta el cuestionario eligiendo para ello un problema que utilizan frecuentemente en situación de evaluación. Este hecho, la elección de un problema de evaluación para responder al pedido de un problema frecuentemente utilizado en clase, se repitió en todos los cuestionarios de esta ciudad de Quebec salvo uno (donde se propuso un problema de fin de capítulo). En nuestra mirada esto nos muestra un cierto posicionamiento de parte de los docentes, quienes eligen la situación de evaluación para hacer referencia a su proyecto de enseñanza (aun cuando muchas de las preguntas del cuestionario no podían responderse con un problema desarrollado durante una evaluación). Explicamos a los docentes que para nuestro propósito de investigación buscábamos un problema que ellos trabajasen en clase; recibimos de este modo un segundo problema que presentamos a continuación. El problema elegido, de fin de capítulo, se resuelve planteando una ecuación algebraica de primer grado:



15. BASKETBALL En 2005, Yao Ming était le plus grand joueur de basketball évoluant dans la NBA. Sa taille est toutefois inférieure à celle de Robert Wadlow, l'homme le plus grand que l'on connaisse. Détermine la taille de chacun de ces deux hommes sachant que l'on peut obtenir celle de Robert Wadlow de l'une ou l'autre des façons suivantes :

- en retranchant 1,8 m du double de la taille de Yao Ming ;
- en ajoutant 3,18 m à la taille de Yao Ming puis en divisant cette somme par 2.

Figura 1. Un problema elegido por los docentes. *Manual Panoramath, B, vol 2, página 23.*

[BASKETBALL En 2005, Yao Ming era el jugador de basketball más alto de la NBA. Su altura era, de todos modos, menor que la de Robert Wadlow, el hombre más alto de la historia. Determina la altura de cada uno de estos dos hombres sabiendo que se puede obtener la altura de Robert Wadlow de dos maneras:

- restando 1,8 m del doble de la altura de Yao Ming,

- sumando 3,18 m a la altura de Yao Ming y dividiendo por dos esa suma.]

El problema pertenece a uno de los tres manuales aprobados por el ministerio de educación de la provincia de Quebec para la escuela secundaria. Los docentes utilizan este problema al final de un recorrido hecho en el tema *resolución de ecuaciones de primer grado*. Durante la entrevista compartieron con nosotros la organización de la enseñanza de este tema. La transcribimos a continuación en el orden en el que nos fue presentada:

- Resolución de ecuaciones denominadas "simples" (de tipo $ax+b=c$). Para resolver estas ecuaciones consideran tres métodos explicados en el manual: ensayo y error, el método de operaciones inversas y, por último, el método de recubrimiento. Ninguno de estos tres métodos alude explícitamente a la búsqueda de ecuaciones equivalentes para encontrar soluciones.
- Inclusión de problemas con enunciado para ser modelizados por medio de una ecuación simple. Los docentes hacen énfasis en la necesidad de recorrer cinco etapas para la resolución, a saber: identificación de la variable, armado de la ecuación, resolución de la ecuación simple, obtención de una solución, verificación de la solución.

- Presentación de las ecuaciones denominadas "balanza" ($ax + b = cx + d$) descontextualizadas.
- Inclusión de problemas con enunciado que pueden modelizarse por una ecuación de tipo "balanza". La resolución de estos problemas respeta las cinco etapas mencionadas anteriormente.

Por último, los docentes manifiestan que en las evaluaciones piden explícitamente que las cinco etapas sean utilizadas.

La organización que estos docentes eligen marca una concepción sobre el conocimiento matemático y su enseñanza: las nociones matemáticas se pueden presentar en un recorrido que va de lo simple a lo complejo por etapas. El primer contacto con las nociones matemáticas ocurre en la clase en forma descontextualizada y luego los problemas se ocupan de conectar estas nociones con la vida cotidiana. Los problemas son una oportunidad en estas clases de justificar la presencia de ciertos objetos matemáticos. Los docentes manifiestan que para ellos resulta inalcanzable una propuesta de trabajo con problemas dejando a sus alumnos el espacio necesario y la libertad de acción conveniente. Igualmente, señalan que es la falta de tiempo la que los obliga a abordar en primer lugar la teoría.

Este posicionamiento se refuerza en la medida que los docentes consideran que el *problema del barril* es muy complejo para dar inicio a la enseñanza de función lineal. Sólo le darían lugar como un problema de síntesis o de control de aprendizajes sobre el tema de fórmulas con números naturales que corresponde a 1er año del secundario ya que fue éste el tema que ellos identificaron en juego en este problema. Desde su perspectiva, el hecho de presentar la tabla de valores con 1, 2 y 4 litros no es favorable, siendo preferible el uso de 1, 2 y 3 litros. Intentan, de este modo, evitar todo salto o dificultad, así como también cualquier error. Sus alumnos, por su parte, saben que se espera de ellos arribar a una regla de tipo $t=an+b$ y tienen métodos de trabajo para encontrar los parámetros a y b. El problema demanda, según su punto de vista, *demasiado* antes de poder resolverlo completamente, y por esa razón lo ubicarían como un problema de fin de capítulo o de síntesis. Esto nos señala que, bajo esta concepción de enseñanza, para resolver un problema hay que saber de antemano cómo hacerlo. La posibilidad de utilizar este problema como una situación-problema esto es, como un problema para explorar, producir conjeturas, ensayar y descartar soluciones (dicho de otro modo, la posibilidad de usar este problema para aprender) queda afuera de las opciones.

Estas consideraciones han dado lugar a afirmar en primer lugar que los problemas viven en clase como problemas de aplicación y de evaluación y no como situaciones-problema.

En relación con el lugar que los docentes atribuyen a las interacciones sociales, las preguntas del tercer bloque del cuestionario fueron una oportunidad para avanzar, ya durante la entrevista, en los escenarios de clase que los docentes consideran productivos. Los docentes coinciden en el potencial de la comunicación de métodos por parte del propio docente sobre todo teniendo presente a los alumnos más flojos, ya que la comunicación de las etapas mencionadas garantiza -según su punto de vista- un piso de nivelación y ofrece contención y ayuda. Por el contrario, cuando en la clase se sociabilizan los procedimientos de los alumnos más capaces los alumnos menos avanzados perderían su norte. En este escenario la discusión colectiva es vista como una amenaza antes que como una oportunidad.

En tanto que la mención a la necesidad de cuidar a los alumnos más flojos fue realizada por todos los docentes de esta ciudad de Quebec, el repertorio de procedimientos incorrectos señalados durante la administración del cuestionario fue de pequeña cuantía en cada uno de los problemas propuestos por ellos mismos. Nos parece que esto da sustento a nuestra descripción de una clase en la cual los procedimientos y las formas de resolución de problemas, se comunican. Durante las entrevistas confirmamos que los docentes no utilizan en forma habitual un análisis de procedimientos de sus alumnos en forma colectiva como una estrategia que permita poner en evidencia las lógicas que subyacen a los errores y producir formas superadoras con sus alumnos.

Volviendo a la entrevista, los docentes manifestaron otra razón para no propiciar una actividad de resolución de problemas al comenzar un curso o al abordar una nueva noción: muchos alumnos no van a trabajar esperando el momento en que el docente explique el problema a posteriori. Interpretamos que el contrato didáctico establecido resulta inamovible.

Creemos que estas consideraciones justifican nuestra segunda afirmación sobre el papel reducido que ocupan las interacciones sociales en la clase.

En un contexto en el que los docentes preparan a sus alumnos para una evaluación ministerial la homogeneización de gestos, procedimientos y formas de trabajo es bienvenida. Los docentes dan a todos herramientas de cómo proceder y esto resulta operativo para una evaluación provincial que organiza el propio ministerio de educación asegurando buenos resultados. La cuestión del tiempo también es señalada, por dos razones: por una parte, el tiempo -para ellos enorme- que llevaría introducir las nociones por situaciones-problema y por otra, la presión que sienten por el hecho de deber formar a los alumnos para rendir el examen ministerial (examen que rinden todos los alumnos de 2do año de la provincia). Entendemos que el accionar de los docentes responde a la necesidad, por una parte, de mantener en juego a los alumnos más flojos y por otra, de asegurarse haber *dado* los temas que entraran en el examen.

De este modo concluimos acerca de nuestra tercera afirmación: la aplicación de un método (como la resolución en cinco etapas) busca volver la clase homogénea, reducir la diversidad y asegurarse una estructura o un modo de trabajo compartidos por todos los alumnos.

Conclusiones

Desde el aporte provisto por los docentes tanto a través de los cuestionarios como de las entrevistas, nos acercamos a un sistema educativo que *se encuentra en equilibrio*, los docentes no parecen necesitar ni desear incluir la resolución de problemas en otros roles que los actuales. En este escenario prevalecen los problemas de aplicación y de evaluación, respondiendo seguramente a una tradición de enseñanza donde las huellas de la historia reseñadas al comienzo de esta comunicación se hacen visibles. La necesidad de dar seguridad a los alumnos, de homogeneizar los procedimientos del aula, de sostener el trabajo de los alumnos más flojos comanda las decisiones didácticas de los docentes.

En referencia a las evaluaciones ministeriales, se hace evidente por todo lo expuesto que una evaluación no puede apoyarse o contener situaciones-problema dada su propia naturaleza. Esta ausencia ineludible de este tipo de problemas en la evaluación parece constituir un obstáculo para la presencia de situaciones-problema en la enseñanza. Aun cuando el ministerio proponga un cambio en el vínculo con la matemática a partir de la enseñanza por medio de la resolución de problemas, la demanda de una formación de los alumnos instrumentalizada a través de las evaluaciones ministeriales tracciona hacia otro escenario en las clases. Estas

condiciones sumadas a la inevitable incertidumbre a la que se someten los docentes que promueven la producción matemática de sus alumnos en sus clases y la gestión del tiempo, dan como resultado que los docentes opten por dar respuesta a la evaluación.

Los manuales, por su parte, presentan problemas bajo la denominación de situación – problema que no revisten condiciones para tal designación, lo que genera una gran confusión entre los docentes. Presentan además recomendaciones para la actividad matemática que la reduce en ocasiones a una sucesión de métodos y procedimientos.

La estructura utilizada para trabajar las ecuaciones lineales nos permite interpretar que un problema, más que una oportunidad para explorar, es percibido como una "excusa" para justificar la resolución de ecuaciones y para adquirir un procedimiento. El tiempo escolar se usa principalmente para insistir en métodos que reduzcan la producción de errores. Ese tiempo no da los frutos que se espera en términos de una producción matemática pero asegura resultados en evaluaciones ministeriales.

En este equilibrio la matemática escolar pierde la oportunidad de dar cabida a la producción exploradora y creativa de los alumnos en tanto y en cuanto la ecuación "saberes aprendidos=saberes evaluados" no se ponga en cuestión.

Referencias y bibliografía

Astolfi, J-P. (1993). Placer les élèves en "situation-problème" ? *PROBIO-REVUE*, *16* (4), 311-321.

Bednarz, N., & Lajoie C. (2012). Évolution de la résolution de problèmes en enseignement des mathématiques au Québec: un parcours sur cent ans des programmes et documents pédagogiques. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, *12*(2), 178-213. Routledge.

Boublil-Eimova, H. (2010). Analyse des compétences et des contenus mathématiques proposés par la réforme pour l'enseignement de la géométrie, en regard de la Théorie des Situations didactiques. *Bulletin AMQ (Association Mathématique du Québec)*, *L*(4), 27-48.

Brousseau, G. (1994). Los diferentes roles del maestro. En C. Parra, & I. Saiz, *Didáctica de matemáticas. Aportes y Reflexiones*. Buenos Aires: Paidós Educador.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*, Grenoble: La Pensée Sauvage.

Fagnant, A., & Vlassis, J. (2010). Le rôle de la résolution de problèmes dans les apprentissages mathématiques : questions et réflexions. *Education Canada, 50*(1). www.cea-ace.ca

Karsenti,T., & Savoie-Zajc, L. (2000). *Introduction à la recherche en éducation*. Sherbrooke. Éditions du CRP.

Pallascio, R. (2005). Les situations-problèmes : un concept central du nouveau programme de mathématique. *Vie pédagogique, 136*, 32-35.

Sadovsky, P. (2005). *Enseñar matemática hoy. Miradas, sentidos y desafíos*. Buenos Aires: Libros del Zorzal.

Sarrazy, B. (2008). *De quelques effets de contrats et du rôle des situations didactiques dans la résolution de problèmes d'arithmétique au cycle 3*. Actes du séminaire national : L'enseignement des mathématiques à l'école primaire (pp. 61-8). Paris le 13 et 14 novembre 2007, Ministère de l'Education, Eduscol.

Vergnaud, G. (1991). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*, *10*(2-3), 133-170.

Vlasssis, J. (2001). Les situations-problème, plus qu'une méthode à la mode. *Informations Pédagogiques, 52*. http://www.restode.cfwb.be/download/infoped/info52c.pdf

Manuales y Programas de Formación

Boivin, D., Gendron, Ledoux, A., St-Cyr, P. (2006). *Panoramath*, manuel de l'élève, B, vol 2. Anjou (Québec): Les Éditions CEC inc

Ministère de l'Éducation du Québec. (2006). *Programme de formation de l'école québécoise : éducation préscolaire, enseignement primaire*. Repéré à http://www1.mels.gouv.qc.ca/sections/programmeFormation/primaire/

Ministère de l'Éducation du Québec. (2006). *Programme de formation de l'école québécoise : enseignement secondaire, premier cycle*. Repéré à http://www1.mels.gouv.qc.ca/sections/programmeFormation/secondaire1/

Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport du Québec. (2007). *Programme de formation de l'école québécoise : enseignement secondaire, deuxième cycle*. Repéré à http://www1.mels.gouv.qc.ca/sections/programmeFormation/secondaire2/

Proporcionalidade e função afim: uma possível conexão através da Resolução de Problemas

Manoel dos Santos **Costa**
Universidade Ceuma
Brasil
manoel.costa@ceuma.br
Norma Suely Gomes **Allevato**
Universidade Cruzeiro do Sul
Brasil
normallev@gmail.com

Resumo

O presente estudo tem como objetivo apresentar uma possível forma de conexão entre os conteúdos matemáticos proporcionalidade e função afim. Para isso, utilizamos a metodologia de ensino-aprendizagem-avalição através da resolução de problemas. Trata-se de um estudo de natureza qualitativa, e os dados foram coletados através das observações durante encontros de formação em que (futuros) professores vivenciaram a resolução de problemas como metodologia de ensino. A pesquisa revelou que apesar de os licenciandos apresentarem dificuldades, construíram conhecimentos com relação aos conteúdos estudados, principalmente, quanto às possíveis conexões entre esses dois eixos temáticos da Matemática. Além disso, os resultados mostraram que no decorrer das discussões, eles foram percebendo que é possível desenvolver os conteúdos matemáticos de forma integrada, ou seja, com conexão. Eles também puderam discutir não apenas a relação entre os conteúdos, mas também aspectos relacionados a "quando" e "como" deveriam ensinar esses conteúdos a seus (futuros) alunos.

Palavras chave: educação matemática, resolução de problemas, função afim, proporcionalidade.

Reflexões iniciais

A proporcionalidade é um dos conceitos matemáticos com que mais nos deparamos no cotidiano, pois são frequentes as situações para as quais necessitamos mobilizar processos que coloquem em prática as noções relacionadas a esse conceito. Dessa forma, a proporcionalidade se torna fundamental tanto no contexto escolar como no cotidiano das pessoas, em situações que envolvem desde interpretar dados estatísticos até fazer análises de plantas de imóveis ou mapas, ampliar ou reduzir fotos. Além disso, o raciocínio proporcional é importante na resolução de problemas nos vários ramos da Matemática, como a Geometria e a Álgebra (Tinoco, 1996).

Particularmente para este trabalho, analisamos duas atividades cujo objetivo era verificar como (futuros) professores em formação inicial aplicam o conceito de proporcionalidade (propriedade fundamental das proporções) para resolver problemas envolvendo função afim.

O presente trabalho está organizado em quatro seções principais. Inicia-se pela apresentação da função afim e da proporcionalidade no contexto escolar, seguida da resolução de problemas como metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação. Na terceira seção, apresentamos o contexto e a metodologia de pesquisa. A quarta seção, intitulada "a proporcionalidade e a função afim: uma conexão possível", apresenta os problemas e as possíveis conexões entre os conteúdos em estudo. Finalmente, apresentamos nossas reflexões finais e as referências, além destas reflexões iniciais.

A função afim-linear e a proporcionalidade no contexto escolar

No Brasil, o ensino de proporcionalidade vem sendo abordado no contexto escolar a partir do 7.º ano do Ensino Fundamental, como é proposto pelos PCN – Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998). As estratégias de resolução recomendadas são as não convencionais, que não são citadas pelo documento, e as convencionais, das quais o documento aponta somente a regra de três. O documento também fornece elementos para que o trabalho docente e a aprendizagem considerem o aspecto integrado e integrador dos conteúdos. Partindo de uma determinada situação, deve-se procurar evidenciar as conexões entre os conteúdos. Sabemos que uma compreensão mais profunda da Matemática só é verificada quando os alunos percebem suas conexões, quando percebem que estão falando "da mesma coisa" sob pontos de vista diferentes.

Dessa forma, os PCN recomendam que no desenvolvimento de atividades sobre proporcionalidade, é fundamental considerar as relações com outros eixos temáticos, como por exemplo, a Geometria, a função afim, dentre outros. E complementa: "É importante que essas atividades sejam conduzidas de forma que mantenham ligações estreitas com o estudo de outros conteúdos, em particular com as atividades numéricas, métricas e com a noção de proporcionalidade" (Brasil, 1998, p. 69).

Assim, a proporcionalidade é um conteúdo que tem lugar de destaque nos PCN, sendo explicitamente citada como conteúdo a ser trabalhado estabelecendo conexões com outros conceitos matemáticos e com outras áreas do conhecimento. Essas recomendações se encontram nas "orientações didáticas" referentes aos eixos Espaço e Forma, Grandezas e Medidas e Tratamento da Informação (Brasil, 1998).

Concordando com essas ideias, o NCTM (2007) indica que a capacidade que os alunos possuem desde crianças de conceberem a Matemática no seu dia a dia é que faz com que as conexões entre conceitos matemáticos, entre diferentes ramos da Matemática, entre a Matemática e outras áreas do conhecimento, e entre a Matemática e as coisas do cotidiano tenham sentido.

Entretanto, apesar do contato quase diário com situações de proporcionalidade, os alunos apresentam dificuldades em compreender o conceito; ajudá-los a desenvolver o raciocínio proporcional tem sido um grande desafio escolar, sendo essencial ao aprendizado de diversas disciplinas dos Ensinos Fundamental, Médio e Superior (Tinoco, 1996).

Nesse sentido, Maranhão e Machado (2011) afirmam que:

> A proporcionalidade é um tema indubitavelmente importante em Matemática e outras Ciências em âmbito escolar, e em diversas situações da atividade humana. Por isso, o pensamento proporcional tem sido objeto de estudo em Educação Matemática e em suas especialidades, a Psicologia da Educação Matemática, há várias décadas (p. 142).

Desse modo, através de um ensino que enfatize a inter-relação entre diversas ideias matemáticas, os alunos não só aprendem Matemática como também aprendem a reconhecer sua utilidade. A compreensão das conexões dentro e entre os conteúdos matemáticos faz com que as dificuldades encontradas pelos alunos em compreender a Matemática escolar sejam minimizadas. Por isso, "quando os alunos aprendem conceitos matemáticos isolados de um contexto, depressa esquecem o seu significado. Quando aprendem Matemática ligada a situações do mundo real, ficam aptos a reconhecer e aplicar os conceitos em novas situações" (NCTM, 1995, p. 34).

No entanto, alguns estudos (Tinoco, 1996; Schliemann & Carraher, 1997) apontam que a aplicação do conceito de proporcionalidade no contexto escolar se restringe quase que exclusivamente à utilização da regra de três, baseando-se apenas nas propriedades de razões equivalentes, ou seja, dadas duas razões equivalentes $a/b = c/d$, se as igualdades $a/b = c/d$ e $a.x = b.c$ são verdadeiras, então, $x = b \,.\, c/a$.

Segundo os autores, o professor que trabalha com esse conteúdo utilizando apenas esse tipo de estratégia está deixando de explorar as relações existentes entre as grandezas, e com isso, os alunos perdem a oportunidade de desenvolver o raciocínio proporcional. É recomendável identificar as características, isto é, as relações numéricas apresentadas em cada situação e qual é o fator invariante (coeficiente de proporcionalidade) que permite exprimir a relação matematicamente.

Contudo, de acordo com Oliveira e Santos (1999):

> No Brasil, o estudo da proporcionalidade ocorre, muitas vezes, de uma maneira fragmentada, onde cada assunto do capítulo referente ao tema proporcionalidade é visto como objeto de estudo em si mesmo, provocando a transformação de ferramenta de resolução em objeto de estudos, o que ocorre, especificamente com a regra de três (p. 2).

Assim, podemos dizer que a proporcionalidade não é apenas um conteúdo matemático, mas um 'formador' de estruturas cognitivas para a compreensão de outros importantes conceitos matemáticos, tanto nas questões numéricas como naquelas que envolvem medidas, Álgebra e Geometria.

Segundo Costa Junior (2010), resolver problemas associados ao conceito de proporcionalidade é muito mais que aplicar algoritmos, como a regra de três, por exemplo. A compreensão desses problemas requer o estabelecimento de relações existentes entre as grandezas. É nesse sentido que Silvestre e Ponte (2009) afirmam que a proporcionalidade pode ser apresentada aos alunos como sendo uma igualdade entre duas razões, $a/b = c/d$, ou como uma função linear, dada por $y = m \,.\, x$, com $m \neq 0$. Segundo os autores, essa segunda abordagem se apoia em resultados de diversas pesquisas, envolve a exploração intuitiva da proporcionalidade como função linear desde os primeiros anos de escolaridade e adquire precedência sobre a noção de igualdade entre razões.

A resolução de problemas como metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação

A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, tal como é apresentada por Allevato e Onuchic (2009), é uma metodologia diferente daquele trabalho em que regras de "como fazer" são privilegiadas. Trata-se de uma metodologia na qual o problema é ponto de partida e orientação para a aprendizagem, e a construção do conhecimento se fará através de sua resolução. Outros pesquisadores (Nunes,

2010; Costa, 2012) também utilizam a resolução de problemas nessa mesma linha, constatando que importantes conceitos e procedimentos podem ser mais bem ensinados se ela for utilizada.

Nessa metodologia, de acordo com Allevatto e Onuchic (2009), a palavra composta ensino-aprendizagem-avaliação expressa uma concepção em que o ensino, a aprendizagem e a avaliação devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento de um determinado conteúdo através da resolução de problemas.

É nesse sentido que Cai e Lester (2012) indicam que os problemas criam oportunidades de avaliação, em que o professor pode perceber "o que" e "como" os alunos estão aprendendo e onde estão encontrando dificuldades. Van de Walle (2009) também destaca o potencial avaliativo da resolução de problemas como fonte segura de valiosas informações sobre a presença de concepções errôneas e de lacunas de conhecimento: planejar as próximas aulas, permitindo ajudar os alunos individualmente, identificando necessidades específicas; analisar seu progresso e criar oportunidades de aprender; conduzir o ensino partindo de onde o aluno está, e não de onde está o professor.

Portanto, ensinar Matemática utilizando resolução de problemas não é uma tarefa fácil, pois não basta propor um problema e esperar que alguma mágica aconteça. Allevato e Onuchic (2009) sugerem etapas para colocar em prática e usufruir melhor essa metodologia: **Preparação do problema** − Selecionar um problema visando à construção de um novo conceito ou procedimento; **Leitura individual** − Solicitar que cada aluno faça sua leitura; **Leitura em conjunto** − Solicitar nova leitura do problema, agora em pequenos grupos; **Resolução do problema** − Não restando dúvidas quanto ao enunciado, os alunos, individualmente ou em grupos, buscam resolvê-lo; **Observar e incentivar** − Enquanto os alunos buscam resolver o problema, o professor observa, analisa seus comportamentos e estimula o trabalho colaborativo. **Registro das resoluções na lousa** – Os alunos são convidados a registrar na lousa suas resoluções; **Plenária** − São convidados a discutir as diferentes resoluções registradas na lousa, defender seus pontos de vista e esclarecer suas dúvidas; **Busca do consenso** − Sanadas as dúvidas e analisadas as resoluções e soluções apresentadas, o professor tenta, com a turma, chegar a um consenso sobre o resultado correto; **Formalização do conteúdo** − O professor registra na lousa uma apresentação formal do conteúdo, organizada e estruturada em linguagem matemática, padronizando conceitos e procedimentos construídos através da resolução.

Vale ressaltar que nessa metodologia, os problemas são propostos aos alunos antes de lhes ter sido apresentado formalmente o conteúdo matemático mais apropriado à sua resolução. Porém, esse conteúdo deve estar de acordo com o ano escolar em que se encontram os alunos e com os objetivos pretendidos pelo professor para aquela aula. Assim, o ensino-aprendizagem do tópico matemático começa com o problema, que expressa aspectos-chave desse tópico; técnicas matemáticas serão desenvolvidas e conceitos serão aprendidos na busca de solução do problema; a avaliação é feita continuamente durante sua resolução.

Assim, essa metodologia contempla ações pedagógicas (interação entre aluno e professor) que promovem busca por informação, investigação, experimentação e renovação do interesse e da motivação dos alunos. É o que apresentamos na quarta seção.

Contexto e metodologia da pesquisa

A pesquisa foi realizada com (futuros) professores de Matemática, estudantes de uma universidade pública estadual do Maranhão. Trata-se de um estudo de natureza qualitativa, de

modo que o pesquisador manteve contato direto com o ambiente da pesquisa, com os sujeitos envolvidos e com os problemas que estavam sendo estudados. Além disso, o pesquisador foi o principal instrumento, responsável pela organização e condução das atividades desenvolvidas. Em todos os momentos, a atenção foi colocada nos processos utilizados pelos participantes e na resolução dos problemas, e não somente nos resultados (Goldenberg, 2007). Nesta pesquisa, utilizamos a observação participante, buscando identificar aspectos relevantes, dificuldades encontradas e atitudes perante a resolução dos problemas apresentados e o conteúdo matemático. As observações foram registradas em um diário de campo.

A proporcionalidade e a função afim-linear: uma conexão possível

Já discutimos o fato de que, quando os alunos conseguem estabelecer conexões entre ideias matemáticas, a sua compreensão é mais profunda e duradoura.

Van de Walle (2009) nos apresenta a figura a seguir:

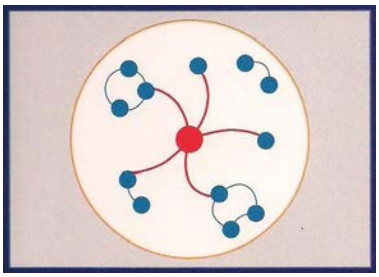


Figura 1 Rede de Conexões (Van de Walle, 2009)

Nela, os pontos azuis representam as ideias que os alunos já têm e que servem para construir uma nova ideia (ponto vermelho). Desenvolve-se, assim, uma rede de conexões entre elas. Portanto, quanto mais ideias forem usadas e mais conexões forem formadas, melhor será a compreensão do conteúdo (Van de Walle, 2009).

Tendo desenvolvido essas reflexões acerca da proporcionalidade e suas conexões e da resolução de problemas, apresentamos a seguir um problema proposto aos (futuros) professores envolvendo situações que representam variação aditiva de grandezas, que, portanto, não são proporcionais.

O custo total da produção de certa máquina consiste em uma sobretaxa (custo fixo) de R$ 500,00 somada a um custo de R$ 300,00 por unidade fabricada.
a) Complete a tabela a seguir que mostra o custo total de produção em função do número de máquinas produzidas.

Nº de máquinas produzidas	Custo total de produção
1	
2	
3	
:	
20	
X	

b) Descreva através de uma fórmula a relação entre o custo total (C_T) e a quantidade (x) de máquinas produzidas.
c) Construa o gráfico da situação e descreva-o.
d) Complete:

O número de máquinas varia de ____ em ____. O custo total varia de _____ em _____. Portanto, a variação de uma máquina acarreta a variação de _____ unidades no custo.
e) Nesse exemplo, as grandezas variam de forma aditiva, ou seja, as variações são constantes. Essas grandezas são proporcionais? Por quê?

Fonte: Autoria dos pesquisadores

Esse problema foi resolvido individualmente, seguindo as etapas sugeridas para o trabalho com resolução de problemas como metodologia de ensino. Após a leitura, os licenciandos não demonstraram dúvidas quanto ao enunciado e logo começaram a resolvê-lo. O pesquisador observava, estimulava e registrava o comportamento dos (futuros) professores.

Ao completarem a tabela, os licenciandos seguiram as instruções do problema e criaram uma fórmula matemática para obter o custo de cada máquina:

Nº de máquinas produzidas	Custo total de produção
1	500 + 300 . 1 = 800
2	500 + 300 . 2 = 1600
3	500 + 300 . 3 = 2400
⋮	⋮
20	500 + 300 . 20 = 16000
x	500 + 300 . x = 800x

Figura 2 - Resolução apresentada por ADR4

Percebemos que esse licenciando apresentou dificuldade em entender que a variação do custo total de produção por unidade fabricada, que foi fornecida no enunciado do problema (R$ 300,00), não corresponde ao que obteve, e registrou em sua resolução (R$ 800,00).

Apresentaremos a seguir os cálculos de outro participante para preencher a tabela:

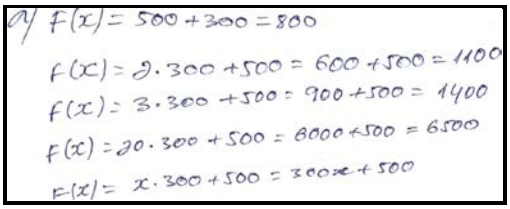


Figura 3 - Resolução apresentada por ADR5

Nesses cálculos apresentados, notamos que ele utilizou a mesma estratégia de resolução para obter a fórmula matemática que era solicitada no item b e apresentou as soluções. No entanto, ADR4 demonstrou dificuldade em operar com a expressão, demonstrando falta de conhecimento algébrico e numérico. Esse (futuro) professor chegou à expressão 500 + 300x, mas registrou a igualdade (500 + 300)x = 800x. Por essa razão, encontrou os valores errados do custo em relação ao número de máquinas produzidas.

A fórmula matemática obtida pelos licenciandos foi a que apresentamos a seguir (com exceção de ADR4):

Figura 4 - Resposta apresentada por ADR1

A maioria dos licenciandos conseguiu obtê-la, expressando corretamente a relação entre a quantidade de máquinas produzidas e o custo total (C_T).

No item (c), era preciso construir um gráfico da situação e descrevê-lo.

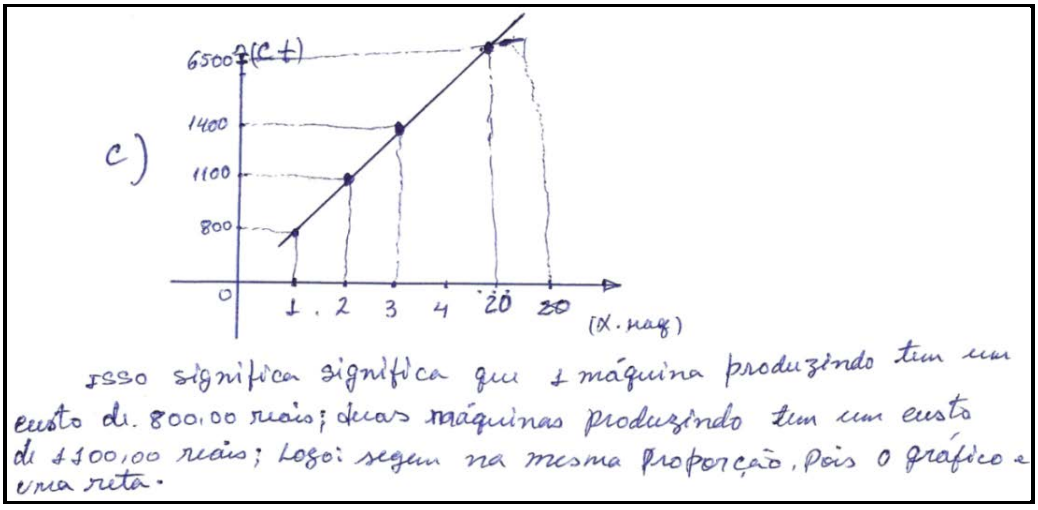


Figura 5 - Resolução apresentada por ADR3

Certamente, o registro gráfico confirma que esse (futuro) professor sabia que a representação $f(x) = a.x + b$, para todo $x \in R$, é uma reta, ou seja, que se trata de uma função afim. Entretanto, não respeitou a relação de proporcionalidade necessária para a representação correta da escala nos eixos coordenados, e na descrição, empregou de forma inadequada o termo proporção. A expressão $C_T = 300x + 500$ é de uma função afim não linear, de modo que a relação entre C_T e x não é de proporcionalidade.

No item (d), solicitamos completar os espaços em branco na frase:

O número de máquina varia de 1 em 1. O custo total varia de 300 em 300. Portanto, a variação de uma máquina acarreta variação de 300,00 unidades no custo.

Figura 6 - Resposta apresentada por ADR2

O número de máquina varia de 1 em 1. O custo total varia de 800 em 800. Portanto, a variação de uma máquina acarreta variação de 800 unidades no custo.

Figura 7 - Resposta apresentada por ADR6

Os protocolos mostram que nem todos os (futuros) professores perceberam que o custo de produção de uma máquina consiste de um custo fixo de R$ 500,00 mais um custo adicional de **R$ 300,00 por unidade fabricada**. A Figura 7 (ADR6) mostra que o licenciando entendeu a relação $C_T = 500 + 300x$, como o ADR4 (Figura 2), ou seja, como sendo equivalente a $C_T = 800x$, pois registrou a variação de R$ 800,00 no custo por unidade de produção. Além disso, esse erro não contempla o fato de que se não for produzida nenhuma máquina, tem-se o valor fixo de R$ 500,00 no custo.

No item (e), o problema deixa claro que as grandezas variam de forma aditiva, ou seja, que as variações são constantes. Baseando-se nessa afirmação, foi feito o seguinte questionamento: Essas grandezas são proporcionais? Por quê?

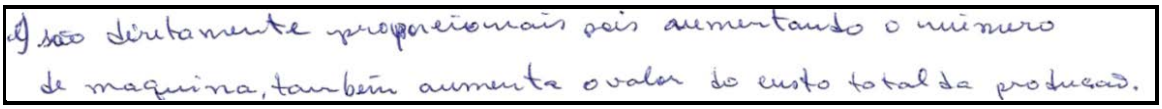


Figura 8 - Resposta apresentada por ADR3

Este protocolo evidencia, como é bastante frequente, a compreensão de que quando se tem duas grandezas e ambas aumentam ou ambas diminuem, significa que existe situação de proporcionalidade. Outros licenciandos também registraram essa compreensão. Vale salientar: a situação expressa nesse problema não é de proporcionalidade.

Evidenciamos, também nos itens (a) e (c), a importância de deixar os licenciandos resolverem os problemas antes da intervenção do professor, pois, dessa forma, eles mostram suas dificuldades e o professor pode ajudá-los em cada aula, em cada problema, ou seja, continuamente.

No problema a seguir, procuramos analisar se os (futuros) professores conseguiriam constatar, aplicando a propriedade fundamental, se um par de grandezas forma uma proporção, e se compreenderiam a relação entre grandezas diretamente proporcionais e a função afim - linear.

A turma de um curso de licenciatura resolveu fazer uma "vaquinha" para dar um presente ao coordenador. Todos os alunos vão colaborar. Se o presente custar R$ 2.000,00, cada aluno vai participar com R$ 80,00. Se a turma escolher um presente de R$ 3.500,00, quanto deverá dar para cada aluno?
Complete a tabela a seguir:

2.000	80
1.000	
500	
3.500	

Agora responda:
a) Que grandezas variam no problema?
b) Essas grandezas são proporcionais? Por quê?

c) Observe a tabela. Que número se mantém constante?
d) O que esse número representa?

Fonte: Tinoco, 1996

Neste problema, resolvido individualmente, os licenciandos tiveram poucas dúvidas em relação ao enunciado, pois foram feitos poucos questionamentos. As poucas dúvidas manifestadas foram esclarecidas para que pudessem dar prosseguimento à resolução.

Inicialmente, solicitamos que preenchessem a tabela. Apresentamos alguns protocolos:

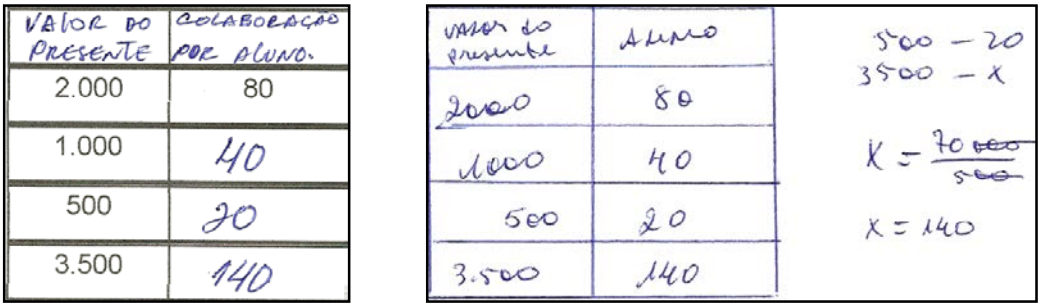


Figura 9 - Respostas apresentadas por ADR5 e ADR3, respectivamente

Percebemos que para o preenchimento da tabela, o licenciando ADR5 utilizou uma estratégia diferente da do licenciando ADR3. Acreditamos que através de uma divisão sucessiva por 2, ADR5 tenha encontrado os valores da 2ª e da 3ª parcela. Para obter os valores da 4ª linha da tabela, ele pode ter somado esses valores anteriores (1ª, 2ª e 3ª linhas), ou simplesmente pode ter multiplicado os valores da 3ª linha por 7. De qualquer modo, esse licenciando não fez o registro escrito do processo, ou calculou mentalmente os valores, realizando, assim, o raciocínio proporcional. ADR3 utilizou a estratégia da regra de três, conforme podemos perceber no registro escrito, confirmando que essa ainda é uma estratégia de resolução muito arraigada quando se trata de problemas de proporcionalidade. Nem ADR3 nem ADR5 fizeram menção, em suas resoluções, ao fato de que se tratava de grandezas diretamente proporcionais.

Após o preenchimento da tabela, questionamos quais são as grandezas que variam no problema apresentado. Alguns licenciandos tiveram dificuldades em identificá-las:

Figura 10 - Resposta apresentada por ADR4

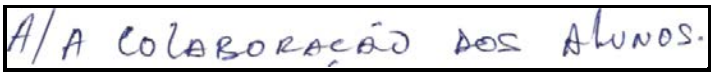


Figura 11 - Resposta apresentada por ADR5

Ou seja, embora tenham preenchido corretamente a 1ª linha da tabela (Figura 9) indicando essas grandezas, os licenciandos não relacionaram com o que lhes foi solicitado no item (a). Isso sugere que o registro feito na tabela não estava acompanhado da compreensão de quais eram as grandezas envolvidas no problema.

No item (b), foi-lhes perguntado se as grandezas são proporcionais. Percebemos que alguns licenciandos apresentaram dificuldades em identificar uma proporção, ou seja, em compreender a relação existente entre duas grandezas diretamente proporcionais, que deveria ser expressa por uma função afim - linear:

Figura 12 - Resposta apresentada por ADR3

Quando duas grandezas x e y são diretamente proporcionais, a razão $\frac{y}{x}$ entre o valor de y e o valor correspondente de x é constante. Se o valor dessa constante é **a**, então $\frac{y}{x}$ = a, ou seja, y = a . x. Assim, dado o valor de x, para obtermos o valor correspondente de y, basta multiplicarmos x pela constante **a**. Então, dizemos que a expressão y = a . x define y como uma função linear de x. ADR5 conseguiu notar a presença da constante na relação:

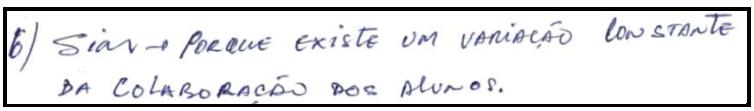


Figura 13 - Resposta apresentada por ADR5

O problema trata de grandezas diretamente proporcionais, logo, existe uma constante. Por isso, foi solicitado aos licenciandos que observassem a tabela preenchida e respondessem ao seguinte questionamento: Que número se mantém constante?

Alguns participantes, mesmo depois das discussões sobre o tema, ainda apresentaram dificuldade. ADR1, que respondeu no item (b) que as grandezas são proporcionais, no item (c), respondeu:

Figura 14 - Resposta apresentada por ADR1

Durante nossas discussões ADR3 fez o seguinte questionamento:

— Professor, não tem somente um número constante?

E ainda perguntou:

— Então, como saber o que ele representa?

A dúvida expressa por ele pode ser observada no protocolo a seguir:

Figura 15 - Resposta apresentada por ADR3

Outros responderam que existe, sim, um número constante, no entanto, indicaram:

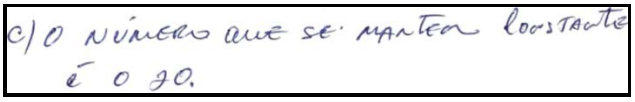


Figura 16 - Resposta apresentada por ADR5

ADR3 mostrou que teve dúvidas em relação a esse item e, mesmo com os esclarecimentos iniciais, não respondeu corretamente. Apenas um licenciando (ADR2) apresentou o número constante de forma correta, 25; para ele, as grandezas são proporcionais, e ainda acrescentou:

— O custo do presente aumenta ou diminui na mesma proporção, de acordo com o valor que cada aluno contribui.

Finalizamos o problema questionando o que representa o número que se mantém constante (item c). As respostas foram bem diversificadas:

Figura 17 - Resposta apresentada por ADR1

Outros afirmaram que o número constante

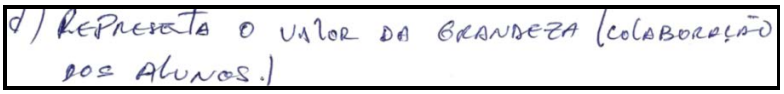


Figura 18 - Resposta apresentada por ADR5

Pelas respostas, os (futuros) professores ainda apresentavam dificuldade em entender a constante de proporcionalidade na relação entre as grandezas. Essa constante é que acaba por constituir tal relação, como uma função linear. Essas dúvidas foram esclarecidas no momento da formalização, quando esses aspectos foram discutidos.

Reflexões finais

Conforme relatamos na Introdução, a presente pesquisa teve como objetivo verificar como (futuros) professores em formação inicial aplicam o conceito de proporcionalidade para resolver problemas, relacionando-o à função linear. Para nos auxiliar no desenvolvimento das atividades, recorremos à resolução de problemas como metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação.

Durante nossas leituras (Tinoco, 1996; Schliemann & Carraher, 1997) acerca da proporcionalidade, observamos que esse conteúdo ainda é marcado por um ensino "mecanicista", tendo, na maioria das vezes, o algoritmo da regra de três como "única" estratégia de resolução de problemas. Nossa pesquisa revelou que os participantes também empregaram a regra de três como estratégia para solucionar um dos problemas.

Além disso, no decorrer das discussões e da vivência com a resolução de problemas como metodologia, eles foram percebendo as relações entre os conteúdos e, assim, mobilizando novas estratégias de resolução (tabelas, gráficos, expressões numéricas e algébricas), construindo novos conhecimentos. Também conseguiram perceber "quando" e "como" se deve trabalhar com esse conteúdo, e que é possível estabelecer conexões com outros eixos e conteúdos matemáticos.

Apesar das dificuldades apresentadas, nossa experiência foi muito rica; procuramos criar um ambiente de cooperação, de busca, de exploração e de descobertas entre os licenciandos, deixando claro que mais importante que resolver os problemas e obter a solução final era a estratégia utilizada por eles para solucioná-los. Foi possível observar que o trabalho compartilhado possibilitou a mobilização e a produção de novos saberes, tanto relativos aos conhecimentos sobre proporcionalidade, em que tiveram a oportunidade de construir e compreender algumas estratégias, quanto aos conhecimentos metodológicos desse conteúdo e dos eixos de conexão no momento em que essas diferentes estratégias foram surgindo.

Referências

Allevato, N. S. G.; Onuchic, L. R. (2009) Ensinando Matemática na Sala de Aula através de resolução de Problemas. Boletim GEPEM, Rio de Janeiro, n. 55, p. 1-19, 2009. Disponível em: http://www.ufrrj.br/SEER/index.php/gepem/article/view/54/87. Acesso em: 11 maio 2011.

Brasil. Ministério da Educação. (1998). Parâmetros curriculares nacionais: 1º e 2º ciclos matemática. Brasília: MEC.

Cai, J; Lester, F. (2012). Por que o Ensino com Resolução de Problemas é Importante para a Aprendizagem do Aluno? In: Boletim GEPEM. Tradução: Bastos, Antonio Sergio Abrahão Monteiro; Allevato, Norma Suely Gomes, Rio de Janeiro, n. 60, p. 241-254.

Costa Junior, J. R. (2010). Atribuição do Significado ao Conceito Proporcionalidade: Contribuições da História da Matemática. 2010. 237 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) -Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal.

Costa, M. S. (2012). Ensino-aprendizagem-avaliação de proporcionalidade através da resolução de problemas: uma experiência na formação inicial de (futuros) professores de matemática. 292 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) –Universidade Cruzeiro do Sul, São Paulo.

Goldenberg, M. (2007). A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em ciências sociais. Rio de Janeiro: Record.

Maranhão, C.; Machado, S. (2011). Uma meta-análise de pesquisas sobre o pensamento proporcional. Educar em Revistas, n. 1, p. 141-156, Editora UFPR.

NCTM (1995). Assessment Standards for School Mathematics. Reston, VA: Author.

NCTM (2007). Princípios e Normas para a Matemática Escolar. Lisboa: APM, 2007.

Nunes, C. B. (2010. O Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas: perspectivas didático-matemáticas na formação inicial de professores de matemática. 2010. 430 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

Oliveira, I. A. F. G.; Santos. M. C. (1999). Problemas de proporção: uma análise da apropriação do seu significado. Anais do IV EPEM-Encontro Pernambucano de Educação Matemática. Recife: Universidade Federal de Pernambuco.

Schliemann, A. D.; Carraher, D. W. (1997). Razões e Proporções na vida diária e na escola. Estudos em Psicologia da Educação Matemática. Recife: Editora da universidade Federal de Pernambuco, p. 13-37.

Silvestre, A.; Ponte, J. P. (2009). Ser ou não ser uma relação proporcional: uma experiência de ensino com alunos do 6º ano. Actas do XX Seminário de Investigação em Educação Matemática: Associação de Professores de Matemática.

Tinoco, L. A. A. (1996). Razões e proporções. Rio de Janeiro: Projeto Fundão, Instituto de Matemática / UFRJ.

Van De Walle, J. A. (2009). Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula. Trad. Paulo Henrique Colonese. 6. ed. Porto Alegre: Artmed.

Questões sobre a emergência da heurística nas aulas de Matemática

Valteni Douglas **Chaves**
Universidade Estadual de Santa Cruz
Brasil
douglas2201@gmail.com
Marcos Rogério **Neves**
Universidade Estadual de Santa Cruz
Brasil
marcos_neves2001@yahoo.com.br

Resumo

O presente trabalho é uma pesquisa de natureza bibliográfica na qual sistematizamos e discutimos a noção de heurística, formulada de diferentes maneiras no contexto de debates científico-filosóficos sobre a Epistemologia das Ciências. A transposição para o campo da Educação Matemática é feita através da reflexão sobre situações e desafios da nossa prática docente num processo de diálogo com as contribuições de alguns autores selecionados. Tomamos como objeto matemático desta os conteúdos relacionados ao conceito de derivada e suas aplicações a partir da análise de dois livros didáticos. Como resultados da pesquisa, organizamos as questões relacionadas à heurística em três níveis, que se diferenciam pela maior ou menor consideração de elementos estruturais da Ciência Matemática. Transpondo essa análise para o campo da Educação Matemática, observamos que a noção de heurística, que já contribuiu historicamente para investigações sobre a resolução de problemas, pode ainda ser explorada como subsidio para pesquisa e ensino.

Palavras chave: derivada e aplicações, epistemologia das ciências, heurística, resolução de problemas, ensino, matemática, ciências.

Introdução

O presente trabalho é fruto de uma pesquisa em nível de mestrado[1] (Douglas Chaves, 2014) na qual problematizamos e investigamos questões ligadas à nossa formação e prática profissional como docente de Matemática nos níveis educacionais do Ensino Fundamental, Ensino Médio e Ensino Superior, incluindo nossa experiência nos contextos de Educação no Campo e em Laboratório Didático de Física.

Entre os questionamentos primeiros desta reflexão que nos ajudou a definir o perfil da pesquisa, percebemos como focos de interesse situações nas quais professores e estudantes enfrentavam obstáculos na resolução de problemas matemáticos, mas encontravam soluções criativas que em certos momentos causavam encantamento ou surpresa aos sujeitos envolvidos.

[1] Dissertação de mestrado concluída em agosto de 2014 no Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual de Santa Cruz (Bahia-Brasil). Agência de fomento – FAPESB.

Ainda nos estudos preliminares para elaboração do projeto de pesquisa, em Polya (1994), uma referência clássica do estudo da Resolução de Problema (RP), deparamo-nos com a noção de heurística, que para este autor está relacionada com o estudo dos métodos e das regras da descoberta e da invenção. Esta primeira ideia sobre a heurística nos mostrou o quanto esta noção estaria relacionada a aspectos inerentes à RP, pois, em certa medida, resolver um problema proposto, seja ele mais simples ou mais complexo, compõe um ato de descoberta, de criatividade, que desperta no indivíduo um sentimento de valorização daquilo que está se propondo a aprender.

Ainda na fase exploratória da pesquisa, deparamo-nos também com extenso número de publicações realizadas entre as décadas de 80/90 sobre RP, no Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (GEPEM) da Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro (UFRRJ), grupo este que muito tematizou sobre a RP. Dentre os vários trabalhos que abordam tal tema e foram publicados no Boletim GEPEM, destaca-se o artigo de Melo Varizo (1986) no qual a autora demarca aspectos que estão diretamente relacionados às noções de heurística em Polya, como a generalização, a analogia, a decomposição e a recomposição, enfocando a necessidade de se compreender os aspectos cognitivos que estão associados a aprendizagem em matemática.

Percebemos nesta primeira revisão que havia uma lacuna, uma espécie de lapso na exploração da noção de heurística, ficou adormecida, não figurando de maneira explicita em estudos posteriores.

Aprofundando um pouco mais a investigação encontramos outras definições de heurística, como a de Sagh Bazarian (1986) que afirma que a intuição heurística seria o conhecimento direto que nos faz descobrir ou criar algo novo, pressentir a verdade ou adivinhar a solução de um problema, antecipar o resultado, descobrir, criar e até adivinhar o até então desconhecido. Observamos que esta definição destaca não o método no centro, como admitiram pesquisadores filiados à ideia de Polya, mas a primazia da percepção/intuição na qual a solução de um problema prático/teórico é encontrada de modo imediato, repentino, não consciente e quase sempre sem informações suficientes.

Outra abordagem que encontramos compreende a heurística como uma atividade psíquica que, ao auxiliar sua solução (numa situação problemática), elabora uma nova estratégia que se mostra como algo inédito (Noevich Puchkin, 1969). Para este autor, uma primeira aproximação para a noção de heurística seria tomá-la como um conjunto de processos mentais mobilizados para solucionar problemas. Estes processos se vinculam às faculdades operacionais do pensamento criador científico, ou como o autor denomina de atividade heurística.

Com base nas diferentes formulações e significações acerca das noções de heurística que explicitamos, orientamos nossa investigação pelos seguintes problemas: *Quais questões relacionadas à heurística nas ciências podem contribuir para reflexão sobre a abordagem de conteúdos e problemas nas aulas de Matemática? A partir destas questões, que reflexões podemos tecer sobre o ensino do conceito e das aplicações de derivada nas aulas de cálculo?*

Ao definirmos estes problemas como foco de nossa pesquisa, uma etapa fundamental passou a ser a busca por compreender e discutir as visões dos autores que selecionamos a respeito da noção de heurística. Assim, o objetivo geral da nossa pesquisa foi analisar, discutir e problematizar formulações de alguns filósofos e cientistas e a respeito do conceito de heurística relacionados ao trabalho científico, com vistas a identificar e sistematizar elementos que contribuam para reflexão sobre a abordagem de problemas em sala de aula.

Parte significativa desse objetivo foi alcançada, a nosso ver, a partir da reflexão filosófica[2] sobre as contribuições obtidas nas obras estudadas. Assim, um dos objetivos específicos da nossa pesquisa foi descrever e analisar as principais formulações relativas aos processos heurísticos que se evidenciaram durante a nossa investigação.

Feita a sistematização e discussão das contribuições dos autores estudados, por meio do mesmo exercício filosófico, buscamos transpor a discussão sobre os potenciais da noção de heurística para o campo da Educação Matemática (EM). Esse foi o segundo objetivo específico de nosso estudo que pretendemos alcançar.

Para esta finalidade, lançamos mão da descrição e discussão de situações vivenciadas em nossa experiência docente, contrastando-as com as contribuições dos autores estudados. Fizemos isso não como a análise de dados empíricos coletados especificamente para uma pesquisa, mas sim como recurso de ilustração[3] filosófica de ideias em um debate. Assim, nossa pesquisa continuou sendo essencialmente uma pesquisa bibliográfica, mas trouxemos para reflexão nossa experiência docente, *ex post facto*, revisitada, a fim de valorizá-la e facilitar ao leitor penetrar no debate conosco e refletir também sobre sua prática docente, num processo de generalização naturalística[4], conforme descrito por Stake (1983).

Sob o mesmo pretexto, propomos ilustrar nossa discussão e exemplificar algumas ideias, analisando a maneira como é feita a apresentação do conceito de derivada e suas aplicações em dois livros didáticos de Cálculo que conhecemos em nossa experiência, de autoria de Richard Courant e de Louis Leithold, respectivamente. A escolha desses livros esteve relacionada à nossa percepção de diferenças na apresentação do conceito e aplicações de derivada, que nos pareceu estar relacionadas a algumas das diferentes concepções sobre heurística que estudamos.

Metodologia

Visando contemplar duas formas de ver o mundo (acadêmica e docente), nossa opção metodológica foi a de realizar uma pesquisa essencialmente bibliográfica e, a partir dela, procuramos realizar uma reflexão de inspiração filosófica sobre elementos de nossa prática. Segundo Saviani (1983) o pensar filosófico é um modo de refletir sobre a realidade compatível com uma perspectiva crítica e transformadora de formação e ação docente. Isto porque o pensar filosófico é uma reflexão radical (porque busca as causas dos fenômenos, os analisa em profundidade); é rigorosa (pois considera de maneira crítica os contextos, condições de produção, a qualidade do que é pensado); é de conjunto, sistêmica (por não tentar fracionar artificialmente a realidade analisada, mas sim compreender a amplitude dos contextos e unidade de análises consideradas e realiza sempre processo de síntese articulados com as análises, de modo a recompor o todo).

Nesta perspectiva, os conhecimentos obtidos de fontes bibliográficas contribuem para análise da realidade materializada a partir das visões de seus autores e em nossa reflexão nós

[2] Conforme aprendemos em Saviani (1994), trata-se de uma reflexão radical, rigorosa (crítica) e de conjunto sobre problemas da realidade.

[3] Chamamos de "ilustração" porque a função das situações descritas e analisadas não é a de validar empiricamente afirmações, como acontece em algumas visões de pesquisa, mas sim a de construir um cenário que auxilie na inteligibilidade das ideias debatidas.

[4] Em contraposição aos processos de generalização estatísticos, muito difundidos em pesquisa sob a ótica experimental-positivista, o autor aponta o processo de generalização naturalística como sendo um dos pilares epistemológicos das abordagens de pesquisa qualitativas.

consideramos estas realidades por eles percebidas. Contudo, é nosso objetivo refletir sobre a realidade que nos é mais próxima, aquela que vivenciamos e na qual temos expectativa de atuação transformadora. Por isso, agregamos à nossa reflexão elementos da realidade que conhecemos.

O que propomos fazer aqui é exercitar a reflexão filosófica, cientes de que trazemos para discussão experiências revistadas, *ex post facto*, com o recurso de ilustração, visto que a função das situações descritas e analisadas não é a de validar/provar empiricamente conjecturas e afirmações, como acontece em algumas visões de pesquisa, mas sim a de construir um cenário que auxilie na inteligibilidade das ideias debatidas. Em nossa pesquisa, a maioria dos autores traça o debate visando à compreensão sistêmica e neles nos baseamos.

Em contraposição aos processos de generalização estatísticos, muito difundidos em pesquisa sob a ótica experimental-positivista, Stake (1983) destaca que a generalização naturalística é um dos pilares epistemológicos das abordagens de pesquisas qualitativas.

Acreditamos que esta perspectiva é compatível com nossa necessidade em compreender melhor o núcleo do nosso problema de pesquisa, que é a noção de heurística e seus potenciais para reflexão e ação docentes.

Fundamentação teórica

Heurísticas na Resolução de Problemas: contribuições de George Polya e Pappus de Alexandria

Em nossa investigação, percebemos que as contribuições de George Polya nos ajudam a refletir sobre as condições de RP. Talvez Polya tenha sido o responsável pela sistematização e popularização de uma concepção de heurística que leva em consideração a análise dos processos de RP e a tomada de consciência sobre as estratégias utilizadas – concepções que durante as décadas de 80/90 ainda influenciavam grupos de estudo no país, como o GEPEM/UFRRJ, cujos alguns trabalhos já mencionamos (Melo Varizo, 1986; Souza Dantas, 1986; Alves Pereira, 1987; Nasser, 1988; Vieira Diniz 1988).

Segundo Polya (1994, p. 86), a "Heurística moderna procura compreender o processo solucionador de problemas, particularmente as operações mentais, típicas desse processo, que tenham utilidade Polya (1994, p. 86)". A Matemática, na verdade, é formada por um conjunto de problemas, hipóteses e suas soluções. Estas regras e métodos são uma espécie de extensão das técnicas muito utilizadas na geometria e na álgebra, onde se supõe resolvido o problema e procura-se fazer o caminho inverso. Dessa forma, tanto no processo de reconstrução regressiva ou raciocínio regressivo, contidos no método analítico, quanto no processo de reconstrução progressiva ou raciocínio progressivo, contidos no método sintético, é possível perceber elementos heurísticos associados a tal tarefa, pois os mesmos realizam descobertas e comprovam certas consistências.

Para Alberto Molina (2010, p. 144), a análise grega, por si mesma, é um método de heurística matemática, no qual consiste em "buscar as possíveis hipóteses de onde uma conclusão dada é deduzida, e um método de demonstração, que consistiria em buscar conexões dedutivas entre uma proposição e um conjunto de hipóteses Molina (2010, p. 144)".

A descrição de Pappus de Alexandria sobre a análise seria como uma espécie de movimento inverso, a fim de que o reconhecimento do fim desejado, estando sob os olhos do analista, seja realmente utilizado heuristicamente ao longo do processo analítico, sem nunca

perder de vista o fato de ser, na realidade, consequente ou conclusão, cujas premissas devem ser encontradas. Para termos uma ideia mais clara do processo analítico e sintético proposto por Pappus de Alexandria, Polya (1995, p. 106) nos 'presenteia' com um exemplo não-matemático que deixa muito bem claro como se desenvolve o raciocínio a partir dos elementos de análise e síntese que compõem a resolução de um problema ou de uma demonstração formal na Matemática:

> Um homem primitivo desejava atravessar um riacho, mas não pode fazê-lo da maneira habitual porque o nível da água subiu desde a véspera. Por isso, a travessia tornou-se o objeto de um problema: "a travessia do riacho" é o x deste problema primário. O homem pode lembrar-se de já ter atravessado algum outro riacho por uma árvore caída. Ele procura ao redor uma árvore caída que lhe sirva, a qual se torna a sua nova incógnita, o seu y. O homem não encontra nenhuma nessas condições, mas há muitas árvores em pé à margem do riacho; ele deseja que uma delas caísse. Ser-lhe-ia possível fazer uma árvore cair atravessada sobre o riacho? Surgem uma grande ideia e uma nova incógnita: por que meios poderia o homem derrubar a árvore por sobre o riacho?
>
> Esta sequência de ideias deve chamar-se análise, se aceitarmos a terminologia de Pappus. Se o homem primitivo conseguir concluir a sua análise ele poderá tornar-se o inventor da ponte e do machado. Qual será a síntese? A tradução das ideias em ações. O ato final da síntese será a passagem do homem por sobre a árvore através do riacho (Polya, 1995, p. 106).

O ato criativo, dessa forma, se dá na prática mesmo que esta se efetive em uma teoria, em uma obra científica. Mas, este pode se concretizar também numa tecnologia, onde poderia ser considerada como uma síntese entre a ciência e a técnica. Dessa forma, podemos conceber, com este exemplo, que a análise é tomada como a decomposição do problema em partes mais compreensíveis, e a síntese a recomposição ou a ação para se conceber a efetiva solução.

Heurísticas associadas às origens da Ciência Moderna

O método proposto por Francis Bacon, na obra conhecida como *Novum Organum*, pode ser categorizado em dois blocos distintos, mas que se complementam: uma crítica destrutiva e uma construtiva. A primeira é essencial para preparar a mente humana para o processo cognitivo de construção do conhecimento, por desempenhar a função de eliminar erros, preconceitos e equívocos que se apropriam da inteligência humana e que, segundo Hugo Menna (2011, p. 143) é denominada de Teoria dos Ídolos; a segunda permanece organizada em duas áreas de atuação do pesquisador: uma ascendente ou indutiva e uma descendente ou dedutiva. Neste segundo bloco é que consiste a principal contribuição de natureza heurística que o método traz, esta pautando-se nos auxílios dos sentidos, d memória e d inteligência. Segundo Hugo Menna (2011, p. 377-378), este método pode ser compreendido como:

> [...] dois grandes conjuntos de procedimentos – as duas vias do *organum baconiano* –, ambos com funções bem diferenciadas: o de ascenso cognitivo e o de descenso cognitivo. A partir desta distinção mostrei que, para Bacon, os auxílios de ascenso são heurísticas de descoberta e avaliação inicial e os de descenso são princípios avaliadores de eliminação. Em síntese, sob a distinção procedimental "invenção/juízo" – ou, em termos contemporâneos, "descoberta/justificação" – o que Bacon pretendeu com seu método foi oferecer uma nova metodologia da ciência em geral (*novum organum scientiarum*) isto é, uma metodologia da pesquisa que inclui etapas de geração tanto como de avaliação (Hugo Menna, 2011, p. 377-378, grifo do autor).

Dessa forma, Hugo Menna (2011, p. 382-383) considera que o método proposto por Bacon estaria estruturado na forma de máximas criativas e avaliativas, ou seja, Bacon "pretendeu fornecer heurísticas para que as pessoas, reunidas em comunidades de pesquisa, pudessem construir hipóteses científicas de qualidade Menna (2011, p. 382-383)". As heurísticas são vistas como uma linha que conduz a razão humana à natureza e, por isso, transforma-a. Mas, em que consiste então o momento da escada ascendente? Consiste em uma sistematização substancial dos procedimentos indutivos, elevando ao status de método de inferência nas ciências naturais, ou seja, estabelece os fundamentos do método indutivo moderno.

Em René Descartes os traços de análise e síntese, preservados em Pappus de Alexandria, são retomados em sua obra intitulada 'Regras', sendo modificado e adaptado tanto à álgebra nascente como à própria geometria cartesiana, levando em consideração os novos tempos e as novas concepções científicas. Além dessa abordagem, é importante ressaltar o seu aspecto universal para o pensamento humano, pois se pretendia transcender suas aplicações na matemática.

A primeira finalidade da ciência geral para Descartes é distinguir o verdadeiro do falso e, assim, se chegar ao conhecimento de toda a verdade. Dessa forma, a análise está relacionada a aspectos *a priori*[5] e a síntese *a posteriori*[6]. O anterior diz respeito à disciplina da intuição e do julgamento, o posterior diz respeito a achar caminhos dedutíveis para resolver os problemas.

Segundo Loparic (2006), nos 'Elementos' de Euclides e outras obras de geometria grega clássica, está presente apenas o método de síntese, ou método axiomático, diferentemente do que ficou preservado nas obras de Pappus de Alexandria. Assim, os antigos gregos não buscaram revelar e registrar o método analítico, exceto em relação ao que ficou preservado em Pappus.

Neste sentido, para Augusto Battisti (2010, p. 2), o método de análise não é de natureza puramente matemática, pois é anterior à ciência geométrica, isto é, essa seria a "razão pela qual o método poderá ser universalizado e considerado "inédito", dado que se mostrará suficientemente independente do contexto geométrico em que surgiu (Augusto Battisti, 2010, p. 2)".

Inferimos então que tanto as heurísticas evidenciadas por Bacon quanto por Descartes são passíveis de serem categorizados como heurísticas de segundo nível, por transcenderem a esfera de discussão em torno de problemas localizados e levantarem questões sobre o método de pensamento na matemática e nas ciências.

Heurísticas em contextos mais abrangentes de investigação

Nesse terceiro nível de análise das heurísticas podemos entender que estas serviriam como uma espécie de guias que orientariam as pesquisas das teorias científicas com questões formuladas no campo da epistemologia das ciências. Segundo Lakatos (1998, p. 31) as realizações científicas na verdade são:

> [...] programas de investigação que podem avaliar-se em termos de alterações progressivas e degenerativas de problemas; e as revoluções científicas consistem na substituição (ultrapassagem no progresso) de um programa de investigação por outro. Esta metodologia oferece uma nova reconstrução racional da ciência (Lakatos, 1998, p. 31).

[5] 'A análise', diz Descartes no original latim, 'mostra a verdadeira via pela qual a coisa foi descoberta, metodicamente e como que a priori' (Loparic, 2006, p. 142, grifo do autor).
[6] Na descrição da síntese, o original diz: 'A síntese', ao contrário, por um caminho oposto e como que buscado a posteriori (Loparic, 2006, p. 142).

Dessa forma, as heurísticas teriam a capacidade de modificar, gerar teorias secundárias, indicar transformações que devem ser feitas no cinturão para que sejam resolvidas anomalias, como o desvio da luz em um campo gravitacional, por exemplo, indicar investigações que conduzam ao descobrimento de novos fatos e fenômenos. Enfim, a garantia de heurísticas tornaria um programa de pesquisa mais progressista em seus resultados experimentais e em suas teorias corroboradas, predizendo novos fenômenos.

Em relação à matemática, Stephen Barker (1969) nos esclarece sobre dois aspectos importantes a considerar nesse contexto. O primeiro deles é que a Matemática como projeto de ciência, valoriza conhecimentos e juízos *a priori*[7] em detrimento dos juízos empíricos. Neste sentido, o avanço da Matemática não necessitaria ser confrontado com nenhum fenômeno das demais ciências e ela seria uma ciência pura das regularidades. Por outro lado, em domínios como os da Física as teorias matemáticas cresceram em prestígio por sua aderência estrutural aos fenômenos naturais investigados – de tal forma que, mais do que simples fonte de 'ferramentas', passaram a ser consideradas modelos de raciocínio e de investigação, de modo que se tornou difícil em certos campos separar o pensamento matemático do pensamento do físico.

A questão que levantamos aqui sobre as possibilidades de interpretação de teorias matemáticas evidencia que a intuição e a experiência participaram e ainda participam do desenvolvimento da Matemática, ainda que de maneira formalizada e validada de maneira *a priori*, segundo Stephen Barker (1969). Não à toa as origens do Cálculo Diferencial e Integral remontam como já dissemos, a dois caminhos distintos: o de Newton (intuitivo, empírico) e o de Leibniz (formal, *a priori*).

Nesse sentido, a atividade científica segundo Antoine Moles (2010, p. 26) é composta por: métodos racionais – algoritmos, lógica, matemática; e técnicas de manipulação da matéria. Nela, o pesquisador mais do que descobrir a 'verdade', constrói o edifício, a representação do seu domínio próprio. A *démarche* intelectual do cientista se baseia na gratuidade, na filosofia do 'por que não?'. Ante a complexidade, a atitude do cientista é o da escolha.

No desenvolvimento das reflexões sobre estes contextos de investigação mais abrangentes, evidenciamos algumas abordagens que reafirmaram a heurística como uma ciência da criação e dos métodos das descobertas científicas, ampliando, assim, o quadro geral da heurística nos processos de investigação científica. Algumas destas questões nos parecem emergir ainda bem vivas em aulas de Matemática em cursos de graduação, mas as duas visões sobre a participação da experiência na produção da matemática certamente ainda influenciam divergências em aulas na Educação Básica.

Níveis de abrangência da noção de heurística

A partir do nosso estudo, sistematizamos uma definição geral de heurística como sendo a capacidade humana de produzir ideias na interação com outras ideias e com as condições dadas, reorganizando, recombinando ou ainda criando novas ideias – capacidade que é fomentada pela necessidade de compreender ou resolver um problema que pode se apresentar ao indivíduo desde o primeiro contato até depois de sua resolução, ainda que este não esteja bem formulado ou tenha sido bem compreendido em qualquer etapa; esteja ele completo ou não; seja de modo consciente ou não. Tal capacidade pode ser focada ou tomar como fontes de ideias tanto métodos, como

[7] No sentido kantiano da expressão, juízos *a priori* são aqueles cuja validação independe da experiência (da percepção).

conceitos ou mesmo aspectos mais incipientes do problema, como imagens e outras impressões sensoriais – estas últimas identificadas por autores como Antoine Moles (2010) e Sagh Bazarian (1986) como indicativos de que o processo racional consciente não abarca toda atividade heurística e de que processos imediatos ou que tem como base percepção abrem caminhos para atuação artística do pensamento criativo.

De modo semelhante ao que fez Antoine Moles (2010), procuramos em nossa pesquisa realizar o exercício intelectual de organizar as contribuições dos autores estudados a partir da amplitude/abrangência que as reflexões dos autores alcançaram, desde o nível de um problema bem situado no campo da matemática, até a discussão sobre métodos globais para fertilizar o pensamento humano com heurísticas para campos além das ciências.

Ressaltamos que esta disposição serve basicamente para fins didáticos, pois estes níveis não são como um 'muro de Berlim', eles convergem entre si, são permeáveis, articulados, não podem ser vistos, a priori, de forma isolada. Também assumimos em nosso estudo a contingência de nos limitar a um número reduzido de obras, a fim de tentar retratar o tema com maior amplitude.

Dessa forma, a nossa intenção foi organizar e sistematizar um conjunto de heurísticas que podem ser associadas à resolução criativa e inovadora de problemas e os quais podem ser agrupados, a partir da identificação e distinção durante os nossos estudos, a três dimensões básicas:

• a dimensão mais localmente relacionada a um problema que pode ser resolvido através da matemática. Sendo um problema circunscrito ao domínio matemático ou um problema em outro contexto que é solúvel por raciocínios e técnicas matemáticas, as fontes de heurística nesse nível são elementos que podem ser encontrados nas proximidades da zona de definição do problema, em seu contexto ou no exame do modelo matemático e suas propriedades;

• a dimensão que envolve compreensão e aplicação de métodos conhecidos, desconhecido ou inovadores das ciências. A solução do problema envolve a aplicação sobre processos e métodos mais abrangentes nas ciências. A compreensão, ainda que intuitiva, envolve reflexão sobre a adequação do método usado e suas consequências para validação do resultado;

• a dimensão que passa envolver métodos mais gerais do pensamento, aplicáveis não só nas ciências, mas em outros campos do pensamento humano.

Assim, para efeito didático de dar suporte a novas reflexões, inferimos que os autores estudados podem ser organizados nos seguintes níveis, a partir das noções de heurística que apresentam:

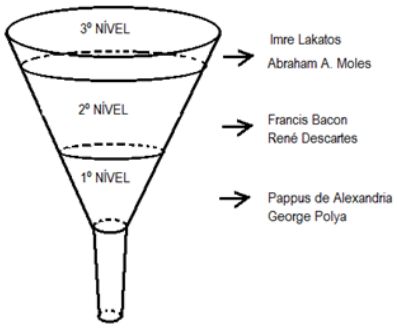


Figura 1. Níveis Epistemológicos dos Métodos Heurísticos.
*Font*e. Elaborado por Valteni Douglas Chaves.

Nesse sentido, a heurística, este aparato ao mesmo tempo racional e perceptivo/intuitivo, ligado ao pensamento criador e inventivo humano, pode ser investigada e associada a um conjunto de questões e ideias práticas que podem ser desenvolvidas em sala de aula.

Contribuições para a prática docente

A análise de livros didáticos que propusemos em nossa dissertação de mestrado é parte do exercício de transposição de nossas reflexões sobre heurística para nossa prática profissional. Neste sentido, a escolha dos livros não foi feita de forma aleatória, mas por serem conhecidos de nossa experiência como estudantes e docentes no Ensino Superior e por se revelarem dois interessantes e válidos caminhos, na medida em que enveredávamos pelos caminhos da heurística. Ambos apresentaram potencial relacionado tanto ao conceito quanto às aplicações da derivada e com as quais relacionamos com os níveis heurísticos. São eles: a) o primeiro volume do livro 'Cálculo Diferencial e Integral' de Richard Courant; b) o primeiro volume do livro 'O Cálculo com Geometria Analítica' de Louis Leithold.

Apresentamos e discutimos aqui alguns elementos da análise que fizemos, a fim de ilustrar como algumas questões levantadas em nossa pesquisa podem nos auxiliar a ver de forma diferente elementos do cotidiano profissional e, assim, a buscar novas perspectivas.

Para Courant (1963, p. 89), o conceito de derivada tem origem em duas fontes intuitivas: **Fonte 1** – construção de uma reta tangente a uma curva no ponto P; **Fonte 2** – pesquisa de uma definição precisa, para a velocidade, num movimento arbitrário.

A primeira delas está relacionada à *tgα*, ou seja, ao ângulo de direção da curva ou inclinação – ***gradiente*** – da curva. Interessante a observação que o autor faz em relação ao gradiente, pois, na Física, ***gradiente*** indica variação de intensidade de uma distribuição, estando relacionado à direção, ao movimento. Há muitos exemplos e analogias com tópicos de Física. Daí acreditar que é por esse motivo que o autor estabelece esta relação tão prematuramente no conteúdo.

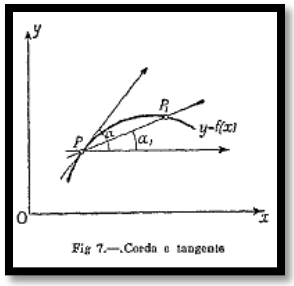


Figura 2. Construção de uma reta tangente a uma curva no ponto P.
Fonte: R. Courant, Cálculo Diferencial e Integral. 1963, p. 89.

Na segunda fonte, Courant (1963) refere-se ao estudo da derivada como uma análise do movimento. Assim, sendo $v_m = \frac{f(t_1) - f(t)}{t_1 - t}$ a velocidade que t_1 se aproxima cada vez mais de t, este limite seria a velocidade no instante t, isto é: $f'(t) = \lim_{t_1 \to t} \frac{f(t_1) - f(t)}{t_1 - t}$. Nesse processo, o sentido analítico da derivada não possui nenhuma relação com a intuição geométrica de tangente.

Com base nessa perspectiva, em relação as aplicações de derivada, Courant (1963) aborda um aspecto geral muito relevante e que torna a relação entre a integral e a derivada mais clara. Normalmente, segundo o autor, conhecemos na natureza a Quantidade Total - *Q(t)* e

desconhecemos a densidade ou Quantidade Específica - *q(t)*. Por esse motivo, *Q(t)* é conhecida por Primitiva e *q(t)* é conhecida por derivada, já que deriva da primitiva.

Ao compararmos o desenvolvimento deste item entre os dois livros analisados, percebemos que a proposta inicial do Courant (1963) em realizar processos mais gerais é plenamente atingida. Quando Courant (1963) afirma que normalmente na natureza conhecemos a Quantidade Total *Q(t)* e desconhecemos ou procuramos a Quantidade Específica *q(t)*, percebemos que os exemplos abordados por Leithold (1994) podem ser prontamente agrupados através da concepção de Courant.

Para nós, seria menos produtivo apenas observar exemplos isolados. Num exemplo típico de processo indutivo de construção de um conceito, nos sentimos capazes de fazer tal generalização de forma tão perspicaz quanto feita por Courant. Sem a percepção de tal generalização, talvez nós intuíssemos apenas exemplos isolados, sem nenhuma ou quase nenhuma correlação aparente, consistindo em apenas aplicações isoladas em áreas do conhecimento científico distintos. Esta é uma das contribuições que a nossa pesquisa deseja evidenciar, ou seja, construir princípios mais gerais de organização do conhecimento e os caminhos epistemológicos que possam conduzir a tal organização são uma boa fonte de heurística.

Associamos esta concepção aos elementos desenvolvidos aqui como heurísticas de segundo e terceiro nível porque, na abordagem do conceito matemático, a matemática é apresentada, num primeiro momento, como método de modelagem associada a um fenômeno (empírico) e sujeita a seus condicionantes indutivos; num segundo momento, a matemática é problematizada como um modo de interpretar o fenômeno e sujeita a produção de significados fora de seu campo disciplinar.

Com efeito, as abordagens analisadas se mostram mais favoráveis a estimular a emergência de heurísticas em níveis de abrangência diferentes: o livro de Leithold nos pareceu mais favorável a estimular o docente e estudante a explorar possibilidades e significados nas ideias e técnicas matemáticas em problemas gradualmente associados à estrutura, organização mais tradicional de um curso de cálculo, ainda que abordando problemas e exemplos da Física para dentro do domínio na Matemática; o livro de Courant se mostrou favorável a estimular uma reconstrução intuitiva dos raciocínios do Cálculo tecidos dentro dos domínios da Física - um caminho diferente do tradicional, não tão linear na apresentação dos conceitos, que subverte sua organização em prol de analisar problemas com mais dimensões desde o início, sem que se abra mão do rigor da Matemática.

Durante a análise dos livros de Cálculo Courant (1963) e de Leithold (1994), observamos que o primeiro se pautou em ideias experimentais, físicas, intuitivas, para se alcançar os processos formais do Cálculo. Não desconsideramos aqui o papel fundamental dos conhecimentos acadêmico-formais, muito pelo contrário, consideramos como algo de muita relevância e importância, especialmente pelo fato dos seus pressupostos auxiliarem tanto o campo da compreensão dos conceitos matemáticos quanto a visão sistemática do conteúdo, os quais avaliamos como essenciais no que tange à formação dos futuros educadores matemáticos.

Portanto, ao refletirmos sobre o ensino da derivada, observamos uma relação muito frutífera quando os cálculos diferencial e integral são desenvolvidos de forma concomitante, sem a primazia de um em detrimento do outro. As formulações mais amplas deste conteúdo tornam a

sua compreensão mais clara e sua aplicabilidade mais significativa, pois conseguimos ter uma visão mais global dos processos.

Ainda pautados no ensino do cálculo, conjecturamos que uma prática que propõe relacionar a derivada com outros campos do conhecimento científico se revela como algo altamente fértil, especialmente quando almejamos uma visão holística deste conhecimento. Ressaltamos também, a importância do enfoque histórico acerca do conteúdo desenvolvido, buscando compreender o desenvolvimento teórico e os processos globais associados a tal desenvolvimento. Pautados nesta visão, consideramos que o livro de Courant (1963) possui um bom potencial para se desenvolver da forma mais satisfatória e ampla possível tais abordagens, pois a disposição do seu conteúdo, os problemas e exemplos propostos, bem como o contexto histórico, produzem uma melhor compreensão acerca do conceito e das aplicações da derivada, da sua relação com a integral e também com outros campos científicos.

Considerações finais

De posse das questões levantadas, encontramos um vasto e fértil campo para reflexão e exploração didática da noção de heurística e a sua relação com o ensino e a aprendizagem do cálculo, para além da Matemática compreendida estritamente como técnica, na direção de incorporar dimensões de uma Matemática compreendida como arte. Esse novo olhar pode nos levar a novos caminhos e a vislumbrar novas paisagens, especialmente quando buscamos superar um embate que sempre nos pareceu mal colocado por fazer antagonizarem essas duas dimensões da Matemática que nos parecem historicamente complementares, mas que ficam polarizadas no embate dialético entre a intuição e o rigor – que não era tão crítico na antiguidade de nossa ciência, mas que hoje se faz sempre presente.

Dentre os futuros desdobramentos deste estudo, esperamos que sejam agregadas a ele o desenvolvimento das fontes de heurísticas que foram aqui sistematizadas e suas aplicações em estudos empíricos, buscando novas conexões, novas aplicações e, por conseguinte, novas abordagens.

Referências e bibliografia

Alberto Molina, J. (2001). *Lakatos como filósofo da matemática*. *Episteme, 13*, 129-153, jul./dez. Porto Alegre

Alves Pereira, R. (1987). Resolução de Problemas. *Boletim do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática – GEPEM. UFRRJ*: Ano XII, 2º Semestre.

Antoine Moles, A. (2010). *A Criação Científica*. São Paulo: Perspectiva.

Augusto Battisti, C. (2010). O método de análise cartesiano e o seu fundamento. *Scientiae Studia. Revista Latino-Americana de Filosofia e História da Ciência*, *8*(4).

Courant, R. (1963). *Cálculo Diferencial e Integral*. Vol. 1. Rio de Janeiro: Globo.

Douglas Chaves, V. (2014). *Heurística e suas possibilidades de emergência nas aulas de matemática* (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual de Santa Cruz – *UESC.* Ilhéus, Bahia, Brasil.

Hugo Menna, S. (2011). *Máquinas, gênios e homens na construção do conhecimento: uma interpretação heurística do método indutivo de Francis Bacon* (Tese de Doutorado). Universidade Estadual de Campinas – UNICAMP: Instituto de Filosofia e Ciências Humanas. Campinas, SP: [s. n.].

Leithold, L. (1994). *O Cálculo com Geometria Analítica* (3ª ed., Vol. 1). São Paulo: Harbra.

Loparic, Z. (1997). Descartes Heurísticos. *Coleção Trajetória – 5*. Campinas: UNICAMP.

Melo Varizo, Z. da C. (1986). A Heurística e o Ensino de Resolução de Problemas. *Boletim do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática – GEPEM. UFRRJ*: Ano XI, 1º Semestre.

Nasser, L. (1988). Resolução de Problemas: uma análise dos fatores envolvidos. *Boletim do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática – GEPEM. UFRRJ*: Ano XIII, 1º Semestre.

Noevich Puchkin, V. (1969). *Heurística: a ciência do pensamento criador*. Rio de Janeiro: Zahar.

Polya, G. (1994). *A Arte de Resolver Problemas*. Rio de Janeiro: Interciência.

Polya, G. (1995). *A Arte de Resolver Problemas: um novo aspecto do método matemático* (Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo – 2ª reimpressão). Rio de Janeiro: Interciência.

Sagh Bazarian, J. (1986). *Intuição Heurística: uma análise científica da intuição criadora* (3ª ed.). São Paulo: Alfa-Ômega.

Saviani, D. (1996). *Educação: do senso comum à consciência filosófica* (12ª ed.). Campinas: Autores Associados.

Souza Dantas, M. de. (1986). Um Processo entre a Exposição e a Descoberta. *Boletim do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática – GEPEM. UFRRJ*: Ano XI, 2º Semestre.

Stake, R. E. (1983). Pesquisa qualitativa/naturalista – problemas epistemológicos. *Educação e Seleção*, *7*, São Paulo: Fundação Carlos Chagas, jan./jun.

Stephen Barker, F. (1969). *Filosofia da Matemática*. Rio de Janeiro: Zahar.

Vieira Diniz, M. I, de S. (1988). Resolução de Problemas de Matemática Elementar. *Boletim do Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática – GEPEM. UFRRJ*: Ano XIII, 1º Semestre.

Resolução de Problemas e atividades lúdicas contextualizados: estratégias de alunos do ensino médio

Maria Dalvirene **Braga**
Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal
Brasil
dalvirenebraga@gmail.com
Antônio Villar Marques de **Sá**
Universidade de Brasília
Brasil
villar@unb.br

Resumo

Esta comunicação apresenta e analisa uma pesquisa que visou provocar mudança de atitude frente à aprendizagem lúdica da Matemática, desenvolver o interesse pelo uso de maneiras diversas de se resolver problemas contextualizados, e, enfim, ampliar o sentimento de autoconfiança em relação à própria capacidade dos estudantes em construir conhecimentos matemáticos. O objetivo geral foi investigar os desafios e possibilidades de se utilizar a metodologia de resolução de problemas e atividades lúdicas contextualizados em sala de aula com estudantes do segundo ano do ensino médio. O estudo, de natureza qualitativa, foi realizado em uma escola pública do Distritito Federal, Brasil, a partir de coleta de dados, de entrevistas semiestruturadas, de observação participante, de diário de campo e da análise de produções dos educandos. Os resultados mostram pistas promissoras para que se consiga trabalhar a resolução de problemas contextualizados e as atividades lúdicas como metodologia. Por fim, apresentam-se propostas de futuras investigações.

Palavras chave: Educação matemática, ensino da matemática, contextualização, ludicidade, resolução de problemas, ensino médio.

Introdução

O tema da resolução de problemas tem tido, desde o início da década de 80, uma atenção particular na Educação Matemática. Para isso, contribuíram, especialmente, as ideias de George Polya (1945/1978, p. v), que considerou que um professor de matemática tem em suas mãos uma grande oportunidade quando "desafia a curiosidade dos alunos, apresentando-lhes problemas compatíveis com os conhecimentos destes e auxiliando-os por meio de indagações estimulantes, poderá incutir-lhes o gosto pelo raciocínio independe". Em uma das primeiras pesquisas sobre o ensino de Matemática por meio da resolução de problemas, Polya (1945/1978) propôs um método heurístico em quatro etapas: 1) compreender o problema; 2) elaborar um plano; 3) executar o plano e; 4) fazer o retrospecto ou verificação da solução do problema original.

Esse enfoque evoluiu e, atualmente, a proposta de utilizar a resolução de problemas como uma metodologia de ensino visa à construção de conceitos matemáticos pelos educandos, por meio de situações-problema que estimulem a curiosidade, a investigação e a exploração.

O National Council of Teachers of Mathematics dos EUA (Conselho Nacional de Professores de Matemática) afirmava em sua famosa recomendação 1: "A resolução de problemas deveria ser o foco da matemática escolar dos anos 80" (NCTM, 1980, p. 1). Posteriormente, em 1989 (em sua versão espanhola, NCTM, 1991, p. 5), e no contexto de um novo documento, "Parâmetros curriculares e de avaliação para a Educação Matemática", o NCTM propôs cinco objetivos gerais para os estudantes: 1) Aprender a valorizar a Matemática. 2) Adquirir confiança na própria capacidade. 3) Adquirir capacidade de resolver problemas matemáticos. 4) Aprender a se comunicar matemáticamente. 5) Aprender a raciocinar matematicamente.

Nas diferentes etapas e áreas da educação percebe-se a necessidade de que os estudantes obtenham habilidades e estratégias que lhes proporcionem a apreensão, por si mesmos, de novos conhecimentos e não apenas a obtenção de conhecimentos prontos e acabados que fazem parte da nossa cultura, ciência e sociedade. Uma das formas mais acessíveis de proporcionar aos alunos que aprendam a aprender é a utilização da resolução de problemas como metodologia de ensino. Para Vila e Callejo (2006, p. 29), em uma proposta educativa, o problema implica "uma questão matemática cujo método de solução não é imediatamente acessível ao aluno [...] que tenta resolvê-la, porque não dispõe de um algoritmo que relaciona os dados e a incógnita ou de um processo que identifique automaticamente os dados com a conclusão". Portanto, para solucioná-la, o estudante deverá estabelecer novas relações.

Nesta pesquisa, além de valorizar os diferentes caminhos de resolução encontrados pelos educandos, procuramos fazer uma socialização dessa diversidade, a fim de desmistificar o conceito de que o fazer matemático se resume em uma simples reprodução de modelos.

Fundamentação teórica

Resolução de problemas no ensino médio

O que se espera do aluno no ensino médio é que seja competente em resolução de problemas, se não de todos, pelo menos daqueles que permitam desenvolver formas de pensar matematicamente. O documento ministerial referente aos Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio – Matemática (Brasil, 2002, p. 112) relata que essa "resolução de problemas é peça central para o ensino da Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios". E apresenta como uma das funções do ensino médio a "*Contextualização* das ciências no âmbito sociocultural, na forma de análise crítica das ideias e dos recursos da área e das questões do mundo que podem ser respondidas ou transformadas por meio do pensar e do conhecimento científico" (p. 113).

Desse modo, um dos principais objetivos é explorar os problemas contextualizados, em cada ramo da Matemática. Além disso, as razões históricas de cada assunto são importantes, pois, assim, os estudantes compreenderão o porquê dele existir. Outro aspecto a considerar é a escolha do tema de cada aula, que é interessante ser adaptado ao indivíduo que vai receber o assunto. Neste sentido, é útil o conteúdo proposto para o ensino médio de tal forma que se aborde a tão importante resolução de problema. Logo, essa proposta ministerial privilegia o tratamento de situações-problema, preferencialmente tomadas em contexto real. E para o desenvolvimento dessa competência. Brasil (2002, p. 129), diz que: "Um importante recurso para o desenvolvimento das competências é o *trabalho em grupo*. (…). Outro aspecto que se deve

enfatizar é a importância da *comunicação em Matemática*, por ser uma competência valiosa como relato, registro e expressão".

Segundo Vila e Callejo (2006), ao pensarmos na organização de uma tarefa centrada na intervenção a partir da resolução de problemas, o trabalho em pequenos grupos em um ambiente de discussão e a comunicação em geral são essenciais. Nas aulas de Matemática, a comunicação pode se realizar por meio de propostas de elaboração de textos diversos, como relatórios sobre atividades, relatos de conclusões sobre um conceito ou processo, síntese sobre o que o estudante ou grupo aprenderam, de desenhos, gráficos, tabelas. Em relação à comunicação oral, o trabalho de grupo pode ser um instrumento quando os alunos, além de aprenderem uns com os outros, precisam organizar o que sabem para se fazerem entender e, para isso, usam a linguagem que está sendo aprendida (Brasil, 2002; Cândido & Diniz, 2001).

A contextualização da Matemática no ensino médio

Alguns autores argumentaram que o termo contextualização tem sido usado de forma indevida, como se a Matemática pertencesse a um mundo exterior e a contextualização fosse estabelecida quando a conectamos com situações do dia a dia. Que propostas de interdisciplinaridade, transversalidade e concepções de contextualização, embora promissoras do ponto de vista da organização curricular, parecem ainda implementadas de forma tímida e, por vezes, desvirtuadas quando se restringe o contextualizar em Matemática ao "fazer parte do cotidiano ou da realidade". E que o contexto pode ser considerado um entrelaçar de assuntos, categorias, sejam históricos, matemáticos, de outras disciplinas, interdisciplinares, transdisciplinares etc. (Barbosa, 2004; Pires, 2011; Silva, 2009). Para Spinelli (2011, p. 12): "A efetivação de propostas dessa natureza passa pela composição de contextos com características diversas, voltadas para a interdisciplinaridade, para aplicações cotidianas dos conceitos, para a história da Matemática, dentre outros".

Faz-se necessário compreender que o conhecimento se constrói a partir de relações estimuladas por vários contextos, com diferentes características. Daí surgiu o desafio desta pesquisa: a importância de considerarmos as diversas possibilidades de contextualização do ensino, proporcionando aos estudantes momentos de enfrentamento com questões elaboradas a partir de variados contextos. A simples inclusão de questões do cotidiano pode não implicar a discussão de aspectos relevantes para a formação dos alunos enquanto cidadãos ou não motivá-los suficientemente para se interessar por Matemática ou qualquer outra disciplina. Na seleção das questões, foi necessário formular determinados encadeamentos conceituais a fim de que o contexto escolhido pudesse embasar o desenvolvimento dos conteúdos relacionados à trigonometria, contextualizados e/ou lúdicos. Assim, como afirmou Machado (2009, p. 63), "ao organizar as tarefas docentes, ao planejar um curso, um professor arquiteta um percurso sobre essa imensa teia; e, sem sombra de dúvida, precisa ordenar os passos a serem dados, quase sempre linearmente, encadeando significações".

Infelizmente, "o currículo atualmente praticado, que é, em sua concepção e detalhamento, obsoleto, desinteressante e pouco útil" (D'Ambrosio, 2005, p. 99), não aproxima os conceitos matemáticos da vivência dos estudantes. E, do ponto de vista de motivação contextualizada, "a Matemática que se ensina hoje nas escolas é morta" (D'Ambrosio, 2007, p. 31), pois é difícil motivar com problemas de outros tempos, com percepções que hoje nos são estranhas.

Ludicidade no ensino da Matemática

O ensino da Matemática tem ocasionado uma série de discussões acerca de seus métodos, de sua função prática, de sua relevância na formação do cidadão crítico e reflexivo, além de vários questionamentos sobre os motivos pelos quais se deve estudar a Matemática. Surge, assim, a necessidade de proporcionar aos estudantes o acesso aos conhecimentos matemáticos. Para essa missão, o professor é o principal convidado e é importante que seja capaz de transformar seu ensino, proporcionando participação ativa nesse novo ambiente. A fim de motivar e envolver os alunos, evitando uma educação rotineira e cansativa, o educador deve estar aberto à mudança e às diversas formas de ensinar, entre elas a lúdica (Santos, 2001).

Para Santos (2011, p. 12), não podemos limitar o ato de educar à repassagem de informações, faz-se necessário "oferecer várias ferramentas para que a pessoa possa escolher, entre muitos caminhos, aquele que for compatível com seus valores, sua visão de mundo e com as circunstâncias adversas que cada um irá encontrar. Educar é preparar para a vida". O lúdico possui aspectos de relevância para o aprendizado, tornando-o mais interessante e significativo para crianças, jovens ou, mesmo, adultos. É por meio de atividades lúdicas e interativas que buscamos vivenciar a construção matemática e humanizar esta ciência, valorizando diversos contextos sociais, econômicos, políticos e culturais em diferentes momentos históricos. Com relações estabelecidas entre a Matemática e outras ciências, contribuiremos para que seu ensino cumpra sua responsabilidade social e, ainda, que possa transpor os muros da escola e aproximá-la da realidade dos estudantes (Brasil, 2002; D'Ambrosio, 2005; Pais, 2006; Santos, 2001).

Fortuna (2001, p. 116) afirmou que o professor deve garantir que o jogo não deslize para a promoção do individualismo e que "uma aula ludicamente inspirada não é, necessariamente, aquela que ensina conteúdos com jogos, mas aquela em que as características do brincar estão presentes, […] atividade livre, criativa, imprevisível, capaz de absorver a pessoa que brinca, não centrada na produtividade". Nesse contexto de compromisso com a qualidade da educação, a ludicidade propõe que se abordem as várias situações da vida, tornando a Matemática mais interessante. Este é, portanto, o grande desafio do educador: assegurar ao estudante uma educação significativa, garantindo a este a participação e a construção do ambiente em que está inserido. A ludicidade pode ser aplicada por meio de atividades em que a Matemática possa ser evidenciada, a exemplo dos trabalhos que envolvem e exploram os conceitos de geometria, por meio da construção de maquetes, formas geométricas, entre outros, e o principal deles que é interpretar e compreender os mais diversos fenômenos do cotidiano dos educandos, que poderão analizar, interpretar e fazer a correlação entre a aprendizagem matemática e as suas vivências. O lúdico pode ser utilizado como alternativa para tornar as aulas de Matemática mais criativas, na construção de plantas baixas da sala de aula, da escola, de uma casa ou de um apartamento, entre uma infinidade de exemplos de uso desta ferramenta. Em muitos casos, os educadores matemáticos não utilizam tal ferramenta em decorrência de não dominarem esse tema, por não o conhecerem ou, mesmo, por não terem experiência com a prática da ludicidade na Matemática.

Metodologia

Visando compreender esse fenômeno social, foi realizada uma investigação sobre a contextualização, a resolução de problemas e a ludicidade como processos de mediação na aprendizagem da Matemática no ensino médio. Inicialmente, buscou-se compreendê-las em um estudo bibliográfico. Em uma segunda etapa, a pesquisa de campo, os temas foram analisados por meio da abordagem qualitativa, de forma mais interativa e interpretativa. Foram adotados os

pressupostos teóricos da pesquisa participante, que é uma investigação de construção e de respostas, dado o seu caráter aberto, dinâmico e flexível. O local da pesquisa foi uma escola pública, de ensino médio, localizada na cidade de Ceilândia, Distrito Federal, Brasil. Participaram da investigação: a pesquisadora, 36 alunos de uma turma de segundo ano do ensino médio e um professor colaborador.

Foram utilizados os seguintes instrumentos de coleta de dados: 1) observação participante: escolhida por ser imprescindível na pesquisa de fenômenos educativos. Para Lüdke e André (1986, p. 26), tanto quanto a entrevista, "a observação ocupa um lugar privilegiado nas novas abordagens de pesquisa educacional"; 2) registro de campo: contribuiu para as reflexões, planejamento e seleção dos problemas e das atividades lúdicas aplicadas e, posteriormente, para a análise dos protocolos e organização de tópicos abordados nas entrevistas; 3) entrevista semiestruturada: em um primeiro momento, utilizada com os 36 alunos divididos em oito grupos de quatro ou cinco membros, a fim de conhecermos suas concepções sobre o ensino, os professores, a escola, a aprendizagem por meio de atividades lúdicas e de resolução de problemas em sala. Em um segundo momento, entrevistou-se o professor colaborador. As entrevistas foram gravadas em áudio e vídeo e, por fim, transcritas; 4) produção dos estudantes: atividades lúdicas e de resolução de problemas, planejadas pela pesquisadora, ajustadas com o professor colaborador nas coordenações de área (nas segundas-feiras à tarde) e propostas para os alunos no período da manhã nas aulas de Matemática. O conteúdo de Trigonometria foi aquele que o professor estava trabalhando no bimestre.

Os protocolos, ou seja, as produções realizadas pelos estudantes constituíram um dos mais valiosos instrumentos dessa pesquisa, pois, por meio deles, procuramos investigar quais foram as estratégias utilizadas pelos pesquisados na elaboração de resoluções para problemas de trigonometria e/ou atividades lúdicas, bem como estimulá-los à produção escrita, buscando favorecer o processo de validação de suas resoluções.

Essa coleta de dados ocorreu em um período de 26 encontros nos quais foram realizados contatos com a escola, professores, pais, alunos; observações participantes; entrevistas e produção dos estudantes.

Critérios e/ou categorias de análise dos dados

O processo de análise envolveu uma classificação e uma interpretação do material coletado. A classificação implicou identificar se as informações registradas eram realmente pertinentes e relevantes para a pesquisa. Tais informações foram agrupadas, observando-se aspectos similares ou convergentes com o intuito de facilitar essa análise. Definimos as categorias de análise decorrentes das entrevistas e das observações, e dos protocolos:

2.1.1) Categorias decorrentes das entrevistas e das observações

Concordamos com Minayo (2011, p. 63) quando afirmou que, na pesquisa qualitativa, "a interação entre o pesquisador e os sujeitos pesquisados é esencial". As entrevistas e as observações nos proporcionaram conhecer quem eram os participantes de nosso estudo, com uma variedade de objetivos, capacidades e interesses. Nesse sentido, tentar obter uma visão ampla da significação que os conteúdos e a própria Matemática têm para os estudantes e quais são os interesses comuns à maioria dos membros do grupo contribuiu organizar o trabalho. Sendo assim, centramos as categorias deste item em dois aspectos:

(a) *a visão dos estudantes acerca da contextualização, resolução de problemas e atividades lúdicas no ensino da Matemática.*

(b) *a visão do professor colaborador acerca da contextualização, resolução de problemas e atividades lúdicas no ensino da Matemática e a importância para a aprendizagem matemática*.

2.1.2) Categorias decorrentes dos protocolos

Após organizar o vasto e complexo conjunto de procedimentos dos alunos em seus 584 protocolos, colocamos todos numa mesa e fomos observando as estratégias de resolução. Alguns estavam em branco (28), outros apresentavam tentativas de resolução com presença de rabiscos e borrões, desistência de resolução (30), a maioria com resoluções próxima da solução (300) e boa parte com estratégias de resolução que conduziram a uma solução correta (226). A partir dessa observação, separamos dois grupos: protocolos sem registro e protocolos com registro.

(2.1.2.1) Protocolos sem registros: nesta categoria, agrupamos aqueles protocolos que não apresentaram nenhum registro, mas que os grupos justificaram oralmente o porquê da ausência de registros.

Para Cândido e Diniz (2001, p. 17), independente da idade e da série, "na escola, a oralidade é o recurso de comunicação mais acessível, que todos os alunos podem utilizar, seja em Matemática ou em qualquer outra área do conhecimento". Sendo assim, o recurso da oralidade foi essencial para a análise desta categoria. Já que, embora os alunos não tenham resolvido a atividade proposta, tiveram a oportunidade de se posicionarem oralmente.

(2.1.2.2) Protocolos com registro: agrupamos os registros que apresentaram tentativas e desistências de soluções; resoluções próximas da solução, mas com erros que levam a uma solução final inválida; e métodos adequados que conduzem a uma solução válida. Nesta categoria, agrupamos os registros de acordo com os procedimentos utilizados pelos estudantes:

(a) Procedimentos com utilização do desenho na estratégia de resolução: esta categoria se constituiu pelos protocolos que apresentam desenhos que servem tanto para interpretar a situação quanto organizar o procedimento de resolução de problemas e/ou atividade lúdica, quando se mostram como apoio durante a resolução, acompanhadas ou não de algoritmos formais.

Quer como uma ponte para uma linguagem numérica quer como um contexto rico para a exploração de um problema, as linguagens ilustradas mostram-se ferramentas úteis e gratificantes na resolução de problemas (Scheneider & Saunders, 1998, p. 98).

(b) Procedimentos por meio de outras estruturas matemáticas: símbolos matemáticos, linguagem escrita, representação numérica, algoritmos formais, entre outros.

Sem dúvida os alunos se comunicam por meio de seus registros. Nas aulas de Matemática, a comunicação pode ocorrer em diferentes modalidades: em forma de texto – linguagem materna ou linguagem matemática, tabelas, gráficos, obras de artes, em imagem – visual ou pictórica, figuras geométricas etc. (Braga, 2014).

Em seguida, fizemos um levantamento do número de questões que correspondiam a cada uma das categorias, chegando aos dados apresentados no Quadro 1, a seguir, e que foram utilizados em nossas análises.

Quadro 1
Dados referentes aos critérios de separação dos protocolos dos alunos

Atividade	Número de protocolos de acordo com o número de questões e itens de cada atividade	Ausência de solução	Tentativas e desistência	Resoluções próximas da solução, mas com erros que levam a solução final incompleta e /ou inválida	Métodos adequados que conduzem a uma solução válida
01	48	10	11	15	12
02	08	00	02	02	04
03	16	00	00	00	16
04	16	00	00	00	16
05	08	05	00	00	03
06	24	06	12	02	04
07	16	07	05	01	03
08	448	00	00	280	168
Total	584	28	30	300	226
Porcentagem	100%	4,79%	5,14%	51,36%	38,69%

Fonte: Arquivo pessoal da pesquisadora.

Resultados

Análise sobre as concepções dos estudantes e do professor

Traçamos um percurso, iniciado com a análise das respostas dos estudantes, e, em seguida, do professor colaborador, que contribuíram para conhecer os participantes de nossa pesquisa, captar o ponto de vista ou a compreensão dos entrevistados, dando a oportunidade de se manifestarem livremente. Conhecer quem são os participantes, obter uma visão ampla da significação que os conteúdos e a própria Matemática têm para eles, quais são seus interesses, auxiliam no planejamento das ações em sala de aula.

Nas respostas dos estudantes identificamos que: 1) gostavam de aulas práticas, com utilização do lúdico e recursos tecnológicos; 2) a maioria não gostava de resolver problemas e quando resolviam, faziam como o professor havia ensinado; 3) 97% gostavam de jogos e os sugeriram que como metodologia para todas as disciplinas; 4) conseguiam relacionar a Matemática com outras disciplinas, destacando a Química e a Física; e 5) resumiam a Matemática, que estudaram até o 2º ano do Ensino Médio, como difícil e complicada.

Nas respostas do professor colaborador identificamos que: 1) planejava as suas aulas com foco nas avaliações nacionais e nos vestibulares; 2) desenvolvia as suas atividades em sala por meio de aulas expositivas e listas de exercícios; 3) afirmava utilizar a resolução de problemas em sala de aula, com questões retiradas dos livros, provas de vestibulares e do Enem, mas nem sempre contextualizadas; 4) não trabalhava com o lúdico; e 5) relatava que os alunos apresentavam, em seus registros de resolução, dificuldades em relação a conceitos matemáticos do ensino fundamental.

Estes pontos contribuíram no desenvolvimento da pesquisa, principalmente em relação ao ao planejamento e à aplicação das atividades, mas também ao diálogo com os educandos e com o professor colaborador.

Análise sobre as estratégias de resolução dos estudantes

Para essa análise, utilizamos 17 produções matemáticas dos alunos pesquisados, sendo duas relacionadas ao conteúdo de juros compostos e logaritmos e 15 envolvendo a trigonometria. Observamos que havia pontos em comum nas estratégias de resolução dos alunos, como: utilização de registros convencionais; dificuldades relacionadas a conceitos básicos de conteúdos matemáticos do ensino fundamental (equações e grandezas). A maioria das estratégias apresentadas nos protocolos relacionava-se com a situação em que estão inseridos em sala, habituados a aulas expositivas e a resolverem listas de exercícios descontextualizados. No entanto, embora apresentassem dificuldades em relação a alguns conceitos matemáticos necessários para a resolução de problemas de trigonometria, os alunos enfrentaram o desafio e foram à busca de uma solução, iniciando um processo de expressar seus pensamentos, utilizando, além de algoritmos, registros de diferentes naturezas: escrita, desenho, linguagem oral.

A maioria dos estudantes deparava-se com obstáculos no processo de conceitualização da trigonometría, na leitura e interpretação de situações-problema, alertando-nos para a necessidade de fazermos uso da comunicação no processo de ensino-aprendizagem da Matemática por meio da resolução de problemas e da ludicidade. Pelo diálogo com os colegas e com a pesquisadora, em vários momentos foi possível solucionar dúvidas em relação a conceitos de trigonometria. Nesse sentido, o trabalho de grupo foi essencial. Percebemos que eles saíram de uma rotina passiva e despertaram para uma maior participação em suas aprendizagens.

Procurou-se resgatar o ser matemático de cada educando, propiciando um ambiente livre para permitir que ele tomasse o problema para si. Percebeu-se também que, quando estava no ambiente de resolução de problemas e atividades lúdicas de trigonometria, se via mais confiante, responsável, argumentando a respeito das resoluções, tanto junto ao grupo como à pesquisadora. Essa motivação foi bem expressiva em atividades como o bingo e com o uso do computador, confirmando o que os estudantes já tinham afirmado nas entrevistas: que gostavam de trabalhar com o lúdico e o recomendavam para todas as disciplinas. Esses aspectos são ressaltados nos depoimentos, ao falarem dessa experiencia:

> Maravilhosa. Além de ter a oportunidade de obter novos conhecimentos. É dinâmica (Lucas, 15 anos, 2013).
>
> Fez com eu interpretasse melhor as questões de trigonometria e raciocinasse melhor (Maria, 17 anos, 2013).
>
> Usamos nossa criatividade, entretenimento, descontração, e não ficamos só escutando o professor falar (Carlos, 16 anos, 2013).

Logo, o ensino-aprendizagem, por meio da resolução de problemas e atividades lúdicas na visão dos estudantes, foi uma ferramenta favorável ao desenvolvimento de habilidades matemáticas, no que se refere ao ensino da trigonometria.

Análise sobre a resolução de problemas e as atividades lúdicas contextualizadas

Percebemos, ao longo desta pesquisa, que a forma tradicional de ensinar Matemática ainda hoje faz parte da vida escolar, apesar dos esforços existentes por parte do professor para melhorar suas metodologias. Esforços reconhecidos e aprovados pelos alunos, em suas respostas à pergunta: *Há algum(ns) professor(es) que você gosta do jeito de ensinar? Por quê?*

> São aulas onde os professores explicam tudo certinho, você entende, aprende. Às vezes, fazem coisas que os outros professores não fazem, como dinâmicas diferentes (Joaquim, 16 anos, 2012).
>
> A professora leva o *data show* e a aula dela é incrível. Quando ela explica "aquelas paradas" do universo, eu fico impressionada (Mara, 16 anos, 2012).
>
> Porque eles dão exemplos práticos que fazem com que a gente aprenda. Às vezes, o conteúdo em si não interessa, mas com as curiosidades fica interessante. Por exemplo: ele foi dar um conteúdo ontem e explicou como acontece na vida (Vitor, 15 anos, 2012).

Notamos também que existia uma visão pessimista por parte da maioria dos alunos em relação à Matemática e o seu ensino por meio da resolução de problemas. Um pensamento predominante era de que a Matemática é difícil e complicada. Em relação à maneira como resolvem os problemas, a maioria afirmou resolver apenas de uma única maneira: a do professor. Poucos faziam de outras formas. Isto conforme suas falas:

> Tento de outras maneiras (Carlos, 16 anos, 2012).
>
> Geralmente resolvo dentro de um mesmo padrão (Jéssica, 15 anos, 2012).
>
> Sempre do jeito que a professora ensina (Lucas, 16 anos, 2012).

Já em relação ao ensino da Matemática por meio das atividades lúdicas, os educandos afirmaram gostar e até as indicaram como metodologia:

> É um assunto que estava conversando com os meninos: em Educação Física, a gente tinha que ter coisas novas, jogo assim para entreter. Por exemplo, um jogo de tabuleiro, as pessoas perguntavam pra que serve. Minha mãe disse que ajuda muito na aprendizagem (Marcos, 16 anos, 2012).
>
> Acho que não só, professora, nas matérias das Ciências, Matemática e Educação Física, poderia ter jogos, mas tinha que ter em todas as matérias. Todo mundo ia querer pesquisar mais (Lorena, 15 anos, 2012).

Observamos que, durante o desenvolvimento das atividades lúdicas, os educandos se divertiam e aprendiam enquanto tentavam encontrar as resoluções das questões. Isso é conferido em suas falas, ao fazerem seus registros de avaliação, indicando uma mudança de concepção em relação ao ensino da Matemática e ao prazer de participar do seu processo de aprendizagem:

> Quando temos aulas práticas, *facilita bastante o entendimento*. E a relação seno ficou de forma mais simples e de *fácil* entendimento (Celso e João, 15 e 16 anos, 2013).
>
> Usamos nossa *criatividade, entretenimento, descontração*, e não ficamos só escutando o professor falar (Hildo e Márcia, 16 e 16 anos, 2013).
>
> *Legal*! A princípio, achamos que só seria uma aula voltada para a prática, e na verdade foi consecutivo, ou seja, foi voltada para os dois lados, a atenção foi necessária para o aprendizado do programa (se referindo ao *software* Geogebra), e assim possível conhecer as fórmulas e o meio de cálculo utilizado por ele (Marcos e Jéssica, 16 e 15 anos, 2013).

Sendo assim, o que no início desta pesquisa era considerado difícil, conforme depoimentos, no decorrer da aplicação das atividades lúdicas e de resolução de problemas contextualizados passou a ser: dinamismo, entendimento, interpretação, aprendizado, criatividade, relacionamento entre teoria e prática, possibilidade de obtenção de novos conhecimentos. Vimos a importância de trabalharmos os conteúdos matemáticos da forma mais contextualizada e interdisciplinar possível, pois a pesquisa revelou que os educandos compreenderam melhor. Mas percebemos,

também, a grande importância dos conteúdos matemáticos dentro desta própria ciência e que, se inserirmos problemas que levem os estudantes a interpretar, explorar, criar estratégias e aplicá-las, provavelmente aprenderão esses conteúdos, concluindo que o conhecimento matemático pode ser acessível a todos, com a metodologia de resolução de problemas e atividades lúdicas nos três momentos da sequência didática: "introdução, desenvolvimento e recapitulação ou aplicação" (Vila & Callejo, 2006, p. 164). Não é preciso privilegiar apenas um deles. Os exercícios de fixação e as tarefas são importantes nas aulas e também fazem parte do conhecimento matemático, mas essas aulas deverão ser baseadas em problemas: "A resolução de problemas é uma parte integrante da aula de Matemática, não um acessório ou um tapa-buracos para as vésperas das férias" (House, 1998, p. 233).

Conclusões

Ao final desta comunicação, em relação às perguntas da pesquisa, concluimos que:

1) Para a questão motivadora central:

1.1) *Quais são os desafios e possibilidades de utilização da metodologia de resolução de problemas e atividades lúdicas em sala de aula no segundo ano do ensino médio*?

a) as novas metodologias foram aplicadas de forma gradual, pois o abrupto abandono do ensino tradicional poderia até mesmo inibir a aprendizagem dos estudantes;

b) a evolução das concepções do professor colaborador foi gradativa, provavelmente influenciando sua futura atuação no processo de ensino-aprendizagem;

c) a flexibilidade no planejamento foi constante, pois temos de usar a criatividade para fazer o possível para realizar a atividade;

d) a comunicação esteve presente em todos os momentos da pesquisa: durante as atividades, as entrevistas e as conversas informais com os alunos e com o professor colaborador;

e) o desafio temporal foi grande, visto que a resolução, a validação e os registros envolviam um tempo considerável da aula; e

f) a organização da turma em grupos para realização da aplicação possibilitou a otimização do tempo, de forma que foi possível resolver, validar e registrar as soluções.

2) Para as questões secundárias:

2.1) *Quais são as estratégias dos alunos do segundo ano do ensino médio para registrar o seu processo de resolução de problemas e atividades lúdicas de trigonometria contextualizados*?

a) as estratégias foram a resposta convencional dos alunos que estavam dominando a linguagem; mas quem não dominava utilizou outras formas, como os desenhos, a escrita e a oralidade; e

b) a oralidade foi importante porque, quando perguntados, os estudantes sabiam responder; no entanto, a resposta oral só apareceu quando foi proposta pela pesquisadora.

2.2) *Quais as reações (impressões) de alunos do ensino médio a atividades lúdicas e resolução de problemas em aulas de Matemática*?

a) os alunos se apresentavam desmotivados com o ensino da Matemática; mas fizeram uma reflexão a respeito das suas concepções, no que tange à dificuldade de aprendizagem, concluindo que é possível adquirir conhecimentos matemáticos de forma natural e até mesmo agradável;

b) alguns estudantes mostravam preferência pelas aulas expositivas e se mantiveram desinteressados. Este fato deve ser considerado, pois eles tinham rotinas e dificuldades diversas;

c) embora os alunos tenham apresentado dificuldades em relação ao conteúdo de trigonometria e outros conceitos matemáticos, como: logaritmo, potências, equação e frações, diante de uma situação-problema ou atividade lúdica enfrentaram o desafio e procuraram uma solução; e

d) os estudantes se mostraram animados e motivados com o processo de resolução de problemas e atividades lúdicas de trigonometria contextualizados. O ambiente favorável que se criou em sala de aula possibilitou que eles sentissem segurança para questionar, argumentar, sugerir, conversar com a pesquisadora para esclarecer dúvidas, e compreender os conteúdos.

Concordando com Van de Walle (2009), ensinar por resolução de problemas é difícil. E as tarefas precisam ser planejadas ou selecionadas a cada dia e a compreensão atual dos estudantes deve ser sempre levada em consideração.

Limitações do estudo

Constatamos que os problemas e atividades lúdicas revelaram-se motivadores no fazer Matemática. Entretanto, a inserção dessa proposta em sala de aula implicou limites e desafíos:

1) a *falta de material teórico* sobre a contextualização, a resolução de problemas e a ludicidade, no ensino médio, como uma dificuldade para o fazer pedagógico dos profesores de Matemática;

2) *o desafio temporal*: por vários momentos, tivemos de adiar um planejamento com o professor ou um encontro com os alunos por aspectos relacionados ao tempo, como redução no horário;

3) *o desafio pessoal*: para planejar as atividades, a pesquisadora necessitava do professor regente, mas, às vezes, ele estava envolvido com a preparação de provas mensais e bimestrais;

4) *o desafio da metodologia do professor*: aulas expositivas, seguidas da resolução de lista de exercícios repetitivos; a turma estava acostumada, mas, ao final, elegeu os jogos;

5) *a organização da turma em grupos*: foi essencial para gerenciar a ansiedade dos alunos em compreender ou mostrar a solução (o que se acentuou nas atividades lúdicas); igualmente essencias foram o auxílio do professor regente e da professora do laboratório de informática;

6) a *comunicação*: foi fundamental para a validação das soluções, enquanto havia duas aulas para o desenvolvimento das atividades foi possível realizarmos o debate com a turma; mas, com a redução do tempo para uma aula, a comunicação se restringiu à mediação nos grupos;

7) *a dificuldade em ouvir e analisar as produções*: quando se trata de uma turma de 36 alunos, a cooperação e o respeito mútuo são essenciais para que todos possam ouvir e falar, o que foi prejudicado em função do tempo que nos foi cedido para a aplicação das atividades; e

8) *o planejamento*: a resolução dos problemas e as atividades lúdicas propostas aos alunos poderiam ser resolvidas de diversas maneiras, inclusive o cálculo mental, ou seja, "de cabeça", como ocorreu no bingo e no dominó. Logo, nestas situações, nem sempre o registro escrito era necessário, mas o relato oral ficou prejudicado, pois era impossível com 36 pessoas.

Embora haja limites e desafios a serem enfrentados no uso da metodologia de resolução de problemas e atividades lúdicas de trigonometria contextualizados no segundo ano do ensino médio, este tipo de mediação foi possível e significativo para a aprendizagem da Matemática.

Inicialmente, os alunos mostraram insegurança em relação às novas propostas, mas aos poucos foram se apoderando delas e apresentando resultados. Esse processo foi longo e gradativo.

Prospectivas

Essa investigação revelou a importância de permanentemente repensarmos a prática pedagógica no processo ensino-aprendizagem de Matemática que, ainda hoje, valoriza decorar fórmulas, mudando para uma Matemática prática, como os educandos relataram. Os resultados da pesquisa permitiram apontar algumas pistas de ação para o uso da resolução de problemas e das atividades lúdicas nas aulas de Matemática no ensino médio:

1) É possível utilizar a ludicidade e a resolução de problemas e os alunos gostam e aprendem por meio delas. Outra possibilidade é incluir o uso do computador;

2) é viável essa metodologia para o ensino da Matemática, tanto nas aulas semanais da grade curricular da escola, como também no horário contrário às aulas ou na educação integral;

3) sugere-se a inserção da resolução de problemas e atividades lúdicas contextualizados na organização do trabalho escolar, para minimizar a dificuldade com o fator temporal; e

4) é uma boa opção, em turmas de 36 alunos, a organização em pequenos grupos, pois permite um ambiente de discussão, de comunicação, de reflexão e de desenvolvimento da criatividade.

Por fim, salientamos a necessidade de novas investigações sobre a contribuição da comunicação no processo de aprendizagem da Matemática por meio dessa metodología, sobre os benefícios da resolução de problemas e atividades lúdicas contextualizados no ensino médio, e sobre a influência da mediação do professor por meio dessa metodologia nas estratégias matemáticas dos estudantes: continuarão a repetir modelos ou criarão estratégias próprias?

Referências

Barbosa, J. C. (2004). A "contextualização" e a modelagem na educação matemática do ensino médio. In *Encontro Nacional de Educação Matemática* (8ª ed.). Recife. Anais: SBEM, 1 CD-Rom.

Braga, M. D. (2014). *Estratégias de alunos do segundo ano do Ensino Médio na resolução de problemas de matemática e atividades lúdicas de trigonometria contextualizados* (Dissertação de Mestrado em Educação). 140 f. UnB, Brasília.

Brasil. Secretaria da Educação da Educação Média e Tecnológica. (2002). *PCN + Ensino Médio:* orientações complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC.

Cândido, P. T., & Diniz, M. I. (2001). Comunicação e Matemática. In K. C. S. Smole, & M. I. Diniz (Orgs.), *Ler, escrever e resolver problemas*: habilidades básicas para aprender matemática (pp. 15-28). Porto Alegre: Artmed,

D'Ambrosio, A. (2005). *Etnomatemática: elo entre as tradições e a modernidade.* Belo Horizonte: Autêntica.

D'Ambrosio, A.(2007). *Educação matemática: da teoria à prática* (14ª ed.). São Paulo: Papirus.

Fortuna, T. R. (2001). Formando professores na universidade para brincar. In S. M. P. dos Santos (Org.), *A ludicidade como ciencia* (pp. 115-119). Petrópolis, RJ: Vozes,

House, P. A. (1998). Aventurando-se pelos caminhos da resolução de problemas. In S. Krulik, & R. Reys (Orgs.), *A resolução de problemas na matemática escolar* (pp. 218-234).São Paulo: Atual,

Lüdke, M., & André, M. (1986). *Pesquisa em educação*: *abordagens qualitativas.* São Paulo: EPU.

Machado, N. J. (2009). *Educação*: *competências e qualidade.* São Paulo: Escrituras.

Minayo, M. C. S. (Org.). (2011). *Pesquisa social*: *teoria, método e criatividade* (3ª ed.). Rio de Janeiro: Vozes.

NCTM. (1980). *An Agenda for Action*. Reston, Virginia: NCTM.

NCTM. (1991). *Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática* (Trad.: Saem Thales. Sevilha, Versão original em inglês de 1989).

Pais, L. C. (2006). *Ensinar e aprender matemática*. Belo Horizonte: Autêntica.

Pires, C. M. C. (2011). *Currículo, avaliação e aprendizagem matemática na educação básica*. I Ciclo de Simpósios: avaliações de educação básica – Inep. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos*.

Polya, G. (1978). *A arte de resolver problemas* (Trad.: H. L. de Araújo. Do original em inglês: *How to solve it,* 1945). Rio de Janeiro: Interciência.

Santos, S. M. P. dos. (Org.). (2001). *A ludicidade como ciência.* Petrópolis, RJ: Vozes.

Santos, S. M. P. dos. (2011). *O lúdico na formação do educador* (9ª ed.). Petrópolis, RJ: Vozes.

Scheneider, J., & Saunders, K. W. (1998). As linguagens ilustradas na resolução de problemas. I S. Krulik & R. Reys (Org.). *A resolução de problemas na matemática escolar* (pp. 88-98).São Paulo: Atual.

Silva, M. A. da. (2009). *Currículos de Matemática no Ensino Médio*: estabelecendo critérios para escolha e organização de conteúdos. (Tese de Doutorado em Educação Matemática). 248 f. PUC. São Paulo.

Spinelli, W. (2011). *A construção do conhecimento entre o abstrair e o contextualizar*: o caso do ensino da Matemática (Tese de Doutorado em Educação). 138 f. Universidade de São Paulo, São Paulo.

Van de Walle, J. A. (2009). *Matemática no ensino fundamental*: *formação de professores e aplicação em sala de aula* (6ª ed.). Porto Alegre: Artmed.

Vila, A., & Callejo, M. L. (2006). *Matemática para aprender a pensar*: *o papel das crenças na resolução de problemas*. Porto Alegre: Artmed.

Resolução de Problemas na formação do professor de Matemática: desafios e possibilidades

Vladimir Nassone Pedro **Raiva**
Universidade Federal do Pará
Brasil
vladimirraiva2004@gmail.com; vraiva@ufpa.br
Marcos Evandro Lisboa **de Moraes**
Universidade Federal do Pará
Brasil
mel.mat@ibest.com.br
Renato Borges **Guerra**
Universidade Federal do Pará
Brasil
rguerra@upfa.br

Resumo

Apresentamos aqui reflexões sobre a formação inicial e continuada de professores de Matemática interligada à resolução de problemas. O objetivo do trabalho foi buscar alguns problemas matematicos que os professores deviam mostrar por meio da sua prática e experiência qual eles consideravam ser um "bom problema" a luz dos critérios educativos. Para tal metodologicamente apresentamos aos formandos, as concepções de problema, o que é um bom problema, entre outros. Os resultados são decorrentes de um trabalho realizado com oito professores de Educação Basica e de graduação que estão cursando o mestrado e o doutorado na UFPA em Belém. Olhamos a metodologia de resolução de problemas, na formação de professores, seus desafios e possiblidades da utilização em suas práticas docentes. Propuzemos uma oficina onde os sujeitos reflectisse e apresentassem por escrito suas reflexões. Finalmente, realizamos uma segunda análise sobre as reflexões, o qual aprentamos neste artigo.

*Palavras chaves***:** Resolução de Problemas, Formação de professores, Bom Problema, Desafios, Possibilidades.

Introdução

Um dos aspectos fundamentais que rege as mudanças educacionais e estimula as diferentes pesquisas em educação são o fato de se buscar desenvolver nos alunos a capacidade de aprender a aprender. O presente artigo trata de como os professores podem usar seu lado mais criativo e estabelecer, juntamente com alunos, responsabilidades de construção de conhecimentos a partir de técnicas de resolução de problemas, desde que os alunos assumam que determinada tarefa[1] possa ser vista como um problema e não apenas como mais um exercício. Para isso o professor

[1] Aqui designamos tarefa o que Abrantes (1989) defende como sendo um problema de palavras, um problema para equacionar, um problema para demonstrar, um problema para descobrir, um problema da vida real, Uma situação problemática e uma situação e Polya (1995) designa por questões.

deve ter a sensibilidade de elaborar estratégias que façam o aluno se sentir atraído, em função de determinados objetivos traçados previamente.

Para que resolução de problemas seja uma possibilidade ao desafio na formação, do professor de Matemática, cabe ao mesmo, propor *bons problemas*[2], de modo a envolver os alunos no processo de resolução e a dar sentido à atividade para o resolvedor. Também, é fundamental o acompanhamento e a orientação do professor na utilização da metodologia da resolução de problemas, ao trabalhar com os alunos as soluções individuais ou em duplas e coletivas. No momento do compartilhamento dos resultados encontrados na resolução do problema, é importante que o professor conduza as discussões levantando questionamentos acerca das distintas estratégias que chegaram à mesma solução, Oliveira e Passos, (2013).

Nesse sentido, refletindo sobre nossa prática profissional e como pesquisadores, entendemos que é necessária uma mudança na prática de ensino dos professores essas devem acontecer a princípio na Licenciatura, pois é nele que o professor deve aprender a Matemática com a finalidade de ensina – la, defendido também por Borralho (1997, p.131) citado por Boavida (1993):

> Não há ensino de qualidade, nem reforma educativa e inovação pedagógica sem uma formação adequada para o professor, é necessário que se faça mudanças na prática de ensino dos professores e essas devem acontecer, a princípio no curso de Licenciatura, pois é nele que o futuro professor deve aprender a Matemática com a finalidade de ensina-la.

O autor defende que é necessário que haja mudanças na formação e nas práticas dos professores, que a formação seja adequada, pois ao desenvolver suas práticas com essa metodologia, exige conhecimentos específicos de quem a utiliza, que para tal o momento de constituição do futuro professor é na Licenciatura.

Por que a abordagem do ensino na Matemática com a resolução de problemas?

Vários autores fazem uma abordagem a resolução de problemas como uma aprendizagem significativa, pois ela possibilita ensina a ensinar, como ressaltam Vila e Callejo (2006) ao afirmar que "o ensino/aprendizagem por meio da Resolução de Problemas é uma tentativa de modificar o desenvolvimento habitual das aulas de Matemática. Os problemas são um meio para por o foco nos alunos, em seus processos de pensamento e nos métodos inquisitivos [...] isso exige dos professores uma determinada formação e certas atitudes e crenças. Necessita também de um ambiente de aprendizagem que valorize as ideias e a argumentação dos alunos no processo de resolução do problema selecionado ou criado", Oliveira e Passos, (2013).

Outro autor que situa a resolução de problemas como importante metodologia de ensinar a pensar é Polya (1964, p.100) resaltando que o "ensinar a pensar" devia ser o objetivo prioritário do ensino, nos seguintes termos:

> Ensinar a pensar significa que o professor de Matemática não deveria simplesmente comunicar informação, mas deveria também tentar desenvolver habilidades dos estudantes em usarem a informação transmitida: ele deveria enfatizar o saber-fazer, as atitudes úteis e os hábitos da mente desejáveis.

[2] Grifo nosso: A definição de bons problemas, segundo nosso entendimento estafeta ao desempenho do aluno que, de acordo com o histórico que traz, encarará a atividade proposta pelo professor ou como um problema ou como um exercício.

O autor preconiza que um ensino ativo para a Matemática, na crença de um aprendizado eficiente dar-se-ia se o estudante imergisse no mundo da descoberta. Essa forma de ensinar e pensar é significava no pensamento dele, um pensar para um propósito ou ainda pensar produtivo, em que essa forma de pensar pode ser identificado com a resolução de problemas. Entretanto, parece-nos interessante também aliarmo-nos, em função do processo, a um outro âmbito, ainda na linha desse pensamento matemático que não é puramente "formal", e que não está relacionado com axiomas, definições e demostrações, mas constam também argumentos de casos indutivos conhecimentos de Matemática de situações concretas. Junto a esses processos de pensamento o professor de Matemática tem melhores oportunidades para instruir seus alunos com esses pensamentos "informais", cf. Boavida, (2013).

Ainda nesta perspectiva Onuchic (1999, p. 207), ela defende que a resolução de problemas devesse desempenhar um papel importante no currículo de forma que tivesse aceitação afirmando:

> Resolução de problemas passa a ser pensada como uma metodologia de ensino, como um ponto de partida e um meio de se ensinar Matemática. O problema é olhado como um elemento que pode disparar um processo de construção do conhecimento. Sob esse enfoque, problemas são propostos ou formulados de modo a contribuir para a formação de conceitos, antes mesmo de sua apresentação em linguagem Matemática formal. Onuchic (1999, p. 207).

Refletindo em torno das abordagens acima, pensamos ser importante analisar a resolução de problemas na formação de professores olhando a questão de "um bom problema", mas é importante olhar alguns aspectos que norteam a natureza e definição do que seria um bom problema.

A natureza subjetiva do conceito de problema pressupõe a existência de uma relação particular entre um aluno e uma tarefa, que poderá se transformar em um problema ou não para esse aluno. Outro ponto, é que uma tarefa não é um problema a menos que o aluno se aproprie dessa tarefa e deseje realizá-la.

Um problema confronta o aluno com uma descontinuidade entre o ponto em que está e aquele a que quer chegar. Como não dispõe de nenhum procedimento mecânico que lhe permita saber de imediato qual o caminho que o pode conduzir a solução, a resolução do problema exige-lhe a elaboração de um raciocínio novo e criativo Boavida (1993).

Concepção de Resolução de Problema

Antes de olharmos para o que seria resolução de problema, vamos nos deter na concepção de "problema". A seguir apresentamos alguns aspectos epistemologicos das concepções sobre resolução de problemas:

Com efeito, Vila e Callejo (2006, p. 29) destacam que "o problema é uma situação que propõe uma questão Matemática cujo método de solução não é imediatamente acessível ao aluno/resolvedor ou ao grupo de alunos que tente resolvê-la". Dessa forma, o estudante não dispõe de um algoritmo que relacione os dados e a incógnita com o processo de resolução do problema. Portanto, deverá refletir sobre o processo de resolução, fazerem-se perguntas e perguntar e, estabelecer relações para enfrentar uma situação nova, Oliveira e Passos (2013).

Para Polya "Um problema significa buscar conscientemente alguma ação apropriada para alcançar um fim claramente concebido, mas não imediatamente atingível", Polya, (1962, p. 117). Assim, um problema pode ser "qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm

métodos ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta", Van de Walle, (2001, p. 42) ou ainda, por outro lado "É tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em fazer", Onuchic (1999, p. 215).

Diante do que vimos que é o problema refletiremos sobre a resolução de problemas ao longo do seu denserolar na história da Educação Matemática onde a mesma começa ter sua importância mais recentemente e somente nas últimas décadas do século passado é que os educadores matemáticos passaram a aceitar a ideia de que o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas merecia atenção, mas desde a antiguidade problemas têm ocupado espaço no currículo escolar de Matemática, mas há bem pouco tempo a resolução de problemas tem merecido atenção especial. Stanic e Kilpatrick (1989, p. 1).

Mas antes desse periodo resalta destacar um fato fundamental no ensino de resolução de problemas marcado em 1945 pela publicação da obra *How to solve it?* de George Polya onde é ilustrado um caminho didático pela primeira vez para o ensino de resolução de problemas, apresentando os quartos fases da resolução de problemas (compreender o problema, estabelecer um plano, executar o plano e fazer um retrospeto da resolução).

No Brasil, em 1964 temos o trabalho do professor Luis Alberto S. Brasil que defendia um ensino de Matemática a partir de um problema gerador de novos conceitos.

E no final da década de 80, pesquisadores passaram a questionar o ensino e o efeito de estratégias e modelos, começa–se a discutir as perspectivas didático-pedagógicas da resolução de problemas e a noção de que a resolução de problemas devesse desempenhar um papel importante no currículo de forma que tivesse aceitação bastante definida Nunes (2010, p. 80). Neste âmbito Onuchic (1999, p. 207) afirma que:

> Resolução de problemas passa a ser pensada como uma metodologia de ensino, como um ponto de partida e um meio de se ensinar Matemática. O problema é olhado como um elemento que pode disparar um processo de construção do conhecimento. Sob esse enfoque, problemas são propostos ou formulados de modo a contribuir para a formação de conceitos, antes mesmo de sua apresentação em linguagem matemática formal.

A partir dos anos 90 a resolução de problemas como metodologia de ensino passa a ser o lema das pesquisas e estudos, surgindo assim, a partir dessa década propostas curriculares, com forte apelo a esta proposta. O Plano Curricular Nascional PCNs (2001) adotam a resolução de problemas como um caminho para fazer Matemática em sala de aula, enfatizando que o problema é o ponto de partida de uma atividade Matemática e não a definição de conceitos. Reforça que, no processo de ensino-aprendizagem, conceitos, ideias e métodos matemáticos devem ser abordados mediante a exploração e investigação via resolução de problemas.

A mesma posição é defendida pelo *Principles and Standards for School Mathematics* – NCTM (Princípios e Padrões para a Matemática Escolar, (2000, USA)[3], que comprende que o padrão de procedimento "resolução de problemas" significa o engajamento numa tarefa para o qual o método de resolução não é de início conhecido. Para chegar a solução, o aluno precisa buscar em seu conhecimento prévio e, através desse processo, conseguir desenvolver novas compreensões matemáticas. Resolver problema não é somente um objetivo da aprendizagem

[3] Disponivel em http://www.nctm.org/standards/content.aspx?id=3436 acessado 08/09/2014

Matemática mas, também um meio importante de se fazer Matemática. Dizem ainda os Standards (NCTM, 2000) que:

> Resolver problemas é uma parte integrante de toda a aprendizagem Matemática e, assim, ela não deveria ser uma parte isolada do programa de Matemática. [...] Os contextos dos problemas podem variar desde experiências familiares envolvendo as vidas dos estudantes ou seu dia-a-dia na escola, até aplicações envolvendo as ciências ou o mundo do trabalho. [...] Bons problemas dão aos estudantes a oportunidade de solidificar e estender sua compreensão e estimular nova aprendizagem. [...] Muitos conceitos matemáticos podem ser introduzidos através de problemas baseados nas experiências familiares vividas pelos estudantes ou de contextos matemáticos, NCTM (2000, p. 52).

Segundo o NCTM (2000) resolver problemas é uma parte integrante de toda aprendizagem e pode ser desenvolvido dentro do programa. Pode ser abordado olhando as variada situações e contextos do dia-a-dia que estejam relacionados ao cotidiano dos alunos para que também eles se sintam motivados em colaborar nesta aprendizagem via resolução de problemas visto que eles se identificam com tais situações. É importante ainda resaltar que a formação de professor deve ser norteada por esta metodologia que os futuros professores possam constituir-se e desenvolver suas atividades futuras com a referida metodologia.

O professor e a resolução de problema

Olhando a resolução de problemas como uma parte integrante de toda aprendizagem Matemática, não sendo ela isolada do programa de Matemática, cabe ao professor, propor *bons problemas*, de modo a envolver os alunos no processo de resolução e a dar sentido à atividade para o resolvedor. Também são fundamentais o acompanhamento e a orientação do professor na utilização da metodologia da resolução de problemas, ao trabalhar com os alunos as soluções individuais ou em duplas e coletivas. No momento do compartilhamento dos resultados encontrados na resolução do problema, é importante que o professor conduza as discussões levantando questionamentos acerca das distintas estratégias que chegaram à mesma solução Oliveira e Passos, (2013). *Bons problemas* dão aos estudantes oportunidade de solidificar e estender sua compreensão e estimular nova aprendizagem, onde muitos questões/conteúdos podem ser introduzidos através de problemas baseados nas experiências familiares vividas pelos estudantes ou de contexto matemáticos, cf. NCTM (2000, p. 52).

Aqui cabe ao professor o papel de mediador, facilitador da aprendizagem, companheiro de invenção e descoberta, tornando-se fundamental que tenha em conta o que os estudantes pensam. Nesse ambiente, importa que o professor:

- Reconheça que cada estudante aprenda de maneira única e chega à escola tendo já desenvolvido um conjunto de técnicas, padrões de pensamento, noções, conceitos que não podem ser negligenciados na organização das situações de aprendizagem de resolução de problemas;
- Diversifique as atividades de ensino e tenha em conta a dimensão pessoal do tempo para que as originalidades dos processos de aprender não sejam penalizadas;
- E organize as atividades de ensino de modo a que a sala de aula de Matemática constitua um ambiente propício à experimentação, ao questionamento, à livre troca de ideias e discussão crítica, à conjectura e à refutação , cf. Boavida, (2010, p. 147).

No ensino da Matemática típico, as atividades de ensino esgotam-se, frequentemente, no fornecer diretamente aos estudantes um conjunto de informações impostas pelo currículo e pelo professor, na perspectiva de que estes as armazenem. Esse ensino parece assentar numa lógica na qual a aprendizagem é concebida como um processo de transmissão e absorção de informações. Em lugar disso, no ensino de Matemática através de resolução de problemas, o estudante, de passivo, deverá passar a assumir-se como construtor ativo do seu conhecimento e cada um tem suas crenças e padrões.

Um bom problema

Para Boavida os problema deve ser acessível ao resolvedor e, para tal, é necessário: que ele tenha um conhecimento prévio de conteúdos matemáticos necessários para chegar à sua solução; que se sinta motivado para resolvê-lo; e que facilite o desenvolvimento de sua intuição e criatividade, levando-o a exercitar o seu pensar matemático Boavida (1993).

Neste âmbito de um bom problema Borasi (1986) e Abrantes (1989), em dois artigos intitulados respectivamente *On the Nature of Problems* e *"*Um (Bom) Problema (Não) é Só**...***",* propõem-se analisar e discutir, a partir de alguns exemplos concretos de problemas e noções relacionadas com este conceito "uma possível classificação de problemas a serem abordados em Matemática escolar" e refletir sobre aquilo que é (e não é) um (bom) problema à luz de critérios educativos".

Borasi (1986) designou estes quatro elementos por *contexto, formulação, conjunto de soluções* que podem considerar-se aceitáveis para o problema e *métodos de abordagem* que podem ser usados para obter a solução Boavida, (1993).

Podemos inferir diante das concepções dos autores acima que um bom problema seria aquele que no qual o aluno o assuma como seu, que o leve a reavaliar ideias matemáticas já conhecidas, que fizesse nascer lacunas nos saberes que já possui, que o conduzisse a formulação de novas conjunturas e novos problemas, que constituísse um enigma que ele procura e deseja desvendar e em que reconhecesse um espaço para investir tempo e energia.

Diferentes abordagens de Resolução de Problemas

Diferentes abordagens são indicadas para tratamento da resolução de problemas no ensino e aprendizagem de Matemática, apresentamos aqui as do Schroeder e Lester (1989) citaram maneiras distintas a abordagem de resolução de problemas:

(1) Ensinar *sobre* resolução de problemas; (2) Ensinar *para* resolver problemas; (3) Ensinar *via* resolução de problemas; (4) Ensinar *através* resolução de problemas

Ensinar *sobre* resolução de problemas

Significa trabalhar esse assunto como um novo conteúdo, adicionando a esse trabalho muitas heurísticas ou estratégias. Segundo Polya (1964), o processo divide-se em quatro fases: compreender o problema, desenhar um plano, levar o plano adiante, e olhar de volta ao problema original, a fim de analisar e validar a solução encontrada.

Ensinar *para* resolver problema

Em Schroeder e Lester (1989) percebemos que o professor que ensina *para* resolver problemas está muito preocupado sobre a habilidade dos estudantes em transferir aquilo que eles já aprenderam no contexto de um problema para outros. Uma forte justificativa dessa abordagem é a de que a única razão para aprender Matemática é a de ser capaz de usar o conhecimento adquirido em sala de aula para resolver problemas.

Ensinar *via* resolução de problemas

O ensino de matemática passou a ser trabalhado "via" resolução de problemas, entendendo *"via"* como sendo um meio de aprender Matemática. Schroeder e Lester (1989, p. 33).

No ensino *via* resolução de problemas, os problemas são trabalhados não apenas com o propósito de se aprender Matemática, mas também como o principal meio de se fazer isso. Nessa perspectiva, Schroeder e Lester (1989, p. 34) afirmam que ensinar via resolução de problemas é uma concepção que não tem sido, nem implicitamente, nem explicitamente por muitos professores, autores de livro-texto e desenvolvedores de currículo, mas ela é uma abordagem para se ensinar matematica e que merece ser considerada, desenvolvida, experimentada e avaliada. É uma abordagem mais consistente com as recomendações da Comissão de Padrões do NCTM quem dizem:

- Habilidades e conceitos matemáticos devem ser aprendidos no contexto da resolução de problemas;
- O desenvolvimento de processos de pensamento de nível superior deve ser estimulado através de experiências em resolução de problemas;
- O ensino de Matemática deve acontecer numa atmosfera de resolução de problemas, orientada para a pesquisa.

Ensinar *através* de resolução de problemas

Nela o que se pretende é ensinar, aprender e avaliar a Matemática construída pelos alunos com a guia e direção do professor *através* da resolução de problemas. A expressão "através de" significa do começo ao fim, inteiramente, ao longo da resolução do problema e não simplesmente um recurso para se resolver o problema dado.

Nessa abordagem o objetivo primeiro é apresentar para os alunos problemas que gerarão novos conceitos ou conteúdos. Outro pesquisador que propõe um trabalho de ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas é Van de Walle (2001).

Aqui nos identificamos com o ensino via resolução de problemas pois esta metodologia ela gera uma aprendizagem por descoberta e a auto constituição do formando.

O professor formador

As crenças que esses futuros professores trazem consigo poderão influenciar em suas práticas docentes quando vierem a ensinar. Reconhecemos que mudar crenças no indivíduo não é tarefa fácil. Elas são lentas e processuais. "Cabe ao formador de professores explorar atividades que possam ajudar a trazer crenças matemáticas dos professores de uma forma mais explícita", como sugerem Mewborn e Cross (2007, p.56). E por que não começar com essas atividades no curso de Licenciatura em Matemática, pois, através delas, o futuro professor tem a oportunidade de reconhecer e refletir suas crenças sobre a natureza e sobre a aprendizagem da Matemática, levando-o, possivelmente a mudar suas concepções de modo a construir saberes docentes necessários à sua prática docente, cf. Oliveira e Passos, (2013).

> Exatamente como não se pode esperar que os estudantes aprendam alguma coisa simplesmente por lhes terem dito que isso é assim, não se pode esperar que os professores mudem sua prática de ensino simplesmente por lhes terem dito que era assim …, Nunes, (2003).

A autora anteriormante chama–nos atenção a olharmos para a mudança da prática do professor como uma tarefa constante e não meramente por dizer como era mas que ele busque refletir sobre as mesmas.

Ainda nessa perpetiva Schifter (1998) sugere que os professores precisam ter oportunidade de aprender Matemática nos modos em que se espera que eles ensinem assim aos estudantes. Eles precisam lidar com idéias matemáticas importantes, justificar seu pensar aos pares, investigar soluções alternativas propostas por outros e reconsiderar suas concepções do que significa fazer Matemática, cf. Mewborn (2003, p.49).

A Oficina de resolução de problemas: refletindo sobre a experiência formativa

De desenvolver atividades pedagogicas envolvendo a Matematica com auxilio da metodologia de resolução de problemas, olhando para os desafios de resolução de problemas na perspectiva de "um bom problema" entendemos que além de representar um desafio, tanto ao poder dos matemáticos como ao poder da disciplina por eles criada, também "mexe" com a Matemática: faz com que a melhor entendamos, fertiliza-a e permite que possamos resolver outros problemas. Para que se possa considerar um bom problema, Boavida (1993) diz que: "deve ser acessível ao resolvedor e para tal, é necessário que ele tenha um conhecimento prévio de conteúdos matemáticos necessários para chegar à solução que tenha motivação para resolvê-lo".

Pensando em como desenvolver processos de ensino que tenham como norte o pensamento da construção de conhecimento por parte do aluno em colaboração com o professor, entendemos que se torna relevante compreendermos o que pensam os próprios professores sobre a resolução de problemas, o que para eles é "bom problema". É nessa perspectiva que pensamos ser necessário o desenvolvimento de pesquisa que busquem entender o pensamento do professor, suas percepções sobre problemas matemáticos. Nesse sentido, desenvolvemos a presente pesquisa, para compreendermos que concepções os pós-graduandos, que em sua maioria atuam como professores se expressam sobre construção de um "bom problema". Também como professores em formação refletem sobre o desafio de analisar e elaborar problemas para alunos.

Assim escolhemos questões para que os professores em formação possam refletir sobre elas e seus desafios e possibilidades na aprendizagem. Para sua efectivação escolheram-se questões para que os mesmos pudessem identificar qual de acordo com as suas concepções seria um bom problema, a seguir indicados, numa perspectiva que o professor, fizesse suas análises em consonância com suas vivências e *práxis* educacionais, e nesse sentido, mais uma vez, mostraria a nós o que por vezes entendemos como uma tarefa que revelaria como 'bom problema' seria visto por outros, como mais um exercício.

Solicitamos que os professores dentre uma lista de problemas fizessem a escolha por um destes e defina qual delas configuraria, de acordo com suas concepções, um bom problema e para qual "ano" ou "série" seria trabalhado. (justifique a resposta).

1) Uma bolinha custa, junto com uma raquete, R$ 1,10. Sabendo-se que a raquete custa R$ 1,00 a mais que a bolinha, quanto custa a bolinha? Daniel (2012, p. 4).
2) Um gato está sobre um muro de 4 metros de altura quando avista um rato a uma distância de 8m da base do muro. Quando o rato dirige-se a sua casa (em linha reta até o muro), é comido pelo gato, que pula diagonalmente, andando o mesmo comprimento que o rato tinha andado até então. Qual é a distância que cada um percorreu? (Pereira, 2002).

3) O produto de três números inteiros consecutivos é sempre um número par múltiplo de 3. Comentar a situação se substituirmos "produto" por "soma" (Boavida, 1993, pg 197).
4) Usando apenas seis fósforos, formar 4 triângulos equiláteros geometricamente iguais. (Boavida, 1993, pg 197).

Reflexões e confrontos teóricos para a formação docente, com as vozes dos pós-graduandos.

Passamos a seguir a analisar as respostas dos professores as questões propostas: Para as reflexões analisadas pelos professores P_1, P_2...P_6, sobre as questões Q_1 a Q_4, seis dos quais dois não tiveram formação e não trabalhavam com essa metodologia temos:

Para **Q_1** : P_6: *"É um bom problema e pode ser trabalhado no 6º ano do ensino fundamental com aplicação do sistema algébrico a partir do método de substituição"*.

Para **Q_2**: P_5: "*É um bom problema para ser desenvolvido no 9º ano do ensino fundamental abordando o conteúdo de Teorema de Pitágoras. Pode ser aplicado para apresentar os conceitos introdutórios de Teorema de Pitágoras. Nesse caso segundo Polya, o problema atende a 1ª etapa de resolução de problemas no qual é necessário representar através de um desenho para sua melhor compreensão"*.

P_6:*"A questão 2 é um bom problema para ser desenvolvido no 8º ano do ensino médio fundamental"*.

Q_4: P_1:*"A questão realmente constitui um problema pois sugere ao estudante um desafio instigando sua heuristica, concepções, entre outros. O ano indicado: a partir do 5º ano (no qual o estudante possui o conceito de triângulo equilátero)"*.

P_3, P_1: "Propor para o 5º ano, pois permite ao aluno: Manipulação de materiais, experimentação, estabelecer relações, elaborar coonjenturas e chegar a uma solução ou perceber que não há solução aceitável".

P_1: "Pode ser considerada um bom problema porque o seu próprio enunciado é motivador, pois propõe um desafio ao resolvedor. É desafiador por não apresentar uma solução e ser recreativo. Esse problema pode ser aplicado desde o 3ºano (desde que explicado previamente o que é um triângulo equilátero) até ao 9º ano do mesmo ensino fundamental".

Analisando as respostas dos professores acima, percebemos que o entendimento que eles explicitaram de problema, do enunciado de problema, este deve ser de fácil compreensão para todos os resolvedores. Compreensão da qual nós pesquisadores também compartinhamos. Pois, como salienta Boavida (1993), o problema deve ser acessível ao resolvedor e, para tal, é necessário: que ele tenha um conhecimento prévio de conteúdos matemáticos necessários para chegar à sua solução; que se sinta motivado para resolvê-lo; e que facilite o desenvolvimento de sua intuição e criatividade, levando-o a exercitar o seu pensar matemático.

Outro aspeto a considerar foram as questões que Onuchic (1998) elaborou que ajudou os professores a refletirem sobre elas e a bem escolher os seus problemas com os quais trabalhar:

- Isso é um problema? Por quê?
- Que tópicos de Matemática podem ser iniciados com esse problema?
- Haverá necessidade de se considerar problemas menores (secundários) associados a ele?
- Para que séries acredita ser este problema adequado?
- Que caminhos poderiam ser percorridos para se chegar à sua solução?
- Como observar a razoabilidade das respostas obtidas?
- Como professor, você teria dificuldade em trabalhar esse problema?

- Que grau de dificuldade acredita que seu aluno possa ter diante desse problema?
- Como relacionar o problema dado com aspectos sociais e culturais?

Antes de lançar um olhar as vozes dos pós-graduandos, apoiamo-nos em Nunes (2003), em que as mudanças de concepções e atitudes em relação aos conhecimentos sobre resolução de problemas e sua aplicação no ensino, a aprendizagem e a avaliação em Matemática e como esse processo influência no desenvolvimento dos estudantes (que também designamos por alunos) não acontece simplesmente por que o contexto social atual exige dos professores de Matemática que façam modificações em seu fazer pedagógico. A utilização no ensino da metodologia de resolução de problema depende fortemente da concepção do professor a respeito da mesma e da arte de sua aplicação. E é importante salientar que para muitos de nós a Matemática foi ensinada assim, sem essa proposta de resolução de problemas, não conseguindo desse modo ver um essencial instrumento para cotidianamente ser colocado a nosso serviço e nossas prática, pois para o aluno mais do que conhecer as verdades matemáticas, é obter a alegria da descoberta a percepção da competência, a melhoria da auto-imagem, a satisfação do sucesso e ainda saber que pode desenvolver essa metodologia em suas práticas futuras. Assim também Polya (1998) com olhar nos alunos futuros professores, diz que é necessario sentir a posição do estudante, o professor deve pensar na sua própria experiência, nas dificuldades e sucessos que ele mesmo encontrou ao resolver problemas. Nos apoiamos aqui em Gauthier e Tardif (1996) que defendem o saber da experiência como um conjunto de saberes atualizados, adquiridos e exigidos no âmbito da prática profissional, se constituindo por assim dizer a cultura docente em ação, que eles designam de "saber prático". Nesta perspetiva a criatividade muitas vezes é baseada na experiência passada e em conhecimentos previamente adquiridos que são da prática cotidiana da profissão. Essa perspetiva também é defendida por Tardif, Lessard e Lahaye (1991) quando afirmam que para os professores, os saberes adquiridos através da experiência profissional constituem os fundamentos de sua competência.

Para Pimenta (1999), ela da uma conotação especial aos saberes da experiência apresentando dois niveis de saberes, os da experiência dos alunos – futuros professores, constituidos durante a vida escolar e os saberes da experiência do professor no trabalho pedagógico cotidiano, enfatizando que há necessidade de se começar a tomar a prática dos formandos como o ponto de partida (e de chegada), para que o professor possa constituir seus alunos a partir de suas práticas sociais e recorrendo a metodologia de tratamento dos conteúdos via resolução de problemas, pois é importante que a formação docente seja uma formação qualificada e bem prapararada, cientificamente e pedagogicamente, para que possam construir essa metodologia de aprendizagem nos seus alunos.

Ainda nesta visão de formação Schroeder & Lester (1989) e Nunes (2003) afirmam que os professores que desenvolvem o curriculo, os que produzem os livros não apresentam essa metodologia de resolução de problemas o que não permite ao professores mesmo não tendo formação nessa metodologia, possam recorrer a mesma em sua prática, pois podemos criar nossas proprias experiências. Para Mewborn e Cross (2003) deixam o papel ao formador de professor, explorar atividades que desenvolvam crenças de uso dessa metodologia de resolução de problemas.

Refletindo em torno das reflexões dos pós-graduandos em formação nos criterios que foram informados acima que norteou as suas reflexões, os professores explicitaram que era bom problema, indicando os niveis que poderia ser trabalhado, mas poucos ou quase ninguém fez menção a que caminhos poderiam ser percorridos para chegar à solução, se haveria necessidade

de se considerer problemas menores associados a eles. Ainda outro aspecto a refletir foi que poucos fazem menção a conhecimento prêvio de conteúdos matematico para chegar a solução, como o caso da Q_2 do P_5:

> É um bom problema para ser desenvolvido no 9º ano do ensino fundamental abordando o conteúdo de Teorema de Pitágoras. Pode ser aplicado para apresentar os conceitos introdutórios de Teorema de Pitágoras. Nesse caso segundo Polya, o problema atende a 1ª etapa de resolução de problemas no qual é necessário representar através de um desenho para sua melhor compreensão.

Ainda outra reflexão que da Q_4 P_2 onde apresentam:

> Propor para o 5º ano, pois permite ao aluno: Manipulação de materiais, experimentação, estabelecer relações, elaborar coonjenturas e chegar a uma solução ou perceber que não há solução aceitável.

Os professores conhecem e sabem identificar bons problemas e o nivel a ser trabalhado, mas os objetivos a ser alcançados, refletir o grau de dificuldades que os alunos podem ter diante do problema. Borralho (1991) refere que a formação do pensamento adquire um relevo especial, pois importa desenvolver nos alunos capacidades de auto aprendizagem. É importante que o professor em formação busque realizar um trabalho investigativo, para que possa contribuir para sua própria formação, levando suas reflexões sobre a prática a ser fonte de novos saberes.

As funções dos problemas prendem-se com os objetivos visados para o ensino e aprendizagem da Matemática e ainda com a forma na qual o professor interpreta, organiza e orienta a atividade de resolução de problemas e como fazem as escolas, na coordenação desses problemas no âmbito de educação Matemática.

A sociedade atual requer uma Escola que seja um espaço de aprendizagem da comunicação e cooperação. Um espaço de desenvolvimento de pessoas com gosto pela aprendizagem permanente, capazes de interpretar e discutir as situações complexas que se lhe apresentam, capazes de formular problemas decorrentes dessas situações e de os resolver de forma flexível, crítica, criativa e eficaz. A capacidade de formular e resolver problemas, individualmente ou em colaboração, aparece, pois, como uma das capacidades essenciais ao homem de hoje e do futuro Boavida (1993, p. 92).

Considerações Finais

A escolha de bons problemas para os professores na sua maioria é um desafio, para as suas práticas/atividades de ensino a aprendizagem, uma das constatações é que os mesmos precisam refletir sobre eles, se é um problema, porque acha que é, quais os tópicos que podem se iniciados com esses problemas, pois facilitaria na definição dos objetivos que traçou e o da Educação em geral, ainda ver que conhecimentos menores ou secundário associados a eles e que caminhos podem ser percorridos para chegar a solução. Refletir ainda se como professor, teria dificuldade em trabalhar esse problema, e que grau de dificuldade acredita que seu aluno possa ter diante desse problema. A maioria apresentou em que conteúdo podesse trabalhar essa materia, mas a possibiliadade de ver as dificuldades que teria em trabalhar o problema, poucos apresentaram.

Tais reflexões passam pela formação inicial e continuada do professor com essas atividades no curso de Licenciatura em Matemática, pois através dela o futuro professor tem a oportunidades de desenvolver e construir saberes docentes necessarios à sua prática docente e

não só mas também por reflexões da sua própria prática e o ensino via resolução de problemas seja uma possibilidades no ensino de Matemática e na formação de professores.

Muitas das analises que os professores fizeram do que era um bom problema é resultado de suas experiências e práticas durante a sua constituição docentee saberes docentes que o constituiram. Trabalhar o ensino via resolução de problemas ainda é um desafio no processo de ensino e aprendizagem, onde cabe ao formador de professor desenvolver e criar suas proprias experiências com a utilização dessas feramentas (metodologia) para que esse desafio comece a ser evidente e explorado, tornando-se possibilidade e ser uma prática no processo educativo.

Referências

Boavida, A. M. (1993a). Resolução de problemas em educação matemática: Contributo para uma análise epistemológica e educativa das representações pessoais dos professores, Tese de Mestrado, Universidade Nova de Lisboa. Lisboa: 1993.

Borasi (R), (1986) e Abrantes (P.). 1989. 'Um (bom) Problema (não) é (só) ..." in Educação e Matemática. Ne 8. Associação de Professores de Matemática, Lisboa. pp.7-10. p.35.

Mewborn, D. S.; Cross, D. I. (2007). Mathematics Teachers' Beliefs about Mathematics and Links to Students' Learning. In: Martin, W.G., Strutchens, M.E. e Elliot, P.C, Teachers' Learning of Mathematics, sixty-ninth yearbook, NCTM, p. 259-269.

Ministério da Educação e Desporto, Secretária de Educação Fundamental. (1998). "Parametros Curriculares Nacionais (PCN) Matemática – Terceiro e Quarto ciclo do Ensino Fundamental" – Brasilia.

NCTM. (1980). *An Agenda for Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980's*. Reston: NCTM.

NCTM. (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston: Library of Congress Cataloguing.

Nunes, Celia B. (2010). O Processo Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Geometria através da Resolução de Problemas: perspectivas didático matemáticas na formação inicial de professores de matemática. 430f. Tese de Doutorado – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro.

Onuchic, L.R. (1999). Ensino-Aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In: Bicudo, Maria Aparecida Viggiani (org). Pesquisa em Educação Matemática: Concepções & Perspectiva. São Paulo, SP: Editora UNESP, p. 199-220.

Onuchic, L. R., Allevato, N. S. G. (2009). Um trabalho com concepções errôneas na Licenciatura em Matemática através da resolução de problemas. In. Anais do II congresso das Licenciaturas em Matemática. Mackenzie.

Oliveira, S. A.; Passos, C. B. (2013). Resolução de problemas na formação continuada e em aulas de matemática nos anos iniciais: saberes e aprendizagens docentes. Revista Educação Matemática e Pesquisa, v. 15, Número especial, pp. 873-893. São Paulo.

Polya, G. (1978). *A Arte de Resolver Problemas*. São Paulo, Interciências.

Stanic (C.). Kilpatrick (J.). (1990). 'Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum" in The Teaching And Assessing Of Mathematical problem Solving. third printing, R. Charles & E. Silver (Eds.). Reston. Virginia. Lawrence Erlbaum Associates. National Council of Teachers of Mathematics, p. 1.

Schroeder, T.L., Lester Jr., F.K. (1989). Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving, Trafton, P.R., Shulte, A.P. (Ed.) New Directions for Elementary School Mathematics. National Council of Teachers of Mathematics (Year Book).

Tardif, M. (2000). Saberes profissionais dos professores e conhecimento universitário – elementos para uma epistemologia da prática profissional dos professores e suas consequências em relação à formação para o magistério. Revista Brasileira de Educação, ANPED, São Paulo, n. 13, jan./abr.2000ª.

Van de Walle, J. A. (2001). Elementary and Middle School Mathematics, 4ª edição. New York: Longman.

Resolver problemas: uma aprendizagem cultural

Lucélida de Fátima Maia da **Costa**
Universidade do Estado do Amazonas
Brasil
ldfmaiadc@gamil.com
José Ricardo **Mafra**
Universidade Federal do Oeste do Pará
Brasil
jose.mafra@gmail.com
Lino **Verdial** do Rosário
Universidade Nacional de Timor-Lorosa'e
Timor Leste
linoverdial@yahoo.com

Resumo

Neste texto convidamos o leitor a refletir sobre possíveis implicações das características socioculturais de onde se originam os alunos às atividades que requerem a resolução de problemas, no contexto escolar. Nossas reflexões derivam da análise de resultados de duas pesquisas realizadas em contextos culturais distintos e específicos que contaram com a observação, a descrição e a análise de práticas culturais que requerem, de mulheres, a busca de solução para determinadas situações problemas enfrentadas dia a dia. A triangulação dos resultados das duas pesquisas com os fundamentos da Resolução de Problemas nos permite afirmar que aprender a resolver problemas traz em si uma aprendizagem cultural com importantes implicações à aprendizagem matemática no contexto escolar.

Palabras clave: resolução de problemas, etnomatemática, ensino de matemática, aprendizagem, contextos culturais.

Introdução

Neste trabalho trazemos à discussão algumas de nossas reflexões sobre a resolução de problemas em realidades culturalmente distintas e suas possíveis implicações ao contexto escolar. Trata-se de uma releitura, agora, adotando além dos princípios da Etnomatemática, as lentes da Resolução de Problemas. Nosso posicionamento sobre a questão deriva dos resultados de duas pesquisas realizadas no âmbito da Etnomatemática nas quais observamos, descrevemos e analisamos saberes e fazeres de mulheres indígenas da etnia Ticuna, na aldeia Umariaçu, no estado do Amazonas-Brasil e de mulheres louceiras/artesãs, na Comunidade de Maruanum, Município de Macapá, no estado do Amapá-Brasil.

A metodologia adotada para a elaboração deste texto triangula os resultados das duas pesquisas com os pressupostos da Resolução de Problemas visando compreender as implicações de levarmos nossos alunos ao trabalho com a resolução de problemas sem considerar potenciais operadores cognitivos adquiridos culturalmente.

Nesse contexto, podemos afirmar que, em ambas as pesquisas, é possível identificarmos formas culturalmente instituídas de buscar soluções para determinadas situações problemas e que são desenvolvidas de acordo as necessidades e finalidades laborais de um determinado grupo social. Daí, inferirmos que em qualquer meio estão presentes aspectos culturais que poderão influenciar no modo como elaboramos estratégias para resolver os problemas, de todas as ordens, que se apresentam a dia a dia, inclusive, no contexto escolar.

A Resolução de Problemas e o contexto escolar

No contexto escolar, a resolução de problemas, de acordo com Stanic e Kilpatrick (1989), pode ser entendida, a partir de três perspectivas: como contexto, como instrumento ou como arte. Na primeira perspectiva a resolução de problemas seria "meios para atingir fins". Na segunda, os problemas são vistos como competências "a serem ensinadas no currículo escolar" e, na terceira, requer que a resolução de problemas seja vista como uma arte que os alunos devem aprender. Estas três perspectivas estão centradas naturalmente em contextos ou ambientes de aprendizagem, em que os alunos estariam submetidos ou estimulados a organizar determinados procedimentos, tendo em vista uma finalidade diretiva para a solução de uma determinada situação. Todavia, esses autores alertam para a dificuldade de cumprimos, na escola, a tarefa de apresentar e executar a resolução de problemas como arte. Ora, na vida, quem tem o dever de aprender uma arte? A partir daí já começamos a perceber a dificuldade apontada por Stanic e Kilpatrick (1989). Quando nos propomos a aprender uma arte é porque algo nos motivou, emocionou e nos mobilizou para tal empreitada. Dificilmente, aprenderemos uma arte por dever.

O caráter artístico de resolver problemas deveria surgir naturalmente como em qualquer outra arte, deveria ser o reconhecimento do saber fazer, da criatividade, mas, infelizmente, no contexto escolar, a resolução de problemas raramente possui tais atributos. Geralmente, ao ser conduzida pelo professor, é encarada pelos discentes, como mais uma tarefa enfadonha, desestimulante e difícil de ser realizada. Os problemas apresentados parecem ser escolhidos justamente para que os alunos não consigam resolvê-los (ao invés de estimulá-los), seja pelo grau de dificuldade ou pela incapacidade de instigar o interesse deles.

A resolução de problemas no contexto escolar, também, é entendida como execução de etapas guiadas pelo questionamento de um professor. Esse entendimento decorre das ideias de Polya, divulgadas no livro "How To Solve It: A New Aspect of Mathematical Method", cuja primeira edição data de 1944, mas aqui nos embasamos na 2ª reimpressão da tradução desse livro para o português, realizada por Heitor Lisboa de Araújo, com o título "A arte de resolver problemas: um novo aspecto do método matemático", publicado pela editora Interciência em 1995. Nesta edição, Polya defende que a arte de resolver problemas pode:

> Começar por indagação ou sugestão genérica da nossa lista e, se necessário, descer gradualmente para outras mais específicas e concretas até chegar a que provoque a resposta na mente do estudante. Se for preciso auxiliar o aluno a aproveitar a sua ideia, deve-se começar de novo, se possível, por uma indagação ou sugestão genérica da lista e, se necessário, voltar alguma mais específica e assim por diante (Polya, 1995, p.14).

Desse modo a arte de resolver problemas consiste na execução de quatro etapas ou fases: compreensão do problema; estabelecimento de um plano; execução do plano e retrospecto. Se refletirmos sobre tais etapas perceberemos que em qualquer situação problema do dia a dia, conscientes ou inconscientemente, nós as utilizamos. Então, o que diferencia o processo de

resolvermos problemas reais que se apresentam no convívio sociocultural do de resolvermos problemas na escola?

Certamente, autores como Boavida (1993) e Lester (1993) possuem concepções diferentes sobre a finalidade de levarmos os alunos, em sala de aula, a resolver problemas. No entanto, de modo geral, as concepções sobre o que é um problema convergem ao entendimento de Onuchic e Allevato ao considerarem que problema é:

"Tudo aquilo que não sabemos fazer, mas que estamos interessados em saber. [...] O problema é definido como qualquer tarefa ou atividade para a qual os estudantes não têm método ou regras prescritas ou memorizadas, nem a percepção de que haja um método específico para chegar à solução correta" (Onuchic & Allevato, 2004, p. 221).

Em que pese o cenário escolar estabelecido, a definição de problema está carregada de subjetividade, pois depende do arcabouço teórico e experiencial de quem enfrentará a situação proposta, de modo que, uma mesma situação pode ser um mero exercício, ou seja, requerer a aplicação direta de algoritmos, regras, modelos já conhecidos para determinar com certeza a resposta esperada; mas, também, pode se configurar em um espaço para a elaboração de estratégias, em busca de uma modelação matemática, a partir dos elementos apresentados na situação, envolvendo uma combinação de técnicas, identificação de regularidades e padrões, enfim, tudo depende do que o aluno já sabe e do que o professor se propõe ensinar.

Nosso entendimento e posicionamento sobre a utilização da Resolução de Problemas, no ensino de matemática, decorrem das ideias dos autores tomados como referência, pois, de modo geral, admitem o caráter subjetivo inerente a concepção de problema uma vez que sua resolução depende dos objetivos de quem propõe e do envolvimento a quem foi proposto.

Desse modo, a ação de levar o aluno a resolver problemas, nas aulas de matemática, é uma ação cognitiva complexa, pois lhe exige a mobilização de distintos processos cognitivos para identificar e diferenciar variáveis, interpretar enunciados, elaborar e testar hipóteses, fazer comparações, predições, ações que não são aprendidas somente em sala de aula, a princípio, são aprendidas por meio de interações sociais que realizamos desde a infância no meio sociocultural no qual estamos inseridos.

As características culturais manifestadas pelos alunos quando adentram o espaço escolar é um fator a ser considerado na resolução de problemas, e isto nos levou a perceber, em posturas pedagógicas, a possibilidade de complementaridade entre a Resolução de Problemas e princípios da Etnomatemática. Nossas percepções, ainda que sejam iniciais, nos permitem considerar a importância do contexto para a resolução de problemas, muito embora, de acordo com as ideias de Lamonato e Passos (2011, p. 62), "não vinculamos diretamente resolução de problemas à presença de um contexto, pois uma tarefa que se refira apenas a um tópico ou até a um procedimento matemático pode ser entendida por um indivíduo como um problema". No nosso entendimento o contexto não é determinante, já que não é apenas sua presença que levará, ou não, o aluno a resolver determinado problema, o que está em jogo são as significações, as referências implícitas, as visões de mundo, as manifestações emergidas desse contexto as quais podem ser utilizadas na elaboração de estratégias.

No entanto, o contexto não é apenas um cenário ilustrativo, mas um elemento importante para o cumprimento das fases defendidas por Polya, no sentido de propiciar condições para a interpretação dos dados fornecidos, ou para a resolução ou ainda para a avaliação da resposta

obtida. Se o professor souber utilizar corretamente os elementos do contexto como mote à resolução de problemas, poderíamos, de acordo com Schoenfeld, (1996, p.8-9), pensar nos contextos como "microcosmos de (uma selecção de aspectos de) cultura matemática – lugares onde os alunos são membros de uma comunidade matemática que faz matemática", ou pelo menos, comunidades de práticas que mobilizam ideias matemáticas na busca de resolução para seus problemas.

Dessa forma começamos a vislumbrar aproximações entre a Resolução de Problemas e a Etnomatemática e a refletir sobre possíveis implicações ao contexto escolar, pois pensamos que em uma aula de matemática pode haver uma maior aproximação entre o aluno, o professor, o objeto matemático e o contexto para que as ações matemáticas necessárias à resolução de problemas tenham mais significado para quem está aprendendo. Do contrário, a aula pode se transformar num veículo de ilusão para o aluno. Nesse sentido D'Ambrosio (1993), chama atenção para o fato de que:

> Dificilmente o aluno de matemática testemunha a ação do verdadeiro matemático no processo de identificação e solução de problemas. O professor faz questão de preparar todos os problemas a serem apresentados com antecedência; consequentemente, o legítimo ato de pensar matematicamente é escondido do aluno, e o único a conhecer a dinâmica desse processo continua sendo o professor. O professor, com isso, guarda para si a emoção da descoberta de uma solução fascinante, da descoberta de um caminho produtivo, das frustrações inerentes ao problema considerado e de como um matemático toma decisões que facilitam a solução do problema proposto. O que o aluno testemunha é uma solução bonita, eficiente, sem obstáculos e sem dúvidas, dando-lhe a impressão de que ele também conseguirá resolver problemas matemáticos com tal elegância (D'Ambrosio, 1993, p. 36).

Assim, pensamos que ao contemplarmos as características socioculturais de onde a escola está inserida e o contexto de vivência dos alunos, podemos ultrapassar a proposição de problemas assépticos e realizar a elaboração de problemas que considerem, em sua estrutura, situações reais e significativas para os alunos. Para isso, pensamos que é importante o professor refletir sobre como princípios da Etnomatemática podem contribuir para o desenvolvimento de uma aula com resolução de problemas.

Resolução de problemas em distintos contextos culturais: implicações ao contexto escolar

Resolver problemas parece ser uma atividade que acompanha o ser humano ao longo de sua existência. O modo como enfrentamos uma situação problema, escolhemos as ferramentas e elaboramos as estratégias em busca de uma solução expressa conhecimentos construídos no meio social e traz características culturais que podem influenciar nos significados que emergem do contexto no qual a situação se apresenta.

Ignorar as influências do contexto cultural dos alunos à sua vida escolar, em especial à educação matemática, tem sido uma postura de pouco resultado positivo para a aprendizagem matemática, principalmente quando enfocamos realidades com fortes características culturais como uma escola indígena, ou uma escola de comunidade ribeirinha, ou ainda, por exemplo, alunos de comunidades quilombolas.

Para D'Ambrosio (1996), a resistência ao reconhecimento da matemática como uma construção (poli)cultural tem sido desastrosa e os resultados da insistência, nos currículos escolares, do caráter neutro e hegemônico da matemática, por vezes, ignora saberes outros, modos de fazer e pensar matematicamente.

A preocupação em aproximar a realidade escolar da realidade vivida pelos alunos não é recente, no início do século XX, John Dewey já defendia essa ideia. No Brasil esse pensamento ganhou força e notoriedade, a partir de 1960, com a pedagogia libertadora de Paulo Freire. No âmbito da educação matemática, os questionamentos sobre a dicotomia da matemática ensinada no contexto escolar e o contexto sociocultural, no qual a escola está inserida, culminou com o surgimento da Etnomatemática.

> Dentre essas questões que acarretaram reflexões, principalmente, acerca do papel de fatores culturais, tais como o idioma, os costumes e os modos de vida no ensino e aprendizagem dessa disciplina, aparece o termo Etnomatemática como área de convergência dessas inquietações. Na verdade, a Etnomatemática surgiu ao questionar a universalidade da matemática ensinada nas escolas, sem relação com o contexto social, cultural e político, procurando então dar visibilidade à matemática dos diferentes grupos socioculturais, especialmente daqueles que são subordinados do ponto de vista sócio-econômico (Bandeira, 2011, p. 04).

A Etnomatemática com suas dimensões e pressupostos nos permite reconhecer, valorizar e difundir a mobilização de ideias, por nós julgadas como matemáticas, identificadas em todas as formas de produção e transmissão de conhecimento ligado aos processos de contagem, medição, ordenação, inferência e modos de raciocinar presentes em diversas práticas culturais de distintos grupos sociais. Nesse contexto, tais processos se constituem elementos fundantes da resolução de problemas culturalmente postos.

Se observarmos as ferramentas criadas por ceramistas, feirantes, indígenas, percebemos que se trata de instrumentos elaborados com vista a solucionar um problema prático de medição ou contagem. Em alguns lugares de estados brasileiros como no estado do Amazonas, no município de Parintins e no município de Tefé, assim como em comunidades quilombolas do estado de Tocantins e no estado do Pará, encontramos tradicionalmente entre agricultores e feirantes o litro que, nas relações estabelecidas pelas pessoas desses lugares, possui medida e utilidade diferente da que é apresentada no Sistema Internacional de Medidas (S.I.).

O litro é usado para medir substâncias sólidas como farinha, camarão, goma etc. Geralmente, é corporificado em um recipiente cilíndrico, metálico proveniente da embalagem de algum produto, como óleo usado para cozinhar, por exemplo, o qual tem uma capacidade de 900 ml. Decorrente do uso cultural desse litro, surge o frasco numa relação de 2 para 1, ou seja 2 litros corresponde a 1 frasco.

Esse modo de medir e o instrumento utilizado são resultados de anos de negociação de significados entre pessoas que necessitavam resolver problemas práticos do seu dia a dia, necessitavam padronizar uma medida para aferi-la um valor comercial. Certamente, antes da institucionalização desse instrumento emergiram situações aonde era necessário medir substâncias para vendê-las ou trocá-las, mas como saber quanto se deveria pagar por esta ou aquela quantidade, se nem sempre era a mesma quantidade? A busca por entendimento nessa negociação, provavelmente originou o uso desse litro culturalmente instituído em contextos amazônicos, por exemplo.

Tratando-se de modos de pensar matematicamente para resolver problemas culturalmente instituídos destacamos o estudo de Costa (2009) o qual evidencia o processo de confecção de cestaria vigente na etnia Ticuna. Os Ticuna são o povo indígena mais numeroso da região Norte do Brasil. A produção de cestaria é, nessa etnia, uma atividade tradicionalmente feminina e sua aprendizagem também compõe parte do ritual de passagem feminino chamado festa da moça

nova, no qual a menina-moça fica reclusa durante o período destinado aos preparativos do ritual, durante o qual aprende e aperfeiçoa sua aprendizagem sobre a confecção da cestaria.

No processo de confecção de cestos e paneiros as mulheres ticunas se deparam com muitas situações problemas que requerem para sua resolução o pensar matematicamente no sentido de estabelecer relações, realizar análises, fazer inferências, combinar e aprimorar técnicas, estabelecer e reconhecer padrões. Nesse contexto, perceber, por exemplo, a escassez de determinada matéria prima já se constitui numa primeira etapa para a resolução de um problema que é a sua compreensão. Nessa etapa a ticuna percebe a escassez de uma determinada fibra e começa a pensar sobre as causas e as possíveis consequências dessa situação para seu trabalho. Estabelece relações de tempo e produção, analisa todos os elementos disponíveis na situação para daí posicionar-se para o enfrentamento da situação.

A próxima etapa, estabelecimento de um plano, pode ser percebida quando a ticuna começa a pensar alternativas para a substituição da matéria que está em falta. A terceira etapa, execução do plano, materializa-se nos ensaios que a ticuna faz com outros tipos de matéria prima com o intuito de verificar qual melhor se adéqua as necessidades postas no processo de confecção da cestaria. Quando, finalmente, encontra uma que, aparentemente, sirva aos seus interesses ela a submete ao processo de confecção e concomitantemente realiza uma avaliação, em todas as etapas, do comportamento da matéria prima em uso. Se a nova matéria prima permitir a confecção de um cesto com as mesmas características e qualidade dos tradicionalmente confeccionados com a matéria em escassez se tornará então, a solução para aquela situação problema.

Do mesmo modo, quando estão aprendendo a confeccionar os cestos ou as esteiras, a ticuna aprendiz é levada a mobilizar distintos processos cognitivos para compreender uma situação, no caso uma etapa do trançado, pois a ticuna mais experiente não lhe dita os passos a serem dados nessa aprendizagem, é a aprendiz que tem que reconhecer todos os elementos necessários à compreensão do problema posto, como por exemplo, fazer a emenda de uma fibra ou fazer um trançado plano criar corpo e transformar-se num trançado espacial. Após a compreensão do problema, ela elabora mentalmente suas estratégias, executa-as tantas vezes sejam necessárias até encontrar a solução almejada, ou seja, até conseguir realizar o procedimento adequado para a confecção daquele objeto.

No estudo realizado por Mafra (2003) sobre o trabalho das louceiras/artesãs, na Comunidade de Maruanum, Município de Macapá, no estado do Amapá-Brasil, percebemos como características culturais permeiam as tentativas de elaboração de estratégias criadas por essas mulheres no intuito de solucionar problemas postos quando da construção de peças atípicas, em cerâmica. Ao falar dos processos de pensamentos expressos por essas mulheres, Mafra (2003, p. 16) nos mostra que:

> Os processos elementares do pensamento reflexivo e a ação/intervenção na realidade, por parte das artesãs, estariam supostamente conectados com os elementos constituintes dos sistemas de representação simbólica e semiótica do grupo, ou seja, a visão de mundo, seus mitos e crenças estavam diretamente conectados com o processo de "modelagem" dos elementos concretos.

Uma ideia de modelação de elementos concretos a partir de significados socioculturais é apresentado por Vergani (2003) ao mostrar aspectos de práticas matematizantes e seus significados culturais do povo Tshokwe, de Angola, que desenvolvem uma espécie de escrita na

areia que "para além das atividades decorativas ou lúdicas, a 'escrita geométrica' desenvolve formas lineares abstratas que funcionam como modelos simbólicos matriciais" (p.87). Nessa escrita estão implícitas aprendizagens sobre ecologia, mitos, relações sociais, formas de ensinar e aprender culturalmente instituídas.Os saberes locais, inclusive os manifestados nas ações de contar, localizar, medir, esquematizar, explicar e elaborar estratégias para solucionar problemas presentes em distintos contextos culturais envolvem perspectivas teóricas e práticas que manifestam formas culturais de construir conhecimentos, de racionalizar, de ensinar e aprender.

Essas percepções evidenciam importantes implicações ao contexto escolar, pois, resolver problemas, no nosso entendimento, não pode ser uma tarefa mecânica. Deve ser uma ação educativa que considera, entre outros fatores, os significados que podem ser construídos a partir da situação apresentada, pois a forma como nos posicionamos, as ferramentas que elegemos e as estratégias que elaboramos para tentar resolver um problema trazem consigo características culturais do meio em que vivemos.

Tais características envolvem certamente elementos cognitivos os quais, supomos seguirem um padrão parecido de pensamento, do ponto de vista dos contextos laborais aos quais as investigações de Mafra (2003) e Costa (2009) apontam. Do ponto de vista dos pressupostos envolvendo a perspectiva da Resolução de Problemas e da Etnomatemática, os pontos de similitudes convergem para ações e elaboração gradativa de desdobramento, do ponto de vista escolar, haja vista que os propósitos principais seriam o estímulo e o desenvolvimento gradativo dos alunos em processo de escolarização. Isso permitiria a organização do pensamento tendo em vista os elementos culturalmente construídos, sendo disseminado e estruturado a partir das ações pedagógicas no contexto em que se situam as comunidades envolvidas.

Considerações Finais

O modo sociocultural como aprendemos reflete-se e influencia nosso comportamento em sala de aula e isso se configura em um dos fatores que nos leva a defender a importância de considerarmos os modos de aprendizagem instituídos e validados em distintos grupos sociais. Tarefa esta que propicia o diálogo entre a resolução de Problemas e os pressupostos da Etnomatemática em sala de aula, pois é importante o professor procurar organizar sua aula, a seleção de situações problemas, em termos de linguagem, de vocabulário, comportamentos, medidas, técnicas e instrumentos contemplando o meio de onde o aluno se origina. Não necessariamente, deve procurar vincular cada etapa da resolução de problemas (tais como Polya discute em seus estudos) a aspectos culturais, não é isso, mas observar que situações problemas adquirem mais significados no contexto sócio-histórico-cultural dos alunos para que, talvez, dessa forma possa motivá-los a se envolver na busca de soluções, a partir de diretrizes que possam convergir ou não para as etapas de resolução de problemas, conforme o contexto envolvido.

A resolução de problemas pode ter entendimentos diferentes dependendo do ponto de vista de quem está olhando. Neste texto, nos propomos a olhar a Resolução de Problema a partir de uma aproximação com os pressupostos da Etnomatemática, ou seja, como uma aprendizagem cultural, o que nos permitiu compreender que resolver problemas se aprende resolvendo-os e que nos empenhamos para aprender quando a situação apresentada nos é significativa, tem utilidade na nossa vida ou de algum modo nos motiva a querer encontrar uma solução.

Assim, em qualquer meio estarão presentes aspectos culturais que poderão influenciar na resolução de um problema. Seja numa grande cidade, em uma comunidade rural ou numa aldeia

indígena, nossos pensamentos, nossas aprendizagens, são influenciadas pelas normas culturais introjetadas em nosso modo de viver, o qual, vai pouco a pouco, sendo delineado nas interações realizadas no convívio com os membros da sociedade da qual fazemos parte.

Referências

Bandeira, F. A. (2011). Pesquisa Etnomatemática e Suas Dimensões. En *Anais do III EREM: Diálogos de Educação Matemática e outros Saberes*. Moçoró. Recuperado de http://www.sbemrn.com.br/site/III%20erem/palestra/doc/PL_Bandeira.pdf. 03 de junho de 2014.

Boavida, A. M. D. R. L. (1993). *Resolução de Problemas em Educação Matemática*: *Contributo para uma análise epistemológica e educativa das representações pessoais dos professores* (Dissertação de Mestrado). Universidade Nova de Lisboa, Lisboa.

Costa, L. F. M. (2009). *Los tejidos y las tramas matemáticas. El tejido ticuna como soporte para la enseñanza de las matemáticas* (Dissertação de Mestrado). Universidade Nacional da Colômbia, Sede Amazônia.

D'Ambrósio, B.S. (1993). Formação de professores de matemática para o século XXI: o grande desafio. *Pro-Posições*, *4*(1), 35–41.

D'Ambrosio, U. (1996). *Educação matemática*: *da teoria à prática.* Campinas, SP: Papirus.

Lamonato, M & Passos, C. L. B. (2011). Discutindo resolução de problemas e exploração-investigação matemática: reflexões para o ensino de matemática. *Zetetiké* – FE/Unicamp, *19*(36), 51-74, jul/dez.

Lester, F. (1993). O que aconteceu à investigação em resolução de problemas de Matemática? A situação nos Estados Unidos. En D. Fernandes, A. Borralho & G. Amaro (Eds.), *Resolução de problemas*: *Processos cognitivos, concepções de professores e desenvolvimento curricular* (pp. 13-34). Lisboa: IIE.

Mafra, J. R. S. (2003). *Artesãs e Louceiras: A Forma e a Vida sob a Ótica da Etnomatemática* (Dissertação de Mestrado). Centro de Ciências Exatas e da Terra, UFRN, Natal-RN.

Onuchic, L. R. & Allevato, N. S. G. (2004). Novas reflexões sobre o ensino e aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. En M. A. Bicudo, & M. de C. Borba (Eds.), *Educação matemática*: pesquisa em movimento (pp. 213-231). São Paulo: Cortez.

Polya, G. (1995). *A arte de resolver problemas*: *um novo enfoque do método matemático* (Tradução de Heitor Lisboa de Araújo). Rio de Janeiro: Interciência.

Schoenfeld, A. (1996). Porquê toda esta agitação acerca da resolução de problemas? En P. Abrantes, L. C. Leal, & J. P. Ponte (Eds.), *Investigar para aprender matemática* (pp. 61-72). Lisboa: APM e MPT.

Stanic, G. M. A. & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. En Silver, R. I. C. E. A. (Ed.). *The Teaching and Assessment of Mathematical Problem Solving* (pp. 1-22). VA: NCTM; Lawrence Erlbaum. Recuperado de http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/fdm/textos/stanic-kilpatrick%2089.

Vergani, T. (2003). *A surpresa do mundo*: *ensaios sobre cognição, cultura e educação*. Natal: Flecha do Tempo.

Resolução de Problemas: abordagem ao ensino da Função Quadrática

Poliana Figueiredo **Cardoso Rodrigues**
Instituto Federal Fluminense
Brasil
polianacar@gmail.com
Marcelo da Silva **Corrêa**
Universidade Federal Fluminense
Brasil
marcelocorrea@im.uff.br
Waidson Bitão **Suett**
Universidade Candido Mendes
Brasil
waidsonbs@gmail.com
Marta Duarte de **Barros**
Universidade Federal Fluminense
Brasil
marta_uff@hotmail.com

Resumo

A resolução de problemas é considerada uma forma eficiente de ensinar e aprender, visto que está metodologia desenvolve o raciocínio e motiva os alunos para o estudo da matemática, fazendo desta forma que o estudo e a aprendizagem aconteçam através de desafios e problemas interessantes para os alunos. Nesta conjuntura, o presente trabalho tem como objetivo discutir a importância da resolução de problemas como metodologia de ensino, com o intuito de reafirmar a importância se ensinar função quadrática por meio da resolução de problemas e com uso do Geogebra.

Palavras chave: Resolução de problemas, função quadrática, Geogebra, tecnologia na educação, função quadrática.

Introdução

Ao analisarmos os aspectos relacionados ao tema resolução de problemas, temos que historicamente isto já é bem usual, pois partindo do senso comum todos nós resolvemos problemas, mas quando pensamos na escola, no ensino, todos têm certa aversão.

Contudo temos que pensar na resolução de problemas como uma forma de aprendizagem, como uma forma eficiente de ensinar e aprender, mas deve-se destacar que ao discutirmos a utilização de resolução de problemas não estamos nos referindo às práticas em que o aluno é levado a resolver aqueles exercícios apresentados nos livros didáticos, por exemplo, mas sim a uma prática em que o problema, como afirma Mezzaroba (2009, p.22), é "gerador de ação cognitiva".

Quando se discute a resolução de problemas tem-se que deixar clara a diferença entre problemas e exercícios de matemática, pois "Um problema matemático é uma situação que demanda a realização de uma sequência de ações ou operações para obter um resultado. Ou seja, a solução não está disponível de início, mas é possível construí-la" PCN (1998 apud Sousa, 2005, p.4).

Sendo assim uma forma bem eficiente de se ensinar matemática é através da resolução de problemas visto que está metodologia desenvolve o raciocínio e motiva os alunos para o estudo da matemática, fazendo desta forma que o estudo e a aprendizagem aconteçam através de desafios e problemas interessantes para os alunos.

Segundo os PCNs (1998 apud Sousa, 2005, p.3) a importância da resolução está no fato de:

> possibilitar aos alunos mobilizarem conhecimentos e desenvolverem a capacidade para gerenciar as informações que estão a seu alcance dentro e fora da sala de aula. Assim, os alunos terão oportunidades de ampliar seus conhecimentos acerca de conceitos e procedimentos matemáticos bem como do mundo em geral e desenvolver sua autoconfiança.

Diante de novos estudos que a Educação Matemática tem proporcionado, novos autores têm discutido sobre a resolução de problemas como metodologia de ensino. Assim a resolução de problemas passou a ser estudada sobre três perspectivas diferentes: "1 – Ensinar sobre resolução de problemas; 2 – Ensinar a resolver problemas; e 3 – Ensinar matemática através da resolução de problemas", segundo Onuchic (1999 apud Oliveira, 2007, p.53). Desta forma neste estudo estaremos discutindo como ensinar matemática por meio da resolução de problemas.

É fato que os problemas da educação são muitos e sabe-se também que somente as tecnologias educacionais não irá resolvê-los. Entretanto, não podemos cruzar os braços diante à introdução de inovações tecnológicas na educação que podem propiciar novas concepções de ensino-aprendizagem.

Muitas pesquisas já foram feitas sobre o uso do computador no Ensino da Matemática e os resultados destas mostram que os estudantes que utilizam tal tecnologia possuem melhor compreensão de conceitos matemáticos e, consequentemente, melhor nível de aprendizagem. Salienta-se que os alunos que trabalham com essas tecnologias vivenciam experiências mais significativas do que aqueles que trabalham somente com lápis e papel. Segundo Borrões (1998, apud Allevato, 2005, p.100) o computador "é o instrumento mais poderoso de que actualmente dispõem os educadores matemáticos para proporcionar esse tipo de experiências aos seus alunos".

Alguns relatos apontam que a abordagem visual proporcionada pelo computador permite aos alunos questionar suas concepções, fazer reflexões e pensar nos conceitos de uma maneira mais abrangente, deixando claro que "o computador privilegia o pensamento visual sem implicar na eliminação do algébrico" (Allevato, 2005).

Segundo Borba e Penteado (2001, p.46 apud Allevato, 2005, p. 76):

> [...] os seres humanos são constituídos por técnicas que estendem e modificam seu raciocínio e, ao mesmo tempo, esses mesmos seres humanos estão constantemente transformando essas técnicas. Assim, não faz sentido uma visão dicotômica. Mais ainda, entendemos que conhecimento só é produzido com uma determinada mídia, ou com uma tecnologia da inteligência. É por isso que adotamos uma perspectiva teórica que se apoia na noção de que o conhecimento é produzido por um coletivo formado por seres-humanos-com-mídias, ou

> seres-humanos-com tecnologias e não, como sugerem outras teorias, por seres humanos solitários ou coletivos formados apenas por seres humanos.

As pesquisas realizadas na Educação Matemática mostram que os computadores junto às outras mídias muito contribuem para a reorganização do pensamento coletivo. Allevato (2005, p.77) afirma que "O computador oferece a possibilidade de promover ambientes de aprendizagem onde o aluno pode explorar ideias mais complexas desde o início, e isso será determinante no processo de formação de imagens conceituais que o aluno realiza."

Observa-se que ao ensinarmos a matemática sem a resolução de problemas temos grande insucesso escolar, pois os alunos têm grande dificuldade de relacionar a matemática ensinada com a matemática do cotidiano. Com isso o uso da resolução de problemas como metodologia de ensino traz benefícios significativos à aprendizagem dos alunos, pois contribui para o desenvolvimento cognitivo e ajuda na construção dos conhecimentos.

Diante das questões apresentadas, a presente pesquisa tem como objetivo discutir a importância da resolução de problemas como metodologia de ensino, com o intuito de reafirmar também importância do uso da tecnologia aliada a resolução de problemas.

Com o intuito de discutir sobre as principais temáticas apontadas neste estudo, foi utilizada a pesquisa bibliográfica com uma abordagem qualitativa e quantitativa. Foram consultadas produções científicas relacionadas a Novas Tecnologias no Ensino da matemática e ao Ensino da matemática através de resolução de problemas realizada por diferentes autores, tais como Allevato (2005, 2004), Dante (2000), Mezzaroba (2009), Sousa (2005), Oliveira (2007), Pais (2002) e Polya (2006). Para a fundamentação teórica foram usados como fonte de pesquisa: textos acadêmicos, publicações periódicas e revistas publicadas no período entre 1995 e 2010, bem como sites especializados no assunto com a finalidade de buscar, na literatura específica, aspectos relevantes à temática apresentada.

Após a leitura e levantamento da fundamentação teórica, será devolvida uma atividade para aplicação aos alunos de uma turma do 1º ano do ensino médio de uma unidade de ensino privada.

Fundamentação Teórica

Concepções da resolução de problemas

Schroeder e Lester (1989) apresentam três formas de tratar a resolução de problemas. São elas: ensinar sobre resolução de problemas, ensinar para resolução de problemas e ensinar por meio da resolução de problemas.

Tem-se que Mendonça (1999) caracteriza estas concepções da seguinte forma:

Tabela 1
Concepções da resolução de problemas

Ensinar sobre resolução de problemas	Resolver problemas é um objetivo.
Ensinar para resolução de problemas	Valoriza o desempenho e as estratégias dos alunos. A resolução de problemas é tida como um processo.
Ensinar por meio da resolução de problemas	A resolução de problemas é considerada como um ponto de partida, onde o problema desencadeia o processo de construção do conhecimento.

Ensinar sobre Resolução de Problemas(2.1.1)

Segundo Thompsom (1989), a resolução de problemas deve ser mais um conteúdo a ser ensinado nas escolas, contudo os professores têm muitas dificuldades para ensinar isto aos alunos.

A complexidade de aprender a resolver problemas e também de se ensinar, conforme Allevato (2005, p.50), está relacionada com as conexões que os alunos precisam fazer entre:

- seus recursos matemáticos, por exemplo, o conhecimento de fatos, conceitos e procedimentos;
- heurística, ou seja, métodos e regras de invenção e descoberta matemática;
- controle dos mecanismos necessários para coordenar esses recursos e métodos;
- crenças dos alunos sobre a Matemática, em geral, e sobre a resolução de problemas, em particular; e,
- a variedade de fatores afetivos e contextuais que envolvem a resolução de problemas.

Dentro desta concepção, Dante (2000, p.30) afirma que "ensinar a resolver problemas é uma tarefa mais difícil do que ensinar conceitos, habilidades e algoritmos matemáticos."

Por isso, para Dante (2000), o professor deve ensinar aos alunos a resolver problemas, incluindo o ensinamento de conceitos, habilidades e algoritmos. Portanto, o autor enfatiza que saber resolver problema não se desenvolve de forma natural após a aprendizagem de conteúdos matemáticos, isto é, o aluno saber os conceitos matemáticos não significa que ele saberá resolver problemas.

Para ajudar aos alunos na tarefa de resolver problemas, pode-se utilizar o modelo de quatro fases sugerido por Polya (2006), onde ele apresenta um roteiro a ser seguido na resolução de problemas, sendo o primeiro a compreensão do problema, depois o estabelecimento de um plano, execução do plano e por último o retrospecto.

Ensinar para a Resolução de Problemas(2.1.2)

De acordo com Allevato (2005, p. 52):

> Essa é a visão que considera a Matemática como utilitária de modo que, embora a aquisição de conhecimento matemático seja de primordial importância, o propósito principal do ensino é ser capaz de utilizá-lo. Nessa concepção o professor concentra-se no modo como a Matemática que está sendo ensinada pode ser aplicada na resolução de problemas.

Nesta abordagem, tem-se a preocupação de desenvolver nos alunos a capacidade de transpor o que aprendem de um contexto para outro contexto.

Muitos professores só apresentam para os alunos problemas matemáticos após a apresentação de um conteúdo, fazendo com que os problemas tenham relação direta com um determinado assunto ou conceito. Esta situação é muito séria, pois os alunos podem ser condicionados a resolver problemas como uma aplicação direta de um conceito, configurando assim um treino de conceitos matemáticos.

Para este tipo de abordagem, Santos (2002) elucida que normalmente o professor inicia com o novo conteúdo, em seguida, algumas aplicações com exemplos e para posterior o aluno

realizar uma sequência de exercícios, onde o aluno deve aplicar o novo conhecimento. Esses exercícios normalmente são chamados de exercícios de fixação.

Ensinar por meio da Resolução de Problemas(2.1.3)

Conforme essa concepção, Schoeder e Lester (1989) consideram que a resolução de problemas é um meio de fazer Matemática e não simplesmente como um objetivo de ensinar. Portanto, ensinar por meio da resolução de problemas é a forma mais coerente, pois segundo Allevato (2005, p. 56):

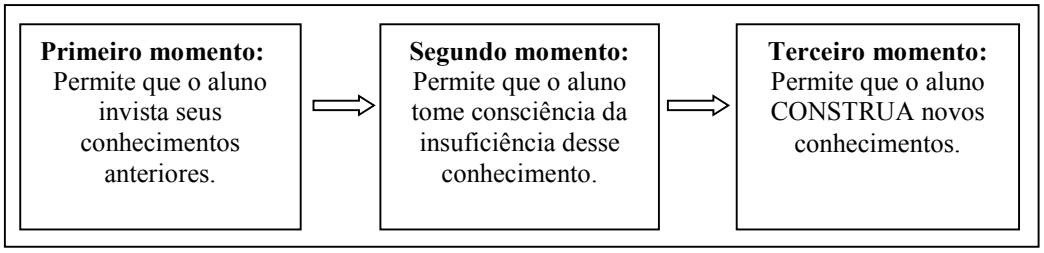
- habilidades e conceitos matemáticos devem ser aprendidos no contexto da resolução de problemas,
- o desenvolvimento de processos de pensamento de ordem superior deve ser estimulado através de experiência em resolução de problemas, e
- o ensino de matemática deve ocorrer, por investigação orientada, em um ambiente de resolução de problemas.

Campbell (1996) expõe que o professor deve saber quais são os conhecimentos anteriores nos quais os alunos têm deficiência, para que essas lacunas possam ser preenchidas, mas a falta de conhecimento prévio não pode limitar o aluno na aquisição de novos conhecimentos.

Quando se fala em conhecimento e aprendizagem, Santos (2002, p. 14) afirma que:

> a aquisição de novos conhecimentos está estreitamente ligada ao processo de interação entre o sujeito e o objeto de estudo; em matemática costumamos dizer que o aluno aprende pela resolução de problemas, e não escutando o professor relatar esse objeto em sua aula.

O referido autor ainda apresenta o seguinte esquema:



Quadro 1. Desenvolvimento do novo conhecimento (Santos 2002, p. 15).

Neste esquema, Santos (2002) alerta que ao aluno se deparar com o novo conhecimento terá que enfrentar um obstáculo gerando assim um conflito. Para adquirir o novo conhecimento o aluno é forçado a criar mecanismos para construir o conhecimento e conseguir resolver a situação. Desta forma o aluno se torna responsável pela construção do novo conhecimento.

A Metodologia de ensino

Ultimamente o ensino da matemática tem utilizado a resolução de problemas como metodologia de ensino. Um dos benefícios desta metodologia é fazer com que o aluno seja autor do seu próprio conhecimento. O professor deve saber que os problemas apresentados devem trazer alguma dificuldade para os alunos, além disso, o aluno não deve de imediato, ter acesso a fórmulas ou estratégias prontas para a resolução.

O professor, que tratar a resolução de problemas como metodologia de ensino, deve ter bem claro que ela é um ponto de partida para o desenvolvimento dos conceitos matemáticos. A

principal característica desta abordagem é apontada por Gazire (1988, p. 124, apud Nunes e Sousa, 2006): "Se todo conteúdo a ser aprendido for iniciado numa situação de aprendizagem, através de um problema desafio, ocorrerá uma construção interiorizada do conhecimento a ser adquirido".

Deve-se destacar que ao se trabalhar com a metodologia de resolução de problemas, o professor não deve confundi-la com ensinar a resolver problemas, muito menos com aplicar conhecimentos adquiridos para resolver um problema.

Nessa abordagem, o professor é um mediador e não o detentor do conhecimento, transmissor do conhecimento, por isso o erro dever ser encarado de forma positiva, de maneira que possa ser visto como parte da construção do conhecimento. Com isso, se faz necessário que o professor dê a oportunidade aos alunos de perceberem o erro cometido e onde erraram para que possam assim aprender com esses erros. Contudo, isso não é uma tarefa fácil para o professor, visto que o sistema escolar é muito fechado a essas mudanças, como esclarecem Skovmose e Alro (2006, p. 26-27):

> Isso coloca os professores em uma situação paradoxal. Por um lado eles têm que educar os alunos a ser abertos e críticos, e por outro lado, eles sentem-se impelidos a seguir um livro-texto que conduz os estudantes a estar aptos a enfrentar certo tipo de prova. Em muitas situações, os professores se sentem fortemente obrigados a preparar os alunos para testes e exames [...].

O uso do computador no ensino da Matemática por meio da resolução de problemas

A aquisição de novas metodologias para um maior conhecimento matemático, vem se tornando uma tarefa essencial hoje nas escolas. O professor deve procurar modificar sua postura em relação à Matemática, deve tentar propiciar ao aluno um ambiente de aprendizagem, onde tenha oportunidade de investigar, de experimentar, de simular situações, de redescobrir seus conhecimentos. Uma das ferramentas que proporciona um ambiente favorável à aprendizagem é o computador, que facilmente pode ser inserido ao processo de ensino e aprendizagem, visto que desperta no aluno o interesse de aprender.

Segundo Dullius et al (2006) novas maneiras de ensinar e aprender estão sendo descobertas e os recursos informatizados constituem-se uma importante ferramenta pedagógica no que diz respeito a alteração da dinâmica ensino aprendizagem, funcionando como instrumento propagador de conhecimento.

Neste sentido o uso do computador no ensino da matemática mostra-se como um recurso importante, pois reconstrói o processo de ensino aprendizagem de maneira dinâmica, oferecendo novos estímulos que poderão conduzir a motivação do aluno. Segundo Dullius et al (2006) para se utilizar de maneira eficiente o recurso computacional o professor deverá atuar como mediador do processo de interação entre a tecnologia e aprendizagem, oferecendo novos desafios contextualizados as experiências de aprendizagens já vividas.

De acordo Borba e Penteado (2003) o uso da tecnologia é um direito, no qual o educando necessita de uma capacitação mínima, que o autor define como "alfabetização tecnológica", cujo objetivo é promover ao aluno capacidades cognitivas específicas.

Matos Filho (2008) destaca que dentre as diversas áreas de conhecimento, a matemática tem sido bastante privilegiada no que concerne ao número de tecnologias desenvolvidas. O autor

destaca que as tecnologias de informática auxiliam o ensino da matemática oferecendo ao aluno novas formas de pensar, viver e experimentar a matemática de maneira mais concreta.

Para Allevato (2004) a eficiência do uso dos recursos computacionais no ensino da matemática depende do conhecimento do que fazem ou pretendem realizar com o recurso. Allevato também destaca que a maneira de se pensar matemática utilizando o computador é diferente da maneira de pensar sem o uso do computador.

Espera-se que mais professores se estimulem e se encorajem a usar tecnologias em suas aulas como ferramenta auxiliar no processo ensino-aprendizagem, permitindo aos alunos vivenciarem novas experiências Matemáticas.

O software gráfico Geogebra

Diante de tantas transformações tecnológicas e da necessidade de aprimorar o ensino de Matemática no Brasil, várias pesquisas foram e estão sendo desenvolvidas na área das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) associadas à educação.

A informática educativa vê no computador uma ferramenta, um recurso a ser utilizado em sala de aula, pelo professor e pelos alunos, no auxílio da construção do conhecimento. De certa forma a construção do conhecimento pode ser possibilitada pelo uso de softwares educacionais.

Para Lucena (1992): "Software educacional é todo aquele que possa ser usado para algum objetivo educacional pedagogicamente defensável, por professores e alunos, qualquer que seja a natureza ou finalidade para o qual tenha sido criado".

Muitos desses softwares são gratuitos, o que facilita o acesso aos mesmos. Um exemplo de software educacional é o Geogebra. Este é um software de Matemática Dinâmica desenvolvido por Markus Hohenwarter da Universidade de Salzburg para educação matemática nas escolas, ele reúne geometria, álgebra e cálculo, além disso, possui todas as ferramentas tradicionais de um software de geometria dinâmica.

O que caracteriza um software de geometria dinâmica são as posssibilidades que ele oferece aos usuários, pois permite simular construções geométricas de forma dinâmica e interativa.

Santos (2009, p. 9) descreve as características do Geogebra como sendo um software onde é possível "representar pontos, vetores, segmentos, retas, circunferências, transportar distâncias, tirar paralelas e perpendicular e construir gráficos." Neste software é possível manipular pontos geométricos de forma a modificar a construção inicial obedecendo as relações matemáticas.

Na sua utilização é possível visualizar tudo o que acontece de forma algébrica e geométrica, pois o Geogebra possui uma janela de geometria e outra de álgebra de forma que é possível inserir entradas e comandos. Portanto, o Geogebra é a união de um sistema de geometria dinâmico e de um sistema de computação algébrica.

O uso do Geogebra em sala de aula vem contribuir os professores no desenvolvimento e construção do conhecimento devido as suas potencialidades como motivação, as diversidades de uso, pois é sabido que os alunos, muitas das vezes, devido a suas dificuldades de manipulação algébrica e geométrica desenvolvem uma aversão a matemática, com isso o Geogebra facilita a interação dinâmica entre conhecimento, professor e aluno de tal forma que o aluno seja capaz de testar inúmeras hipóteses e fazer generalizações.

Resultados e Discussões

Apresenta-se um experimento cujo objetivo é investigar a importância da resolução de problemas auxiliada pelo uso da tecnologia.

Etapas do experimento

As etapas do experimento realizado foram da seguinte forma:

A atividade foi dividida em três etapas, sendo que ela foi realizada em grupo, com dois grupos de 3 alunos e dois grupos de 4 alunos, perfazendo um total 14 alunos:

1. O aluno resolveu dois problemas, tendo que analisar e interpretar e generalizar na sala de aula sem o uso do software. Após a resolução destes problemas o aluno respondeu um questionário que apresenta a percepção do aluno sobre a dificuldade das questões.
2. Em um segundo momento foi apresentado para o aluno o Geogebra, onde o aluno pode experimentar e fazer alguns testes para ver como funciona.
3. Nesta etapa o aluno foi estimulado a resolver os mesmos problemas da etapa 1 utilizando o Geogebra e desta forma foi possível analisar como foi o resultado destes alunos na resolução dos problemas com e sem o auxilio do software Geogebra. Nesta última etapa o aluno respondeu um questionário avaliando o seu rendimento na resolução dos problemas com o uso do software.

Utilizei o laboratório de informática que tem 18 computadores. Para compilação e análise dos resultados utilizei o Excel. Devo destacar que houve um intervalo de duas semanas entre a etapa 1 e etapa 2 e uma semana entre a etapa 2 e etapa 3.

Apresentação do público alvo

Esta pesquisa foi desenvolvida em uma turma de primeiro ano do ensino médio em uma escola privada na cidade de Carangola-MG.

Dos alunos que participaram do estudo, tínhamos dois alunos com 14 anos e doze com 15 anos, sendo que desses alunos temos que 92,86% fizeram o ensino fundamental em instituição privada e outros 7,14% em instituição pública estadual, como pode ser observado no gráfico 1.

Todos os alunos entrevistados têm computador em casa com acesso à internet, como parti do pressuposto que os alunos sabem usar as ferramentas dos computadores, o que facilita a aplicação das etapas do experimento, visto que precisamos que os alunos trabalhem com o software Geogebra no estudo da função quadrática.

Descrição do estudo de caso com os resultados obtidos

Como foi descrito anteriormente na primeira etapa apliquei dois problemas para os alunos resolverem sem o uso do computador, onde era necessário o conhecimento de função quadrática.

Os alunos já tinham o conhecimento dos conceitos da função quadrática, então neste momento queria verificar se os alunos conseguiam aplicar esses conceitos. Para os dois problemas que foram aplicados os alunos conseguiram resolver, sendo que sentiram um pouco de dificuldade na hora de interpretar algumas questões.

O problema da questão 1 é: Ao ser lançado pelo atleta, o disco descreve uma trajetória que pode ser representada por uma parábola. Considere que a trajetória de um disco após seu

lançamento possa ser representada pela função $y = -0,01x^2 + 0,54x + 1,71$, em que *y=f(x)* representa a altura do disco em relação ao solo durante sua trajetória e *x* representa a distância horizontal do disco em relação ao atleta, ambos expressos em metros. Para esta questão as perguntas foram: a) A partir de que altura, em relação ao solo, o disco foi lançado? b) Após ter percorrido horizontalmente 12m em relação ao atleta, qual foi a altura atingida pelo disco? c) Qual foi a distância horizontal atingida por esse disco ao tocar o solo?

Em relação a primeira questão a maioria dos alunos acharam fácil, isto é, 57,14% dos alunos consideraram fácil a resolução desta questão, como pode-se ver no gráfico 1 abaixo.

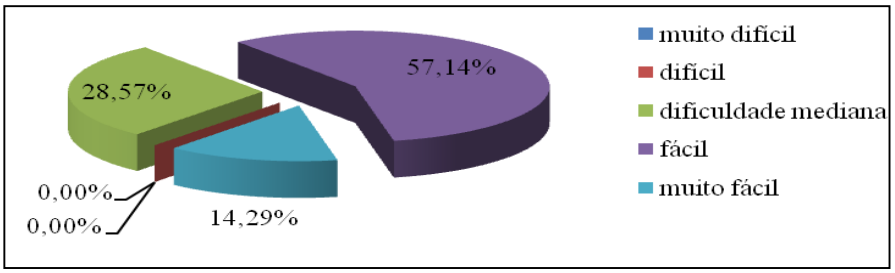


Gráfico 1. Grau de dificuldade da questão 1: Etapa 1
Fonte: Próprio autores.

Contudo na questão 2: Uma empresa oferece fretamento de um ônibus de 48 lugares na seguinte condição: cada passageiro irá pagar R$42,00 fixos mais R$3,00 por lugar vago do ônibus. Quando perguntei aos alunos quantos lugares devem ser ocupados para que a quantia seja máxima, eles tiveram um pouco de dificuldade para começar a resolver, pois não sabiam qual era a função que descrevia este problema, isso mostra que por mais que os alunos tenham o conhecimento do conteúdo pode-se ver o quanto isso está longe deles saberem aplicar.

Com isso reafirmo a necessidade da resolução de problemas como metodologia de ensino, pois desta forma é possível apreender os conceitos juntamente com as aplicações e variações que podem acontecer em cada conteúdo novo.

O gráfico 2 abaixo mostra o percentual que demonstra que os alunos acharam a segunda questão um pouco difícil.

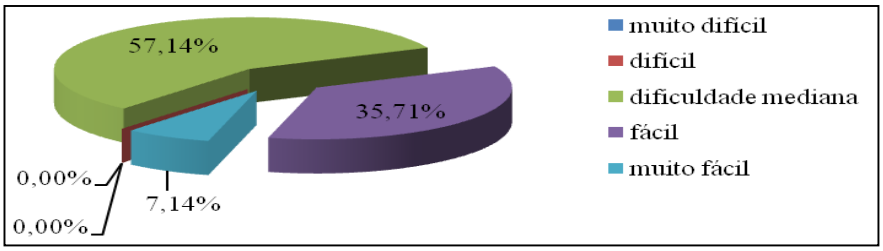


Gráfico 2. Grau de dificuldade da questão 2: Etapa 1
Fonte. Próprio autores.

Na segunda etapa, os alunos foram levados ao laboratório de informática e lá foi apresentado o software Geogebra. Neste momento foi pedido para que os alunos construíssem gráficos de funções quadráticas, por exemplo, das funções $f(x) = 2x^2 + 5x - 3$, $g(x) = x^2 - 5, h(x) = -x^2 - 5x + 1$. Para isto foi mostrado como deve ser digitado no software, isto é,

as funções devem ser digitadas da seguinte forma: $f(x) = 2 * x \wedge 2 + 5 * x - 3$, $g(x) = x \wedge 2 - 5, h(x) = -x \wedge 2 - 5 * x + 1$.

Após a construção dos gráficos, isto é, após os alunos terem apreendido a digitar as funções no software foi pedido também que marcassem alguns pontos, como por exemplo, os pontos onde o valor da função é zero, os zeros da função, os vértices da função.

Portanto, neste momento, os alunos estavam se familiarizando com o software para serem capazes de participar da etapa 3 do experimento. Então, este foi o momento de experimentação e teste.

Esta etapa é muito importante, pois o não conhecimento e a dificuldade de manipulação como o software não poderia prejudicar o desenvolvimento do trabalho aqui apresentado. Somente quando percebeu-se que os alunos estavam familiarizados o suficiente passou-se para a etapa 3.

Na etapa 3, os alunos resolveram, utilizando o software Geogebra, as questões propostas na etapa 1. Contudo, destaca-se que na etapa 3 foram acrescentados na questão 1 alguns questionamentos diferentes do que foi proposto na etapa 1. Os questionamentos incluídos foram:

- Caso o valor de "a" da função do enunciado seja $a = -0{,}04$, o que acontece com as respostas das letras "a", "b" e "c"?
- Caso o valor de "b" da função do enunciado seja $b = 0{,}9$, o que acontece com as respostas das letras "a", "b" e "c".
- Caso o valor de "c" da função do enunciado seja $c = 20$, o que acontece com as respostas das letras "a", "b" e "c".

Esses questionamentos tiveram o intuito de explorar melhor a resolução de problemas como forma de ensinar, isto é, neste momento foi exigido do aluno maior conhecimento dos conceitos que envolvem a função quadrática bem como a sua aplicação e manipulação.

Assim, eles acharam a questão 1 um pouco mais difícil, isto é, 50% julgaram esta questão com dificuldade mediana, como pode-se ver no gráfico 3 abaixo.

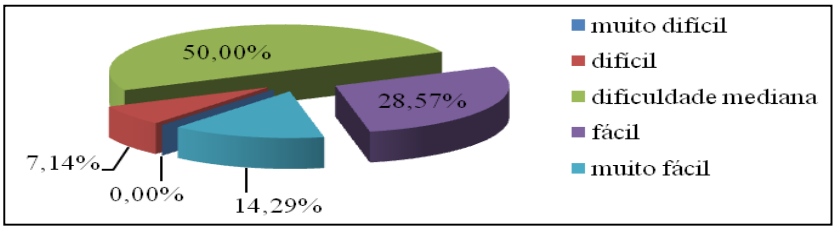


Gráfico 3. Grau de dificuldade da questão 1: Etapa 3
Fonte. Próprio autores.

Ressalta-se que, devido aos questionamentos inseridos na questão 1 nesta etapa do experimento, os alunos tiveram mais dificuldades para resolver a questão 1 do que a questão 2, diferentemente da primeira etapa quando a questão 2 foi relatada pelos alunos como sendo a mais difícil.

Em relação a segunda questão 2, 50% dos alunos acharam a questão fácil, enquanto 28,57% tiveram dificuldade mediana para resolver a referida questão, como se pode observar no gráfico 4.

Esta percepção dos alunos diferiu um pouco quando foi solicitado a eles que resolvessem a questão no papel, pois na etapa 1 eles encontram mais dificuldade para resolver e quando foi inserido a utilização do software essa dificuldade foi sanada.

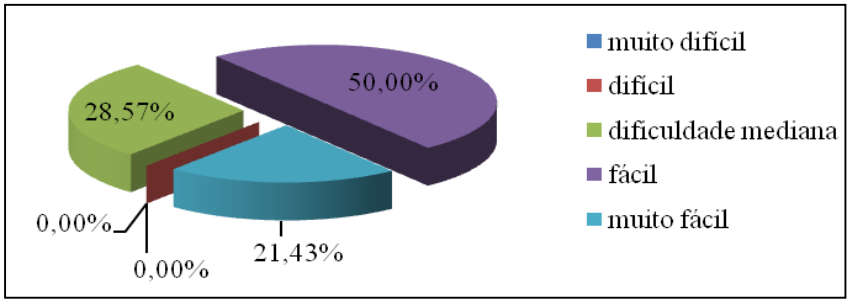


Gráfico 4. Grau de dificuldade da questão 2: Etapa 3
Fonte. Próprio autores.

Após a resolução dessas questões, com e sem o uso do software Geogebra, foi ainda perguntado aos alunos o quanto eles consideram importante a utilização de recursos tecnológicos na resolução de problemas. Tem-se que 42,86% consideram importante e 42,86% consideram muito importante, com isso pode-se afirma que é extremamente importante para o ensino de função quadrática via resolução de problemas a utilização de recursos tecnológicos, como observa-se no gráfico 5.

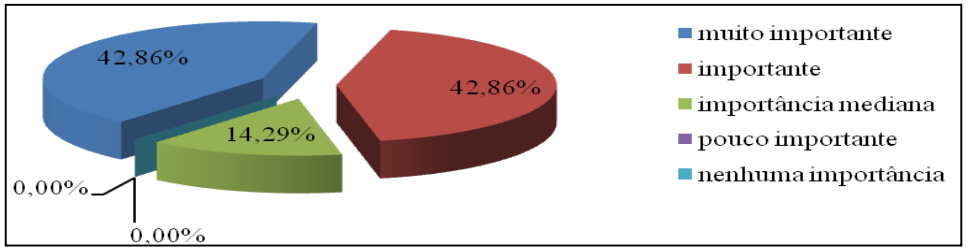


Gráfico 5. O quanto você considera importante a utilização de recursos tecnológicos na resolução de problemas: Etapa 3
Fonte. Próprio autores.

Conclusões

Neste trabalho foi discutida a utilização da resolução de problemas como metodologia de ensino, tendo sido destacada a importância do envolvimento e dedicação do professor, bem como a capacidade que os alunos desenvolveram em administrar as informações ao seu redor partindo dos conhecimentos matemáticos já estudados. Desta forma, segundo Poffo ([s.d.]) "os alunos ampliam seu conhecimento, desenvolvem seu raciocínio lógico e conhecem as aplicações da matemática. O mesmo sucede para o professor, pois trabalhar com a resolução de problemas torna sua aula mais interessante e motivadora".

Neste contexto, a metodologia de resolução de problemas foi utilizada em um experimento realizado em uma turma do primeiro ano do ensino médio, percebendo-se que os alunos puderam usar os conhecimentos matemáticos para analisar, interpretar e resolver problemas. Na aplicação pode-se perceber o quanto o uso de recursos tecnológicos auxilia o aprendizado dos alunos

quando associado a resolução de problemas, bem como a resolução de problema contribui para a aprendizagem.

Referências bibliográficas

Allevato, Norma Suely Gomes. (2005). *Associando o Computador à Resolução de Problemas Fechados: Análise de uma Experiência* (Tese de Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho, Rio Claro. 370f. *Disponível em <http://www.rc.unesp.br/gpimem/downloads/teses/allevato_nsg_dr_rcla.pdf>*. Acesso em 10 ago 2014.

_____. (2004). Resolução de Problemas, Software Gráfico e Detecção de Lacunas no Conhecimento da Linguagem Algébrica. *VII Encontro Nacional de Educação*. Recife. Universidade Federal de Pernambuco.

Borba, Marcelo de Carvalho, & Penteado, Miriam Godoy. (2003). *Informática e Educação Matemática*. 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica. 99p.

CAmpbell, P. F. (1996). Characteristics of constructivist instruction. In: *International Congress On Mathematical Education,* 8. Sevilha. Eighth International Congress on Mathematical Education**,** Sevilha, Espanha, **(**Handout).

Dante, Luiz Roberto.(2000). *Didática da Resolução de Problemas de Matemática* (12ª ed.). São Paulo: Editora Ática. 175p.

Dullius, Maria Madalena, et al. (2006). Recursos Computacionais nas Aulas de Matemática. *III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*. Águas de Lindóia - São Paulo.

Lucena, Marisa. (1992). *A Gente é uma Pesquisa: Desenvolvimento Cooperativo da Escrita Apoiado pelo Computador* (Dissertação de Mestrado em Educação*).* Rio de Janeiro: PUC-Rio.

Matos Filho, Maurício A. Saraiva de; et al. (2008). *O uso do Computador no Ensino de Matemática: Implicações nas Teorias Pedagógicas e a Infraestrutura Escolar. UFRPE*.

Mendonça, Maria do Carmo. (1999). *Resolução de Problemas Pede (Re)Formulação. In P. Abrantes (Org.), Investigações Matemáticas na Aula e no Currículo* (pp.15-33). Lisboa: APM.

Mezzaroba, Cristiane Dorst. (2009). *Problemas de Lógica como Motivadores no fazer Matemática no Sexto Ano. Brasília* (Dissertação de Mestrado em Educação*).* 147f. Faculdade de Educação, Universidade de Brasília, Brasília. *Disponível em: <http://repositorio.bce.unb.br/bitstream/10482/8634/1/2009_CristianeDorstMezzaroba.pdf>*. Acesso em 15 jul 2014.

Nunes, Célia Barros, & Souza, Analucia C. P. de. (2006). *A Resolução de problemas como metodologia de ensino-aprendizagem - avaliação de Matemática em sala de aula*. *Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/.../MC65873300534T.doc>*. Acesso em 05 maio 2012.

Oliveira, Edimilson Antonio de. (2007). *Concepções de professores e alunos sobre resolução de problemas abertos como estratégia de ensino e aprendizagem da matemática na educação de jovens e adultos: um estudo de caso de uma escola em Ceilândia – DF. Brasília* (Dissertação (Mestrado em Ensino e Aprendizagem). 201f. Instituto de Educação, Universidade Católica de Brasília, Brasília. *Disponível em: <http://www.bdtd.ucb.br/tede/tde_arquivos/4/TDE-2007-08-20T175227Z-500/Publico/Texto%20Completo.pdf>*. Acesso em 01 jun 2014.

Poffo, Elaine Maria. (2011). A resolução de problemas como metodologia de ensino: uma análise a partir das contribuições de Vygotsky. *II Seminário em Resolução de Problemas*, Rio Claro. *Disponível em <http://www2.rc.unesp.br/gterp/sites/default/files/artigos/artigo_resolucao_problemas.pdf>*. Acesso em 28 jun 2014.

Polya, George. (2006). *A arte de Resolver Problemas* (Tradução a adaptação: Heitor Lisboa de Araújo). Rio de Janeiro*:* Interciência. 203 p.

Santos, Fábio Henrique Almeida. (2009). *Explorando conteúdos matemáticos com o uso do geogebra* (Monografia de Graduação em Licenciatura em Matemática), Alagoinhas: UNEB. *Disponível em* < *http://pt.scribd.com/doc/73376169/Monografia-Fabio*>. Acesso em 25 maio 2012.

Santos, Marcelo Câmara dos. (2002). Algumas concepções sobre o ensino-aprendizagem de matemática. *Separata de: Educação Matemática em Revista*, São Paulo. v.9, n.12), p.11-15.

Schroeder, T. L., & Lester J. R, F. K. (1989). Developing Understanding in Mathematics via Problem Solving. In P. R. Trafton, & A. P. Shulte (Eds.), *New Directions for Elementary School Mathematics* (pp.31-42). Reston: NCTM.

Skovsmose, Ole , & Alro, Helle. (2006). *Diálogo e Aprendizagem m Educação Matemática* (Tradução: Orlando Figueiredo, 2ª ed.). Belo Horizonte: *Autêntica*. 160 p.

Sousa, Ariana Bezerra. (2005). *A resolução de problemas como estratégias didáticas para o ensino da matemática. Disponível em: <http://www.ucb.br/sites/100/103/TCC/22005/ArianaBezerradeSousa.pdf*>. Acesso em 01 set 2014.

Thompson, A. G. (1989). Learning to Teach Mathematical Problem Solving: Changes in Teachers' Conceptions and Beliefs. In R. I. Charles, & E. A. Silver (Eds.), *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving* (pp.232-243). Virginia: *Laurence Erlbaum Associates*.

Trabalhando registros de representação semiótica em atividades de Matemática no ensino fundamental

Raimundo Luna **Neres**
Universidade CEUMA
Brasil
luna.neres@ceuma.br

Resumo

Abordagem dos resultados de uma experiência realizada com alunos do ensino fundamental. A pesquisa teve como objetivos verificar o desempenho escolar em resolução de atividades envolvendo operações com números naturais e racionais, elaborados com base na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, Duval (2007), em que o aluno deveria estabelecer relações entre tratamento e conversões de registros. Foram aplicados dois tipos de atividade: o primeiro tipo envolvia a conversão de registros de representação da linguagem natural para numérica e gráfica e o tratamento destes registros; o segundo foi semelhante ao primeiro, com dados diferentes. Os resultados revelaram que, em atividades com tratamento de registros numéricos, os alunos tiveram melhor desempenho do que usando a conversão de registros. Isso nos levou a supor que essa falta de entendimento não está somente no raciocínio matemático, mas na maioria das vezes, no domínio da leitura e na interpretação de textos.

Palavras chave: desempenho escolar, registros de representação semiótica, tratamentos e conversões de registros, registros gráficos, resolução de problemas.

Introdução

Várias pesquisas em ensino e aprendizagem da Matemática já foram realizadas no Brasil. No ano de 2007, foi publicada a 3ª edição de uma coletânea de artigos organizados por Sílvia Dias Alcântara Machado apresentando pesquisas realizadas por brasileiros que tratam de aprendizagem da Matemática apoiadas na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Raymond Duval. Nessa coletânea, no seu primeiro capítulo, Duval destaca que para haver uma aprendizagem real da Matemática é importante que o seu ensino seja baseado em registros de representação semiótica. Segundo o autor, o ensino baseado na utilização desses registros possibilita o desenvolvimento cognitivo do aluno.

Também nessa coletânea, Damn (2007) apresentou um estudo sobre representação, compreensão e resolução de problemas aditivos, em que destaca a necessidade da utilização da conversão na resolução destes problemas; segundo ela, ao se selecionar os dados pertinentes de um problema e organizá-lo de forma a obter a operação de adição ou de subtração a ser efetuada, é preciso dispor de uma representação semiótica (Damm, 2007, p.36).

Destarte, (Passoni & Campos, 2007) discorreram sobre uma pesquisa experimental realizada com alunos do ensino fundamental de uma escola de São Paulo, em que os autores, tiveram como fonte de investigação as pesquisas feitas por Gérard Vergnaud e Catherine Durand,

sobre problemas aditivos em 1976. Ao analisarem os resultados obtidos, constataram que o diferencial do sucesso dos alunos foi na resolução de problemas aditivos num campo mais amplo dos números inteiros.

Relatamos aqui parte de uma pesquisa empírica realizada com uma turma de (30 alunos) do sexto ano do ensino fundamental (10-12 anos) de uma escola pública de São Luís no Estado do Maranhão-Brasil, cujas análises estão apoiadas na Teoria de Duval. Para isso, fizemos um estudo sobre tratamento e conversão de registros de representação na resolução de atividades matemáticas.

Nesse contexto trabalhamos com registros de representação expressos em linguagem natural, numérica e gráfica e na produção da passagem de um tipo de registro em outro, como por exemplo, a passagem de um registro expresso em linguagem natural para um registro em representação gráfica ou numérica.

O fenômeno da resolução de problemas exige a conversão entre dois registros de representação, ou seja: que o aluno passe do texto à escrita (numérica ou gráfica) ou vice-versa da operação a ser efetuada, dessa forma,

> Para efetuar a conversão é necessário: Selecionar, no enunciado, os dados pertinentes para a resolução, isto é, os números indicados, os valores que lhes são atribuídos lexicamente e organizar esses dados de maneira que a operação matemática a ser executada (nesse caso com números naturais) se torne evidente e consistente (Damm, 2007, p.36).

Duval (2007) define

> Tratamento de registros de representação - como sendo as operações realizadas dentro do próprio registro em que ele foi enunciado e Conversão de uma representação em outra - como sendo a transformação de uma representação em outra representação, isto é, de um registro em outro registro, podendo conservar a totalidade ou apenas uma parte do registro dado como ponto de partida. (p. 41-42).

Com a utilização de uma variedade de registros de representação, o aluno poderá conseguir visualizar mais facilmente os objetos matemáticos, visto que nem sempre esses objetos são passíveis de percepção. Sem essa compreensão dos objetos de estudo, as dificuldades de aprendizagem se tonarão maiores. Por outro lado, na maioria das vezes, a visualização dos objetos pode estar relacionada ao fato de que o aluno não consegue explicitar o objeto através de representações semióticas. Essas dificuldades, em geral, prejudicam a compreensão da Matemática, haja vista que, quando isso ocorre, pode haver uma perda da compreensão já adquirida.

O objeto é aquilo que se pode indicar, isto é, o que pode ser sinalizado. (Peirce, 2005) define objeto como sendo a representação real de um signo, podendo ser perceptível ou abstrato, uma entidade puramente mental ou imaginária e (Godino, 2007) define como sendo tudo aquilo que pode ser indicado, que pode ser sinalizado ou ao que se pode fazer referência.

Dessa forma, o acesso aos objetos matemáticos passa necessariamente por representações semióticas. Destarte, a sua compreensão pode está condicionada à capacidade de permutação de registros. Pois em geral, o aluno confunde os objetos matemáticos com suas representações semióticas. (Duval, 1995, p.75-79) afirma que a impossibilidade do acesso direto aos objetos matemáticos se dá em função de esses objetos serem exteriores às representações, tornando-se assim uma confusão quase inevitável.

Por outro lado, normalmente os alunos adquirem, inicialmente, domínios das funções de tratamentos de registros numéricos ligados às representações semióticas e, a priori, se eles não possuem uma apreensão conceitual dos objetos representados, este paradoxo é ainda maior. Principalmente, quando as atividades matemática estão relacionadas a uma atividade conceitual, posto que neste trabalho, Baseado em Damm (2007),

> Os objetos a serem estudados são conceitos, propriedades, estruturas, relações que podem expressar diferentes situações, portanto, para seu ensino, precisam-se levar em consideração as diferentes formas de representação de um mesmo objeto matemático. Os primeiros passos a serem dado é a compreensão do que seriam essas representações essenciais ao funcionamento e ao desenvolvimento dos conhecimentos (p. 35-48).

Objetivos da pesquisa

Investigar, com base nos pressupostos da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval, (1) como os alunos trabalham na exploração da aplicação da conversão e do tratamento de registros de representação em momento distintos, (2) como os alunos tratam a existência ou não do fenômeno da heterogeneidade de conversão de registros.

Trabalhar com questões baseadas nos conteúdos ministrados, pela professora, em sala de aula, e com as produções dos alunos em trabalhos extraclasses, objetivando-se averiguar as habilidades e competências dos alunos nas soluções desses problemas, elaborados segundo a Teoria de Duval.

Identificar dificuldades dos alunos na resolução de problemas envolvendo operações com números naturais, elaborados com aporte na Teoria de Duval.

Procedimentos metodológicos

Trabalhamos com 30 alunos de uma turma de sexto ano do ensino fundamental. No início do ano letivo, pesquisador e professora da classe estabeleceram uma discussão sobre a Teoria dos Registros de Representação Semiótica, a fim de que a professora conhecesse as bases epistemológicas da pesquisa.

Após a discussão da Teoria de Duval, acertamos que aplicaríamos instrumentos avaliativos, o primeiro instrumento foi aplicado no início da pesquisa, o segundo foi aplicado depois de transcorridos dois meses de aula; o terceiro, um mês depois e assim sucessivamente.

A primeira coleta de dados, realizada por meio do primeiro instrumento, serviu para diagnosticar o nível de compreensão e de conhecimento matemático dos alunos. O mesmo constou de problemas referentes aos conhecimentos já adquiridos pelos alunos, em anos anteriores de estudo. Foi aplicado, na segunda semana de aulas, a 27 alunos que compareceram à aula, do universo da classe de 30 alunos. Eles tiveram 2 horas para responder às questões propostas.

Analisaram-se no primeiro instrumento, fundamentalmente, as dificuldades encontradas pelos alunos na resolução das questões propostas e o desempenho deles na construção destas. Essa análise serviu de parâmetro para a sequência de desenvolvimento da pesquisa.

Os outros instrumentos foram aplicados durante o decorrer da pesquisa, objetivava-se verificar as habilidades e competência dos alunos nas resoluções das atividades de aula, elaboradas utilizando-se as funções de tratamento e de conversão de registros de representação.

Atividades desenvolvidas em classe

Trabalhamos inicialmente com atividades que requeriam do aluno a conversão de registros de representação numérica para linguagem natural, conforme figura 1.

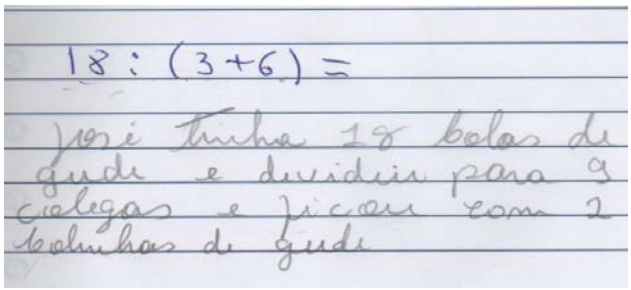
Registros numéricos	Soluções dos alunos: linguagem natural
1) Crie uma historinha para a expressão numérica. $18 \div 3 + 6 = 12$ 2) Crie uma historinha para a expressão numérica. $18 \div (3 + 6) =$	Transcrição de um aluno. Maria ganhou 18 bombons, dividiu entre João, Pedro e Tereza, depois ganhou mais 6 e ficou com 12. 

Figura 1: Registro de representação numérico e linguagem natural.

Trabalhamos também com a conversão de registros de representação da linguagem natural para numérica e o tratamento destes registros, conforme figura 2.

Registros em linguagem natural	Soluções os alunos
3) Explique como você resolveria a questão a seguir. Se seis doces custam quinze reais, quanto custa dez doces?	Transcrição do aluno. $\begin{array}{r} 15 \\ +10 \\ \hline 25 \end{array}$ É só somar
4) Considere dois números naturais, cada um deles é formado por três algarismos diferentes. O maior deles só tem algarismos pares e o menor só tem algarismo impares. Se a diferença entre eles é a maior possível, qual é essa diferença?	Transcrição do aluno. Se a diferença entre eles é a maior possível, então é: $\begin{array}{r} 888 \\ -\ 111 \\ \hline 777 \end{array}$
5) Você está com o seguinte desafio. Têm duzentos e trinta e quatro figurinhas; recebeu de seu tio mais de cem figurinhas e de sua tia mais de trezentas, ao todo ficou com seiscentas e setenta e oito figurinhas. Quantas figurinhas você ganhou dos tios?	Transcrição do aluno. $\begin{array}{r} 234 \\ +143 \\ +301 \\ \hline 678 \end{array}$ R= 678 figurinhas.

Figura 2: Registros de representação: linguagem natural, numérica e tratamento de registros.

Na figura 3, apresentamos uma atividade em que se requeria do aluno a conversão do registro linguagem natural para o registro figural.

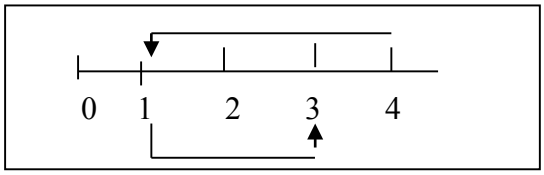
Atividade proposta	Solução figural
6) Você tem quatro figurinhas, joga uma partida e perde três; joga outra partida e ganha duas figurinhas. Mostre sua resposta num gráfico (desenho). Ganhou ou perdeu?	 Perdi.

Figura 3: Registros de representação linguagem natural e figural.

Na figura 4 apresentamos uma atividade em que se requeria do aluno a conversão do registro figural para o registro numérico.

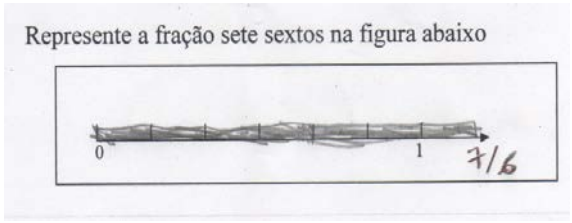
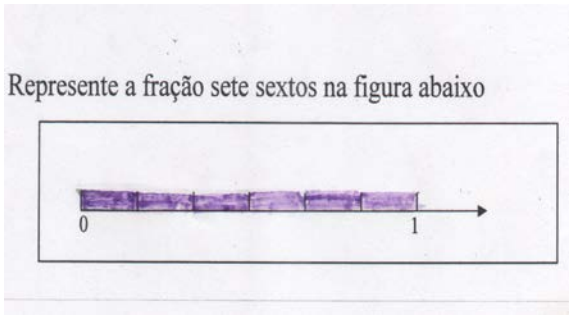
Atividade proposta	Soluções numéricas
7) Represente a fração sete sextos na figura abaixo	 

Figura 4: Registros de representação figural e numérica.

Os problemas apresentados nas figuras: 1, 2, 3 e 4 são uma amostra dos que foram trabalhados com 27 alunos do universo da classe de 30 alunos. Foi solicitado a esses alunos que respondessem às questões propostas em seus cadernos, pois as soluções seriam scanedas para posterior divulgação, mas que seus nomes não seriam identificados.

Análise dos dados

Para analisarmos a passagem de um tipo de registro de representação a outro registro, além de Duval (2007) recorremos também aos estudos feitos por Colombo (2008), ele afirma que a mudança de registro ocorre se existir uma relação de dupla entrada entre sistemas cognitivos e sistemas semióticos, não se deve prestigiar mais um sistema de representação do que o outro; pois, se assim ocorrer, poderá haver dificuldade de absorção de conhecimento.

Como trabalhamos com registros em linguagem natural, nos apoiamos também, nos estudos de Freitas (2007), segundo ele, os registros se manifestam por meio de associações verbais entre conceitos, ou seja, por meio de raciocínio.

Nas atividades que requeria-se do aluno fazer a conversão do registro numérico para o registro linguagem natural, muitos deles fizeram confusão, alguns não responderam, e quando davam a resposta, faziam de forma errada. Foram poucos os que conseguiram perceber que precisavam dividir, igualmente. Só aproximadamente 35% e 40 %, respectivamente, acertaram, conforme figura 1.

Nas atividades que se pedia para o aluno fazer a conversão da linguagem natural para o registro numérico e o tratamento dos dados respectivos. Alguns alunos responderam corretamente, entretanto deram a resposta sem, contudo explicar como chegaram a ela, aproximadamente 65% , 55% e 70%, respectivamente, responderam satisfatoriamente, conforme figura 2.

Quando requeríamos a conversão da linguagem natural para figural os resultados foram regulares, no entanto bem melhor do que os apresentados na figura1, aproximadamente, 65% deles responderam corretamente, conforme figura 3.

Na conversão da linguagem figural para o registro numérico os resultados foram semelhantes aos apresentados na figura3, aproximadamente, 60% responderam corretamente, figura 4.

Identificamos que os alunos têm muitas dificuldades para trabalhar com representação gráfica. Entendem o enunciado do problema, mas ao fazerem a representação figural, atrapalham-se e às vezes não conseguem explicitar o que querem representar.

Num olhar sobre toda a pesquisa, os dados revelam que, na passagem de um sistema de representação para outra representação, ou seja: a mobilização simultânea de mais de um sistema de representação no decorrer do mesmo percurso, alguns deles, não conseguiam ver de forma clara como se processa essa mudança de representação de registro. Na tabela 1 expressamos esses resultados.

Tabela 1
Percentual de acertos nas atividades produzidas pelos alunos, de acordo com cada tipo de conversão.

Problemas	Conversão linguagem natural para registro numérico	Conversão registro numérico para linguagem natural	Conversão linguagem natural para registro figural	Conversão registro figural para numérico
1)		35%		
2)		40%		
3)	65%			
4)	55%			
5)	70%			
6)				
7)			65%	60%

Considerações finais

As discussões e as tomadas de decisões, durante a pesquisa, sempre ocorreram de forma conjunta, com o pesquisador e a professora da classe, assim como a escolha dos exercícios colocados nos instrumentos de avaliação.

Os dados revelam que alguns estudantes são capazes de efetuar, com certo grau de precisão (acerto), a conversão do registro dado em linguagem natural para o registro numérico, o mesmo não ocorre quando trabalhamos com outros tipos de conversão, como, por exemplo, os relatados nos problemas (1 e 2). Estas constatações também foram observadas por Almouloud (2007). Segundo esse autor, vários dos problemas de ensino e de aprendizagem, em alguns conteúdos, poderão não ser propriamente da matemática em si, mas de origem didática e linguística, pois:

> A coordenação dos diferentes registros de representação – escrita algébrica, as figuras geométricas, o discurso na língua natural ligados ao tratamento dos conhecimentos - não se opera espontaneamente, mesmo no curso de um ensino que mobilize uma diversidade de registros. [...], a dificuldade dos alunos para interpretar corretamente um problema e sua incapacidade em produzir a explicação de sua solução com um mínimo de vocabulário apropriado mostram sua limitação para entender os textos mais simples. Ao compreender o senso global, o aluno estará capaz de selecionar as informações principais e de revelar as relações das instruções e consequentemente a não cometer erros. (p. 130).

Observamos também que a falta de compreensão de conceitos e do domínio das diferentes formas de raciocínio prejudicarão ao fazerem as interpretações hermenêuticas e heurísticas dos enunciados, pois estes estão ligadas à mobilização e à articulação de uma variedade de registros que se pode utilizar.

Não obstante, em problemas que envolviam apenas a conversão do registro na linguagem natural para registro numérico, os resultados foram semelhantes aos encontrados por (Buehring, 2006, p.112-113 & Burato, 2006, p.121-122), e nos outros tipos de conversão: linguagem natural para registro figural, linguagem numérica para registro linguagem natural, os resultados obtidos foram semelhantes aos encontrados por (Lopes Júnior, 2006, p.75-76).

Limitações do Estudo

Apesar de acreditarmos que fizemos um experimento criterioso, isso não basta para afirmarmos que os resultados são gerais, finais, conclusivos. Não se pode ter a garantia que valha para um universo maior, dado que a amostra trabalhada foi muito pequena. Ás vezes precisa-se acrescentar algo mais numa pesquisa. Sempre existirão outros parâmetros a serem investigados. É prematuro afirmarmos que esses alunos não serão grandes profissionais no futuro, além disso, numa pesquisa nesse grau de aprendizagem, em geral, está-se buscando o desenvolvimento cognitivo, não se está interessado em descobrir gênios da Matemática. Encontrando-os, ótimo, no entanto a certeza de que temos é de que foi dado um primeiro passo em busca de poder contribuir para o processo ensino – aprendizagem.

Pesquisas Futuras

Nosso objetivo é dar continuidade a essa pesquisa, concluí-la e, posteriormente, investigar um universo maior de escolas públicas e privadas, trabalhando com um número maior de sujeitos. Também acrescentar como parâmetros a serem investigados: fator socioeconômico, grau de instrução dos pais, acompanhamento escolar, dentre outros.

Referências

Almouloud, S. Ag. (2007). Registros de Representação Semiótica e Compreensão de Conceitos Geométricos. In S. D. A, Machado (Org.). Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica (pp. 125-147). 3ª ed. Campinas/SP: Papirus.

Buehring, R.S. (006). Análise de dados no início da escolaridade: uma realização de ensino por meio dos registros de representação semiótica. 132 f. (Dissertação de Mestrado em Educação Científica e Tecnológica). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

Buratto, I. C. F. (2006). Representação semiótica no ensino da geometria: uma alternativa metodológica na formação de professores. 142 f. (Dissertação de Mestrado em Educação Científica e Tecnológica). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

Colombo, J. A. A. (2008). Representações semióticas no ensino: contribuições para reflexões acerca dos currículos de matemática escolar. 251 f. (Tese de Doutorado em Educação Científica e Tecnológica). Centro de Ciências da Educação, Centro de Ciências Biológicas, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis.

Damm, R. F. (2007). Representação, Compreensão e Resolução de Problemas Aditivos. In S. D. A. Machado (Org.). Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica (pp. 35-47). 3ª ed. Campinas/SP: Papirus.

Duval, R. (2007). Registro de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In S. D. A. Machado (Org.). Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica (pp.11-33). 3ª ed. Campinas/SP: Papirus.

_____. (1995). Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels: Suisse: Peter Lang.

Freitas, J. L. M. de.(2007). Registros de representação na produção de provas na passagem da aritmética para a álgebra. In S.D.A, MACHADO (Org.). Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica. (pp. 113-124). 3ª ed. Campinas/SP: Papirus.

Godino, J. D. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. ZDM: The International Journal on Mathematics Education, 39, (1-2), 127-135.

Lopes Júnior, D. (2006). Função do 1º grau: um estudo sobre seus registros de representação semiótica por alunos da 1ª série do ensino médio. 145 f. (Dissertação de Mestrado em Educação). Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campo Grande.

Passoni, J.C., Campos, T. M. M. (2007). Revisitando os Problemas Aditivos de Vergnaud de 1976. In S. D. A, MACHADO (Org.). Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica. (pp. 49-56). 3ª ed. Campinas/SP: Papirus.

Peirce, C. S. (2005). Semiótica. Tradução José Teixeira Coelho Neto. 3ª ed. São Paulo: Perspectivas.

Trilhos Matemáticos e a criação de problemas

Ana **Barbosa**
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Viana do Castelo, Portugal
anabarbosa@ese.ipvc.pt
Isabel **Vale**
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Viana do Castelo, Portugal
isabel.vale@ese.ipvc.pt

Resumo

Este estudo, realizado com 70 futuros professores do ensino básico, pretende compreender de que forma o contacto com uma matemática contextualizada no quotidiano permite o desenvolvimento de atitudes positivas face a esta disciplina e, simultaneamente, como pode potenciar o conhecimento matemático, bem como capacidades de resolução e formulação de problemas. O trabalho realizado pelos estudantes centrou-se na construção de um trilho matemático, através da formulação e resolução de tarefas baseadas em aspetos característicos da cidade de Viana do Castelo. Tendo em conta as características do estudo optou-se por uma metodologia de natureza qualitativa, seguindo um *design* exploratório. São apresentados alguns resultados decorrentes das produções dos alunos. Globalmente, pode-se afirmar que os futuros professores evidenciaram uma atitude mais positiva em relação à matemática, alargando a sua perspetiva acerca das conexões que se podem estabelecer entre a matemática e o quotidiano. Os alunos revelaram algumas dificuldades na fase de formulação das tarefas que incidiram principalmente em conseguir diversificar os tipos de tarefas bem como os temas matemáticos abordados, centrando-se na geometria.

Palavras chave: Trilhos matemáticos; Tarefas; Resolução e Formulação de problemas; Formação de professores.

Introdução

Há muitos estudantes que não gostam de matemática, ou não entendem o propósito de a estudar, provavelmente porque nunca tiveram a oportunidade de sentir a matemática e apreciá-la na sua plenitude, ou talvez porque não foram expostos a um ensino adequado e significativo. Mesmo quando os estudantes são capazes de entender a matemática, frequentemente, e por várias razões, não conseguem estabelecer conexões entre os diversos temas abordados e/ou usar diferentes ferramentas para abordar o mesmo problema.

Como formadoras de professores temos notado alguma falta de cultura científica e curiosidade nos jovens, esta que é uma das características mais importantes no ensino da Matemática. Este cenário é comum em muitos outros contextos e relaciona-se diretamente com os fracos desempenhos dos alunos em matemática, que, por norma, se traduzem numa falta de motivação para aprender esta disciplina, tradicionalmente identificada como sendo difícil. No entanto, acreditamos que a matemática é acessível a todos e está presente em tudo o que nos

rodeia e somente ações que mostram estas características da matemática poderão conduzir a uma grande consciencialização das pessoas em geral e dos estudantes em particular, e nos permitirão inverter a desmotivação e a imagem negativa da matemática.

Com este trabalho, pretende-se promover o contacto com uma matemática contextualizada, a partir de características do quotidiano, ao caminhar e analisar a cidade onde vivemos, conectando alguns dos seus detalhes com tarefas de exploração e investigação em matemática escolar. A principal finalidade é promover uma nova atitude em relação à matemática, através da observação e exploração do ambiente urbano, desenhando, em simultâneo, o currículo de matemática para o ensino básico. Por outro lado, é uma oportunidade dos alunos formularem problemas, o que implica tomar decisões sobre o que considerar e o que ignorar na situação em estudo, aplicando e mobilizando os conhecimentos matemáticos pessoais, perante uma situação, neste caso particular, realista.

O professor e as tarefas

Na aula de Matemática, a aprendizagem é fortemente dependente do professor e das tarefas que são propostas aos alunos (e.g. Doyle, 1988; Stein & Smith, 1998). Muitas das fragilidades que estes apresentam ao longo da sua aprendizagem, são devidas às conceções e atitudes dos professores, que influenciam as suas ações na sala de aula, mas também às manifestas lacunas no conhecimento matemático, assim como à falta de estratégias de ensino inovadoras e eficazes.

As tarefas que os professores selecionam para as suas aulas são um importante mediador entre o conhecimento e os alunos no processo de ensino e aprendizagem da matemática. Essas tarefas, para além de terem o papel supracitado, caracterizam e evidenciam o trabalho do professor (e.g. Stein & Smith, 1998). A orientação do questionamento e da discussão, bem como a reflexão sobre as ideias abordadas, influenciam a aprendizagem dos alunos, mas isto apenas sucede quando os professores têm um bom conhecimento do assunto que ensinam, como o ensinam e quando o ensinam. Assim, é importante que desenvolvam certas capacidades, com base num profundo conhecimento matemático e didático dos assuntos, permitindo-lhes construir, adaptar, e explorar boas tarefas matemáticas para a sala de aula. Por um lado, os professores devem propor tarefas que os ajudem a motivar os seus alunos a aprender e a desenvolver o seu conhecimento matemático, por outro lado devem ter também cuidados com as estratégias de ensino a que recorrem e com o modo como apresentam e exploram essas tarefas. É, neste sentido, fundamental que os professores possam tirar proveito de todo o potencial contido numa tarefa e, para isso, precisam de ter oportunidades para as explorar e resolvê-las da mesma forma que pensam explorá-las com os seus próprios alunos.

A perspetiva prescritiva sobre a resolução de problemas, reduzindo-a ao ensino de estratégias, tem-se revelado insuficiente. Torna-se necessário encontrar alternativas. Os alunos devem ser envolvidos em processos de descoberta e invenção, refinamento de métodos e formas de representação, na dúvida e na crítica, na procura de maneiras diferentes para utilizar o conhecimento matemático, e ser persistentes durante a resolução de problemas. As tarefas propostas pelo professor devem permitir aos alunos definir as suas estratégias, discutir e promover a comunicação matemática, terminando com uma síntese das principais ideias aprendidas, e este é um trabalho que se pretende seja feito de forma colaborativa pelos alunos e o professor. Considera-se, deste modo, primordial para atingir esse objetivo optar por um ensino exploratório em que o professor promova condições para que os alunos descubram e construam o seu próprio conhecimento.

A construção de tarefas é necessária, principalmente quando os professores não dispõem de recursos matemáticos adequados, quando o currículo é alterado ou quando há necessidade de introduzir novos problemas ou novas abordagens à resolução de problemas. A compreensão total de como e porquê as tarefas matemáticas são usadas na formação de professores dá-nos uma perspetiva das qualidades que uma tarefa deve ter. No entanto, não nos proporciona automaticamente a capacidade de desenhar *tarefas ricas* e *desafiantes.* Isto requer um interface entre a teoria e a prática, entre o pretendido e o real, entre a tarefa e o aluno. O processo de conceção de tarefas matemáticas é recursivo e aplica-se à criação de novas tarefas, assim como à adaptação (ou aperfeiçoamento) de tarefas já existentes (Liljedahl & Sriraman, 2006). Sierpinska (2003) refere-se à conceção, análise e teste empírico de tarefas matemáticas, seja para fins investigativos ou de ensino, como uma das responsabilidades mais importantes da educação matemática.

Resolução e formulação de problemas

Nas últimas décadas, a resolução de problemas tem desempenhado um papel importante um pouco por todo o mundo como um eixo organizador do currículo de matemática. Aprendizagem matemática dos alunos deve incluir mais do que as tarefas de rotina, deve ser enriquecido com tarefas desafiadoras, como a resolução de problemas. Isto é de grande importância, não só para os alunos, mas também para os professores, especialmente se essas tarefas levam a compreensão estrutural de conceitos matemáticos.

As tarefas centradas na resolução e/ou formulação de problemas podem ter grande potencial de aprendizagem, contribuindo para a aquisição de conhecimentos matemáticos mas também para o desenvolvimento de importantes capacidades. A formulação de problemas pode ser uma estratégia poderosa para desenvolver capacidades de resolução de problemas e de ter bons resolvedores de problemas, por outro lado, a formulação de problemas matemáticos é necessária para se ser um bom resolvedor de problemas. Ao aprender a resolver problemas e ao aprender através da resolução de problemas, os alunos têm inúmeras oportunidades para estabelecer conexões entre ideias matemáticas e desenvolver a sua compreensão conceptual.

O processo de criação de problemas tem sido definido de várias formas e com termos diferentes, mas, na essência, os autores referem-se quase sempre aos mesmos aspetos. Para além de criar são também usados termos como inventar, propor, formular. Silver (1997) considera que a formulação de problemas implica gerar novos problemas ou reformular um determinado problema. Stoyanova (1998) considera a formulação de problemas como o processo pelo qual, com base na experiência matemática, os alunos constroem interpretações pessoais de situações concretas e formulam-nos como problemas matemáticos significativos. Neste trabalho, consideraremos formulação de problemas matemáticos no sentido de Silver e Stoyanova. A atividade de formulação de problemas é para o aluno a problematização de situações, usando a sua própria linguagem, experiências e conhecimento. Esta atividade tem sido uma componente bastante negligenciada nas aulas de matemática e, em particular, no estudo da resolução de problemas, mas é crucial na aprendizagem da matemática.

Stoyanova (1998) identificou três categorias de formulação de problemas que os alunos podem experienciar, que proporcionam oportunidades para se envolverem na atividade matemática e para gerar e resolver problemas matemáticos: (a) situações livres; (b) situações semi-estruturadas; e (c) situações estruturadas. Nas situações livres, os alunos formulam problemas sem qualquer restrição. Em situações semi-estruturadas, é pedido que os alunos

formulem problemas semelhantes a outros já existentes ou que escrevam problemas com base em figuras e diagramas específicos. Nas situações estruturadas, os alunos apresentam problemas, reformulando outros já resolvidos ou alterando as condições ou as questões de uma determinada situação.

Brown e Walter (2005) propõem duas estratégias de formulação de problemas que os alunos podem usar. A primeira estratégia é *aceitando os dados*, quando os alunos partem de uma situação estática, que pode ser uma expressão, uma tabela, uma condição, uma imagem, um diagrama, uma frase, um cálculo ou simplesmente um conjunto de dados, a partir da qual formulam questões de modo a ter um problema, sem mudar a situação de partida. A segunda estratégia, *E se em vez de*, consiste em estender uma dada tarefa alterando o que é dado. A partir da informação contida num problema, identifica-se qual é a questão, o que é conhecido, o que é pedido e quais as limitações que a resposta ao problema envolve. Modificando um ou mais destes aspetos ou questões, podem gerar-se novas e mais questões.

Contextos onde os alunos têm a oportunidade de resolver problemas matemáticos, utilizando diversas estratégias, e formular os seus próprios problemas, permitem-lhes estar envolvidos, aumentar a sua motivação e incentivá-los a investigar, para tomar decisões, para procurar padrões e conexões, generalizar, comunicar e identificar alternativas. Para além disso, a formulação de problemas proporciona aos professores informações importantes sobre como os alunos compreendem e utilizam os conceitos e processos matemáticos, permitindo também identificar quais as suas atitudes em relação à matemática. Em particular, permite que os alunos reduzam os níveis de ansiedade sobre a sua aprendizagem da matemática, ao mesmo tempo que ajudam a promover um maior nível de criatividade (Brown & Walter, 2005).

Trilhos Matemáticos

De acordo com Kenderov et al. (2009), a sala de aula é apenas uma dos 'casas' onde a educação tem lugar. O processo de aquisição de informação e o desenvolvimento do conhecimento dos alunos ocorrem de muitas formas e em muitos lugares. O recurso ao meio envolvente como ambiente de sala de aula pode promover nos alunos atitudes positivas e uma motivação adicional para o estudo da matemática, permitindo-lhes perceber a aplicabilidade da matemática.

Um *trilho matemático* consiste numa "sequência de paragens ao longo de um percurso pré-planeado, no qual os alunos estudam matemática no ambiente que os rodeia" (Cross, 1997, p. 38) e oferece experiências concretas de aprendizagem para qualquer um dos conceitos matemáticos ensinados no currículo da matemática escolar. Reforça-se também que um trilho matemático evidencia um enorme potencial para despoletar experiências de aprendizagem em todas as idades. Este tipo de atividade, entre outras características, permite criar um espaço de reunião informal centrado na aprendizagem da matemática e, simultaneamente, abordar a resolução de problemas, estabelecer conexões, motivar a comunicação e a aplicação de outras capacidades num contexto significativo (Richardson, 2004). Há um grande leque de oportunidades na utilização do meio envolvente na orquestração de experiências de aprendizagem, não só em matemática, mas também através da integração de conhecimentos de outras áreas curriculares e não curriculares.

Uma vez que ocorre fora da sala de aula, um trilho matemático cria uma atmosfera de aventura e exploração e, ao mesmo tempo, dá aos alunos a possibilidade de resolver e apresentar problemas. Ao aprender a resolver problemas e pela aprendizagem através da resolução de

problemas, os alunos poderão mais facilmente articular ideias matemáticas e desenvolver uma compreensão conceptual, tendo também a oportunidade de desenvolver seu pensamento criativo. Os professores têm o principal papel na concretização destes objetivos, porque têm o poder de libertar o potencial criativo, inovador e crítico dos jovens estudantes. Se acreditamos que a aprendizagem da matemática é fortemente dependente do professor e que as tarefas de resolução e formulação de problemas suscitam aprendizagens significativas, é necessário, portanto, proporcionar aos futuros professores experiências diversas, para que desenvolvam suas capacidades neste âmbito.

A formação de professores deve promover uma nova visão sobre o conhecimento matemático e sobre o ensino, permitindo que os futuros professores experimentem as mesmas tarefas que se espera que utilizem com seus próprios alunos. Para superar alguns dos problemas referidos no início deste texto, foi desenvolvido um projeto chamado "Trilhos matemáticos" e que apresentamos nesta comunicação.

Metodologia

Tendo por base os objetivos deste trabalho adotamos uma metodologia qualitativa, com um design exploratório. Os participantes foram setenta alunos de um curso de formação de professores do ensino básico.

Durante as aulas da unidade curricular Didática da Matemática foram proporcionadas aos alunos várias experiências centradas na resolução e formulação de problemas e problematização (Silver, 1997), bem como noutros processos matemáticos, como a comunicação, o raciocínio e as conexões matemáticos (NCTM, 2000). Foi proposta a estes estudantes a realização de um trabalho, com a designação de "Trilho Matemático", que consistiu na definição de um percurso numa artéria da cidade de Viana do Castelo, que integrasse várias tarefas, adequadas ao ensino básico, que tivessem por base elementos característicos da cidade (e.g. monumentos, janelas, jardins, mapas, azulejos, artesanato). Durante as aulas os alunos puderam partilhar as fotografias que recolheram, e que motivaram a formulação das tarefas, tendo sido objeto de discussão. Neste trabalho usaram maioritariamente a estratégia de formulação de problemas aceitando os dados (Brown & Walter, 2005), já que partiam de uma situação estática, que foi uma imagem, a partir da qual colocaram questões ou formularam problemas, sem mudar o que era apresentado. As tarefas foram, numa fase final, sequenciadas sob a forma de um trilho a ser concretizado com alunos do ensino básico. Como complemento, apresentaram ainda um relatório com a resolução de todas as propostas apresentadas.

Os dados foram recolhidos de uma forma holística, descritiva e interpretativa e incluem observações em sala de aula e, principalmente, o trabalho escrito realizado pelos alunos. Estas evidências foram recolhidas e analisadas conjuntamente pelas duas professoras da unidade curricular supracitada, de acordo com alguns critérios como: criatividade, diversidade e rigor do conteúdo matemático.

A nossa principal preocupação era se o trilho matemático desenhado permitia que os futuros professores identificassem contextos reais e ricos que contribuíssem para que formulassem e resolvessem problemas, que pudessem ser usados com alunos do ensino básico. Ao mesmo tempo, era também importante perceber se eles evidenciavam motivação, face à matemática, ao realizar este tipo de trabalho fora da sala de aula.

Alguns resultados

Tendo já sido lecionadas algumas aulas da unidade curricular em que se integrou este trabalho, os alunos, organizados em grupos, começaram por selecionar uma das artérias da cidade. Autonomamente, recolheram registos fotográficos de elementos característicos de Viana do Castelo que consideraram ter potencial para realizar explorações de natureza matemática, como edifícios, janelas, jardins, azulejos, entre outros. Depois de um período de reflexão dentro de cada grupo, foram analisadas as primeiras propostas nas aulas de Didática da Matemática, de forma a perceber a adequação do percurso, a selecionar as fotografias com maior potencial de exploração e a refletir sobre possíveis tarefas que poderiam ser formuladas.

Passamos a apresentar alguns exemplos das tarefas criadas pelos alunos.

Exemplo 1

Olha à tua volta e procura o sinal com o nome da rua em que te encontras. Tira uma fotografia.

1. *Se colocares as letras num saco, qual será a letra mais provável que podes tirar*?
2. *E a menos provável?*

Exemplo 2

Consegues encontrar uma loja chamada "Opipaua"?
Encontra tantas formas geométricas quantas consigas no ferro forjado por cima da loja.

Exemplo 3

No Jardim Marginal podes encontrar um papagaio perto do Café Girassol.
Observa a figura geométrica e tira uma fotografia.
Usa dois fios para marcar as diagonais. Qual é a sua posição relativa?
Quantos triângulos diferentes consegues identificar marcados pelas diagonais? Classifica-os.

Exemplo 4

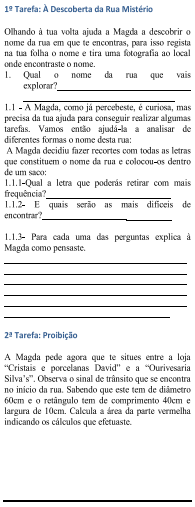
Vai até à Praça da República. Lá, vais encontrar um chafariz.

1. *Sabendo que a menina que está na borda do chafariz mede 1,55m, faz uma estimativa da altura do chafariz.*
2. *Como poderia medir o perímetro do chafariz. Explica como pensaste.*

Exemplo 5

Estás na Avenida Capitão Gaspar de Castro. Se te voltares de costas para a Escola Superior de Educação que edifício observas?
Neste hotel podes ver que o 1º andar está orientado para a esquerda, o 2º para a direita, o 3º para a esquerda e o 4º para a direita. Imagina que esta edifício tinha 20 andares, qual seria a orientação do 16º?
Consegues encontrar um padrão?

Na fase final do trabalho, já depois de selecionarem as fotografias e as tarefas formuladas, os futuros professores organizaram-nas sob a forma de um percurso, que designamos de trilho matemático, com o propósito de ser concretizado por alunos do ensino básico.



1º Tarefa: À Descoberta da Rua Mistério

Olhando à tua volta ajuda a Magda a descobrir o nome da rua em que te encontras, para isso regista na tua folha o nome e tira uma fotografia ao local onde encontraste o nome.

1. Qual o nome da rua que vais explorar?_____

1.1 - A Magda, como já percebeste, é curiosa, mas precisa da tua ajuda para conseguir realizar algumas tarefas. Vamos então ajudá-la a analisar de diferentes formas o nome desta rua:
A Magda decidiu fazer recortes com todas as letras que constituem o nome da rua e colocou-os dentro de um saco:
1.1.1-Qual a letra que poderás retirar com mais frequência?_____
1.1.2- E quais serão as mais difíceis de encontrar?_____

1.1.3- Para cada uma das perguntas explica à Magda como pensaste.
_____
_____
_____
_____
_____
_____

2º Tarefa: Proibição

A Magda pede agora que te situes entre a loja "Cristais e porcelanas David" e a "Ourivesaria Silva's". Observa o sinal de trânsito que se encontra no início da rua. Sabendo que este tem de diâmetro 60cm e o retângulo tem de comprimento 40cm e largura de 10cm. Calcula a área da parte vermelha indicando os cálculos que efetuaste.

_____

Figura 1. Trilho organizado por um grupo de alunos

A apresentação do trilho ficou ao critério de cada grupo, tendo surgido estruturas bastante diferentes que variaram entre mapas, panfletos, até estruturas mais tradicionais similares a uma ficha de trabalho.

Discussão e conclusões

Na nossa perspetiva este trabalho contribuiu para que os nossos futuros professores evidenciassem uma atitude mais positiva em relação à matemática e para que adquirissem uma visão mais ampla das possíveis conexões que podem ser estabelecidas entre a matemática e o mundo que nos rodeia. Os trilhos construídos constituíram uma forma de conhecer melhor a cidade, analisando-a através de um "olho matemático", mas também para conhecer um pouco mais da sua história e arquitetura.

A concepção das tarefas não foi um processo fácil, a diferentes níveis, nomeadamente do ponto de vista dos conhecimentos matemáticos envolvidos, quer do grau de desafio, quer também da diversidade na tipologia das tarefas. Globalmente, os alunos identificaram os conceitos matemáticos mais óbvios aquando da formulação dos problemas, estando principalmente relacionados com a geometria elementar. Esta tendência, na nossa opinião, deve-se ao facto de os elementos envolvidos serem mais de natureza visual. Apesar de se ter referido que poderiam propor vários tipos de tarefas (e.g. exercícios, problemas, explorações, desafios), insistiram principalmente em problemas.

A fase de discussão conduzida na aula de Didática da Matemática, e que antecedeu a organização do trilho final, resultou numa melhor compreensão de alguns dos aspetos relacionados com a construção de uma tarefa, como: adequação aos alunos a quem se dirige; capacidades e conceitos matemáticos que permite desenvolver; potencialidades de exploração; utilização de uma linguagem clara.

Os alunos tornaram-se gradualmente mais conscientes e mais atentos à matemática que os rodeia no dia a dia, tendo servido este trabalho para que desenvolvessem o seu "olho matemático", tecendo comentários como "nunca olharei da mesma maneira para uma janela ou para o pavimento" ou até mesmo "gostaria de ter aprendido este tipo de matemática". Globalmente pode-se dizer que estiveram sempre bastante envolvidos e dispostos a superar as dificuldades com que se depararam, percendo as vantagens de um trabalho desta natureza na abordagem de uma matemática significativa e motivadora.

Referências

Brown, S. & Walter, M. (2005). *The art of problem posing*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Cross, R. (1997). Developing Maths Trails. *Mathematics Teaching,* 158, 38–39.

Doyle, W. (1988). Work in Mathematics Classes: The context of students' thinking during instruction. *Educational Psychologist, 23*(2), 167-180.

Kenderov, P., Rejali, A., Bartolini Bussi, M., Pandelieva, V., Richter, K., Maschietto, M., Kadijevich, D., & Taylor, P. (2009). Challenges Beyond the Classroom—Sources and Organizational Issues. In E. Barbeau & P. Taylor (Eds.), *Challenging Mathematics In and Beyond the Classroom – New ICMI Study Series 12* (pp. 53-96). Springer.

Liljedahl, P. & B. Sriraman, B. (2006). Musings on mathematical creativity. *For The Learning of Mathematics*, *26*, 17-19.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Richardson, K. (2004). Designing math trails for the elementary school. *Teaching Children Mathematics*, 11, 8-14.

Sierpinska, A. (2003). *Research in mathematics education – through a keyhole.* Plenary Address CMESG 2003 Conference.

Silver, E. (1997). Fostering creativity through instruction rich in mathematical problem solving and problem posing. *ZDM*, 3, 75-80.

Stein, M. & Smith, M. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School, 3*(4), 268-275.

Stoyanova, E. (1998). Problem posing in mathematics classrooms. In A. McIntosh & N. Ellerton (Eds.), *Research in Mathematics Education: a contemporary perspective* (pp. 164-185). Edith Cowan University: MASTEC.