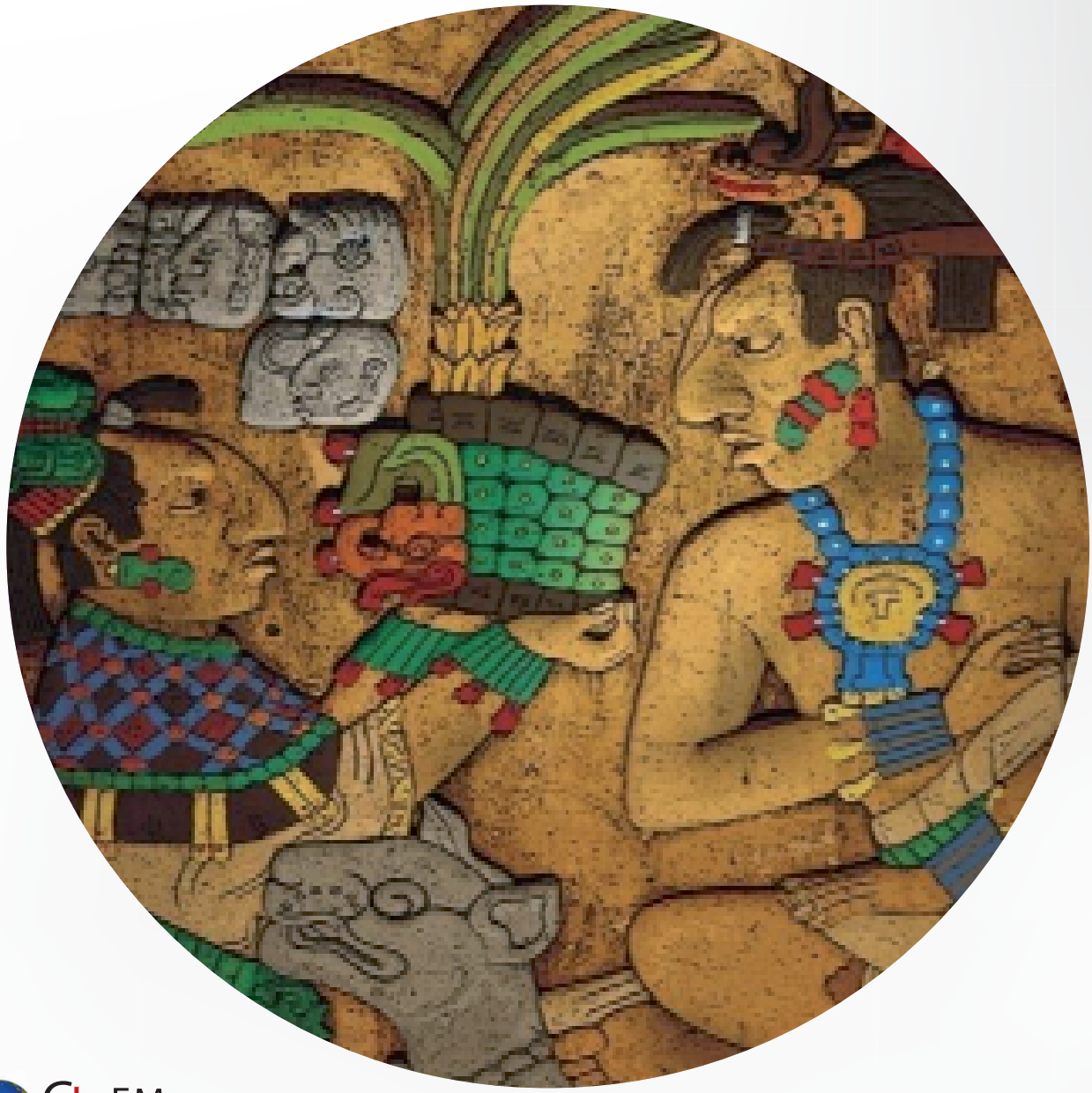
Educación Matemática en las Américas 2015

Volumen 13: Nuevos Enfoques y Relación con Otras Áreas



CIAEM CME
Fundado Founded: 1961

© 2015
Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM)
Paseo de la Reforma 383., 7° Piso,
Colonia Cuauhtémoc, Delegación Cuauhtémoc,
México D.F. CP 06500, MÉXICO

www.ciaem-iacme.org
ciaem.iacme@gmail.com

Educación Matemática en las Américas 2015
Volumen 13: Nuevos Enfoques y Relación con Otras Áreas
Editado por Patrick (Rick) Scott y Ángel Ruiz
Colaboradora: Sarah González.

ISBN Volumen: 978-9945-603-10-1
ISBN Obra Completa: 978-9945-415-97-1

El Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM) es una organización fundada en 1961 asociada a la International Commission on Mathematical Instruction. Busca potenciar la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en las Américas.

Se permite la reproducción de cualquier parte de este libro para fines no lucrativos siempre que se consignen los créditos a los autores y al Comité Interamericano de Educación Matemática.

Para citar este libro y este volumen:

Comité Interamericano de Educación Matemática (2015). *Educación Matemática en las Américas: 2015. Volumen 13: Nuevos Enfoques y Relación con Otras Áreas.* Editores: Patrick (Rick) Scott y Ángel Ruíz. República Dominicana.

Tabla de Contenidos

Presentación i-iii

A contribuição da Teoria dos Campos Conceituais às pesquisas em Educação Matemática: um olhar sobre estudos realizados no EDUMATEC-UFPE 1-14
Priscila Ferreira de Lima-BR, Rita Batista-BR

A importância de uma educação autônoma 15-25
Janile Menezes-BR, Alice Assis-BR

A inter-relação dos conteúdos matemáticos com as habilidades musicais no desenvolvimento do processo educacional: uma conexão possível 26-35
Maria Christina Moraes-BR, Maria Camargo-BR, Guilherme Moraes-BR

A utilização dos laboratórios de matemática no ensino médio integrado ao profissional 36-44
Marli Flores Melo-BR, Celio da Cunha-BR

Algunas tensiones entre las matemáticas escolares y la vida real, una mirada desde el enfoque socio político de la Educación Matemática. 45-51
Dolly Mora Villota-CO, Martha Clavijo Riveros-CO

Algunos aportes para la evaluación desde el enfoque de la Educación Matemática crítica y la generación de ambientes de aprendizaje 52-62
Claudia Maria Arias-CO, Martha Clavijo Riveros-CO, Jose Torres-CO

Contribuições das teorias da aprendizagem para a Educação Matemática: três aportes teóricos 63-74
Betine Diehl Setti-BR, Neiva Grando-BR

Despertando a vocação científica para a Matemática 75-84
Cristiane Hauschild-BR, Ieda Giongo-BR, Viviane Backendorf-BR, Rosana Zanon-BR, Márcia Rehfeldt-BR

Diferentes significados de los signos indo-arábigos durante el transcurso del aprendizaje 85-94
María Martínez de la Mora-MX

Educação Matemática e teatro: um panorama das pesquisas brasileiras 95-104
Hannah Lacerda-BR

Educación artística y matemática en el contexto de las ciencias 105-115
Patricia Camarena Gallardo-MX, Luz María González Álvarez-MX

Elementos de un ambiente educativo en prácticas matemáticas. Sistematización de una experiencia 116-127
Jorge Orlando Lurduy Ortegón-CO, Jairo Nelson Pulido Gómez-CO

Ensino e aprendizagem em uma nova perspectiva da educação: um breve relato de experiência no ensino de porcentagem 128-132
Marlon Baptista-BR

Explorando os museus de ciências para o ensino da Matemática 133-142
Virgínia Cardoso-BR

Formação de investigadores a partir de experimentos interativos, simulações e uso de aplicativos computacionais 143-152
María Madalena Dullius-BR, Italo Neide-BR, Marli Quartieri-BR, Lucy de Alcantara-BR

Insubordinação criativa de educadoras matemáticas evidenciadas em suas narrativas 153-163
Celi Aparecida Espasandin Lopes-BR, Beatriz D'Ambrosio-US

Interação social em aulas de Matemática 164-173
Neiva Grando-BR

Mategrama, una excursión matemática al maravilloso mundo del I Ching 174-182
Mariana Talamonti Baldasarre-AR

Música e Matemática: novos projetos e perspectivas para uma abordagem interdisciplinar 183-194
Eduardo Nespoli-BR, Chrisley Ribeiro Camargos-BR

Novas possibilidades de ensino de Matemática com avaliação integrada 195-204
Ademir Basso-BR, Maria José Cáceres-ES, Lindemberg Massa-BR, Pilar Azcárate Goded-ES

Novo enfoque no ensino da Matemática relato de experiência: dimensionar, calcular e construir uma ponte em sala de aula 205-211
Marlon Baptista-BR

O ensino de Matemática nos primeiros anos de escolarização 212-221
Luciana Lacanallo Arrais-BR, Silvia Moraes-BR, Augusta Padilha-BR, Juliana Vignoto-BR

Reflexões sobre educação financeira no ensino fundamental 222-233
Neiva Grando-BR, Lidinara Scolari-BR

The role of Mathematics in vocational education curricula: a comparative study 234-242
Ana Lúcia Braz Dias-BR

Uma experiência do uso da ludicidade no ensino de frações nas séries iniciais 243-250
Nair Souza-BR, Luciana Scarin Freitas-BR, Lucila Scarin Correia-BR

Uma investigação sobre a abordagem de situações financeiras envolvendo taxas de juros no Brasil em um curso pós-médio 251-262
Ivail Muniz-BR, Samuel Jurkiewicz-BR

Una propuesta didáctica para la noción de indeterminación 263-272
Fabio Cortés-CO, René Londoño-CO

Vinculación de la matemática con administración mediante problemas contextualizados 273-281
Verónica Neira Fernández-PE, Jesús V. Flores Salazar-PE, Patricia Camarena-MX

Presentación

La **XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática** realizada en Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México, del 3 al 7 de mayo del 2015, contó con la participación de cerca de 1000 personas de 23 países y la presentación de más de 500 trabajos (conferencias plenarias y paralelas, mesa redonda, minicurso, diálogos, comunicaciones, talleres y posters) Esta fue una reunión regional de la *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI). El CIAEM es la organización afiliada al ICMI con mayor antigüedad. Su creación se remonta al año 1961 cuando se realizó la primera conferencia en Bogotá, Colombia.

Un gran nivel científico dominó los trabajos, en un ambiente cultural muy especial, con una gran hospitalidad por parte de los colegas de Chiapas.

Los conferencistas plenarios fueron Michèle Artigue (Francia), Carlos Vasco (Colombia), Diane Briars (USA), Abraham Arcavi (Israel-Argentina), Celia Hoyles (Reino Unido), María Teresa Tatto (USA) y Alicia Ávila (México). Ellos también desarrollaron *Diálogos* especiales, espacios adicionales de conversación e intercambio.

Una mesa plenaria organizada por la *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe* contó con la participación de Carlos Sánchez (Cuba), Nelly León (Venezuela), Edison de Faría (Costa Rica), Luis Carlos Arboleda y Jhony Villa (Colombia).

El evento tuvo conferencias paralelas y minicursos impartidos por académicos invitados, entre ellos: Gabriele Kaiser (Alemania), Richard Noss (Reino Unido), Manuel Santos (México), Gert Schubring (Alemania), José Chamoso (España), José Luis Lupiáñez (España), Arthur Powell (USA), Alessandro Ribeiro (Brasil), Roberto Araya (Chile), Gilberto Obando (Colombia), Uldarico Malaspina (Perú).

Los dos temas principales fueron la *Preparación de docentes que enseñan matemáticas* y el *Uso de tecnologías en la Educación Matemática*.

El congreso tuvo el valioso patrocinio de varias instituciones internacionales y nacionales: International Commission on Mathematical Instruction; Universidade Luterana do Brasil; Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas, y Centro de Investigación y Formación en Educación Matemática de la Universidad de Costa Rica; Secretaría de Educación del Estado de Chiapas; Universidad del Valle de México; Sindicato de Trabajadores de la Educación de México; Centro Regional de Formación Docente e Investigación Educativa (CRESUR); Oficina de Convenciones y Visitantes de Chiapas; Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas de México; Escuela Normal Superior de Chiapas; Universidad de Costa Rica; HP; CASIO; y EduSystems.

Desde el 2007 el CIAEM ha logrado, entre otras cosas:

- Potenciar la calidad académica en los trabajos, la organización eficiente y la proyección de las conferencias interamericanas
- Consolidar la publicación de trabajos seleccionados de la Conferencias en la revista *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* (editada en Costa Rica)

- Fortalecer la relación del CIAEM con la comunidad internacional de Educación Matemática, especialmente con el ICMI y la *International Mathematical Union*.
- Crear y consolidar la Medalla *Luis Santaló*
- Apoyar el desarrollo del *Capacity and Networking Project* del ICMI en América Latina (Costa Rica 2012, Perú 2016)
- Auspiciar la creación y las actividades de la *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe*
- Apoyar la organización del *I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe*, celebrado en Santo Domingo, República Dominicana, en noviembre del 2013
- Consolidar el uso intenso de tecnologías de la comunicación en todas las actividades del CIAEM
- Crear una comunidad virtual del CIAEM de gran proyección tanto a través de su sitio web principal como de su página en Facebook
- Fundar en México el *Comité Interamericano de Educación Matemática* con personalidad jurídica para atender los múltiples compromisos formales que posee
- Traducir al español y publicar algunos textos del NCTM relacionados con la temática *Principles to actions* y continuar una línea importante de colaboración con el *National Council of Teachers of Mathematics* de los USA

En la XIV CIAEM fue confirmada la decisión de tener la XV CIAEM en Medellín, Colombia, en el 2019. Será desde hará 58 años la segunda ocasión en que se realizará una CIAEM en tierra colombiana.

CIAEM es el evento internacional más importante en Educación Matemática en América Latina. Constituye un punto de referencia para investigadores, docentes y estudiantes en todo el continente.

La mayoría de los textos de base para las presentaciones plenarias o paralelas ha sido incluidas en el número 15 de los *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* que se edita en Costa Rica: http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem.

Las comunicaciones, talleres, minicursos y posters han sido incluidas en esta colección digital de volúmenes que titulamos *La Educación Matemática en las Américas: 2015.* Los trabajos se han organizado de la siguiente manera:

- Volumen 1 *Educación Matemática en las Américas 2015: Formación Inicial para Primaria*
- Volumen 2 *Educación Matemática en las Américas 2015: Formación Inicial para Secundaria*
- Volumen 3 *Educación Matemática en las Américas 2015: Formación Continua*
- Volumen 4 *Educación Matemática en las Américas 2015: Uso de Tecnología*
- Volumen 5 *Educación Matemática en las Américas 2015: Etnomatemática y Sociología*
- Volumen 6 *Educación Matemática en las Américas 2015: Currículum, Evaluación y Competencias*
- Volumen 7 *Educación Matemática en las Américas 2015: Investigación*
- Volumen 8 *Educación Matemática en las Américas 2015: Estadística y Probabilidad*
- Volumen 9 *Educación Matemática en las Américas 2015: Geometría*
- Volumen 10 *Educación Matemática en las Américas 2015: Álgebra y Cálculo*

- Volumen 11 *Educación Matemática en las Américas 2015: Educación Primaria*
- Volumen 12 *Educación Matemática en las Américas 2015: Historia y Epistemología*
- Volumen 13 *Educación Matemática en las Américas 2015: Nuevos Enfoques y Relación con Otras Áreas*
- Volumen 14 *Educación Matemática en las Américas 2015: Necesidades Especiales*
- Volumen 15 *Educación Matemática en las Américas 2015: Resolución de Problemas*
- Volumen 16 *Educación Matemática en las Américas 2015: Modelación*
- Volumen 17 *Educación Matemática en las Américas 2015: Talleres y Minicursos*
- Volumen 18 *Educación Matemática en las Américas 2015: Posters*

El CIAEM desea agradecer a todos los autores que presentaron sus trabajos en la XIV CIAEM y que incluimos en esta colección de volúmenes. Y a todos los revisores, directores de tema, y colaboradores que participaron en la revisión científica de las ponencias de este magno evento.

La organización detallada y la edición en sus diversas dimensiones fue realizada por nuestro segundo vicepresidente Patrick Scott (Estados Unidos) quien dedicó un esfuerzo extraordinario para tener estas *Memorias* disponibles. Quiero expresar en nombre de nuestra organización nuestro agradecimiento a Rick. Nuestra compañera Sarah González (Vocal para El Caribe) se encargó de tramitar su registro en República Dominicana que contó con el apoyo de la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra de ese país, a las que también expresamos nuestra gratitud.

Los enlaces de estos volúmenes se han colocado en las páginas web oficiales del CIAEM.

Esperamos que la publicación de todos estos trabajos contribuya al progreso de la investigación y la acción de aula en la Educación Matemática de las Américas.

Angel Ruiz
Presidente
Comité Interamericano de Educación Matemática

A contribuição da Teoria dos Campos Conceituais às pesquisas em Educação Matemática: um olhar sobre estudos realizados no EDUMATEC-UFPE

Priscila **Ferreira de Lima**
Universidade Federal de Pernambuco
Brasil
prililafl@gmail.com
Rita **Batista**
Universidade Federal de Pernambuco
Brasil
rita_mat_@hotmail.com

Resumo

O presente artigo faz um mapeamento de pesquisas realizadas e publicadas nas dissertações de mestrado da Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica (EDUMATEC) da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE) que utilizaram a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) idealizada por Gerárd Vergnaud. A exploração envolve as dissertações publicadas entre 2010 e 2013 na linha de Processos de Ensino e Aprendizagem em Educação Matemática e Científica (PEAEMC) presente universidade. Inicialmente abordamos a essência da teoria em questão, as principais concepções e conceitos que a fundamentam. Focaremos dos campos conceituais, na tríade dos significados, invariantes e representações simbólicas. Abordaremos os problemas de estrutura aditiva e multiplicativa e os conceitos do "teoremas-em-ação". Em seguida exploraremos as dissertações que versam sobre os mais variados temas matemáticos, à luz da Teoria dos Campos Conceituais. Por fim, mas, não menos importante, faremos uma abordagem como tal teoria contribui com as pesquisas em Educação Matemática do EDUMATEC-UFPE.

Palavras chaves: EDUMATEC, Teoria dos Campos Conceituais, Estudos, Educação Matemática, Dissertações.

Introdução

Este artigo surge da inquietação de aprofundar os estudos sobre a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Gérard Vergnaud, bem como de examinar sua aplicabilidade e contribuição nas pesquisas em Educação Matemática. Como alunas do mestrado da Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica (EDUMATEC) da Universidade Federal de Pernambuco (UFPE), buscamos descobrir dentro do universo próximo à nossa realidade, as contribuições da teoria a partir das dissertações referentes ao período de 2010 a 2013 publicadas na plataforma eletrônica oficial do EDUMATEC. Foi escolhida a linha de Processos de Ensino e Aprendizagem em Educação Matemática e Científica (PEAEMC), em função dos temas terem mais similitudes com a abordagem teórica que procuramos estudar.

Para tanto, nos embasaremos primordialmente em Vergnaud (1986, 2011), Pessoa (2009), para considerar os conceitos que cercam a TCC, em especial a tríade constituída pelos significados, invariantes e representações simbólicas, adentrando nos problemas de estrutura aditiva e multiplicativa e por fim pontuando também os teoremas-em-ação.

Como o próprio nome antecipa, a TCC considera que os conceitos e como etes são constituídos, se definem a partir de uma interação complexa entre um conjunto interligado de conceitos e um conjunto de situações diversas referentes a esses conceitos, como afirma Pessoa (2009) citando Vergnaud (1986). No tocante à sua teoria, ao determinar *teorema-em-ação* como teoremas lembrados e associados pelas crianças como uma primeira base a ser aprimorada adiante, Vergnaud (1986) afirma que as crianças tomam os problemas de forma matemática (ou não) que tratam do real, com elementos e conceitos como tempo, valor monetário, dentre outros, por exemplo, para construir um teorema e axioma cognitivo sobre o conteúdo em questão a fim de resolver o problema. Para tanto, os Campos Conceituais, são sistematizados em um tripé composto, e sistematizado de forma simples, por: um conjunto de *situações* (que dão sentido ao conceito); o conjunto das *invariantes* que constituem as diferentes propriedades do conceito e o conjunto das *representações simbólicas* que podem ser utilizadas.

Fazem parte do campo conceitual das estruturas multiplicativas todas as situações em que são observadas proporções simples e múltiplas que podem ser resolvidas por multiplicação e ou divisão. Podem ainda se relacionar a diferentes outros conceitos matemáticos como funções, número racional (decimal, fração, razão e proporção), multiplicação, divisão e outros (PESSOA, 2009). Em relação às estruturas aditivas, Vergnaud classificou os problemas em conformidade com suas características: problemas de transformação, de comparação e de composição. No que diz respeito aos problemas de estrutura aditiva, Vergnaud (1986) afirma que é prioritário reconhecer a importância da variedade das classes de problemas possíveis, de analisar atentamente sua estrutura e as operações de pensamento pertinentes para resolvê-los. "O campo conceitual das estruturas aditivas fornece numerosos exemplos de situações, nas quais a escolha de uma operação e a dos dados sobre os quais ela se aplica é delicada, exigindo um arranjo específico, uma ajuda significativa do adulto, eventualmente, uma representação simbólica original", reforça Vergnaud (2011, p.17)

Na ótica apresentada neste trabalho, notadamente a teoria de Vergnaud é importante e contribui para a Educação Matemática, especialmente no que diz respeito à construção de conceitos matemáticos, pois como o próprio defende, a TCC possibilita atribuir aos conceitos um significado de caráter educacional, que funciona como orientador para que a educação escolar não continue na perspectiva empírica do cotidiano nem se paute unicamente, na ciência pura, mesmo porque os conhecimentos cotidianos e científicos se interrelacionam (PESSOA, 2009). É bem certo que nossa escolha por Vergnaud se deu, por conseguinte, em função da importância e relevância de sua teoria para a Educação Matemática devido a consistência metodológica e prática apresentada pela teoria, pois, permite aprofundar a compreensão do processo de ensino e redesenhar propostas para a construção dos conceitos abordados. Sabe-se porém, que esta teoria não é única e que há diversos estudiosos que poderiam ser explorados e contribuiriam tanto quanto Vergnaud para o ensino, em especial para a Educação Matemática.

Nosso foco neste artigo será apontar a relevância da TCC e como as dissertações recortadas, dentre as demais dissertações da linha de PEAEMC (EDUMATEC-UFPE) utilizaram os estudos de Vergnaud. Abordaremos cada uma das doze (12) dissertações analisadas considerando como os estudos de cada uma apresenta e como articulam o objeto de pesquisa à

essência da teoria em questão, focalizando o campo conceitual utilizado pelas mesmas, analisando semelhanças e diferenças presentes nas abordagens.

A partir da leitura exploratória das dissertações selecionadas, nosso olhar investigador voltou-se à identificação dos elementos da TCC nelas contidas. Seguindo o mesmo direcionamento, buscamos analisar como as pesquisas em educação matemática do loco do EDUMATEC/UFPE articularam a teoria em estudo, em suas diversas nuances, a seus trabalhos de pesquisa. Todas as dissertações aqui utilizadas foram obtidas entre os dias 25.06 e 03.07 na plataforma eletrônica do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnologia e estavam disponíveis à consulta. Filtramos os trabalhos publicados desde 2010 até 2013.

As pesquisas no EDUMATEC e a Teoria de Vergnaud

Após breve conceituação acerca da TCC e seus desdobramentos, passaremos a apresentar o que cada dissertação selecionada apresenta como fundamentação de sua pesquisa no tocante à teoria em estudo e as imbricações dessa em relação ao seu trabalho, apontando qual aspecto da teoria a pesquisa se baseou, quer seja: o tripé composto pelos invariantes, significados e representações simbólicas, os problemas de estrutura aditiva ou multiplicativa, os conceitos-em-ação ou teoremas-em-ação.

Fizemos uma escolha cronológica para apresentar sucintamente as análises feitas nesse estudo. Assim sendo, iniciaremos com as dissertações referentes à publicação no ano 2010 e seguiremos pontuando cada uma delas na ordem crescente dos anos.

Dissertações de 2010

Lima (2010a) se propôs a estudar a construção e interpretação de gráficos por alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA). Sua investigação se deu em comparar os estudantes em seus diferentes desempenhos considerando seu nível de ensino: anos iniciais ou anos finais do Ensino Fundamental e o Ensino Médio. As comparações dos resultados foram feitas por meio de gráficos.

Encontramos em Lima (2010a) a seguinte pergunta: como o processo de escolarização ajuda na interpretação e construção de gráficos de barras e linhas?. A autora se apoia na TCC, onde o "campo conceitual" é visto "como um conjunto de situações cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos, de representações simbólicas em estreita conexão.". Lima (2010a, p.40) *apud* Vergnaud (1986 p. 84). Nessa ótica, resgata-se o tripé formado pelas situações, propriedades invariantes e representações simbólicas.

A pesquisadora salientou que as questões das atividades de interpretação de gráficos utilizados em seu estudo envolveram situações-problema referentes ao campo conceitual das estruturas aditivas.

Verificamos neste estudo que o conhecimento matemático é reelaborado a medida que os alunos são expostos a novas situações e utilizam-se dos conceitos que já dominam para resolver ao novo. Fica ao professor o papel de expor o aluno a grande variedade de situações que sejam cabíveis ao conceito a ser estudado. Assim, a TCC é "uma teoria cognitivista na qual considera que as concepções e as competências necessárias a estruturação do pensamento de conteúdos de conhecimento matemático desenvolve-se ao longo do tempo." Lima (2010a, p.42).

Albuquerque (2010) trabalhou com alunos do 3º e 5º anos e da Educação de Jovens e Adultos procurando investigar como adultos e crianças dos anos iniciais de escolarização

compreendem a escala representada em gráficos de barras e de linha. A autora fez uso das ideias teóricas desenvolvidas por Vergnaud (1982), principalmente no que tange a compreensão do que é um conceito, constituído como sendo uma terna de três conjuntos, quais sejam: o conjunto de Situações, de Invariantes operatórios e de sistemas de Representação simbólicas.

Nessa ótica, Albuquerque resgata Vergnaud (1982) que defende que a representação é um aspecto muito importante para a compreensão de um conceito matemático, uma vez que esse conceito pode ser representado através de diferentes representações simbólicas. Acerca da forma, salienta que a representação poderá agir como facilitadora ou não no processo de compreensão dos conceitos matemáticos, sendo importante que sejam trabalhados em sala de aula diversos tipos de representações gerando uma aprendizagem mais significativa. (VERGNAUD, 1998).

Melo (2010) investigou como o conceito de média aritmética é compreendido pelos professores e alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Após aplicação de testes com professores e alunos do 3º e 5º ano do Ensino Fundamental, os resultados apontaram fraco desempenho por parte dos sujeitos e mesmo sendo aplicados em diferentes níveis de escolaridade, não viu-se grande diferença nos resultados por parte dos alunos (3º e 5º ano). Já em relação aos professores, percebe-se que estes apresentam desempenho significantemente superior ao dos alunos quanto ao conceito de média.

A autora faz uma correlação com os invariantes presentes em sua pesquisa. Afirma que a média é influenciada e dentre seus estudos, comprova que os significado tem maior influência se comparado ao invariante no desempenho dos sujeitos investigados. É considerado que a multiplicidade de representações apresentadas aos alunos pode vir a favorecer a compreensão de um conceito, " uma vez no processo de conceitualização do real a dimensão representativa exerce um papel muito importante", Melo (2010 p.23).

Percebe-se, então, o esforço pela busca em investigar como o conceito de média aritmética é compreendido pelos alunos e professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Melo (2010) considerou os diferentes invariantes, significados e representações trazidos por Vergnaud, pois, viu neste tripé grande contribuição para a compreensão da formação do conceito de média.

Lima (2010b) analisa, em seus estudos, a compreensão de alunos da Educação de Jovens e Adultos em processo de escolarização sobre problemas de estrutura multiplicativa, especificamente os que envolvem o raciocínio combinatório. A autora se apoia na TCC no tocante, especialmente, ao campo das estruturas multiplicativas que envolve as operações multiplicação, divisão ou ambas. Amparada na teoria de Vergnaud, Lima (2010b) afirma que, concernente ao campo conceitual das estruturas multiplicativas muitos são os conceitos matemáticos envolvidos nas situações e no pensamento necessário para realização de tais situações e dentre os conceitos citados por Vergnaud estão o de função linear, função não-linear, espaço vetorial, análise dimensional, fração, razão, taxa, número racional, multiplicação e divisão.

Aponta ainda as diferenças conceituais existentes, indicando que, mesmo quando os procedimentos de cálculos são iguais, a ampliação da perspectiva conceitual de uma criança exige a competência para a realização do *cálculo relacional* (operações de pensamentos para compreensão das relações) que a torna capaz de escolher a operação adequada ao que o problema propõe e para realizar o cálculo numérico (resolução e procedimentos de resolução) apropriado.

Nesta ótica, Lima (2010b), em seu trabalho procurou elencar os esquemas e teoremas-em-ação utilizados pelos alunos da EJA, que evidenciam os conceitos-em-ação por eles já construídos, bem como os que ainda necessitam desenvolver, com vistas à ampliação do conhecimento envolvendo o raciocínio combinatório.

Dissertações de 2011

Santana (2011) em sua pesquisa de natureza qualitativa, que versa sobre conhecimentos probabilísticos, teve como objetivo principal identificar como professores do Ensino Fundamental concebem o ensino de probabilidade, analisando as concepções e conhecimentos dos mesmos. A autora fez uso da TCC proposta por Vergnaud para estabelecer uma compreensão acerca de como se dá a construção de um conceito, alegando que a teoria é adequada pois possibilita tratar de um conteúdo como a Probabilidade, onde estão envolvidos uma diversidade de outros conteúdos e conceitos como, por exemplo, os conceitos de fração, razão, porcentagem, chance, acaso, entre outros e esses conceitos articulados são necessários para que se possa proporcionar um amplo aprendizado de Probabilidade.

Assim, Vergnaud (1986, p.84) afirma que "um campo conceitual pode ser definido como um conjunto de situações, cujo domínio requer uma variedade de conceitos, de procedimentos e de representações simbólicas em perfeita conexão". Santana (2011) justifica ainda a utilização da TCC apontando, em consonância com Verganud, que um conceito não se forma a partir de um tipo de situação e que numa situação não se analisa apenas um só conceito, ela é rica em variados conceitos matemáticos, bem como considera a trajetória de aprendizagem na construção e apropriação do objeto ao qual se relaciona o conceito.

Rocha (2011) se propõe em sua pesquisa, a analisar os conhecimentos que os professores do Ensino Fundamental e Médio têm acerca da combinatória e o seu ensino. Semelhantemente a Santana (2011), a pesquisadora faz uso da TCC de Vergnaud para analisar e compreender as escolhas docentes na construção do raciocínio combinatório em alunos, através da ideia da construção dos conceitos defendida por essa teoria, além de usar a classificação dos tipos de problemas combinatórios (produto cartesiano, permutação, arranjo e combinação) fundamentada nas pesquisas desenvolvidas no Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório do Centro de Educação (Geração- UFPE).

A TCC de Vergnaud contribui para a construção dos conceitos matemáticos envolvidos em situações-problema, na qual se identifica três dimensões que influenciam sua apreensão: os significados envolvidos; as propriedades invariantes e representações simbólicas, onde um conceito só tem sentido se for oportunizado ao aluno a experiência com uma variedade de situações e suas relações com outros conceitos, cabendo ao professor o papel de mediar essa construção. Nesta perspectiva, a construção de conceitos matemáticos, conforme Rocha (2011, p.38) "se dá por meio da proposta de uma gama de situações que proporcionem a oportunidade para os alunos reconhecerem os invariantes e utilizarem variadas representações simbólicas, permitindo aos mesmos a visão do conhecimento matemático com sentido e significados."

Em relação aos problemas de estrutura multiplicativa, a pesquisadora se apoia em Vergnaud que identifica três classes de problemas: *isomorfismo de medidas* que envolve uma relação quaternária entre quantidades, numa proporção direta simples; *produtos de medidas* que estabelece uma relação entre três variáveis; e *proporções múltiplas* onde as medidas de quantidade em um campo são proporcionais às medidas em dois tipos de quantidades independentes. No entanto, problemas como esses que se resolvem por multiplicação ou divisão,

dependendo de como a situação os envolve podem causar dificuldades, principalmente no que diz respeito ao cálculo relacional dos problemas, alerta.

Em sua pesquisa, Cavalcanti (2011) teve como foco investigar as compreensões apresentadas por estudantes do 2º e 5º ano a respeito do conceito de variabilidade estatística. Considerando a teoria de Vergnaud (1996), a pesquisadora aponta que o desenvolvimento da variabilidade enquanto conceito e a melhor compreensão do mesmo pelos alunos pedem práticas de ensino que abracem situações diversas, representações distintas e conhecimento dos invariantes (propriedades) da mesma. E alerta quanto a necessidade de investigações futuras a respeito da tríade (S, I, R) que compõe o conceito de variabilidade estatística, pois não se tem ainda na literatura discussões a esse respeito, o que é fundamental para o desenvolvimento do estudo de todo campo conceitual. Com os resultados de seus estudos, a autora afirma que o conceito de variabilidade mantém uma estreita ligação com diversos outros e que compreender a variabilidade numa determinada situação não garante que a mesma seja entendida numa outra.

Em seu trabalho sobre média, Carvalho (2011) afirma que "apesar da simplicidade do seu algoritmo de resolução, a média apresenta dimensões conceituais que precisam de um estudo mais sistemático em todos os níveis escolares". Nessas dimensões, diversos invariantes do conceito são apontados como importantes no ensino da média, em concomitância com a compreensão do conceito onde diversas situações dão significados aos variados conceitos e assim como em todos os outros conceitos matemáticos, a média aparece a partir de diferentes representações.

Esta foi a razão pela qual a pesquisa analisou a abordagem de média aritmética presente nos livros didáticos de matemática dos anos finais do Ensino Fundamental, aprovados pelo PNLD 2011, tendo como base a TCC de Gerard Vergnaud. Justificando o uso da teoria supracitada, o pesquisador afirma que é necessário contar com uma teoria que ofereça possibilidades de compreensão da formação conceitual da média aritmética a qual integra, junto com a moda e mediana, denominadas de medidas de tendência central, reforçando que "TCC tem contribuído de forma significativa com o campo da Educação Matemática, ajudando no entendimento de educadores e pesquisadores com relação ao desenvolvimento e a formação dos conceitos matemáticos pelos estudantes" (Carvalho, 2011, p. 47).

Carvalho (2011) defende que é importante aprofundar a epistemologia de um conceito e que para a compreensão e apropriação de um saber é primordial o estudo de um vasto conjunto de situações e conceitos, citando Vergnaud que afirma ser necessário numa investigação didática, investigar, analisar e diversificar exaustivamente as situações que conferem significado a um conceito. Mas alerta que a TCC não é uma teoria de ensino de conceitos explícitos e formalizados, sua finalidade primeira é fornecer um quadro que permita compreender as filiações e as rupturas entre conhecimentos, onde se entende por conhecimentos, tanto o saber fazer como os saberes expressos.

Nesta perspectiva, Carvalho (2011) considera a TCC como uma ferramenta poderosa para a análise das atividades propostas em sua pesquisa, investigando invariantes, significados e representações, e como os livros didáticos propiciam a formação do conceito de média aritmética a partir das atividades.

Segundo Luz (2011), saber classificar é fundamental para a construção de representações em gráficos e tabelas. Assim, classificar e representar os dados são atividades imprescindíveis ao cidadão razão pela qual, a pesquisadora realizou sua pesquisa procurando investigar como alunos

e professoras dos anos iniciais do Ensino Fundamental classificam objetos e representam em gráficos e tabelas. O estudo pioneiro foi realizado com alunos do 3º ano e professores das séries iniciais do Ensino Fundamental, com uma análise refinada das classificações e representações realizadas e foco nas diferentes formas de aprendizagem de alunos e professores.

Luz (2011) se apoia na teoria de Vergnaud (1986) a qual considera que a aprendizagem de um conceito não se dá de forma isolada uma vez que todos os conceitos fazem parte de um campo conceitual. Desta forma, ao buscarmos investigar a compreensão das pessoas em relação a qualquer conceito, e em especial ao conceito de classificação, precisa-se propor diferentes situações; diferentes invariantes (relações/propriedades) e diversas formas de se representar. Assim, um dos objetivos do trabalho foi identificar o papel das diferentes representações na classificação, pois como afirma Vergnaud (1986), a representação é um dos elementos que compõem o tripé de um conceito, ou seja, ela influencia na compreensão do conceito.

Dissertações de 2012

Trabalhando com o mesmo nível de ensino que Melo (2010), Silva (2012) apresenta uma dissertação voltada à análise da transformação entre gráfico e tabela. Os sujeitos de sua pesquisa (alunos do 3º e 5º anos), responderam atividades de construção de gráficos e tabelas. A pesquisadora considerou a TCC como justificativa para apoiar seu trabalho, considerando que, estudar um conceito envolve a interrelações com outros conceitos e o trabalho com gráficos e tabelas, considera prioritariamente as representações que aparecem no tripé da teoria de Vergnaud. A autora considerou ainda outro teórico que também ressalta a relevância das representações para a evolução do pensamento matemático, Raymond Duval (2004).

Melo (2012) alerta que compete ao professor a responsabilidade de delimitar os conceitos que vão ser abordados em sala, da mesma forma e promover interrelações com outros conceitos para que o aluno experimente e vivencie diferentes situações e representações em sua aprendizagem. Chama a atenção ao fato de que a escola ao invés de fazer um trabalho sistemático e que leve em conta a abrangência e eficácia trazida pela TCC, reforça o decorar de fórmulas e modelos prontos, sem reflexão metodológica ou sentido.

Para a autora, a TCC articula o desenvolvimento de competências e concepções. Segundo Melo (2012), por meio das situações propostas e problemas o conceito passa a adquirir sentido e o conhecimento se "solidifica" de modo a abranger a ampliação da realidade para estimular o aluno a resolver problemas complexos por fazer uso de representações simbólicas, na ótica de Vergnaud.

Alves (2012) realizou em sua pesquisa, uma análise para avaliar a compreensão dos estudantes sobre os números inteiros no que se refere à multiplicação e divisão. Foram escolhidos para sujeitos da pesquisa, alunos da 4ª fase da EJA e do 8º ano do Ensino Fundamental, em função de serem "escolarizados na multiplicação e divisão de números inteiros". Foram aplicadas situações envolvendo multiplicação e divisão de números inteiros relativos, baseados nos problemas de estrutura multiplicativa da teoria de Vergnaud.

O pesquisador pontua que para a elaboração e análise das questões, fez uso da TCC pois se configura numa ferramenta tanto para o desenvolvimento das situações de aprendizagem quanto para a sua análise, uma teoria capaz de explicar o processo de conceitualização da multiplicação e divisão, envolvendo números relativos, permitindo identificar a natureza das

potencialidades e resistências dos estudantes ao trazerem à tona as suas competências sobre um conceito ou sobre um campo conceitual.

Ao identificar as competências mobilizadas pelos alunos quanto à multiplicação e divisão de números inteiros e analisar as possíveis especificidades de cada grupo de características, Alves (2012) utiliza uma sistematização de dados segundo as terminologias usadas por Vergnaud. Estuda-se as estratégias mobilizadas pelos estudantes de cada grupo por ele pesquisado e verifica as aproximações e distanciamentos entre os grupos. As variáveis foram observadas na busca de conhecer o que pode dificultar ou facilitar a aprendizagem do conceito de números relativos.

Citando o teorema-em-ação de Vergnaud, Alves (2012), afirma que por meio de um "*conjunto de situações, de invariantes operatórios e de formas de representação,* o teorema-em-ação, assim como o conceito-em-ação funcionam como unidades dos invariantes operatórios." (p.111). Para Alves (2012), no conjunto de números inteiros, ser competente, é conseguir efetuar operações entre a multiplicação e divisão, uma vez que a aprendizagem requer o domínio de situações que mobilizam esse conceito.

No âmbito da Alfabetização Matemática, Lobo (2012) analisou a presença da imagem e textos nos enunciados da Provinha Brasil. Investigou a presença das estruturas aditivas aplicando pré e pós-teste, no ano de 2010. A pesquisadora utilizou o estudo de caso e aplicou no total, três testes com 188 alunos do Ensino Fundamental. Analisou-se nos enunciados a ideia aditiva de juntar, acrescentar, retirar, completar e comparar quantidades. Em seguida, em conjunto e por bloco, cinco ideias aditivas foram analisadas. Os resultados foram melhores quando as imagens reforçavam os dados do texto.

Lobo (2012) buscou investigar como as imagens associadas aos elementos presentes nos itens referentes a problemas de estruturas aditivas, interferem no desempenho do aluno na resolução de problemas. Do mesmo modo que se propôs a identificar ideias aditivas associadas à presença ou ausência de imagem, analisando, quando presente ou ausente, as imagens, como as crianças respondiam a estas. A forma como os enunciados eram colocados, relaciona-se com o que Vergnaud (2009 p.213) aponta: " a forma pela qual as informações são apresentadas tem, naturalmente, um papel na complexidade dos problemas."

A autora cita a teoria de Vergnaud no tocante ao campo conceitual das estruturas aditivas, que segundo o teórico, concebe-se como um conjunto de situações cujo desenvolvimento implica nas operações adição e ou subtração, bem como o conjunto de conceitos e teoremas que permitem analisar as situações, como tarefas matemáticas. A teoria investiga ainda as filiações e rupturas entre conhecimentos, abordando o desenvolvimento cognitivo, a aprendizagem de habilidades, buscando compreender o conhecimento das crianças e adolescentes. No entanto, em seu estudo, Lobo(2012) optou por não utilizar as relações de base de Vergnaud, usando as categorias propostas por Carpenter e Moser (1982) apud (Borba e Santos, 1997), em problemas que envolvem: mudança ("Change"); igualização ("Equalize"); comparação ("Compare"); combinação ("Combine").

Para estudar a influência de diferentes tipos de representações simbólicas na resolução de problemas combinatórios por alunos da Educação de Jovens e Adultos (EJA), Barreto (2012), fez uma pré-testagem, uma intervenção e um pós-teste com um grupo de 24 alunos da EJA correspondente ao 4º e 5º anos, considerando a listagem e a árvore de possibilidades como forma de representação de problemas combinatórios. O estudo ressalta a importância de trabalhos

sistematizados que abordam as dimensões conceituais propostas por Vergnaud (1986): as situações e seus significados, as propriedades e relações invariantes e as representações simbólicas que, por sua vez, passam a ser mais bem estruturadas à medida em que há uma melhor compreensão dos conceitos em que são estabelecidas as diferenças entre os significados envolvidos nas situações.

A pesquisadora evidencia que é importante que a abordagem de determinados conceitos apresente situações que envolvam conceitos correlatos como a Combinatória e a multiplicação com o objetivo de que os alunos percebam as conexões entre esses conceitos e ressalta que para Vergnaud no estudo das situações que dão sentido aos conceitos há duas ideias essenciais: a da variedade que está associada a diversidade de situações e da história que se referem às situações experienciadas que o sujeito passa a dominar.

Barreto (2012) comunga com Vergnaud quando afirma que os significados dos conhecimentos matemáticos não repousam unicamente nas situações, nem nos significantes (representações simbólicas), os significados dizem respeito especialmente às relações do indivíduo com as situações e os significantes, constituídos por esquemas usados pelos sujeitos.

A pesquisadora faz ainda um paralelo, estabelecendo as semelhanças entre as propostas de Vergnaud (1983), Nunes e Bryant (1997) e os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997) no que se refere à classificação dos problemas de estrutura multiplicativa.

Se apoiando na TCC entre outros, Barreto (2012) defende que é fundamental o desenvolvimento de um trabalho que estimule o aluno a descobrir a diferença entre problemas aditivos e multiplicativos através de variadas situações-problema de forma a estabelecer diferentes relações, conduzindo o aprendiz a reflexão e utilização do cálculo relacional e do cálculo numérico, especialmente em operações multiplicativas.

Dissertações de 2013

Azevedo (2013) analisa a influência da construção de árvore de possibilidades na resolução de problemas combinatórios. Em seu trabalho realizado com 40 alunos do 5º ano de duas escolas públicas, a pesquisadora fez um trabalho de intervenção com duplas de estudantes, antecedido por pré-teste e posteriormente realizou dois pós-testes (um imediato e outro após 9 semanas da intervenção). Era objetivo da autora investigar se na construção de árvore de possibilidades os alunos achariam melhor fazer uso do lápis e papel ou do computador. Para tal, foi utilizado o software Diagramas de Árbol.

A pesquisadora utilizou a TCC de Vergnaud (1986) em sua fundamentação. Ela alega que as relações combinatórias, em diferentes situações, por meio da representação árvore de possibilidades está em conformidade com a teoria de Vergnaud (1986), pois o mesmo enfatiza que o aprendizado dos conceitos se apoiam em três dimensões fundamentais: as situações que dão significado ao conceito (S); as relações e propriedades invariantes desse conceito (I) e as representações simbólicas que são usadas para representar o conceito (R).

Azevedo (2013) reafirma que cada tipo de problema combinatório tem relações específicas – o que Vergnaud (1986) denominou de *invariantes* e que esses são fundamentais para o desenvolvimento de conceitos, uma vez que os mesmos são desenvolvidos em campos conceituais e se articulam por relações em comum. Citando, Pessoa e Borba (2009a), a pesquisadora destaca dois invariantes das situações combinatórias: o primeiro relacionado às escolhas dos elementos que farão parte das distintas possibilidades e o segundo relacionado à

ordenação dos elementos, ressaltando que os invariantes da combinatória podem ser trabalhados por meio da análise de diagramas de árvores, em particular as construídas virtualmente.

Eugênio (2013) realizou uma análise das explorações sobre média realizadas por alunos do 5º e 9º anos do Ensino Fundamental na interpretação de gráficos no software *TinkerPlots*. Ele fez uso da TCC, justificando que a compreensão do conceito de média envolve um campo conceitual relacionado a diferentes ideias, comungando com Vergnaud (1991) que discute elementos teóricos relativos à construção de conceitos como sendo o centro do desenvolvimento cognitivo, mas destacando que os processos cognitivos variam de acordo com as situações em que os sujeitos são confrontados. Assim, a construção do conhecimento se dá a partir da relação entre os problemas e situações já conhecidos pelos sujeitos e outros em que serão confrontados no percurso da vida. Nessa ótica, Vergnaud defende que um campo conceitual inclui não apenas as propriedades, objetos e relações, denominado por ele de *invariante*, mas também as *situações* que são os problemas por eles expressos e as *representações simbólicas* que realçam os aspectos do invariante.

O objetivo do estudo de Cruz (2013) foi investigar como a classificação vem sendo tratada na Educação Infantil, considerando as atividades propostas em livros didáticos de Matemática e a atuação de professores em sala de aula. Para responder a esse objetivo, a pesquisadora realizou análise de livros didáticos de Matemática da Educação Infantil, observações da sala de aula e entrevistas com professoras das turmas observadas.

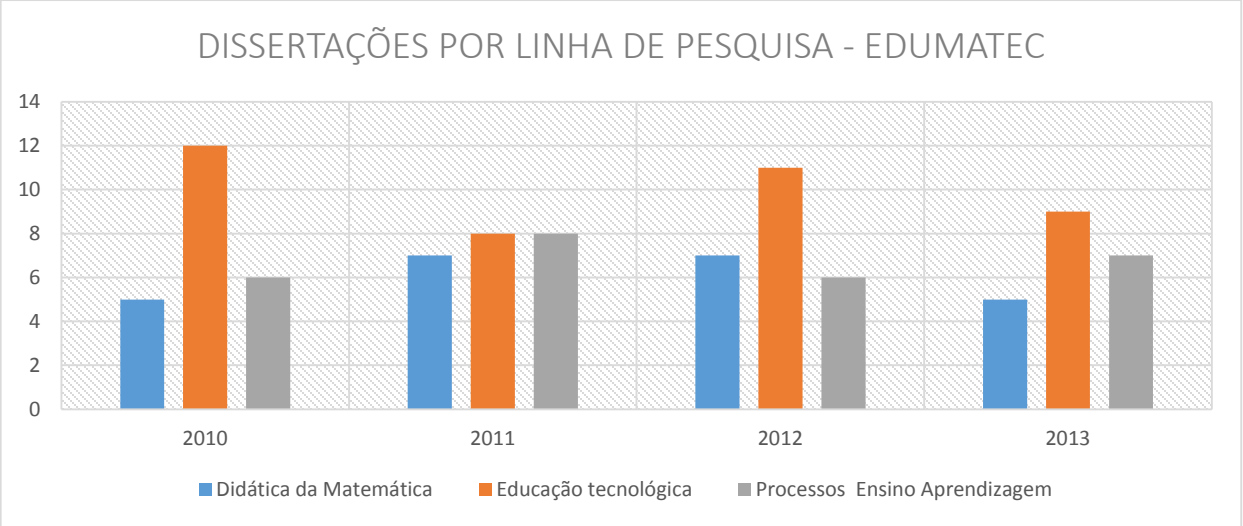
Entre as orientações recomendadas para a Educação Infantil, encontra-se o trabalho com conceitos importantes para o desenvolvimento matemático, tais como classificação, seriação, inclusão hierárquica, conservação de número, entre outros. Muitos destes conceitos foram estudados por vários pesquisadores, destacando-se Piaget e Inhelder (1983), Vygotsky (1991), Vergnaud (2009).

Cruz (2013) cita Vergnaud (2009) afirmando que o mesmo relaciona os estudos sobre classificação à aprendizagem dos conceitos matemáticos. Vergnaud (2009) considerou a análise sobre as representações utilizadas na lógica da atividade de classificação, permitindo a percepção das relações estabelecidas entre as diferentes classes, bem como a ideia de união, intersecção e inclusão presentes em algumas classificações. As representações apresentadas por Vergnaud são: a cruzada, em rede, em árvore e de Euler-Venn.

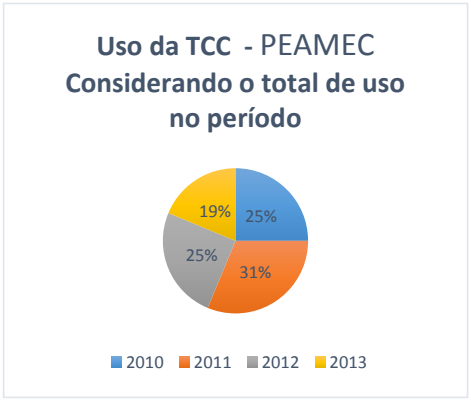
Um desdobramento importante da abordagem da TCC para o conceito de média é apontado por Eugênio (2013) quando afirma que a teoria situa a média num lugar matemático que vai além dos procedimentos de cálculo que normalmente são enfatizados pela escola; nessa ótica são consideradas a diversidade de invariantes e significados que podem estar envolvidos na compreensão de seu conceito.

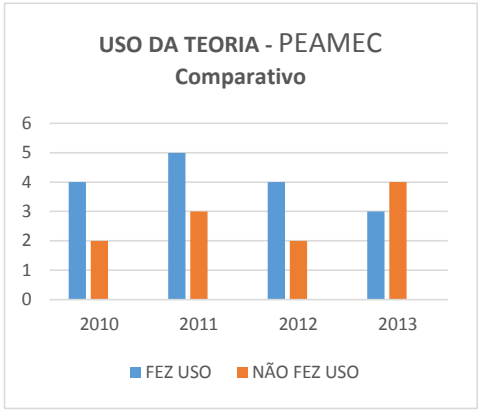
Análises e Considerações

Das 97 dissertações publicadas na plataforma do EDUMATEC no período de 2010 a 2013, 27 são da linha de PEAEMC, ou seja, um total de aproximadamente 28% das produções e estudos pertencem a essa linha de pesquisa. Dessas, 16 utilizaram a TCC de Gérard Vergnaud para fundamentar suas pesquisas, o que equivale a mais de 59%.



Observamos que a utilização da TCC nas produções científicas na linha de PEAEMC ao longo dos anos estudados se manteve em equilíbrio, sendo 4 trabalhos publicados no ano de 2010, 5 em 2011, 4 em 2012 e 3 em 2013. Os gráficos abaixo apontam quão utilizada a teoria de Vergnaud tem sido nas pesquisas em Educação Matemática do EDUMATEC, no recorte realizado. Na comparação entre a utilização ou não da TCC, verificamos que apenas em 2013 o volume de pesquisas utilizando outras teorias que não incluíssem a de Vergnaud, foi superior, nos demais o uso da teoria se sobressai aos demais trabalhos. Isso não significa dizer que as dissertações analisadas se utilizaram unicamente da TCC para fundamentar seus trabalhos, nem que as demais pesquisas não estudadas no nosso recorte não utilizaram uma teoria relevante com consistência teórico-conceitual, inclusive, algumas citaram Vergnaud, mesmo não usando sua teoria como sustentação principal para suas pesquisas.





Dos 8 professores da linha de PEAEMC, há trabalhos orientados por 5 deles utilizando a Teoria do Campos Conceituais. Das 16 dissertações que adotaram a TCC, 5 delas foram orientadas pelo mesmo professor, 4 por outro orientador e ainda 3 por um outro. Nas demais dissertações analisadas ocorreu uma relação biunívoca, ou seja, cada dissertação foi orientada por um professor diferente, sendo duas delas orientadas por professores de outra linha de pesquisa. Achamos importante ressaltar a figura do orientador da dissertação, pois acreditamos que os mesmos têm influência nas escolhas do percurso teórico e metodológico dos estudos realizados por seus respectivos orientandos.

As dissertações de uma forma geral, apontaram a contribuição da TCC, especialmente em relação à formação de conceitos, que está estreitamente ligado a outros conceitos, ou seja, os campos conceituais, pois como afirma Vergnaud (1992, p.7) "estudar a aprendizagem de um conceito isolado, ou de uma técnica isolada, não tem praticamente sentido", razão pela qual é imprescindível uma diversidade de situações que são necessárias à construção dos conceitos, margeando o tripé: S – o conjunto das situações que dão sentido ao conceito; I – o conjunto de invariantes que constituem as diferentes propriedades do conceito e φ – o conjunto das representações simbólicas (Vergnaud, 1992).

O quadro abaixo, traz uma síntese envolvendo os conteúdos, denominado aqui de teor pedagógico abordado nas dissertações, bem como os sujeitos das pesquisas e os campos conceituais prioritários aos quais os autores se filiaram para fundamentar seus trabalhos.

Autor | ano	**Teor pedagógico**	**Sujeitos da pesquisa**	**Foco abordado**
Lima (2010a)	Construção e interpretação de gráficos	EJA – alunos	Representações simbólicas
Albuquerque (2010)	Escala em gráficos	3º e 5º e EJA – alunos	Representações simbólicas
Lima (2010b)	Est. Multiplicativa – raciocínio combinatório	EJA –alunos	Representações, invariantes operatórios e construção de conceitos
Melo (2010)	Média aritmética	3º e 5º anos – alunos e profesores	Significados, invariantes e representações
Santana (2011)	Conhecimento probabilísticos	EF – profesores	Construção de conceitos
Cavalcanti (2011)	Variabilidade estatística	2º e 5º anos	Construção de conceitos – SRI
Carvalho (2011)	Média aritmética	Pesquisa bibliográfica	Significados, invariantes e representações
Rocha (2011)	Combinatória	EF e EM – professores	Construção de conceitos, invariantes, representações e situações
Luz (2011)	Classificações e representações	3º ano – alunos EF - professores	Representações
Barreto (2012)	Problemas combinatórios: listagem ou árvore de posibilidades	EJA – alunos	Representações simbólicas
Silva (2012)	Gráfico e tabela – transformação	3º e 5º anos – alunos	Representações simbólicas
Alves (2012)	Multiplicação e divisão de números inteiros	EJA - 4ª Fase (alunos) EF – 8º ano (alunos)	Invariantes operatórios
Lobo (2012)	Estruturas aditivas	EF – 3º anos (alunos)	Significados, invariantes e representação simbólica
Azevedo (2013)	Árvore de possibilidades (Diagramas de Árbol)	EF – 5º ano (alunos)	Situações combinatórias, significados, representações e invariantes
Eugênio (2013)	Média (software Tinkerplots)	EF - 5º e 9º anos (alunos)	Representações, invariantes e significados
Cruz (2013)	Classificação	Ed infantil – livros e profesores	Construção de conceitos Representações

O campo conceitual apontado na tabela acima não extingue nem elimina a utilização de outros enfoques da teoria de Vergnaud nas pesquisas analisadas, apenas, representa

sinteticamente, a nosso ver, o foco mais forte da teoria que foi utilizado com mais ênfase para o desenvolvimento dos trabalhos de cada pesquisador, considerando a pluralidade das nuances que abarcam a teoria e os objetivos dos trabalhos em estudo.

Os trabalhos de Albuquerque (2010), Cavalcanti (2011) e Cruz (2013) não explicitaram em seus textos a expressão "Teoria dos Campos Conceituais", mas trazem repetidas vezes, seu mentor, Vergnaud e os elementos constitutivos de sua teoria.

Enfatizamos que o estudo de Lobo (2012) cita a TCC, se apoia nela em relação à conceitualização e ao significado e importância do campo conceitual de estrutura aditiva, mas não utiliza a categorização proposta por Vergnaud, optando por utilizar a proposta de Carpenter e Moser (1982), justificando que "segundo Borba e Santos(1997, p.128), a classificação de Vergnaud envolve tanto números naturais quanto inteiros relativos, ou seja, números com sinais, e no caso até o 5º ano do ensino fundamental, apenas os números naturais são apresentados às crianças" (Lobo, 2012, p.27).

Com o estudo realizado, constatamos a relevância e contribuição da TCC à Educação Matemática no recorte realizado das publicações na linha de Processos de Ensino e Aprendizagem em Educação Matemática e Científica do EDUMATEC. É bem verdade que a diversidade de conteúdos discutidos não é tão ampla e diversa como poderia, margeando muitas vezes a combinatória relacionada ou não às estruturas multiplicativas, explorando média, conhecimentos probabilísticos e possibilidades, representações e classificações, além de gráficos e tabelas, com uma pluralidade de sujeitos e objetos de pesquisa, com foco primordial no ensino e aprendizagem dos conhecimentos matemáticos.

Assim sendo, cremos que a teoria de Vergnaud tem um espaço considerável nas pesquisas que versam sobre os mais variados temas, pois se configura numa teoria abrangente e que proporcionaà Educação Matemática uma amplitude cognitiva. É, assim, "uma excelente ferramenta didática, e, permite identificar a natureza das potencialidades e resistências dos estudantes ao trazerem à tona as suas competências sobre um conceito ou sobre um campo conceitual" (Alves, 2012, p.23).

Referências e bibliografia

Albuquerque, Rossana G. C. (2010). *Como adultos e crianças compreendem a escala representada em gráficos* (Dissertação de Mestrado). EDUMATEC/UFPE, Recife.

Alves, Evanilson. L. (2012). *Menos com Menos é Menos ou é Mais? Resolução de problemas de multiplicação e divisão de números inteiros por alunos do ensino regular e da Educação de Jovens e Adultos* (Dissertação de Mestrado). EDUMATEC/UFPE, Recife.

Azevedo, Juliana. (2013). *Alunos de anos iniciais construindo árvore de possibilidades: é melhor no papel ou no computador?* (Dissertação de Mestrado). EDUMATEC/UFPE, Recife.

Barreto, Fernanda L. S. (2012). *O papel das representações simbólicas no desenvolvimento do raciocínio combinatório na educação de jovens e adultos* (Dissertação de Mestrado). EDUMATEC/UFPE. Recife.

Carvalho, José Ivanildo Felisberto de. (2011). *Média aritmética nos livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental* (Dissertação de Mestrado). EDUMATEC/UFPE, Recife.

Cavalcanti, Érica M. S. (2011). *Para variar: Compreensões de estudantes dos anos iniciais diante de aspectos da variabilidade* (Dissertação de Mestrado). EDUMATEC/UFPE, Recife.

Cruz, Edneri P. (2013). *Classificação na Educação Infantil: o que propõem os livros e como é abordada por professores* (Dissertação de Mestrado). EDUMATEC/UFPE, Recife.

Eugênio, Robson S. (2013). *Explorações sobre média no software Tinkerplots 2.0 por estudantes do Ensino Fundamental* (Dissertação de Mestrado).EDUMATEC/UFPE, Recife.

Lima, Izauriana. B. (2010ª). *Investigando o Desempenho de Jovens e Adultos na Construção e Interpretação de Gráficos* (Dissertação de Mestrado).EDUMATEC/UFPE, Recife.

Lima, Rita de Cássia G. (2010b). *O raciocínio combinatório de alunos da educação de jovens e adultos: do início da escolarização até o ensino médio* (Dissertação de Mestrado). EDUMATEC/UFPE, Recife.

Lobo, Karla. A. B. M. S. (2012). *Investigando a Presença de Imagem na Resolução de Problemas com Ideias Aditivas na Provinha Brasil de Matemática* (Dissertação de Mestrado). EDUMATEC/UFPE, Recife.

Luz, Patrícia S. (2011). *Classificações nos anos iniciais do Ensino Fundamental: o papel das representações* (Dissertação de Mestrado). EDUMATEC/UFPE, Recife.

Melo,Cristina. M. M. (2010). *Fazendo Média: compreensões de alunos e professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental* (Dissertação de Mestrado). EDUMATEC/UFPE, Recife.

Pessoa, Cristiane A. S. (2009). *Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º anodo Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio* (Tese. Pós-graduação em Educação da UFPE). UFPE, Recife.

Rocha, Cristiane A. (2011). *Formação docente e o ensino de problemas combinatórios: diversos olhares, diferentes conhecimentos* (Dissertação de Mestrado). EDUMATEC/UFPE, Recife.

Santana, Michaelle Renata M. (2011). *O acaso, o provável, o determinístico: concepções e conhecimentos probabilísticos de professores do ensino fundamental* (Dissertação de Mestrado). EDUMATEC/UFPE, Recife

Silva, Dayse. B. (2012). *Analisando a transformação entre gráficos e tabelas por alunos do 3º e 5º ano do ensino fundamental* (Dissertação de Mestrado). EDUMATEC/UFPE, Recife.

Vergnaud, G. (1986). Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. *Análise Psicológica*, 1, 75-90.

Vergnaud, G. (2011). O longo e o curto prazo na aprendizagem da matemática. *Educar em Revista*, *n. Especial: 1/2011*, 15-27. Curitiba, Brasil,

A importância de uma Educação autônoma

Janile **Menezes**
Universidade Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho"-Campus Bauru
Brasil
janilerj@yahoo.com.br
Alice **Assis**
Universidade Estadual Paulista "Julio de Mesquita Filho"-Campus Guaratinguetá
Brasil
aliassis@gmail.com

Resumo

O presente trabalho discute a relação entre a educação autônoma e os alunos que possuem Altas Habilidades/Superdotação. As teorias de inteligências múltiplas e as escolas abertas (aquelas que seguem os princípios humanistas) são trazidas como elementos para apontar aspectos relevantes e necessários no que se refere à educação autônoma. Acreditamos que uma escola que promova a autonomia do aluno pode ser decisiva para que ele possa se desenvolver plenamente. Tanto na educação Matemática como em qualquer disciplina, é fundamental que seja dada autonomia para esse aluno que tem ânsia de aprender, a fim de que seja gestor do seu próprio tempo e possa discernir a melhor forma para a sua aprendizagem, pois o aluno com essas características não deve ser limitado.

Palavras-chave: Autonomia na Educação. Humanismo. Altas Habilidades/Superdotação. Escolas Abertas.

Introdução

Atualmente, no Brasil, o ensino tem se caracterizado de forma que os alunos reproduzem mecanicamente os conhecimentos memorizados sem qualquer sentido para eles. Particularmente, no ensino de matemática, os alunos aplicam equações e efetuam cálculos, que memorizaram, sem saber para que podem ser utilizados e sem compreensão do seu significado. Essa forma de aprendizagem pode levá-los ao desinteresse, o que pode causar a indisciplina em sala de aula.

Acreditamos que uma abordagem diferenciada, que viabilize a compreensão dos conteúdos de forma significativa, bem como a formação integral dos alunos, pode promover a autonomia necessária para que os alunos exerçam a cidadania de forma consciente e agreguem valores à sociedade.

As palavras autonomia e educação em uma mesma frase nos remetem diretamente ao "Humanismo", uma vez que esse método defende que o aluno tenha certa liberdade para escolher a melhor forma de aprender. Nessa perspectiva, o foco do presente trabalho é na autonomia e nas suas consequências. Uma escola que segue os princípios humanistas entende a autonomia no sentido mais amplo da palavra, pois com a liberdade vem também responsabilidades. Educar sob os moldes humanistas é o que questionamos quando falamos sobre autonomia na educação.

Neste trabalho, abordarmos a importância da autonomia como objetivo para a educação de forma geral, focando mais atentamente nos alunos com Altas Habilidades/Superdotação, uma vez que essses alunos, se desmotivados, podem se desinteressar pelas aulas, o que pode levá-los a um comportamento inadequado em termos de disciplina. Buscamos também algumas definições de inteligência a fim de compreendermos o motivo pelo qual a autonomia é importante para esses alunos.

Nessa perspectiva, o objetivo principal deste trabalho consiste em vislumbrar a educação autônoma como um caminho favorável para a Educação de alunos com Altas Habilidades/Superdotação, no sentido de viabilizar a Inclusão de tais alunos e criar um ambiente propício para aguçar a 'inquietação' e a curiosidade, características principais desses alunos. Há de se observar que as implicações diretas para a Educação são subjetivas e dependem de tempo e dedicação.

Qual o significado da palavra Autonomia?

Segundo o dicionário Aurélio (2012), a palavra autonomia vem do Grego, de modo que Autós significa por si mesmo e nomos significa lei, ou seja, *por suas próprias leis*. Para Freire (2007), governar-se por suas próprias leis leva a entender que esse tipo de liberdade não é uma fonte ilimitada de poder e sim uma liberdade que vai até onde nossos próprios limites podem suportar. Kant (1995) utiliza o termo "princípio autônomo", que sugere que a liberdade tem em si uma regra para a sua ação ou mesmo uma forma para que essa ação seja válida. Outros dois sentidos de autonomia foram definidos por Mora:

> O sentido ontológico se refere a certas esferas da realidade que são autônomas em relação às outras, por exemplo, a realidade orgânica é distinta da inorgânica, o sentido ético se refere a uma lei moral que tem em si seu fundamento e a razão da própria lei (1965, *apud* Zatti, 2007, p.12).

Nessas definições, pode-se observar que autonomia se difere de autossuficiência, pois para se ter autonomia, o sujeito deve se relacionar com algo, com alguma situação, razão, ou mesmo um fundamento. Ser autônomo depende da capacidade do sujeito de imaginar, querer, pensar e, ao mesmo tempo, ter condições para agir. Autonomia não tem como ser uma verdade absoluta e única, ela é regida por condições externas, sejam naturais ou civis (Zatti, 2007). Avaliar a autonomia no todo é algo de extrema importância para que se possa compreender qual o seu papel na educação, e porque ela pode ser determinante em algumas situações como, por exemplo, no caso de crianças que possuem Altas habilidades/Superdotação, ou mesmo daquelas que possuem certa dificuldade em ser disciplinados na escola.

Autonomia na educação

A autonomia e o ensino

Ter autonomia não está relacionada com liberdade pura e simples, ou seja, "autonomia não implica em liberdade irrestrita" (Oliveira, 2012, p.35), mas na conscientização de cada um acerca "das opressões que alienam e massificam, assumindo as responsabilidades de seu papel político e histórico na sociedade" (op.cit., p.36). Na escola, a autonomia é imprescindível para viabilizar que o aluno tenha maiores possibilidades e responsabilidades.

Montaigne (1993) questiona se o problema da educação está realmente no desinteresse dos alunos, uma vez que poderiam ter motivação para buscar o conhecimento caso tivessem a possibilidade de escolher os tópicos a serem estudados. Montaigne ainda fala sobre a postura do

professor-preceptor, sugerindo que, além de ensinar, permita que os alunos aprendam sozinhos, ou seja, que eles mesmos busquem o saber com o incentivo do professor.

Rogers (1969) também fala sobre a importância da curiosidade do ser humano em um de seus princípios de aprendizagem, afirmando que "seres humanos têm uma potencialidade natural para aprender" (Moreira, 1999, p.140), o que significa dizer que seres humanos são curiosos, ao ponto de buscarem respostas para assuntos que são de seus interesses. É algo natural estudar com mais afinco aquilo pelo qual nos interessamos. Levar o aluno a se sentir motivado para estudar pode ser uma porta para que ele compreenda a necessidade de aprender. Ensinar de forma autônoma não significa deixar o aluno totalmente livre, mas propiciar que ele seja "autogestor" (Motta, 1987). "Autogestão" não implica somente em participação, mas em autoadministração da coletividade.

Ao pensarmos em uma educação autônoma, algo fica claramente fora de contexto: a avaliação, visto que essa precisa de um professor/mediador para que ocorra. De forma geral, a avaliação ainda parece ser um dos grandes desafios na educação.

No sistema tradicional de ensino, as avaliações são feitas por meio de provas com questões objetivas e dissertativas, de modo que o professor as corrige e determina uma "nota" individual. Se pensarmos em um aluno autônomo que investiga os tópicos (assuntos, matérias) por seu nível de interesse, esse estudante não pode ser avaliado por intermédio de uma prova geral. Esse aluno precisa ser acompanhado para ser avaliado. Aí é que está o desafio. Dar autonomia para um aluno não é tarefa fácil para a escola. No entanto, se a escola conseguir se organizar de modo que os alunos sejam levados ao saber naturalmente, sem pressões externas, essa avaliação escrita deixa de ser, necessariamente, a principal forma de avaliação. Pode-se avaliar um aluno mediante a sua participação, comprometimento, comportamento e até mesmo por meio de seminários. Dessa forma, o aluno se sentiria mais seguro no ambiente escolar.

Além do pressuposto de que o aluno seja avaliado de forma contínua, o que lhe garante certa autonomia, é necessário que ele também aprenda a se auto avaliar e autocriticar para que sua independência e criatividade sejam postas em prática (Moreira, 1999), o que ocorre nas escolas abertas.

Escolas abertas

As escolas abertas baseiam-se nos "Princípios Humanistas". Fundamentam-se, basicamente, na interação entre seus membros e na participação ativa de todos os envolvidos com a educação dos alunos: os tutores (professores, funcionários, pedagogos, etc.) e também a comunidade em si (familiares e responsáveis pelos educandos). Os alunos recebem orientação de seus tutores para que criem seus planos de estudo, de forma que estejam sempre participando de seu próprio processo de aprendizagem.

Nessas escolas não existem turmas, nem classes homogêneas. Os alunos são separados por níveis de autonomia, sendo acompanhados pelos seus tutores e avaliados conforme seguem seu plano de estudo diário. Segundo Pacheco (2008), os professores não são professores somente de uma classe ou de alguns alunos, mas de todos os alunos e os alunos são alunos de todos os professores.

Os alunos possuem acesso a diversos recursos de pesquisa, tais como livros, revistas, vídeos, internet e até mesmo os próprios colegas. Quando um aluno precisa aprender sobre um determinado tópico dentro do seu plano de estudo, ele procura esses recursos e, se mesmo assim

não compreende-lo, ele recorre a algum colega que já o aprendeu. Segundo Rubem Alves (2001), em sua visita à Escola da Ponte [1], ele percebeu que havia dois quadros, em um estava escrito "Preciso que me ajudem em" e no outro "Posso ajudar em", onde os alunos escreviam suas dificuldades e facilidades e o seu nome. Se mesmo com a ajuda de um colega, o aluno não conseguir entender, ele pode pedir ajuda ao seu tutor, que buscará esclarecer a sua dúvida ou o encaminhará para um profissional capacitado.

Além de serem autônomos na sua própria formação acadêmica, os discentes têm a oportunidade de decidir sobre assuntos internos da escola por meio de reuniões, realizadas periodicamente, com o intuito de discutirem tópicos que interferem no andamento e no bom funcionamento da escola.

Como forma de avaliação, cada escola escolhe um modo de avaliar, mas deve ser contínua e não somente por provas. Na Escola da Ponte, por exemplo, os alunos são avaliados diariamente por meio de cada atividade que executam e conforme demonstram a responsabilidade de seguir com seu plano de estudo. Além disso, o aluno pode solicitar ao professor uma avaliação mais específica cada vez que se sente pronto para ser avaliado em algum(s) tópico(s) aprendido(s).

No texto de Trindade e Cosme (2003) sobre Escola Democrática, os autores mostram que a Escola da Ponte nos traz a ideia prioritária de Democracia. A própria forma de articulação da escola e de sua gestão confirma que sua ação é pública e democrática. Os espaços organizados (quadro de dúvidas, caixinha de segredos, assembleia de alunos) e a própria prática cotidiana dos alunos são exemplos claros de que é exercida a democracia, ou seja, o respeito pelas ações e opiniões de todos os envolvidos com a escola, inclusive no que se refere à aprendizagem.

Sobre o Projeto Educativo dessa Escola, Trindade e Cosme (op.cit.) comentam:

> nos encontramos perante uma concepção mais ampla de exigência académica, em que esta deixa de ficar confinada, apenas, aos testes estandardizados que visam hierarquizar as crianças, para ser assumida como um propósito que decorre do facto de as escolas não renunciarem à educação de todos os alunos que a frequentam, tendo em conta as suas particularidades e potencialidades e assumindo, por inteiro, os compromissos e as implicações pedagógicas decorrentes de uma tal opção (p.58).

Dessa forma, a aprendizagem ocorre no ritmo de cada aluno. Não se trata de uma imposição e sim de uma aspiração por aprender.

Nesse contexto, para que esse tipo de esola propicie o desenvolvimento da autonomia, é necessário que ela promova "um ensino justo, democrático, participativo, adaptado à diversidade e às características dos alunos, pedagogicamente eficaz e civicamente ativos" (Barroso, 2004, p.8).

Evolução do aluno autônomo

Ainda não existem muitas pesquisas que avaliem o desempenho dos alunos que estudam em escolas que seguem os princípios Humanistas, o que facilitaria uma aceitação maior do seu método. No entanto, Pacheco (2005) comenta que alguns estudos foram feitos sobre os alunos egressos da Escola da Ponte. Embora os dados não tenham sido tratados, o autor afirmou que a maioria dos antigos alunos tornaram-se pais dos atuais alunos. Atualmente, a Escola da Ponte vai de 1ª à 9º série, no entanto, durante muitos anos só ia até a 4ª série e, por isso, os alunos

[1]Disponível em: http://www.escoladaponte.pt/. Último acesso em: 10 Set. 2014.

ingressavam em outras escolas na 5ª série de ensino tradicional. Ao frequentarem essas escolas, alguns comportamentos foram observados. Primeiramente, os alunos não tinham dificuldades em se adaptar àquela nova realidade, respeitando o ritmo de toque das campainhas e saindo-se bem nas avaliações utilizadas. Conseguiam ser solidários, trabalhar em grupo, embora a escola nem sempre usasse essa prática, e tinham capacidade de se auto avaliar e gerir autonomamente seu tempo e espaço. Notoriamente, os alunos desenvolviam uma espécie de "dupla-personalidade", já que seguiam diferentes regras em diferentes contextos. A impressão que tiveram é que a escola é que não se adaptava a esses alunos.

Pacheco (2005) ainda comenta que em 2003 foi feita, por parte do Governo de Portugal, uma avaliação da Escola da Ponte. Fez-se uma coleta de dados das notas atribuídas pelos professores em pautas trimestrais dos últimos vinte anos. Constatou-se que os alunos egressos da Escola da Ponte apresentaram um melhor rendimento no currículo escolar da 5ª série do que os alunos oriundos de outras escolas. Embora notas e classificações não sejam tão relevantes nesse método de ensino, os resultados obtidos foram importantes para que a escola recebesse apoio do governo.

Mediante tais considerações, acreditamos que os métodos de aprendizagem utilizados nas escolas humanistas podem favorecer que os alunos com Altas Habilidades/Superdotação desenvolvam plenamente a sua capacidade de aprendizagem e habilidade mental.

O aluno com altas habilidades/superdotação

Muito se tem escutado sobre inclusão. Os discursos atuais, comumente, reportam-se aos alunos com necessidades especiais (sejam eles casos de atraso intelectual, ou até mesmo os casos de extrema inteligência) como casos de inclusão na escola. No entanto, nota-se nos profissionais da área um despreparo para lidar com essas crianças que são consideraras "inclusão". As crianças que são Superdotadas ou possuidora de Altas Habilidades – termos oficiais utilizados no Brasil – necessitam de tanta atenção quanto àquelas que possuem deficiências e/ou dificuldades de aprendizagem. Acreditamos que uma escola que dê autonomia para que esses alunos saciem sua curiosidade nata e desenvolvam plenamente suas potencialidades pode ser uma solução eficiente, não imediatista, para uma educação diferenciada e adequada a esses alunos.

Uma escola autônoma garantiria aos alunos Superdotados um ensino de qualidade e atenderia aos seus anseios sem prejudicar os outros alunos, tendo em vista que, em uma sala tradicional, professores não podem avançar tanto com os conteúdos, pois há muita diversidade no ritmo de aprendizagem de cada aluno.

Um pouco sobre Altas Habilidades/Superdotação.

Identificar alunos com altas habilidades/superdotação pode não ser uma tarefa muito fácil. Para orientar e auxiliar essa tarefa, é essencial a participação ativa dos pais, professores e profissionais da área de educação, colegas de sala, indicadores de criatividade e até mesmo do próprio aluno (Virgolim, 2007).

A utilização de testes de Quocientes de Inteligência, os famosos testes de "QI", nem sempre são suficientes para dizer se um aluno é Superdotado ou não. Segundo Alencar & Fleith (2001), essas crianças são produtos de todo um conjunto de relações, o meio em que vivem, a estrutura familiar, educacional e até mesmo valores socioculturais. Por isso mesmo, fica difícil uma definição comum para alunos Superdotados. O que pode ser característica determinante em uma cultura, nem sempre será em outra. Além disso, é possível encontrar diversas teorias sobre

inteligências (Sternberg, 1986;1991; Gardner, 2000; Renzulli & Reis, 2007) em que os autores acreditam que a inteligência em si é multifacetada, ou seja, depende de um conjunto de características.

A teoria de Sternberg (1986) considera três subteorias em conjunto para se determinar se um indivíduo é ou não Superdotado. A Componencial ou Analítica, que se relaciona com a capacidade do sujeito de receber e processar uma informação, observando-se quais os componentes mentais adotados para o planejamento, execução e avaliação da informação recebida. Outra Subteoria é a Experencial, na qual o sujeito considerado mais inteligente é aquele que consegue lidar facilmente com uma nova situação ou tarefa proposta, ou seja, está diretamente ligada à experiência do indivíduo. A terceira Subteroria é a Contextual, que relaciona a inteligência com o contexto social em que vive o sujeito, seus hábitos, estilo de vida e cultura (Alencar & Fleith, 2001). Nessas subteorias, pode-se dizer que a inteligência é adaptativa e depende do meio onde o indivíduo está inserido, sendo assim, muito subjetiva para se julgar por testes de "QI".

Gardner (Ramos-Ford & Gardner, 1991) fala de nove competências cognitivas, habilidades, talentos ou capacidades mentais que acredita serem comuns em todos os seres humanos. Primeiro a Inteligência Linguística associada à habilidade de contar histórias e de utilizar a linguagem para se comunicar. A Lógico-matemática está relacionada à "sensibilidade para padrões, ordem e sistematização" (Gardner, 1997). A Espacial é a habilidade que o sujeito possui de visualizar o mundo mentalmente de forma mais precisa. O sujeito é capaz de criar tensões, equilíbrio e composição em uma representação visual ou espacial. A Corpocinestésica é a capacidade de utilizar o próprio corpo para resolver problemas e situações. São as pessoas que se destacam nos esportes, por exemplo. Quem possui a inteligência Musical tem o dom de compor, reproduzir e discriminar sons, ritmos e timbres. Já a inteligência Interpessoal está associada à capacidade que o sujeito tem de observar, perceber, distinguir rumores e comportamentos das pessoas que estão ao seu redor. São indivíduos sensíveis ao comportamento coletivo. Diretamente ligada à essa inteligência, tem-se a intrapessoal, na qual o indivíduo consegue se conhecer e ter acesso aos próprios desejos e necessidades. Por meio dela, o sujeito pode refletir os aspectos de sua própria vida. E a Nona e última inteligência foi adicionada recentemente e ainda está sendo estudada, a inteligência Espiritual ou Existencial, que tem relação com a natureza e as preocupações humanas. Gardner (1991) acredita que as inteligências devem ser medidas dentro do campo de cada uma, já que o indivíduo pode ser considerado inteligente em algumas competências/habilidades e em outras não. Por esse motivo, uma avalição mais justa seria aquela que permitisse que o aluno fosse avaliado em todas as suas categorias e não somente em testes de "QI", que geralmente valorizam apenas as inteligências Linguística e a Lógico-matemática.

Renzulli (1986) define a inteligência embasado em duas categorias de habilidades superiores, na qual o aluno poderá desenvolver suas aptidões: a superdotação escolar e a superdotação criativa-produtiva. A primeira relaciona-se ao desempenho escolar, sendo facilmente percebida e identificada pelos professores, pois pode ser "medida" por meio de testes e provas. Alunos com essa habilidade rapidamente se encaixam em programas especiais, tais como classes avançadas, em que os alunos considerados mais inteligentes que outros são separados dos demais. A segunda, Criativa-produtiva, foca no desenvolvimento e na criação de produtos/materiais considerados significativos. Alunos que se encaixam nesse perfil são

denominados de "aprendizes de primeira-mão". Essa categoria se utiliza do uso de informações adquiridas e processos de pensamentos de forma indutiva e orientada para problemas reais.

Renzulli (op.cit.) ainda pontua três aspectos que se relacionam com essas duas categorias. As habilidades acima da média, envolvimento com as tarefas e, por fim, a criatividade. Habilidades acima da média podem ser gerais, relacionadas com o processo de informações e a capacidade de gerar respostas específicas, a capacidade do sujeito de desenvolver e adquirir habilidades e conhecimentos. O segundo aspecto está pautado no desempenho do aluno em si, na perseverança e no tanto que o sujeito investe para se desenvolver em determinada área ou assunto. A terceira, a criatividade, é considerada determinante para o saber do Indivíduo, no entanto, é a mais difícil de ser diagnosticada. Não há como saber o quanto o indivíduo se utiliza de seus recursos intelectuais para acessar esses aspectos. Entretanto, segundo Oliveira (2012, p.22), "um contexto escolar flexível e aberto a novas ideias pode contribuir para o desenvolvimento do potencial criativo".

Fleith & Alencar[2] (2005, *apud* Oliveira, 2012, p.23) ressaltam ser necessárias os seguintes aspectos para o desenvolvimento da criatividade em sala de aula:

- Proteger o trabalho criativo do aluno da crítica destrutiva;
- Desenvolver nos alunos a habilidade de pensar em termos de possibilidade, de explorar consequências, de sugerir modificações e aperfeiçoamentos para as próprias ideias;
- Encorajar os alunos a refletirem sobre o que eles gostariam de conhecer melhor. Não se deixar vencer pelas limitações do contexto em que se encontra, mas fazer uso dos próprios recursos criativos para contornar obstáculos;
- Envolver o aluno na solução de problemas do mundo real;
- Possibilitar ao aluno participar na escolha dos problemas a serem investigados;
- Encorajar o aluno a elaborar produtos originais.

Nesse contexto, o desenvolvimento da autonomia pode viabilizar a criatividade, sendo a primeira considerada como uma das mais frequentes características no comportamento dos alunos criativos (Oliveira, 2012).

Assim, a educação especial para alunos Superdotados deve ter por objetivo encorajar a autonomia dos alunos, respeitando-lhes a individualidade, o que pode configurar uma possibilidade de incentivo a sua criatividade (Amabile, 1996). Nessa perspectiva, é possível "fornecer aos jovens as máximas oportunidades de auto realização por meio do desenvolvimento e expressão de uma ou mais áreas de desempenho em que o potencial superior pode estar presente" (Renzulli, 1986, *apud* Virgolim, 1997, p.13).

Um aspecto importante destacado por Rezunlli é que todo aluno pode desenvolver suas potencialidades por igual se forem dadas as condições necessárias pra isso.

Considerações Finais

Atualmente, s autonomia na educação é um tema bastante discutido (Freire, 1996; Pacheco, 2003). Acreditamos que todos os métodos de ensino possuem sua importância e uma carga

[2] Fleith, D. S. & Alencar, E. M. L. S. (2005). *Escala sobre o clima para criatividade em sala de aula. Psicologia: Teoria e Pesquisa*, 21, 8591.

relevante para a relação entre ensino e aprendizagem. No entanto, a autonomia pode funcionar como ponte para a aprendizagem, propiciando que o aluno se aproprie não só de dados e informações, como do saber como um todo.

Aos olhos de quem se fundamenta apenas no modelo de ensino por transmissão pode parecer que o aluno não consegue gerir sua educação sozinho, ser um auto gestor, como sugere Rogers (1969). Porém, isso é possível, conforme mostram os estudos recentes acerca das escolas abertas (Pacheco, 2008; Alves; 2001), especialmente a Escola da Ponte, que iluminou muitas outas escolas.

No caso dos alunos com Altas Habilidades/Superdotação, citados anteriormente, uma escola autônoma pode ser decisiva para que esse aluno possa se desenvolver plenamente. Dadas as condições necessárias, todo aluno pode desenvolver ao máximo suas potencialidades. Tanto na educação Matemática, como em qualquer disciplina, é fundamental que seja dada autonomia para esse aluno que tem ânsia de aprender, a fim de que seja gestor do seu próprio tempo e possa discernir a melhor forma para a sua aprendizagem, pois o aluno com essas características não deve ser limitado. Essa condição só será possível se a autonomia, e até mesmo a flexibilidade, forem opções. Parece uma forma mais justa de inclusão, não imediatista e ao mesmo tempo revolucionária.

Ainda precisamos de profissionais capazes de lidar com esse tipo de aluno, porém, em uma escola aberta, o profissional pode acompanhar e avaliar o aluno sob outra perspectiva, a de tutor e não apenas o transmissor de conhecimento. Esse relacionamento estreito com o aluno faz com que esse se sinta mais à vontade para buscar, aprender e também ensinar. O aluno se desenvolve ao ponto de sanar suas dúvidas e ampliar sua mente no ritmo que desejar.

A ideia de um aluno autônomo, motivado pelo prazer em aprender, faz com que a busca pela a autonomia mereça mais atenção para compreender, bem como tratar esse método de ensino, de forma que não seja mais um tabu para a educação como um todo. Trazer o aluno para dentro da escola não significa apenas matriculá-lo na escola, significa torna-lo parte da escola enquanto um organismo vivo, em que todos os seus membros interajam e ajudem um aos outros.

Segundo Vygotsky (1984), quando se estimula os alunos de uma forma adequada, ou seja, dando-lhes ferramentas e condições para buscarem seu próprio conhecimento, o aluno naturalmente se desenvolverá melhor. Com o educando Superdotado, esse conceito não é diferente. Observa-se a necessidade de se trabalhar paralelamente à educação comum, para que esse aluno busque suas próprias conjecturas e se sinta desafiado, de forma a percorrer um caminho alternativo dentro do que se considera regular. Estimular o aluno, por meio de atividades que o desafie, pode viabilizar que ele vá além do esperado, levando-o não só ao interesse pela sua educação, mas também ao desenvolvimento de suas habilidades de forma plena.

Com relação à criatividade do aluno, Oliveira (2012) ressalta a importância de incentiva-la. A criatividade, que já é nata, muitas vezes é “tosada” pelos próprios professores, que pouco estimulam seus alunos a se expressarem criativamente. Um clima de autonomia e flexibilidade pode ser fundamental para que os educandos desenvolvam seu potencial criativo, além de propiciar que a escola se torne um lugar onde o aluno tenha vontade de estar e motivado a buscar o seu conhecimento.

Considerando as características elencadas neste trabalho, tais como curiosidade, criatividade, autonomia, potencial para aprender, acreditamos ser coerente que o aluno que possui características de Altas Habilidades/Superdotação possa estudar em escolas com bases humanistas, que pregam a autonomia na educação. Sendo asism, ele estará em um ambiente cuja intenção é que ele seja capaz de gerir seu tempo e sua educação, além de valorizar e desenvolver sua criatividade.

O nosso objetivo é promover a reflexão e defender os métodos usados nas escolas humanistas, pois acreditamos que correspondem ao melhor caminho para motivar e oferecer condições para que os alunos em questão se desenvolvam plenamente. Autonomia e criatividade não devem ser vistos como utópicos e sim como novas formas de perceber a educação. O "engessamento" do aluno e a falta de flexibilidade praticadas normalmente nas escolas podem desmotiva-lo e tornar a ação de aprender algo chato, de forma que muitos alunos abandonam as escolas e desistem de concluir seus estudos. Mas a questão da evasão é apenas uma das muitas consequências desse sistema de ensino. É demasiadamente importante ressaltar que, nesse tipo de escola, o aluno com Altas Habilidades/Superdotação não tem um ambiente em que suas habilidades e/ou potencialidades sejam plenamente desenvolvidas e até mesmo incentivadas. A Escola aberta propicia a esses alunos liberdade para desenvolverem a sua própria aprendizagem. Vale relembrar o conceito discutido de autonomia, que não significa liberdade irrestrita, mas sim uma liberdade responsável e direcionada, em que o aluno consegue gerir seu tempo e sua educação, respeitando-se, é claro, os currículos necessários para sua educação plena.

A implicação desse modelo (Escolas Abertas) na Educação no Brasil corresponde ao verdadeiro conceito de Inclusão dos alunos. Acreditamos que inserir um aluno com necessidades especiais (casos de atraso e/ou Superdotação/Altas Habilidades) em uma escola sem nenhum tipo de suporte profissional, não inclui de fato esses alunos. Sem esse suporte estamos depositando os alunos nas salas de aula, sem compreende-los. Com uma educação autônoma, o aluno conseguirá render até onde deseja, e ainda ir além, que naturalmente, é o que esperamos de nossos alunos, bem como suas contribuições futuras para a sociedade. É importante destacar que a autonomia sugerida deve ser supervisionada por profissionais responsáveis e adequadamente instruídos. A viabilidade desse processo é comprovada pelas Escolas Abertas já existentes no Brasil e pela Escola da Ponte, em Portugal. Essas poucas escolas que se utilizam da autonomia para ensinar são casos de sucesso e convém dizer que os alunos, professores e até mesmo a comunidade estão satisfeitos com a escola em que estão inseridos. Não se trata apenas de autonomia, embora esse seja o ponto alto, mas da democratização do ensino, como já foi citado anteriormente, bem como uma maior reflexão do próprio aluno sobre a importância de se estudar em horários planejados. Dar autonomia não significa deixar de estudar, mas aprender a se planejar, a estudar sozinho, de forma que não seja uma obrigação e sim um ato prazeroso.

Outra perspectiva positiva quanto ao ensino autônomo, é a superação de alguns problemas que nós (professores) temos enfrentado na sala de aula, como indisciplina, falta de orientação, alienação dos alunos, desinteresse, etc. Ao pensarmos em Educação, sabemos que não existe nenhuma "receita" garantida de sucesso e que, como todas as regras, existem exceções. Ainda assim, devemos lembrar que o nosso sistema atual de ensino (tradicional, recepção-transmissão) não tem nos dado uma solução para os problemas enfrentados em sala de aula, onde muita coisa mudou, menos a forma de se ensinar.

Cabe a nós, educadores, repensarmos se a educação de hoje está dando resultados no que diz respeito à aprendizagem. O aluno que estuda de acordo com o modelo transmissão-recepção

está aprendendo? Que tipo de problemas a escola vem enfrentando? A indisciplina, por exemplo, é outra questão que se relaciona à autonomia, pois o aluno autônomo é responsável por si mesmo e, consequentemente, deve aceitar as consequências de seus atos. Essa relação (autonomia/responsabilidade/disciplina) interfere na sua própria educação? Essas dúvidas podem ser sanadas se a autonomia na educação for estudada e, quem sabe, adotada em diversos segmentos da educação.

Referências bibliográficas

Alves, R. (2002). *Escola com Que Sempre Sonhei Sem Imaginar Que...* Papirus Editora.

Alencar, E. M. L. S., & Fleith, D. D. S. (2001). *Superdotados: determinantes, educação e ajustamento* (Vol. 2). São Paulo: EPU.

Amabile, T. M. (1996). *Creativity in context: Update to" the social psychology of creativity.".* Westview press.

Barroso, J. (2004). *Defender, debater, promover a Escola Pública: consequências para o ensino da Matemática*. Associação Nacional de Professores de Matemática.

Barroso, J. et al. *ESCOLA DA PONTE.* Disponível em: <http://urantiagaia.org/educacional/ponte/escola_da_ponte.pdf> Acesso em: 11 set. 2014

Caygill, H. (2000). *Dicionário de Kant* (Tradução: Alvário Cabral; revisão técnica, Valério Rohden). São Paulo: Jorge Zahar Editora.

Fleith, D. S., & Alencar, E. M. L. S. (2007). *Desenvolvimento de talentos e altas habilidades: orientação a pais e professores*. Porto Alegre: Artmed.

Freire, P.(1996) *Pedagogia da Autonomia: Saberes Necessários à Prática Educativa* (25ª ed.). São Paulo: Paz e Terra.

Gadotti, M. (1992). *Escola cidadã: uma aula sobre a autonomia da escola*. Cortez Editora.

Gardner. H., & Hatcb, T. (1989). *Multiple intelligences go to school: educational implications of the theory of Multiple Intelligences. Educational Researcher, 18*(8). São Francisco.

Hall, C. S., Lindzey, G., & Campbell, J. B. (2000). *Teorias da personalidade*.

Artmed. de Holanda Ferreira, A. B. (1975). *Novo dicionário aurélio*. Editora Nova Fronteira.

Moreira, M. A.(1999). *Teorias de Aprendizagem*. São Paulo: EPU.

de Montaigne, M. (1993) [1580-88]. *Três ensaios. Do professorado. Da Educação das Crianças. Da Arte de Discutir.* (Trad. Agostinho da Silva). Lisboa: ed. Veja.

Motta, F. C. P., et al. (1987). *Participação e participações: ensaios sobre autogestão.* São Paulo: Babel Cultural.

de Oliveira, M. R. (2012*). Autonomia e Criatividade em Escolas Democráticas: outras palavras, outros olhares.* Disponível em < http://www.educacao.ufrj.br/ppge/dissertacoes/Marina_dissertacao.pdf>. Acesso em: 01 set. 2014

Pacheco, J. (2008). *Caminhos para a inclusão: um guia para o aprimoramento da equipe escolar*. Grupo A.

Pacheco, J. (2003). *Escola da Ponte.* Petrópolis: Editora Vozes.

Ponte, Escola. *Contrato de Autonomia*. Disponível em: <http://www.escoladaponte.pt/autonomia.pdf> Acesso em : 04 set. 2014.

Ponte, Escola. *Contrato de Autonomia*. Disponível em: <http://www.escoladaponte.pt/autonomia.pdf> Acesso em : 07 nov. 2014.

Sternberg, J. R.(1991) *As capacidades intelectuais humanas: Uma abordagem em pro- cessamento de informação (D. Batista, Trad.)* Porto Alegre: Artes Médicas.

Virgolim, A. M. R. (2003). A criança superdotada ea questão da diferença: um olhar sobre suas necessidades emocionais, sociais e cognitivas. *Linhas críticas*, *9*(16), 13-32.

Vygotsky, L.S. (2008). *Linguagem e Pensamento* (4ª ed.). São Paulo: Martins Fontes.

Zatti, V. (2007). *Autonomia e educação em Immanuel Kant & Paulo Freire*. EDIPUCRS.

Zimring, F., & Rogers, C. (2010). *Tradução e organização: Marco Antônio Lorieri*. Recife: Fundação Joaquim Nabuco, Editora Massangana. Disponível em: < http://www.dominiopublico.gov.br/download/texto/me4665.pdf> Acesso: 04 mar. 2014.

A inter-relação dos conteúdos matemáticos com as habilidades musicais no desenvolvimento do processo educacional: uma conexão possível

Maria Christina Schettert **Moraes**
Universidade de Cruz Alta
Brasil
mmoraes@unicruz.edu.br
Maria Aparecida Santana **Camargo**
Universidade de Cruz Alta
Brasil
cidascamargo@gmail.com
Guilherme Schettert **Moraes**
Universidade Federal de Santa Maria
Brasil
gmoraes0403@gmail.com

Resumo

O presente estudo bibliográfico foi desenvolvido com apoio do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC) da Universidade de Cruz Alta – UNICRUZ/RS, Brasil. Teve por objetivo aprofundar o conhecimento sobre a relação existente entre Matemática e Música, levantando informações sobre conteúdos desenvolvidos na Educação Básica e buscando pesquisas na área, ressignificando, assim, o Ensino da Matemática. Parte-se da ideia de que, na era do conhecimento disseminado de forma quase instantânea, é necessário colaborar para a formação de cidadãos aptos a conviver com a diversidade, construindo conhecimentos de forma criativa, crítica e reflexiva. É possível encontrar manifestações de Matemática e Música em todas as culturas, sendo que os filósofos já desenvolviam habilidades musicais a partir de conceitos matemáticos. Como o educador é um dos mediadores entre o conhecimento e o educando, mostra-se pertinente a busca de ferramentas que contribuam para uma aprendizagem significativa. Pensar o ensino da Matemática envolvendo a Música surge como um viés a ser explorado pelos educadores.

Palavras chave: cidadania, conhecimento, criatividade, cultura, educação, formação, inclusão, interdisciplinaridade, metodologia, pedagogia, música e matemática.

Introdução

A vida humana é perpassada por uma trilha sonora, do início ao fim. O "parabéns a você" se faz presente nos aniversários, o hino nacional marca momentos solenes, o hino do time de futebol acalenta os sonhos de conquistas, a música da formatura marca um passo importante na trajetória profissional. Praticamente não há como vivenciar algum momento especial sem pensar em uma música que o represente. Se a música é relevante na caminhada individual das pessoas, por que não incluí-la em situações de aprendizagem procurando enxergá-la em suas inter-relações com outras áreas do conhecimento?

Diante desta problemática surge este estudo, o qual foi desenvolvido através do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC) da Universidade de Cruz Alta – UNICRUZ/RS, Brasil. A investigação tem como base a ideia de que, em um tempo onde o conhecimento é disseminado de forma quase instantânea, é necessário repensar outras experiências que colaborem na formação de cidadãos aptos a construir conhecimentos de forma criativa, crítica e reflexiva.

Esta pesquisa, de caráter qualitativo e cunho bibliográfico, está embasada em autores como Abdounur (2003), Campbell, Campbell e Dickinson (2000), Contador (2007), Gadotti (2000) e Gardner (1994), dentre outros, visando aprofundar o conhecimento sobre a relação existente entre a Matemática e a Música, para, através destes saberes, ressignificar o ensino da Matemática. Procurou-se levantar informações sobre o envolvimento de concepções matemáticas na explicação de teorias musicais, bem como acompanhar a evolução da pesquisa interdisciplinar, envolvendo noções matemáticas e musicais.

Um pouco de história

Os registros mais antigos de relações existentes entre Matemática e Música datam do século IV a.C., na Grécia Antiga. Os pitagóricos relacionavam o conceito matemático de frações a intervalos musicais, fazendo uso do monocórdio. O monocórdio era um instrumento musical constituído por uma só corda estendida entre dois cavaletes fixos sobre uma prancha e um cavalete móvel colocado sobre a corda estendida, conforme os estudos de Abdounur (2003).

Filósofos como Arquitas de Tarento e Eratóstenes deram suas contribuições para o desenvolvimento de conceitos musicais referendados pela Matemática. Arquitas construiu sua escala musical embasando-se nas frações da corda resultantes de médias harmônicas e aritméticas, determinadas por Pitágoras no uso do monocórdio. Eratóstenes diferenciou a distância entre notas (intervalo) com auxílio de razões.

Boetius, na Idade Média, foi fundamental para a sistematização da música ocidental. Em sua obra *De Institutione Musica,* considera a música como "uma força que impregnava todo o universo e um princípio unificador tanto do corpo e da alma do homem quanto das partes de seu corpo", de acordo com a referência estudada por Abdounur (2003, p. 21).

Ainda segundo as pesquisas deste autor (2003), ao longo da Idade Média, a música foi sofrendo várias mudanças, de forma principal a partir de uma concepção exclusivamente melódica para um caráter essencialmente harmônico. D'Arezzo criou um algoritmo sustentado no alfabeto, onde as sete primeiras letras representavam os sete sons da escala, exercendo, assim, um papel importante na organização da teoria musical da época.

Por sua vez, o Renascimento caracterizou-se pela evolução da polifonia com o consequente desenvolvimento da harmonia. O período foi fértil em exigir interpretações por meio de fórmulas para os fenômenos naturais. A Matemática e a Música começaram a buscar explicações racionais para os fenômenos. Galileu mexeu com a concepção pitagórica ao escrever que a altura musical relacionava-se à frequência de vibrações sonoras. O som passou a ser classificado como onda, ponto significativo para facilitar a compreensão dos fenômenos musicais. Pode-se salientar, inclusive, que, nessa época, pesquisas realizadas por Fofliani, Zarlino, Salinas, Mersenne, Beeckman e Descartes, dentre muitos outros estudiosos, contribuíram para o desenvolvimento da acústica, conforme relata Abdounur (2003).

Igualmente, foi nesse período que surgiu a escala temperada, alicerçada em logaritmos. Embora não exista consenso quanto ao seu inventor, todos concordam que foi Bach o primeiro a fazer uso desta escala, pois possuía um sistema de afinação mais suave, dividindo a oitava em doze partes geométricas. Nesse sentido, é possível concluir que um músico, ao desenvolver sua obra, não leva em consideração os aspectos matemáticos envoltos na construção da melodia, porém estes estão presentes e são determinantes na escrita musical.

Da mesma maneira, os filósofos já desenvolviam habilidades musicais a partir de conceitos matemáticos. Escalas musicais se valiam de noções de frações e de logaritmos, as composições musicais eram escritas em pentagramas, assim como a noção de tempo era fundamental nas melodias. Assim, percebe-se que, olhando a história dos povos e de suas culturas, se encontram inter-relações matemáticas e musicais em todas as manifestações socioculturais.

A interdisciplinaridade entre as concepções matemáticas e as musicais

Vive-se em um tempo onde tudo acontece de forma rápida e simultânea. As informações são obtidas das mais diversas maneiras, despertando os sentidos e aguçando a curiosidade e a necessidade de sempre saber mais. Ninguém mais consegue ter domínio completo do saber existente em sua própria área. Nesse sentido, é coerente estar receptivo às experiências que colaborem na formação de cidadãos aptos a viverem na era da diversidade.

Sob tal perspectiva, a proposta de trabalho centrou-se na interdisciplinaridade, pois, cada vez mais, se busca uma aprendizagem significativa para o educando, levando-o a reformular conceitos. Para isso é mister trabalhar as diferentes disciplinas do currículo de uma forma integrada, através de experiências que permitam uma compreensão como a referida, ou seja, reflexiva, crítica e, também criativa, do contexto social. Nesse ponto, Santomé (1998, p. 45) frisa que:

> [...] apostar na interdisciplinaridade significa defender um novo tipo de pessoa, mais aberta, flexível, solidária, democrática e crítica. O cenário atual precisa de pessoas com uma formação cada vez mais polivalente para enfrentar uma sociedade na qual a palavra mudança é um dos vocábulos mais frequentes e onde o futuro tem um grau de imprevisibilidade como nunca houve em outra época da história da humanidade.

Entretanto, o currículo disciplinar que até hoje sustentou o paradigma educacional brasileiro, no qual as inúmeras áreas do conhecimento ficavam limitadas ao pequeno espaço de cada disciplina, reforçou a fragmentação do próprio conhecimento, impossibilitando, desse modo, que o educando estabelecesse importantes relações e através destas desenvolvesse suas potencialidades e capacidades de maneira global.

Nesse enfoque, a busca pela interdisciplinaridade ou "currículo integrado" é justamente uma tentativa de propor ao trabalho educacional um caráter realmente reflexivo e crítico a partir da troca entre as diferentes disciplinas do programa. Ver a educação sob a ótica interdisciplinar é encarar as problemáticas sob uma ampla visão, é admitir que soluções dependem da contribuição de outros campos do saber e, assim, conforme as necessidades ou características de cada circunstância, construir o processo de ensino-aprendizagem.

Dessa forma, cada disciplina contribui na medida e no momento em que se fizer necessária, redimensionando as atividades propostas e estendendo o limite de possibilidades do trabalho. A proposta interdisciplinar permite ressignificar a própria postura do educador, pois deixa de ser uma ação unilateral e transforma-se em uma construção coletiva de buscas e trocas

muito bem orquestradas, cuja essência respeita a natureza da vida: uma rede de relações que, mediante trocas naturais, sustenta-se e evolui.

Com base em tais noções, não se pode esquecer que a Matemática, muitas vezes, é vista como um percalço na vida de alguns educandos, que chegam a sentir certo medo da disciplina. Por outro lado, sabe-se o quanto atividades que envolvem música tornam-se prazerosas e atrativas. Desta forma, buscou-se fazer uma breve reflexão acerca das relações entre estes conhecimentos, pois se acredita que, como enfatiza Campos (2009, p. 16), "a partir da correlação entre Música e Matemática, pode-se criar uma vontade maior em relacionar as duas áreas, servindo, tanto para dar à Matemática um sentido mais prático, mais prazeroso e mais lúdico, quanto para explicar ou entender conceitos musicais que só são plenamente definidos quando se utiliza a Matemática".

Pode-se, assim, perceber claramente a relevância da Matemática para a Música nas mais variadas instâncias. No entendimento de Gardner (1994), há elementos claramente matemáticos, quando alude à "alta Matemática" na música: estes não deveriam ser minimizados. Para apreciar a função dos ritmos no trabalho musical o indivíduo deve ter alguma competência numérica básica. É que estas analogias provavelmente podem ser encontradas entre duas quaisquer inteligências e que, de fato, um dos grandes prazeres em qualquer área intelectual, se deve a uma exploração do seu relacionamento com outras esferas da inteligência.

O citado autor (1994), ainda, ao tratar da competência musical, faz referência à questão emocional que a música desperta, deixando em evidência que as atividades realizadas com e através da música se tornam mais prazerosas. Gardner (1994, p. 83) coloca que:

> [...] ao longo dos séculos, tentativas de associar Música com Matemática parecem um esforço conjunto para ressaltar a racionalidade (quando não, negar os poderes emocionais) da música. No entanto, dificilmente alguém que esteve intimamente associado à música pode abster-se de mencionar suas implicações emocionais: os efeitos que ela exerce sobre indivíduos.

Acreditando na possibilidade de aproveitar as propriedades emocionais da música e também de estudá-la racionalmente, associando as suas diversas funções e usos, pode-se enfocar desde uma paródia escrita para facilitar a memorização de uma fórmula, tornando o aprendizado mais prazeroso, até compreender questões mais complexas da composição musical. Pitágoras, tocava lira e compunha, acreditava que a música acalmava, curava e tranquilizava, tanto que a utilizava durante seus ensinamentos aos discípulos, mas também, estudou e desenvolveu teoria musical, aplicando conceitos matemáticos.

Os estudos de Contador (2007, p. 52) revelam que Pitágoras era obcecado por números, sendo que:

> [...] deixou a célebre frase: *todas as coisas são números*. Achava que o universo era uma escala musical e ao número 1 (um) atribuía a própria essência da vida, pois tudo vem de um deus que é onipotente, onipresente e onisciente e é simplesmente um. [...] A relação entre os números e a natureza era tão perfeita não só nos sons naturais, mas todos os eventos deveriam ser números representados por harmonias; até as órbitas dos corpos celestes estariam relacionadas aos intervalos musicais, assim os movimentos celestes representavam a Música das *esferas*.

Em tal aspecto, a música, enquanto arte, pode ser definida de várias formas, contudo, acima de qualquer definição, é necessário salientar as mais diversas emoções que ela transmite,

envolvendo sentimentos e memórias diversas. Verifica-se indispensável compreender seu conteúdo técnico, como discorre Contador (2007, p. 175) "Tecnicamente, a música é formada por sons que foram chamados de notas musicais e compõem a sua matéria-prima principal. São sons absorvidos e selecionados pelo homem e todos eles receberam nomes e obedecem a uma escala formada em função de suas características."

Nobre (2008) explica que a música é composta pelos seguintes elementos: Melodia (combinação de sons sucessivos, um após o outro, a concepção horizontal da música); Harmonia (sons simultâneos, dados de uma só vez, sendo uma concepção vertical da música); Contraponto (melodias em ordem simultânea); e, Ritmo (combinação de valores de tempo). Compreender a questão da harmonia musical e sua relação matemática é um tanto complexo. Aqui podem ser desenvolvidos conteúdos, tais como razão e proporção, para que possa ser elaborada a noção de divisão das oitavas musicais, por exemplo.

É possível compreender a teoria musical pitagórica, através do uso de frações e proporções, aliando Música e Matemática, trabalhando em uma perspectiva interdisciplinar, que aborda um campo de destaque e de interesse na vida de todos os sujeitos, a fim de proporcionar um aprendizado que tenha um maior significado para o educando, vindo ao encontro das propostas vigentes no sistema de educação atual. Gadotti (2000) assevera que, nesse contexto, o professor é o mediador do conhecimento e o aluno o sujeito responsável por sua formação, sendo que, desta forma, se pode afirmar o quanto é relevante o educador trabalhar a partir da interdisciplinaridade, na busca por ferramentas que facilitem a aprendizagem do aluno, tornando-a, pois, bastante significativa.

Interfaces entre a musicalidade e a educação

A música é a linguagem que se traduz em formas capazes de expressar sentimentos e pensamentos, por meio da organização e relacionamento expressivo entre o som e o silêncio. Está presente em todas as culturas, nas mais diversas situações: festas, comemorações, rituais religiosos, manifestações cívicas e políticas, sendo facilitadora do processo de aprendizagem como instrumento para tornar a escola um lugar mais alegre e receptivo, e também ampliando o conhecimento musical do aluno, afinal a música é um bem cultural e seu conhecimento não deve ser privilégio de poucos. Faz parte da Educação desde muito tempo, sendo que, já na Grécia antiga, era considerada fundamental para a formação dos futuros cidadãos, ao lado da Matemática e da Filosofia, segundo elucidam Berchem (1992, p. 62) e como consta, igualmente, no Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil (1998, p. 45). Para Campbell, Campbell e Dickinson (2000, p. 132), "a música é, sem dúvida, uma das mais antigas formas de arte, a qual utiliza a voz humana e o corpo como instrumentos naturais e meios de autoexpressão".

Assim, desde muito pequena a criança já ouve diferentes tipos de sons e ruídos, e, com o transcorrer do tempo, começa a distinguí-los. A partir daí inicia-se um processo de compreensão e exploração do contexto que a cerca. Seguindo esta ótica, é muito importante que a criança, logo após o nascimento, passe a explorar, a fim de despertar sua curiosidade, os diferentes sons e ruídos que agora integram parte de sua vida e que a ajudarão a expressarem-se através de gestos, sons, balbucios, fazendo com que ela entenda e se torne receptiva à música. Como afirma Jeandot (1990, p. 18):

> [...] a receptividade à música é um fenômeno corporal. Ao nascer a criança entra em contato com o universo que a cerca: sons produzidos pelos seres vivos e pelos objetos. Sua relação

> com a música é imediata, seja através do acalanto da mãe e do canto de outras pessoas, seja através dos aparelhos sonoros de sua casa.

Sob tal prisma, proporcionar às crianças momentos de experiência musical, sejam elas cantigas de roda, cantigas de ninar, canções folclóricas ou outras, em qualquer ambiente, auxiliará na descoberta das qualidades da criança e permitirá a demonstração de sentimentos, tristes ou alegres e também de expressões corporais. Por isso é fundamental que as crianças tenham oportunidades de vivenciar situações concretas que permitam criar e descobrir diferentes sons produzidos por diferentes objetos. Consoante aludem Craidy e Kaercher (2007, p. 130):

> [...] as crianças precisam ter experiências concretas com objetos que emitem sons, instrumentos musicais ou outros e formar um vocabulário específicos para se referir a eventos sonoros. O manuseio de objetos sonoros cria situações em que será possível agrupar ou separar sons, classificar e seriar.

Para que isso aconteça é necessário estimulá-la sempre, de forma que aos poucos construa um repertório que permita iniciar uma forma de comunicar-se por meio dos sons. Passada essa fase, a criança começa aprender a cantar, seu repertório musical aumenta. É aí que a educação desempenha papel importante na formação integral dessa criança, pois é o referido ambiente que serve como suporte para atender às suas necessidades, tais como a formação de hábitos e atitudes, comportamento e o desenvolvimento físico e social, entre outros.

De acordo com Campbell, Campbell e Dickinson (2000, p. 132), "devido à forte conexão entre a música e as emoções, a música em sala de aula pode ajudar a criar um ambiente emocional positivo que desencadeia a aprendizagem". Ainda segundo os aludidos autores (2000), a diversidade de formas lúdico-musicais, propicia que esta criança passe a ter sentidos apurados, como audição e concentração.

Por outro lado, a aprendizagem musical ou a experiência com instrumentos não necessita, obrigatoriamente, de equipamentos sofisticados, já que estes podem ser confeccionados com materiais recicláveis, expressados com o movimento do próprio corpo e com recursos da natureza. O ensino musical pode ter seu ponto de partida já na infância, sendo que esta fase é considerada de grande importância para a formação dos indivíduos.

Essas experiências são tão importantes que só enriquecem a formação como um todo na criança. De acordo com Jeandot (1997), ao estimular a criança a construir seus próprios instrumentos e utilizá-los, desperta nela a vontade de explorá-los, e isso lhe proporciona prazer. No entanto, é preciso ter muito cuidado quando se enfoca a música na Educação Básica, uma vez ser fundamental que o professor saiba como trabalhar com ela de forma que exista um planejamento prévio, onde as canções sejam escolhidas e relacionadas à idade das crianças, pois, ao contrário, esta pode ser absorvida de maneira negativa pelo educando.

Toda criança é um ser essencialmente musical. O problema da educação consiste, portanto, em saber cultivar esses dotes naturais que, em maior ou menor grau, estão presentes em todas as criaturas, evitando que, por efeito de uma orientação equivocada, permaneçam ocultas ou, o que é pior, sejam submetidas a um processo de deformação para converter-se num motivo de frustação individual, conforme apontam Maffioletti e Rodrigues (1995, p. 109).

Para que esta frustação não ocorra, é importante, primeiramente, que o educador tenha interesses musicais, para, a partir daí, fazer com que a criança tenha acesso à mesma, dando-lhe oportunidade de criar canções, sons, tanto sozinha como com os colegas. É essencial o educador ressaltar os variados tipos de músicas, como erudita, popular, clássica e folclórica, entre outras, e fazer uma pesquisa sobre os compositores, gravações, gerações e estilos, podendo, para isso,

utilizar-se de revistas e da literatura para realizar pesquisas. No enfoque de Ferreira (2001, p. 19), "para que o professor selecione bem as músicas que utilizará em suas aulas, deverá desenvolver seu espírito crítico como ouvinte". Dessa forma, fará com que o aluno desenvolva potencialidades e, consequentemente, valorize mais a música no seu cotidiano.

É nesta ótica que o ensino da música nas escolas é exigido, sendo amparado pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação Brasileira, Lei n. 9.394/96, em seu art. 26, parágrafo sexto, o qual coloca que a música deverá ser conteúdo obrigatório nos diversos níveis da Educação Básica. Cada pessoa tem uma forma de perceber e expressar-se nas ambiências em que está inserida e isto deve ser considerado, tanto em relação à capacidade musical como em outras atividades desenvolvidas pelas crianças.

Além do mais, a música também pode ser utilizada como ferramenta fundamental na memorização de conteúdos escolares, no caso em questão, os matemáticos, como uma estratégia para melhor fixação, visto que sua apropriação é mais rápida, fácil, divertida e lúdica. A natureza, por si só, é toda ritmo e harmonia e o ser humano, nas suas atividades mais cotidianas, sempre produz sonoridades rítmicas. É neste enfoque que a Lei representa um importante passo na evolução do ensino, configurando-se em uma oportunidade de resgatar o papel da música no desenvolvimento não só da criança e do adolescente, mas do ser humano em todas as suas faixas etárias.

Acredita-se, sob esta visão, que as expressões "não tenho dom" e "não tenho jeito" são equivocadas, uma vez que é possível sim aprender a cantar, a compor e a tocar instrumentos musicais. Para cada época e para cada faixa etária existem cantigas específicas, como de ninar, de roda, canto coral, quadrilhas, datas comemorativas, as quais exprimem sentimentos e desejos. Os sons, ritmos e melodias estão em todos os lugares e fazem parte de todas as épocas. Na música tem-se a oportunidade de expressar, comunicar, reivindicar, declarar, enfim, de se manifestar social, culturalmente e, além de tudo, apreender conhecimento.

Implicações pedagógicas nas relações entre conteúdos matemáticos e musicais

A escala temperada, que substituiu a escala pitagórica, dividiu o intervalo de oitava em 12 partes iguais. Nessa escala, as notas formam um círculo fechado, onde o final de uma oitava corresponde ao início de uma nova escala. As sequências dos valores das frequências de notas de uma oitava formam uma progressão geométrica de razão $2^{n/12}$.

Do mesmo modo, Bach dividiu a escala musical em 12 partes através de logaritmos. As 12 notas de sua escala temperada correspondem a logaritmos de base 2. Ele estabeleceu uma relação entre uma sequência aritmética e uma sequência numérica, onde o logaritmo cresce de maneira aritmética e o logaritmando em progressão geométrica.

Para os gregos antigos, harmonia significava combinação de elementos contrastantes, porém, nos tempos atuais, o termo harmonia serve para definir uma combinação de notas e acordes. Para os pitagóricos a harmonia musical era composta por médias aritméticas e harmônicas. De acordo com Brito (2005), os valores (1; 4/3; 3/2; 2) correspondem à harmonia musical pitagórica, sendo 4/3 a média harmônica entre os extremos, e 1 e 2 e 3/2 a média aritmética entre os mesmos.

Nesta perspectiva, é pertinente ressaltar que Pitágoras desenvolveu a escala musical de sete sons, tal como a teoria geocêntrica que vigorava na época, onde havia sete planetas. Buscava compreender a harmonia, ou seja, os sons que se tornavam agradáveis. Em conformidade com

Pereira (2013, p. 18), "Pitágoras descobriu uma certa ordem numérica inerente ao som. É a analogia entre duas séries: o som e o número, um princípio universal extensivo a outras ordens, como a dos astros celestes". Do mesmo modo, destaca-se a percepção de que os tons harmônicos poderiam ser representados por frações dos números inteiros – 1, 1/2, 1/3, 1/4, [...] 1/n –, ou seja, uma série harmônica.

Nesse caminho, Contador (2007) assevera que Pitágoras, partindo desses princípios matemáticos, criou um instrumento chamado monocórdio para suas experiências. Os sons obtidos por ele originaram vários outros instrumentos como a lira, o alaúde, o cravo, o violão, o piano, o órgão de tubo e, também, vários instrumentos de sopro, que funcionam segundo o mesmo princípio, a corda vibratória, sendo substituída por uma coluna de ar que vibra.

Ainda segundo este autor (2007, p. 178), "depois que Pitágoras descobriu a relação 2:1 do som fundamental com sua oitava, verificou, igualmente, que, quando a corda é tocada em 2/3 de seu comprimento, o som é uma quinta mais alto, em 3:4 uma quarta mais alto. Criou, então, sua escala baseada na superposição de quintas (e suas inversões, as quartas)."

Em outra ótica pedagógica, com o auxílio do monocórdio, pode-se igualmente desenvolver noções sobre frações. Pressionando-se a corda em intervalos diferentes são produzidos sons diferentes. Os pitagóricos observaram que o som produzido pelo instrumento com a corda inteira e a sua metade estão em uma relação sensível ao ouvido humano, que corresponde ao intervalo de oitava, sendo denominado de consonância.

Apoiando-se nestas concepções sugere-se que, por meio destas e várias outras noções musicais os educandos assimilem conceitos matemáticos de forma significativa, associando-os a situações da vida que estejam mais sintonizadas com suas competências cognitivas/afetivas, tentando resolver problemas na interface da Música com a Matemática. Estas relações possibilitam trabalhar temas, tais como frações, proporções e logaritmos com uma abordagem diferenciada em sala de aula.

Uma conexão possível

Constata-se que a musicalidade traz uma série de benefícios à vida do ser humano, despertando emoções e sentimentos. Para quem tem a capacidade de assimilação musical, esta pode proporcionar prazer e satisfação, além de possuir, igualmente, essencial relevância na aprendizagem e na socialização do indivíduo. Ao permitir a expressividade através dos gestos e dos movimentos corporais, a música faz com que os sujeitos sintam a satisfação e a alegria de aprender e se desenvolver por meio desta linguagem.

Nessa dimensão, é fundamental incentivar a criança, desde pequena, a ter interesse pela música. Além de ser uma forma de manter a criança de bem consigo mesma, também desperta o interesse pela descoberta dos movimentos corporais e a sensibilidade para o mundo dos sons. É com essa sensibilidade que a criança descobrirá suas próprias qualidades. Por isso se verifica essencial o incentivo à inserção da música nas escolas. Práticas que conectem conhecimentos matemáticos e musicais desencadeiam atividades que contribuem para o desenvolvimento das habilidades e do pensamento autônomo, criativo, reflexivo e crítico dos sujeitos. Ao estar presente no ambiente escolar, a música desperta o senso de criação, recreação e cientificidade ao mesmo tempo.

Esta investigação fez um pequeno passeio histórico por algumas conquistas da humanidade, especialmente no que se refere à inter-relação entre Música e Matemática. Nessa

curta caminhada, foi possível perceber, com facilidade, a notória contribuição de conhecimentos das ciências consideradas exatas para alavancar as artes, mais precisamente, a musical. O contrário também foi constatado: é possível visualizar concepções matemáticas ao estudar as musicais. Igualmente, o desenvolvimento da pesquisa possibilitou verificar que se mostra imprescindível a formação continuada de professores, bem como o exercício de práticas interdisciplinares no contexto escolar.

A partir do exposto, pode-se concluir que a Matemática na sua conexão com a Música pode propiciar inúmeros avanços no desenvolvimento cognitivo, intelectual, emocional e pessoal de todos os indivíduos, sendo que a busca por trazer este momento e este estudo para a sala de aula é tarefa a ser cumprida, essencialmente, pelo educador. Ainda que seja uma prática pouco difundida no currículo escolar, apesar da instituição da citada Lei de Diretrizes e Bases da Educação Brasileira, pensar em uma metodologia de forma diferenciada e renovada, sempre fará parte do compromisso com uma educação significativa.

Referências

Abdounur, Oscar João. (2003). *Matemática e Música*: o pensamento analógico na construção de significados. 3. ed. São Paulo: Escrituras.

Brasil, Ministério da Educação e do Desporto. (1998). *Referencial Curricular Nacional para a Educação Infantil*. v. 3. Brasília: MEC\SEF.

Brasil, Presidência da República, Casa Civil, Subchefia para Assuntos Jurídicos. (2014). *Lei n. 9.394, de 20 de dezembro de 1996*. Estabelece as diretrizes e bases da educação nacional. 18. ed. São Paulo: Saraiva.

Berchem, Theodor. (1992). A Missão da Universidade na formação e no desenvolvimento culturais: a diversidade no seio da Universidade. In: *Temas Universitários I*. Porto Alegre: PUC/RS.

Brito, Arlete de Jesus. (2005). A Matemática de Isidoro de Sevilha e a tradição pitagórica. *Revista da SBHC*. Rio de Janeiro, v. 3, n. 1, jan./jun. p. 49-57.

Campbell, Linda; Campbell, Bruce; Dickinson Dee. (2002). Entrando em Sintonia: inteligência musical. In: Campbell, Linda; Campbell, Bruce; Dickinson, Dee (Orgs.). *Ensino e Aprendizagem por meio das Inteligências Múltiplas*. 2. ed. Porto Alegre: Artes Médicas Sul.

Campos, Gean Pierre da Silva. (2009). *Matemática e Música*: práticas pedagógicas em oficinas interdisciplinares. (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal do Espírito Santo (UFES). Brasil.

Contador, Paulo Roberto Martins. (2007). *A Matemática na arte e na vida*. São Paulo: Livraria da Física.

Craidy, Carmem Maria, Kaercher, Gládis Elise P. da Silva. (2007). *Educação Infantil*: pra que te quero. Porto Alegre: Artmed.

Ferreira, Martins. (2001) *Como usar a Música na sala de aula*. São Paulo: Contexto.

Jeandot, Nicole. (1990). *Explorando o universo da Música*. São Paulo: Scipione.

Jeandot, Nicole. (1997). *Explorando o universo da Música*. 2 ed. São Paulo: Scipione.

Gadotti, Moacir. (2000). *Perspectivas atuais da Educação*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Gardner, Howard. (1994). *Estruturas da mente*: a teoria das Inteligências Múltiplas. Porto Alegre: Artes Médicas.

Maffioletti, Leda; Rodrigues, Jussara H. (1995). *Cantigas de Roda*. 7. ed. Porto Alegre: Magister.

Nobre, Jorge. (2008). *Apostila de Teoria Musical* - Projeto Fortalecimento Musical. Ceará: Governo do Estado do Ceará; Secretaria da Cultura; Sistema Estadual de Bandas de Música.

Pereira, Marcos do Carmo. (2013). *Matemática e Música*: de Pitágoras aos dias de hoje. (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro (UniRio). Brasil.

Santomé, Jurjo Torres. (1998). *Globalização e interdisciplinaridade*: o currículo integrado. Porto Alegre: Artes Médicas Sul.

A utilização dos laboratórios de Matemática no ensino médio integrado ao profissional

Marli Alves Flores **Melo**
Universidade Católica de Brasília
Brasil
floresmelo@gmail.com
Celio da **Cunha**
Universidade de Brasília
Brasil
celio.cunha@brturbo.com.br

Resumo

Apresentamos uma pesquisa realizada em escolas vinculadas à Secretaria de Educação de um estado da federação brasileira na região sul. Objetivamos diagnosticar as práticas pedagógicas desenvolvidas nos laboratórios de Matemática instituídos pelo Ministério da Educação e implantados nas unidades escolares que aderiram ao Programa Brasil Profissionalizado. Participaram do estudo professores de matemática e alunos do ensino médio integrado profissional. Foram realizadas visitas técnicas e aplicados questionários semiestruturados. O método utilizado foi análise de conteúdo. Os resultados indicaram uma visão diferenciada de todos os envolvidos quanto ao uso dos novos espaços; alguns professores demonstraram ter dificuldades na aplicação de jogos e no uso de instrumentos na resolução de problemas; as atividades propostas ainda não atendem às necessidades educacionais dos alunos para interpretar e construir conceitos matemáticos de maneira articulada, lógica e racional. Concluímos ser importante agregar às concepções das aprendizagens nos contextos da educação matemática.

Palavras-Chave: laboratórios de matemática, ensino profissional.

Introdução

Historicamente, no Brasil, são registrados alguns dos encaminhamentos das Políticas Educacionais de Governo Federal em que se incluíram a manutenção do alto conceito da educação profissional, científica e tecnológica. No contexto atual do plano de governo, foi apresentada uma proposta nessa área educacional e institucionalizada para promover de forma sistêmica o conceito formativo da atividade humana, estimular nos educandos os encaminhamentos da vida em sociedade na entrada no campo de trabalho pela implantação e a implementação do ensino propedêutico, formação profissional, cientifica e tecnológica de qualidade e sem oposições às novas formas de se ministrarem os conhecimentos gerais e específicos.

Nessa perspectiva, destacamos o Programa Brasil Profissionalizado (PBP) lançado pelo Decreto nº 6.302, de 12 de Dezembro de 2007, no Governo do Presidente Lula – Ministro da Educação Fernando Haddad – objetivando, por meio da assistência financeira por convênios e assistência técnica, atender e fornecer formação, capacitação, equipamentos, mobiliários dentro

das normas técnicas-padrão do Ministério da Educação (MEC) e o Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE) para todas as escolas conveniadas com o Programa e que oferecem ensino médio integrado (EMI) e as que funcionam na modalidade profissional técnicas (EPT); incentivar o retorno de jovens e adultos aos ambientes escolares; conjugar a elevação de escolaridade (EJA) à formação profissional técnica (PROEJA); contribuir para a melhoria dos indicadores sociais e educacionais, especialmente do IDEB e, em todo o país, fazer a articulação do ensino médio à educação profissional nas modalidades integrada, concomitante e subsequente.

Urge, então, a necessidade em melhorar as redes de ensino estaduais iniciando pela demanda do conjunto das infraestruturas existentes na montagem de laboratórios de ensino em seguimento as vertentes básicas e ou tecnológicas. Ressalta-se que no Catálogo Nacional de Cursos Técnicos (2008), encontram-se organizadas em 11 eixos tecnológicos as 155 possibilidades da oferta nacional dos cursos técnicos de nível médio e organizados por suas características científicas e tecnológicas. Dentre estes, estão 31 laboratórios denominados de padrão por serem os mais solicitados com demandas de turmas e alunos cujos espaços existentes nas escolas precisaram de reformas, ampliações e ou atualizações dos itens de composição.

Face à expansão do Programa Brasil Profissionalizado, o Ministério da Educação (MEC) por Assistência Técnica[1] equipou as escolas que oferecem ensino médio integrado ao profissional, atendendo às declarações dos gestores estaduais, registradas por termos de compromisso, em que atestaram a veracidade das adequações dos ambientes e dos espaços para o recebimento dos itens e instrumentos de composição de laboratórios, como o de matemática.

Para isso, a gestão federal de planejamento garantiu recursos financeiros provenientes de fundos públicos, com elo no marco regulatório na aplicação de origem privada, bem como promoveram articulações políticas realizadas em diferentes instâncias nos ministérios, secretarias extraordinárias e empresas estatais.

Diante do exposto, propomos investigar em escolas de ensino médio integrado e profissional os efeitos dos ambientes matematicamente estruturados para o desenvolvimento de práticas pedagógicas por professores de matemática junto aos alunos e, sobretudo, verificar como se dão as aprendizagens nas concepções e contextos teóricos da educação matemática.

A fim de verificar isso, supomos que as atividades que são propostas pelos professores de matemática no âmbito dos laboratórios de matemática, ainda não vêm cumprindo as funções pedagógicas desejáveis para as aprendizagens dos alunos. Deriva-se disso, que tanto teoricamente como nas orientações práticas, faltam subsídios para o entendimento dos conceitos matemáticos que, ao contrário, têm suscitado muitos questionamentos nos alunos.

Importa, então, indagar: num ambiente matematicamente constituído, os alunos que cursam o ensino médio integrado e profissional recebem orientações no ensino profissional que os conduzam a interpretar métodos para construir modelos matemáticos de maneira articulada, lógica e racional em consonância com as concepções teóricas da educação matemática?

Metodologia

Participaram deste estudo trinta (n=30) sujeitos de pesquisa que estudam ou trabalham em quinze (n=15) das escolas investigadas da rede pública de ensino médio integrado e profissional

[1]*Nota:* Assistência técnica tem como objetivo fornecer equipamentos, mobiliários, formação, capacitação, de acordo com normas técnicas-padrão do MEC/FNDE para as escolas já conveniadas.

num estado da federação brasileira da região sul, assim definidos: (a) dez (n=10) professores efetivos de matemática e que ministram aulas práticas nos laboratórios de matemática e exercem o papel de mediadores das aprendizagens dos alunos; (b) vinte (n=20) alunos que cursam regularmente o ensino médio integrado profissional.

Para efeito de seleção das unidades escolares e concretização dessa pesquisa, consideramos que as mesmas participavam dos projetos apresentados pela Secretaria de Educação estadual ao Ministério da Educação e aprovados como condição para o recebimento de laboratórios pelo Programa Brasil Profissionalizado.

Instrumento

A pesquisa foi realizada por meio de questionários semiestruturados. Os mesmos foram aplicados *on-line* pela plataforma *SurveyMonkey* (2013), uma ferramenta que disponibiliza diferentes maneiras de se formular e organizar tipos de questões, além de disponibilizar recursos automáticos para se tabular e mensurar as postagens das respostas, principalmente, por sua facilidade na utilização das redes de internet e de se alcançar em tempo real o maior número de respondentes.

Os protocolos de entrevista foram construídos pela pesquisadora com base em publicações que tratam da educação profissional, científica e tecnológica e da educação matemática.

Algumas informações foram registradas *in loco* em visitas técnicas e observações diretas feitas por amostragem nos laboratórios de matemática das escolas pesquisadas.

Procedimentos

Elaboramos o protocolo de entrevista para coletar as concepções dos atores envolvidos com a educação profissional e de maneira a obter informações qualitativas no que concerne a como se dão as aprendizagens nos laboratórios de matemática.

Preliminarmente, propomos um estudo piloto para serem identificadas as questões que poderiam necessitar de reformulações, no sentido de assegurar a compreensão pelos participantes do estudo.

Antes dos encaminhamentos dos questionários, realizamos contatos telefônicos com os gestores das escolas para solicitar apoio e ajuda no repasse dos links dos protocolos pelos endereços eletrônicos dos participantes da nossa pesquisa.

Para oficializar o aceite para o início da investigação, enviamos uma carta-convite por e-mail aos possíveis entrevistados, informando-os das suas valiosas contribuições em responder os questionários encaminhados.

Sinalizamos os links que foram organizados por respondentes e as explicações sobre a ferramenta a ser utilizada.

Salientamos que as dúvidas quanto à aplicação e conteúdos dos questionários poderiam ser consultadas e dirimidas pela pesquisadora.

No processo de postagens das respostas *on-line*, os respondentes observaram e registraram informações detalhadas da realidade dos laboratórios de matemática, pelas quais, levantamos a frequência por escola pesquisada e procedemos às análises dos dados.

Optou-se pela análise de conteúdo (Bardin, 2009) por ser um dos métodos mais difundidos em pesquisas e que incorpora um conjunto de técnicas facilitadoras para o estudo das comunicações entre os sujeitos, privilegiando as formas de linguagem oral e escrita, além de valorizar a transmissão do conteúdo da mensagem.

As respostas coletadas estão dispostas por cenários que compreendem três etapas, são elas: 1ª Etapa – montagem dos laboratórios de matemática; 2ª etapa – dos laboratórios de matemática e itens de composição; 3ª etapa – práticas pedagógicas desenvolvidas no contexto da teoria da educação matemática.

A seguir os resultados dos dados e as respectivas análises e discussões.

1ª Etapa: Montagem dos laboratórios de matemática

Verificamos nas escolas pesquisadas (n=15) que os itens e os equipamentos que compõem os laboratórios de matemática solicitados pelos gestores escolares e professores de matemática, estão em sintonia com os planos aprovados no que concerne às diretrizes curriculares da educação profissional, científica e tecnológica.

Obtivemos as informações sobre os ambientes e os espaços para a implantação e ou implementação dos laboratórios de ensino e mapeamos os seguintes aspectos: os laboratórios de matemática comportam o número de alunos (n=20 por espaço) e atendem à demanda da escola; nos planos de aula dos professores de matemática consta-se descrições minuciosas das aulas práticas para a realização de experimentações nestes laboratórios.

Na obtenção dos dados quantitativos dos espaços e das condições dos ambientes, constatamos a execução de algumas ações diretas da Secretaria da Educação nas escolas, como: as participações dos gestores escolares e dos professores de matemática nas reuniões realizadas por meio de videoconferências promovidas pela coordenação de licitações do Fundo Nacional de Desenvolvimento e Educação – FNDE, para os esclarecimentos sobre a logística da entrega, da distribuição e das instalações e sobre as formas da efetivação dos testes de aderência e comprovação da qualidade dos itens que comporão os laboratórios de matemática; das competências da coordenação do ensino profissional da Secretaria de Educação em parceria com os gestores das escolas da rede de ensino estadual nas atualizações dos cronogramas das reformas e ampliações e dos registros no sistema integrado de monitoramento execução e controle do Ministério da Educação (SIMEC, 2014), especificamente, nas abas que indicam a situação dos convênios e sinalizam o andamento das obras do Programa Brasil Profissionalizado.

Quanto à operacionalização detectamos nas visitas técnicas as escolas investigadas (n=20) a funcionalidade dos laboratórios recomendados pelo programa, constatando-se: a existência de pelo menos um laboratório de matemática em cinco (n=5) escolas com capacidade recomendada para atender 20 alunos, por turma; seis (n=6) escolas dispõem de um técnico especializado que realiza a manutenção regularmente dos equipamentos dos laboratórios básicos no local; percebemos que a maioria dos professores de matemática (n=15) utiliza frequentemente os laboratórios de matemática para o desenvolvimento de atividades práticas em complementação às aulas teóricas; em três (n=3) escolas encontramos os laboratórios de matemática pouco equipados e com baixa capacidade para serem utilizados na resolução de problemas; em duas (n=2) escolas os laboratórios de matemática não estão sendo utilizados por falta de professores nessa área de atuação.

2ª Etapa:

Descrevemos no quadro 1, os itens de composição definidos para compor os laboratórios de matemática. Buscamos informações junto aos gestores escolares sobre as formas das indicações e das aquisições dos jogos e instrumentos. Confirmamos que todos foram aprovados e comprados, depois das consultas realizadas junto aos professores de matemática das escolas contempladas, alguns docentes de Institutos e de Universidades Federais que desenvolvem projetos de pesquisas em laboratórios de matemática e representantes de diversas empresas brasileiras especializadas na produção e vendas no ramo de materiais didáticos.

Quadro 1

Itens e instrumentos de composição dos laboratórios de matemática

Conjunto de instrumentos para medição e construção em geometria
10 computadores
Balança de Arquimedes
Círculo fracionado – (Aluno)
Círculo fracionado – (Professor)
Conjunto de banners para matemática ensino médio
Conjunto de cubos
Conjunto de engrenagens com contadores de voltas
Conjunto de formas geométricas – aluno
Conjunto de formas geométricas – professor
Conjunto de sólidos geométricos
Conjunto de sólidos geométricos – planificação
Conjunto para cálculo da área sobre uma curva
Conjunto para construir árvores de possibilidades
Conjunto probabilidade
Conjunto produtos notáveis
Conversor binário
Conversor Multibase
Data Show
Espelhos Angulares
Kit "Multiuso" Completo para a Matemática e Estatística
Kit para estudo de Balística
Kit Teorema de Pitágoras – (Aluno)
Kit Teorema de Pitágoras – (Professor)
Nível com escala
O Ciclo Trigonométrico
Paquímetro do professor
Pêndulo
Plano inclinado para estudo de lançamento de projeteis
Plano para construção de elipses
Projetor de segmento
Quadro de aço formato A-1
Quadro interativo
Recipiente elíptico
Relações métricas do triângulo retângulo – (Aluno)
Relações métricas do triângulo retângulo – (Professor)
Sólidos de revolução
Talha de Arquimedes
Torre de Hanói

Fonte: Ministério da Educação. SETEC. 2014.

Foram, ainda, sugeridos aos gestores escolares e aos professores, alguns sites de softwares específicos de matemática que são gratuitos de domínio público para procederem às instalações nos respectivos computadores dos laboratórios de matemática.

São eles:

Quadro 2
Softwares

Softwares	Sites disponíveis
Geogebra	Geogebra é um programa gratuito http://www.geogebra.at/
Graphmatica	Graphmatica, versão avaliativa, totalmente funcional em http://www107.pair.com/cammsoft/graphmatica.htm
Máxima	Máxima é um programa gratuito, em: http://prdownloads.sourceforge.net
Poli	Poli, versão totalmente funcional em: http://www.peda.com/poly
Régua e Compasso	Régua e Compasso é um programa gratuito, em: http://www.khemis.hpg.ig.com.br/car/.
Trigonométrico	Trigonométrico é um programa gratuito em: http://www.apm.pt/apm
Wingeon	Wingeon é um programa gratuito http://mat h.exeter.edu/rparris/wingeom.htm
Winma	Gratuito, Winmat, disponível em: http://math.exeter.edu/rparris/winmat.html
Winplot	Winplot disponível gratuitamente em: http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html.

Fonte: Ministério da Educação. SETEC. 2014.

3ª Etapa: práticas pedagógicas desenvolvidas nas concepções das teorias matemáticas.

Os alunos, a maioria dos entrevistados (n=20), declararam que nos ambientes dos laboratórios há o comprometimento dos professores de matemática em trabalhar as teorias matemáticas agregadas às práticas didáticas e pedagógicas. Em linhas gerais, resumiram algumas das atividades propostas nos laboratórios de matemática e mediadas pelos professores tais como: compartilham e encorajam a curiosidade de seus alunos; induzem a elaboração de hipóteses; tentam aplicar num nível mais alto de complexidade no uso dos equipamentos; buscam enriquecer o conhecimento com atividades diferenciadas; possibilitam que modifiquem os rumos de uma investigação, a fim de torná-la mais desafiadora; provocam os alunos para que apresentem explicações e conexões; repassam informações completas acerca do uso dos jogos e dos equipamentos; motivam os alunos para que participem de atividades fora da escola assumindo alguma responsabilidade pela organização de tais atividades; estimulam os alunos para que realizem em casa, trabalhos de investigação com materiais e equipamentos do simples ao complexo. No entanto, na resolução de problemas específicos, percebem que alguns dos instrumentos de apoio e jogos recomendados são pouco utilizados pelos professores.

Nesses encaminhamentos, situamos que, quando o aluno passa a fixar a relação tríplice entre o professor, o aluno e o saber, sugere-se um "contrato didático", que pode ser identificado quando um conteúdo ou conhecimento, no caso o matemático, é visado. Teoricamente, o que se define para um "contrato didático" é um conjunto de comportamentos provenientes do professor e esperado pelo aluno, e o conjunto de comportamentos do aluno, esperado pelo professor, ou

seja, os participantes fazem parte daquilo que se encontra nas "cláusulas*"* estabelecidas em um contrato (Franchi, 2002; Pais, 2002; Silva, 2002).

Já a maioria dos professores de matemática entrevistados (n=10), sinalizou que estiveram diretamente envolvidos em todo o processo de montagem dos laboratórios de matemática. Além disso, entendem que exercem o papel de mediadores das estratégias de ensino nestes ambientes.

Pelas circunstâncias, estes professores realmente exercem mais o papel fundamental de facilitadores da aprendizagem, pelo fato de estarem mais próximos do aluno e poderem organizar o ambiente pedagógico deste. Nesse sentido, Muniz (2001) afirma que o papel do mediador, especialmente do professor, é de ajudar o aprendiz a modelizar seus atos de aprendizagem. Para o autor, essa ajuda traduz-se em tornar o aprendiz consciente de seu próprio processo de aprendizagem.

Em relação a isso, buscamos em Vergnaud (1996), que ressalta a necessidade de intervenção do outro para que a aprendizagem de conteúdos escolares ocorra, a mediação faz-se necessária, tanto no processo de aprendizagem, quanto em todos os espaços da aprendizagem.

Por outro lado, parte dos professores entrevistados (n=6), revelou ter dificuldades em aplicar os instrumentos ou jogos existentes nos laboratórios de matemática ao reconhecerem a falta de conhecimento quanto ao uso de instrumentação para vincular a teoria à prática. Também colocaram que sentem insegurança em compartilhar com os alunos alguns jogos e ou os aparelhos por não dominarem as técnica e as regras.

Constatou-se que apenas um (n=1) dos professores entrevistados, demonstra ter conhecimentos superiores no uso de técnicas, apresenta criações próprias de jogos; consegue resolver problemas matemáticos com visão diferenciada junto aos alunos, valoriza o sentido da investigação e procura envolver um dos principais objetivos descritos na teoria da Educação Matemática, e, que de acordo com Pais (2002), é despertar nos educandos o gosto pela criação de hábitos permanentes, estimular o uso do raciocínio e cultivar o sentido do desafio nas novas descobertas nas resoluções de problemas.

Disso, percebe-se haver a compreensão da transposição didática, que, em conformidade com Pais (2002), pode ocorrer quando se constata que os alunos se comportam nos laboratórios de matemática de maneira diferenciada e com total liberdade, assim como, podem escolher métodos de seu interesse que acabam gerando transformações em questões matemáticas, cujas soluções já eram conhecidas. Neste contexto, pode-se ainda analisar que isto corrobora com as literaturas teorias das situações da didática, situações didáticas, a - didáticas Brousseau (2008) inserida no contexto da educação matemática (Chevallard, 1991; Franchi, 2002; Freitas, 2002; Muniz, 2001; Pais, 2001; Parra & Saiz, 1996).

Quase a totalidade dos professores de matemática entrevistados (n=8), afirmaram que precisam de atualizações por meio de cursos capacitação e formação continuada. Assim, almejam avançar nos embasamentos teóricos e práticos da educação matemática. Essa colocação é de alto interesse, pois pressupõem que as atividades de matemáticas propostas nesse foco, laboratórios de matemática, motivam os alunos a desenvolverem suas habilidades lógicas e possibilitam um maior desempenho e que os capacitam a enfrentar muitos desafios inseridos no mundo contemporâneo.

Concluímos que muitas das situações, que ocorrem no desenvolvimento das práticas pedagógicas nos laboratórios de matemática, requerem a utilização de estratégias comuns mais

diversificadas e devem estar em consonância com os cursos técnicos ofertados nas escolas investigadas.

Temos ser essencial, o estabelecimento das concepções da teoria da educação matemática conectadas com que se deseja para o aluno do ensino profissional às aprendizagens matemática. Para isso, a atuação dos professores como mediadores dos saberes junto aos alunos, suscita estudos específicos para fomentar as vertentes teóricas do ensino médio integrado e profissional e suas aplicações práticas.

Considerações finais

Mediante ao exposto, identificamos, nas escolas pesquisadas, haver certo distanciamento das concepções da teoria da educação matemática e as práticas pedagógicas desenvolvidas nos laboratórios de matemática, bem como extrapolam-se as ações estruturantes das diretrizes curriculares da educação profissional, científica e tecnológica nas formas de se estabelecerem as demandas reais em relação aos cursos técnicos ofertados.

Deriva-se que o Programa Brasil Profissionalizado foi lançado com critérios capazes de garantir a o sucesso na adesão do projeto de ensino e na meta do fortalecimento das aprendizagens de maneira didática para proporcionar uma formação integral com qualidade.

Diante desse cenário, entendemos que a reforma promovida no ensino profissional por meio de investimentos em diversas áreas e ações propiciadas pelo programa de expansão, então, exige das instituições de ensino um modelo pedagógico atualizado e dinâmico.

Nessa perspectiva, foram definidas algumas bases curriculares entre o ensino médio e o técnico cujo marco teórico fundamenta-se no desenvolvimento integral com abrangência entre teoria e prática, bem como obedecendo aos aspectos legais e políticos que contemplam a educação, o campo de trabalho, alguns focos sociais inseridos num currículo concebido por um conjunto de relações do sentido escolar às aprendizagens (IFRN, 2012).

Para se garantir isso, nas escolas estaduais observou-se, pois, que os professores de matemática são fundamentais para retomarem as atividades práticas, por estas estarem sendo ministradas descontextualizadas e desvinculadas das ementas dos cursos profissionais. Ademais, não contemplam alguns pontos importantes da didática contextualizada na educação matemática (Pais, 2001), bem como o conhecimento epistemológico e a práxis pedagógica nos aperfeiçoamentos de forma individual ou coletiva por meio dos saberes adquiridos.

Como implicações futuras, sinalizamos ser preciso estimular a criação de grupos de estudos com os atores envolvidos no ensino médio integrado profissional e se discutir coletivamente mudanças significativas na delimitação das abordagens teórica e prática no âmbito dos laboratórios de matemática, as quais beneficiem as formas mais amplas das aprendizagens dos alunos.

Tal fator se constituirá importante contribuição ao pensamento, abrindo possibilidades de conduzir os alunos a desenvolverem plenamente as estruturas de pensamentos, ainda que restritos, com subsídios para interpretar e construir suas contribuições matemáticas e as futuras demandas no campo de trabalho de maneira articulada, com lógica e racional.

Referências

Bardin, L. (2009). *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70, LDA.

Brasil. (2007). *Decreto nº 6.302, de 12 de dezembro* que *institui o Programa Brasil Profissionalizado*. Brasília: MEC/SETEC.

Brasil. (2012). *Projeto Político-Pedagógico do Instituto Federal do Rio Grande do Norte: uma construção coletiva*. Recuperado em 21 de junho, 2014, de http://portal.ifrn.edu.br/institucional/arquivos/documento-base-do-ppp.

Brousseau, G. (2008). *Introdução ao estudo das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino.* São Paulo: Ática.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique.* Grenoble: La Pensée Sauvage edition.

Franchi, A. (2002). Considerações sobre a teoria dos campos conceituais. In S. D. A. Machado (Org.), *Educação matemática: uma introdução*. São Paulo: EDUC.

Freitas, J. L. M. (2002). Situações didáticas. In S. D. A. Machado (Org.), Educação *matemática: uma introdução*. São Paulo: EDUC.

Ministério da Educação. (2008). *Catálogo nacional de cursos técnicos*. Recuperado em 5 junho, 2014, de http://www.mec.gov.br/ brasilprofissionalizado/laboratórios.

Ministério da Educação. (2010). 31 *Laboratórios-padrão*. Recuperado em 10 julho, 2014, de http://www.mec.gov.br/brasilprofissionalizado/laboratórios.

Ministério da Educação. (2014). *Sistema integrado de monitoramento execução e controle (SIMEC).* Recuperado em 15 de julho, 2014, de http://www.simec.mec.gov.br.

Muniz, C. A. (2001). *Educação e linguagem matemática.* PIE/UnB: Brasília-DF.

Pais, L. C. (2001). *Didática da matemática: uma análise da influência francesa*. Belo Horizonte: Autêntica.

Pais, L. C. (2002). Transposição didática. In S. D. A. Machado (Org.), *Educação Matemática: uma introdução*. São Paulo: EDUC.

Parra, C. & Saiz. (1996). *Didática da matemática: reflexões psicopedagógicas*. Porto Alegre: Artes Médicas.

Silva, B. A. (2002). Contrato didático. In S. D. A. Machado (Org.), *Educação matemática: uma introdução*. São Paulo: EDUC.

Vergnaud, G. (1996). A trama dos campos conceituais na construção dos conhecimentos. *Revista do GEEMPA*, 4, (9-19).

Surveymonkey Help Center. *Dicas para teste piloto: como verificar o design e as configurações.* Recuperado em 5 de setembro, 2013**,** de http://help.surveymonkey.com/articles/pt_BR/kb/Pilot-Test-Tips-How-to-verify-the-design-and-settings.

Algunas tensiones entre las matemáticas escolares y la vida real, una mirada desde el enfoque socio político de la Educación Matemática

Dolly Carolina **Mora** Villota
Liceo de Colombia
Colombia
carolinamora391@gmail.com
Martha Cecilia **Clavijo** Riveros
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
marthacclavijor@gmail.com

Resumen

Esta propuesta nace a partir del análisis de diversos estudios, recopilados por Dooren, Verschaffel y Vicente (2008), frente a la competencia de los estudiantes de nuestro país a la hora de dar solución a problemas, concluyendo que una causa factible de tal fenómeno se encuentra en los problemas que están solucionando nuestros futuras generaciones en el aula de clases. En efecto, se ha creado en ellos la sensación de no haber ninguna relación entre las matemáticas escolares y la vida real; esto como consecuencia de las características de tales problemas, pues convierten "lo que debería ser una motivación para unas matemáticas activas en un artificio para consagrar unas matemáticas pasivas" (Alsina, 2007). Por tanto aplicar la perspectiva del modelado en la educación matemática y hacer uso de la Investigación Crítica sería una estrategia factible para la situación antes descrita.

Palabras clave: Modelación Matemática, sentido de la realidad, Investigación Crítica, Educación Matemática Crítica, Matemática financiera, matemáticas escolares.

Introducción

La responsabilidad que tenemos como educadores para que el aprendizaje deje de ser un proceso cuyo fin es poseer o almacenar conocimiento y pase a ser un proceso que permita actuar en el mundo, es lo que la escuela debe atender y usar; es la llamada praxis educativa como proceso de construcción de significado social: rompiendo la distribución de poder y las clases sociales e integrando la diversidad sociocultural. Pues la sociedad es cambiante, construida por quienes la componen (Oliveras, 2006).

De lo anterior surge la importancia de diseñar Ambientes de aprendizaje a partir de la modelación matemática desde el enfoque socio–político, avanzando hacia la noción de práctica que incluye(re)elaboración e interpretación de modelos ya construidos, en donde los problemas que se den en el ambiente de aprendizaje deben asumirse como problemas en contextos reales permitiéndole a los estudiantes no solo comprender su contexto sino tener también herramientas para transformarlo, cumpliendo de esta manera el deber ser de la escuela (Villa, Bustamante, Berrio, Osorio y Ocampo, 2009) y se privilegie la idea de que la Educación "Matemática es un

campo de estudio de los procesos sociales, históricamente situados, a través de los cuales seres humanos concretos se involucran en la creación y recreación de diversos tipos de conocimiento y razonamiento asociado con la Matemática" (Valero, 2007).

De esta manera se da origen a la pregunta orientadora **¿Qué elementos se pueden considerar para plantear ambientes de aprendizaje donde los estudiantes hagan modelación matemática bajo la perspectiva socio política?** Para abordar dicha pregunta, la metodología que se desea implementar es la investigación crítica dado que en esta se presta especial atención a las situaciones hipotéticas, aunque aun teniendo en cuenta lo que es real. También posibilita incluir la investigación-acción, la investigación participativa, así como otros modelos de investigación de tipo social (Skovsmose y Borba, 2004).

Una discordia evidente

A lo largo de la historia se ha identificado una brecha entre las matemáticas escolares y el mundo real como resultados de los límites de la perspectiva de enseñanza y aprendizaje de estas(Vicente et al., 2008), contradiciendo la razón de ser de las matemáticas en las aulas, pues como lo menciona Sánchez y Torres(2009), al citar a Valero(2007), "Las matemáticas no son un conocimiento neutral, sino que son un conocimiento/poder del cual seres humanos hacen uso en diversas situaciones de la vida social para promover una visión determinada del mundo"(p.3). En este sentido las matemáticas deben ser una herramienta que le permita al estudiante comprender su entorno y dar herramientas para la transformación del mismo.

El inconveniente se da en tanto ésta cultura de aula se limita a resolución de problemas de naturaleza falseadas y manipuladas, caducadas, lejanas, ocultas, no adecuadas, inventadas, etc. (Alsina, 2007) centrando más la atención sobre el proceso de representación de las matemáticas que en los procesos de modelación que estás implican (Posada y Alsina, 2006). Trayendo consigo efectos no deseables, como los descritos por Vicente et al.(2008) del análisis de diversas investigaciones nacionales e internacionales, en donde se identifica que los estudiantes raramente hacen uso de razonamientos no matemáticos para resolver problemas de matemáticas, aun cuando se les ha señalado previamente que requerirán, posiblemente, elementos no matemáticos para su resolución; lo cual implicaría que frente a una situación de la vida cotidiana posiblemente estarían en disposición de hacer uso de todo el 'conocimiento' adquirido en la escuela.

De esta forma el común denominador al enfrentar a un problema a un estudiante es evidenciar dificultades cuando estos requieren la aplicación de conocimientos más allá de los matemáticos e identificar mayor competencias al enfrentarlos a unos de tipo realista, esto se evidencio en diferentes análisis tanto al papel del docente previo, durante y posterior a la clase, como a los procesos y actitudes presentadas por los estudiantes al solucionar un problema, esto se evidencia, por ejemplo, en estudios como los realizados por Greer (1993), en Irlanda del Norte y Verschaffel, De Corte y Lasure (1994) en Bélgica, Renkl (1999) en Alemania, Yoshida, Verschaffel y De Corte(1997) en Japón, Caldwell(1995) en Irlanda del Norte, Reusser y Stebler (1997b) en Suiza, Hidalgo(1997), entre otros(Vicente et al., 2008).

Desde un panorama mucho más cercano y actual encontramos los resultados de las pruebas PISA de nuestro país que constituyen tan solo un pequeño ejemplo que caracteriza el proceso de enseñanza y aprendizaje realizado en el territorio, ésto principalmente a que dentro de la prueba se ve la competencia matemática como "la aptitud de un individuo para identificar y comprender el papel que desempeñan las matemáticas en el mundo, alcanzar razonamientos bien fundados y utilizar y participar en función de las necesidades de la vida como ciudadano constructivo,

comprometido y reflexivo ”(INECSE(2004), citado por Vicente et al., 2008), la cual constituye una de las definiciones más acertada y consecuente con la naturaleza de esta ciencia.

En consecuencia a estas problemáticas Villa et al. (2009) señalan que aunque existen profesores, dentro de dichos estudios, con una fuerte convicción positiva del trabajo del aula y con sólidas actitudes favorables al cambio, es necesario el desarrollo de un sentido de realidad lo cual posibilita al profesor una manera de establecer relaciones entre el contexto sociocultural y las matemáticas escolares. Sumado a esto Vicente et al. (2008) citando a Mukhopadhay y Greer (2001) resaltan que se debe propiciar el desarrollo de la capacidad de desarrollar problemas realistas porque les beneficia tanto a ellos como individuos, convirtiéndolos en pensadores críticos que hagan uso de las matemáticas como una herramienta para analizar los asuntos sociales y políticos, como a la sociedad en general. Lo anterior constituye (Vicente et al., 2008):

> …la mejor manera de evitar que las matemáticas y la vida escolar sean dos cosas inconexas en la vida de los alumnos es que las entiendan como una herramienta eficaz para el análisis de cuestiones personales y de la sociedad, para lo cual han de aprender a ser sensibles a los contextos a los que se refieren los problemas y a la diversidad de perspectivas desde los que se pueden abordar. Las evidencias (…) nos hacen pensar que comenzar a aplicar la perspectiva del modelado en la educación matemática para todos los alumnos desde una edad muy temprana no sólo es importante, sino además factible.

En este orden de ideas, considerando además que la modelación matemática involucra el establecimiento de relaciones entre mundo real y el mundo matemático y la habilidad para moverse entre cada uno de ellos (Villa et al. (2009), citando a Crouch y Haines, 2004), es preciso establecer algunos claridades que permitan comprender **¿Qué elementos se pueden considerar para plantear ambientes de aprendizaje donde los estudiantes hagan modelación matemática bajo la perspectiva socio política?**

Objetivos

Objetivo general

- Identificar que elementos se pueden considerar para plantear ambientes de aprendizaje donde los estudiantes hagan modelación matemática bajo la perspectiva socio política.

Objetivos específicos

- Conceptualizar la modelación matemática bajo la perspectiva socio política.
- Propender por la investigación crítica como metodología para el enfoque socio político de la educación matemática.
- Identificar problemáticas reales susceptibles a ser modeladas desde el enfoque socio político del mundo real presente en el macro contexto de la población con la cual se dará la modelación.
- Generar ambientes de aprendizaje para que los estudiantes modelen una problemática del mundo real presente en el contexto de ellos.
- Evaluar algunos de los impactos que tiene un ambiente de Modelación matemática bajo el enfoque socio político en una comunidad educativa.

¿Qué se ha dicho al respecto?

La presente propuesta tiene como base teórico práctica principalmente desde tres grandes componentes: Modelación matemática, Enfoque socio político e Investigación crítica, a continuación se describen algunos de los referentes tenidos en cuenta para cada una de ellos:

Con respecto a la modelación matemática Villa et al. (2009) la define como el proceso que involucra el establecimiento de relaciones entre mundo real y el mundo matemático y la habilidad para moverse entre cada uno de ellos, a partir del análisis de definiciones como:

Tabla 1
Definiciones Modelación matemática tomadas de Villa et al.(2009).

Autor	Definición de Modelación
GIORDANO et al. (1997, p. 34)	Se define un Modelo Matemático como una construcción matemática dirigida a estudiar un sistema o fenómeno particular del "mundo real". Este modelo puede incluir gráficas, símbolos, simulaciones y construcciones experimentales.
BIEMBENGUT y HEIN (2004, p. 106)	Un Modelo Matemático de un fenómeno o situación problema es un conjunto de símbolos y de relaciones matemáticas que representan, de alguna manera, el fenómeno en cuestión.
RUTHERFORD (1978, p. 5)	Se define como Modelo Matemático de un sistema prototipo (físico, biológico, social, químico, etc.) a un completo y consistente sistema de ecuaciones matemáticasΣ, que es formulado para expresar las leyes de δ, y su solución intenta representar algún aspecto de su comportamiento.
MEN (2006, p. 52)	Un modelo puede entenderse como un sistema figurativo mental, gráfico o tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible. Es una construcción o artefacto material o mental, un sistema – a veces se dice también. "una estructura"- que puede usarse como referencia para lo que se trata de comprender; una imagen analógica que permite volver cercana y concreta una idea o un concepto para su apropiación y manejo.

En consecuencia y apoyado en lo mencionado por Villa et al. (2009), citando a Crouch y Haines (2004), la modelación matemática requiere un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que intentan explicar, predecir y solucionar algunos aspectos de un fenómeno o situación, en la cual se debe involucrar el establecimiento de relaciones entre mundo real y el mundo matemático y la habilidad para moverse entre cada uno de ellos. En donde se debe distinguir la diferencia entre situación artificial y una situación realista, pues muchos trabajos justifican el uso de situaciones artificiales como situaciones de modelación basados en un entendimiento de la realidad como si fuera algo próximo o posible, tal y como lo menciona Posada y Villa (2006, citado por Villa et al. (2009)); pues se pueden distinguir problemas en contextos de realidades falseadas y manipuladas, caducadas, lejanas, ocultas, no adecuadas, inventadas, etc.(Alsina,2007), los cuales constituyen la mayoría de situaciones a los que los estudiantes se enfrentan a la escuela produciendo el efecto descrito en el anterior apartado.

En este orden de ideas la modelación matemática desde el enfoque socio político requiere entender, como lo indica Blum et al. (2007), el término 'mundo real' como todo aquello que tiene relación con la naturaleza, la sociedad o la cultura, incluyendo tanto lo referente a la vida

cotidiana como a los temas escolares y universitarios y disciplinas curriculares diferentes de las matemáticas (Villa et al., 2009). Entendiendo que en el enfoque socio político de la educación matemática:

> …además de ver la educación como un medio para dotar a los ciudadanos de herramientas (particularmente matemáticas) para la comprensión y transformación de su realidad socio política, se busca comprender las dinámicas que se dan en la actual sociedad vinculándolas con la escuela; es por esto que se considera que este trabajo se puede emplear como antecedente para futuras investigaciones en esta línea (Arias y Clavijo, 2013, pág.113).

Desde este enfoque se plantea que las metodologías de investigación que se usan investigación-acción, la investigación participativa, entre otras, no son las apropiadas por esta perspectiva pues aquí se requiere prestar especial atención a las situaciones hipotéticas, aunque aun teniendo en cuenta lo que es real, por lo tanto esos tipos de metodologías contribuyen a la investigación crítica como fundamento pero no son la metodología en sí, pues en esta se busca indagar en torno a la imaginación pedagógica , organización práctica y razonamiento crítico.(Skovsmose y Borba, 2004). Rompiendo de esta manera con el transitar fractal, híbrido e inapropiado por los circuitos académicos donde reside, a nuestro entender, la posibilidad de emergencia de acciones y conocimientos críticos, pues este tipo de investigación requiere de actos que pueden contravenir, subvertir y/o difractar parcialmente las lógicas hegemónicas de dominación contribuyendo a la apertura de formas de acción social políticamente prometedoras(Balasch, Bonet, Callén, Guarderas, Gutiérrez, León, Montenegro, Montenegro, Pujol, Rivero& Sanz, 2005). Además de no hacer un estudio de los objetos de investigación, sino de los sujetos que intervienen en ella y las situaciones mismas que se van generando.

¿Qué tipo de investigación es resonante a la perspectiva?

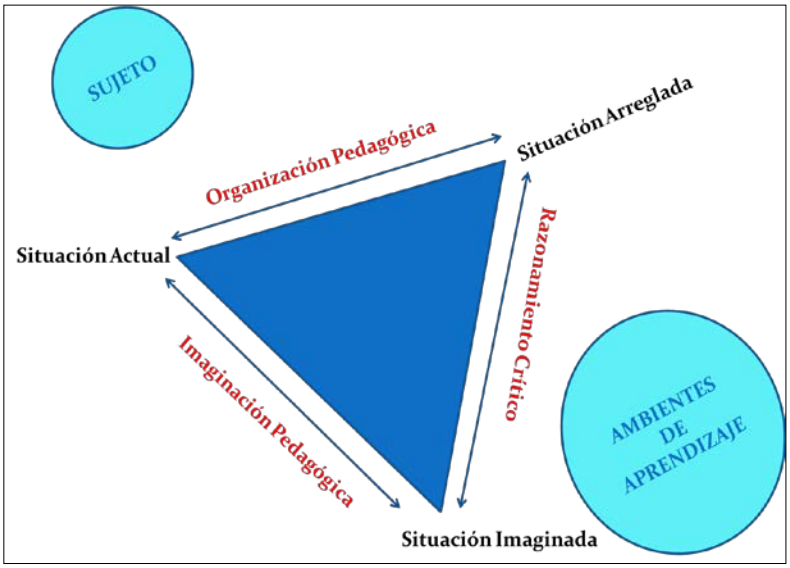
Teniendo en cuenta que la investigación crítica no se limita a abordar y describir solo lo evidente, sino también se ocupa de lo que no lo es pero podría llevarse a cabo, al contemplar aspectos como lo son la imaginación pedagógica, organización práctica y razonamiento crítico; y que pone en juego aspectos de modelos como la investigación acción, investigación acción participativa entre otras, sin convertirse en ninguno de estos pues se requiere ir más allá (Skovsmose y Borba, 2004). Se afirmaría que la investigación crítica requiere de una "actividad corporeizada y semiótico-material que, a partir del reconocimiento de la propia posición de poder, busca identificar y actuar frente a las formas de dominación y procesos de hegemonización presentes en las sociedades actuales" (Balasch et al., 2005). Desde allí, las acciones tentativas para alcanzar los objetivos de este enfoque son:

El proceso inicial y que se debe volver permanente a lo largo de la investigación es la revisión de antecedentes y el establecimiento de un referente sólido relacionado con la modelación matemática bajo la perspectiva socio política, la Educación Matemática Crítica y la investigación crítica, así como la intersección de estos tres componentes de investigación.

Partiendo de ello se realizará un recuento de diversas problemáticas presente en el Estado Colombiano, como macro contexto de la población participe de este estudio. A la par se seleccionará la población y se establecerá la logística de la intervención; analizando de cada una de ellas el impacto, la pertinencia en tiempo, temáticas inmersas, espacio y micro contexto de la población. De lo cual se obtendrá como resultado la elección de una de las problemáticas para ser modeladas y se iniciará con el proceso de modelación.

Posteriormente se seguirá con la intervención, iniciando con la etapa de ubicación y ambientación en el problema, propuesta por Arias y Clavijo (2013), donde a partir de la modelación en donde se sensibiliza a la población frente a la problemática se evidencia la implicación que tiene a su macro contexto o micro contexto; allí se deberá ambientar dicho problema para que se apropien y establezcan estrategias para comprender y actuar frente a la problemática. Y se continuará con el ambiente teniendo en cuenta los referentes teórico-prácticos y las vivencias dentro del mismo, analizando cada uno de los cambios que se dan dentro del aula frente a las diversas relaciones existentes (Skovsmose y Borba, 2004).

Se concluye con un análisis de los resultados obtenidos, especialmente considerando la visión de los estudiantes frente a las matemáticas y su razón de ser en el aula, las acciones docentes, la apropiación del conocimiento matemático, el desarrollo del pensamiento crítico en el estudiante, efectos hacia la problemática, etc.



Evaluación: Lo que se espera

Dentro de la propuesta enmarcada desde la perspectiva socio crítica, se espera por medio de la metodología de Investigación Crítica poder fomentar e identificar en el aula las tres situaciones (actual, ideal, y arreglada) permitiendo que los estudiantes hagan modelación matemática desde su vida real y situaciones problémicas que toquen o influyan su micro y macro contexto.

La propuesta podrá ser un aporte en Educación Matemática Crítica, que desde la práctica y la Teoría, de cuenta de un proceso de alfabetización matemático el cual reconozca los espacios de emancipación y democratización en el aula, desde el manejo del poder, la identificación de los sujetos y la importancia de una transformación social que se ponga en juego a partir de la modelación y los procesos: Imaginación Pedagógica, Organización Práctica y Razonamiento Crítico. De manera que se logre un impacto a nivel social (específicamente de la realidad de Colombia) y que pueda generar interrogantes en la praxis educativa y en el que hacer docente.

Conclusiones

Sabemos que este tipo de Investigaciones se centran en el sujeto, el cual está influido por factores sociopolíticos y culturales propios; en ese sentido, no se llegarán a generalidades

pensando en que ésta investigación sea útil para cualquier población o que se pueda implementar independiente del contexto, pues esto la hace particular. Sin embargo, su estructura se puede adaptar desde un reconocimiento del grupo de personas a las que se les quiera llevar y que pueden incluso presentar las mismas o algunas de las problemáticas sociales que desde investigación se vayan analizando.

Referencias y bibliografía

Alsina, C. (2007). Si Enrique VIII tuvo 6 esposas, ¿cuántas tuvo Enrique IV? *Revista Iberoamericana de Educación*, *43*, 85-101.

Arias, C., & Clavijo, M. (2013). *Ambientes de Aprendizaje para el fomento del Pensamiento Crítico.* (Tesis de pregrado Licenciatura en Matemáticas con Enfasis en Matemáticas). Universidad Distrital Francisco José de Caldás.

Balasch, M., Bonet, B., Callén, B., Guarderas, P., Gutiérrez, P., León, A., Montenegro, K., Montenegro, M., Pujol, J., Rivero, I., & Sanz, J. (2005). Investigación Crítica: Desafíos y Posibilidades. *Athenea Digital, 8*, 129-144.Universitat Autònoma de Barcelona, España. Disponible en el sitio web: http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=53700807

Posada, F., & Villa, J. (2006). *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional* (Tesis de Maestría en Educación Matemática). Universidad de Antioquia, Medellín.

Sánchez, B., & Torres, J. (2009). *Educación Matemática Crítica: Un abordaje desde la perspectiva sociopolítica a los Ambientes de Aprendizaje.* Bogotá: ASOCOLME.

Skovsmose , O., & Borba , M. (2004). Research methodology and critical mathematics education. In P. Valero, & R. Zevenbergen (Eds.), *Researching the Socio-political Issues of Power in Theory and Methodology* (pp. 207-226). Dordrecht: Kluwer.

Valero, P. (2007). *Investigación socio-política en educación matemática: Raíces, tendencias y perspectivas.* Aalborg: universidad de Aalborg

Vicente, S., Dooren, L., & Verschaffel, W. (2008). Utilizar matemáticas para resolver problemas reales. *Cultura y Educación, 20*(4), 391-406.

Villa, J., Bustamante, C., Berrio, M, Osorio, J., & Ocampo, D. (2009). Sentido de realidad y Modelación Matemática: el caso de Alberto. *ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, 2*(2), 159-180.

Algunos aportes para la evaluación desde el enfoque de la Educación Matemática Crítica y la generación de ambientes de aprendizaje

Claudia María **Arias** Arias
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
Claudiaarias_01@hotmail.com
Martha Cecilia **Clavijo** Riveros
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
Claudiaarias_01@hotmail.com
José **Torres** Duarte
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
Claudiaarias_01@hotmail.com

Resumen

Desde la Educación Matemática Crítica se han realizado variadas investigaciones y propuestas de Ambientes de Aprendizaje, sin embargo han surgido inquietudes y se evidencian diferentes estrategias para evaluar el proceso de los estudiantes en cada una de las etapas de manera coherente al enfoque. Es así, como uno de los resultados de la investigación realizada en las Instituciones Educativas Distritales Juan del corral y Restrepo Millán, y bajo la cual se gestó estos aportes se enfocó en identificar algunos de los elementos que debe tener en cuenta el docente de matemáticas para fomentar el pensamiento crítico, e indicadores que permitan dilucidar el nivel de pensamiento crítico en el cual se encuentran los estudiantes, destacando así una posible estructura para llevar a cabo Ambientes de Aprendizaje en el aula de matemáticas y categorías de análisis para evaluar las habilidades y disposiciones del pensamiento crítico y la gestión docente.

Palabras clave: Educación Matemática Crítica, Ambientes de Aprendizaje, evaluación y pensamiento crítico.

Introducción

Los aportes que aquí se describen surgen a partir del trabajo de investigación titulado: *Ambientes de Aprendizaje para el fomento del Pensamiento Crítico: Una propuesta bajo el enfoque de la Educación Matemática Crítica*, desarrollada con una población constituida por estudiantes de Bogotá pertenecientes a grado octavo en el año 2011 de la IED Restrepo Millán ubicada en la localidad Rafael Uribe Uribe y estudiantes de grado octavo y noveno en el año 2012 de la IED Juan del corral ubicada en la localidad de Engativá.

En este caso, el macro contexto de la población anteriormente descrita presentaba un conflicto político social que ha marcado la historia colombiana, como lo destaca Arroyo (2010)

caracterizando y describiendo la disputa entre los mandatarios del país vecino Venezuela y Colombia entre los años 1998y 2008.Este contexto histórico es el punto de partida bajo el cual se pensaron y propusieron los Ambientes de Aprendizaje en el aula, ligados a diversos aspectos conceptuales que se involucraron en la investigación, tales como: la Educación Matemática Crítica [EMC], el pensamiento crítico (habilidades y disposiciones, gestión docente) y los Ambientes de Aprendizaje. Además de describir la metodología empleada haciendo énfasis en el Análisis de la información y sus categorías, para así mostrar las conclusiones relevantes de la investigación.

Marco de referencia

El siguiente esquema sintetiza y relaciona los pilares conceptuales que sustentan lo expuesto en este documento, Educación Matemática Crítica (EMC), Pensamiento Crítico (disposiciones y habilidades) y Ambientes de Aprendizaje.

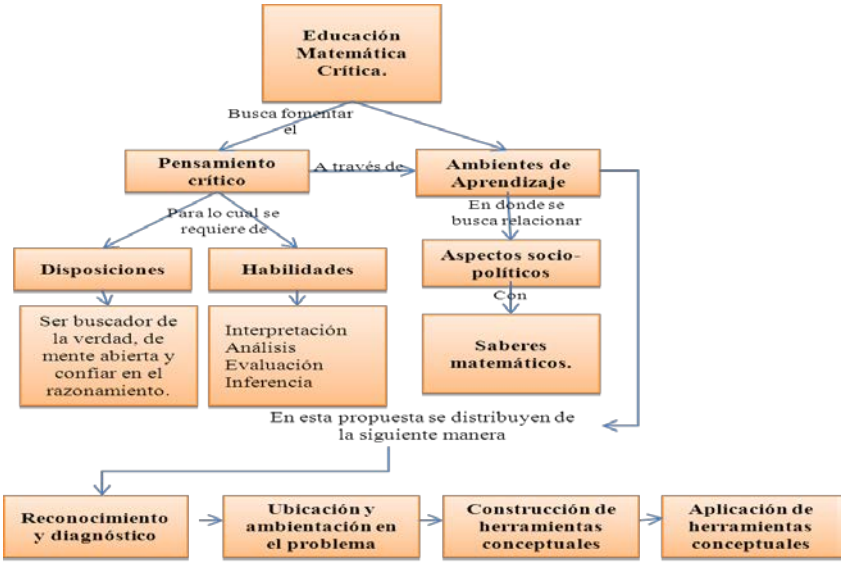


Figura 1. Mapa conceptual: Educación matemática crítica**.**

En el enfoque de la EMC el contexto de los educandos entra a jugar un papel esencial, ya que, este constituye un elemento determinante para involucrar al estudiante en la construcción de su conocimiento (Ángel & Camelo, 2010).

En concordancia a lo anterior, Sánchez y Torres (2009) mencionan que los problemas no están solamente en la "cabeza" de los individuos, sino en la manera como colectivamente y a través de la historia se construyen ideas sobre lo que es válido y legítimo como acción y como pensamiento. Por lo que las problemáticas se pueden encontrar tanto en el nivel de la acción individual como en el nivel de la acción colectiva de grupos de personas y de sistemas sociales.

Ambientes de aprendizaje

Para caracterizar las alternativas que se dan en una clase de matemáticas, en la EMC se tienen en cuenta los AA propuestos por Skovsmose (2000), quien identifica seis alternativas diferentes, que son el resultado de combinar tres tipos de referencia; matemáticas puras, semirrealidad y situaciones de la vida real; con las formas de organización de la actividad de los estudiantes; escenarios de investigación o el paradigma del ejercicio. Los escenarios de investigación como un enfoque alternativo a las actividades que se rigen bajo el paradigma del

ejercicio, proponen situaciones en las que se invita al estudiante a explorar e indagar en torno a unas circunstancias dadas en un tipo de referencia específico.

Pensamiento crítico

El fin principal de esta investigación fue el fortalecimiento del pensamiento crítico, el cual es, según el informe Delphi, el "juicio auto regulado y con propósito que da como resultado la interpretación, análisis, evaluación e inferencia, como también la explicación de las consideraciones de evidencia, conceptuales, metodológicas, criteriológicas o contextuales en las cuales se basa ese juicio*"* (Facione, 2007, p. 21) destacando así las disposiciones, tales como, ser inquisitivo, juicioso, sistemático, buscador de la verdad, de mente abierta, analítico, entre otras; y las habilidades del pensamiento crítico: interpretación, análisis, inferencia y evaluación.

Disposiciones. Teniendo en cuenta lo expuesto por Facione (2007), para el desarrollo o fomento del pensamiento crítico es necesario que además de las habilidades que se describen en el siguiente apartado, el individuo posea ciertas disposiciones. Es decir, una actitud crítica que le permita hacer uso de las habilidades cognitivas de una manera eficiente y coherente con el pensamiento crítico, ya que como lo menciona Delgado y Escurra (2008) mostrar una disposición hacia el pensamiento crítico constituye una motivación interna consistente para enfrentar los problemas y tomar decisiones haciendo uso del pensamiento. Es así como en el desarrollo de esta investigación, se busca potenciar particularmente tres disposiciones, estas son: ser buscador de la verdad, tener confianza en el razonamiento y poseer mente abierta; las cuales le permite al estudiante poner en juego y potenciar las habilidades cognitivas propias del pensamiento crítico. Además de permitirle tomar una postura frente a los conocimientos que adquiere y a la información a la que están expuestos a diario.

Habilidades. Éstas se pueden definir como "la facultad especifica de pensamiento crítico relaciona el campo disciplinario de un dominio, en el cual el sujeto usa el conocimiento y las formas de pensar de su campo de especialización" (Campos, 2007, p. 67); en esta investigación se abordan, específicamente, las habilidades del pensamiento crítico referidas a la interpretación, análisis, evaluación e inferencia.

Gestión docente. La gestión de un docente que ubica su enseñanza en el enfoque de la EMC, reside en la convicción de que el aprendizaje que adquiere un estudiante requiere pensamiento autónomo y reflexivo, donde los estudiantes "hagan uso del conocimiento adquirido para comprenderlo mejor [su entorno], cuestionen su propio conocimiento adquirido y tengan conciencia de su propio conocimiento" (Campos, 2007, p.67).

Fomento de la participación. Desde el enfoque de la EMC, se hace necesario que la construcción del conocimiento se haga desde la colectividad, por lo que el fomento a la participación debe ser una de las prioridades del docente a la hora de gestionar.
Fomento de normas socio matemáticas. A la par de lo mencionado en el apartado anterior (fomento a la participación), se hace necesario que el docente en el aula fomente normas socio matemáticas, tales como, promover el escuchar con atención las opiniones de los demás, en actividades donde por ejemplo, un estudiante deba resumir en sus propias palabras lo que dijo otro estudiante, etc.

Diseño y planeación. En este orden de ideas, se hace necesario hablar de la tercer sub categoría de análisis planteada para esta investigación en cuanto a la gestión, esta hace referencia al diseño y la planeación, en cuanto a esto Campos (2007) resalta que desde este enfoque se necesita que el

docente posea una serie de habilidades personales y manejo de estrategias, técnicas y métodos referidos a su quehacer didáctico en pro del fomento del pensamiento crítico planeando y diseñando actividades pertinentes.

Aspectos metodológicos

El macro contexto de la población objeto de estudio de esta investigación presentó un conflicto político social que ha marcado la historia colombiana. Para describir el contexto histórico en el que se dieron los Ambientes de Aprendizaje en el aula, a continuación se describen los aspectos políticos que influenciaron directamente tanto a los AA como a los estudiantes. Para esto es preciso traer a colación el recuento histórico que realiza Arroyo (2010) de la disputa entre los mandatarios del país vecino Venezuela y Colombia entre los años 1998y 2008, quien señala que:

Durante los últimos años la relación Colombia-Venezuela ha estado marcada por una constante inestabilidad. Se debe recordar que durante el gobierno de Andrés Pastrana y Álvaro Uribe se presentaron diferentes situaciones que vinculan a las FARC con Caracas. A su vez Chávez afirma públicamente, en reiteradas oportunidades, de manera implícita su tendencia a apoyar de manera política a las FARC, otorgándoles incluso estatus político. Posteriormente este conflicto pasa de ser una disputa entre mandatarios y se convierte en un punto de discordia entre las dos naciones, y por ende su población (Arroyo, 2010).

Considerando lo anterior, La metodología empleada fue de tipo cualitativo: Investigación Acción Participativa, propia para la EMC pues según Mora (2005) en esta los actores se involucran en la transformación de su medio y de ellos mismos, y en donde la validez intersubjetiva, se construye en la argumentación y en las expresiones libres de los involucrados, Planteando una propuesta de Ambientes de Aprendizaje que configuraron la propuesta de enseñanza y aprendizaje de esta investigación considerando cuatro etapas:

1. Primera etapa: Reconocimiento y Diagnóstico: se realiza un reconocimiento de las concepciones que tiene el estudiante en torno a la problemática y las interacciones dentro del aula.
2. Segunda etapa: Ubicación y Ambientación en el problema: Aquí los estudiantes tienen un acercamiento frente a la problemática presente en su macro contexto, así mismo pueden reflexionar en torno a esta.
3. Tercera etapa: Construcción de herramientas conceptuales: En esta, partiendo de la necesidad de los estudiantes por encontrar argumentos sustentados que validen o refuten las críticas hechas a la problemática de su macro contexto, se plantean tres Ambientes de Aprendizaje que encapsulan las nociones estadísticas inmersas en una encuesta de opinión.
4. La última etapa: aplicación de las herramientas conceptuales. Busca que a través de un escrito realicen una crítica argumentada a la elaboración y presentación de las encuestas de opinión aplicando las herramientas conceptuales construidas en la etapa anterior.

Conclusiones

- Se reconoce una estructura que puede guiar las propuestas de enseñanza y aprendizaje desde el enfoque de la Educación Matemática Crítica, estas son:

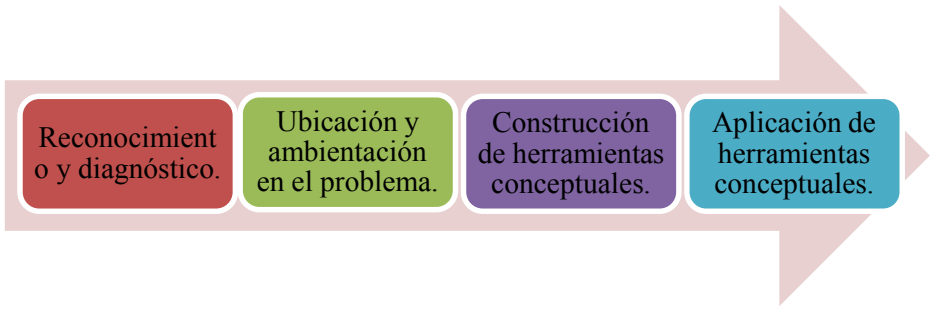


Figura 2. Etapas de la propuesta.

En cuanto a la etapa 1, *Reconocimiento y Diagnóstico*, el o los Ambientes de Aprendizaje deben estar encaminados a: reconocer las interacciones entre los estudiantes, hacia el docente y hacia las matemáticas, reconocer la problemática del micro contexto o macro contexto de los estudiantes, diagnosticar la calidad de conocimientos previos que poseen con relación a las nociones matemáticas y/o estadísticas que se pueden abordar desde dicha problemática, así como diagnosticar el nivel de apropiación e interés de los estudiantes por el problema.

Como segunda etapa, se encuentra la *ubicación y ambientación en el problema,* en está teniendo definida la problemática y los posibles saberes matemáticos, se ubica al estudiante en la problemática, caracterizándola y recogiendo información necesaria para comprender que en realidad afecta a su macro contexto o micro contexto; a la par se deberá ambientar dicho problema para que lo estudiantes se apropien y evidencien la necesidad de abordarlo, y que además establezcan diversas estrategias para dar solución a la problemática.

Luego, en la tercer etapa, *construcción de las herramientas conceptuales,* los estudiantes al desarrollar una o más estrategias construirán herramientas conceptuales que les permitirán abordar y/o dar solución a la problemática, en este momento evidenciaran la necesidad de hacer uso de saberes matemáticos y/o estadísticos así como su utilidad en situaciones cotidianas. En esta etapa es en la que más podrán emerger Ambientes de Aprendizaje de tipo diferente al 6, según la caracterización realizada por Skovsmose (2000).

Por último, en la cuarta etapa de *aplicación de herramientas conceptuales*, los estudiantes aterrizarán sus propuestas, proyectos, estrategias y soluciones, pues de manera formal harán explícita la aplicación de saberes matemáticos y/o estadísticos que le permitieron dar solución a la problemática.

- Se estructuran categorías de análisis que permiten evaluar el proceso de enseñanza y aprendizaje, para cada una de estas se tiene en cuenta la definición, acciones, indicadores y niveles, estas son:

Categorías de análisis para las habilidades del pensamiento crítico

Estas nos posibilitan identificar el nivel de pensamiento crítico en el cuál se encuentra cada estudiante iniciando con la interpretación, análisis, evaluación y llegando al nivel máximo inferencia.

Interpretación. Identificar, clasificar y relacionar la información, de tal manera que pueda expresar y explicar sus significados y su importancia.

Acciones. Categorizar datos de la información para describirla. Decodificar significados presentes en la información. Clarificar los significados contenidos en la información.

Indicador. Interpreta información presentada en las encuestas de opinión dándole importancia a aspectos estadísticos presentes en la ficha técnica y diagrama de barras.

- Nivel 3: Identifica, relaciona, expresa y explica la información contenida en la ficha técnica y el diagrama de barras, de una encuesta de opinión.
- Nivel 2: Identifica y relaciona aspectos presentes en la ficha técnica y el diagrama de barras, de una encuesta de opinión, pero las explicaciones que expresa presentan inconsistencias.
- Nivel 1: Presenta explicaciones inconsistentes que evidencian dificultades al identificar y relacionar aspectos presentes en la ficha técnica y el diagrama de barras, de una encuesta de opinión.

Análisis. Descomponer una situación compleja en partes separables bajo algún criterio, de tal manera que pueda identificar en ellas cualidades, funciones, relaciones, usos, patrones y significados.

Acciones. Examinar cada una de las ideas presentes en la información.

Identificar factores recurrentes en las partes de una información dada.

Hallar elementos, relaciones y argumentos que configuran la información.

Indicador. Analiza información presentada en las encuestas de opinión identificando aspectos estadísticos presentes en la ficha técnica y el diagrama de barras, así como las funciones, relaciones, usos y significados.

- Nivel 3: Identifica en una encuesta de opinión aspectos estadísticos, centrándose en cada uno de ellos para reconocer sus funciones, relaciones, usos y significados.
- Nivel 2: Identifica en una encuesta de opinión aspectos estadísticos, sin embargo no logra reconocer correctamente sus funciones, relaciones, usos y significados.
- Nivel 1: Se le dificulta descomponer la encuesta de opinión y reconocer aspectos estadísticos presentes en ella, por tanto no reconoce funciones, relaciones, usos y significados de la información presentada.

Evaluación. Asignar un grado de validez o confiabilidad a la información presentada, para finalmente concluir y tomar decisiones

Acciones.Sintetizar los análisis previos hechos a la información dada. Verificar argumentos y sustentos de la información.

Juzgar la validez de la información. Obtener conclusiones con criterio y argumentadas.

Indicador. Evalúa la validez de las encuestas de opinión emitidas por los noticieros de la televisión colombiana, para obtener conclusiones y facilitar la toma de decisiones.

- Nivel 3: Presenta conclusiones con juicios de valor argumentados, respecto a la validez de encuestas de opinión emitidas por los noticieros de la televisión colombiana.
- Nivel 2: Presenta conclusiones con argumentaciones poco sustentadas, de la validez de encuestas de opinión emitidas por los noticieros de la televisión colombiana.

- Nivel 1: Se le dificulta determinar la validez de las encuestas de opinión emitidas por los noticieros de la televisión colombiana, pues llega a conclusiones sin sustento, o no lo realiza.

Inferencia. Establecer relaciones de causa y efecto a partir de la información para deducir y elaborar conjeturas o hipótesis.

Acciones. Examinar las evidencias implícitas y explicitas de la información.

Establecer relaciones de causa y efecto.

Conjeturar ideas en torno a la información.

Deducir conclusiones lógicas a partir de la información.

Indicador. Infiere a partir de información proveniente de las encuestas de opinión emitidas por los noticieros de la televisión colombiana; relaciones de causa y efecto deduciendo y elaborando conjeturas o hipótesis.

- Nivel 3: Deduce, elabora y comprueba conjeturas o hipótesis, a partir de los aspectos estadísticos inmersos en las encuestas de opinión y sus relaciones de causa y efecto.
- Nivel 2: Establece las relaciones de causa y efecto, a partir de los aspectos estadísticos inmersos en las encuestas de opinión; sin embargo se le dificulta deducir, elaborar y comprobar conjeturas o hipótesis.
- Nivel 1: Se le dificulta deducir, elaborar y comprobar conjeturas o hipótesis, a partir de los aspectos estadísticos inmersos en las encuestas de opinión, pues no puede establecer las relaciones de causa y efecto.

Categorías de análisis para las disposiciones del pensamiento crítico

Estas se elaboraron partiendo de lo expuesto por Facione (2007) y Gonzales (2006) considerando particularmente tres disposiciones, búsqueda de la verdad, confianza en el razonamiento y mente abierta, las cuales, en relación a lo abordado en los AA, definen una actitud crítica.

Búsqueda de la verdad. Tener actitudes de indagación, de inconformismo con lo que conoce y consulta de fuentes de información y procurar obtener información y conocimiento antes de emitir un juicio.

Acciones. Ser inquisitivo. Privilegiar la búsqueda argumentos razonables.

Ser objetivo cuando se indaga.

Indicador. Busca la verdad sustentándose en argumentos razonables, para emitir un juicio con respecto a la información presentada en las encuestas de opinión.

- Nivel 3: Tiene actitudes de indagación y de inconformismo con lo que conoce, por lo que busca información con respecto a encuestas de opinión para emitir un juicio.
- Nivel 2: Tiene actitudes de indagación y de inconformismo con lo que conoce, sin embargo pocas veces busca información con respecto a encuestas de opinión para emitir un juicio.

- Nivel 1: No evidencia actitudes de indagación y de inconformismo con lo que conoce, por lo que acepta cualquier información con respecto a encuestas de opinión para emitir un juicio.

Mente abierta. Entiende la existencia de opiniones, puntos de vista y/o posturas diferentes a las propias, comprendiéndolas y replanteando su postura, si es necesario.

Acciones. Ser flexible a puntos de vista diferentes. Reflexionar sobre sus propios puntos de vista. Reconsiderar y revisar un juicio dado.

Indicador. Tiene mente abierta frente a la existencia de puntos de vista diferentes al propio, lo que le permite realizar negociaciones para llegar a un consenso, en torno a las encuestas de opinión.

- Nivel 3: Entiende las opiniones de los demás y realiza una negociación con otros para llegar a un consenso, en torno a las encuestas de opinión.
- Nivel 2: Entiende las opiniones de otros y realiza una negociación, sin embargo se le dificulta llegar a un consenso, pues no tiene mente abierta para puntos de vista diferentes, relacionados con las encuestas de opinión.
- Nivel 1: Se le dificulta entender las opiniones de los demás, por lo que no realiza una negociación con otros para llegar a un consenso con respecto a diferentes puntos de vista relacionados con las encuestas de opinión.

Confía en el razonamiento. Tener la certeza de que un adecuado proceso de raciocinio le permite acceder a la verdad y/o tomar decisiones con criterio.

Acciones. Privilegia el uso de argumentos razonables. Está seguro de la validez de los argumentos en un proceso de raciocinio.

Tiende a tomar decisiones con criterio

Indicador. Confía en el razonamiento, pues busca analizar aspectos estadísticos de la encuesta de opinión permitiéndole tomar decisiones con criterio.

- Nivel 3: Privilegia el uso de argumentos razonables, pues está seguro de la validez de su proceso de raciocinio tendiendo a tomar decisiones con criterio respecto a las encuestas de opinión.
- Nivel 2: Privilegia el uso de argumentos razonables, pues está seguro de la validez de su proceso de raciocinio, sin embargo tiende a tomar decisiones sin criterio respecto a las encuestas de opinión.
- Nivel 1: En pocas ocasiones privilegia el uso de argumentos razonables, pues no está seguro de la validez de su proceso de raciocinio y toma decisiones sin criterio respecto a las encuestas de opinión.

Categorías de análisis para la gestión docente en el aula

Para el planteamiento de estas se consideraron tres aspectos relevantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje que permitieron fomentar el pensamiento crítico teniendo en cuenta lo expuesto por Hiler y Paul (2006) y Campos (2007). El primero de ellos, se encuentra relacionado con el fomento a la participación; el segundo, en cuanto al diseño y planeación de los AA, y el tercero, en cuanto al fomento de normas socio matemáticas.

Fomento de la participación

Acciones. Hacer preguntas a los estudiantes durante las clases para estimular su curiosidad. Utilizar preguntas guía. Utilizar el método socrático para plantear preguntas. Fomentar el descubrimiento. Promover la participación argumentada

Indicador. Fomenta la participación, pues formula preguntas para problematizar a los estudiantes, generando interacción entre ellos y con el docente.

- Nivel 3: Realiza preguntas de forma oral y escrita fomentando la curiosidad y el descubrimiento en los estudiantes, permitiéndoles que los estudiantes expresen sus posibles posturas o estrategias.
- Nivel 2: Realiza preguntas, pero en ocasiones no permite libertad de tiempo y/u opinión, limitando la participación de los estudiantes.
- Nivel 1: Se le dificulta realizar preguntas de forma oral y escrita, por lo que no fomenta la participación, la curiosidad y el descubrimiento en los estudiantes.

Diseño y planeación

Acciones. Diseña actividades para la enseñanza de nociones estadísticas. Diseña Ambientes de Aprendizaje para el fomento del pensamiento crítico. Diseña escenarios que motivan a los estudiantes a aprender.

Indicador. Diseña y planea Ambientes de Aprendizaje motivadores, los cuales fomentan el pensamiento crítico y permite que los estudiantes construyan herramientas estadísticas

- Nivel 3: Diseña y planea Ambientes de Aprendizaje motivadores, los cuales fomentan el pensamiento crítico y permite que los estudiantes construyan herramientas estadísticas.
- Nivel 2: Diseña y planea actividades que permiten la construcción de herramientas estadísticas por parte de los estudiantes, sin embargo no son motivadoras ni fomentan el pensamiento crítico.
- Nivel 1: Diseña y planea actividades motivadoras, sin embargo estas no fomentan el pensamiento crítico ni permite que los estudiantes construyan herramientas estadísticas.

Fomento de normas socio matemáticas

Acciones. Fomentar el escuchar con atención las opiniones de los demás.

Poner en consideración de los demás su particular punto de vista.

Hablar poco para que los estudiantes piensen más.

Fomentar la colaboración.

Estimular la auto regulación en los estudiantes.

Indicador. Fomenta las normas socio matemáticas pues genera escenarios en donde se posibilita que los estudiantes construyan su propio conocimiento y se motiven por aprender individual y colectivamente.

- Nivel 3:. Fomenta en la clase la autonomía de los estudiantes en el proceso de aprendizaje, el respeto por el otro, la colaboración entre sus pares y el interés por aprender individual y colectivamente.

- Nivel 2: Fomenta en la clase el respeto por el otro, la colaboración entre sus pares y el interés por aprender colectivamente, sin embargo no genera escenarios donde los estudiantes fortalezcan la autonomía.
- Nivel 1: Se limita a dictar una clase olvidando fomentar en ella la autonomía en el proceso de enseñanza y aprendizaje del estudiante, el respeto por sus compañeros, la colaboración entre sus pares y el interés por aprender individual y colectivamente.

Con respecto a la Educación Matemática y Educación Estadística, se encontró que a través de esta investigación se contribuyó al establecimiento y fortalecimiento de las bases referidas al enfoque crítico de la Educación Matemática y Educación Estadística, en las que, además de ver la educación como un medio para dotar a los ciudadanos de herramientas para la comprensión y transformación de su realidad socio política, se busca comprender las dinámicas que se dan en la actual sociedad vinculándolas con la escuela; por lo que esta investigación confirma que esto se puede lograr efectivamente en el aula de matemática. En este sentido se considera que el presente trabajo puede constituirse en un antecedente para futuras investigaciones en esta línea.

Referencias y bibliografía

Acosta, A., Cruz, R., Gómez, H., & Martínez, A. (1998). *Guía Práctica para la Evaluación Cualitativa*. Bogotá, Colombia: Serie Pedagógica.

Amaya, M., & Pulido, M. (2012). *Elaboración de ambientes de aprendizaje para fortalecer el pensamiento crítico desde las matemáticas en niños de la Fundación San Antonio*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Ángel, Z., & Camelo, F. (2010). *Conocer el contexto de los estudiantes, una alternativa indispensable para la formulación de proyectos bajo un enfoque crítico*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

Cortés, G., Pinzón, A., & Pinzón, A. (2006). *Desarrollo del Pensamiento Crítico F. Niveles del Conocimiento*. Bogotá, Colombia: Editorial Hispanoamérica.

Facione, P., & Noreen, C. (s.f.). *Matriz de valoración integral para asignar puntajes/calificaciones en pensamiento crítico*. Eduteka. Recuperado de: http://www.eduteka.org/pdfdir/RubricPensamientoCrítico.pdf

Facione, P. (2007). *Pensamiento Crítico: ¿Qué es y por qué es importante?* Insight Assessment. Disponible en sitio web: http://www.insightassessment.com

Flores, P. (2007). *Profesores de matemáticas reflexivos: Formación y cuestiones de investigación. PNA*, *1*(4), 139-158. Disponible en sitio web: http://www.ugr.es/~pflores/textos/aRTICULOS/Investigacion/PNA_2007.pdf

González, J. (2006). *Discernimiento Evolución del Pensamiento Crítico*. Disponible en el sitio web: http://www.eduteka.org/Discernimiento.php. Acceso el 18 de Abril de 2011.

Mora, D. (2005). *Didáctica Crítica, Educación Crítica de las Matemáticas y Etnomatemática: Perspectivas para la Transformación de la Educación Matemática en América Latina*. La Paz: Campo Iris.

Sánchez, B., & Torres, J. (2009).*Educación Matemática Crítica: Un abordaje desde la perspectiva sociopolítica a los Ambientes de Aprendizaje*. Bogotá: ASOCOLME.

Sánchez, F. (1997). *Televisión y educación: Un desafío posible.* Ediciones Universidad de Salamanca. Disponible en el sitio web:http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=122556

Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *Revista EMA*, *6*(1), 3-26.

Valero, P. (2006). *¿De carne y hueso?: la vida social y política de la competencia matemática.* Universidad de Ambientes de Aprendizajelborg. Dinamarca. Disponible en el sitio web: www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-110766_archivo_pdf.pdf

Contribuições das teorias da aprendizagem para a Educação Matemática: três aportes teóricos

Betine **Diehl** Setti
Universidade de Passo Fundo
Brasil
diehl@upf.br
Neiva Ignês **Grando**
Universidade de Passo Fundo
Brasil
neiva@upf.br

Resumo

A realidade vivida hoje pelos professores de matemática na escola envolve dificuldades das mais diversas ordens. O Brasil se encontra frente à deterioração e ineficácia da escola pública em relação aos seus objetivos e formas de funcionamento e grande parte dos resultados do trabalho educativo que vem sendo realizado na escola indica que os caminhos trilhados precisam ser revistos se o objetivo é a educação qualificada. Neste sentido, o professor muitas vezes se sente despreparado para organizar o ensino visando à aprendizagem do aluno. Neste trabalho a intenção é oferecer uma impressão geral das ideias de três teóricos da área da aprendizagem e que possam se relacionar com a problemática do trabalho do professor na escola e trazer contribuições para a educação matemática.

Palavras chave: educação, matemática, teorias da aprendizagem, prática docente, escola, aprendizagem.

Introdução

Os professores de matemática, na sua atividade de trabalho em sala de aula, se deparam com preocupações que se relacionam com o aluno, com a matemática, com o contexto escolar e com o contexto social.

A escola, como parte integrante das instituições sociais, é envolvida pelos novos pressupostos da vida moderna resultantes dos movimentos de transformação da atualidade que vem ocorrendo em todas as áreas do conhecimento, da cultura e da vida social. O ritmo acelerado dessas mudanças na sociedade contemporânea, decorrentes, sobretudo, da expansão das novas tecnologias da informação e comunicação, do fenômeno da globalização, do consumismo, do hedonismo e do individualismo, impõe desafios aos professores à medida que tem influenciado o modo de vida das pessoas e o ambiente escolar.

Nesse contexto, a realidade vivida hoje pelos professores na escola envolve dificuldades das mais diversas ordens: relacionamento entre professor e aluno e entre alunos; relação aluno-conhecimento; crise do papel socializador da escola; desvalorização e desinteresse pelo

conhecimento científico; cultura do prazer imediato; problemas de aprendizagem; reprovações; sistemas de avaliação estandardizada; infraestrutura; entre muitas outras.

Ampliando essa problemática, Libâneo (2010) avalia que o Brasil se encontra frente à deterioração e ineficácia da escola pública em relação aos seus objetivos e formas de funcionamento visto que a crise e dissenso em relação ao papel da escola conduziram para o abandono do princípio do conhecimento em favor da função de acolhimento social. Nessas condições em que há a priorização da socialidade e convivência, a concepção de aprendizagem se torna tão ampla que acaba se desfocando da aprendizagem efetiva que, segundo o autor, é aprender a pensar por meio dos conteúdos, considerando os motivos dos alunos e o contexto sociocultural e institucional de aprendizagem.

O próprio professor tem consciência de que a escola, e nesse ponto ele está incluído, não tem conseguido dar conta da sua tarefa que é ensinar. Ele vem sendo pressionado e criticado pela sociedade quanto aos resultados da ação educativa, compreende que existe a necessidade de mudar suas práticas, mas não sabe de fato o que fazer. As políticas públicas educacionais também não contribuem para a modificação desse quadro enquanto se preocupam apenas com índices sem levar em conta as opiniões e motivos dos professores tanto para a elaboração de propostas e projetos, quanto para a definição de programas de formação continuada.

Grande parte dos resultados do trabalho educativo que vem sendo realizado na escola indica que os caminhos trilhados precisam ser revistos se o objetivo é a educação qualificada. E, enquanto não assimila a complexidade da realidade escolar e recebe o suporte necessário para desempenhar seu papel, o professor muitas vezes se sente despreparado para organizar o ensino visando à aprendizagem do aluno.

Os resultados dos inúmeros processos de avaliações em larga escala para produção de indicadores, tanto em âmbito nacional como internacional, aos quais os estudantes vêm se submetendo retratam uma realidade nada animadora. Especificamente nas provas de matemática as notas são muito baixas revelando que os estudantes estão aprendendo muito pouco dessa disciplina na escola.

Sobre a função da escola, Libâneo (2009) assume a concepção de que sua centralidade é o conhecimento e que o ensino deve ser centrado nos processos de aquisição do conhecimento para ampliar o desenvolvimento das capacidades e habilidades de pensamento dos alunos por meio dos conteúdos tendo em vista a reflexividade, sendo que a aprendizagem é identificada na íntima relação entre o conhecimento teórico-científico e as ações mentais próprias desse conhecimento.

Na escola é papel do professor estabelecer essa conexão como mediador entre o aluno e o objeto de conhecimento auxiliando-o a desenvolver seu próprio processo de aprendizagem. Por isso, não é suficiente que o professor apenas domine o conteúdo, sua prática pedagógica precisa incorporar mudanças no modo de tratar o conhecimento, o que implica mudanças na sua concepção de ensino e de aprendizagem.

A comunidade que investiga o trabalho docente, segundo Libâneo (2009), entende que essa atividade envolve a teoria do conhecimento, a psicologia do desenvolvimento humano e da aprendizagem e os métodos particulares da ciência ensinada. Assim, para dar conta das exigências da atualidade em que a aprendizagem se tornou tema fundamental devido às

demandas crescentes da sociedade do conhecimento[1], o professor precisa se aprofundar no estudo das contribuições que estes campos trazem para o ensinar e o aprender.

O trabalho do professor implica a intencionalidade da aprendizagem e, pressupondo que as formas de ensinar dependem das formas de aprender, acredita-se ser importante conhecer algumas teorias contemporâneas da aprendizagem humana e seus aportes para o ensino. Também é significativo o renovado interesse direcionado para o tema que, provavelmente, surge aliado à questão da orientação para a educação integral e da aprendizagem ao longo da vida. Na próxima parte do texto a intenção é oferecer uma impressão geral das ideias de três teóricos da área da aprendizagem e que possam se relacionar com a problemática do trabalho do professor na escola. E para finalizar são apresentadas algumas discussões relativas às contribuições dessas teorias para a educação matemática.

Teorias contemporâneas da aprendizagem

Inicialmente é oportuno destacar a função primária da aprendizagem como uma das capacidades e manifestações básicas da vida humana e enfatizar que o conceito de aprendizagem compreende um campo muito maior que a compreensão como aquisição de conhecimentos e habilidades (Illeris, 2013). Também esclarecer que, segundo o mesmo autor, não existe uma definição única para o conceito de aprendizagem, sendo inclusive observado o desenvolvimento constante de um grande número de teorias.

A aprendizagem como um todo na concepção de Illeris[2]

Esta abordagem teórica adota um conceito amplo de aprendizagem que inclui as dimensões emocionais, sociais e da sociedade: "qualquer processo que, em organismos vivos, leve a uma mudança permanente em capacidades e que não se deva unicamente ao amadurecimento biológico ou envelhecimento" (Illeris, 2007, citado por Illeris, 2013, p. 10).

Buscando oferecer uma síntese geral e atual do campo da aprendizagem por meio de um modelo geral que se baseia em uma ampla seleção das melhores construções teóricas sobre o tema, Illeris (2013) inicia a abordagem à aprendizagem como um todo apresentando as principais áreas envolvidas e estruturas das suas conexões mútuas, incluindo todas as condições que influenciam e sejam influenciadas pelo processo de aprendizagem (Figura 1).

[1] Squirra (2005, p. 258) aponta que ela "representaria a combinação das configurações e aplicações da informação com as tecnologias da informação em todas as suas possibilidades", independentemente da definição que se adote para o termo conhecimento.

[2] Knud Illeris é um cientista dinamarquês e professor de aprendizagem ao longo da vida na Universidade de Educação da Dinamarca. Suas áreas de interesse são teoria da aprendizagem, aprendizagem de jovens e adultos, educação de adultos, aprendizagem ao longo da vida e aprendizagem na vida profissional. É autor de vários livros, incluindo *How we learn: learning and non-learning in school and beyond* de 2008.

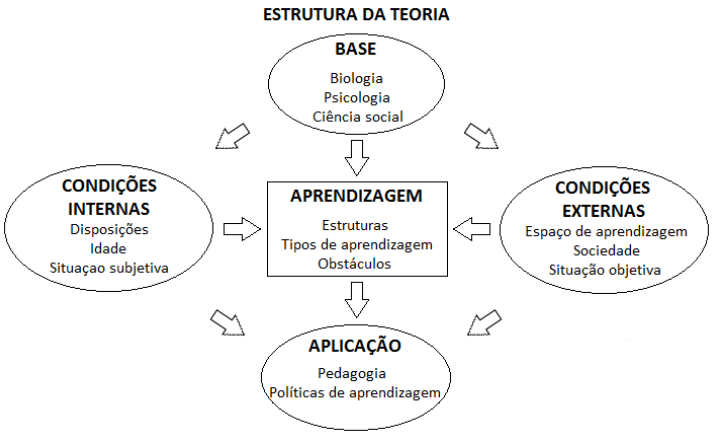


Figura 1. As principais áreas de estudo da aprendizagem.
Fonte: Illeris, K. (2013). Uma compreensão abrangente sobre a aprendizagem humana (p. 16). In K. Illeris (Org.), *Teorias contemporâneas da aprendizagem* (15-30). Porto Alegre: Penso.

Para explicar as cinco áreas envolvidas no processo de aprendizagem, Illeris (2013) destaca dois processos básicos e três dimensões da aprendizagem e os representa por meio de um triângulo que descreve como "campo de tensão da aprendizagem em geral [...] entendido entre o desenvolvimento da funcionalidade, sensibilidade e sociabilidade – que também são os componentes gerais do chamamos de competências" (2013, p. 19). Destaca também que cada dimensão inclui um lado mental, além do corporal (Figura 2).

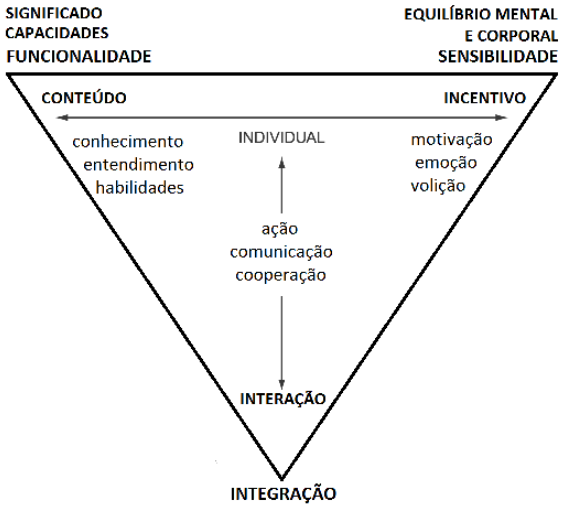


Figura 2. As principais áreas de estudo da aprendizagem.
Fonte: Illeris, K. (2013). Uma compreensão abrangente sobre a aprendizagem humana (p. 19). In K. Illeris (Org.), *Teorias contemporâneas da aprendizagem* (15-30). Porto Alegre: Penso.

O principal argumento de Illeris (2013) é que a aprendizagem se constitui de três dimensões: a cognitiva, a social e a emocional. No seu triângulo o conceito de aprendizagem apresentado é de natureza basicamente construtivista, pressupondo que o próprio aprendiz constrói ou interpreta suas estruturas mentais ativamente.

O autor destaca que toda aprendizagem integra os processos interno (psicológico de elaboração e aquisição) e externo (de interação entre o indivíduo e seu ambiente social, cultural ou material) que na Figura 2 são representados pelas setas duplas, horizontal e vertical, respectivamente, e que os dois processos devem estar envolvidos para que haja a aprendizagem.

No triângulo o indivíduo foi colocado no topo e o ambiente na base. O processo interno ao indivíduo, que está representado pela seta dupla horizontal, é uma inter-relação integrada entre duas funções psicológicas iguais envolvidas em qualquer forma de aprendizagem e que foram colocadas nas extremidades da seta: a função de administrar o conteúdo da aprendizagem e a função de incentivo e de prover e direcionar a energia mental necessária para mover o processo.

Os três ângulos nos vértices do triângulo da Figura 2 representam as três dimensões da aprendizagem propostas por Illeris (2013): dimensão do conteúdo (cognitiva), do incentivo (emocional) e da interação (social). Uma síntese das dimensões encontra-se na Tabela 1.

Tabela 1
As três dimensões da aprendizagem

Dimensão	**Objetivo**	**Elementos**	**Função**
Do conteúdo	Contribuir para construir a compreensão e capacidade do aprendiz.	Conhecimentos e habilidades (opiniões, insights, significados, posturas, estratégias, valores, métodos, etc.).	Construir significado e capacidade para lidar com desafios da vida prática e assim, desenvolver uma *funcionalidade* pessoal geral.
Do incentivo	Proporcionar e direcionar a energia mental necessária para o processo de aprendizagem.	Sentimentos, emoções, motivação e volição.	Garantir o equilíbrio mental contínuo do indivíduo e, assim, desenvolver uma *sensibilidade* pessoal.
Da interação	Propiciar os impulsos que dão inicio ao processo de aprendizagem.	Percepção, transmissão, experiência imitação, atividade, participação, etc.	Servir à *integração* pessoal em comunidades e na sociedade, construindo a *sociabilidade* do indivíduo.

Fonte: Illeris, K. (2013). Uma compreensão abrangente sobre a aprendizagem humana. In K. Illeris (Org.), *Teorias contemporâneas da aprendizagem* (15-30). Porto Alegre: Penso.

Illeris (2013) também apresenta quatro tipos de aprendizagem que são ativados em contextos diferentes, implicam diferentes tipos de resultados e exigem diferentes níveis de energia: cumulativa; assimilativa; acomodativa; e aprendizagem transformadora (Tabela 2).

Para explicá-los o autor se baseia na teoria de Piaget (2012) pressupondo que no cérebro deve haver alguma organização dos resultados da aprendizagem que possibilitem ao indivíduo acessar seus esquemas mentais – recordando de conhecimentos, entendimentos, posturas e reações – quando se depara com situações que se relacionem com conexões mentais que foram ativadas em ocasiões anteriores. Assim, relaciona a dimensão do conteúdo da aprendizagem aos esquemas mentais e para as dimensões do incentivo e interação se refere a padrões mentais.

Tabela 2
Tipos de aprendizagem segundo Illeris

Tipo de Aprendizagem	**Característica**	**Contexto**	**Resultados**
Cumulativa ou mecânica (Pavlov, Skinner)	Quando um esquema ou padrão se estabiliza; é uma formação isolada, algo novo que não faz parte de nenhuma outra coisa.	Mais frequente nos primeiros anos de vida; pode ocorrer mais adiante apenas em situações especiais em que se deve aprender algo sem um contexto de significância pessoal.	Um tipo de automação que significa que ela somente pode ser recordada e aplica em situações mentalmente semelhantes ao contexto da aprendizagem.
Assimilativa ou por adição (Piaget, Argyris e Schön, Ellström)	Quando um novo elemento é ligado como uma adição a um esquema ou padrão já existente.	Pode ocorrer em todos os contextos em que o indivíduo desenvolve suas capacidades gradualmente.	Ligados ao esquema ou padrão em questão, sendo fácil recordá-los e aplicá-los quando se está mentalmente orientado para o campo em foco; pode ser difícil acessá-los em outros contextos.
Acomodativa ou transcendente (Piaget, Argyris e Schön, Ellström, Vygotsky)	Quando é difícil relacionar com qualquer esquema ou padrão já existente; implica a renúncia de um esquema existente e a sua transformação.	Pode ocorrer se é algo que se está determinado a adquirir, se parece importante ou interessante; exige grande energia mental.	Podem ser recordados e aplicados contextos diferentes e relevantes; gera experiência de ter entendido ou dominado algo que realmente internalizou.
Significativa, Transicional, Expansiva ou Transformadora (Rogers, Alheit, Engeström, Mezirow)	Ocasiona reestruturação simultânea de todo um grupo de esquemas e padrões nas três dimensões da aprendizagem.	Ocorre em situações especiais de profunda significância para o indivíduo; demanda muita energia mental.	Acarreta o que poderia chamar de mudanças na personalidade ou na organização do *self;* é profunda e ampla.

Fonte: Illeris, K. (2013). Uma compreensão abrangente sobre a aprendizagem humana. In K. Illeris (Org.), *Teorias contemporâneas da aprendizagem* (15-30). Porto Alegre: Penso.

Outro problema levantado pelo autor se refere aos obstáculos à aprendizagem presentes em situações em que a aprendizagem não ocorre, é incompleta ou distorcida. Os obstáculos surgem muitas vezes como consequência das condições gerais que a atual sociedade complexa moderna estabelece devido ao enorme volume e impacto das influências enfrentadas constantemente pelas pessoas vindas dos meios de comunicação, das mudanças e reorganizações intermináveis no ambiente de trabalho, de situação de desamparo na vida pessoal, etc. Para se protegerem, as pessoas criam mecanismos de defesa como a consciência cotidiana (defesa massiva das compreensões já adquiridas), a ambivalência (situações em que o indivíduo quer e não quer

aprender) e a resistência mental (causada pela situação de aprendizagem) que resultam em distorções, obstrução ou ausência de nova aprendizagem.

Ainda estão incluídas na teoria de Illeris as condições internas e externas de aprendizagem, que influenciam a aprendizagem sem estarem diretamente envolvidas nela. As condições internas são características do aprendiz que influenciam as possibilidades de aprendizagem como, por exemplo, a inteligência. E as condições externas são aspectos envolvidos nos processos de aprendizagem e, sendo assim, situados fora do aprendiz.

Sendo a aprendizagem uma questão muito ampla e complexa, Illeris compreende que todas as dimensões da aprendizagem, os tipos, as defesas e resistências, as condições internas e externas devem ser levados em conta nas discussões e programas para serem promissores e adequados, sobretudo sem deixar de incluir uma análise realista da situação de aprendizagem.

A aprendizagem expansiva na visão de Engeström[3]

O teórico Engeström (2013) utiliza quatro perguntas essenciais para analisar a teoria da aprendizagem expansiva desenvolvida dentro do modelo da teoria da atividade histórico-cultural: quem são os sujeitos da aprendizagem?; por que eles aprendem?; o que eles aprendem?; e, como aprendem?. As questões são respondidas exemplificando a partir de resultados de um estudo que o autor realizou sobre intervenções no campo multiorganizacional do cuidado médico de crianças na Finlândia em que o desafio de aprendizagem era adquirir uma nova maneira de trabalhar, na qual pais e profissionais da saúde planejassem e monitorassem cooperativamente a trajetória do cuidado da criança buscando um novo modelo para resolver o problema do uso excessivo de serviços hospitalares sofisticados. Também se vale de cinco princípios da teoria da atividade para sistematizar sua discussão sobre a aprendizagem expansiva e realizar sua síntese sobre as implicações da aprendizagem expansiva para a compreensão da direcionalidade na aprendizagem e no desenvolvimento.

Inicialmente Engeström faz uma retrospectiva da teoria da atividade histórico-cultural identificando que ela evoluiu por meio de três gerações de pesquisas. A primeira geração teve início com Vygostsky (1978, citado por Illeris, 2013) que criou a ideia de mediação cultural de ações representada pela tríade sujeito, objeto e artefato mediador. Em sua proposta o indivíduo não podia mais ser compreendido sem o seu meio cultural e a sociedade também não podia mais ser compreendida sem a ação de indivíduos que usam e produzem artefatos. "Os objetos se tornavam entidades culturais, e a orientação da ação para os objetos se tornava a chave para entender a psique humana" (Engeström, 2013, p. 68).

A segunda geração superava a limitação da primeira que, apesar de inovar inserindo artefatos culturais em ações humanas, permanecia com a unidade de análise concentrada no indivíduo. Leontiev (1981, citado por Illeris, 2013) então expandiu o modelo de Vygotsky explicando a diferença entre uma ação individual e uma ação coletiva. O conceito de atividade proposto por Leontiev voltou o foco para as inter-relações complexas entre o sujeito individual e sua comunidade.

[3] Yrjö Engeström é fundador e líder do Center for Activity Theory and Developmental Work Research da Universidade de Helsinque, na Finlândia. É professor na Universidade da Califórnia, em São Diego. Baseia seu trabalho na abordagem da teoria da atividade à aprendizagem e ao desenvolvimento mental proposta por Vygotsky. Introduziu a noção de conflito que estava ausente na teoria de Vygotsky no que chamou "aprendizagem expansiva".

Já a terceira geração deve lidar com desafios quanto a questões ligadas à diversidade a ao diálogo entre diferentes tradições ou perspectivas, desenvolvendo instrumentos conceituais para entender o diálogo, as perspectivas múltiplas e as redes de sistemas de atividade em interação. Nesse direcionamento, o modelo é ampliado para incluir, no mínimo, dois sistemas de atividade em interação.

O autor sintetiza a teoria da atividade com a ajuda de cinco princípios: primeiro – um sistema de atividade coletivo é tido como a unidade básica de análise; segundo – um sistema de atividade sempre é uma comunidade de pontos de vista, tradições e interesses múltiplos; terceiro – os sistemas de atividades tomam forma e se transformam durante longos períodos de tempo (historicidade); quarto – o papel central das contradições (tensões estruturais que se acumulam historicamente dentro e entre sistemas de atividade) como fontes de mudança e desenvolvimento; quinto – possibilidade de transformações expansiva em sistemas de atividade. "Uma transformação expansiva ocorre quando objeto e motivo da atividade são reconceituados para compreender um horizonte de possibilidades radicalmente mais amplo do que no modo anterior da atividade" (Engeström, 2013, p. 73).

Visando uma nova abordagem para a aprendizagem expansiva, Engeström comenta que as teorias comuns da aprendizagem pressupõem que conhecimento ou habilidades a serem adquiridos sejam estáveis e bem definidos, mas que, no entanto, grande parte das aprendizagens em organizações de trabalho não se dá dessa maneira. Então busca na teoria de Bateson (1972, citado por Engeström, 2013) um modelo sistemático conduzido pela teoria da aprendizagem expansiva. Nesta teoria Bateson distinguiu três tipos de aprendizagem: Aprendizagem I que se refere ao condicionamento, isto é, aquisição de respostas que parecem corretas no contexto em questão; Aprendizagem II, que ocorre simultaneamente com a Aprendizagem I, em que as pessoas adquirem as regras e padrões de comportamento arraigados que são característicos do contexto; e Aprendizagem III na qual uma pessoa ou grupo começa a questionar o sentido e o significado do contexto e a construir um contexto alternativo mais amplo, caracterizando-se como uma busca coletiva. Na aprendizagem expansiva a Aprendizagem III é vista como "uma atividade de aprendizagem que tem suas próprias ações e instrumentos" e seu objeto é "todo sistema da atividade em que os aprendizes estão envolvidos, produzindo padrões de atividades culturalmente novos" (Engeström, 2013, p. 74).

Com os resultados do estudo realizado, o autor sugere que seja construída uma perspectiva complementar a representação da aprendizagem e do desenvolvimento como processos verticais, ou seja, a de uma aprendizagem e desenvolvimento horizontais e laterais. Na teoria de Vygotsky o processo de formação de conceitos é apresentado como um encontro entre os conceitos cotidianos que crescem no sentido descendente e conceitos científicos que crescem no descendente. Então Engeström propõe uma visão nova e bidimensional da formação de conceitos expandindo a teoria de Vygotsky na questão da direcionalidade.

Aprendizagem situada segundo Lave[4]

Ao descrever como a aprendizagem se tornou um dos focos de seu trabalho de pesquisa, Lave (2013) apresenta o que chamou de "o problema do contexto". Envolvida com pesquisas

[4] Jean Lave é antropóloga norte-americana e professora na Universidade da Califórnia, em Berkeley. Estuda a educação e a escolarização em sociedades pré-industriais. Formulou sua abordagem da aprendizagem de prática no seu conhecido livro *Situated Learning: legitimate peripheral participation* que publicou com Etienne Wenger, em 1991.

sobre atividades socialmente situadas e preocupada com limitações convencionais de diversas abordagens ao estudo da atividade, Lave buscou explorar questões sobre o "mundo socialmente constituído".

Considerando que as teorias da prática insistem que as pessoas que agem e o mundo social da atividade não podem ser separados, surgem às questões que constituem o problema do contexto: a pesquisa sobre a prática cotidiana geralmente enfoca a atividade das pessoas que agem; pouca atenção foi dedicada à tarefa de conceituar as relações entre as pessoas que agem e o mundo social; e não foi repensado o "mundo social da atividade" em termos relacionais.

Na proposta de Lave (2013), com foco direcionado para o contexto e para a aprendizagem, os conceitos relacionados do mundo social não devem ser analisados isoladamente dos conceitos de pessoas agindo e interagindo em suas atividades.

Ao analisar o envolvimento das pessoas em ações prática no mundo, o que está sendo analisado é o envolvimento das pessoas na aprendizagem, visto que a aprendizagem está presente nas atividades contínuas e a atividade situada sempre envolve mudanças no conhecimento e na ação. Isto conduz a autora para a conclusão de que "não existe algo como "aprendizagem" *sui generis*, mas apenas a participação mutável nos cenários culturalmente criados da vida cotidiana" (Lave, 2013, p. 237).

Quanto à concepção teórica do mundo social, imprescindível para analisar a atividade situada, a autora trata as relações entre pessoa, atividade e situação como uma única entidade teórica abrangente, procurando superar a dicotomia entre mente e corpo em que a aprendizagem é um processo contido na mente do educando sem relação com o mundo vivenciado.

Lave (2013, p. 238) afirma que "as teorias da atividade situada não separam ação, pensamento, sentimento, valor e suas formas histórico-culturais e coletivas de atividade localizada, interessada conflituosa e significativa", proporcionando perspectivas diferentes para a aprendizagem e seus contextos. Também elenca quatro premissas relacionadas com o conhecimento e a aprendizagem na prática: (1) o conhecimento sempre sofre construção e transformação em seu uso; (2) a aprendizagem é um aspecto integral da atividade no e com o mundo em todos os momentos – o fato de haver aprendizagem não é problemático; (3) o que se aprende sempre é complexamente problemático; (4) a aquisição do conhecimento não é uma simples questão de absorver conhecimento (Lave, p. 238-239).

Para encaminhar a compreensão do que significa aprendizagem situada, a autora levanta quatro questões que dizem respeito a divisões convencionais entre a aprendizagem e o que não é aprendizagem e que preocupam a teoria cognitiva tradicional.

A primeira questão é a suposta divisão entre a aprendizagem e os outros tipos de atividade. Nas teorias cognitivas acredita-se que aprendizagem e desenvolvimento são processos característicos, que não devem ser confundidos com a categoria mais geral da atividade humana.

A segunda questão se refere ao foco limitado das teorias da aprendizagem na transmissão do conhecimento existente, sem aludir a invenção de novo conhecimento na prática. Vários teóricos tem levantado essa lacuna na teoria da aprendizagem (Engeström, 1987; Dreier, 1991; Wenger, 1991, citados por Lave, 2013), pois definir a transmissão, transferência ou internalização como descritores adequados para a circulação do conhecimento na sociedade enfrenta o problema de que eles implicam uniformidade de conhecimento. "Esses termos implicam que os seres humanos participem, antes de mais nada, da reprodução de determinado

conhecimento, em vez da produção de inteligência como um processo flexível de envolvimento com o mundo" (Lave, 2013, p. 240).

A terceira questão diz respeito à substituição de pressupostos que envolvem a homogeneidade de atores, objetivos, motivos, atividades em si, pela ênfase a heterogeneidade. Essa questão se origina no foco intenso na multiplicidade de atores envolvidos na atividade e nas interdependências, conflitos e relações de poder assim produzidas.

A quarta questão está relacionada ao "fracasso em aprender", que na teorização sobre a aprendizagem costuma-se acreditar que resulta da incapacidade ou recusa por parte do indivíduo em se envolver com o aprender. A abordagem alternativa considera que a não aprendizagem e as identidades de "fracasso" são posições e processos sociais normais e ativos.

Essas ideias compõem o que a autora chamou de uma visão do que se quer dizer com aprendizagem situada. Nessa visão expõe que

> "a inteligência está rotineiramente em estado de mudança no ambiente de sistemas sociais, culturais e historicamente contínuos de atividade, envolvendo pessoas que se relacionam de maneiras múltiplas e heterogêneas, cujas posições sociais, interesses razões e possibilidades subjetivas são diferentes, e que improvisam disputas de maneiras situadas entre si, sobre o valor de determinadas definições da situação, em termos imediatos e amplos, e para as quais a produção do fracasso faz tanto parte da ação coletiva rotineira quanto a produção do conhecimento médio comum" (Lave, 2013, p. 244).

Na sua teoria, ao entender a aprendizagem como atividade situada, a autora identifica como característica central da aprendizagem um processo denominado por ela como "participação periférica legítima" proposto como um descritor de envolvimento na prática social em que a aprendizagem é parte integrante (Lave e Wenger, 1991, p. 4).

Discussões

A escolha desses três teóricos para compor o texto, entre tantas contribuições que poderiam ter sido selecionadas, se deve a questões relacionadas com o contexto escolar e com as tendências em pesquisa na área da Educação Matemática.

A abordagem de Illeris (2013) é relevante no sentido que oferece um enfoque que procura explicar a aprendizagem como um todo sintetizando diversas visões teóricas da aprendizagem, além de sua proposta de três dimensões de aprendizagem se vincular fortemente ao desenvolvimento de competências, um tema atual e presente nos debates entre educadores.

Essa teoria também esclarece a dificuldade que os alunos enfrentam ao serem solicitados a aplicar um conhecimento matemático em outras disciplinas ou em situações fora da escola. Isso acontece, possivelmente, porque a aprendizagem da matemática vai sendo construída por meio de adições ao que já foi aprendido, caracterizando um tipo de aprendizagem assimilativa, em que o conhecimento novo é adicionado gradualmente a um esquema ou padrão já estabelecido. A dificuldade se apresenta tendo em vista que o resultado desse tipo de aprendizagem se liga aos esquemas ou padrões já existentes e, desta forma, o aprendiz consegue recordar ou aplicar mais facilmente os conhecimentos matemáticos por estar estudando esta disciplina na escola. Já em situações que envolvem outras áreas do conhecimento ou contextos se torna mais complicado relacionar o que foi aprendido.

Dentre os tipos de aprendizagem distinguidos por Illeris (2013), é importante para o professor reconhecer o tipo de aprendizagem acomodativa à medida que ele representa a experiência de internalização de um conceito. Associando essa ideia a teoria histórico-cultural de Vygostky (1999), o processo de internalização pode ser compreendido como a série de transformações que vai ocorrendo à medida que o aluno vai renunciando e reconstruindo algumas ideias para compreender as relações que existem entre os conceitos que formam um sistema. Na matemática os resultados dessa reconstrução interna são valiosos no sentido que "a compreensão das diferentes idéias que estão subjacentes a um conceito e ao seu respectivo sistema é determinante para a apropriação do significado dos conceitos científicos" (Grando *et. al.*, 2002, p. 12). Por exemplo, para o aluno se apropriar do conceito de sistema de numeração decimal precisa ampliar sua compreensão sobre esse conceito reconhecendo que esta é apenas uma das representações possíveis e, assim, conseguir percebê-lo como uma parte de um sistema de conceitos matemáticos.

Illeris (2013) destaca que atualmente a maioria das atividades escolares se concentra apenas na aprendizagem assimilativa, mas que essa abordagem não é suficiente para desenvolver competências do aprendiz. Pondera que as aprendizagens, assimilativa e acomodativa, caracterizam a aprendizagem cotidiana geral e avalia que a aprendizagem transformadora é que poderia causar uma reestruturação simultânea de todo um grupo de esquemas e padrões nas três dimensões da aprendizagem (funcionalidade, sensibilidade e integração) acarretando no desenvolvimento de competências por ser ampla e profunda.

Engeström (2013), na sua reconceituação da teoria da atividade chama esse tipo de aprendizagem de expansiva que é caracterizada por um processo em que os envolvidos no sistema da atividade questionam o sentido e significado do contexto para produzir padrões de atividades culturalmente novos. Esse tipo de aprendizagem pode ser provocado por tensões ou contradições que surgem dentro e entre sistemas de atividades, visto que eles se transformam ao longo do tempo. No ensino da matemática essas tensões e conflitos aparecem quando se busca compreender as inter-relações entre o conhecimento matemático e o contexto social. Nesse sentido, os distanciamentos entre a matemática escolar, acadêmica e do cotidiano, identificadas como "matemáticas em diferentes contextos" por David (2011, p. 7), ou ainda, o confronto entre a matemática escolar e as múltiplas ações e práticas do cotidiano, poderiam levar o aluno a refletir criticamente e expandir sua compreensão sobre um determinado conceito.

O mesmo tipo de movimento observa-se também na formação inicial de professores de matemática em que os distanciamentos entre a matemática acadêmica e a escolar provocam tensões na prática de sala de aula. Esse confronto entre sua formação e a prática docente pode impulsionar uma expansão dos saberes do professor desde que ele tome consciência delas e as enfrente (David, 2011, p. 13).

Uma questão importante levantada por Illeris (2013) e que se relaciona com a proposta de Engeström se refere ao mecanismo psicológico da resistência mental que pode bloquear a aprendizagem. Esse obstáculo pode ser visto de maneira positiva como fonte de aprendizagem transformadora, pois contém forte mobilização mental e pode criar tensões à medida que o aprendiz não aceita algo. E, embora os professores não sejam preparados para provocar rupturas ou propor conflitos, esta é uma oportunidade (e até mesmo uma técnica) de proporcionar ao aluno aprender algo significativamente novo.

Ainda é importante salientar que a teoria de Lave (2013) foi incluída considerando que atualmente existe uma tendência de pesquisas em Educação Matemática direcionadas para a aprendizagem social. Além disso, destacar que toda aprendizagem escolar é situada em um contexto, como no caso da matemática escolar, acadêmica e cotidiana, e que na escola ocorre um dos processos educativos decorrentes das práticas sociais.

Nessa perspectiva, os estudantes participam de comunidades de prática (Lave e Wenger, 1991) e o domínio do conhecimento e de habilidades requer plena participação deles nas práticas socioculturais de uma comunidade, como, neste caso, da escola.

Referências bibliográficas

David, M. M. (2011). Distanciamentos entre a atividade matemática escolar e a matemática acadêmica e do cotidiano: implicações para a formação de professores e para a prática docente na Educação Básica. In *Atas do XXII Seminário de Investigação em Educação Matemática*, Lisboa, Set. 2011. (3-15).

Engeström, Y. (2013). Aprendizagem expansiva: por uma reconceituação da teoria da atividade. In K. Illeris (Org.), *Teorias contemporâneas da aprendizagem* (68-90). Porto Alegre: Penso.

Grando, N. I. *et al*. (2002). Princípios pedagógicos para medidas espaciais no ensino fundamental [web site]. In *Anais da 25ª Reunião Anual da Anped*, Caxambu, Set-Out. 2002.

Illeris, K. (2013). Uma compreensão abrangente sobre a aprendizagem humana. In K. Illeris (Org.), *Teorias contemporâneas da aprendizagem* (15-30). Porto Alegre: Penso.

Illeris, K. (2003).Towards a contemporary and comprehensive theory of learning. *International Journal of Lifelong Education,* 22(4), jul-ago, 396-406. Acesso 13 Set 2014, em http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/02601370304837#.VBWPdfldWo8.

Lave, J. (2013). A prática da aprendizagem. . In K. Illeris (Org.), *Teorias contemporâneas da aprendizagem* (233-245). Porto Alegre: Penso.

Lave, J; Wenger, E. (1991). *Situated Learning: legitimate peripheral participation*. (16ª ed.). New York: Cambridge University Press.

Libâneo, J. C. (2009). *Conteúdos, formação de competências cognitivas e ensino com pesquisa: unido ensino e modos de investigação*. Acesso em 09 Set. 2014, em http://goo.gl/IKKlXE.

Libâneo, J. C. (2010). Palestra: Práticas de ensino em um contexto de mudanças [em linha]. *Sindicato dos Professores de São Paulo (Sinpro SP) Web site*. Acesso em 29 Set. 2014, em http://www.sinprosp.org.br/multimidia.asp?v=v&id=76.

Piaget, J. (2012). A epistemologia genética. (4ª ed.) São Paulo: Martins Fontes.

Squirra, S. (2005). Sociedade do conhecimento. In Melo, J. M. M. de; Sathler, L, *Direitos à comunicação na sociedade da informação* (254-265). São Bernardo do Campo, SP: Unesp.

Vigotski, L. S. (1999). *Pensamento e linguagem*. São Paulo: Martins Fontes.

Despertando a vocação científica para a Matemática

Cristiane Antonia **Hauschild**
Centro Universitário Univates
Brasil
crishauschild@univates.br
Ieda Maria **Giongo**
Centro Universitário Univates
Brasil
igiongo@univates.br
Viviane Raquel **Backendorf**
Centro Universitário Univates e Secretaria Municipal de Educação de Travesseiro
Brasil
vrbackendorf@univates.br
Rosana **Zanon**
Secretaria Municipal de Educação de Roca Sales
Brasil
rozanon@universo.univates.br
Márcia Jussara Hepp **Rehfeldt**
Centro Universitário Univates
Brasil
mrehfeld@univates.br

Resumo

O presente artigo apresenta resultados parciais de uma das ações da pesquisa intitulada "Despertando a vocação científica em um grupo de estudantes da Escola Básica do Vale do Taquari", que conta com apoio financeiro aprovado no Edital FAPERGS/CAPES 15/2013, e desenvolvida no Centro Universitário UNIVATES. O objetivo é despertar a vocação científica num grupo de estudantes de duas escolas municipais do Vale do Taquari. A pesquisa é de abordagem qualitativa. A análise de dados considera a elaboração e o desenvolvimento de um projeto na área da Matemática para a Feira de Ciências da Univates. Os resultados apontam que os alunos participantes demonstram interesse e entusiasmo, bem como relacionam conhecimentos novos com aqueles já construídos, fazendo novas conexões a partir de suas percepções e saberes. Acredita-se também que as ações propostas promovam rupturas nos processos de ensino e de aprendizagem na disciplina de Matemática.

Palavras chave: educação matemática, projetos, feira de ciências, resolução de problemas.

Introdução

A pesquisa intitulada "Despertando a vocação científica em um grupo de estudantes da Escola Básica do Vale do Taquari" é desenvolvida por um grupo de professores do Centro Universitário UNIVATES de Lajeado – RS, em colaboração com professores e alunos da Educação Básica. Conta com apoio da FAPERGS/CAPES, por meio do edital 15/2013 –

PICMEL (Programa de Iniciação em Ciências, Matemática, Engenharias, Tecnologias criativas e Letras). O objetivo central do referido projeto é despertar em um grupo de estudantes da Escola Básica de duas escolas municipais, a vocação científica para a área da Matemática.

A equipe da pesquisa é composta por quatro professoras pesquisadoras, duas escolas parceiras, cada uma com uma professora de Matemática e seis alunos - três de cada escola de Educação Fundamental. Cabe mencionar que essas escolas se situam relativamente distantes uma da outra – cerca de 70 km. Uma delas atende 120 alunos, distribuídos entre o primeiro e o sexto anos, oferece turno integral nos cinco primeiros anos. A segunda, da Educação Infantil ao nono ano do Ensino Fundamental possui cerca de 150 estudantes, e atende nos turnos manhã e tarde.

Entende-se como Santos (2011, p. 18), que "quanto mais cedo se investe na formação do alunado tanto mais se contribui para que estes desenvolvam atitudes e habilidades que serão importantes por toda a vida". Em adição, estudos como os de Silva (2008) problematizam as dificuldades de aprendizagem em Matemática dos alunos na Escola Básica e no Ensino Superior mencionando que a "dificuldade" atribuída à disciplina de Matemática seria oriunda do formalismo e da forma rigorosa como os conceitos se apresentam:

> Os termos utilizados pelos alunos ao se referirem à matemática escolar estão ligados às "fórmulas", às "regras", aos "sinais", às "letras". Esses termos nos remetem à constituição da matemática escolar como um conjunto de jogos de linguagem marcado pelo formalismo, instituindo determinados critérios de racionalidade, que constituem a matemática escolar com as marcas da escrita, da abstração, do rigor, da "pureza" e do cumprimento de regras, que seguem uma seqüência determinada que "no início é fácil e depois vai complicando e ficando mais difícil" (Silva, 2008, p. 87) [grifos da autora].

Desta forma, o projeto que iniciou em abril de 2014 e terá continuidade até o primeiro trimestre deste ano prevê algumas ações com a finalidade de atingir o objetivo proposto. Entre elas esteve a criação de um clube de Matemática que oportunizou aos alunos em turno inverso, semanalmente, atividades diversificadas voltadas à interpretação, à resolução e à discussão de desafios das olimpíadas matemáticas, jogos, momentos de socialização e revisão de dúvidas no que tange aos conteúdos explorados na disciplina e nas oficinas. Estes momentos foram organizados e orientados pelas professoras de matemática das escolas participantes do projeto e seus alunos bolsistas, que além de acompanhar o desenvolvimento das atividades, procuravam orientar e explicar os conceitos matemáticos que geravam dúvidas aos participantes do clube.

As escolas também participaram da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP), Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM) e Olimpíada Matemática da Univates (OMU) com o intuito de disseminar o gosto pela resolução de desafios matemáticos e garantir a participação dos estudantes em eventos similares.

Com o objetivo de socialização e intercâmbio entre os alunos bolsistas foram promovidas também atividades matemáticas desafiadoras na Instituição de Ensino Superior ao qual o projeto está vinculado e nas escolas, buscando assim aproximar os estudantes do Ensino Fundamental da Academia.

Diante do exposto, com o intuito de despertar a vocação para novos talentos na área da Matemática, pretende-se relatar uma das ações da pesquisa em andamento que é a elaboração e o desenvolvimento de um projeto para a Feira de Ciências Univates: Descobrindo Talentos para a Pesquisa. Assim, apresentam-se a seguir, os aportes teóricos e metodológicos, bem como os resultados da elaboração e do desenvolvimento do projeto em cada uma das escolas parceiras.

Aportes teóricos

A educação científica é um tema presente nos debates contemporâneos. Esse conceito compreende o "domínio de conhecimentos científicos e tecnológicos necessários para o cidadão desenvolver-se na vida diária" (Santos, 2007, p. 474). Em adição, o referido autor destaca que há duas abordagens principais, que são complementares, e não excludentes, no que concerne à educação científica na perspectiva do letramento como prática social. A primeira é que a educação científica tem o compromisso com a construção/aprendizagem dos conceitos básicos da ciência em diferentes âmbitos, ou seja, deve problematizar a natureza do conhecimento e da atividade científica. A segunda abordagem está relacionada à função social da atividade científica, o que inclui aspectos de ordem cultural e prática, pressupondo a contextualização do conhecimento na resolução de problemas cotidianos e na compreensão do mundo:

> Pela natureza do conhecimento científico, não se pode pensar no ensino dos seus conteúdos de forma neutra, sem que se contextualize o seu caráter social, nem há como discutir a função social do conhecimento científico sem uma compreensão do seu conteúdo (Santos, 2007, p. 478).

Considera-se importante ressignificar o ensino de Matemática nos seus diferentes níveis, entendendo que o "letramento dos cidadãos exige tanto o entendimento de princípios básicos de fenômenos e processos do cotidiano quanto à capacidade de tomada de decisão em questões relativas à ciência e tecnologia" (Ibidem, p. 480). Dessa visão, surgem implicações importantes para o ensino de Matemática em diferentes níveis educacionais: que conteúdos ensinar? De que forma ensinar? Como construir conhecimento e promover aprendizagem na perspectiva da inserção social dos estudantes no contexto sociocultural e no mundo do trabalho? Como despertar o gosto pela disciplina, que muitas vezes é vista apenas como um conjunto de fórmulas, regras e algoritmos?

O desenvolvimento de projetos se constitui numa atividade em que alunos, orientados por professores, realizam trabalhos de investigação científica e, posteriormente, apresentam os resultados encontrados para a comunidade geral. Nesta visão, o aluno começa desde cedo a planejar e executar experiências e projetos que o levem a adquirir confiança e segurança na solução de problemas com uma visão criativa e crítica. Dessa forma,

> [...] as Feiras de Ciências possibilitam e despertam, tanto nos alunos como na comunidade, o interesse pela atividade científica. Além disso, aguçam a curiosidade do estudante pelo planejamento e execução de atividades investigativas, através do desenvolvimento de ações baseadas na metodologia de projetos. Para a realização de trabalhos é proposta a técnica de projetos como forma usual de desenvolver uma atividade de investigação, pois preenche requisitos básicos para um adequado planejamento, requer criteriosa execução das tarefas e abre perspectivas para conclusões válidas (Martins, Giongo, Oliveira, Stülp & Santini, 2013, p. 16).

Na Matemática, pesquisas têm demonstrado que os alunos apresentam desinteresse por esta disciplina e dificuldades na resolução de problemas. São discutidas alternativas para motivar os alunos para que se sintam estimulados e desafiados para aprender conteúdos matemáticos. Além disso, tem-se discutido a Matemática como linguagem não desvinculada das demais disciplinas e do cotidiano. Para Romanatto (2012, p. 11)

> A Matemática precisa ser concebida pelo estudante como um conhecimento que favorece o desenvolvimento e aperfeiçoamento de seu raciocínio, sua capacidade expressiva, sua

> sensibilidade e sua imaginação. Portanto, o processo de ensinar e de aprender Matemática necessita transformar-se, passando de um mero treinamento técnico para um instrumento de modelar e interpretar a realidade em seus mais diversos contextos. Isso é formar para a criatividade, a criticidade, a cidadania e não para a memorização, a alienação e a exclusão.

Diante do exposto, com base numa das ações da pesquisa apresentada neste artigo, elaborou-se e desenvolveu-se um projeto na área da Matemática, por cada escola parceira para a Feira de Ciências da Univates, sendo que os respectivos projetos e resultados são detalhados a seguir.

Metodologia, Análise e Resultados

A pesquisa apresentada neste artigo é de abordagem qualitativa, pois, segundo Moraes & Galiazzi (2011, p. 11) "pretende aprofundar a compreensão dos fenômenos que investiga a partir de uma análise rigorosa e criteriosa desse tipo de informação […] A intenção é a compreensão, reconstruir conhecimentos existentes".

Bogdan & Biklen (2010, p. 16) utilizam

> a expressão investigação qualitativa como um termo genérico que agrupa diversas estratégias de investigação que partilham determinadas características. Os dados recolhidos são designados por qualitativos, o que significa em por menores descritos relativamente a pessoas, locais e conversas, e de complexo tratamento estatístico.

Dessa forma, pesquisas qualitativas não pretendem responder questões ou testar hipóteses, mas buscam compreender comportamentos/fenômenos a partir da perspectiva dos sujeitos investigados em seu contexto natural.

Os sujeitos da pesquisa são alunos do sexto e nono anos do Ensino Fundamental, escolhidos de acordo com o histórico escolar e as notas obtidas nas aulas de Matemática, na visão da professora colaboradora de cada escola. Justifica-se a escolha pelo sexto ano, pois é nesse momento que os alunos passam a ter vários docentes em sala de aula, o que não ocorre nos anos anteriores. Esses docentes ministram disciplinas específicas, causando, muitas vezes, dissociação de conhecimentos e conteúdos que são recorrentes às dificuldades em Matemática (Zatti, Agranionih & Enricone, 2010). Entende-se que nessa faixa etária, seja produtivo despertar nos alunos a vocação científica e tecnológica. Já o nono ano, se configura como o último do Ensino Fundamental, sendo que, em seguida, os estudantes iniciarão nova etapa de escolarização, o Ensino Médio. Esse nível de escolaridade tem sofrido severas críticas quanto à sua produtividade para a aprendizagem dos discentes, em especial por apresentar baixas taxas de aprovação.

A seguir, são descritos de forma mais detalhada, os projetos elaborados por cada equipe da escola parceira, bem como alguns dados emergentes e sua respectiva análise.

Escola 1 – alunos bolsistas do 6º ano do Ensino Fundamental

Para a elaboração do projeto que integrou a Feira de Ciências da Univates, os alunos bolsistas, juntamente com a professora, discutiram sobre o uso da Matemática em situações do cotidiano e decidiram elaborar um projeto envolvendo esta temática, mais especificamente as construções. Num contexto como esse, os alunos, ao participarem da Feira de Ciências poderão ter "a oportunidade de mostrar seu trabalho, suas ideias, além de conhecer e integrar-se com outros grupos" (Martins *et al.,* 2013, p. 16).

Depois da elaboração do projeto "A matemática presente nas construções" com os três alunos bolsistas, iniciou-se o trabalho com toda a turma do sexto ano. Num primeiro momento foi lançada uma pergunta à turma: Como posso representar objetos ou construções em tamanho menor que o real? Para responder à questão foram dadas muitas sugestões e surgiram ideias interessantes, o que gerou discussões sobre o assunto.

Algumas das respostas dadas pelos alunos à pergunta foram:

- Teremos que dividir as medidas;
- Precisamos utilizar escalas;
- Através de maquete;
- Podemos fazer, por exemplo: 8m fazer em 8cm;
- Em forma de desenho;
- Medindo a sala;
- Utilizando porcentagens;
- Diminuição e planta;
- Diminuir da mesma forma todos os lados.

Depois das ideias apresentadas, os alunos que deram sugestões, explicaram como poderiam proceder para construir objetos em tamanho menor que o real. Para iniciar a aplicação das sugestões dadas, foi lançado o primeiro desafio: construir uma miniatura do armário da sala. Para que se obtivesse um melhor aproveitamento da atividade e envolvimento de todos os alunos, foram formados três grupos e cada um dos três bolsistas liderou um grupo, sendo responsável pelo relatório da atividade. A professora não interferiu no trabalho dos grupos para que os alunos discutissem entre si, construindo de maneira progressiva o conceito de escala.

Sobre a atividade, seguem partes dos relatórios apresentados.

> Minha equipe pensou em primeiro medir o armário, mas medir cada detalhe dele e anotar no caderno as medidas feitas. Depois, na cartolina, pensamos em fazer as medidas que tiramos do armário e dividir por 3 ou 5, porque daí tínhamos que diminuir para chegar à medida do armário que queríamos construir. Pensamos em fazer alguns cálculos específicos para chegar à miniatura (Grupo 1).
>
> Nós medimos o armário com uma régua de 1 metro. A altura do armário é de 1m e 59 cm. Nós pensamos em medir todos os lados do armário e pensamos em fazer abas (Grupo 2).
>
> Primeiro medimos o armário, anotamos todas as medidas em uma folha para ficar organizado, nós medimos porque é melhor saber as medidas para depois diminuir. Usamos uma calculadora para facilitar a divisão e numa cartolina riscamos as medições. Utilizamos duas réguas para facilitar. Fizemos várias contas até chegar a uma conclusão. Dividimos as medidas por dois, três, quatro, cinco,... Não foi tão fácil. (Grupo 3).

Figura 1. Construção da miniatura do armário.

Depois da construção da miniatura do armário os armários construídos foram analisados. Cada grupo teve a liberdade de construir o armário da forma que mais lhe fosse conveniente. Quando analisou-se a escala utilizada por cada grupo percebeu-se que um dos grupos teve uma ideia diferente. Dividiu todas as medidas por 5 e a partir daí construiu a miniatura com todas as medidas proporcionais às medidas reais.

Com a prática, sem que a professora sugerisse, foi possível verificar a utilização das estruturas multiplicativas[1]s, que segundo Vergnaud (1983) não é possível pensar de forma isolada na multiplicação, mas como parte de uma estrutura que envolve tanto a multiplicação como a divisão.

Conforme Vergnaud (1983, p. 127):

> [...] seria equivocado separar o estudo de conceitos interligados. No caso das estruturas multiplicativas, sabe-se que é expressamente errada a separação do estudo da multiplicação, divisão, frações,..., pois não são conteúdos matematicamente independentes, mas estão presentes simultaneamente em muitos problemas que os estudantes encontram (tradução nossa).

A partir das apresentações das miniaturas do armário foram discutidas as diferentes reduções empregadas que possibilitaram a construção conjunta do conceito de escala. Depois dessa análise, a professora mostrou diferentes mapas: mundi, do Brasil e Rio Grande do Sul para complementar a fala e analisar as diferentes escalas utilizadas em diversas situações. Depois disso, os alunos pesquisaram sobre a definição de escala em livros da Biblioteca da escola, disponibilizados pela professora. Mesmo antes de investigar sobre o assunto, os alunos já apresentaram uma ideia bastante clara sobre escala, principal-mente o raciocínio utilizado nas construções, que segundo Carraher (1994, p. 104-105):

> pressupõe um modelo matemático que vai além do cálculo aritmético simples. Uma escala em um desenho envolve uma relação entre muitos pares relacionados de números porque cada medida na planta representa uma medida exata na construção real. Entre todos esses pares desenho- construção existe uma relação única, de natureza proporcional, que é representado pela escala.

No momento seguinte, com o conceito de escala bem definido, decidiu-se partir para a construção da maquete da sala. Inicialmente, divididos em três grupos, cada grupo teve que medir todas as partes da sala, bem como os objetos e mobiliário. Depois das medições realizadas cada grupo apresentou as medidas encontradas e em conjunto foi decidido qual a escala a ser utilizada para a construção da maquete da sala. Segue o que um dos alunos relatou sobre essa decisão:

> Surgiram muitas ideias. Alguns falaram em pegar o tamanho real da sala e dividir por algum número. Foram várias as sugestões: dividir as medidas reais por 2, 4, 5, 9. Mas como a maquete ficaria muito grande, ficou decidido que iríamos dividir todas as medidas por 10. Então, fazendo os cálculos com a calculadora encontramos as medidas 71,1cm e 58,3cm como lados da sala.

[1] Segundo Vergnaud (1991), o campo conceitual das estruturas multiplicativas consiste em todas as situações que podem ser analisadas como proporções simples e múltiplas para as quais, normalmente, é preciso multiplicar e/ou dividir

A partir dessa decisão foi definida a escala da maquete que seria 1:10. No momento seguinte foi analisada a planta da escola e as escalas foram comparadas. E, para dar continuidade, os alunos construíram a maquete da sala e posteriormente o ginásio da escola, cuja escala foi diferente daquela utilizada para a sala de aula, pois os alunos de imediato concluíram que a maquete do ginásio ficaria enorme caso utilizassem a mesma escala. Isso por sua vez, proporcionou o aprendizado do conceito de escala.

A professora manifestou-se positivamente em relação às implicações do Projeto na Escola:

> Os alunos do sexto ano nunca foram muito produtivos, sendo apáticos, cujo interesse para os estudos sempre foi secundário. No entanto, a escolha de três alunos para serem bolsistas fez com que a turma como um todo tratasse com um pouco mais responsabilidade as atividades de aula.
>
> Mas, de uma forma muito positiva a turma do quinto ano da escola está entusiasmada com o fato de três alunos da escola poderem no turno oposto desenvolver atividades com os colegas de outras turmas, mostrando certa superioridade por conseguirem explicar e resolver as atividades matemáticas e desafios propostos. Percebe-se também que muitas famílias aprovam a iniciativa, pois tomam como exemplo os alunos bolsistas para falar das vantagens de ser um estudante comprometido. E, além disso, os três bolsistas vêm desempenhando melhor seu papel de estudante mostrando-se comprometidos e refletindo mais sobre as atividades propostas, utilizando diferentes estratégias de resolução".
>
> Em relação ao Projeto: a matemática presente nas construções obteve-se um bom retorno dos estudantes, o que fez com que os resultados fossem melhores do que os esperados. A fala dos alunos durante as apresentações dos objetos construídos refletiu o interesse pelo assunto e a relação com o dia a dia de cada um deles. Além disso, percebeu-se que houve a construção de conceitos e o envolvimento de todos os alunos.

Escola 2 – alunos bolsistas do 9º ano do Ensino Fundamental

Na segunda escola, a professora participante do projeto, compreendeu que assim como aponta Giongo, Quartieri, & Rehfeldt (2013, p. 4) "cabe ao professor problematizar situações nas quais o discente desenvolva a habilidade de estimar valores e, logo após, com o uso da calculadora, conferir os resultados" e com o auxílio dos bolsistas organizou-se a aplicação de um circuito de 10 atividades envolvendo situações cotidianas para resolução através de estimativa e lógica matemática a todos os alunos de 5º à 9º ano da escola para que através delas eles pudessem aplicar seus conceitos matemáticos, inferir, estimar, comparar e calcular.

Giongo *et al* (2013, p. 3) destacam que a prática de desafios envolvendo estimativa é "um processo rápido e eficaz que fornece um valor aproximado e pode situar-se num intervalo que, no entanto, deve ser plausível". Portanto quando os alunos inferem sobre alguma atividade que envolva estimativa, eles estarão demonstrando a relação que fazem entre os conceitos já conhecidos por eles e o uso de raciocínio lógico, além da interpretação de dados.

O circuito, acima destacado, tinha como objetivos: a) fomentar em turmas de alunos do 5º ao 9º anos da referida escola, o espírito investigativo na área da Matemática; b) possibilitar que as turmas de alunos percebam a presença de conceitos matemáticos em várias situações do cotidiano e c) estimular para que atividades desta natureza sejam frequentemente desenvolvidas no educandário. Cada atividade que o compunha possuía um tempo máximo de 2 minutos de realização, para a efetivação do rodízio para a atividade seguinte, sendo que ao iniciar o circuito cada aluno participante recebia uma planilha na qual deveria apontar a solução da questão, possibilitando assim que os alunos bolsistas e a professora pudessem analisar as respostas dadas.

Após análise dos resultados, estes foram dispostos em tabelas e gráficos. Este retorno foi realizado no Clubinho de Matemática, aos alunos participantes, onde pôde ser feita a discussão e diagnóstico de cada uma das questões.

Questões que compuseram o circuito:

1) Estimar a quantidade de palitos de picolé (contidos em um copo plástico).
2) Quantos palmos você precisa para medir a sua altura?
3) Análise de dois frascos de formatos diferentes (um mais alto e com menor diâmetro e outro mais baixo e com diâmetro maior) contendo feijões e pedir para que estimem qual possui a maior quantidade de sementes.
4) Estimar o comprimento em cm de fio de lã.
5) Explicar como é possível a seguinte situação: Anteontem Márcia tinha 14 anos, mas terá 17 anos no ano que vem. Que dia é hoje?
6) Quantos objetos são necessários para completar 1kg (foram colocados à disposição vários objetos com pesos anteriormente analisados).
7) Colocar os objetos em ordem de peso (do menor ao maior peso).
8) Desafios de madeira (quebra-cabeças com argolas e cordões para desatar sem desfazer os nós).
9) Quadrados mágicos de somas 15 e 34 – esculpidos em madeira.
10) Torre de Hanói.

Ao completar o circuito de atividades, os alunos demonstraram interesse e entusiasmo, sendo que muitos comentários foram externados entre os alunos e demais professores, especialmente no que se refere aos diferentes resultados obtidos na resolução. Por conta disso, é possível inferir que os alunos participantes do circuito relacionaram conhecimentos novos com aqueles já construídos, fazendo novas conexões a partir de suas percepções e saberes.

Ademais, novas atividades desta natureza estão sendo preparadas para serem disponibilizadas para diferentes turmas da escola o que, espera-se, aguce nos discentes o interesse pela área das Ciências Exatas, em especial na Matemática.

A seguir, trechos do depoimento de duas alunas bolsistas, organizadoras do circuito.

> Eu acho essa aplicação de atividades diferentes como brincadeiras e desafios super importante, pois você aprende mais e de um modo diferente. E como dizem é brincando que se aprende.
>
> Esses desafios serviram para esforçar nosso cérebro a pensar mais nas coisas que fazemos no nosso dia-a-dia que muitas vezes passam a serem despercebidas (Aluna 1).
>
> A atividade realizada foi um excelente incentivo para os alunos, pois desta forma aprendemos a matemática de um jeito diferente e percebemos que ela está presente em nosso dia-a-dia. Também foi uma maneira de desenvolvermos mais nosso raciocínio lógico. Achei uma experiência fantástica. Ao final desta atividade (aplicação do circuito matemático) conseguimos concluir que a maioria dos alunos desenvolveu as atividades com suas experiências do dia-a-dia, como realmente foi esperado, em minha atividade (quadrados mágicos). Era necessário ter paciência e pensar para formá-lo (Aluna 2).

Verificou-se, no desencadeamento das etapas dos diferentes projetos em turmas e escolas distintas, o comprometimento dos alunos, a construção dos conceitos envolvidos e a associação feita por eles com o cotidiano.

Considerações finais

A pesquisa ainda está em andamento, porém, diante do apresentado anteriormente, pode-se inferir que, a partir da ação descrita, os alunos de 6º e 9º anos das duas escolas públicas, parceiras do projeto demonstram interesse pela elaboração de projetos, bem como seu desenvolvimento. Além disso, observa-se o desenvolvimento, no grupo de estudantes bolsistas, da habilidade de trabalhar colaborativamente. Em ambas as turmas percebeu-se a motivação dos alunos bolsistas em auxiliar colegas de outras turmas.

Percebeu-se ao final desta ação desenvolvida que os alunos bolsistas, assim como os alunos das turmas envolvidas diretamente e de outras turmas das escolas manifestaram que visualizaram algo diferente do convencional. Em relatórios apresentados sobre a Feira de Ciências, em vários momentos, os projetos envolvendo a matemática foram citados e lembrados como algo útil no dia a dia. Despertou também, em alguns alunos de diferentes turmas, o interesse em elaborar e desenvolver um projeto para participar de uma Feira de Ciências futura. Assim, estimulou-se de certa forma o espírito científico em alguns dos envolvidos.

Os professores também salientam a importância de tais atividades servindo de incentivo para a Matemática. Destacam-se, nas duas escolas parceiras, tanto os alunos do 6º ano como os do 9º ano, o interesse por projetos e desafios. A relevância das pesquisas é mencionada por (Moraes, Galiazzi & Ramos, 2002, p. 11) quando estes afirmam que

> A pesquisa em sala de aula pode ser compreendida como um movimento dialético, em espiral, que se inicia com o questionar dos estados do ser, fazer e conhecer dos participantes, construindo-se a partir disso novos argumentos que possibilitam atingir novos patamares desse ser, fazer e conhecer, estágios esses então comunicados a todos os participantes do processo.

Além disso, foi observado que os alunos estão procurando estratégias diferenciadas para resolução de desafios e desenvolvimento de projetos.

Esperas-se que a elaboração e o desenvolvimento de projetos possam ser produtivos para a emergência de jovens talentos no âmbito das Ciências Exatas, bem como para a aproximação das pesquisas desenvolvidas na Academia do âmbito das escolas de Educação Básica. Além disso, pretende-se fomentar o uso contínuo da formação de grupos de estudos, em turno oposto às aulas, como por exemplo, Clube de Ciências e de Matemática. Ademais, acredita-se que as ações propostas promovam rupturas nos processos de ensino e de aprendizagem nas disciplinas que compõem o campo das Ciências Exatas, em especial a Matemática.

O grupo de pesquisa está apresentando uma proposta a ser desenvolvida em 2015 e 2016 que dê sequência às atividades iniciadas nas escolas e no Centro Universitário Univates como também a promoção de oficinas com foco na preparação dos professores das escolas participantes para escrita de projetos com vistas a participar da Feira de Ciências da Univates. Além disso buscar-se-á organizar uma Feira de Ciências e uma Olimpíada de Matemática em cada uma das escolas.

Referências e bibliografia

Bogdan, R., & Biklen, S. K. (2010) *Investigação Qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos.* Portugal: Porto Editora.

Carraher, T. N. (1994). Passando da planta para a construção: um trabalho de mestres. In A. D. Schlieman, D. W. Carraher, & T. N. Carraher (Orgs.). *Na vida dez na escola zero* (8ª ed., pp. 101-126). São Paulo: Cortez.

Giongo, I. M., Quartieri, M. T., & Rehfeldt, M. J. H. (2013) Problematizando o uso da estimativa em aulas de matemática da escola básica. *11 Anais do Encontro Nacional de Educação Matemática. Educação Matemática: Retrospectivas e Perspectivas.* Curitiba, RS, Brasil.

Martins, S. N., Giongo, I. M., Oliveira, E. C., Stülp, S., & Santini, R. O. (2013). Descobrindo talentos para a pesquisa na Escola Básica: o caso da feira de Ciências. *Revista Destaques Acadêmicos* (Edição Especial - Feira de Ciências/Univates), 7-16.

Moraes, R., & Galiazzi, M. C. (2011). *Análise Textual Discursiva.* Ijuí: Ed. Unijuí.

Moraes, R. Galiazzi M.C., & Ramos, M. G. (2002). Pesquisa em sala de aula: Fundamentos e pressupostos. In R. Moraes, & V. R. Lima, *Pesquisa em sala de aula: tendências para a educação de novos tempos* (pp. 9-23). Porto Alegre: EDIPUCRS.

Pereira, A. B., Oaigen, E. R.,& Hennig, G. (2000). *Feiras de Ciências.* Canoas: Ulbra.

Romanatto, M. C. (2012, maio). Resolução de problemas nas aulas de Matemática. *Revista Eletrônica de Educação, 6*(1), 299-311. Disponível em de http://www.reveduc.ufscar.br

Santos, W. L. P. V. (2007, setembro/dezembro). Educação Científica na perspectiva do letramento como prática social: funções, princípios e desafios. *Revista Brasileira de Educação. 12*(36), 474-492.

Santos, P. M. O. (2011). *Ensinar ciências nos anos iniciais do ensino fundamental:* o que dizem os *professores* (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal de Sergipe, São Cristóvão, Brasil.

Silva, F. B. (2008). *A(prender) Matemática é Difícil: problematizando verdades do currículo escolar* (Dissertação de mestrado). Universidade do Vale do Rio dos Sinos, São Leopoldo, RS.

Vergnaud, G. (1983) Multiplicative structures. In R. Lesh, & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). New York: Academic Press Inc.

Vergnaud, G. (1991). *El niño, las matemáticas y la realidad - Problemas de La enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria*. México: Trillas.

Zatti, F., Agranionih, N. T., & Enricone, J. R. B. (2010). Aprendizagem matemática: desvelando dificuldades de c álculo dos alunos. *Perspectiva, 34*(128), 115-132. Disponível em http://www.uricer.edu.br/new/site/pdfs/perspectiva/128_142.pdf://www.uricer.edu.br/new/site/pdfs/perspectiva/128_142.pdf. Acesso em outubro de 2013.

Diferentes significados de los signos indo-arábigos durante el transcurso del aprendizaje

Ma. Herlinda C. **Martínez** de la Mora
CINVESTAV, Instituto Politécnico Nacional
México
hmartinez@cinvestav.mx

Resumen

El tema de investigación es el trayecto del aprendizaje numérico. Para desarrollarlo focalizamos en la cifra indo-arábiga y sus significados. El método utilizado fue analítico. Una observación fundamental es que actualmente, durante el aprendizaje los signos se articulan a semánticas de casos particulares; como cantidad en un primer momento y después sujetos a la base diez. Sugerimos que es posible identificar tres fases durante el aprendizaje, en las cuales se exhibe distintos significados otorgados al mismo signo. Los significados que pormenorizamos son: el primero, la cifra tratada como numeral; en el segundo, el guarismo vehicula un valor discreto, (la cifra sujeta a un valor determinado, su fundamentado sucede en el ámbito neuronal); el tercer significado, articulado al llamado "valor de posición". Con respecto a este último significado proponemos el uso de distintas bases, para conseguir un empleo flexible del signo, aquí el método de aprendizaje marca la diferencia.

Palabras clave: neurociencias, matemática, numeral, número, valor discreto, signo indo-arábigo, flexibilidad numérica.

Introducción

El propósito es plantear cómo es qué el número participa en la formación del pensamiento matemático. Para ello, dilucidar cada una de las fases del aprendizaje del signo indo-arábigo es pertinente, ya que, con ello se atiende a las características específicas que van perfilando el número. El discernimiento de los diferentes significados de la cifra con ciertas singularidades numéricas durante cada una de las fases del aprendizaje del número, permite señalar que estamos ante un tratamiento particular del número presente en los actuales currículos de educación básica, en dónde se ciñe la cifra a una cantidad específica y al empleo de base diez.

La primer fase de aprendizaje del signo indo-arábigo la exponemos como sigue, el signo tiene una función de sustitución del objeto contado, así está presente como numeral. Después la cifra adquiere significado cuantitativo específico, un valor discreto, (planteamos una propuesta al respecto) al coordinarla con el sistema de cantidad cuya base se encuentra en el sustrato neuronal, específicamente en el Surco intraparietal, IPS, –este es uno de los aspectos más documentados en Neurociencias, si bien con matices distintos– posteriormente la 3° fase se caracteriza por el uso del valor de posición. En este tópico específicamente presentamos una propuesta, para remontar el carácter particular de la cifra y conseguir un significado flexible del signo indo-arábigo, más acorde con los requerimientos del pensamiento matemático.

La aproximación que nosotros proponemos para explicar los diferentes significados que toma el signo indo-arábigo durante el aprendizaje proviene de la determinación de un punto de vista consistente en articular datos procedentes de tres campos del conocimiento, ellos son; Neurociencias, Matemática, y Matemática Educativa. La vinculación de estas áreas permite captar aspectos que de otra manera no son evidentes. Como ya hemos mencionado, el sentido de esta perspectiva es analizar el trayecto de aprendizaje del número, si bien los aspectos matemáticos no serán explicitados. Sí se tomará el número como entidad matemática a formar, lo cual se logra bosquejar a partir de esta aproximación.

Antecedentes

El trayecto del aprendizaje del significado numérico del signo indo-arábigo requiere reseñar algunos antecedentes en relación a la información que nos aportan las Neurociencias, mismos que referiremos brevemente. Algunos investigadores, están de acuerdo en la existencia de un fenómeno que han denominado "subitizing" consistente en el reconocimiento súbito de pequeñas agrupaciones, este procesamiento abarca numerosidades pequeñas no mayores a tres —en algunos casos incluyen alguno más— (Hauser & Spelke , 2004).

Otro tipo de procesamiento es referido como no verbal, mediante el cual se efectúan estimaciones numéricas, su rasgo característico es que es aproximado, y filogenéticamente compartido incluso con otras especies animales. (Dehaene, Piazza, Pinel & Cohen, 2003; Dehaene, 2005; Nieder, & Dehaene, 2009;). Finalmente el que se observa durante el conteo con el uso de las palabras-número. Muchas de las investigaciones efectuadas con niños pequeños, tienden a dilucidar como participa el lenguaje en el aprendizaje numérico, esas investigaciones nos aportan información concerniente al proceso parsimonioso durante la adquisición de las primeras palabras-número. (Ting Huang, Spelke & Snedeker, 2010). El niño al ingresar a la educación institucional públicamente compartida, cuenta no solamente con los circuitos neuronales con los cuales venimos dotados como especie para hacer valoraciones numéricas, también hay una influencia social y culturalmente ejercida sobre el pequeño, así, en muchas ocasiones es capaz de recitar la serie numérica aun sin significado cuantitativo especifico.

1° Significado del signo indo arábigo como numeral

En relación al recorrido del aprendizaje numérico en los primeros grados de escolaridad, acudimos a la clasificación de la conservación del número, elaborada por autores que cuentan con un trayectoria reconocida en el ámbito educativo Kato, Y. Kamii, C. Para ello, hacemos una breve exposición de los niveles de abstracción del número indicados por dichos autores, (Kato, Kamii, Ozaki & Nagahiro, 2002, p.39) esta clasificación es particularmente pertinente, pues su detallada descripción permite identificar ciertos aspectos que se pueden atribuir a la forma en que el cerebro procesa el signo, durante distintas etapas.

Cabe hacer una breve referencia al primer nivel que los autores describen; al expresar cantidades, los niños incipientes en el aprendizaje numérico exhiben un comportamiento aproximado, lo cual es consistente con los datos de Neurociencias. En relación al comportamiento observado en pequeños al estimar cantidades, la aproximación numérica ha sido reiteradamente registrada. Ello dota de evidencia a la explicación que soporta la definición del numeral, ya que, la primera fase alude a ese primer significado.

El nivel 1 que los autores designan como Global. Representación pre numérica se caracteriza, según ellos, por la ausencia de correspondencia uno a uno, aún en las colecciones

con menos de cinco elementos. En este nivel registran dos subniveles en los que reconocen dos comportamientos, en el primero de estos ejemplifican mostrando un apunte dibujado para representar cuatro platos, esa es la solicitud, y aparecen 5 intentos de circunferencia. Los autores lo distinguen del siguiente subnivel por la cantidad que los niños logran representar; cuando se les pide representar cuatro platos, lo logran, no así cuando la petición es de doce platos, en este caso los niños trazan ocho.

En este nivel se aprecia un proceder de aproximación a la cantidad, lo cual se corresponde con el planteamiento de S. Dehaene, quien sostiene que la estimación aproximada de la cantidad es propia de todo sujeto humano, incluso de los individuos pre-verbales. También es consistente con lo que plantean Serra Grabulosa y colaboradores (Serra-Grabulosa, Adan, Pérez-PÀmies, Lachica, & Membrives, 2010), con respecto a la activación existente en el IPS cuando se comienza el aprendizaje de los números, ahí, se registra una estimación de la cantidad sin precisión.

Según la clasificación que seguimos describiendo, el nivel dos se distingue por la representación de la correspondencia uno a uno de los objetos contados. Así, los niños registran la misma cantidad que los objetos contados en este caso el ejemplo es de 6 plumas con sus correspondientes dibujos para denotarlas. También en este nivel se distinguen dos subniveles; el tipo a) es el recién descrito, el otro subnivel incluye a los signos, aun designados como numerales por el tipo de tratamiento.

Allí el signo esta simplemente sustituyendo al objeto; el numeral se asienta representando cada uno un objeto, y anota para cuatro platos, sucesivamente, 1234 (sic). En este nivel nosotros llamamos la atención sobre dos singularidades, la primera es que la numerosidad se registra mediante la representación del objeto, es icónica, pero en la segunda se utilizan los signos arábigos como sustitución del objeto, que se precisan en un lugar en el espacio. Desde esta explicación propiamente no referimos una correspondencia uno a uno simplemente porque el objeto contado indica más bien un tratamiento de regularidad aditiva.

Hasta aquí se ha expuesto, el primer significado que adquiere el guarismo durante el trayecto del aprendizaje del signo indo-arábigo, este responde concretamente al aprendizaje del numeral, cuyos rasgos distintivos son; el empleo del signo de forma aproximada aún icónico, como antecedente y subsiguientemente el signo usado como sustituto del objeto.

2° Significado del signo indo arábigo como número discreto

La siguiente fase se inicia al articular el signo indo-arábigo a la magnitud numérica específica. Al respecto hay varias investigaciones en Neurociencias que sostienen esta relación entre el signo, y la semántica del número desde diferentes puntos de vista, por lo cual presentamos algunas de las propuestas explicativas en este ámbito. Iniciamos con la de Brannon y Merrit quienes otorgan al propio signo una participación destacada para contener significado, así argumentan que el Sistema numérico aproximado, ANS no proporciona ningún soporte a la precisión que se identifica claramente en el empleo de los símbolos numéricos. (Brannon & Merritt, 2010, p. 210). Por otro lado, están quienes incluyen la tarea del conteo, a ella otorgan un aspecto relevante del sentido del número. Piazza al respecto menciona que mediante el conteo y el subitizing las cifras son mapeadas sobre el núcleo de la representación de la cantidad numérica, lo cual implica cambios profundos en la red neuronal lo cual provoca un progresivo refinamiento de la representación del símbolo en el hemisferio izquierdo. (Piazza & Izard, 2009)

Por su parte Ansari lo plantea de la siguiente forma "Las representaciones simbólicas y no simbólicas externas de la magnitud numérica podrían ser mapeadas sobre diferentes representaciones internas que tienen similitudes de alto orden, como son secuencias ordenadas, estas podrían conducir a un patrón de activación en el IPS". (Ansari, 2008, p. 289).

Otra explicación es la que presentan Verguts y Fias, ellos proponen que la representación simbólica es aprendida mediante una presentación simultánea de inputs simbólicos y no simbólicos. (Verguts & Fias 2004; citados por Ansari, 2008) El modelo presentado por ellos sostiene que las numerosidades no simbólicas son transformadas por un paso intermedio un "código de adición" mismo que da paso a una representación sumaria interna como código de lugar. En cuanto a las representaciones simbólicas se adquieren a través del mapeo de ellas sobre las representaciones de código de lugar.

Por otro lado, el nivel 3 de la clasificación de Kato y otros se subdivide en dos; a) indica la cantidad total como un entero completo mediante la representación con un numeral, afirman los autores. Sin embargo nosotros identificamos en este subnivel un empleo del número discreto, ya que, el niño ahora escribe únicamente el número 6 para representar 6 plumas. Ello en el primer subnivel. En el subsecuente subnivel 3 b) el niño registra el enunciado completo "Hay cuatro platos". Los autores al referir el nivel tres presentan el número como entero y un subnivel más para indicar una expresión completa pues incluye la descripción escrita integra.

Respecto al segundo significado que nosotros proponemos; el signo indo-arábigo porta semántica de un valor discreto absoluto, ya sea como magnitud o como colección, desde la explicación que nosotros sugerimos. Los datos de Neurociencias, como hemos referido, sustentan también esta articulación entre el sentido de la magnitud numérica asociada a una cifra específica. Aunque, simplemente distinguen una "etiquetación" o "mapeo" entre el símbolo y el sistema de cantidad pre- simbólico.

El numeral no porta significado aún de número discreto, pues el signo es empleado como sustituto del objeto, por lo cual aún no puede ostentar por sí mismo una entidad numérica de la colección. Ello se observa en el nivel dos de la clasificación presentada. Es posterior el significado que se conecta a la cifra, este se logra con la coordinación de dos regiones neuronales y la tarea que los activa; el surco intraparietal IPS y la circunvolución angular GA mediante la ostentación de la numerosidad a la vista simultáneamente con el signo indo-arábigo, (subrayamos que atendemos al asunto en dónde se otorga significado al guarismo, no aludimos aquí a las zonas del cerebro activadas por requerimientos de atención o de cualquier otra índole).

En Neurociencias han denominado mapeo a la coordinación expresada con anterioridad. Algunos autores dan la explicación siguiente; el signo indo-arábigo expuesto a la vista al igual que las colecciones y magnitudes provocan el mapeo sobre el sistema de cantidad, sobre una línea numérica mental, así se está entonces en posibilidad de dar sentido a la precisión numérica, ya que estará contenida en el signo. Sin embargo aquí hacemos una distinción, con respecto a la explicación recién dicha.

Proponemos que se genera un efecto de precisión en el IPS producto de la ejercitación en tareas de hechos de marcación. Principalmente los efectuados como señalización del objeto contado. Cuyo indicador de la impronta marcada en el IPS se observa más tarde, cuando el seguimiento es efectuado únicamente con la mirada al realizar conteos. Es a esta concatenación de precisiones, así entramadas en el ámbito neuronal, a las cuales se le coordinará un signo indo

arábigo específico, al ostentar a la vista la numerosidad con la cifra correspondiente. En la clasificación descrita por Kato y otros corresponde al nivel dos.

El sentido de número discreto lo podemos observar en el 3° nivel de dicha clasificación, en tal nivel el significado de cantidad está implícito, el valor discreto absoluto así expuesto refiere la colección mediante el signo. Aunque las autoras lo describen como un numeral que indica la cantidad total que compone un entero. Nosotros aquí, planteamos que propiamente en este nivel ya no es un numeral precisamente porque exhibe un valor de número discreto al hacer referencia al entero compuesto por el último de la colección.

3° Significado del signo indo arábigo; flexibilidad numérica

La continuación de la enseñanza del número en la educación básica prosigue con el aprendizaje del valor de posición en base diez. Ahí hay varias posturas para dar cuenta de las vicisitudes por las que atraviesan los niños durante esta fase del aprendizaje, posturas que exhiben diferencias de fondo en cuanto a las explicaciones propuestas, elegimos dos puntos de vista, que difieren sustancialmente. Uno de ellos es el planteado por Fuson el otro por Hannah Slövin, cuyo sustento teórico es el desarrollado por la escuela Rusa en particular Davydov. Además, exponemos brevemente un método desarrollado por la maestra Verónica García denominado "Redescubriendo el número", este método en particular permite hacer evidente la carga significativamente diversa de una misma cifra.

Fuson sostiene que para comprender el valor de posición se requiere por un lado, comprender el sistema numérico de palabras-número y el sistema escrito de signos multi-dígito. Los dos sistemas contienen distintos aspectos; en cuanto a las palabras-número destaca la irregularidad del sistema de valor nombrado, (Fuson, 1990b) y en cuanto al sistema escrito señala que los signos multi-dígito corresponden a un sistema posicional base diez, en donde los números grandes se forman a través de situar un signo escrito del 0 al 9 en una posición relativa a los signos de cada una de las unidades colocadas. Cada posición toma el valor diez veces más grande que el valor de posición de la derecha (Fuson, 1990a).

La comprensión del valor de posición requiere una amplia trayectoria que involucra actividades durante un lapso prolongado de tiempo para fundamentar la construcción requerida para ello. La autora explica que la razón de usar blocks en coordinación con las palabras habladas y los signos escritos es para construir significados multi-unidad cuyo efecto se distingue en el uso de esas palabras y signos. Los blocks deben estar ligados clara y sólidamente a las palabras y a las signos base diez.

La estructura conceptual unitaria se transforma a través del desarrollo de la secuencia, al integrar y abreviar, así se propicia una creciente abstracción. Las palabras- número y los signos-número escritos para los multi-dígitos son construidas sobre las multi-unidades, estas son crecientemente más grandes, de esta forma explica Fuson, están relacionadas con la decena, las centenas y los miles.

Para la autora comprender el concepto de número multi-dígito requiere que el niño sea capaz de pensar en varios tamaños de multi-unidades y para comprender las operaciones con números multi-dígitos necesita comprender la composición y descomposición de números multi-dígitos. Subraya que es la comprensión de las multi-unidades lo que permitirá efectuar operaciones.

Fuson propuso que el trabajo con respecto al valor de posición se realice dentro de un set de adiciones y sustracciones multi–digito. No obstante, ella añade "Puede ser que algunas características de una madura estructura conceptual posicional, para la escritura de los signos base 10, verdaderamente no puede ser apreciada hasta que la multiplicación multi-dígito es comprendida" (Fuson, 1990a, p.276).

Como se aprecia, la explicación expuesta por Fuson versa sobre el concepto de multi-digito y de multi-unidad, de estas últimas enfatiza el atributo del tamaño y las composiciones y descomposiciones que se pueden efectuar utilizando la base diez, en donde los signos modifican su valor en función de la posición relativa a las otras cifras que conforman el número. También señala la necesidad de utilizar operaciones de adición y sustracción para avanzar en la comprensión del valor de posición, aunque indica que una plena comprensión será alcanzada con el empleo de la multiplicación.

Otra perspectiva desde dónde se aborda la temática del valor de posición es la que sostiene Hannah Slövin. La investigación que efectuó, nos parece relevante por los atributos distintos que la autora considera para analizar este tópico. El artículo revisado forma parte de un proyecto más amplio denominado, Measure up, MU (Slövin, 2010-2011). La autora reconoce las dificultades por las que atraviesan los alumnos cuando se enfrentan con los números multi-dígitos y sus operaciones. Y puntualiza sobre el sólido fundamento matemático desde dónde los alumnos pueden construir su comprensión, al comienzo del aprendizaje, de los números multi-dígitos.

Un supuesto desde el cual desarrolla su investigación es, que los principios básicos del álgebra pueden ser introducidas tempranamente en la educación básica. Ya que sostienen "toda idea matemática desarrollada está ligada a la magnitud" (Davydov, 1975b, citado por Slovin, 2010-2011, p.38). Con este supuesto se predispone la enseñanza para que el estudiante emplee su comprensión intuitiva para acceder a los conceptos del algebra básica. Los referentes teóricos los sostiene con la escuela Rusa. (Elkonin, & Davydov, 1966, Davydov, 1975b, citados por Slovin, 2010-2011, p.36)

Destaca que una forma de capacitar a los alumnos en matemáticas es mediante el empleo de cantidades continuas, pues estas permiten a los estudiantes considerar las relaciones existentes entre cantidades. "Sin la distracción del número" por ejemplo, relata la comparación de longitudes de dos libreros en sitios apartados del salón de clase para demandar al alumno, de forma indirecta, la necesidad de utilizar una medida intermediaria. Con ello los niños establecen relaciones entre cantidades continuas (Slovin, 2010-2011).

En cuanto al valor de posición, a diferencia de otro tipo de explicaciones, el programa MU enmarca dicho contenido así,

> Esta aproximación requiere la construcción de una colección auxiliar de medidas, en los cuales la razón (relación) entre unidades de medida consecutiva es igual a la base, no importa de qué base se trate. En este ejemplo [se plantea] un tratamiento de lo general hacia lo específico en la construcción del concepto, el sistema de numeración permanece constante, mientras el sistema de medidas es adaptable y abierto. Esto es, siempre puede ser extendido. Los estudiantes de MU observan el sistema decimal como una instancia particular del sistema de valor posicional" (Slovin, 2010-2011, p.40).

La propuesta de Slövin expone una perspectiva totalmente diferente a la planteada por Fuson, en cuanto al empleo de unidades de medida distintas para generar la necesidad de identificar relaciones entre cantidades continuas y el uso de diferentes bases. Cuya perspectiva se

enmarca en el siguiente propósito, propiciar un pensamiento más acorde con el álgebra. De este método, una de las singularidades es que las relaciones numéricas no quedan sujetas a las posibles composiciones y descomposiciones de un caso particular como es la base diez. También destaca, la utilización de distintas unidades de medida, que instan el empleo de valores continuos. Cabe subrayar un planteamiento explícito que propone la autora, este es; "el sistema de numeración permanece constante, mientras el sistema de medidas es adaptable y abierto."Con todo ello, nosotros destacamos la pertinencia de utilizar distintas bases durante el aprendizaje del valor de posición.

En esta dirección, en relación al uso de distintas bases, hay también un método de enseñanza registrado por la maestra Verónica García llamado "Redescubriendo el número" (García, 2012) El cual focaliza precisamente en el empleo de distintas bases, para la enseñanza del número en la educación primaria. Con este método se observa nítidamente los distintos valores que se otorgan a un mismo signo indo-arábigo. Lo ejemplificamos como sigue: la cifra tres en el orden de magnitud uno en base diez, contiene el valor de treinta, pero si la base que empleamos es cinco, entonces el valor del tres en ese orden de magnitud es de quince. Es, a través de las reglas de operación que los alumnos aplican mediante una ejercitación constante en la tarea de "fabricar números", que el signo indo-arábigo deja de estar sujeto a una sola "cantidad" y a una sola base.

En seguida presentamos un esquema de la "fábrica de números" usado en este Método, con un ejemplo: el número 23 en base seis.

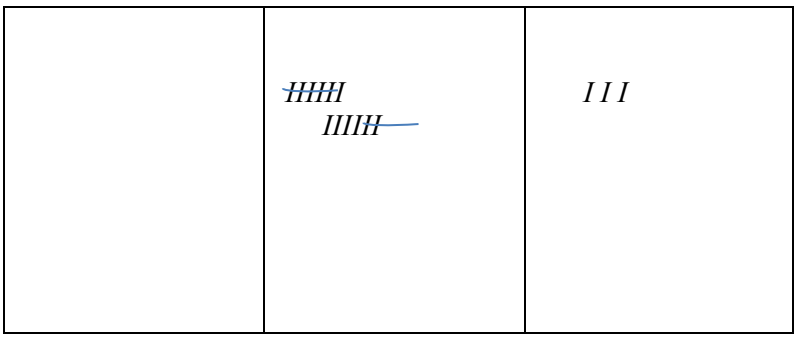


Figura 1. Ejemplo del número 23 en base seis. Del "Taller Redescubriendo el Número".

Resultados

Sugerimos una impronta en el IPS como precisiones concatenadas distintivas que conforman el fundamento del valor discreto del número sostenido por activaciones neuronales específicas, es una preparación que antecede el aprendizaje signado de la numerosidad. Los primeros empleos del signo se observan icónicos y de uso aproximado, para después utilizar signos como sustitutos del objeto, este último uso del signo implica ya un numeral. Así queda perfilado el primer significado otorgado a un signo. Aquí se reconoce que el signo porta una semántica cuantitativa pero ella no se disocia del objeto contado. El aumento de uno corresponde al aumento de una cosa.

Las precisiones concatenadas conllevan iteración aditiva unitaria. Una vez conformada esta red neuronal en el IPS, mediante tareas posteriores, durante la subsecuente vinculación del signo indo arábigo con una magnitud numérica específica (soportada por las precisiones concatenadas) el signo se articulará al significado exacto, al entramado neuronal generado por las rutinas

iteradas de adición unitaria. Es en este momento, que el signo expresa un número discreto, ya que este valor discreto dota de posibilidad de dar contenido semántico al último de la colección. Señalamos con ello, el segundo significado otorgado al signo, este ya dejó de ser numeral ya que ahora porta contenido de valor discreto. Este último sujeto a una determinada magnitud numérica. pero disociado de la "cosa".

En el marco de educación matemática comúnmente se refiere, que la última etiqueta dada a la colección expresa un número completo, esto es un cardinal, (Gelman y Gallistel, 1986) sin embargo, nosotros en la definición de perspectiva señalamos que nos guiaríamos por la entidad numérica matemática, por ello reconocemos que denominar número discreto, al último de la colección, es una opción más adecuada para el tratamiento de entidades finitas.

El tercer significado que se otorga a un signo, se replantea durante el aprendizaje del valor de posición, con la propuesta de Fuson se distingue que el signo puede revalorarse, en sentido de atribuir significado de multi-unidad. Sin embargo, este planteamiento tiene la sujeción al empleo de una sola base y no tiene el sustento diversificado que se encuentra en el proyecto MU al incluir el sistema de medición con diferentes unidades de medida.

De la propuesta de Slovin subrayamos; el empleo de distintas bases, sobre todo la alusión a lo general y a casos particulares. Y también subrayamos su formulación respecto al sistema de medidas, por caracterizarlo como adaptable y abierto. Coincidimos con Slovin en lo referente a no ceñirse al caso particular de una sola base, también con respecto a; identificar, en el empleo diversificado de la unidad de medida, una opción para impedir restricciones innecesarias.

Dado que, dentro del tema que nos ocupa esta hacer visible este otro significado que porta el signo indo arábigo, reconocemos, en el empleo de la diversidad de unidades de medida un cierto uso flexible del número. En el proyecto MU que nos ha presentado la autora, se exhibe un tránsito sencillo, de las tareas con unidades de medida, hacia el uso de distintas bases.

El tercer significado del signo indo arábigo susceptible de conformarse, se vincula precisamente a ese empleo flexible del número, este se puede observar – como hemos mencionado- en la propuesta de Slovin, ya que al hacer un uso de la magnitud con distintas unidades de medida y reconocer en ello un sistema adaptable y abierto, permite que la asociación entre signo indo arábigo y magnitud no se anquilose, en una escasa red neuronal, producto del tratamiento de casos particulares.

Sin embargo, nosotros resaltamos que el método "Redescubriendo el número", ostenta la coordinación entre estructura y operación. Con ello se consigue la singularidad a distinguir, pues a diferencia del proyecto MU en donde implícitamente se relaciona la base con la unidad de medida, aquí las entidades descollantes son: la estructura con la cual se opera en coordinación con las otras entidades matemáticas; base, potencia, coeficiente. De esta forma el signo indo-arábigo contiene significación por la coordinación de dichas entidades. Y de todo ello es necesariamente destacable el impacto neuronal que produce, específicamente entre el IPS y el GA. Con la diversificación del valor numérico subsumido en una misma cifra tenemos un número suficientemente flexible.

Conclusiones

El aprendizaje del número actualmente en la enseñanza escolarizada básica, se encuentra ceñido al Sistema decimal. Este aprendizaje es sistemáticamente repetido, con lo cual se elabora una red neuronal restringida a una sola base. Planteamos que ello es fuente de dificultades y

errores reiterados durante los aprendizajes algebraicos ulteriores, pues estos últimos requieren procesamientos que conlleven empleos más flexibles y generales de los signos. Lo cual necesita un recurso neuronal diversificado, no ceñido al caso particular decimal.

Sugerimos tres significados distintos durante el trayecto del aprendizaje del número otorgados al signo indo-arábigo; el primero básicamente como numeral, sustituto del objeto contado, el segundo significado es el que porta sentido de casos particulares de magnitudes precisas, al cual denominamos número discreto, además ahí las cifras están sujetas también a una sola base. Y el tercero; que presentamos como una propuesta es el significado numérico flexible, provocado por el aprendizaje sistemático de bases numéricas diferentes.

Para conseguir este último significado, los métodos expuestos; el proyecto MU y el método de la Maestra Verónica García "Redescubriendo el número" son adecuados para generar redes neuronales diversificadas particularmente en el IPS y el GA. Sin embargo, planteamos que es particularmente pertinente el método "Redescubriendo el Número", pues este coordina a la vista diferentes entidades matemáticas, esto es; las potencias, la base, el coeficiente, y la estructura.

Algunas cuestiones presentes en la generalización matemática, como el significado de la variable, y de la incógnita, podrían no portar dificultades si se elabora una red neuronal diversificada que dote de significado flexible a la cifra indo-arábiga. Ello predispone una red neuronal que será fundamento para el llamado actualmente "pensamiento abstracto".

Un aspecto a subrayar es, que al emplear la coordinación de las entidades matemáticas mencionadas con diferentes bases, es factible efectuar al menos dos expresiones diferentes de la misma entidad numérica. Lo cual tiene incidencia crucial para el desarrollo del pensamiento matemático, ya que, esa posibilidad de plantear expresiones distintas para una misma entidad numérica, es parte fundamental del pensamiento analítico necesario para esta disciplina.

Referencias y bibliografía

Ansari, D. (2008). Effects of development and enculturation on number representation in the brain. *Nature Reviews|Neuroscience 9*, 278-291. Recuperado de http:// www.nature.com/reviews/neuro

Branoon, E. M., & Merritt, D., (2010). Evolutionary Foundations of the Approximate Number System. En S. Dehaene, & E. M. Brannon (Eds.) *Space, Time and Number in the Brain. Searching for the Foundations of Mathematical Thought,* (pp. 207- 224). Canada: Elsevier. DOI: 10.1016/B978-0-12-385948-8.00014-1.

Dehaene, S. (2005). Evolution of human cortical circuits for reading and arithmetic: The "neuronal recycling" hypothesis. En S. Dehaene, J. R. Duhamel, M. D. Hauser, & G. Rizzolatti, *From Monkey Brain to Human* Brain. A Fyssen Foundation Symposium. MIT Press. Recuperado de http://www.unicog.org/biblio/Author/DEHAENE-S.html

Dehaene, S., Piazza, M., Pinel, Ph., & Cohen, L. (2003). Three parietal circuits for number processing. *Cognitive Neuropsychology*, *20*, (3/4/5/6), 487-506. doi:10.1080/02643290244000239.

Fuson, K. C., & Briars, D. J. (1990b). Using a Base-Ten Blocks Learning/Teaching Approach for First – and Second-Grade Place-Value and Multidigit Addition and Subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(3), 180-206.

Fuson, K. C. (1990a). Issues in Place-Value and Multidigit Addition and Subtraction. Learning and Teaching. *Journal for Research in Mathematics Education. 21*(4), 273-280.

García, V. (2012). "Taller Redescubriendo el número". *6° CINVESNIÑOS*. CINVESTAV (2012, noviembre). México, D.F.

Gelman, R., & Gallistel, C. R. (1986). *The child´s understanding of number.* Cambridge, Massachusetts, y London England: Harvard University Press.

Hauser M. D., & Spelke, E., (2004). Evolutionary and developmental foundations of human knowledge. En M. Gazzaniga, & N. Logothetis (Eds.), *The Cognitive Neurosciences III.* Harvard, Cambrige: MIT Press. Recuperado de http://www.wjh.harvard.edu/~lds/index.html?spelke.html

Kato, Y., Kamii, C., Ozaki, K., & Nagahiro, M. (2002). Young Children´s Representations of Groups of Objects: The Relationship Between Abstraction and Representation. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(1) 30-45.

Nieder, A., & Dehaene, S. (2009). Representation of Number in the Brain. *The Annual Review of Neuroscience*, *32,* 185–208. doi:10.1146/annurev.neuro.051508.135550.

Serra-Grabulosa, J.M., Adan, A., Pérez-PÀmies, M., Lachica, J., & Membrives, S. (2010). Bases neuronales del procesamiento numérico y del cálculo. *Revista de Neurología, 50*(1), 39-46.

Slovin, H.,(2010-2011). Revelations from counting: a window to conceptual understanding. *Investigations in Mathematics Learning*. *Official Journal of the Research Council on Mathematics Learning, 3,* 2.

Ting Huang, Y., Spelke, E., & Snedeker, J. (2010). When is *four* far more than three? Children´s generalization of newly-acquired number words. *Psychol Sci.*, *21*(4), 600-606. doi:10.1177/0956797610363552.

Educação Matemática e teatro: um panorama das pesquisas brasileiras

Hannah Dora Garcia **Lacerda**
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"-campus Rio Claro
Brasil
hannahdoralacerda@gmail.com

Resumo

Este artigo tem como objetivo discutir algumas possibilidades da relação entre Teatro e Educação Matemática. Para isso, apresenta uma revisão de literatura das pesquisas que estão sendo realizadas no Brasil a respeito dos temas Teatro e Educação Matemática, Arte e Ciência e Performance Matemática Digital, com foco nas dimensões teóricas e metodológicas desses trabalhos. Apresenta ainda, uma pesquisa de mestrado em desenvolvimento, "Matemática Encena", que busca analisar as contribuições do Teatro para a Educação Matemática, sob a perspectiva das Performances Matemáticas Digitais. Apesar de poucos trabalhos apresentarem os temas em questão, percebe-se uma frente de pesquisa sendo iniciada dentro da perspectiva das Artes e das Ciências.

Palavras chave: Matemática Encena, Linguagem Teatral, Performance Matemática Digital, Arte, Ciência, Pesquisa Qualitativa.

Resumen

Este artículo tiene como objetivo discutir algunas posibilidades de relación entre el teatro y la enseñanza de la matemática. Para esto se presenta una revisión de la literatura sobre investigaciones que se están llevando a cabo en Brasil en relación con los temas de teatro y enseñanza de la Matemática, Artes y Ciencias y Performances Matemáticas Digitales, centrándose en las dimensiones teóricas y metodológicas de estas obras. También presenta una investigación em curso, "Matemáticas puesta en escena", que busca analizar el aporte del Teatro en la enseñanza de la Matemática, desde la perspectiva de Performances Matemáticas digitales. Aunque solamente algunos estudios presentan los temas en cuestión, podemos ver una línea de investigación que se inició en la perspectiva de las Artes y las Ciencias.

Palabras clave: Matemáticas puesta en escena, Lenguaje Teatral, Performances Matemáticas Digitales, Arte, Ciencia, Investigación Cualitativa.

Abstract

This article aims to discuss some possible relationships between Drama and Mathematics Education. For this, it presents a literature review of the research being carried out in Brazil concerning the topics of Drama and Mathematics Education, Arts and Science and Digital Mathematics Performance, focused on theoretical and methodological dimensions of these papers. It also presents a research in progress,

"Mathematics on Stage", which seeks to analyze how Drama can contribute to the Mathematics Education, from the perspective of Digital Mathematics Performance. Although few studies present the topics in question, we can see a line of research being initiated within the perspective of Arts and Sciences.

Key words: Mathematics on Stage, Theatrical Language, Digital Mathematics Performance, Art, Science, Qualitative Research.

Apresentação

Teatro e Educação Matemática. Poderia essa relação ser uma tendência em Educação Matemática? Segundo D'Ambrosio e Borba (2010), a característica predominante da Educação Matemática no Brasil é ser constituída por uma "tapeçaria de tendências", onde está a Modelagem, o uso de Tecnologia, a Etnomatemática, os Aspectos Filosóficos, as Perspectivas históricas, as dimensões Políticas, dentre outras. Nesse sentido, este trabalho tem como objetivo pensar as possibilidades do Teatro como sendo um dos "fios" que compõe essa tapeçaria. Para isso, será apresentada, inicialmente, uma reflexão acerca das pesquisas que estão sendo realizadas no Brasil sobre o tema, evidenciando suas características metodológicas, com o intuito de apresentar uma aproximação com a metodologia de Pesquisa Qualitativa.

Em um segundo momento, discutimos a relação proposta, objetivando sua expansão, dialogando com duas pesquisas dentro do cenário de Ciência e de Arte, pensando a Matemática como Ciência e o Teatro como Arte. Ainda, outra frente que possibilita tal relação é a perspectiva das Performances Matemáticas Digitais (PMD), que nos permite pensar e comunicar ideias matemáticas por meio de artes performáticas, em particular o teatro, associadas às tecnologias digitais.

Esse horizonte de articulação tem o objetivo de refletir sobre a proposta de uma dissertação de mestrado em andamento, intitulada "Matemática Encena". Essa pesquisa busca analisar as contribuições do Teatro na Educação Matemática com o objetivo de responder a questão: *"qual é a visão sobre conteúdos matemáticos e sobre a Matemática que estudantes expressam, quando desenvolvem uma PMD Teatral?"*. Desse modo, ao investigar as possibilidades da relação proposta, o foco da pesquisa está no processo, nas manifestações matemáticas dos alunos e na forma em que expressam o entendimento de Matemática por meio da linguagem teatral.

A partir dessa perspectiva, na tentativa de situar a proposta de trabalhar com Teatro para promover Educação Matemática, dentro do processo de produção de conhecimento da comunidade científica, esse artigo está estruturado em três sessões. Na primeira, apresentamos uma revisão de literatura sobre Teatro e Educação Matemática, Ciência e Arte e, ainda, Performance Matemática Digital. Na segunda sessão, discutimos sobre a dissertação "Matemática Encena" e, por fim, levantamos algumas considerações finais com o intuito de refletir esse panorama de pesquisa.

Revisão de literatura

Teatro e Educação Matemática

Buscando, no campo assunto do Banco de Teses da CAPES[1], a expressão "Teatro e Educação Matemática", com o objetivo de mapear o que está sendo produzido no Brasil, em

[1] Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – agência de fomento à pesquisa brasileira – disponível em < http://www.capes.gov.br/>. Acesso em: setembro 2014.

nível de mestrado e de doutorado, a respeito de tal relação, são encontrados poucos trabalhos. Dentre eles, seis dissertações de mestrado e uma tese de doutorado, sendo que outros dois trabalhos serão apresentados na próxima sessão. Entretanto, após uma primeira leitura dos resumos, percebe-se que quatro deles não estão relacionados, diretamente, com a Educação Matemática.

Oliveira (1996) propõe os jogos teatrais, como método de ensino de linguagens cênicas, para a construção de situações de aprendizagem de noções e de conceitos básicos, pertencentes às matérias do currículo do Ensino Fundamental, dentre elas, a Matemática. Em seu trabalho, o autor reflete sobre a importância da linguagem corporal em tais situações.

Pereira (2006) apresenta o Teatro como um recurso de linguagem e de expressão. Em sua dissertação, a autora estuda o Ensino de Teatro em escolas municipais de Vitória, diferenciando o ensino dessa arte frente a outras disciplinas, como a Matemática.

Oliveira Júnior (2006) faz uma análise da implementação da educação ambiental não formal, ocorrida em Campo Grande, MS, desenvolvendo trabalhos sobre meio ambiente, nos quais peças de teatro são um dos diversos recursos didáticos utilizados. A Matemática, por sua vez, aparece como uma das disciplinas envolvidas na proposta.

Temos ainda Monteiro Júnior (2012) que, com o objetivo de discutir, em sua tese de doutorado, a melhoria dos ambientes acústicos, estuda o ensino de acústica, que passa por diversas matérias, entre elas a Matemática. Nesse trabalho, os teatros sonoros são apresentados como ferramentas didáticas na análise do ambiente acústico.

Nas pesquisas até o momento pontuadas, os jogos teatrais e o Teatro, propriamente dito, são apresentados como método de ensino de linguagens cênicas, recurso de linguagem e de expressão, recurso didático e; além disso, como ferramenta didática. Esses trabalhos são, portanto, convergentes na perspectiva de aliar técnicas teatrais com diversas perspectivas educacionais. A Matemática, por sua vez, é uma das disciplinas envolvidas nesses processos, não sendo o foco de nenhum dos estudos em questão.

Dentre os trabalhos mencionados no início desta sessão, três dissertações de mestrado de fato vão ao encontro com a proposta de discutir a relação entre Teatro e Educação Matemática. Nessas pesquisas, podem-se encontrar diferentes abordagens teatrais, aspectos matemáticos e ainda perspectivas metodológicas. Um breve relato será apresentado a respeito dos temas dessas pesquisas e da metodologia de cada uma, bem como uma aproximação com os pressupostos da metodologia de pesquisa qualitativa.

Grützmann (2009) apresenta o Teatro como uma metodologia que auxilia o aluno a relacionar a Matemática ao seu cotidiano. Para a autora, a aprendizagem matemática requer alto grau de abstração, a fim de relacionar os conteúdos com a realidade e, buscando uma aprendizagem significativa, defende que os jogos teatrais possibilitam a melhora da expressão corporal e a comunicação dos alunos. Por aprendizagem significativa, Grützmann entende como sendo um "processo pelo qual uma nova informação se relaciona com um aspecto relevante da estrutura de conhecimento do indivíduo", concepção de Ausubel (Moreira & Masini, 2001, p. 17, apud Grützmann, 2009). Nesse sentido, em sua dissertação, se propõe a pesquisar

> como as atividades e os jogos cênicos podem contribuir na formação docente durante o curso de Licenciatura em Matemática, por meio da vivência, preparação e execução de aulas mais criativas e que promovam a interação entre professores e alunos (Grützmann, 2009, p. 18).

Em sua pesquisa, partindo de uma abordagem qualitativa, os dados são compostos de entrevistas transcritas, questionários, textos dissertativos, diário de aula, filmagem e fotografia das aulas e, ainda, de uma peça teatral elaborada ao final do processo. Dessa forma, a multiplicidade de procedimentos, presentes na pesquisa de Grützmann (2009), vai ao encontro da ideia de triangulação, proposta por Araújo e Borba (2012), que se caracteriza por proporcionar diferentes visões de um mesmo objeto de estudo.

Mariotto (2009), dentro da linha de pesquisa em História da Matemática, apresenta uma análise da obra literário-educacional de Mario Tourasse Teixeira. Em seu trabalho, busca responder a pergunta: "o que se torna evidente a partir de uma análise interpretativa dos textos literários do professor Mario Tourasse Teixeira?" (Mariotto, 2009, p. 7). Matemática e Literatura se relacionam, proporcionando uma obra que evidencia ideias do professor acerca do mundo, da Matemática e da Educação. O Teatro está inserido, dentro dessa obra, nos textos teatrais escritos pelo professor que discutem dilemas educacionais e também o ambiente escolar, tendo a Matemática como pano de fundo.

Segundo a autora, "método é construído segundo a intenção do pesquisador em seu trabalho" (Mariotto, 2009, p. 19) e; por isso, em sua pesquisa, não há um procedimento metodológico, rigidamente, pré-estabelecido. Dentro desse panorama, Mariotto (2009) realizou uma análise documental, buscando aspectos da vida e obra do autor, encontrando sete peças teatrais que discutem questões educacionais. Essa perspectiva metodológica vai ao encontro da flexibilidade que é apresentada por Bicudo (1993) como sendo uma característica da Pesquisa Qualitativa.

Em sua dissertação, Poligccio (2012) defende que as dificuldades matemáticas estão relacionadas ao grau de abstração necessário inerente a essa linguagem. A autora apresenta, então, o Teatro como uma possibilidade de materialização dos conceitos e narrativas nas aulas de Matemática. Isso porque acredita que tal relação possa auxiliar no desenvolvimento da competência de abstração, na qual o Teatro se caracteriza como sendo um palco propício para tal desenvolvimento, bem como da imaginação e extrapolação, habilidades tais, exigidas no estudo de Matemática. Partindo das competências avaliadas no ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio): expressão em diferentes linguagens, compreensão de textos e fenômenos, capacidade de argumentação ou análise, capacidade de decisão ou de síntese, e capacidade de contextualização; a autora busca "pesquisar as relações existentes entre Teatro e Matemática e utilizá-las como meio para desenvolver competências pessoais, que são a finalidade maior do processo de educação" (Poligicchio, 2012, p. 15).

Poligccio (2012, p. 18) levanta as seguintes questões: "Que relações existem entre Teatro e Matemática? É possível aprender/ensinar Matemática por meio do Teatro? O Teatro pode facilitar a aprendizagem Matemática?". Partindo desses questionamentos, apresenta uma pesquisa teórica, envolvendo as ideias de pessoa, formação pessoal, representação e teatro. Tendo como elemento de produção de dados registros, desde 2004, de experiências práticas de sete peças teatrais do Grupo Teatral de Matemática (TEMA

Por sua vez, a tese de doutorado em Ensino em Biociências e Saúde de Gardair (2012), busca

> [...] identificar e discutir as principais percepções de ciências e artes entre jovens de 12 a 18 anos; investigar aproximações entre ciências e teatros; desenvolver estratégia pedagógica voltada para a educação científica baseada na linguagem teatral e contextualização histórica;

> e discutir a construção por meio do teatro, de imagens mais humanizadas das ciências e da atuação do cientista junto, principalmente, a estudantes de ensino médio e fundamental (Gardair, 2012, p. 14).

Em um primeiro momento, a pesquisadora aplicou um questionário com o intuito de levantar dados acerca do imaginário dos jovens, envolvidos com ciências e com artes. Uma peça teatral foi então redigida, tentando transpor as respostas obtidas nos questionários para a linguagem teatral. A Matemática como Ciência aparece em diversos momentos nesse texto, desde sua história, até pressupostos filosóficos. A peça foi explorada pelos estudantes por meio de debate, exercícios práticos e ainda uma leitura pública da mesma.), a autora propõe investigar o processo de educação, a formação pessoal e a representação de papéis nesses espetáculos. Dentro dessa perspectiva, o trabalho de Poligccio (2012) defende a ideia de que Matemática não se aprende somente com palavras e apresenta o Teatro como sendo uma possibilidade tanto de ensinar, como de pensar e de desenvolver a Matemática. Nesse sentido, segundo D'Ambrosio e Borba (2010, p. 278, tradução nossa), "a história da Matemática sugere que ferramentas de comunicação, como desenho, linguagem e tecnologias, moldaram o desenvolvimento da Matemática". Temos aqui então, o Teatro sendo visto como uma dessas ferramentas de comunicação, buscando desenvolver não só a Matemática, mas também seu ensino e aprendizagem.

As últimas três pesquisas apontadas apresentam distintas relações entre Teatro e Educação Matemática. Dentre os estudos encontram-se discussões a partir da perspectiva da formação de professores; de análise documental, da relação entre Educação Matemática e Literatura; e, ainda, da utilização do Teatro em sala de aula como uma metodologia de ensino. No que diz respeito às metodologias de pesquisa, as dissertações de mestrado de Grützmann (2009), Mariotto (2009) e Poligccio (2012) evidenciam as diversas possibilidades de coleta de dados dentro da Pesquisa Qualitativa, fato que é apontado por Araújo e Borba (2012), indo ao encontro com a ideia de Bicudo (1993) que a Pesquisa Qualitativa não é única.

Ciência e arte

Particularizando a arte teatral e a ciência matemática, pensar em um estudo que articule Matemática e Teatro, é pensar em articular Ciência e Arte. Ainda no banco de dados da CAPES, outros dois trabalhos merecem destaque. Esses trabalhos aparecem na busca pelas palavras "Teatro e Educação Matemática", apesar de não tratarem do tema especificamente. No entanto, seu destaque, nesse artigo, deve-se à sua temática geral: Ciência e Arte. A perspectiva teórica e metodológica desses trabalhos vai ao encontro da proposta de articulação entre Teatro, como Arte, e Educação Matemática, como Ciência.

Fregolente (2012), em sua dissertação de mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática, discute a

> [...] utilização do teatro como meio de apresentar conteúdos científicos, analisando, em particular, a aprendizagem científica, e o processo de formação docente dos próprios "atores" – estudantes de graduação em Física e Química – envolvidos na produção e apresentação de um espetáculo teatral denominado "A Ciência em Peças" (Fregolente, 2012, p. 13).

Tal espetáculo é constituído por dezoito cenas com situações do cotidiano, abordando um determinado conteúdo científico. O intuito dessa pesquisa foi analisar a aprendizagem dos atores/estudantes a partir do que se observou tanto na produção do espetáculo, quanto em suas apresentações (Fregolente, 2012). Para isso, o pesquisador realizou entrevistas com os

participantes, que foram analisadas sob a luz da teoria da Análise Textual Discursiva (Moraes & Galiazzi, 2003, apud Fregolente, 2012) buscando unidades de significado que representassem indícios da aprendizagem informal dos envolvidos, bem como questões emergentes sobre a docência. Essa escolha metodológica vai ao encontro dos pressupostos da Metodologia de Pesquisa Qualitativa, ao passo que as entrevistas permitem acesso ao ponto de vista dos atores envolvidos no processo em questão (Poupart, 2012).

Fregolente (2012, p. 50) conclui, em sua pesquisa, que "a utilização do teatro no processo formativo pode auxiliar o futuro professor na elaboração do conhecimento científico e na sua formação profissional". Já a Matemática não aparece, explicitamente, nesse trabalho, mas sim como linguagem dentro da Física e da Química.

Outro questionário foi aplicado, desta vez buscando analisar as impressões que o texto teatral causou nos participantes. Por fim, os dados obtidos foram analisados sob a luz do método de Análise de Conteúdo (Bardin, 1978, apud Gardair, 2012).

Partindo da pergunta de pesquisa "que pensam jovens estudantes sobre ciências e artes e de que modo uma peça teatral que explore aspectos das histórias das ciências e dos teatros, poderia contribuir para estimular o debate sobre temas relacionados às ciências e suas possíveis articulações com outros campos do conhecimento?" (Gardair, 2012, p. 180), a pesquisadora, com base nos questionários respondidos, pôde verificar que novos olhares acerca das ciências, artes, cientistas e artistas vêm sendo construídos, apesar do predomínio de visões estereotipadas. Essa abordagem é condizente com a ideia de que a Pesquisa Qualitativa que tenta "ver o mundo através dos olhos dos atores sociais e dos sentidos que eles atribuem aos objetos e às ações sociais que desenvolvem" (Goldenberg, 2011, p. 32). Por fim, conclui que a associação entre a educação científica e a linguagem teatral possibilita "visões mais plurais e contextualizadas do mundo na medida em que articula diferentes áreas" (Gardair, 2012, p. 269).

Foram aqui apresentadas duas pesquisas que articulam Ciência e Arte. Dentro dessa perspectiva, a noção de Performance Matemática Digital (PMD) busca pensar, digitalmente, ideias matemáticas, que são científicas, a partir de performances artísticas, como veremos a seguir.

Performance matemática digital

Em um segundo momento da pesquisa, optei por uma busca de trabalhos que tratassem da temática das PMD, por possibilitarem articular Educação Matemática e Arte. Podemos encontrar, no entanto, apenas uma tese de doutorado, Scucuglia (2012). Em sua pesquisa, o autor apresenta a análise da natureza de vinte e duas PMD, submetidas ao primeiro Math + Science Performance Festival[2], realizadas por alunos do Ensino Fundamental na cidade de Ontário, Canadá. Segundo o autor, as PMD são narrativas multimodais com o objetivo de comunicar ideias matemáticas utilizando a arte da performance para tal. Nesse sentido, o foco central de sua pesquisa se caracteriza como sendo o papel das artes e da tecnologia na formação da comunicação matemática dos alunos. Para alcançar tais objetivos, o autor conduziu o trabalho a partir do estudo de casos qualitativos e da análise das performances, em sua maioria, vídeos. Tais

[2] "Math Performance Festival is funded by the Imperial Oil Foundation, the Fields Institute, Research Western, the Faculty of Education at UWO, and the Canadian Mathematical Society. A project by George Gadanidis (UWO), Marcelo Borba (UNESP, Brazil), Susan Gerofsky (UBC), and Rick Jardine (UWO)". Disponível em: <http://www.mathfest.ca>. Acesso em: setembro 2014.

performances não têm o Teatro como foco, sendo constituídas por músicas, clips, animações, e ainda dramatizações.

O livro de Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014), define PMD como sendo uma interlocução, no campo da Educação Matemática, entre artes performáticas e o uso de tecnologias digitais. Para os autores, os estudos sobre PMD estão iniciando a consolidação de uma linha de pesquisa dentro da Educação Matemática (Borba, Scucuglia & Gadanidis, 2014), uma vez que investigam possibilidades didático-pedagógicas diferenciadas.

Borba, Scucuglia e Gadanidis (2014), apresentam duas concepções a respeito das PMD: enquanto processo e enquanto produto digital. A primeira diz respeito ao processo de elaboração de uma PMD, em que a interação com as tecnologias digitais para a produção de um objeto digital que apresente ideias matemáticas, reorganiza o pensamento humano, dentro da perspectiva do constructo seres-humanos com mídias. Borba e Villarreal (2005) ressaltam a importância das mídias no processo de produção do conhecimento que se dá a partir de um coletivo formado por seres humanos e não humanos. Por outro lado, PMD, enquanto produto digital, caracteriza a comunicação matemática por meio de manifestações artísticas, podendo ser distribuída através da Internet. Essa última noção de PMD está presente na pesquisa de mestrado que será apresentada na próxima sessão.

Matemática encena

A pesquisa de mestrado "Matemática Encena", em andamento, busca articular teatro e Educação Matemática dentro da perspectiva das PMD (Lacerda, 2014), com o objetivo de analisar a visão sobre conteúdos matemáticos e sobre a própria Matemática, que alunos de oitavo e nono anos de uma escola da rede pública de ensino brasileiro expressam, quando estão desenvolvendo uma PMD Teatral. Uma PMD Teatral pode ser entendida como uma manifestação artística teatral, envolvendo ideias matemáticas e cuja forma final se caracteriza como um produto digital, um vídeo baseado em uma peça de teatro. No entanto, para que o "digital" se justifique, a PMD Teatral, além de ser baseada em uma peça de teatro, contêm efeitos audiovisuais que incrementem o aspecto "ao vivo" do teatro.

Essa pesquisa propõe que os alunos envolvidos estudem um conteúdo matemático, escolhido por eles, por meio da linguagem teatral, de forma a (re) significá-los dentro do universo artístico teatral, estimulando "o ato de pensar, além do papel de representar e encenar" (Cartaxo, 2001, p. 24). Ou seja, os próprios alunos criam a dramaturgia de um texto de teatro, tendo como base um conteúdo matemático e suas próprias interpretações e contextualizações.

O processo de elaboração da peça inicia com a escolha do conteúdo e com a introdução de jogos dramáticos, como forma de familiarizá-los com a linguagem teatral. Os jogos dramáticos são improvisações a partir de temas, previamente, definidos, permitindo que os alunos exerçam sua imaginação e criações artísticas. Eles são importantes para introduzir essa linguagem artística na vida dos alunos, pois "para que se possa dominar os meios de produção teatral, deve-se primeiramente conhecer o próprio corpo, para poder depois torná-lo mais expressivo" (Boal, 1983, p. 143). A partir dos jogos dramáticos, os alunos poderão verbalizar, corporificar e dar sentido para o conteúdo escolhido, dentro de um contexto, inventado por eles. Essas improvisações serão a base para a escrita do texto de teatro que será encenado e filmado, a fim de caracterizar o trabalho como uma PMD.

Para responder a pergunta norteadora *"qual é a visão sobre conteúdos matemáticos e sobre a Matemática que estudantes expressam quando desenvolvem uma PMD Teatral?"*, a pesquisa "Matemática Encena" conta com a realização de um grupo focal (Gatti, 2012; Powell & Single, 1996) no início das atividades, observação participante (Moreira & Caleffe, 2008) e entrevistas individuais (Poupart, 2012) ao final do processo. Sendo todos os momentos gravados para análise de vídeo (Powell, Francisco, & Maher, 2004). O intuito do grupo focal é discutir as ideias iniciais dos participantes da pesquisa frente suas visões sobre o que é Matemática, para o que ela serve, suas relações com tal disciplina escolar e, inclusive, as possibilidades do teatro nessas relações. A observação participante busca perceber as interações entre os alunos, suas posturas, falas e manifestações corporais. Por fim, as entrevistas terão como foco a percepção da visão dos alunos sobre conteúdos matemáticos e sobre a própria Matemática após o processo de elaboração da peça de teatro e da produção da PMD Teatral.

Grützmann (2009), Mariotto (2009) e Poligccio (2012) são pesquisas que apresentam distintas relações entre Teatro e Educação Matemática. Essa última, apesar de ter como foco o desenvolvimento de competências pessoais dos alunos, é a que mais se aproxima com a perspectiva da "Matemática Encena", apresentando o Teatro como uma possibilidade de materialização de conceitos e de narrativas nas aulas de Matemática. Contudo, a referida pesquisa de mestrado se diferencia, na medida em que propõe um estudo, diretamente, ligado com o processo de desenvolvimento de uma PMD teatral, visto que Poligccio (2012) analisou peças teatrais que já haviam sido produzidas e encenadas. Por outro lado, a proposta da pesquisa "Matemática Encena" se diferencia de Scucuglia (2012) em dois aspectos fundamentais: o olhar voltado para o Teatro como sendo uma performance e a investigação do processo de elaboração de uma PMD.

Considerações finais

Esse artigo foi escrito a partir de uma motivação inicial: a de pensar a relação entre Teatro e Educação Matemática como sendo uma tendência em Educação Matemática. Segundo Miorim e Miguel (2001), três indicadores sugerem que um determinado campo de estudo pode ser entendido de tal forma. O primeiro é se o tema em questão possui publicações próprias. O segundo é se existem discussões coletivas da comunidade científica refletidas em livros e anais de eventos científicos. Por fim, o terceiro indicador é existir articulações entre os pesquisadores por meio de comissões, sociedades, ou comunidades científicas sobre o tema.

A partir da revisão de literatura apresentada a respeito de Teatro e Educação Matemática, Arte e Ciência, e PMD, percebe-se uma perspectiva de pesquisa sendo iniciada, mas ainda não estruturada. Isso porque, apesar de alguns trabalhos individuais terem sido publicados, ainda não existe uma comunidade de pesquisadores que se detenham, particularmente, no tema em questão. Quando se fala em Arte e Educação Matemática, é possível encontrar mais trabalhos voltados para tal reflexão, nos quais as artes plásticas e a música aparecem com mais frequência. No entanto, as pesquisas sobre Teatro e Educação Matemática estão começando a compor um cenário de pesquisa dentro da perspectiva das Artes e das Ciências.

"Criamos a arte para comunicar emoções" (Nathan, 2008, p. 117, tradução nossa). Nessa direção, pensar o Teatro como um dos fios da "tapeçaria de tendências", proposta por D'Ambrosio e Borba (2010), significa desenvolver um processo de comunicação de ideias matemáticas por meio de uma linguagem artística: a teatral. Essa concepção vai ao encontro de Gardair (2012, p. 47), se pensarmos em "promover um processo no qual os participantes

vivenciem diferentes etapas da criação teatral e possam se reconhecer ao longo deste processo e do produto final".

A partir dessa concepção, não podemos ainda caracterizar a relação entre Teatro e Educação Matemática como uma tendência em Educação Matemática, mas podemos enxergar um caminho sendo trilhado com base na articulação entre Arte e Matemática.

Referências e bibliografia

Araújo, J. L., & Borba, M. C. (2012). Construindo Pesquisas Coletivamente em Educação Matemática. In M. C. Borba, & J. L. Araújo (Eds.), *Pesquisa Qualitativa em Educação Matemática* (pp. 31–51). Belo Horizonte: Autêntica.

Bicudo, M. A. V. (1993). Pesquisa em educação matemática. *Pró-Posições*, *13*(1), 18–23.

Boal, A. (1983). *Teatro do Oprimido e outras poéticas políticas*. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira.

Borba, M. C., Scucuglia, R. R. S., & Gadanidis, G. (2014). *Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento*. Belo Horizonte: Autêntica.

Borba, M. C., & Villarreal, M. E. (2005). *Humans-With-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization* (Vol. 39). New York: Springer.

Cartaxo, C. (2001). *O ensino das artes cênicas na escola fundamental e média*. João Pessoa: Carlos Cartaxo.

D'Ambrósio, U., & Borba, M. C. (2010). Dynamics of change of mathematics education in Brazil and a scenario of current research. *ZDM Mathematics Education*, *42*, 271–279.

Fregolente, A. (2012). *O espetáculo teatral a ciência em peças, a oportunidade da aprendizagem científica dos licenciados em Física e Química e suas percepções sobre a formação docente* (Dissertação de Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina, Londrina.

Gardair, T. L. C. (2012). *Integrando a percepção de estudantes à criação de peça teatral: uma alternativa de educação científica em diálogo com as artes* (Tese de Doutorado em Ensino em Biociências e Saúde). Instituto Oswaldo Cruz, Rio de Janeiro.

Gatti, B. A. (2012). *Grupo focal na pesquisa em Ciências Sociais e Humanas*. Brasília: Liber Livro Editora.

Goldenberg, M. (2011). *A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais*. Rio de Janeiro: Record.

Grützmann, T. P. (2009). *A formação dos professores de matemática por meio dos jogos teatrais* (Dissertação de Mestrado em Educação em Ciência e Matemática). Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

Lacerda, H. D. G. (2014). Matemática Encena: tecendo possibilidades entre teatro e Educação Matemática. In *Anais*. Recife: UFPE. Retrieved from http://www.lematec.net/CDS/XVIIIEBRAPEM/PDFs/GD2/lacerda2.pdf

Mariotto, R. (2009). *A imersão em um mundo mágico e maravilhoso: um estudo sobre a obra literário-educacional de Mario Tourasse Teixeira* (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Rio Claro.

Miorim, M. A., & Miguel, A. (2001). A constituição de três campos afins de investigação: história da matemática, Educação Matemática e história & Educação Matemática. *Revista Teoria E Prática Da Educação*, *4*(8), 35–62.

Monteiro Júnior, F. N. (2012). *Educação Sonora: encontro entre ciências, tecnologia e cultura* (Tese de Doutorado em Educação para a Ciência). Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, Bauru.

Moreira, H., & Caleffe, L. G. (2008). *Metodologia da pesquisa para o professor pesquisador* (2ª ed.). Rio de Janeiro: Lamparina.

Nathan, L. (2008). Why the Arts Make Sense in Education. *Phi Delta Kappan*, *90*(3), 177–181.

Oliveira Júnior, N. L. (2006). *Educação ambiental não formal, nas escolas do ensino fundamental de Campo Grande, Mato Grosso do Sul, em 2005 e 2006* (Dissertação de Mestrado em Meio Ambiente e Desenvolvimento Regional). Universidade Anhanguera, Campo Grande.

Oliveira, U. F. (1996). *Cenas de conceituação: a aventura do movimento no ato de aprender* (Dissertação (Mestrado em Educação). Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo.

Pereira, R. M. F. (2006). *Teatro e Educação na Rede Municipal de Vitória: um estudo de caso* (Dissertação de Mestrado em Teatro). Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

Poligicchio, A. G. (2012). *Teatro: materialização da narrativa matemática* (Dissertação de Mestrado em Educação)). Faculdade de Educação da Universidade de São Paulo, São Paulo.

Poupart, J. (2012). A entrevista de tipo qualitativo: considerações epistemológicas, teóricas e metodológicas. In J. Poupart, J. P. Deslauriers, L. H. Groulx, A. Lapèrriere, R. Mayer, & A. P. Pires, *A pesquisa Qualitativa: enfoques epistemológicos e metodológicos* (pp. 215–153). Petrópolis: Vozes.

Powell, A. B., Francisco, J. M., & Maher, C. A. (2004). Uma abordagem à Análise de Dados de Vídeo para Investigar o Desenvolvimento das Ideias Matemáticas e do Raciocínio de Estudantes. *Bolema. Boletim de Educação Matemática*, *17*(21), 81–140.

Powell, R. A., & Single, H. M. (1996). Focus Groups. *International Journal for Quality in Health Care*, *8*(4), 499–504.

Scucuglia, R. (2012). *On the nature of student's digital mathematical performances: When elementary school students produce mathematical multimodal artistic narratives*. Alemanha: Verlag/Lap Lambert Academic Publishing.

Educación Artística y Matemática en el contexto de las Ciencias

Patricia **Camarena** Gallardo
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, Instituto Politécnico Nacional
México
pcamarena@ipn.mx
Luz Ma. de Gpe. **González** Álvarez
Escuela Superior de Física y Matemáticas, Instituto Politécnico Nacional
México
luzmagpe@prodigy.net.mx

Resumen

El objetivo de investigación es identificar los elementos de la educación artística que puedan ser congruentes e incorporados con la didáctica de la Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC) para fortalecer el desarrollo de la componente de valores en las competencias matemáticas en estudiantes de ingeniería. El marco de fundamentos de la investigación está constituido por elementos teóricos de la formación en valores, la educación artística y por la teoría de la MCC. De los resultados se obtiene la convergencia y congruencia entre Educación Artística y la MCC a través del proceder didáctico de ambas; se describe una competencia matemática en ingeniería y un evento contextualizado que ayuda a desarrollarla, se describen las intenciones didácticas del arte de cada identificador de la sensibilidad y la percepción, con lo cual se elaboran actividades de aprendizaje de la teoría MCC, en función del evento contextualizado.

Palabras clave: educación artística, matemática en el contexto de las ciencias, competencias, valores, sensibilidad, percepción.

Introducción

Ante los cambios sociales, culturales y educativos que se presentan en un mundo globalizado, organismos internacionales como la Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO por sus siglas en inglés), la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) y el Banco Mundial (BM) establecen políticas educativas para las Instituciones de Educación Superior, una de ellas es la formación por competencias.

Para el nivel universitario, la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias ha definido el concepto de competencias desde una perspectiva constructivista y humanística, como lo establece Camarena (2011):

> Las competencias son las fortalezas del futuro profesionista para enfrentar una situación problemática haciendo uso de la integración de todo su bagaje de conocimientos, habilidades, actitudes y valores que son movilizados en sus estructuras cognitivas.

Los conocimientos, habilidades, actitudes y valores de las competencias se denominan componentes de la competencia. En la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias, las componentes de las competencias están acordes con la profesión en donde se imparte la matemática. La forma de desarrollar las competencias es a través de eventos contextualizados, donde las actividades didácticas son fortalecidas de manera interdisciplinaria y transdisciplinaria por otros campos del conocimiento, siendo las disciplinas que contribuyen a la transdisciplinariedad: la psicología, sociología, filosofía y antropología, entre otras más.

En Camarena (2005, 2013) se menciona que cada disciplina de estudio define formas propias de trabajarse y concebirse, asimismo, desarrolla actitudes, habilidades, conocimientos y valores que se generan de la disciplina. Esta situación induce características particulares de los profesionales que se reflejan en su vida diaria a través de las actividades que desarrollan, es más, a través de éstas se puede deducir cuál es su área de formación profesional. Tomado en cuenta esta situación, es posible identificar características en las diversas disciplinas que son necesarias y pueden ser desarrolladas en otras áreas del conocimiento.

Como se describe en la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias, la definición del término competencias incluye el desarrollo de la componente de valores en los estudiantes. El caso de una formación en valores, se identifica de manera natural en otras áreas del conocimiento, de esta forma, se aborda la educación artística como elemento que contribuye a la formación en valores para trabajar con competencias en matemáticas dentro de las ingenierías. Luego, el *problema de investigación* es cómo incorporar elementos de la educación artística en los estudiantes de ingeniería para el desarrollo de valores como componente de las competencias de matemáticas en ingeniería. Cabe mencionar que el reporte aquí presentado forma parte de una investigación mayor, la cual pretende el desarrollo de competencias matemáticas en ingeniería, entendidas desde la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias; en este reporte solamente se identifica la posibilidad de usar la educación artística para apoyar el desarrollo la componente de valores en las competencias matemáticas en ingeniería.

El *objetivo de investigación* es identificar los elementos de la educación artística que puedan ser congruentes e incorporados con la didáctica de la Matemática en el Contexto de las Ciencias para fortalecer el desarrollo de la componente de valores en las competencias matemáticas en estudiantes de ingeniería.

Marco de fundamentos

La fundamentación de la investigación aborda elementos teóricos de la formación en valores, elementos de la Educación Artística, terminando esta sección con el apartado sobre la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias.

Formación en valores

El objetivo de la formación en valores es conseguir que el educando actúe éticamente, pero persiguiendo al mismo tiempo que dicha acción sea racional, autónoma, consciente y libre (Camarena y González, 2011). Para la formación en valores se requiere aprender a realizar reflexiones éticas, de forma autónoma, que permitan tomar las decisiones que lleven al bien común tomando en cuenta las posibles consecuencias de la acción.

Lonergan (2006) llama el valor ético a la toma de conciencia por parte del ser humano, en la que se da cuenta de las consecuencias de su acción sobre la naturaleza, es decir, persona sensible y perceptible, que para él es el emerger consciente del sujeto como persona autónoma,

responsable y libre. De igual forma, Lonergan (2006) menciona que con el valor ético surge la autonomía del espíritu, es decir, el sujeto que toma su posición acerca de la verdad, acerca de lo que es correcto, de lo que es bueno.

Para lograr la formación en valores, entonces, se requiere educar a la persona de manera que desarrolle la conciencia de sí mismo, de su relación con los otros, con la naturaleza, para que oriente su voluntad a realizar sus acciones de manera coherente con dicha conciencia. Así, es importante que el educando logre situarse en el punto de vista del otro, interprete sus ideas, tomando conciencia del conflicto o de la contradicción entre tendencias actitudinales, que observe el comportamiento de aquellos a quienes profesa afecto, respeto o admiración, que se formule preguntas para conseguir familiarizarse con determinadas normas y actitudes y, comprender su origen y significado. Cortina (2002) menciona que el cultivo de sentimientos, entendidos como uso de la sensibilidad y la percepción, es un requisito para la formación en valores. Todo lo expuesto conduce a que el logro en la formación en valores, entre otros, depende y requiere del desarrollo de la sensibilidad y la percepción.

La formación auténtica en este dominio, no consiste en imponer al educando unas pautas de conducta, sino en conseguir su consciente y libre aceptación mediante el influjo sobre la voluntad a través de la reflexión y la deliberación. Son éstas las actividades con las que el entendimiento colabora en el acto volitivo y orienta la elección y decisión. Cabe mencionar que en el campo de las ciencias, tradicionalmente se han dejado a un lado los sentimientos (entendidos éstos como la sensibilidad y la percepción), como si el científico pudiera eliminar la influencia de los mismos en su trabajo; al respecto, Meyer *et al* (2001) mencionan que es necesario que la persona sea consciente de sus sentimientos y aprenda a regularlos para que sean un motor para el mejor desempeño y no un obstáculo para el mismo.

De este apartado se rescata que, para la formación en valores, un elemento indispensable es el desarrollo de la sensibilidad y percepción en los estudiantes, con lo cual su actuar ético se ve favorecido.

Educación artística

En la década de los setenta, Eisner y Barkan (citado por Marín, 2003) defendieron la naturaleza cognitiva del arte, lo que se reafirma en el proyecto cero de la Universidad de Harvard, con las aportaciones de Gardner (2005). Pero fue hasta el presente siglo cuando estas ideas comenzaron a dar fruto, mediante las tendencias multiculturales de educación artística (Marín, 2003).

Mediante estas ideas, para Ortega (2014) se presenta la educación artística como una oportunidad para desarrollar la riqueza cultural y sensible de las personas y sus sociedades, y se posibilita la identificación de muy diversas maneras de ver y concebir el mundo, de tal manera que incluso un mismo objeto puede ser representado de formas tan variadas como modos de ver existen, cualidades que indiscutiblemente llevan a vincular el estudio con temas como la diversidad, la interculturalidad y la construcción de ciudadanía. La comprensión sociocultural requerida para lograr esto, es aproximarse a las elaboraciones culturales no solamente desde los objetos mismos, sino desde el conjunto de relaciones espacio temporales que se establecen con el entorno cultural: condiciones históricas, políticas, sociales, económicas; en fin, de todo tipo de relaciones culturales con los procesos que dieron lugar a la obra y aquellos que, desde el tiempo presente, ayudan a comprenderla.

Ortega (2014) explica que la educación artística se caracteriza por la integración tanto de aspectos cognitivos de alto nivel, como de otros de orden emocional y subjetivo, los cuales se clasifican en tres grandes categorías teóricas: la sensibilidad, la percepción y la creatividad. Por el interés de la formación en valores respecto a la sensibilidad y percepción, solamente se abordan estas dos categorías teóricas.

La **sensibilidad** es entendida como la capacidad de *usar los sentidos* para experimentar e identificar sensaciones, las que serán estéticas si se da un encuentro con la belleza, así, la experiencia estética tiene un carácter vital además de conceptual, ya que repercute en toda la persona, no solamente en el intelecto (Ortega, 2014).

Para Cuellar y Effio (2010) la recepción y procesamiento de un hecho estético habilita al estudiante para relacionarse afectiva y sensiblemente con el trabajo artístico y lo hace sensible a la belleza natural y a otros objetos de la civilización.

La sensibilidad estética se desarrolla por medio de experiencias estéticas, las que se pueden ofrecer mediante una docencia basada en la observación directa o indirecta del medio, observando la imagen (como modelo de representación), tanto de las formas artísticas tradicionales como de las innovadoras, así como, mediante la manipulación de objetos, descubriendo texturas y asociando el nombre y las cualidades de los mismos (Rollano, 2014). En las experiencias estéticas se involucra, además de la *sensación, la emoción*, el pensamiento y posteriormente la acción.

Debido a la intensidad de estas experiencias, conllevan un alto componente afectivo. La sensibilidad permite a la persona *sentir, apreciar y expresar sus propias apreciaciones,* afectarse en lo más profundo, de manera que pueda percibir, relacionarse y cuidar la naturaleza, las personas y las cosas (Arango *et al*, 2006)

Se puede decir que los grandes identificadores que caracterizan al concepto de sensibilidad son: usar los sentidos, sentir y emocionarse, así como apreciar y expresar sus apreciaciones.

La **percepción** otorga significados a lo que se percibe mediante los sentidos; en la percepción intervienen la *interpretación,* los intereses personales y la cultura. La percepción es una habilidad que permite *reflexionar* en torno a los modos de ver un algo, la cual está ligada a valores, creencias, concepciones, patrones e ideas cambiantes, por lo que la percepción no es únicamente un mecanismo sensorial sino que además es cultural; también interviene en la conformación de estructuras de pensamiento. Por ello, el desarrollo de la percepción como habilidad del artista tiene relevancia en el ámbito escolar, en tanto que constituye una habilidad cognitiva, una manera de explorar y conocer el mundo, ejercita procesos mentales como el *análisis y síntesis,* asimismo, permite *identificar* y respetar las diferencias culturales, sociales y personales (Ortega, 2014).

Mazzotti y Alcaraz (2006) presentan el fenómeno de sensibilidad-percepción estética como:

> Descubrimiento y recreación del orden de las cosas, mediante el reconocimiento de dimensiones más amplias de la existencia, desde las cuales las categorías y los adjetivos proporcionados por nuestra cultura, que en forma cotidiana la califican, desaparecen haciendo surgir otra mirada que con una metáfora da nueva luz a la forma como se define el mundo en un momento histórico determinado.

Cuando se reflexiona acerca de lo que van captando los cinco sentidos (vista, oído, olfato, gusto y tacto), en el descubrimiento y uso las distintas artes y materiales, se van interiorizando conceptos, y dotándolos de mayor profundidad (espacio, color, textura, forma, etc.), lo que garantiza una mejora de los procesos psicológicos y un desarrollo mayor de las capacidades del alumno (Rollano, 2004). Para Arango *et al* (2006) el proceso descrito lleva al desarrollo de la percepción, en consecuencia, a la admira (Rollano, 2004)ción y aprecio por la vida, la cual se transforma a veces de manera imperceptible, tanto en uno mismo como en nuestro alrededor. También mencionan que esto genera respeto hacia las etnias y la cultura, al *valorar* las formas particulares como los otros perciben, simbolizan y representan sus visiones del mundo, de cómo los diferentes pueblos simbolizan y expresan su percepción del universo y cómo se plasma esta simbolización en diversas expresiones artísticas y cotidianas, y a la reconstrucción y refuerzo de los vínculos sociales de una manera vital, estable, confiada y creativa, tal que permitan desarrollar una disposición al trabajo en grupo, de servicio a la comunidad, y de compromiso con el futuro.

Para el caso de la percepción, los grandes identificadores que se observan y caracterizan a este concepto son los que se describen a continuación: reflexión, identificación, análisis, valoración, síntesis e interpretación.

Para atender las categorías de manera integrada, como estrategia didáctica se han desarrollado proyectos de la educación artística que se estructuran a partir de temas de interés para los estudiantes, relacionados con su cultura, para motivar su atención en el uso de los sentidos y la reflexión acerca de lo captado, fortaleciendo la percepción y sensibilidad, encaminadas a la resolución de alguna situación que surja del tema que se utiliza como pretexto (Ortega, 2014).

Para el cierre de este apartado, se rescatan las dos categorías teóricas: sensibilidad y percepción, de la educación artística, así como sus identificadores que favorecen en el estudiante un actuar ético y estético, donde el actuar ético corresponde a la formación en valores.

Teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias

La teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias nace desde 1982 en el Instituto Politécnico Nacional de México y se edifica a través de investigaciones en la línea de investigación de la Matemática Social (Camarena 1984, 2013). La teoría reflexiona acerca del proceso del aprendizaje y la enseñanza de la matemática a través de establecer la interdisciplinariedad y transdisciplinariedad entre la matemática y las ciencias que estudia el alumno, entre la matemática y las situaciones de la vida cotidiana, así como entre la matemática y las futuras actividades profesionales y laborales del estudiante en formación; siempre las fuentes del contexto son áreas del interés del alumno, relacionadas con la actividad científica, la sociedad y la vida cotidiana, es decir, se trabaja con evento de impacto social. Además, se pretende que el estudiante construya su conocimiento, que tenga una formación integral y que desarrolle las competencias propias de su profesión desde un punto de vista humanístico y constructivista, contribuyendo a la construcción de conocimiento matemático, favoreciendo la creatividad, incidiendo en el desarrollo de habilidades y actitudes, así como fortaleciendo la formación en valores, como la ética.

La teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias concibe al ambiente de aprendizaje como un sistema en donde hacen presencia las cinco fases de la teoría: fase cognitiva, desarrollada desde 1992, la fase didáctica que se establece desde 1987, la fase

curricular, cuyo origen es de 1982, la fase epistemológica que se aborda desde 1988 y la fase docente definida desde 1990. Además, toman en cuenta que las cinco fases se encuentran inmersas en un sistema complejo donde interactúan entre sí y no están aisladas las unas de las otras.

El supuesto filosófico educativo de la teoría es que el estudiante esté capacitado para hacer la transferencia del conocimiento de la matemática a las áreas que la requieren y con ello las competencias profesionales y laborales se vean favorecidas, porque se pretende contribuir a la formación integral del estudiante y a construir una matemática para la vida (Camarena, 1987, 1990).

En la fase didáctica se establece la estrategia didáctica de la matemática en contexto para el logro de los objetivos de la teoría, la cual se lleva a cabo a través de eventos contextualizados, los cuales pueden ser problemas y/o proyectos, así como con actividades específicas de aprendizaje. La teoría contempla dos ejes rectores de las actividades didácticas que son la contextualización, donde se identifica el trabajo interdisciplinario y transdisciplinario y el eje de la descontextualización, donde el trabajo es disciplinario. La necesidad de la estrategia didáctica de la matemática en contexto radica en el hecho de que los conceptos científicos cuando están contextualizados adquieren sentido mediante las actividades propias del contexto, porque los conceptos no están aislados, están constituidos en forma de red y mantienen relaciones entre ellos (Camarena, 2000). La estrategia didáctica de la Matemática en Contexto se lleva a cabo a través de trabajo colaborativo en equipos formados por tres estudiantes, líder emocional, líder intelectual y líder operativo.

La construcción de los eventos contextualizados se realiza a través del proceso metodológico de la primera etapa de la fase curricular de la teoría, para mayor información se puede recurrir a la referencia de Camarena (2002). De igual forma hay un proceso metodológico para la elaboración de las actividades de aprendizaje de los estudiantes, entre éstas actividades se contemplan cuestionarios donde se interroga a los estudiantes a través de la reflexión.

Cada evento contextualizado debe tener su historial, es decir debe proporcionar al docente información como cuál es el tipo de competencia que desarrolla, qué componente de la competencia se está favoreciendo, qué conocimientos matemáticos y del contexto interviene en el evento, en cuánto tiempo se estima lo resuelvan los alumnos, cuáles son las preguntas típicas que formulan los estudiantes al abordar los eventos y con ello las preguntas pertinentes del profesor para que ayuden al estudiante a reflexionar sobre sus cuestionamientos y puedan dar o acercarse a la(s) respuesta(s) de su interrogante, cuáles son los posibles caminos de resolución del evento, cuáles son los obstáculos frecuentes que se presentan en los alumnos con ese evento contextualizado y cuál es su clasificación, cuáles son las posibles problematizaciones del evento, entre otros cuestionamientos (Camarena, 2000).

Con lo descrito en el apartado de Educación Artística y el presente sobre la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias, se identifica que los proyectos mencionados en la educación artística en relación a su proceder didáctico, establecen la convergencia con la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias, ya que la teoría diseña la estrategia didáctica de la matemática en contexto, a través de la cual se trabaja con proyectos, problemas y actividades de enseñanza del interés del alumno, relacionados con su cultura, su vida cotidiana y con las demás ciencias que estudia, para motivar el interés hacia la matemática, fortalecer los conocimientos y desarrollar la creatividad (Camarena, 2000). De esta forma, se concluye que los

elementos del proceder didáctico de la educación artística se pueden incorporar congruentemente con la didáctica de la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias, es decir, las dos corrientes convergen, congruentemente, en un proceder didáctico en común.

De la presente sección sobre fundamentos de la investigación se obtiene que, para la formación auténtica en valores, es necesario que la persona desarrolle la sensibilidad y la percepción, los cuales le llevan a desarrollar la ética. Por otro lado, estos dos elementos forman parte de la educación artística, que junto con la creatividad, constituyen las tres categorías del verdadero artista. Así, el desarrollo de la componente de valores en las competencias de la Matemática en el Contexto de las Ciencias, debe incorporar el desarrollo de la sensibilidad y la percepción en el alumno, para que su actuar sea ético. Como la Educación Artística se dedica a desarrollar estos elementos (sensibilidad y percepción), a través de proyectos de interés del alumno y, la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias también trabaja con proyectos de interés del estudiante, es más, emplea eventos contextualizados que son problemas o proyectos, se identifica una congruencia entre la Educación Artística y la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias, situación que permite engranar la didáctica del arte con la didáctica de la matemática en contexto, para desarrollar los elementos de sensibilidad y percepción en los estudiantes e incidir en la formación en valores en estudiantes de ingeniería desde otra área del conocimiento, generándose la vinculación entre arte y ciencias, con la educación en valores como mediador.

Metodología de investigación

Tipo de investigación. Se elige el paradigma cualitativo de la investigación, debido a que la intención de esta investigación es fortalecer el desarrollo de la componente de valores en las competencias que desarrolla la Matemática en el Contexto de las Ciencias en estudiantes de ingeniería, mediante el uso de categorías de la educación artística: sensibilidad y percepción, para un actuar ético.

Vinculación del marco de fundamentos con el método de trabajo. De la fundamentación de la investigación, específicamente del apartado de formación en valores, se determina la necesidad de desarrollar la sensibilidad y la percepción para el actuar ético de los estudiantes, mientras que de la Educación Artística se obtienen los identificadores para el desarrollo de estos dos elementos: sensibilidad y percepción.

Por otro lado, como ha sido mostrado, la congruencia entre la Educación Artística y la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias se establece a través de proceder didáctico de ambas; luego, con los identificadores se describen las intenciones didácticas del arte, para pasar a las intenciones didácticas de la Matemática en el Contexto de las Ciencias para la competencia en cuestión, construyendo, así, un puente de carácter didáctico entre la Educación Artística y la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias; con lo cual se persigue fortalecer el desarrollo de las categorías de la educación artística que conducen a un actuar ético, y con ello contribuir al desarrollo de la formación en valores de los estudiantes. De acuerdo a la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias y su convergencia con la educación artística se emplean eventos contextualizados y actividades de aprendizaje que favorezcan el desarrollo de la sensibilidad, y la percepción, para incidir en la formación en valores.

El método de trabajo. Con lo descrito, el método de trabajo consiste de tres etapas:

1. Descripción de la competencia matemática en ingeniería a abordar y un evento contextualizado que ayude a desarrollarla.
2. Descripción de las intenciones didácticas del arte de cada identificador de la sensibilidad y la percepción, asociadas a las intenciones didácticas de la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias para la competencia matemática.
3. Elaboración actividades de aprendizaje de la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias, en función de un evento contextualizado que corresponde a la competencia que se quiere abordar.

Desarrollo de la investigación

Etapa 1. Con fundamento en la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias, que ofrece trabajo interdisciplinario, se redacta una competencia para matemáticas en ingeniería, específicamente en ingeniería en electrónica y ramas afines, la cual se enuncia a continuación.

> Resolver de forma interdisciplinaria problemas de la teoría electromagnética, en particular de antenas, los cuales involucren ecuaciones diferenciales, contribuyendo a la toma de decisiones mediante juicios de valor, dimensionando las consecuencias de tipo social, ambiental y económico (Camarena, 2010).

Un evento para ayudar a desarrollar la competencia enunciada, es el siguiente:

> Una línea de transmisión uniforme y coaxial, con conductores perfectos, y dieléctrico con los datos mostrados en la figura, será utilizada para la construcción de una antena. Proporciona la información necesaria para la antena que se genera del evento (Camarena, 2010).

Cabe mencionar que el evento contextualizado requiere del conocimiento de ecuaciones diferenciales parciales y de teoría electromagnética. Es un evento que involucra la construcción de conocimiento, el desarrollo de habilidades matemáticas y de la ciencia de física en el tema de teoría electromagnética, también desarrolla habilidades para el trabajo interdisciplinario, así como actitudes y valores de trabajo en equipo.

A partir de la competencia se elaboran actividades que llevan a la reflexión. Para lo cual es necesario hacer uso de los identificadores de la educación artística respecto a la percepción y sensibilidad, para favorecer la toma de decisiones mediante juicios de valor y dimensionando las consecuencias de tipo social y ambiental, tal como lo describe la competencia.

Etapa 2. En las figuras 1 y 2, que se muestran a continuación, se describen las intenciones didácticas del arte de cada uno de los identificadores de los dos elementos de la educación artística, la sensibilidad (figura 1) y la percepción (figura 2), pasando a las intenciones didácticas de la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias, en el marco de la competencia matemática descrita.

Identificadores de sensibilidad	**Intenciones didácticas de arte**	**Intenciones didácticas de matemáticas**
a) Usar los sentidos	Saber observar, con cualquiera de los órganos de los sentidos y tener claro un objetivo para centrar la atención.	Observar personas, familias y paisajes urbanos de la región. Identificar las características ambientales de la zona.
b) Sentir y emocionarse	Educar la sensibilidad, de manera que se ejercite la empatía, base para la solidaridad.	Identificar las sensaciones que ocasiona la presencia de antenas. Valorar la salud de las demás personas. Reconocer las limitaciones de su profesión y las personales.

c) Apreciar	Crecer en responsabilidad ante la tarea que se realiza.	Apreciar los bienes internos de la profesión. Apreciar las diferencias culturales, sociales y personales. Valorar la diversidad de especies y el equilibrio ecológico.

Figura 1. Identificadores e intenciones didácticas del arte para la sensibilidad.

Cabe hacer mención que de la sección de la educación artística, de los fundamentos de la investigación, se han retomado los identificadores tanto para la sensibilidad como para la percepción.

Identificadores de percepción	**Intenciones didácticas de arte**	**Intenciones didácticas de matemáticas**
1) Reflexión	Regular sus emociones. Construir una escala de valores.	Reflexionar acerca de las características de las ondas y su impacto en la salud en los ecosistemas, en el medio ambiente .
2) Identificación	Centrar la atención en el aspecto central del prob.	Comprender, identificar y respetar las diferencias culturales, sociales y personales.
3) Análisis	Desarrollar las relaciones causa-efecto.	Valorar la diversidad de especies y el equilibrio ecológico.
4) Síntesis	Generalizar regularidad observadas.	Valorar el medio ambiente como hábitat de todos los seres vivos.
5) Interpretación	Formar el juicio crítico. Usar la escala de valores hacia la toma de decisiones.	Tomar en cuenta la equidad, en el sentido de que todas las personas son igualmente valiosas, aunque sean desconocidas y lejanas. Tomar decisión de reparar los daños ocasionados.
6) Valoración	Identificar los valores asociados a una actividad profesional.	Valorar la honestidad en el trabajo profesional en los campos de la ciencia y la tecnología. Valorar la importancia de las leyes y de su cumplimiento en la profesión.

Figura 2. Identificadores e intenciones didácticas del arte para la percepción.

Etapa 3. Tomado en cuenta la competencia que se quiere desarrollar y las intenciones didácticas de la competencia, en la Matemática en el Contexto de las Ciencias, que se generan de las intenciones didácticas de la educación artística, figuras 1 y 2, se elaboran actividades de aprendizaje que consisten en interrogantes que llevan a la reflexión a los estudiantes y que cumplen con las intenciones didácticas del arte que ayudan a desarrollar tanto la sensibilidad como la percepción.

Así, las actividades didácticas que junto con el evento contextualizado ayudan a desarrollar la competencia matemática planteada en la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias, consta de un cuestionario cuyas preguntas se describen a continuación en la figura 3.

> Enunciado del cuestionario: Imagina que te proponen un contrato muy atractivo para diseñar e instalar una antena en una zona de la Ciudad de Oaxaca, y estás analizando la propuesta antes de firmar. Para ello, un familiar que te aprecia mucho te realiza una serie de cuestionamientos, con el propósito de ayudarte a decidir sobre la propuesta. En cada pregunta tienes que explicarle la razón de tu respuesta.

Preguntas del cuestionario para ayudar a desarrollar la competencia matemática	**Identificador en que incide**
¿Es responsabilidad de un ingeniero indagar acerca de los riesgos de la instalación de una antena antes de aceptar?	a, b, c 1,6
¿No se debe aceptar si implica riesgos para la salud de la población?	b, c, 1,4,5,6
¿Es tu obligación evitar que surja un sentimiento de inseguridad en la población?	b, c 2,7
¿Debes evitar daños a la ecología?	a, b, c, 1,2,3,4,6
¿Se deben valorar los riesgos de contaminar el ambiente?	a, b, c, 1,4,6
¿Hay que escuchar la opinión de profesionales de otras ramas, como médicos, enfermeras, químicos, filósofos, psicólogos, etc.?	b, c 1,3,4,6
Si hay dos opciones para colocar una antena, cuyas radiaciones electromagnéticas llegan a dañar el cerebro, en una de ellas vive tu familia y en la otra no conoces a las personas que habitan ¿la instalarías? ¿en cuál opción?	a, b, c 1,3,4,5,6
Si tuvieras un cargo político elevado ¿qué harías para elaborar propuestas relativas a las políticas de instalación de antenas?	a, b, c 1,2,3,4,5,6
Si la antena emisora supera ligeramente los límites permitidos de exposición, y ya has invertido horas de trabajo y recursos para la instalación ¿qué harías?	b, c 1,3,4,5,6
¿Darías indemnización a los afectados?	b, c, 2,5,6

Figura 3. Relación de preguntas con identificadores de la educación artística.

Conclusiones

De acuerdo al objetivo planteado, se ha identificado que los elementos de sensibilidad y percepción que desarrolla la educación artística son posibles de desarrollar a través de la estrategia didáctica de la Matemática en Contexto de la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias, con lo cual se apoya al desarrollo de un actuar ético, favoreciendo la formación en valores de los estudiantes de ingeniería.

Luego, se establece la convergencia y congruencia entre Educación Artística y la Matemática en el Contexto de las Ciencias, a través del proceder didáctico de ambas.

Cabe mencionar que por la extensión del trabajo no se incluye la valides y confiabilidad que se le ha realizado al cuestionario que se diseña en este reporte.

Referencias y bibliografía

Arango C., Barreto D.M., y Carmona A.M. (2006). *Estrategias pedagógicas para el fortalecimiento del desarrollo de la dimensión estética en el preescolar.* Tesis de licenciatura. Universidad de la Sabana. Chía. Recuperado el 7 de julio de 2014 de: http://intellectum.unisabana.edu.co:8080/jspui/bitstream/10818/2053/1/121718.pdf

Banco Mundial (BM). Recuperado en abril 2008 de http://www.bancomundial.org/

Camarena Gallardo, P. (1984). *El currículo de las matemáticas en ingeniería*. Memorias de las Mesas redondas sobre definición de líneas de investigación en el IPN, México.

Camarena Gallardo, P. (1987). *Diseño de un curso de ecuaciones diferenciales en el contexto de los circuitos eléctricos*. Tesis de Maestría en Educación Matemática, CINVESTAV-IPN, México.

Camarena Gallardo, P. (1990). *Especialidad en docencia de la ingeniería matemática en electrónica*. Editorial ESIME-IPN, México.

Camarena Gallardo, P. (2000). Reporte del proyecto de investigación titulado*: Etapas de la matemática en el contexto de la ingeniería.* Registro: CGPI-IPN-990413, México: Editorial ESIME-IPN.

Camarena Gallardo, P. (2002). Metodología curricular para las ciencias básicas en ingeniería. Revista: *Innovación Educativa,* 2(10) primera parte y 2(11) segunda parte.

Camarena Gallardo P. (2005). Reporte de investigación titulado: *La matemática en el contexto de las ciencias: las competencias profesionales*. Registro: CGPI-IPN-20040434, México: Editorial ESIME-IPN.

Camarena Gallardo P. (2010). Reporte de investigación titulado: *Diseño de estrategias didácticas para competencias matemáticas en el nivel superior.* Registro: SIP-IPN-20100431, México: Editorial ESIME-IPN.

Camarena Gallardo P. (2011) *Concepción de competencias de las ciencias básicas en el nivel universitario*. Capítulo IV del libro intitulado: Competencias y Educación: Miradas múltiples de una relación. Editores: Barraza M. A. y Jaik D. A. 88-119. Durango, México: REDIE.

Camarena Gallardo P. (2013). Reporte de investigación titulado: *Matemática y Sociedad, teoría para la praxis*. Registro: SIP-IPN-20121048, México: Editorial ESIME-IPN.

Camarena Gallardo P. y González Álvarez L.M.G. (2011) *Valores en las competencias matemáticas*. Memorias del XIII CIAEM-IACME, Recife, Brasil.

Cortina A. (2002). Educación y Valores. En *Lecturas para crecer.* Edelvives: Valencia, España.

Cuellar J.A., Effio M.S. (2010). *Orientaciones Pedagógicas para la Educación Artística en Básica y Media*. Ministerio de Educación Nacional. Viceministerio de Educación Preescolar, Básica y Media. Bogotá D.C. Colombia.

Gardner H. (2005). *Inteligencias múltiples: la teoría en la práctica*. Paidós Ibérica, Barcelona, España.

Lonergan B. (2006). *Filosofía de la educación*. 2ª edición, México, D.F.: Universidad Iberoamericana.

Marín Viadel R. (2003). *Didáctica de la educación artística*. Pearson educación: España.

Mazzotti G. y Alcaraz V. M. (2006). *Arte y experiencia estética como forma de conocer*. Recuperado el 1 de julio de 2014 de: http://www.uam.mx/difusion/casadeltiempo/87_abr_2006/casa_del_tiempo_num87_31_38.pdf

Meyer J. D., Salovey P., Caruso D. R., y Sitarenios G. (2001). Emotional intelligence as a standard intelligence. Emotion, 1, 232-242.

Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO). Recuperado en marzo de 2008 de http://portal.unesco.org/es/ev.phpRL_ID=29011&URL_DO=DO_TOPIC&URL_SECTION=201.html

Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE). Recuperado en marzo 2008 de http://www.oecd.org/document/12/0,3343,es_36288966_36287974_36316364_1_1_1_1,00.html

Ortega C. (2014). *¿Qué es la educación artística?* En: Apuntes de la Especialidad en Educación Artística. Escuela de las Culturas - Centro de Altos Estudios Universitarios OEI.

Rollano D. (2004). *Educación plástica y artística en educación infantil. Una metodología para el desarrollo de la creatividad*. Vigo: España. [Documento en línea] obtenido el 7 de julio de 2014 de: http://www.ideaspropiaseditorial.com/documentos_web/documentos/978-84-96578-90-6.pdf

Elementos de un ambiente educativo en prácticas matemáticas. Sistematización de una experiencia

Jorge Orlando **Lurduy** Ortegón
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
jolurduy@udistrital.edu.co
Jairo Nelson **Pulido** Gómez
Escuela Pedagógica Experimental
Colombia
jairopulido@profesores.com

Resumen

El trabajo da cuenta de una investigación realizada en una institución de innovación educativa, específicamente una reflexión de las clases de matemáticas, las cuales se diferencian de las prácticas de la llamada "escuela tradicional" es por eso que resulta importante identificar elementos que las caracterizan. La investigación se desarrolla como una sistematización de experiencias, tomando como objeto de estudio el ambiente educativo, se refiere al espacio donde emergen diversas interacciones no solo entre los sujetos sino también con las situaciones, los conceptos, los aprendizajes y son mediados por el entorno. La investigación se ubica desde un paradigma naturalista cualitativo, la forma de articular los aspectos de la investigación y los hallazgos está orientada por el enfoque ontosemiótico y para el soporte de la recolección de la información y el análisis de datos se tiene en cuenta el análisis cualitativo de contenido y la teoría fundamenta en los datos.

Palabras clave: ambiente educativo, prácticas matemáticas, investigación cualitativa, educación, innovación.

Introducción

La presente investigación, se desarrolla como parte de un trabajo de grado de la maestría en educación con énfasis en matemáticas de la Universidad Distrital Francisco José de Caldas, la cual tiene por objetivo identificar, describir y caracterizar el ambiente educativo de las prácticas matemáticas en una institución considerada innovación.

La Escuela Pedagógica Experimental (EPE), es reconocida ante el ministerio de educación nacional colombiano como un proyecto de innovación educativa, según resolución 8707 de julio 05 de 1988. Se ha convertido en un referente en el desarrollo de propuestas de educación. Para este caso es el escenario donde se desarrolla el trabajo de investigación, un lugar en donde los elementos del ambiente educativo permiten no solo describir una forma alternativa de desarrollar las prácticas matemáticas en un contexto escolar, sino una manera de entender que la labor del maestro va más allá de adoctrinar a sus estudiantes a repetir y memorizar, entender que propiciar ambientes y relaciones diferentes a los espacios tradicionalmente estructurados permite un proceso de formación de ciudadanos críticos y participativos. Existen varios aspectos que

describen las prácticas matemáticas en la EPE, para términos de este trabajo la mirada se centra en el saber pedagógico, lo relacionado con el ambiente educativo.

La estructura metodológica de la investigación está fundamentada en la sistematización de experiencias, teniendo en cuenta el enfoque ontosemiótico (EOS) como una forma de pensar, articular y desarrollar la investigación, al mismo tiempo que articula desde una postura teórica y práctica elementos del análisis cualitativo de contenido (ACC), la teoría fundamentada en los datos (TFD) y el análisis semiótico de textos (AST) como técnicas que dotan de rigor la selección de los datos y el análisis para poder constituir conocimiento nuevo.

Este documento concluye en la identificación de elementos emergentes en las prácticas matemáticas en la EPE constituyendo lo que al interior de la institución se ha definido como ambiente educativo, aparecen facetas que direccionan las dinámicas de la clase el control-autonomía, la confianza-desconfianza y lo individual-colectivo. El análisis y la caracterización de estos elementos desde una perspectiva semiótica será objeto de reporte de la continuación de este trabajo.

Descripción de la experiencia

Existen elementos en la sistematización de experiencias que se tienen en cuenta para la descripción del proceso de investigación, es importante mencionar que el objeto de estudio que es el ambiente educativo de las prácticas matemáticas, no es definido por la EPE en el contexto de matemáticas escolares, este aparece en los planteamientos generales.

El contexto: La Escuela Pedagógica Experimental EPE

La Escuela Pedagógica Experimental (EPE) surge en el año de 1977, sus fundadores, profesionales en educación que coincidían ideológicamente en pensar una educación diferente para el país, luego de profundas reflexiones, debates, confrontaciones y participaciones en espacios académicos en educación, deciden fundarla. Inicialmente fueron 16 estudiantes, la mayoría de ellos familiares de los fundadores, pero su población ascendió paulatinamente, así que en el año 1988 ya contaba con 250 estudiantes.

Los fundamentos que se tuvieron en cuenta en la constitución de la Escuela se distinguen en tres aspectos: El del estudiante, el conocimiento y el ambiente escolar.

Los fundamentos que describen el ambiente escolar están relacionados con los anteriores; este espacio no normativo sino negociado, debe propiciar un lugar donde el estudiante se forme para la vida, donde el conocimiento adquirido sea útil y en donde todo apunte para el desarrollo de un ciudadano crítico.

Otra de las constantes en la historia de la EPE, es el reconocimiento de la investigación, como principal medio para continuar el proyecto de innovación, es por esto que sus maestros tienen la tarea de no permanecer estáticos en términos académicos, además la idea de una formación constante de profesores los motiva a desarrollar propuestas interesantes en temas de educación.

Esta premisa llevó a que en los años 80 Colciencias aprobara la primera y segunda etapa de un proyecto de investigación cuya temática ilustraba la sistematización de su experiencia y la constitución teórica y metodológica que podría dar respuesta a sus preocupaciones.

Los resultados permitieron considerar la organización curricular de la Escuela en torno a proyectos, constituidos desde los intereses de los maestros y los estudiantes, que bajo la

estructura de investigación propiciaban la construcción de conocimiento y el desarrollo científico.

Por esa misma época se iniciaron vínculos con los maestros del sector oficial, este vinculo en el marco de los resultados de la investigación realizada por la EPE, permitió establecer un espacio de formación que además de contribuir a trabajo académico, les sirvió como créditos válidos para el escalafón docente.

La década de los 80 culminó con la creación de la Corporación Escuela Pedagógica Experimental, la cual en los inicios de los 90 logró consolidarse legalmente como una institución sin ánimo de lucro y de beneficio social. A partir de entonces las actividades de investigación, formación de maestros, publicaciones y organización de eventos se establecieron como proyectos fundamentales de la EPE, que unidos a su razón de ser, la Escuela Pedagógica Experimental como innovación educativa, es lo que se conoce hoy en día.

En los siguientes años se adelantaron más de 20 proyectos de investigación financiados por el Instituto para la Investigación Educativa y el Desarrollo (IDEP), La Secretaría de Educación (SED) y COLCIENCIAS; Numerosas ponencias y artículos elaborados por diferentes maestros en la escuela que han sido publicados en revistas tanto a nivel nacional (*Museo de la Ciencia y el Juego, Nodos y Nudos, Ciencia y arte, Visión pública, Museolúdica, Innovación y ciencia, Magisterio: Educación y pedagogía, Itinerantes, La escuela imaginada)* como internacional (*Encuentro Iberoamericano de colectivos y redes de maestros que hacen investigación desde la escuela, Expedición Pedagógica en Michoacán México, Encuentro nacional de ciencias y estudios sociales, Exploraciones fuera y dentro del aula en Costa Rica, Redes de lenguaje* de Oaxaca *México).* También tuvo reconocimientos como el Premio Nacional de Pedagogía convocado por la Universidad Javeriana y el Instituto Alberto Merani (1991), La Condecoración José Acevedo y Gómez en el grado Cruz de Plata del José Acevedo y Gómez (2007), y el más reciente, el Trofeo SAPIENTIAE de Excelencia Educativa (2010).

En el siglo XXI la participación de la escuela en el ámbito investigativo no para, se han desarrollado múltiples trabajos tanto al interior como al exterior de esta, convenios con universidades, proyectos con la Secretaria de Educación, se patentó las ATAS, Actividades de Totalidad Abierta y el producto ATA epe como un recurso pedagógico que fomenta la invención. Desde la perspectiva de los sistemas dinámicos y la teoría de la complejidad se han estructurado las clases de la Escuela, así como la organización de proyectos de Economía Azul, una excusa perfecta para construir conocimiento y reflexionar de forma crítica el mundo.

Durante sus 37 años de trayectoria la EPE, sus múltiples investigaciones, sus publicaciones, sus participaciones en eventos nacionales e internacionales y lo más importante sus egresados, han demostrado la materialización de los sueños e inquietudes de un grupo de maestros que pensaron que una escuela diferente si es posible. Son muchos los aspectos de la EPE que se pueden reflexionar y analizar, para este caso se considera las prácticas matemáticas que allí se han desarrollado.

Las prácticas[1] tienen elementos que las caracterizan según el contexto, para este caso las formas de trabajo en la EPE, presumen aspectos diferentes en cuanto a la organización en la clase, los roles, la metodología, entre otros, que no están atados a un sistema tradicional. Por esta

[1] Entendiendo prácticas desde la perspectiva teórica del enfoque ontosemiótico y complementada por Lurduy como las acciones o manifestaciones discursivas, operativas y normativas.

razón resulta interesante tener evidencias de lo que en la EPE caracterizan estas prácticas, una experiencia diferente que pretende ofrecer una perspectiva poco usual de la clase de matemáticas.

Es por esto que se plantea el problema de investigación teniendo en cuenta que se tiene una perspectiva del ambiente educativo de las prácticas matemáticas según algunos documentos escritos y según los maestros que han laborado y actualmente laboran en la EPE, resulta importante analizar lo que ellos plantean para identificar aspectos que se mantengan o que hayan cambiado según su punto de vista del ambiente educativo en el EPE a partir de un método etnográfico, también desde una situación de aula que permita realizar el contraste.

Antecedentes de investigación en la EPE

El trabajo de investigación propuesto pretende principalmente hacer la sistematización de las prácticas matemáticas en la Escuela Pedagógica Experimental, esto hace que se ubique el trabajo en unas condiciones especiales, algunos autores que se refieren a la conceptualización de sistematización, coinciden que parten de la vivencia del mismo investigador en un contexto determinado y por lo tanto se puede tomar como antecedentes, investigaciones hechas desde el interior de la misma. Algunas de ellos son:

- Las matemáticas en el aula, posibilidades de una construcción significativa. (1992).
- El pensamiento de los alumnos: testimonios de clase, elementos para una discusión. (1994).
- Sistematización de una experiencia de matemáticas contemporáneas en el aula. (1996).
- El modelaje matemático en estudiantes de educación básica: La validación de los modelos y los procesos de matematización de la experiencia. Estudios a partir de dos familias de problemas (2003).
- Haciendo de matemáticos en el aula (2004).
- Haciendo matemáticas en el aula. Innovación e Investigación de las Matemáticas en el Aula. (2005).
- La búsqueda de solución a problemas irresolubles: un camino hacia la construcción de la disciplina matemática en el aula. (2007)

Estos son algunos de los proyectos de investigación realizados desde el interior de la institución, algunos de ellos financiados por el IDEP y otros por COLCIENCIAS, son sistematizaciones de experiencias de aula que han permitido describir procesos de aprendizaje de los estudiantes desde las prácticas matemáticas, en todas aparece objetos de estudio relacionados entre sí y que tienen que ver con procesos de cognición: El modelaje, la matematización, la resolución de problemas, la argumentación y la validación, la exploración y la inferencia, entre otros.

Es importante recalcar que estos antecedentes corresponden a actividades desarrolladas desde y en la escuela, y a pesar que se utilizan referentes teóricos para validar las inferencias conceptuales propuestas y halladas, no existe un trabajo que recopile todas, ni que utilice una perspectiva teórica externa para caracterizar, categorizar e interpretar los hallazgos obtenidos.

Fundamentos teóricos

El Tetraedro didáctico

Es una interpretación de Lurduy fundamentada epistemológicamente desde cuatro aspectos, en primer lugar desde un contexto teórico constructivo, recursivo, activo, rico y diverso en los que cita autores como (Peirce, Lewis, Morín, Von Foster, Maturana, Navarro, Faerna, Nubiola, Zalamea, Dussel…). En segundo lugar recurre como fundamento un pensamiento complejo, dialógico y hologramático principalmente desde la perspectiva de Morin. En tercer lugar desde el punto de vista explicativo interpretativo se menciona la reflexividad y autoreflexividad de los sistemas observador-observado, citando a Navarro. Y por último se especifica que la propuesta está fundamentada en una epistemología relacional, aclarando que el énfasis de esta perspectiva es la relación entre objetos, eventos, hechos, procesos y fenómenos. Una teoría semiótica que propone parte de entender el acto educativo como una actividad social donde el papel del observador es fundamental y las relacionen se ubican en un contexto social y comunicativo.

El enfoque ontosemiótico

El enfoque ontosemiótico (EOS) se fundamenta en el trabajo de: Pierce, Witgenstein, Vigotsky, Habermars y Morín; también articula diferentes principios didácticos, socioconstructivista e interaccionista, como cimientos en un marco teórico que permita el análisis de los procesos de enseñanza y aprendizajes de saberes en matemáticas.

Según Godino y otros (2008) el conjunto de nociones teóricas que actualmente componen el EOS se clasifican en cinco grupos cada uno de los cuales permite un nivel de análisis de los procesos de enseñanza y aprendizaje de temas específicos de matemáticas. En el esquema también se puede identificar cual fue el fundamento teórico para cada noción.

El entorno

Según *Lurduy (2012)* y retomando lo propuesto por el Enfoque Ontosemiótico (EOS), ubica al entorno como el polo ecológico del aula como un elemento de las triadas, se trata de estudios sobre los elementos que caracterizan la unidad compleja entorno y cultura del aula (textos y contextos), las relaciones entorno-profesor, entorno-saber, entorno-estudiante; están relacionados con las interacciones, roles, mediaciones, comunicación, reglas y normas, entornos de enseñanza aprendizaje.

El ambiente educativo

La EPE, el escenario para la presente investigación, ha establecido su propia perspectiva teórica desde la sistematización de su propia experiencia, a lo cual lo define como una red viviente, agenciadora de ideas, afectos y acciones que podría constituirse en factor determinante en la formación del estudiante si proveyese y posibilitase al niño la exploración y el enriquecimiento de las experiencias necesarias para la construcción de un marco de acción vital.

El sistema de prácticas

Desde el EOS se entiende como el conjunto de elementos presentes durante la acción de matemáticas escolares en la resolución de problemas y/o actividades matemáticas, los cuales comprenden los procesos de comunicación, validación, generalización e institucionalización, en las que los constructos *objeto-proceso, práctica-relación, significación-reificación* intervienen.

Lurduy complementa la conceptualización del sistema de prácticas añadiendo la dimensión normativa, como parte de una triada que hacen parte del sistema de prácticas.

Perspectiva metodológica

El trabajo de investigación es de tipo cualitativo en la dirección que apunta Sandoval (2002), moviéndose en el campo del análisis en educación, citado por Sandoval, Paul Ricoeur (1974) quien menciona que este método analítico en el marco de la investigación social permite emprender un trabajo de tipo hermenéutico.

La metodología a desarrollar tiene que ver con la sistematización de experiencias para lo cual exige una ruta particular en el desarrollo de la investigación. Según la red de gestores sociales:

La acción de sistematiza recibe múltiples significados que coinciden en términos tales como recopilar, organizar, recoger, investigar, analizar y reflexionar. Sus definiciones concuerdan en tres elementos esenciales:

1. Es un proceso de reflexión crítica que propone generar nuevos aprendizajes.

2. Se orienta a describir y entender lo que sucedió en una experiencia y explicar por qué se obtuvieron esos resultados para mejorar en el futuro.

3. La reflexión que genera se basa en la idea de ordenar lo disperso o desordenado (prácticas, conocimientos, ideas, datos, percepciones, opiniones, etc.).

Para el caso de la investigación propuesta aparece un elemento adicional y es el de analizar la experiencia desde el Enfoque Ontosemiótico, esta estructura teórica permite articular desde lo epistémico, la semiótica, los entornos de aprendizaje y aspectos relacionados con los procesos de instrucción y cognición matemática una perspectiva que permite validar las practicas matemáticas.

Aparecen elementos comunes de las investigaciones que recurren a la sistematización de experiencias en relación a las fases que direccionan estos trabajos:

El punto de partida

La práctica es el punto de partida de cualquier experiencia de sistematización. Algunas investigaciones sugieren que en toda sistematización es necesario que participen las personas que han vivido la experiencia. Puede ser que se considere necesario que participen otras personas, pero las que siempre deben hacerlo es las que han vivido o algunas de las que han vivido directamente la experiencia. En este proyecto de investigación se toman dos puntos de partida que luego se articulan; uno anterior a la experiencia del investigador y otra de lo vivido al interior de la institución.

Las preguntas iniciales

En este momento se definen las preguntas que direccionan el proceso, en el planteamiento del problema se mencionan algunas de ellas, teniendo en cuenta que estas pueden cambiar, una característica de la investigación de tipo cualitativa.

- ¿Cuál es el contexto histórico de la EPE, en especial desde el año 2000?
- ¿Qué actores participan y han participado en la sistematización de la experiencia EPE en relación a las prácticas matemáticas?

- ¿Qué criterios se tendrán en cuenta para realizar la selección de la información a analizar?
- ¿Qué caracterizan y/o han caracterizado las prácticas matemáticas en la EPE?
- ¿Cuáles son las herramientas que se utilizaran para recolectar los datos de la experiencia que permita analizarse?

Recuperando el proceso vivido

Este es uno de los pasos fundamentales de la sistematización: reconstruir la historia, ordenar y clasificar la información. Se reconocen dos momentos, uno en el que se hace un rastreo de las producciones escritas de la escuela: artículos, libros, ponencias, cursos de formación, etc. Donde se evidencie el ambiente educativo de las prácticas matemáticas. En este proceso usando como herramienta el análisis de textos establecer categorías e inferencias con respecto a la experiencia de la EPE antes de pertenecer a ella.En el segundo haciendo uso del EOS, se hace una descripción de las practicas matemáticas realizadas desde el momento que el investigador hace parte de la experiencia.

La reflexión de fondo: ¿por qué sucedió lo que sucedió?

En esta fase se trata de analizar, sintetizar e interpretar críticamente el proceso de la experiencia, contrastando el conjunto de la información recabada en el paso anterior, claro está que como las categorías para analizar dicha sistematización se hizo desde métodos distintos, se debe establecer un fundamento teórico para validar dicha información, una forma de hacerlo es por medio de la triangulación.

Los puntos de llegada

En esta fase aparecen las conclusiones de la reconstrucción de la sistematización de la experiencia a partir de una perspectiva teórica exterior a ella, la ausencia o existencia de los fenómenos identificados en las relaciones de maestro, estudiante, saber y entorno, en la concepción de las matemáticas escolares en la EPE.

Además estas se redactan como un resultado que será leído y apreciado por agentes externos a la experiencia de sistematización

Sobre la información recolectada

Teniendo como referentes el concepto de ambiente educativo de la EPE, El tetraedro y el sistema didáctico de Lurduy y el Enfoque Ontosemiótico de Godino y otros, en un marco metodológico de sistematización de experiencias, se busca una articulación tanto teórica como metodológica que permita responder a los objetivos de la investigación.

El proceso de la recolección de los datos se realiza teniendo en cuenta de manera anticipada el posible análisis que hará de ellos, por lo tanto la red categorial de alguna manera estructura los instrumentos.

La investigación desde la perspectiva semiótica peirceana marca una ruta de análisis triádico que corresponden a los objetivos y es por esto que se identifica, describen y caracterizan elementos de esta manera.

Tabla 1
Fuentes de información en el proceso metodológico. Técnicas e instrumentos de recolección

FUENTES DE INFORMACIÓN	TÉCNICAS	INSTRUMENTOS
Documentos Investigaciones de la Escuela Pedagógica Experimental	Análisis Bibliográfico	Fichas
Discurso de los maestros	Entrevistas	Guía de entrevista semiestructurada
Situación de aula	Observación etnográfica	Video

El cuadro marca la ruta de análisis según la técnica y el instrumento empleado desde 3 perspectivas, ellas dan cuenta de los objetivos que pretenden identificar y describir y es por esta razón que se selecciona tanto los instrumentos como los datos que se quieren recoger.

Frente a las técnicas en el proceso de selección y análisis de los datos, se identifican tres fundamentos: El análisis cualitativo de contenido (ACC), el análisis fundamentado en los datos (AFD) y el análisis semiótico de textos (AST). Esta perspectiva potente en el proceso de sistematización y análisis, permite también estructurar el proceso de recolección de datos y organizándolo en lo que podría verse como momentos (las unidades de muestreo, contexto y registro).

Dentro de las técnicas de análisis de contenido se distinguen dos tipos, el cuantitativo y el cualitativo, perspectivas diferentes pero generalmente trabajan de manera conjunta para posibilitar mejores inferencias. El análisis cualitativo de contenido ocupa un lugar importante dentro de la metodología de los instrumentos de investigación. Ante todo, permite aceptar como datos comunicaciones simbólicas comparativamente no estructuradas y, en segundo lugar, permite analizar fenómenos no observados directamente a través de los datos relacionados con ellos, independientemente de que intervenga o no un lenguaje

Técnicas de recolección y análisis

Todo proyecto o plan de investigación mediante la técnica de análisis cualitativo de contenido desarrolla varios elementos o pasos diferentes en su proceso, además de las habituales que se relacionan a continuación, Bardín expone una fase en la que se tiene en cuenta la sistematización en el ordenador y Piñuel es menos descriptivo, Andréu (2001) define algunas, claro está que basadas en el trabajo de Krippendorff y Bardín.

- Determinar el objeto o tema de análisis.
- Determinar las reglas de codificación.
- Determinar el sistema de categorías.
- Comprobar la fiabilidad del sistema de codificación-categorización.
- Inferencias.

Las unidades de muestreo. Son aquellas porciones de la realidad observada, o de la secuencia de expresiones de la lengua fuente, que se consideran independientes unas de otras. Aquí, "indepen-dientes" es sinónimo de no relacionadas, no ligadas entre sí, no ordenadas o libres, de modo que la inclusión o exclusión de una unidad de muestreo cualquiera como dato en

un análisis carece de consecuencias lógicas o empíricas en lo que se refiere a las elecciones entre otras unidades. Para la selección de la muestra se pueden utilizar, muestreos probabilísticos, opináticos, estratégicos y teóricos o combinaciones de varios de ellos.

La unidad de contexto. Es la porción de la unidad de muestreo que será examinada para poder caracterizar una unidad de registro. Es el pasaje donde se encuentra la unidad de registro, suele ser una porción de la comunicación más extensa que la unidad de registro, aunque a veces la unidad de contexto y la de registro pueden coincidir; lo que no ocurre nunca es que la unidad de contexto sea una porción de material más corta que la unidad de registro.

Las unidades de registro. Son más específicas, no hay criterios establecidos para definir el tamaño o la forma de seleccionarlas, describen por separado y pueden considerarse partes de una unidad de muestreo que se analizan de forma aislada. Aunque las unidades de muestreo tienden a poseer límites físicamente discernibles, las distinciones entre las unidades de registro, en cambio, son el resultado de un trabajo descriptivo. Generalmente es importante que las unidades de registro tengan un orden específico, de esa manera es posible realizar una reconstrucción de las unidades de contexto, aunque este proceso resulta tedioso. En la investigación las unidades de registro están seleccionadas de tal forma en que cada sección permita identificar aspectos que se relacionan entre sí para desarrollar la idea que propone el texto en cada uno de sus apartados.

Resultados encontrados

Elementos del Ambiente Educativo

Luego de hacer el rastreo bibliográfico de las publicaciones de la EPE en relación con las prácticas matemáticas o con el término ambiente educativo, se identificaron elementos que permiten realizar un análisis de lo que sucede diariamente en las clases de esta propuesta alternativa de educación.

Figura 1. El Ambiente Educativo en la EPE.

Expuesto a manera de facetas duales aparecen el control-autonomía; la confianza-desconfianza y lo individual-colectivo. Estas aparecen en cada una de las relaciones del ambiente educativo. Esto quiere decir que las clases de matemáticas más allá de intereses didácticos tienen por objetivo desarrollar en los estudiantes habilidades que le permitan ser ciudadanos críticos.

Faceta control-autonomía: La EPE reconoce la importancia de desarrollar procesos autónomos en los estudiantes, la posibilidad que tanto en el plano individual como colectivo se desarrollen dinámicas de autorregulación. La toma de decisión y la participación aparecen también como parte de este elemento, se proyecta también como critica a la sociedad y la manera

como se entiende la democracia, es por esto que en la Escuela se propician espacios de democracia participativa en lugar de la representativa, permitiendo que la forma que se aborden los conflictos que se presentan tanto en microsociedades como problemáticas en macrosociedades sean asumidas mediante la reflexión comprometida y no como un problema que le concierne a otros.

Faceta confianza-desconfianza: Una de las problemáticas de nuestra sociedad es que muchas de las acciones están fundamentadas desde la desconfianza, es decir se piensa siempre que las cosas no van a funcionar y en el caso de las acciones humanas, se presume de antemano cuales son los castigos para los incumplimientos, más no en una labor pedagógica que permita entender la norma. Este aspecto no resulta aislado en la clase de matemáticas en la EPE y en los roles que ejercen los estudiantes en los diferentes grupos, es por esto que valores como la sinceridad, la responsabilidad, el trabajo en equipo, son indispensables para el diseño del plan de trabajo de los maestros.

Faceta individual-colectivo: La mayoría de las acciones en la escuela usual, principalmente en la clase de matemáticas, centran el trabajo en lo individual, en resaltar las capacidades personales mediante mecanismos de evaluación, en la necesidad de privilegiar el fin en relación con el saber matemático por encima de los medios y de los otros aprendizajes que aparecen en los espacios de interacción. En la EPE se cree que se deben respetar las individualidades pero también se deben conformar colectivos, en la interacción con otros se aprenden valores y se construye un conocimiento comprometido con las problemáticas de la sociedad. No basta con proponer actividades de forma grupal, el identificar y propiciar situaciones problémicas y conflictivas permiten darle una lectura diferente a los obstáculos que se presentan en la vida y en la sociedad y el sentido de las matemáticas como una forma de resolver problemas resulta más evidente.

En las entrevistas de los maestros y exmaestros, los elementos más mencionados fueron las interacciones y las prácticas escolares. Por lo que se decidió establecer una red categorial que articulara aspectos del EOS desde una perspectiva peirciana y la propuesta de Habermars en relación con las interacciones, con el que se pretende realizar una caracterización por medio del Análisis Semiótico de Textos en una etapa posterior.

Frente a lo Institucional

Las categorías de análisis más abundantes en los discursos son lo pretendido y lo implementado, particularmente relacionados con las situaciones problema. Muchos maestros argumentan que el fin principal no es trabajar por conceptos, ni memorizar procedimientos o propiedades y aunque aparecen o aparecieron en sus prácticas, no es lo más relevante.

Categorías de análisis

En cuanto a lo referencial, al parecer lo único que se tiene en cuenta de los elementos de significado son las situaciones problema, fue unánime la configuración de códigos en la interpretación de la información recolectada, de aquellos que mencionaron este aspecto en su entrevista.Y por último lo que tiene que ver con lo evaluado, no son muchas las expresiones que entraron en esta categoría, al parecer por las características de la evaluación cualitativa en la Escuela Pedagógica Experimental y la cualidad de heterogeneidad que aparece en la institución, hace difícil que los maestros se refieran a este aspecto de forma general.

Frente a las Interacciones

Según los discursos, en la mayoría de las clases de matemáticas predomina la acción comunicativa relacionada con la situación problema, aunque atraviesa todos los elementos de significado y en menor frecuencia aparece relacionada con los demás, la interpretación del proceso de codificación de la información recolectada, le otorga a esta categoría un nivel muy alto de significación lo que caracteriza fuertemente aspectos del ambiente educativo de las practicas matemáticas, basado en la comunicación, esta relación representada no solamente entre el maestro-estudiante, sino también entre estudiante-estudiante. En ninguna de las entrevistas realizadas apareció la acción instrumental, lo que valida que los principios de formación en autonomía son consecuentes por lo menos con las respuestas de los maestros encuestados.

En cuanto a la acción simbólica aparece una característica relacionada principalmente con los procedimientos, el trabajo de representación de modelos caracteriza significativamente las practicas matemáticas, por lo tanto se mencionaron casos en los que el representar tablas de doble entrada indicaba una forma general de proceder a la búsqueda de modelos. Otro aspecto importante en esta acción simbólica es en relación a la situación problema, de forma automática los estudiantes se enfrentan a la actividad y buscan darle solución apoyándose en mesas de trabajo, otra consecuencia de la idea de formación de colectivos otro pilar fundamental en la filosofía de educación EPE.

Conclusiones

En la historia de la EPE se han desarrollado diferentes investigaciones y escritos referentes a la forma como se entienden las matemáticas en esta institución, una perspectiva de hacer y que está mediada más por el aprendizaje del estudiante que por las formas de enseñanza, por la diversidad de soluciones y por la validez del error. Sin embargo es necesario sistematizar esta experiencia recogiendo esos aspectos que han marcado una propuesta alternativa en educación, ahora si esta sistematización se hace bajo la perspectiva de un marco teórico externo a la experiencia, la validez de los resultados obtenidos cobran mayor fiabilidad. Esta investigación se hizo con respecto al ambiente educativo y se pudo comprobar que tanto lo que se había dicho como planteamientos generales se identifica en las prácticas no solo actuales sino de los maestros que han pasado por la institución, los estudiantes también se llevan una impronta y de alguna manera constatan eso que se ha dicho.

En cuanto a la metodología implementada, esta experiencia es un ejemplo de la posibilidad de aplicar el ACC-TFD-AST en diferentes campos, un complemento a la que Lurduy ha demostrado en sus investigaciones, el aplicar esto a un campo de innovación permitieron identificar elementos que no son fáciles de a preciar a simple vista, además que logran que el análisis y las interpretaciones en muestras significativas sean representativas para una propuesta tan grande e importante para la educación en nuestro país como lo es la escuela Pedagógica Experimental.

Perspectivas a futuro e implicaciones educativas

La perspectiva inmediata para la investigación es continuar con los objetivos del trabajo de grado de la maestría, la descripción y la caracterización de los elementos que hasta este momento se han identificado. Estos desde una perspectiva semiótica y con la propuesta teórica-metodológica del ACC-TFS-AST, con el fin de dale mayor profundidad al análisis. A futuro se pretende buscar otros aspectos y escenarios que tengan relevancia en el campo de la educación

matemática y que a consideración deban ser compartidos con la comunidad, como objeto de discusión y reflexión.

Las investigaciones de la EPE han sido objeto de estudio en diferentes universidades colombiana en el campo de educación, la intención es llevar esta discusión también a otros espacios y al mismo tiempo mostrar aspectos que no se han considerado antes en la exposición pero que aparecen en las practicas cotidianas en la institución.

Referencias y bibliografía

Álvarez, C. (2008). La etnografía como modelo de investigación educativa. *Gazeta de Antropología*, *24*. Recuperado de http://www.ugr.es/~pwlac/

Aguilar, J. (1998). De viajes, viajeros y laberintos. *Innovaciones educativas y culturas contemporáneas.* Santa Fe de Bogotá: IDEP.

Cuñat, R. (2007). Aplicación de la teoría fundamentada (Grounded Theory) al estudio de proceso de creación de empresas. *XX Congreso anual de AEDEM, Vol. 2, 2007*. Recuperado de http://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/2499458.pdf

Díaz de Rada, A., & Velasco, H. (1999). *La lógica de la investigación etnográfica*. Madrid: Editorial Trotta.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2008). *Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática*. España: Universidad de Granada.

Lurduy, O. (2012). El sistema didáctico y el tetraedro didáctico. Elementos para un análisis didáctico de los procesos de estudio de las matemáticas. *Revista Científica CIDC-UD*. Bogotá.

Lurduy, O. (2013). *Conceptualización y evaluación de las competencias de análisis, reflexión y semiosis didáctica. El caso de los estudiantes para profesor de matemáticas. Universidad Distrital Francisco José de Caldas* (Tesis inédita). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá.

Jara, O. (2008). Sistematización de experiencias: un concepto enraizado en la realidad latinoamericana. *Revista Internacional Magisterio. Educación y Pedagogía*. Costa Rica.

Krippendorf, K. (1990). *Metodología del Análisis de contenido*. España. Recuperado de http://www.facebook.com/l.php?u=http%3A%2F%2Fbooks.google.com.co%2Fbooks%3Fid%3DLLxY6i9P5S0C%26pg%3DPA7%26hl%3Des%26source%3Dgbs_toc_r%26cad%3D4%23v%3Donepage%26q%26f%3Dfalse&h=RAQFW1W8W

Sandoval, C. (2002). *Investigación cualitativa*, *modulo 4 del programa de especialización en teoría métodos y técnicas de investigación social*. Bogotá: Instituto colombiano para el fomento de la educación superior.

Segura, D., & Otros. (2000). *Vivencias de conocimiento y cambio cultural* (2ª ed.). Bogotá: Escuela Pedagógica Experimental.

Segura, D., & Otros (2007) *Convivir y aprender* (1ª ed.). Bogotá: Escuela Pedagógica Experimental.

Soneira, A. J. (2006). La Teoría fundamentada en los datos de Glaser y Strauss. En I. Vasilachis (Coord.), *Estrategias de investigación cualitativa* (pp. 153-173). Barcelona: Gedisa. Recuperado de http://revistas.um.es/educatio/article/viewFile/133021/122721

Ensino e aprendizagem em uma nova perspectiva da educação. Um breve relato de experiência no ensino de porcentagem.

Marlon Freitas **Baptista**
Universidad Federal de Pelotas
Brasil
marlonf35@hotmail.com

Resumo

No presente artigo trataremos das novas perspectivas de ensino e de aprendizagem inclinadas à socialização e construção do conhecimento. Neste contexto este artigo busca compreender e aplicar o conhecimento matemático em uma nova atitude pedagógica através de estudos e experiências, onde o aluno através da interação com os demais integrantes de sala de aula, vivencia, cria, experimenta e participa de todo o processo de construção do seu próprio conhecimento, tornando-se o agente ativo de sua aprendizagem. O conhecimento matemático escolhido para esse relato foi o conteúdo de porcentagem. Utilizamos como agente motivacional, atividades de utilização da porcentagem que fazem parte do cotidiano, passando a compreender através das experiências vivenciadas em sala de aula, quando e onde aplicá-las. O desafio proposto foi a de um jogo de basquete, onde os alunos motivavam-se a repetir os arremessos com o objetivo maior de superar suas próprias marcas, ou o índice de porcentagem. Analisando o resultado obtido através do desenvolvimento da situação-problema podemos verificar que houve uma grande evolução na aprendizagem do conteúdo desenvido, houve também uma maior socialização, integração e troca de conhecimentos entre os alunos, o que complementa não só a aprendizagem, mas também a busca por uma metodologia que contemple uma educação voltada para a cidadania.

Palavras chave: Ensino-Aprendizagem de Matemática, atitude pedagógica no ensino da porcentagem.

Introdução

Diariamente mesmo com a difusão de uma nova forma pedagógica de ensino ainda nos deparamos com métodos tradicionais onde o professor é o centro do conhecimento e tem como obrigação a transmissão deste conhecimento aos alunos, que por sua vez são agentes passivos do conhecimento transmitido.

> educação como redenção, educação como reprodução e educação como transformação da sociedade. [...] A perspectiva redentora se traduz pelas pedagogias liberais e a perspectiva transformadora pelas pedagogias progressistas (Luckesi, 1993, p. 53)

Neste artigo trazemos uma nova abordagem pedagógica aplicada no ensino de Matemática onde o aluno passa a ser o agente de construção do seu próprio conhecimento, vivencia, cria, experimenta participa de todo o processo, a construção do conhecimento passa a ser com a interação com os demais integrantes de sala de aula.

> [...] os alunos são levados a aprender observando, pesquisando, perguntando, trabalhando, construindo, pensando e resolvendo situações problemáticas apresentadas, quer em relação a um ambiente de coisas, de objetos e ações práticas, quer em situações de sentido social e moral, reais ou simbólicos (Lourenço Filho, 1978, p. 151).

Utilizamos como agente motivacional, atividades que fazem parte do cotidiano, passando assim a compreender através das experiências vivenciadas em sala de aula, quando e onde as demais possibilidades de utilização da porcentagem em seu cotidiano.

Ensino da Porcentagem com um novo enfoque Pedagógico, relato de experiências em sala de aula

Tendo em vista as constantes modificações sociais, onde as descobertas, informações e atualizações acontecem em todo o lugar, em frações de segundos, o processo de desenvolvimento educacional do ambiente escolar entra em discussão como um dos mais importantes assuntos a serem desenvolvidos e atualizados. São discutidas as mais importantes reformulações teóricas sobre o desenvolvimento cultural e social de toda a sociedade. Dessa forma, a educação passa a ser o assunto central na busca de metodologias que aprimorem o desenvolvimento educacional, tornando o ensino parte central da motivação destas transformações.

De acordo com as transformações provindas da sociedade onde o desenvolvimento da tecnologia e um diferente modo de pensar menos autoritário e muito menos regrado, a escola de uma maneira geral vem sofrendo grandes dificuldades de motivação, ao ponto de a maioria dos alunos preferirem outras disciplinas mais interativas que o ensino tradicionalista e repetitivo da Matemática.

Todavia há alguns questionamentos propulsores, o que preconiza a nova metodologia de ensino? Qual a motivação que a disciplina de educação física, traz aos alunos ao ponto de despertar tamanho interesse e de tantos alunos?

De acordo com Piaget (1924) o "professor não ensina, mas arranja modos de a própria criança descobrir. Cria situações-problemas", segundo propostas piagetianas o professor atua proporcionando, problematizando o ensino e não mais com o conhecimento centrado somente na exposição e na repetição de exercícios.

Tendo em vista estas novas tendências educacionais e com o intuito de formar alunos que sejam capazes de criar e ter condições de verificar diferentes situações de aplicabilidade da porcentagem, neste artigo propomos à criação de uma forma diferente de ensino da matemática direcionado a aprendizagem do cálculo de porcentagem.

> a principal meta da educação é criar homens que sejam capazes de fazer coisas novas não simplesmente repetir o que outras gerações já fizeram. Homens que sejam criadores, inventores, descobridores. A segunda meta da educação é formar mentes que estejam em condições de criticar, verificar e não aceitar tudo que a elas se propõe. (Piaget,(1982, p.246)

Relato da Situação-Problema

Conforme a nova metodologia pedagógica o aluno passa a interagir com a situação-problema, proposta com o objetivo da construção do conhecimento em conjunto com os demais integrantes da sala de aula.

Durante o relato de experiência buscamos a interação de todos aos alunos baseados em uma proposta de ensino que faz parte do cotidiano da vida de cada um. Aplicamos a proposta de um jogo de basquete realizado em sala de aula (figura 1)

Figura 1: Aplicação da Situação Proposta: Jogo de Basquete
Fonte: A Pesquisa

Os alunos foram divididos em grupos com 4 integrantes, onde 1 integrante era o anotador, cada integrante do grupo tinha 4 arremessos a cesta de basquete, foi fornecido uma tabela aos anotador conforme demonstra a figura 2.

Aluno	Arremesso 1	Arremesso 2	Arremesso 3	Arremesso 4

Figura 2: Tabela de Anotações
Fonte: A Pesquisa

Durante a explicação da atividade a ser desenvolvida colocamos também a música tema do filme Space Jam Jogo do Século do grupo Quad City DJ'S como outro meio motivacional a ser explorado. O objetivo maior é tornar a aprendizagem mais significativa e prazerosa.

> a música está implicada em muitas dimensões do agenciamento social, sentimento, percepção, cognição e consciência, identidade, energia, incorporação (DeNora 2000, p. 16 e 20).

Cada aluno teve a oportunidade de arremessar a bola de basquete na cesta a uma distância pré-determinada, cada arremesso o anotador marcava o acerto ou o erro do participante do seu grupo, a música "Space Jam" acompanhou toda a atividade. A tabela de anotações foi montada para que o próprio anotador também tivesse as quatro oportunidades de arremessar a bola de

basquete na cesta, o intuito é a participação de todos os integrantes do grupo na atividade proposta.

Figura 3: Aplicação da Situação Proposta: Jogo de Basquete
Fonte: A Pesquisa

Após os arremessos de todos os integrantes, exploramos, então, a situação problematizada, onde o aproveitamento de cada grupo é calculado e comparado com os resultados de acertos e erros dos demais grupos.

Segue a situação-problema envolvendo cálculos de porcentagem proposta aos alunos:

Situação-Problema:

- Quantos acertos o grupo teve, qual a porcentagem do grupo de acertos e erros.
- Quantos acertos os homens do grupo tiveram, qual a porcentagem.
- Quantos acertos as mulheres do grupo tiveram, qual a porcentagem.
- De uma forma geral qual a porcentagem de acertos do grupo no primeiro arremesso;
- Qual a porcentagem do grupo no último arremesso;
- Qual a porcentagem de acertos de toda a turma;

Analisando o resultado obtido através do desenvolvimento da situação-problema podemos verificar que houve uma grande evolução na aprendizagem do conteúdo desenvolvido, todas as situações foram corrigidas e o resultado foi excelente, pois praticamente não houve erros nos resultados encontrados. Os alunos ficaram muito motivados a repetirem os arremessos com o objetivo maior de superar suas próprias marcas, ou o índice de porcentagem.

Houve também uma maior socialização, integração e troca de conhecimento entre os alunos, o que complementa não só a aprendizagem, mas também a busca por uma metodologia que contemple uma educação voltada também para a cidadania.

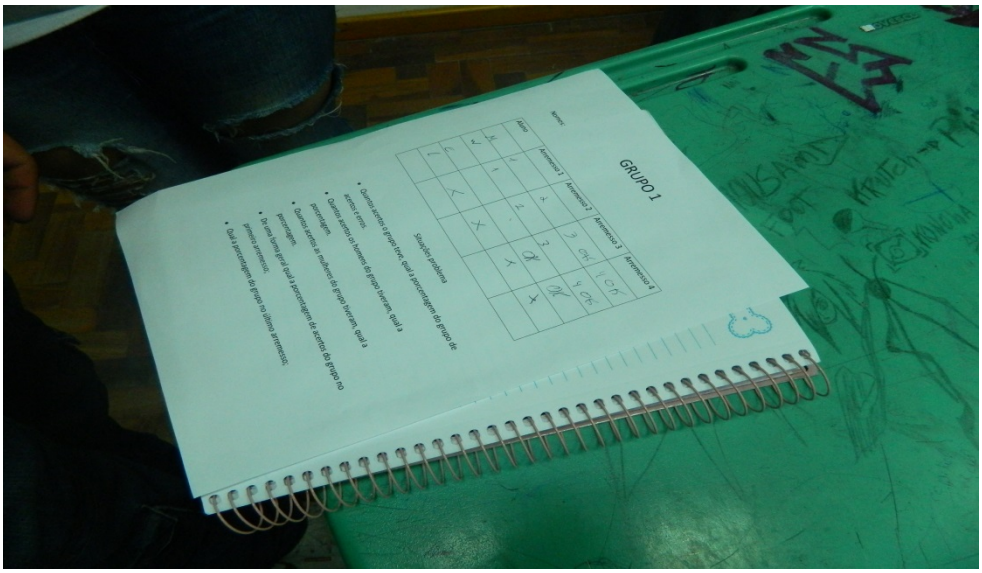


Figura 4: Ficha entregue ao anotador
Fonte: A pesquisa

Como já citado a nova pedagogia traz uma nova concepção metodológica onde a interação dos alunos na construção do aprendizado torna-se cada vez mais significativo na vida escolar de todos os alunos.

Considerações Finais

É preciso afirmar e reafirmar que uma nova proposta pedagógica deve ser colocada em prática, relevando todos os pensadores inclusos na nova pedagogia. Se continuarmos aplicando a mesma metodologia dos séculos XIV, XV e XVI, obteremos os mesmos resultados de séculos anteriores.

Formar alunos pensantes, capazes de criar. Aplicar a nova pedagogia levando em consideração o meio onde os alunos estão inseridos, a realidade vivenciada em seu cotidiano, uma metodologia didática voltada a realidade de cada um, objetivando assim um aprendizado mais significativo e prazeroso.

> a principal meta da educação é criar homens que sejam capazes de fazer coisas novas não simplesmente repetir o que outras gerações já fizeram. Homens que sejam criadores, inventores, descobridores. A segunda meta da educação é formar mentes que estejam em condições de criticar, verificar e não aceitar tudo que a elas se propõe. (Piaget, 1982, p. 246)

Referências

Anisio, Pedro. (1955). Tratado de Pedagogia. Rio de Janeiro: Organização Simões.

Denora, Tia. (1995). *Beethoven and the construction of Genius. Musical Politics in Vienna, 1792-1803*. London: University of California Press.

Libâneo, José Carlos. (2008). Didática: Coleção magistério, série formação do professor. São Paulo: Cortez.

Lourenço Filho, M. B. (1993). Introdução ao estudo da Escola Nova. 13. ed. São Paulo:

Luckesi, Cipriano C. Filosofia da educação. 6. ed. São Paulo: Cortez.

Piaget, J. (1976). Psicologia e Pedagogia. Forense Universitária, Rio de Janeiro.

Explorando os Museus de Ciências para o ensino da Matemática

Virgínia Cardia **Cardoso**
Universidade Federal do ABC
Brasil
virginia.cardoso@ufabc.edu.br

Resumo

Queremos discutir a formação inicial e continuada do professor que ensina Matemática, refletindo sobre a potencialidade de espaços não formais, em especial os Museus de Ciências, em situações de ensino e aprendizagem da Matemática. Para isso, apresentamos os desdobramentos de uma pesquisa anterior, considerando o referencial teórico relativo a: História dos museus de ciência; Aprendizagem e Interatividade; Educação formal, não formal e informal; e Exposições Matemáticas. Analisamos os resultados de Watanabe (2013), cujos dados foram coletados em visitas a quatro instituições das cidades de São Paulo e do ABC paulista. Concluímos que o reconhecimento da Matemática em áreas recreativas é pouco, assim, o potencial pedagógico dos museus de ciência não é suficientemente explorado para a Matemática.

Palavras chave: Museus de Ciência, Educação Matemática, Ensino da Matemática, Espaços educativos não formais, Formação de professores.

Introdução

A pesquisa que ora se apresenta traz os desdobramentos de uma Iniciação Científica (IC) concluída em 2013 pelo programa Jovens Talentos para a Ciência do CNPq, de um aluno do curso de Bacharelado de Ciências e Tecnologia da UFABC. Watanabe (2013) estudou, em sua IC, um espaço reconhecidamente educativo, embora não escolar – o Museu de Ciências – com o propósito de saber como é a divulgação da Matemática nestes. Sua inquietação foi por compreender como a Matemática é apresentada e divulgada, o que é privilegiado em termos de conteúdo matemático, e qual é a interação entre os visitantes dos museus e os objetos matemáticos expostos. Embora tal pesquisa não tenha dado conta de explorar todos esses aspectos, foi possível começarmos a conhecer a potencialidade dos Museus de Ciências como lócus para o ensino da Matemática.

Entendemos que as pessoas que frequentam os museus, o fazem em busca de conhecimento, seja de arte, de história, de ciências ou tecnologia. Portanto, podemos considerar o museu como um espaço educativo. Nessa busca, o visitante de um museu não é obrigado a cumprir um roteiro pré-determinado (mesmo que existam percursos sugeridos ou induzidos), nem adquire esse conhecimento de forma controlada. Nem sempre chega a sistematizar tal conhecimento. Assim, embora tal espaço seja educativo ele não é formalizado, como ocorre na escola.

Buscando entender a educação não formal, nos baseamos em Johnston (1997)[1], que apresenta a diferença entre educação formal, informal e não formal. A educação formal, para

[1] Apud Padilla (2002).

esse autor, é aquela que as instituições acadêmicas escolares oferecem. É um sistema rigorosamente programado, organizado em cronogramas, contempla uma avaliação do processo de ensino e aprendizagem e resulta numa certificação oficial da aprendizagem. Os museus de ciência oferecem a educação informal e não formal, conforme os conceitos de Johnston (1997). Aqueles indivíduos que visitam os espaços ocasionalmente recebem uma aprendizagem informal: estímulos através de exposições, conferências, demonstrações e atividades recreativas. Os visitantes já usuários, frequentadores recorrentes dos espaços, recebem uma aprendizagem não formal. São oferecidas atividades organizadas para modificar o conhecimento, habilidades, atitudes e o modo de pensar. Frequentam seminários, cursos e oficinas sem uma certificação.

Como espaço educativo não formal, o museu de ciências tem uma forte tradição nas ciências naturais – biologia, química, física, geologia –, assim como os museus de artes e museus históricos são comumente explorados em situações de aprendizagem nas ciências humanas. Porém, raramente se recorre a um museu quando há o interesse em ensinar ou aprender a Matemática. Watanabe (2013) constatou que esse espaço vem sendo bastante negligenciado, tanto pelos professores de Matemática como pelo público que frequenta o museu de ciências.

Os resultados dessa IC geraram uma nova pesquisa que vem sendo desenvolvida no Projeto do OBSERVATÓRIO DA EDUCAÇÃO/CAPES "Rede colaborativa de práticas na formação de professores que ensinam matemática: múltiplos olhares, diálogos e contextos – UFSCAR, PUCSP, UFABC". O objetivo geral deste projeto OBEDUC é "compreender, problematizar e evidenciar o potencial da rede de colaboração entre práticas de ensino, pesquisa e extensão no processo de constituição profissional do professor que ensina matemática" (Gama, 2012). Tal objetivo geral se desdobra em objetivos específicos, dentre os quais destacamos "propor ações de formação de professores voltadas a articulação de diferentes práticas, as quais viabilizam possibilidades investigativas e estudos teórico-metodológicos" (Gama, 2012).

O projeto foi aprovado pela CAPES no início de 2013 e, conforme proposto, vem sendo construído por três grupos, todos formados por docentes das universidades envolvidas, discentes de graduação, discentes de pós-graduação e professores da educação básica que ensinam Matemática na rede pública, que se articulam colaborativamente. O primeiro grupo está sediado na UFSCAR (SP), liderado pela docente cordenadora geral do projeto. O segundo está sediado na PUCSP (SP), coordenado por uma docente do Programa de Pós-graduação em Educação. O terceiro grupo está sediado na UFABC (SP), coordenado pela proponente deste texto.

O autor da IC participou como voluntário das conversas sobre ensino de Matemática no polo UFABC, do projeto OBEDUC e, relatando seus resultados nas reuniões do grupo, provocou questionamentos interessantes: se aprende Matemática somente na escola? Haveria possibilidade de aproveitar outros espaços educativos, além da escola, para aprender Matemática? O professor que ensina Matemática na escola básica conhece outros espaços educativos e mobiliza os recursos necessários para tal? Há possibilidade de criarmos atividades educativas de Matemática a partir de uma visita a um Museu de Ciências?

Essas novas questões vêm sendo discutidas por alguns membros do Grupo OBEDUC e estão sendo aprofundadas em uma nova pesquisa. Para começarmos a definir melhor os termos de nossa pesquisa atual, trouxemos para este texto os principais resultados da IC citada e também nossas reflexões, como estão no estágio atual.

Os Museus de Ciência em diferentes concepções

No sentido cotidiano atribuído à palavra Museu, na língua portuguesa falada no Brasil, entende-se "qualquer estabelecimento permanente, criado para conservar, estudar, valorizar pelos mais diversos modos e, sobretudo expor para deleite e educação do público, coleções de interesse artístico, histórico e técnico" (Aurélio, 1986).

De forma similar, a lei brasileira nº 11.904 de 14 de janeiro de 2009 – lei do Estatuto dos Museus – traz a definição:

> Consideram-se museus, para os efeitos desta Lei, as instituições sem fins lucrativos que conservam, investigam, comunicam, interpretam e expõem, para fins de preservação, estudo, pesquisa, educação, contemplação e turismo, conjuntos e coleções de valor histórico, artístico, científico, técnico ou de qualquer outra natureza cultural, abertas ao público, a serviço da sociedade e de seu desenvolvimento (Brasil, 2009).

Tais definições já trazem o atributo educacional na própria acepção da palavra, porém nem sempre o Museu teve essa função.

Na Antiguidade clássica surgiram espaços particulares, de acesso restrito, que reuniam coleções de objetos. Nestas, nem sempre havia um princípio organizador. Em muitas vezes as coleções eram objetos reunidos aleatoriamente. No Renascimento, os europeus criaram os Gabinetes de Curiosidades reunindo objetos exóticos, curiosos ou raros. Mais tarde os gabinetes foram ampliados e abertos à elite social. O acesso do público foi ocorrendo muito lentamente. Acompanhou o progresso socioeconômico e a valorização de artistas, escritores e cientistas. No final do século XVIII, após as Revoluções Francesa e Americana, os espaços de exposição foram completamente abertos ao público e se tornaram local de convivência social, pois passaram a serem vistos como meio ideal para cultivar o patriotismo do povo e os valores nacionais. No século XIX houve um grande avanço da Ciência e da Tecnologia e muitas expedições científicas pelo mundo inteiro produziram estudos e levaram exemplares de objetos e seres inéditos aos europeus. Por volta desta época já se pode perceber três grandes tipos de museus: os museus históricos, os de artes e os de história natural. Ainda hoje em dia se usa esta diferenciação no trato dos museus, embora nem sempre isso seja possível.

No século XX, com a intensa concentração das populações em cidades, passa-se a valorizar as tecnologias em dois sentidos: como acervo (museu de máquinas) e como meio de exposição ao público (os aparelhos de áudio que servem de guias individuais, por exemplo).

Após a II Guerra Mundial, a sociedade passou a mostrar um forte interesse nos conceitos científicos e, para atender tal necessidade, surgiram os centros de ciência, que diferem dos museus de ciências por terem o foco na aprendizagem. Desde então os museus tradicionais passaram a coexistir com os centros de ciência e tecnologia. Embora ambas as instituições preocupem-se com a função educacional, o museu tradicional manteve o caráter mais histórico, expositivo e demonstrativo, enquanto os centros de ciência procuravam popularizar os avanços científicos e tecnológicos. Os centros proporcionam ao visitante a experiência de vivenciar alguma prática científica. O valor, nos centros de ciências, não está no acervo e sim nas atividades que podem ser propiciadas ao visitante.

Atualmente podemos perceber uma grande valorização dos museus e centros como espaços educativos em diversos países. Geralmente são países que possuem museus famosos pelo valor artístico, pelo valor histórico ou pelos recursos que usa na apresentação de seu acervo. Os

museus, em vários lugares, potencializam o turismo, gerando renda e aquecendo a economia local. São exemplos: o Museu do Louvre, na França, o Museu Britânico, na Inglaterra, o *Exploratorium* (San Francisco, EUA) e o Ontário Science Center (Toronto, Canadá).

No Brasil, os primeiros museus científicos surgiram no plano de modernização do país, quando a Família Real veio para o Brasil. Estes espaços eram abertos apenas para o público letrado, oferecendo cursos e palestras nas áreas de pesquisa, arte e história. O progresso econômico e o urbanismo promoveu a mistura entre ciência, técnica e indústria, que foi refletida na 1ª Exposição Internacional – Londres, 1851. O Brasil começou a participar das exposições Internacionais apenas a partir de 1962, na terceira edição, e abordou a Educação como eixo estruturador da sociedade. Desde então vem crescendo o número de museus e centros de cultura e ciência, principalmente durante o final do século XIX e o começo do século XX.

O Brasil possui excelentes museus com grande variedade de coleções artística, históricas e científicas, porém não há a valorização devida destes espaços nem como espaços de lazer e entretenimento, nem como espaços culturais, tampouco como espaços educativos.

Tal situação vem mudando recentemente, mas ainda lentamente, com a aprovação do Estatuto do Museu (lei 11.904 de 2011) e a criação do Instituto Brasileiro de Museus (IBRAM), em 2009. Esta instituição publicou um relatório panorâmico da situação dos museus brasileiros até 2010 (IBRAM, 2011). Nesta obra, podemos ver, a título de exemplo, que o Estado de São Paulo possuía, até 2010, 517 museus, sendo que 24,4% são de Ciências Naturais e/ou História Natural e 24,8% são de Ciências e Tecnologia. Nesse estudo estão arrolados, na cidade de São Paulo, 132 museus, mas apenas 26 são classificados como museus de ciências. Na região do Grande ABC[2] estão listados 10 museus, sendo apenas 2 museus de ciências.

Ao longo do desenvolvimento histórico, podemos perceber que os Museus de Ciência não só cresceram em quantidade, diversidade, em qualidade de seus acervos e na valorização social. Houve também transformações quanto à natureza destes espaços.

McManus (1993)[3] classificou os museus e os centros de ciências em gerações: estágios de desenvolvimento quanto à interatividade da exposição com o visitante. Tal critério possui quatro graus, cujas características podemos resumir no quadro 1, abaixo.

Quadro 1
Síntese das características das Gerações de Museus de Ciência

Geração	Abordagem	Ação (interatividade)	Instalação
1ª	História natural, arte e antropologia	Não há interatividade. O visitante pode apenas olhar, sem tocar os objetos expostos.	Museu Tradicional
2ª	História da ciência e tecnologia industrial	O visitante aciona um movimento, mas ainda é majoritariamente demonstrativo.	Museus de ciência e tecnologia

[2] A região do Grande ABC é formada por sete cidades paulistas: Santo André, São Bernardo, São Caetano, Diadema, Mauá, Ribeirão Pires e Rio Grande da Serra.
[3] Apud Padilla (2002).

3ª	Temas amplos, ideias e fenômenos naturais, princípios científicos	Ação do visitante acarreta numa sequência de funcionamentos	Centros modernos de ciência
4ª	Problemas do cotidiano, análise e debate sobre o papel da sociedade diante da atual ciência e tecnologia	O visitante constrói a sua própria experiência; a ação do visitante tem um final aberto, atendendo as suas expectativas e ou necessidades	Centros com tecnologia de ponta

Um exemplo de museu de 1ª geração é o Louvre, onde não cada objeto exposto tem um valor artístico ou histórico e não proporcionada nenhuma interatividade, a não ser a pura observação. A interação com o visitante causaria danos ao patrimônio. Aqui vale o "é proibido tocar". Na segunda geração estão os museus que pedem algumas poucas ações do visitante: apertar um botão e ver o que acontece. Na terceira geração está a maioria dos centros de ciência atuais. São aqueles em que o visitante vive experiências já planejadas e determinadas pelos organizadores da exposição. Não se pode sair do roteiro. Na quarta geração, há interatividade total com as propostas experimentais. Elas podem ser conduzidas de diversas formas, conforme o desejo do visitante. Isto é, para cada experiência seria explorado um conceito científico diferente.

Para Padilla (2002) o ideal de um museu de ciências atual é ser um centro de 4ª geração, pois este tipo agrega características facilitadoras ao processo de ensino e aprendizagem. Padilla (2002) estuda tais características em três dimensões: o Eixo Temático, o Eixo das Características Básicas, e o Eixo dos Paradigmas de Cognição e Aprendizagem.

O Eixo Temático está relacionado à estrutura e organização de como os temas são apresentados. Para que ocorra o desenvolvimento de habilidades e de conhecimento, o tema de cada sala do espaço expositivo deve estar associado com o das outras salas, mostrando equilíbrio entre: Arte e História antiga, Arte e História moderna, Ciência e Tecnologia antiga, e Ciência e Tecnologia Moderna.

As Características Básicas são: o incentivo de ações coletivas que promovam situações, desafios e experiências pessoais, a fim de estimular a criatividade; a utilização de tecnologia de ponta e outros recursos; e ser um centro de educação não formal para o longo da vida, de acesso e troca de informações e análises científicas.

Por fim, os Paradigmas de Cognição e Aprendizagem atendem as exigências e condições das novas concepções de pensar e aprender. A exposição deve incentivar o usuário a construir a sua própria aprendizagem, desenvolver sua própria habilidade e interagir com os outros visitantes. As atividades devem abordar temas sintéticos, focar em diversos tipos de inteligência e promover a observação, a dúvida e a ação do público.

A educação científica e matemática e os Museus de Ciências

A partir da década de 1980, com a crescente industrialização do mundo ocidental, tornou-se evidente a demanda social por uma educação científica de mais qualidade. Tal situação torna crítica a educação em ciências de modo geral e mais grave ainda a educação em Matemática. Muitas ações têm sido empreendidas para aproximar o público das ciências. A divulgação científica é um importante processo com esse papel.

Divulgação é um processo de comunicação de informação que implica em transformar uma linguagem formal e científica numa linguagem mais acessível, mais simples e direta, que possa

ser compreendida por pessoas de fora do círculo acadêmico. Dados os avanços técnicos atuais, os processos de divulgação científica assumem várias formas: livros de divulgação, revistas comerciais, sites e blogs na internet, vídeos, programas de rádio e TV, obras cinematográficas, museus e centros de ciência.

D'Ambrósio (1999) observa que um jovem não estará preparado para a sociedade só pelo conhecimento adquirido na escola, pois ele sofre rápidas transformações. O conhecimento escolar estará sempre defasado se focar somente em conteúdos. A escola deixou de ser o único lugar de legitimação do saber. Padilla (2002) reforça que cada vez mais o conhecimento oferecido pela educação formal será eletivo e restrito. Assim o autor defende o auxílio da aprendizagem de longo prazo pela educação informal e não formal. A qualidade da educação irá depender, para Padilla (2002), da interação da educação formal com os espaços extramuros, tais como os museus: um espaço aberto onde o visitante tem a livre escolha de percurso e são apresentados conteúdos flexíveis.

Mendes (2003) alerta que o museu é uma instituição cultural intrinsecamente educativa, o que não significa que tudo o que for realizado neste espaço será de cunho pedagógico. A aprendizagem pela livre escolha não é uma alternativa para a educação formal, mas sim um instrumento que fornece à escola os elementos nela ausentes. Os centros podem oferecer visitas escolares para complementar os conceitos dos livros, assim como disponibilizar serviços de capacitação de docentes e produzir materiais didáticos.

Nas disciplinas escolares de ciências naturais, os museus e centros de ciência já são aproveitados como espaços educativos, mas ainda não em Matemática.

Matemática é uma das disciplinas escolares mais difíceis para os alunos do ensino básico. Os alunos se queixam, dentre outros fatores, da abstração dos conceitos, da linguagem simbólica ser difícil, da falta de aplicação prática dos conhecimentos abordados em sala de aula. Os professores também têm queixas com relação aos métodos de ensino que conhecem e aos materiais que tem disponíveis para o ensino escolar. Tal fenômeno não é atual, nem é restrito a um local. Sabemos que, desde a crescente ampliação da rede escolar, com a democratização do ensino básico no mundo ocidental, iniciada após a Revolução Francesa, ficaram evidentes as dificuldades nos processos de ensino e aprendizagem em Matemática. Dificuldades que vem sendo examinadas exaustivamente, tanto em trabalhos acadêmicos como nas práticas docentes.

Freedman (2011)[4] observou que as dificuldades de aprendizagem em Matemática de seus alunos os deixavam frustrados e sem motivação. Uma vez desestimulados, eles passam a interpretar a Matemática como um conjunto incompreensível de procedimentos. Essa autora encontrou, em alguns estudos, a recomendação de que ter experiências com a Matemática antes do início da educação formal favorece o sucesso do aluno nos primeiros anos da escola; e da parte da escola, de que é necessário um caminho diferente do tradicional (a prática de memorizar algoritmos) para ensinar a Matemática. A maioria dos alunos que não domina a Matemática, lida com ela sem nenhuma escolha ou controle. Por isso a necessidade do aprendizado da Matemática em espaços como os museus, onde o 'fazer sentido' ocorre livremente, de acordo com as próprias ideias da pessoa. Freedman (2011) acredita que a Matemática pode funcionar como gancho para promover e estabilizar relações entre escolas e museus.

[4] Apud Watanabe (2013).

Desta forma, assumimos, por hipótese, que a Matemática pode despertar o interesse do público, mas deve ser apresentada de forma bastante diferente da organização escolar, livre das amarras de um currículo escolar defasado. Isso nos leva a refletir o quanto um professor deva ser preparado em sua formação – inicial ou continuada – para poder apropriar-se desses espaços alternativos em atividades didáticas.

A Matemática no Museu de Ciências

Voltando ao trabalho de Watanabe (2013), temos alguns dados, embora restritos à cidade de São Paulo e ao Grande ABC, que nos permitem um panorama da Matemática nos museus de ciências atuais. Dentre os museus existentes na região examinada, ele identificou apenas quatro museus de ciências que possuem acervo relativo à Matemática:

- O Museu Prandiano – na cidade de São Paulo (SP);
- O Espaço Catavento Cultural e Educacional – na cidade de São Paulo (SP);
- O Sabina Escola Parque do Conhecimento – na cidade de Santo André (SP);
- A Estação Ciência – na cidade de São Paulo (SP).

Sua pesquisa teve abordagem qualitativa e descritiva, constando de um levantamento bibliográfico preliminar e de visitas de campo. Dentre as dificuldades encontradas no estudo, uma das primeiras foi a escassez de bibliografia sobre o assunto. Foi encontrado apenas um estudo[5], norte americano, que aborda a Matemática nos Museus de Ciências. As demais referências abordam as ciências naturais nos museus de ciências.

Watanabe (2013) realizou visitas nos museus citados e descreveu as exposições relativas à Matemática quanto: ao espaço físico, os itens expostos e suas explicações, a existência de monitores nas exposições e o quanto eles podiam auxiliar o público e a reação das pessoas que circulavam à exposição, no dia e horário da visita. Sua descrição também considerou a acessibilidade dos museus, localização, preço de ingresso, horários de funcionamento, interação com a comunidade promovida pelo próprio museu. Com o levantamento desses dados, pode confrontá-los com seu referencial teórico acerca da divulgação científica em museus e sobre a aprendizagem em Matemática.

Em suas análises, constatou que:

- O Museu Prandiano é totalmente dedicado à Matemática. É um espaço mantido por iniciativa privada e ligado a um curso livre de Matemática. Possui um acervo composto de livros e ilustrações além de poucos aparatos. Não promove nenhuma atividade com os visitantes. É um museu "apenas para olhar", o que o torna um museu de 1ª geração. No dia da visita, o museu não recebeu visita do público, nem havia um monitor para acompanhar o pesquisador. Apenas o pesquisador estava presente no espaço, portanto não foi possível observar a reação do público à Matemática.
- O Sabina Escola Parque do Conhecimento é um espaço mantido pela Prefeitura de Santo André. Não é um museu e sim um centro de ciências. O centro é voltado para o público infanto-juvenil e promove benefícios para o público escolar, como visitas monitoradas para os alunos e cursos para professores. O acervo é dividido em cinco grandes áreas: Ciências

[5] Freedman, A. (2011).

da Vida; Arte e Comunicação; Ciência e Tecnologia; Ciências da Terra, Ambiente e Sustentabilidade; e o Planetário. A Matemática está dentro da grande área da Ciência e Tecnologia. Os monitores sabem explicar os conhecimentos matemáticos das atividades, que são em número suficiente para a área. Foram observados 17 aparatos relacionados com os conceitos matemáticos que, de forma lúdica, abrangem desde princípios simples como a noção de espaço e geometria, até conceitos avançados como as curvas hiperbólicas. No caso da exposição matemática, o Sabina pode ser classificado como de 3ª geração.

- A Estação Ciência é um centro de ciência e tecnologia, mantido pela Universidade de São Paulo (USP), que oferece atividades e exposições interativas. Buscando popularizar a ciência de forma lúdica e prazerosa, os temas são divididos em cinco grandes áreas: Física, Matemática, Ciências da Terra, Natureza e Biologia. Cada área possui uma sala ou um conjunto de espaços com própria cenografia e organização. O ambiente da Matemática é calmo e organizado sobriamente, favorecendo o foco da atenção nos conceitos matemáticos. São mais de 60 objetos e experiências acompanhadas de uma placa explicativa e um painel com informações. O papel dos monitores se limita cuidar e organizar os objetos após o uso. Cada experimento é acompanhado de uma explicação que tenta relacioná-lo ao cotidiano, e são propostos desafios para que o visitante aplique conceitos matemáticos e atinja um objetivo. Os aparatos proporcionavam desde uma simples leitura, até jogos de desafio e raciocínio. Vão de calcular a área através de pregos e elástico, a Jogo da Velha 3D e instrumentos com conceitos complexos como fractal e superfícies regradas. Apesar de um grande acervo, ainda é um centro de 3ª geração.
- O Espaço Catavento Cultural e Educacional é mantido pela cidade de São Paulo e oferece atividades para todas as idades. As exposições estão divididas em quatro grandes sessões: Universo, Vida, Engenho e Sociedade. Não existe, por enquanto, uma área voltada somente para a Matemática. Desta forma, a identificação dos aparatos ocorreu de acordo com as observações feitas em outros espaços científicos. Foi possível verificar apenas quatro objetos que são semelhantes, senão iguais, aos aparatos apresentados na Estação Ciência e no Sabina. Apesar disso, dos três centros analisados, é o único que pode ser caracterizado como da quarta geração.

Observamos que, na cidade de São Paulo há, ainda, o Instituto de Matemática e Estatística da USP, que conta com uma exposição itinerante e totalmente voltada à Matemática – a Matemateca. Porém, esta não entrou na pesquisa por não ser considerada um museu.

Considerações Finais

Watanabe (2013) observou que os espaços dedicados à Matemática são mais sóbrios, silenciosos e não ocupam lugar de destaque nas três últimas exposições analisadas. Por outro lado, o público é atraído por espaços mais "animados", que contém aparatos coloridos, barulhentos e que causem alguma sensação física no visitante. Os aparatos matemáticos são, via de regra, ignorados pelo público que não tem paciência para ler grandes explicações nos painéis. Apesar de essa constatação contrariar nossa hipótese, acreditamos que o problema poderia ser resolvido se houvesse, na formação de professores, um tempo a ser dedicado à reflexão sobre a divulgação da Matemática nesses espaços.

Na formação de professores de Matemática não se consideram, em geral, os espaços educativos não formais, embora já esteja previsto nos Referenciais Curriculares Nacionais dos cursos de Bacharelado e Licenciatura, publicados em 2010 pela Secretaria da Educação Superior

do Ministério da Educação (MEC/ SESU), como uma possibilidade de ambiente de atuação para o professor de matemática.

> O Licenciado em Matemática trabalha como professor em instituições de ensino que oferecem cursos de nível fundamental e médio; em editoras e em órgãos públicos e privados que produzem e avaliam programas e materiais didáticos para o ensino presencial e a distância. Além disso, atua em espaços de educação não formal, como feiras de divulgação científica e museus; em empresas que demandem sua formação específica e em instituições que desenvolvem pesquisas educacionais. Também pode atuar de forma autônoma, em empresa própria ou prestando consultoria. (Brasil, 2010, pg. 78).

Entendemos que há ainda um longo caminho para conciliar a Matemática com os museus de ciências. Por enquanto existem poucos museus ou centros que dedicam algum espaço à Matemática e esta, quando é apresentada, o é de forma não muito atrativa. Por outro lado, é um espaço largamente negligenciado pelo professor que ensina Matemática. Tanto na prática docente como nas pesquisas acadêmicas a respeito do assunto.

Concluímos ser necessário que tal tema deve ser discutido com mais frequência, tanto na formação inicial e continuada de professores, quanto em pesquisas acadêmicas, para que se possa fazer destes espaços uma oportunidade para a aproximação da Matemática às pessoas, propiciando situações de aprendizagem.

Agradecimentos

À CAPES - Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo financiamento da pesquisa realizada no Projeto OBEDUC Rede Colaborativa de Prática na Formação de Professores que Ensinam Matemática: múltiplos olhares, diálogos e contextos.

Referências Bibliográficas

Aurélio, B. H. (1986). *Novo Dicionário Aurélio da Língua Portuguesa* (2ª edição). Rio de Janeiro: Editora Nova Fronteira.

Brasil, Casa Civil. (2009). *Lei nº 11.904 de 14 de janeiro de 2009.* Estatuto de Museus. Brasília: Casa Civil.

Brasil, MEC/SESU. (2010). *Referenciais Curriculares Nacionais dos Cursos de Bacharelado e Licenciatura/Secretaria de Educação Superior*. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Superior.

D'Ambrósio, U. (1999). *O Papel do Museu no Processo da Divulgação da Ciência*. Disponível em: <http://professorubiratandambrosio.blogspot.com.br/2010/12/museus-e-ciencia.html>. Acesso em: 05/ agosto /2013.

Freedman, A. (2011). *Balancing the Equation: Strengthening Museum-School Partnerships Through Math.* Partial Fulfillment. John F. Kennedy University. Disponível em: <http://library2.jfku.edu/Museum_Studies/Balancing_the_Equation.pdf>. Acesso em: 05 agosto 2013.

Gama, R. P. (2012). Projeto "Rede colaborativa de práticas na formação de professores que ensinam matemática: múltiplos olhares, diálogos e contextos – UFSCAR, PUCSP, UFABC"**.** *OBSERVATÓRIO DA EDUCAÇÃO/CAPES – edital 2012.* Brasília: CAPES.

Mendes, J. A. (2003). *Educação e Museus: Novas Correntes*. Conferência proferida no Museu Monográfico de Conímbriga.

Instituto Brasileiro de Museus. Ministério da Cultura. (2011). *Museus em Números, 2v.* Brasília: Ministério da Cultura.

Padilla, J. (2002). Conceptos de Museos y Centros interactivos. In S. Crestana (Coord.), *Educação para a Ciência: Curso para Treinamento em Centros e Museus de ciência* (pp. 113 – 142). São Paulo: Livraria da Física.

Watanabe, M. T. (2013). *A divulgação da Matemática nos Museus de Ciência*. Pesquisa de Iniciação Científica. Santo André: UFABC.

Formação de investigadores a partir de experimentos interativos, simulações e uso de aplicativos computacionais

Maria Madalena **Dullius**
Centro Universitário Univates
Brasil
madalena@univates.br
Italo Gabriel **Neide**
Centro Universitário Univates
Brasil
italo.neide@univates.br
Marli Teresinha **Quartieri**
Centro Universitário Univates
Brasil
mtquartieri@univates.br
Lucy Aparecida Gutierrez **de Alcântara**
Centro Universitário Univates
Brasil
lucy.alcantara@jna.ifmt.edu.br

Resumo

Nesta investigação temos por objetivo despertar o espírito científico, a curiosidade e o gosto pelas Ciências, principalmente nas áreas de Física, Química e Matemática, visando à formação de alunos e professores investigadores, por meio de atividades de experimentação, simulação e uso de aplicativos computacionais. A metodologia segue pressupostos da pesquisa qualitativa em que é desenvolvida em conjunto com professores e alunos de Matemática, Química e de Física da Educação Básica. Todos participam de encontros de discussões teóricas, planejamento de atividades de experimentação e simulação, estudo de aplicativos computacionais e, paralelamente estarão desenvolvendo situações em suas escolas. Investigamos, por meio de entrevistas, relatórios e filmagens, quais os impactos das atividades descritas para a formação de investigadores, bem como a motivação para a área das Ciências Exatas. Esperamos, com as ações propostas, estimular jovens a aproximarem-se de atividades científicas e tecnológicas, bem como contribuir com a formação de investigadores.

Palavras chave: matemática, ciencias, atividades experimentais, recursos computacionais, formação de investigadores.

Introdução

Atualmente os alunos chegam à escola com outros conhecimentos e interesses, que não é o de receber informações, pois estas podem ser acessadas facilmente por outros meios, principalmente os digitais. Percebe-se desmotivação por parte dos alunos pelas aulas em geral, principalmente nas disciplinas das Ciências Exatas. Os alunos não consideram que sejam necessários cálculos enormes efetuados sem uso de tecnologia, o que pode desmotivá-los a

seguirem carreiras profissionais nestas áreas. Além disso, os alunos conhecem e usam as ferramentas tecnológicas para diferentes atividades diárias, mas raramente como apoio para construção de gráficos, planilhas, simulações, pesquisas e vídeos educativos que podem ser importantes para a construção do conhecimento. Por isto consideramos pertinente os alunos conhecerem outras formas de aprendizagem dessas áreas, principalmente usando como ferramenta de apoio as tecnologias que já fazem parte do dia a dia dos mesmos e explorando atividades experimentais.

O ensino das Ciências Exatas, principalmente nas disciplinas de Física, Química e Matemática, em muitos contextos, ainda se encontra distante da realidade dos alunos. O enfoque dominante, na maioria das vezes, tem consistido na transmissão do saber científico, uma vez que o ensino nestas disciplinas ocorre frequentemente mediante a apresentação de conceitos, leis e fórmulas, de forma desarticulada, vazios de significado e distanciados do mundo vivido pelos alunos. Esse modelo de ensino acaba fazendo com que o aluno, ao receber informações prontas de situações que nem sempre fazem parte do seu dia-a-dia, se desinteresse pelo conteúdo de ensino. Essa situação, além de fazer com que ele sinta "aversão" à área das Ciências Exatas, constitui-se em um entrave no aprendizado, por impossibilitar a participação nos processos de ensino e de aprendizagem. Para Melo (2000), uma proposta de ensino de Ciências puramente acadêmica, que não leve em conta, além das necessidades e da realidade do aluno, o seu interesse e curiosidade, não pode, sequer, ser considerada "ensino de ciências exatas".

As atividades experimentais, as simulações e as ferramentas tecnológicas são frequentemente apontadas, em discussões acadêmicas, como importantes recursos didáticos das disciplinas científicas em, qualquer grau de ensino. A experimentação pode ser uma estratégia de ensino que vincule dinamicamente a Ciência com vivências do aluno. Em outras palavras, é necessário valorizar a visão do conhecimento científico trabalhado na escola como um saber mediador, dinâmico, flexível, capaz de articular o teórico com o prático, o ideal com o real, o científico com o cotidiano.

No que tange às tecnologias, é possível perceber que as mesmas vêm sendo incorporadas aos processos de ensino e de aprendizagem como ferramenta de mediação entre o indivíduo e o conhecimento. A inserção do computador nas escolas, como instrumento de ensino adicional às aulas convencionais, vem crescendo progressivamente em todo mundo. Em relação aos tablets, por exemplo, pode-se verificar que eles são portáteis e de fácil manuseio. Aliado a isso se observa a redução contínua dos custos desses equipamentos e a existência cada vez maior de aplicativos educacionais, sendo estes considerados elementos motivadores para a introdução dos mesmos na Educação Básica. Os recursos computacionais dinamizam o acesso às informações referentes a determinado conteúdo ou disciplina, o que é um dos fatores que está provocando revolução na Educação, segundo Mota (2012).

Neste sentido, envolver os professores orientadores e seus respectivos alunos bolsistas em atividades de formação continuada explorando experimentos, simulações e uso de ferramentas tecnológicas pode ser uma possibilidade para motivá-los a incluir atividades diferenciadas em sua prática pedagógica. Ademais, pesquisas têm evidenciado que poucas atividades práticas são desenvolvidas e discutidas em cursos de formação.

Diante do exposto, destacamos como questão de pesquisa: **Quais as implicações do envolvimento de alunos e professores da Educação Básica em atividades de experimentação e de simulação computacional para a formação de investigadores?**

Para instigar os alunos da Educação Básica e os professores são propostas várias atividades experimentais, nas quais podem observar, manipular, analisar, compreender. O objetivo **é d**espertar o espírito científico, a curiosidade e o gosto pelas Ciências, principalmente nas áreas de Física e Matemática, visando a formação de alunos e professores investigadores. Desde 2009, por intermédio da Pró-Reitoria de Pesquisa, Extensão e Pós-Graduação da UNIVATES, promove-se a atividade de Extensão denominada "Aprender Experimentando", na qual alunos do Ensino Médio podem sentir-se como cientistas por alguns momentos. Foram estruturadas várias atividades práticas interativas de Física (efeito bailarina, espelho antigravidade, freio magnético, efeitos do vácuo, lente sonora, câmara escura, sombras coloridas), Química (espelho de prata, reação com sódio metálico, poder oxidante da água oxigenada, fogos de artifício, pólvora) e Matemática (quebra-cabeças com sólidos geométricos, empilhamentos de poliedros, torre de Hanói, jogos no computador). Em todas as atividades os alunos têm oportunidade de manipular, e por meio da orientação de alunos dos cursos de graduação e Mestrado, compreender o fenômeno abordado. Os alunos visitantes são distribuídos em salas e em pequenos grupos a fim de proporcionar momentos de interação com todos os experimentos.

A realização das atividades no "Aprender Experimentando", mostrou que os alunos se interessaram, estando curiosos e dispostos a realizar as tarefas. O manuseio e a montagem do experimento torna-se uma ação prazerosa ao aluno. A superação do desafio de manejar os materiais, encaminha o aluno para a investigação. De fato, o simples manuseio do experimento já se constitui em uma forma de interação do aluno com o objeto de conhecimento e, a partir disso é possível transformar a atividade experimental em atividade de ensino formal, possibilitando ao aluno a construção do seu próprio saber em relação ao conteúdo científico trabalhado no experimento.

Buscamos uma participação ativa de professores e alunos da Educação Básica em atividades de pesquisa com bolsistas de iniciação científica e pesquisadores da Univates. Acredita-se na validade das ações propostas uma vez que elas podem estimular jovens a aproximarem-se de atividades científicas e tecnológicas, bem como contribuir com a formação de investigadores.

Referencial teórico

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs) destacam a importância de envolver conhecimentos práticos e teóricos na área de Ciências Exatas. Além disso, expressam que nesta área os alunos devem ser criativos, práticos e saber estabelecer relações entre os fatos.

> Os objetivos do Ensino Médio em cada área do conhecimento devem envolver, de forma combinada, o desenvolvimento de conhecimentos práticos, contextualizados, que respondam às necessidades da vida contemporânea, e o desenvolvimento de conhecimentos mais amplos e abstratos, que correspondam a uma cultura geral e a uma visão de mundo. Para a área das Ciências da Natureza, Matemática e Tecnologias, isto é particularmente verdadeiro, pois a crescente valorização do conhecimento e da capacidade de inovar demanda cidadãos capazes de aprender continuamente, para o que é essencial uma formação geral e não apenas um treinamento específico (Brasil, 1999, p. 6).

É na interação, mediada pela linguagem, que se formam os conceitos do cotidiano, que reelaborados na mente dos indivíduos poderão refletir as suas vivências do meio cultural. Logo, saber Ciências passa a significar o emprego de instrumentos conceituais para dialogar com o mundo em vários níveis. Pela sua característica experimental, as Ciências podem investigar os

fenômenos por meio de observações minuciosas, criar modelos teóricos que expliquem tais fenômenos e validá-los nos laboratórios e nas pesquisas de campo.

Para Krasilchik (2008), as aulas práticas são as mais apropriadas, pois apresenta como funções o envolvimento dos alunos em iniciações científicas, o que proporciona despertar e manter o interesse dos alunos pela área, compreensão de conceitos básicos, desenvolvimento de habilidades e capacidade de resolver problemas. Para o autor, durante as aulas práticas, os discentes podem interagir com situações experimentais e com montagens de instrumentos que normalmente não teriam em aulas teóricas. E, esta interação acaba fazendo com que o aluno consiga pensar, refletir, criar e questiona e, dessa forma, aprender o conteúdo que está sendo estudado.

Para Reginaldo, Scheid, Güllich (2012), no ensino de Ciências, a utilização de aulas experimentais é importante para a construção do conhecimento científico dos alunos. Destacam também que os professores concordam com essa importância, deixando explícito que, sempre que possuem oportunidade, realizam estas atividades experimentais. Porém, os autores comentam que "é necessário definir que tipo de experimentação que cabe no ensino, aí o fato de estudar, refletir as diferentes práticas experimentais, e como que elas devem ser aplicadas em determinadas teorias" (Reginaldo, Scheid & Güllich, 2012, p. 11). Nesse mesmo sentido, para Zanon e Silva (2000), a relação entre a teoria e a prática é uma via de mão-dupla, na qual se vai dos experimentos à teoria e das teorias aos experimentos, para contextualizar, investigando, questionando, retomando conhecimentos e também reconstruindo conceitos.

Bizzo (2000) comenta que as aulas práticas podem auxiliar nos processos de ensino e de aprendizagem, pois o acompanhamento da aprendizagem passa pela observação das dificuldades e progresso dos discentes em sala. A experimentação é uma atividade que pode permitir que o aluno raciocine e realize as diversas etapas de uma investigação científica. No que tange ao ensino, as atividades experimentais, as simulações, as ferramentas tecnológicas são frequentemente apontadas, em discussões acadêmicas, como importantes recursos didáticos das disciplinas científicas em, qualquer grau de ensino. Em efeito:

> As atividades práticas podem assumir uma importância fundamental na promoção de aprendizagens significativas em ciências e, por isso, consideramos importante valorizar propostas alternativas de ensino que demonstrem essa potencialidade da experimentação: a de ajudar os alunos a aprender através do estabelecimento de inter-relações entre os saberes teóricos e práticos inerentes aos processos do conhecimento escolar (Zanon & Silva, 2000, p. 134).

As aulas experimentais podem favorecer a criatividade dos alunos, pois o professor solicita que os mesmos se envolvam em diversas etapas: pesquisar experimentos interessantes, justificando sua escolha; pensar em materiais alternativos para serem utilizados no experimento, explicando suas justificativas; auxiliar na montagem do experimento; pensar sobre os possíveis resultados a serem obtidos, antes da execução do experimento; realizar desenhos ou esquemas que representem a atividade experimental. Para Junior e Silva (2013, p. 41) "A realização de atividade experimental é sempre um evento marcante, desafiador e inestimável do ponto de vista cognitivo e pode ser realizado tanto pelos alunos quanto pelo professor". Entretanto, comentam que a atividade experimental por si só não é responsável pela aprendizagem e deveria ser realizada de acordo com alguns critérios, "respeitando as características e heterogeneidade de cada sala aula" (Ibidem, p. 42). Nessa mesma linha argumentativa, Oliveira (2010, p. 142) comenta:

> Destaque-se também o fato de que a simples aplicação de uma atividade experimental não garante que toda a turma ficará envolvida, especialmente em abordagens demonstrativas. Por esse motivo, sugere-se que o professor use estratégias que mantenham a atenção dos alunos focada sobre a atividade proposta, tais como a solicitação de registros escritos dos fenômenos observados, questionamentos realizados no decorrer do experimento e, sempre que possível, estimular os próprios alunos a participem de várias etapas da atividade.

Nesse contexto, cabe ao professor a responsabilidade de classificar, selecionar, realizar e/ou orientar as atividades experimentais de forma adequada e expor o conteúdo programático por meio de uma linguagem fácil e objetiva. Assim, é importante que o professor realize perguntas, objetivando que o aluno compreenda o fenômeno que está ocorrendo. "Entretanto, o papel do professor é de coadjuvante, pois cabe ao aluno o papel principal. O aluno é quem deverá questionar e ser questionado e estimulado a buscar novos conhecimentos" (Junior, Silva, 2013, p. 54).

Para estes autores, é interessante que o docente disponibilize um roteiro para a realização dos experimentos e realize, posteriormente, a avaliação, que pode ser em forma de relatórios ou questionários. Salientam a importância de fazer comparação entre a teoria e os resultados obtidos na atividade experimental. Além disso, comentam que, ao final das atividades experimentais o professor deveria solicitar, por extenso, que os alunos relatassem seus resultados, dúvidas e perguntas.

De acordo com Reginaldo, Scheid, Güllich (2012, p. 10) os professores deveriam perceber a importância das práticas experimentais mostrando aos alunos quais os fatores que determinam o porquê dos usos de tais práticas em sala de aula. Entretanto, segundo estes autores, às vezes o professor não possui preparo para realizar tais atividades, pois

> a experimentação é uma possibilidade de ensino que precisa ser aprendida desde a formação inicial, e também pode/deve ser trabalhada na formação continuada, pelo fato de que se o professor não sabe conduzir a aula desse modo, como fará para planejar e executar uma aula com experimentação? O problema pode estar na sua formação.

Na próxima seção descreveremos as três ações que a equipe está propondo para melhoria do ensino de Ciências Exatas, bem como para estimular o gosto e o interesse por esta área.

Metodologia

Esta pesquisa de cunho qualitativo é desenvolvida em conjunto com professores e alunos de Matemática, Química e de Física da Educação Básica. Todos participam de encontros de discussões teóricas, planejamento de atividades de experimentação e simulação, estudo de aplicativos computacionais e, paralelamente estarão desenvolvendo situações em suas escolas. Para a obtenção de informações, faremos estudos teóricos e coletaremos dados empíricos utilizando instrumentos que serão elaborados para este fim: questionários, entrevistas, filmagens, entre outros considerados relevantes pela equipe de pesquisa.

O desenvolvimento da pesquisa seguirá pressupostos da pesquisa-ação, que, segundo Thiollent (1982, p. 14),

> é um tipo de pesquisa social com base empírica que é concebida e realizada em estreita associação com uma ação ou com a resolução de um problema coletivo e no qual os pesquisadores e os participantes representativos da situação ou problema estão envolvidos de modo cooperativo ou participativo.

A pesquisa-ação é uma experimentação em situação real em que os participantes desempenham um papel ativo. O foco é partir da própria experiência dos professores e de seus alunos, de suas dificuldades e problemas, como fonte de análise e reflexão, para poder encontrar a forma mais adequada de transformá-la.

A pesquisa-ação inclui três fases, sempre com a finalidade de transformar a prática e buscar melhorá-la. Essas fases são: a reflexão sobre uma área problemática; o planejamento e a execução de ações alternativas para melhorar a situação-problema; a avaliação de resultados com vistas a empreender um segundo ciclo das três fases. A reflexão se encontra no começo do ciclo, no planejamento e na avaliação ou seguimento da ação instaurada para transformar a prática.

Numa etapa inicial aprofundaremos os estudos e as discussões teóricas para investigar diferentes possibilidades de realizar atividades de experimentação, simulação e uso de aplicativos computacionais para explorar conteúdos de Matemática, Química e de Física na Educação Básica. As atividades são exploradas, em um primeiro momento, pelos bolsistas de iniciação científica, professores orientadores e alunos bolsistas, incentivando o espírito investigativo. Nesta etapa priorizaremos a participação ativa do aluno bolsista por meio de problematizações.

Outra etapa consiste em realizar curso de formação continuada para os professores da Escola Básica, em particular, os de Física, de Química e de Matemática das escolas do Vale do Taquari e de algumas cidades vizinhas. Esta atividade, em forma de oficinas, terá a duração de até três horas e irá ocorrer em locais diferentes da região de abrangência do projeto, uma vez que é nosso intuito reunir professores por proximidade das escolas.

Esta açãotem como objetivo explorar experimentos interativos da área de Ciências Exatas de forma a possibilitar novas metodologias que poderão ser desenvolvidas na prática pedagógica dos professores participantes. Estaremos realizando um experimento de cada área e os mesmos são embasados em referenciais teóricos que objetivam a relação entre teoria e prática. Ademais, espera-se proporcionar momentos de troca entre os participantes buscando valorizar as ações que vêm sendo desenvolvidas pelos professores em sua prática pedagógica.

Nas oficinas, inicialmente são realizadas discussões sobre a importância do uso de atividades experimentais nas três disciplinas que compõem a área de Ciências Exatas e a metodologia de tais atividades. Destacamos a necessidade de o professor estar consciente do objetivo que pretende atingir, realizar questionamentos durante o desenvolvimento dos experimentos, bem como organizar atividades posteriores que proporcionam o aluno alcançar conclusões sobre o conteúdo em estudo. Acreditamos assim como Ramos, Antunes e Silva (2010, p. 3) que

> [...] o conhecimento dos procedimentos essenciais no planejamento de aulas experimentais, e também o conceito que se tem dessas aulas, poderiam ser considerados como aspectos fundamentais do ensino experimental de Ciências. O trabalho científico escolar usualmente se orienta pela prática indutiva, utilizando uma série de passos consecutivos e característicos, tais como: observação e experimentação, generalização indutiva, formulação de hipóteses, tentativa de verificação, comprovação ou recusa e obtenção de conhecimento objetivo.

Após a problematização inicial, são realizadas atividades interativas com os professores objetivando que os mesmos manipulem os materiais das práticas e se sintam motivados a usar os experimentos em sua prática pedagógica. Destacamos ainda que durante o desenvolvimento, de

cada atividade experimental, pretende-se discutir sua função pedagógica, sua viabilidade, seu nível de exploração e os conteúdos envolvidos.

A etapa seguinte consiste em realizar atividades interativas (experimentos) para alunos do Ensino Médio das escolas dos 36 municípios da Região do Vale do Taquari e 6 municípios vizinhos desta região, nos Laboratórios de Física, Química e Matemática da UNIVATES, na Semana da Ciência e Tecnologia, em outubro de 2014. A visitação será orientada por alunos e bolsistas dos cursos de Licenciatura em Ciências Exatas – habilitação integrada em Física, Química e Matemática, das Engenharias, do Mestrado Profissional em Ensino de Ciências Exatas, do Mestrado Acadêmico em Ensino, sob a supervisão da equipe de proponentes deste Projeto. Serão disponibilizados três turnos (manhã, tarde e noite), durante três dias, para as escolas realizarem a visitação, que deverá ser agendada previamente. Cabe destacar que a visitação poderá ser aberta para o público em geral, durante esta semana, caso houver disponibilidade de turnos

Nessas visitas, serão disponibilizadas atividades práticas selecionadas com a finalidade de que o aluno, ao visitar qualquer experimento possa: manipular, observar, analisar, explicar, interpretar, prever resultados e compreender o que está acontecendo. O objetivo é ter um olhar diferenciado dos participantes em relação à Ciência. Em todas as atividades os alunos têm oportunidade de manipular, e por meio da orientação de alunos dos cursos de graduação e Mestrado (Mestrado em Ensino e Mestrado em Ensino de Ciências Exatas), compreender o fenômeno abordado. De fato, o simples manuseio do experimento já se constitui em uma forma de interação do aluno com o conteúdo e, a partir disso é possível transformar a atividade experimental em atividade de ensino formal, possibilitando ao aluno a construção do próprio saber em relação ao conteúdo científico trabalhado no experimento.

Os alunos visitantes serão distribuídos em salas e em pequenos grupos, a fim de proporcionar momentos de interação com todos os experimentos. Cada grupo de alunos ficará aproximadamente oitenta minutos envolvido com as atividades. Serão disponibilizadas aproximadamente vinte atividades das três disciplinas.

Em todas etapas pretendemos contar com uma intensa cooperação entre pesquisadores, bolsistas, professores e alunos para análise e interpretação das informações advindas das ações desenvolvidas. Aliado a isso, pretendemos investigar, por meio de entrevistas, relatórios e filmagens, quais os impactos destas atividades para a formação de investigadores, bem como a motivação para a área das Ciências Exatas.

Alguns resultados

A partir das atividades em desenvolvimento apresentamos alguns resultados preliminares. O grupo de pesquisadores, mestrandos e bolsistas de iniciação científica se reúnem quinzenalmente e têm a participação de nove alunos do Ensino Médio e duas professoras da Educação Básica. Este grupo pesquisa, seleciona e desenvolve experimentos nas áreas das Ciências Exatas. A dinâmica realizada nos encontros é modificada ocasionalmente, mas normalmente, todos participantes são distribuídos em pequenos grupos, e nesses ocorre a manipulação, observação, análise, interpretação e compreensão dos experimentos selecionados. Após ter realizado os experimentos, o grupo escolhe um experimento para propor e socializar com o grande grupo no encontro seguinte. Alguns experimentos já explorados com os alunos do Ensino Médio: na área da Química (areia movediça, leite colorido, onde está o amido?, pasta de dente de elefante, vitamina C); na área da Física (cone antigravitacional, geleca, circuito elétrico,

capturando a luz – laser, submarino na garrafa); na área da Matemática (jogo da velha 3D, batalha triangular, espiral 19 e espiral 21, espessura do fio de cabelo, torre de hanói). Além disso, estamos iniciando estudos de aplicativos computacionais nas três áreas com este grupo de discentes. Estes encontros são filmados e gravados para transcrição e análise. Além disso, os bolsistas das escolas registram suas impressões em cadernos, que também estão sendo analisados. A seguir alguns registros das alunas bolsistas.

- Para o experimento de Física, encontramos muitas coisas, e optamos por um experimento de transmissão de calor. O experimento de Matemática foi um tanto quanto mais difícil de encontrar, muitas coisas repetidas ou sem muito entendimento, mas uma coisa que nos chamou a atenção foi o tangram.
- Estou gostando muito de estar participando, gosto do que estou aprendendo!
- Nos encontramos hoje para procurar os experimentos. Hoje fizemos algo diferente, pois procuramos todos os experimentos em livros. Foi um pouco mais difícil, porque a biblioteca da nossa escola não tem muitos livros de experimentos. Mas conseguimos achar (Aluna 2)
- Nesta tarde a gente procurou os experimentos de química, física e matemática. Foi bem interessante ver tantos experimentos, possíveis e vários bem práticos de fazer. Enquanto nós pesquisamos, nós conversamos sobre as pesquisas e entravamos em consenso sobre quais seriam melhor. Pesquisamos em livros e internet. Mas nesta tarde foi bem produtivo e interessante.
- Bom, hoje eu adorei testar todos os experimentos aprendi bastante sobre todos. Gostei de ver o experimento do balão com vinagre e bicarbonato, também gostei de ver aquele do balão e da garrafa quente, pois a garrafa sugou o balão para dentro de uma forma genial. E sobre o experimento que eu trouxe, da geleca magnética, foi incrível ver como o imã puxava a geleca com a limalha de ferro. Adorei muito ver e experimentar as atividades.
- Hoje eu gostei bastante, desta vez não foi cansativo, foi em legal explicar e propor o experimento de física sobre a "cachoeira de fumaça", eu primeiramente não tinha gostado, mas quando testei eu percebi o quanto é interessante. Adorei também "brincar" com a atividade de matemática, sobre a torre de Hanói, gostei bastante dessa atividade, por que faz com que a pessoa preste atenção na jogada. Sobre o quebra-cabeça de sólidos eu não conseguia monta a pirâmide, pois pra mim era só encaixar, mas não para montar a pirâmide tinha que girar as peças. Enfim hoje foi bem legal e produtivo (Aluna 3)
- Gostei muito do dia de hoje, fizemos e testamos vários experimentos legais. Escolhemos um desafio bem legal para propor aos outros. Mas confesso que isso de nos separarmos em grupos não me agradou muito porque gostaria de saber o que acontece nos outros também (Aluna 4)
- Hoje, para mim foi a melhor tarde até agora. Fizemos o encontro de uma maneira diferente que em minha opinião funcionou melhor. Primeiro, fizemos um debate sobre as pequenas pesquisas propostas para fazer em casa. Depois, fizemos dois experimentos em conjunto (com todo o grupo) e depois fizemos 3 experiências em grupos menores. Achei muito legais os experimentos, pois criei expectativas para alguns, e ainda fiquei com bastante dúvidas e curiosidades sobre elas.
- As apresentações das experiências hoje foram muito legais, pois todas eram bem instigantes. Fiquei bem ansiosa também para ver os grupos montando a ponte de palitos e realmente, foi bem engraçado. Gostei muito da experiência do canudo de papel com a fumaça. Depois, no meu grupo foram feitas 4 experiências, mas duas delas não deram muito certo (inclusive a minha), mas isso foi um erro na hora de medir os valores (Aluna 5).

Pelos depoimentos das alunas observamos que estão gostando da experiência que estamos proporcionando. Elas estão ficando curiosas e se dedicam a pesquisa de experimentos. A cada

encontro ficam mais exigentes com elas mesmas, pois os experimentos que trazem para discussão do grupo são mais complexos. O experimentar as atividades propostas está sendo muito produtivo para o grupo, pois neste momento podem ocorrer acertos e erros. Esses são discutidos e problematizados em função dos conteúdos envolvidos. E como expresso por Oliveira (2010, p. 145)

> A atividade experimental também pode – para muitos, deve – ser um espaço para construção de novos conhecimentos e, por esse motivo, nem sempre deve estar "presa" à abordagem expositiva prévia do conteúdo. No decorrer da própria aula experimental os conceitos podem ser introduzidos, como respostas aos problemas que surgem durante o experimento, aos questionamentos realizados pelos alunos, à identificação de concepções alternativas existentes em relação ao tema em foco.

Observamos também que na área da Matemática os experimentos são mais difíceis de serem encontrados do que na Física e na Química. Além disso, comentam que a procura em livros é mais difícil do que na internet. Neste sentido, podemos inferir a grande quantidade de informações disponibilizadas pela internet e que necessita de orientações do professor. Ocorreram casos em que as alunas trouxeram experimentos, escolhidos da internet, mas que apresentavam erros para realização dos experimentos, assim como conceituais. Nesse contexto, os experimentos foram refeitos com o objetivo de que os alunos percebessem os erros e compreendessem o significado correto do fenômeno abordado.

Considerações finais

Esperamos que as ações desenvolvidas e aqui descritas sejam produtivas para o envolvimento dos alunos do Ensino Médio em atividades de pesquisa, experimentação, simulação e uso de aplicativos. Acreditamos que estaremos contribuindo com a formação de investigadores e fomentando o interesse para cursos de graduação nestas áreas.

Por meio dos encontros, entre professores e alunos da Educação Básica, pesquisadores e bolsistas, acreditamos estar proporcionando momentos de aprendizagem em relação a atividades interativas que poderão ser realizadas na prática pedagógica, bem como momentos de troca de experiências. E como pontuam Junior e Silva (2013, p. 43), as "atividades experimentais são importantes, pois promovem a troca de informações entre os membros da turma (professores e alunos) e essa troca resulta na formação das estruturas necessárias para a formação do conhecimento".

Ademais, o projeto prevê a elaboração e impressão de um livro paradidático, que será composto pela seleção de alguns dos experimentos realizados quinzenalmente com o grupo de alunos. Esses experimentos são compostos por materiais de fácil aquisição, simples e não perigosos. Nele, serão descritos os objetivos, o material, o procedimento, os conteúdos, bem como explicações sobre os experimentos. Esse livro será impresso e distribuído gratuitamente para os professores de Ciências Exatas das escolas de educação básica da região. A importância deste livro se sustenta pelo elevado número de escolas da região não possuir laboratórios de ensino de ciências, ou, quando os têm, estão em estado precário. Além disso, muitas vezes os professores se sentem inseguros em relação ao uso de atividades práticas, portanto a produção do livro proporcionará um espaço para o enfoque prático e reflexivo, abordando situações aplicadas e cotidianas.

Quanto ao impacto acredita-se que os resultados da pesquisa e as atividades desenvolvidas poderão contribuir para a melhoria dos processos de ensino e de aprendizagem na área de

Ciência Exatas. O professor incluindo em sua prática pedagógica atividades experimentais proporcionará aos alunos atividades interessantes e diferenciadas, o que poderá desenvolver o gosto pelas disciplinas de Física, Química e Matemática.

Ao envolver jovens do Ensino Fundamental e do Ensino Médio em atividades de experimentação, simulação e iniciação à pesquisa acreditamos estar contribuindo com a construção de conhecimento científico e tecnológico. Nos encontros realizados observamos o envolvimento dos alunos na busca e realização de atividades experimentais que são do interesse deles. Notamos que na área da Física o número de atividades exploradas é maior do que em relação à Química e à Matemática.

Referências

Bizzo, N. (2000). *Ciências: Fácil ou difícil* (2ª ed. 10ª impressão). São Paulo: Ed. Ática.

Brasil. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. (1999). *Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) – Parte III*: Ciências da natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC.

Junior, E. M. R., & Silva, O. H. M. (2013). Atividades experimentais: uma estratégia para o ensino da física. In *Cadernos Intersaberes*, *1*(2), 38-56. jan. – jun.

Krasilghik, M. (2008). *Prática de Ensino de Biologia*. São Paulo: Edusp.

Melo, M. R. (2000). *Ensino de Ciências*: *uma participação ativa e cotidiana.* Net. Maceió. Disponível em: http://www.rosamelo.hpg.com.br.

Mota, Ronaldo. (2013). *MOOC, uma revolução em curso*. Jornal da Ciência. Disponível em http://www.jornaldaciencia.org.br/Detalhe.jsp?id=85111. Acesso em maio de 2013.

Oliveira, J. R. S. (2010). Contribuições e abordagens das atividades experimentais no ensino de ciências: reunindo elementos para a prática docente. *Acta Scientiae*, *12*(1), jan./jun.

Ramos, L. S., Antunes, F., & Silva, L. H. A. (2010). Concepções de professores de Ciências sobre o ensino de Ciências. *Revista da SBEnBio*, *3*, 1666-1674. Outubro.

Reginaldo, C. C., Scheid, N. J., & Gullich, R. I. C. (2012). O ensino de ciências e a experimentação. *Anais do IX ANPEDSUL* (Seminário de Pesquisa em Educação da Região Sul). Caxias, RS.

Thiollent, M. (1982). *Notas sobre o debate sobre a pesquisa-ação*. Serviço Social e Sociedade. São Paulo: Cortez.

Zanon, L. B., & Silva, L. H. (2000). A experimentação no ensino de Ciências. In *Ensino de Ciências*: *fundamentos e abordagens.* Campinas: Vieira Gráfica e Editora Ltda.

Insubordinação criativa de Educadoras Matemáticas evidenciadas em suas narrativas

Celi Espasandin **Lopes**
Universidade Cruzeiro do Sul
Brasil
celilopes@uol.com.br
Beatriz Silva **D'Ambrosio**
Miami University
Estados Unidos de América
dambrobs@miamioh.edu

Resumo

Neste artigo discute-se a forma como as narrativas possibilitam a revelação de ações de insubordinação criativa por educadoras matemáticas da Educação de Infância durante suas trajetórias profissionais em prol da aprendizagem e do desenvolvimento das crianças. O termo "insubordinação criativa" refere-se às quebras de regras expressas em ações de oposição e, geralmente, de desafio à autoridade estabelecida, quando esta se contrapõe ao bem do outro, mesmo que não intencional, por meio de determinações incoerentes, excludentes e/ou discriminatórias. Trata-se de uma pesquisa (auto)biográfica que toma as narrativas de si como práticas de formação e de autoformação, visando investigar a reflexividade autobiográfica e suas repercussões nos processos de constituição da subjetividade e da inserção social do sujeito. Evidencia-se que as educadoras reconhecem e expressam algumas ações de insubordinação criativa a partir de seus processos de desenvolvimento profissional, o que lhes permite produzir saberes para a superação dos conflitos que ocorrem em relação ao currículo.

Palavras chave: pesquisa narrativa, trajetória profissional, insubordinação criativa, educação matemática, profissão docente, currículo.

Introdução

Apresentamos neste artigo uma discussão sobre as narrativas de educadoras matemáticas que atuam na Educação Infantil, quando atendem crianças de 2 e meio a 5 anos e revelam ações de insubordinação criativa diante da estruturação curricular que está posta para este nível de ensino. As narrativas analisadas aqui decorrem de um projeto de pesquisa mais amplo, no qual se discutiu a trajetória profissional de nove educadoras matemáticas que atuam em diferentes níveis de ensino da Educação Básica em escolas brasileiras. Construímos os dados a partir de entrevistas concedidas entre abril e maio de 2014.

Tomamos a ideia de insubordinação como uma ação de oposição e desafio à autoridade estabelecida, quando esta se contrapõe ao bem do outro, mesmo que de forma não intencional, por meio de determinações incoerentes, excludentes e/ou discriminatórias. Essa perspectiva, aliada à criatividade, que, por vezes, se origina em um processo silencioso de modo excêntrico e

sério, com vistas à busca de uma nova dignidade (Bruner, 2008), remete-nos à Insubordinação Criativa.

O termo Insubordinação Criativa foi cunhado por Morris et al. (1981), ao publicarem um relatório sobre um estudo etnográfico realizado com 16 diretores de escolas de Chicago, quando esses profissionais assumiram ações de insubordinação criativa como um recurso diante da burocracia educacional sustentada por uma forma de comando que a torna muito próxima de uma organização com moldes militares, em que as ordens e as instruções são transmitidas, a partir de uma sede central, por meio de vários escalões de administradores. Esse estudo evidenciou que esses profissionais tomavam decisões que não atendiam às expectativas desse comando central, pois percebiam a necessidade de desobedecer ordens, a fim de diluir os efeitos desumanizantes, e assumiam atitudes mais compatíveis com os princípios de uma boa gestão. Essa desobediência ocorre não por mera vontade pessoal, mas para preservar princípios éticos, morais e de justiça social. O discernimento para saber onde e como desobedecer é fundamental para a tomada de decisão discricionária entre gestores escolares. Alguns anos mais tarde, McPherson e Crowson (1993) realizaram outro estudo, envolvendo o mesmo contexto – as escolas de Chicago –, para analisar a percepção dos diretores, participantes do estudo anterior, sobre a insubordinação criativa em suas interações com as instâncias superiores.

Já o termo "subversão responsável" emergiu em estudos da Enfermagem, conforme afirma Hutchinson (1990), quando profissionais da área buscavam ações que contrariavam regras ou ordens que não priorizavam o bem-estar do paciente.

A consciência de quando, como e por que agir contra procedimentos ou diretrizes estabelecidas permite ao profissional ser subversivamente responsável e requer assumir-se como ser inconcluso, que toma a curiosidade como alicerce da produção de conhecimento e faz de seu inacabamento um permanente movimento de busca. Uma procura que direciona ao domínio da liberdade, da avaliação, da tomada de decisão e que se constitui em ruptura. E é neste ciclo que se instaura a necessidade da ética e se impõe a responsabilidade. Ao pautar a prática profissional em ações de Insubordinação Criativa ou de Subversão Responsável, o educador assume uma "ética universal do ser humano", na qual tais conceitos se alicerçam, uma ética que é – acreditamos – inseparável da prática educativa (Freire, 2003, p. 15).

Mais recentemente, Haynes e Licata (1995) publicaram um estudo sobre as práticas dos diretores de escolas que buscavam preservar sua equipe pedagógica, seu corpo docente e discente, se contrapondo às determinações superiores. Na Educação Matemática, as contribuições provêm de Gutiérrez (2013) e D´Ambrosio e Lopes (2014), trazendo reflexões sobre as insubordinações criativas de professores que ensinam matemática.

As ações desses profissionais e também do pesquisador desta área de conhecimento decorrem do desafio que lhes é apresentado em múltiplas situações para as quais não encontram respostas preestabelecidas. Esses profissionais colocam em movimento conhecimentos construídos ao longo de suas carreiras, considerando elementos como origem social, política e cultural e também aspectos de foro pessoal e contextual (D'Ambrosio & Lopes, 2015).

Para Gutiérrez (2013), todos os professores devem, diante da atual configuração de políticas públicas opressivas aos professores, relativas ao seu trato com os alunos ou políticas públicas opressivas, relativas ao trabalho dos professores com seus alunos, desenvolver sua voz política, o que resultará em ações de insubordinação criativa. Baseadas nessa perspectiva sobre a

ação política dos professores que ensinam Matemática ao se colocar diante ao currículo padrão, é que elaboramos este artigo.

Buscamos entender a trajetória profissional de educadoras matemáticas cuja prática constam ações de insubordinação criativa que marcam a sua identidade profissional. Acreditamos que a compreensão desta disposição dos professores de serem subversivamente responsáveis poderá direcionar ações de formação de professores para empoderá-los a participarem de um movimento que lhes possibilite recuperar e recobrar a honra e a dignidade da profissão docente.

Day (2006) considera que as identidades profissionais dos professores, o que e quem são, sua autoimagem, os significados que vinculam a si mesmos e a seu trabalho; e os significados que os outros lhes atribuem estão associados à matéria que ensinam, a suas relações com os alunos, a seus papéis e às conexões entre estes e sua vida fora da escola. Neste estudo associamos esta identidade também ao nível de ensino em que esses professores atuam, considerando a faixa etária de alunos que atendem e o momento de desenvolvimento cognitivo no qual estes se encontram. Diante disso, a identidade se constitui na mente, no corpo e no coração e vai sendo construída pelo próprio professor ao longo do tempo, à medida que ele supera a reprodução e a imitação e passa à invenção e à originalidade.

Percebemos que essa concepção de identidade inclui também a voz política, descrita por Gutierrez. É nesse encontro de teorias que procuramos entender a identidade profissional das professoras entrevistadas, delineando situações de vida e profissão que as levam a tornarem-se agentes no desenvolvimento de sua autonomia (Passeggi & Cunha, 2013). Para as autoras, agência implica "autoconhecimento, autoestima e capacidade de autorregulação das próprias ações." (p. 46). Estendemos essa característica de ser agentes do seu próprio desenvolvimento profissional à noção de serem agentes também do desenvolvimento de um ambiente de ensino e aprendizagem propício para seus alunos, apoiando-se na sua autoconfiança e nos seus saberes profissionais, desenvolvidos a partir das reflexões realizadas sobre suas experiências vividas nas suas salas de aula.

O professor é o elemento-chave na criação do ambiente que se vive na sala de aula: cabe a ele a responsabilidade de propor e organizar tarefas, bem como de coordenar o desenvolvimento das atividades com os alunos. Cada professor é único, define seu caminho e decide suas ações de acordo com sua personalidade, seus afetos, crenças e expectativas. A identidade profissional do professor que ensina Matemática na Infância está associada às suas percepções sobre como o conhecimento matemático está presente na cultura infantil.

A cultura infantil escolar emerge de grupos infantis, associada ao espaço de trocas ocorridas na infância; por isso, a educação nesse período precisa ter como compromisso a garantia de que a criança tenha o seu tempo de viver a infância. Não se pode furtar da criança o direito à brincadeira, ao lúdico, às suas diversas formas de expressão, às suas múltiplas linguagens, às relações que ela estabelece na construção e na criação de brincadeiras, às formas de brincar e aos significados que ela lhes atribui (Prado, 1999). A criança é um ser social que constrói e cria cultura, o que requer o respeito ao direito dela à própria infância e à brincadeira livre. Isso exige das educadoras a percepção sobre a complexidade presente na cultura infantil e o exercício da criatividade para compor situações escolares nas quais a criança seja protagonista e tenha voz, de forma a ecoarem em nossos ouvidos suas necessidades: ela precisa ter tempo, observar, problematizar, percorrer novos caminhos e desvendar o mundo. As narrativas das

educadoras matemáticas trazidas neste texto revelam que a Educação Matemática na infância apresenta um amplo espectro de possibilidades de dialogar com o universo infantil.

Quando o professor se mobiliza em benefício da aprendizagem dos alunos e investe em melhorar as condições para que essa aprendizagem ocorra, ele cria e coloca em movimento normas e procedimentos próprios, os quais são decorrentes da identidade profissional que construiu; e, por vezes, essas atitudes se constituem em subversão responsável, resultando em ações de insubordinação criativa.

As narrativas revelam a maneira como os seres humanos experimentam o mundo e auxiliam a compreender a forma como se caracterizam os fenômenos da experiência humana. Como a educação é a construção e a reconstrução de histórias pessoais e sociais, a investigação narrativa permite uma clareza maior sobre o fenômeno que se investiga (Connelly & Clandinin, 1995). Para os autores, a narrativa pode ser usada em três sentidos: como fenômeno que se investiga – neste caso ela pode ser produto escrito ou falado; como método de investigação, quando ela é usada para construir e analisar os fenômenos narrativos; e como recurso para diferentes fins, por exemplo, para reflexão sobre as mudanças na prática de formação dos professores.

Destaca-se, nas narrativas dessas educadoras matemáticas da infância, que o ato de se desvencilhar da autoridade do currículo, bem como de algumas teorias que delimitam o que a criança é capaz de elaborar, permitiu a elas eleger o aluno como protagonista no processo de ensino e aprendizagem. Os históricos narrados por elas sobre suas carreiras mostram suas disposições investigativas, ao problematizarem suas práticas pedagógicas e buscarem alternativas teórico-metodológicas, de modo a redimensionar o *design* de suas atividades com as crianças.

Neste estudo, a narrativa assume a dimensão de fenômeno que se investiga e método de investigação, em que a construção dos dados se dá a partir de relatos (auto)biográficos, em uma situação de diálogo interativo. Buscamos decifrar, nas falas das professoras, aspectos de sua identidade profissional que as caracterizem como profissionais subversivamente responsáveis e, para isso, procuramos escutar as narrativas de forma atenta, dar ouvidos a elas e com elas dialogar (Garnica, 2006). Optamos pela pesquisa (auto)biográfica para evidenciar, nas trajetórias de formação e profissionalização de educadoras matemáticas de infância, as ações de insubordinação criativa que elas assumiram em prol da aprendizagem e do desenvolvimento de seus alunos.

Metodologia

Para o delineamento metodológico deste estudo, consideramos que o coração do inquérito é a ambiguidade, a necessidade de ser aberto a outras tradições, para interrogatório. A ciência pode fornecer explicações para certos aspectos da experiência humana, mas é incapaz de captar sua complexidade como um todo. A ameaça para a ciência, a investigação e, por fim, a educação é eleger uma e apenas uma maneira de conhecer o mundo (Hendry, 2010). Para a autora, a narrativa é considerada como uma epistemologia da dúvida, pois, por meio deste método de pesquisa, se pode responder a questões em relação a três domínios principais: a física (ciência), a experiência humana (simbólica) e o metafísico (sagrado). Esse entendimento da narrativa como três modos de investigação direciona ao engajamento desses modos na elaboração de questionamentos, pois requerem uma abordagem única para a dúvida provocada por eles. Esses modos de investigação narrativa não são distintos e incomensuráveis, eles são interconectados e interdependentes.

Nessa perspectiva, a narrativa auxilia a repensar a investigação de forma mais ética e democrática, ampliando a conversa sobre as múltiplas tradições de pesquisa. A possibilidade de desvendar aspectos da experiência humana permite ao pesquisador vivenciar um sentimento de respeito e admiração, decorrente do mistério de algum fenômeno. Para adentrar a vida docente das professoras, a fim de mapear suas constituições como profissionais subversivamente responsáveis, optamos por trabalhar com autobiografia, pois ela representa um gênero particular dentro da narrativa: ela se constitui na escrita de si, em que coincidem a identidade do autor, a do narrador e a da pessoa (Bolívar Botia, Domingo Segovia, & Fernández Cruz, 2001).

Partimos da ideia do conhecimento e da prática das educadoras expressos em histórias sociais e individuais corporificadas e, aí, tomamos a unidade narrativa para pensar de maneira mais detalhada e informativa sobre o construto geral da trajetória da sua vida profissional. Com o objetivo de desvelar, nessa trajetória, as ações de insubordinação criativa, assumimos a terceira vertente da pesquisa (auto)biográfica apontada por Souza, Passeggi e Vicentini (2013), que toma as narrativas de si como práticas de formação e de autoformação, visando investigar a reflexividade autobiográfica e suas repercussões nos processos de constituição da subjetividade e da inserção social do sujeito.

Analisamos aqui os relatos de Amélia e Heloísa, entrelaçando o estilo analítico e o descritivo; para isso, nos embrenhamos em um movimento complexo de contrastar, agregar, evidenciar, redimensionar, decifrar, estabelecer relações e teorizar. Utilizamos a dimensão *holística da forma* recomendada por Bolívar Botia *et al.* (2001): a análise deve centrar-se em características linguísticas ou estilísticas discretas, para encontrar a melhor expressão na busca da trama do relato.

Nosso olhar e nossa interpretação das narrativas estavam voltados a buscar indícios de ações de insubordinação criativa que fossem narradas pelas educadoras. Estávamos interessadas em construir uma maior compreensão do que levava essas profissionais a terem uma atitude de subversão responsável diante do currículo da educação na infância.

As entrevistas foram transcritas e analisadas por meio de uma dinâmica em que a leitura e a releitura, em um processo de interpretação, ou seja, um processo hermenêutico, nos levava à construção de novas conjecturas com relação às educadoras que se atreveram a quebrar regras para garantir o maior desenvolvimento das crianças. De acordo com Bertaux (2010) na análise de uma narrativa de vida não é preciso extrair todas as significações que ela contém pode-se considerar somente aquelas pertinentes ao objeto de estudo da pesquisa. Considerando tais pressupostos, nesta investigação elegemos o movimento analítico sobre as entrevistas narrativas centrado na extração de indícios relativos à insubordinação criativa o que possibilitou a nossa compreensão sobre a identidade profissional do professor que ousa reinventar sua prática e adequá-la às necessidades de seus alunos.

Enquanto a narrativa de cada professora era um relato de primeira ordem, nossa interpretação gerou uma construção de segunda ordem, ou seja, uma reelaboração de cada história. Inserimos ali a nossa visão de mundo, as nossas crenças, os nossos valores – enfim, enxergamos o outro por nossas próprias lentes e contamos as suas histórias por meio de nossas próprias vidas. Reescrevemos cada história dentro de nossas perspectivas. Não nos desculpamos por contar a história que pertence a outra, pois o fazemos com reverência, procurando ouvir a voz de nossas interlocutoras e interpretar suas histórias com dignidade e muito cuidado.

Seguindo a metodologia descrita por Harkness (2009), ouvimos as histórias de vida das professoras entrevistadas, acreditando e não duvidando de seus relatos. Nesse sentido, procuramos entender esses relatos, situando-os no contexto de suas vidas profissionais e pessoais. Procuramos elucidar a complexidade de cada vida e o processo de formação de cada identidade profissional compartilhada conosco.

Diante disso, assumimos uma descrição metodológica coerente com essa forma de investigar a vida profissional através de narrativas autobiográficas, o que, por princípio, também foge do usual na investigação científica, mas é para nós uma maneira consistente de vir a entender como se desenvolve a identidade profissional docente.

As educadoras matemáticas de infância: Amélia e Heloísa

Amélia e Heloísa são pseudônimos escolhidos pelas educadoras. Elas trabalharam juntas em uma escola da rede privada de ensino em uma cidade do interior do estado de São Paulo durante 25 anos.

Amélia narra que vem de uma família em que muitos são professores, mas, apesar das dúvidas que teve ao definir que curso superior iria fazer, optou por Artes Clássicas e Plásticas. Ministrou aulas de Artes em uma galeria e trabalhou em uma editora como produtora de artes. Fez um curso de Psicopedagogia e depois cursou Pedagogia. Só nos anos 1980 iniciou sua carreira como educadora de infância em um colégio da rede privada. Começou como auxiliar de sala e logo se tornou professora titular de uma turma. Hoje, na segunda década do exercício da profissão docente na infância, ela trabalha com crianças que completam 3 anos no segundo semestre. Ela continua em um movimento constante de investimento em seu desenvolvimento profissional e busca sempre novos desafios para si e para seus alunos.

Amélia defende "o direito à aprendizagem da escrita e da leitura no contexto da cultura infantil, de forma a utilizar múltiplas linguagens – música, artes plásticas, dramatização (…) – para auxiliar a criança a ler e desvendar o mundo".

Essa compreensão sobre a educação na infância leva a professora a potencializar o trabalho com projetos. Ela promove uma série de situações, nas quais a criança responde a provocações e explicita suas curiosidades. Por exemplo, quando ela propõe a eles modificar o final de uma história infantil, eles argumentam sobre diferentes perspectivas e apontam para conclusões surpreendentes. Há um processo de negociação entre as crianças, para dar um desfecho à história, que se transforma em um momento de educação das emoções, pois eles aprendem que não se pode sempre atribuir a uma situação o seu próprio desejo.

Amélia conta que trabalha a estatística e a probabilidade com crianças de 2 a 3 anos, o que configura uma ação de insubordinação criativa, já que, em geral, não há recomendação para trabalhar com essa temática com crianças da Educação Infantil. Por meio de projetos apropriados para a idade e o desenvolvimento das crianças, ela também propõe questões que as levem a construir ideias iniciais sobre o aleatório e a sorte.

Ela revela que Heloísa foi sua coordenadora por muitos anos no curso de Educação Infantil em que atuava e que isso lhes permitiu construir uma cumplicidade intelectual.

Heloísa estudou em um colégio da rede privada de uma cidade do interior de São Paulo desde seu curso primário até o curso Normal (magistério). Graduou-se em Psicologia e optou por realizar o estágio na área de Psicologia Escolar no mesmo colégio onde havia estudado durante sua infância e juventude. A partir dessa experiência, foi contratada como professora substituta no

curso de Educação Infantil dessa escola e, em seguida, tornou-se psicóloga escolar dessa instituição, exercendo a função por três anos. Precisou parar suas atividades profissionais em decorrência da maternidade e ficou algum tempo afastada da escola. Após esse período, assumiu o cargo de professora da Educação Infantil e, depois, de coordenadora desse mesmo curso nos trinta anos que se seguiram, em uma mesma escola privada.

Heloísa, que exerceu o cargo de coordenadora durante seu percurso profissional, descreve um relacionamento de cumplicidade com as professoras com as quais trabalhava. Uma delas era Amélia. Ela relata momentos em que notava que algumas professoras tinham lacunas na compreensão de alguns tópicos da Matemática, mas que elas "não sentiam medo de dizer que não sabiam, pois sabiam que eu lhes ajudaria. Eu me via na necessidade de estar junto das professoras (…) Me via na função de assessorar, de suprir, de ajudar e de florescer tudo". Heloísa demonstrava solidariedade com as colegas, ao expressar suas próprias dificuldades com as ideias de estatística e probabilidade.

Para Amélia o desafio de explorar as ideias estatísticas e probabilísticas com as crianças foi sendo inserido gradativamente a partir de seu estudo teórico sobre o assunto, que era sempre seguido de um debate com Heloísa e outras colegas. Ela exemplifica como abordava isso com as crianças.

Para escolher o ajudante da professora em cada dia de aula, Amélia criou a sacolinha da "Dona Sorte", composta com vários cartões, cada um com o nome de uma criança da turma. Ela conta que diz para as crianças que só a Dona Sorte sabe qual nome irá sair, e aos poucos as crianças vão percebendo que o nome a ser retirado não depende de nada, nem de ninguém, e todos os nomes serão retirados. Só quem sabe é Dona Sorte. Amélia considera que esse tipo de trabalho ensina a criança a lidar com o aleatório e a descobrir que todos têm a sua chance. Com situações do cotidiano da criança e da rotina escolar, a professora possibilita à criança aproximar-se do universo da chance de um evento ocorrer.

> Procuro sempre fazer relação com o que está acontecendo na sala de aula com a vida das crianças. Em algumas dinâmicas em sala de aula trabalho a questão dos pensamentos com eles, usando a sacolinha dos nomes (os alunos tiram da sacola um nome, e antes é feito os levantamentos de hipóteses, focando o aleatório, a probabilidade, possibilidade e a sorte). (Amélia, entrevista narrativa).

Dessa forma, Amélia educa a criança probabilisticamente diante do movimento da vida. Ela lida com o currículo de acordo com o momento de desenvolvimento da criança e aí pensa e elabora as atividades a serem trabalhadas com os alunos. Em sua narrativa ela também conta que, ao trabalhar a clássica história infantil "A cigarra e a formiga", ela também provoca a reflexão das crianças sobre as possibilidades de fim que a história pode ter, e nesse movimento desenvolve-se uma análise sobre possibilidades, que é fundamental ao processo de elaboração do raciocínio probabilístico. Nesse trabalho, as crianças desenvolvem uma argumentação que vai além da defesa de sua própria vontade, mas é delimitada pelos fatos que constituem a história.

Heloísa também conta que precisou estudar muito para ajudar as professoras a elaborarem projetos que envolvessem estatística e probabilidade. Era uma parceria constante com a equipe de professoras, pois "não podia buscar sozinha, pois não era eu quem estava na sala de aula. Precisava formar o professor em parceria com ele".

Nesse movimento de construção de suas identidades profissionais como educadoras de infância, Amélia e Heloísa assumem ações de insubordinação criativa diante do currículo e

também da estrutura hierárquica que deveria haver entre professor e coordenador. Assumem-se profissionais subversivamente responsáveis, para defender o direito da criança de ser protagonista de sua história de aprendizagens e construtora de sua própria cultura.

Dialogando com as narrativas

O entrelace nas narrativas de Amélia e Heloísa, revelado por suas narrativas, mostra que a concepção comum sobre uma Educação na infância pautada na problematização e no desvelar do conhecimento matemático presente no universo infantil propiciou a elaboração conjunta de atividades que expressam rupturas com os delineamentos do currículo.

> Atividade pela atividade não tem significado. As crianças da Educação Infantil precisam ser instigadas. É preciso chamar a atenção para que se desenvolva atividades desafiadoras. Não gosto de respostas únicas das crianças, gosto de me surpreender com a diversidade de respostas. As atividades não podem ser fechadas, é preciso propor situações para que elas raciocinem e nos surpreendam (...) porque a sutileza dos raciocínios das crianças nos desestabiliza. (Heloísa, entrevista narrativa).

Heloísa relata que, como não havia muito material que desse respaldo teórico ao trabalho com probabilidade e estatística na Educação Infantil, elas o construíam juntas. Prestavam muita atenção ao que as crianças expressavam, era fundamental dar voz aos alunos e ouvir o que eles compreendiam. Ela conta que elas estiveram

> atentas às respostas das crianças. Era todo um raciocínio voltado para o que as crianças diziam. Os registros ajudavam muito, as filmagens e as escritas contribuíram nas reelaborações do nosso trabalho. (Heloísa, entrevista narrativa).

Ambas trabalharam com jogos, histórias infantis e explorações do cotidiano que envolviam possibilidades, visando que as crianças desenvolvessem habilidades referentes à capacidade de fazer julgamentos ou tomar decisões em ambientes caracterizados por incerteza e aprendessem a antecipar e a prever eventos ou novos comportamentos, com base em fatos conhecidos ou em comportamentos (Lopes, 2012).

As narrativas autobiográficas de Amélia e Heloísa refletem que esse trabalho colaborativo na construção de conhecimentos profissionais foi determinante para a construção de suas identidades profissionais, que eram remodeladas nesse processo. Revelam as contribuições que essa parceria trouxe ao desenvolvimento profissional de ambas, pois provocavam-se mutuamente a assumir atos de insubordinação criativa. Havia um encorajamento mútuo para romper com o currículo preestabelecido em prol do desenvolvimento e da aprendizagem das crianças.

Elas elegem o trabalho com projetos como potencializador para a construção de uma cultura infantil, porque ele permite que as crianças estabeleçam relações com o mundo em que vivem. Essa liberdade provoca os alunos aos múltiplos olhares sobre diferentes objetos e fatos que se fazem presentes em seu dia a dia. Amélia considera que trabalhar com projetos permite explorar uma diversidade de temáticas com as crianças e exemplifica com trabalho com formas geométricas.

> No trabalho com as formas geométricas neste ano tive oportunidade de trabalhar uma de cada vez (...)muito no concreto. É interessante olhar cada turma e ver o que é possível fazer e o que não é. Este trabalho com as formas geométricas está dentro de um projeto. Fui fazendo relações com as figuras e a realidade. Busquei fazer relações com as formas e a construção de uma casa, por exemplo. É interessante fazer relações entre o que é visto no contexto da escola e fora dela, pois traz sentido para a criança. (Amélia, entrevista narrativa).

A ruptura com o que está determinado no currículo para infância é necessária porque ele, por vezes, não considera que a criança seja capaz de fazer elaborações constituidoras de sua cultura e predefine o que a criança é capaz ou não de aprender. Heloísa considera a importância de levar em conta o universo real em que a criança e o professor vivem.

> A teoria às vezes vem para o sujeito padrão, e sabemos que não é assim. As características em sala de aula são diferentes, é preciso desenvolver um currículo para o real do professor e do aluno e cada realidade. São propostas absurdas que às vezes penso que os alunos irão rir, ou chamar o professor de louco. É preciso que se faça as adequações. (Heloísa, entrevista narrativa).

As narrativas de Amélia e Heloísa apresentam evidências de atos de insubordinação criativa nas ações da coordenadora e da professora, em relação ao currículo e ao processo de aprendizagem para e na infância. Eles emergem de uma prática docente e de uma perspectiva de formação contínua de professores que considera e reconhece o professor como produtor de conhecimento, permitindo-lhe uma subversão criativa em seus fazeres educacionais.

Heloísa considerava que o seu papel de coordenadora não era supervisionar o professor, mas trabalhar colaborativamente com ele.

> A formação na minha cabeça é ouvir o que o professor tem a dizer e dar sugestões para ajudá-lo. Busquei sempre questioná-los a respeito da sua prática e dos seus objetivos, com isso percebia o que faltava para esses professores. Tive professor que não sabia o que era ordenação, classificação (...) então eu sentava para ajudar e trazia também uma fundamentação teórica para a prática. Com a teoria eu busquei junto com o professor um apoio para sua própria pratica. Elas viam uma segurança no meu trabalho, em que não tinham medo de dizer que não sabiam, pois sabiam que eu lhes ajudaria. Eu me via na necessidade de estar junto das professoras. (Heloísa, entrevista narrativa).

Outro aspecto revelado pelas narrativas, que se constitui como potencializador para que o professor seja subversivamente responsável, se refere ao estudo teórico de que ele necessita, pois as transformações em suas práticas só se efetivam quando ele se sente seguro para efetivá-las, para o fazer diferente a partir do "ouvido" que dá aos alunos.

Considerações finais

As narrativas se constituem em uma forma ímpar de desvelar as trajetórias profissionais de professores a partir das suas próprias reflexões durante os momentos em que se transportam aos acontecimentos ocorridos em suas ações docentes. Ao narrar, as educadoras buscam em suas memórias momentos singulares de suas vidas, de forma a evidenciar o que caracteriza suas identidades profissionais. Trata-se de um método de investigação que se potencializa quando as pessoas, de maneira geral e histórica, apreciam contar suas histórias, viver vidas relatadas de forma individual e social.

Neste estudo, destacam-se a experiência docente e o trabalho colaborativo, revelando que o tempo de magistério atribui ao professor competências que não podem ser adquiridas durante a formação inicial e enfatizando também a importância de discutir com os pares as elaborações que se fazem de conhecimento profissional. A vivência profissional é que permite ao professor superar a reprodução e a imitação, passando à originalidade e à invenção e, com isso, lapidando sua própria identidade.

Evidenciamos, nas narrativas de Amélia e Heloísa, a clareza que elas têm sobre suas identidades profissionais, ao revelar seus atos de insubordinação criativa em relação ao currículo, ao educar na infância e ao papel do coordenador como formador de professores.

A Educação Matemática proporcionada às crianças pelo trabalho de Amélia envolve a aleatoriedade a partir de contextos infantis. As problematizações realizadas pela professora possibilitam às crianças o desenvolvimento de capacidades de relacionar dados quantitativos com situações concretas, admitindo a presença da variabilidade e da incerteza.

Para as educadoras tornarem-se profissionais subversivamente responsáveis foi necessário que assumissem ações complexas e não lineares, determinando um fazer pedagógico na educação de infância que não pode ser analisado somente do ponto de vista instrumental, sem percepção do envolvimento da professora e das consequências para sua subjetividade.

O processo de análise dessas narrativas permitiu-nos perceber que a autobiografia se constitui conforme os indivíduos vão construindo um relato de suas vidas, em que consideram o que aconteceu, segundo sua interpretação. É o ato de serem autores de suas vidas.

O reconhecimento das ações insubordinadas e a autocompreensão do que somos, das aprendizagens que construímos ao longo da vida, das nossas experiências e de um processo de conhecimento de si e dos significados que atribuímos aos diferentes fenômenos que mobilizam e tecem a nossa história individual/coletiva nos remetem a nossa identidade profissional como produtores de conhecimento.

Talvez possamos apontar, como limitação para o estudo, o fato de não termos realizado entrevistas com mais educadoras matemáticas que atuam na Educação de Infância, o que remete às perspectivas de futuras pesquisas que possam explorar as insubordinações criativas de outros profissionais que trabalham com crianças.

Referências

Bertaux, D. (2010). *Narrativas de vida: a pesquisa e seus métodos.* São Paulo: Paulus.

Bolivar Botia, A., Domingo Segovia, J., & Fernández Cruz, M. (2001). *La investigación biográfico-narrativa em educación.* Madrid: La Muralla.

Bruner, J. (2008). *Sobre o conhecimento: ensaios da mão esquerda.* São Paulo: Phorte Editora.

Connelly, F. M., & Clandinin, D. J. (1995). Relatos de experiencia e investigación narrativa. In J. Larrosa (Ed.), *Déjame que te cuente: ensayos sobre narrativa y educación* (pp. 11-59). Barcelona: Editorial Laertes.

D'Ambrosio, B. S., & Lopes, C. E. (2015). Insubordinação Criativa: um convite à reinvenção do educador matemático. *Bolema − Boletim de Educação Matemática , 29*(51), No prelo.

D'Ambrosio, B. S., & Lopes, C. E. (2014). *Trajetórias de educadoras matemáticas.* Campinas, SP: Mercado de Letras.

Day, C. (2006). *Pasión por enseñar: la identidad personal y profesional del docente y sus valores.* Madrid: Narcea.

Freire, P. (2003). *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa* (27ª ed.). São Paulo: Paz e Terra.

Garnica, A. V. (2006). História oral e educação matemática -- um inventário. *Revista Pesquisa Qualitativa, 2*(1), 137-160.

Gutierrez, R. (2013). Mathematics teachers using creative insubordination to advocate for student understanding and robust mathematical identities. In M. Martinez, & A. Castro Superfine (Eds.), *35th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 1248-1251). Chicago: University of Illinois at Chicago.

Harkness, S. S. (2009). Social constructivism and the Believing Game: A mathematics teacher's practice and its implications. *Educational Studies in Mathematics, 70*(3), 243-258.

Haynes, E., & Licata, J. W. (1995). Creative insubordination of school principals and the legitimacy of the justifiable. *Journal of Educational Administration, 33*(4), 21-35.

Hendry, P. M. (2010). Narrative as inquiry. *The Journal of Educational Research, 103*, 21-35.

Hutchinson, S. A. (1990). Responsible subversion: A study of rule-bending among nurses. *Scholarly Inquiry for Nursing Practice An International Journal, 4*(1), 3-17.

Lopes, C. E. (2012). A educação estocástica na infância. *Revista Eletrônica de Educação, 6*(1), 160-174. Recuperado em 12 setembro, 2014, de http://www.reveduc.ufscar.br.

McPherson, R. B., & Crowson, R. L. (1993). *The principal as mini-superintendent under Chicago School Reform* (Relatório de projetos de pesquisa). http://eric.ed.gov/?id=ED373432.

Morris, V. C., Crowson, R.L., Hurwitz, E., & Porter-Gehrie, C.(1981). *The urban principal. Discretionary decision-making in a large educational organization* (Relatório de projetos de pesquisa). http://eric.ed.gov/?id=ED207178.

Passeggi, M. C., & Cunha, L. M. (2013). Narrativas autobiográficas: a imersão no processo de autoria. In P. P. Vicentini, E. C. Souza, & M. d. Passeggi (Eds.), *Pesquisa (auto)biográfica: questões de ensino e formação* (pp. 43-57). Curitiba: CRV.

Prado, P. D. (1999). As crianças pequenininhas produzem cultura? Considerações sobre educação e cultura infantil em creche. *Pro-Posições, 10*(1), 28.

Souza, E. C., Passeggi, M. C., & Vicentini, P. P. (2013). (Auto)Biográfico, um método possível de pesquisa? In P. P. Vicentini, E. C. Souza, & M. C. Passeggi (Eds.), *Pesquisa (auto)biográfica: questões de ensino e formação* (pp. 7-14). Curitiba: CRV.

Interação social em aulas de Matemática

Neiva Ignês **Grando**
Universidade de Passo Fundo
Brasil
neiva@upf.br

Resumo

As discussões em torno da Educação Matemática têm desempenhado um importante papel na mudança de concepções sobre a prática pedagógica de professores, de diferentes níveis de ensino. No entanto, algumas preocupações relacionadas ao processo ensino-aprendizagem ainda necessitam de espaços de discussão e estudo, a exemplo do papel das interações sociais. Nesse sentido, o objetivo desse trabalho é analisar situações didáticas, apresentadas na forma de episódios, que priorizam a interação social, na sala de aula da educação básica. Os episódios foram analisados tendo como base principal pressupostos da teoria histórico-cultural. A análise revelou que tanto as interações entre os próprios estudantes como entre os estudantes e a professora provocaram avanços no processo de atribuição de sentido aos conceitos matemáticos veiculados em cada situação – de jogo ou de resolução de problemas.

Palavras chave: educação matemática, situações didáticas, interação social, atribuição de sentido.

Introdução

A sala de aula é um espaço ímpar para o diálogo e quando potencializado de forma adequada, os resultados podem trazer inúmeros benefícios aos participantes, tanto no que se refere ao ensino e a aprendizagem como ao desenvolvimento do pensamento dos participantes. Nesse sentido, a escola pode criar um ambiente propício às diferentes modalidades de interação social, o que inclui a sala de aula.

Com o foco nas interações sociais em sala de aula, nesse texto apresentamos situações de ensino-aprendizagem com jogos e resolução de problemas. A análise de cada episódio seguiu a abordagem microgenética, com base na teoria histórico-cultural. De acordo com Góes, essa análise é micro "por ser orientada para minúcias indiciais – daí resulta a necessidade de recortes num tempo que tende a ser restrito. É genética no sentido de ser histórica, por focalizar o movimento durante processos [...]. É genética, como sociogenética, por buscar relacionar os eventos singulares com outros planos da cultura, das práticas sociais, dos discursos circulantes, das esferas institucionais" (2000, p. 15).

A seguir apresentam-se alguns fundamentos teóricos, a análise dos episódios, que compõem sequências didáticas com jogos e resolução de problemas, e considerações finais.

Fundamentos teóricos

Para Vygotsky,

> os anos escolares são, no todo, o período ótimo para o aprendizado de operações que exigem consciência e controle deliberado; o aprendizado dessas operações favorece enormemente o

> desenvolvimento das funções psicológicas superiores enquanto ainda estão em fase de amadurecimento (1998, p. 131).

Também, destaca-se a concepção do autor, de que

> o aprendizado humano pressupõe uma natureza social específica e um processo através do qual as crianças penetram na vida intelectual daquelas que as cercam (Vigotski, 1998, p. 115).

É importante enfatizar que as influências para o aprendizado e o desenvolvimento de cada estudante podem vir tanto do professor como dos colegas, basta que, para isso, o processo interativo aconteça de forma desafiadora.

O processo de formação de conceitos científicos escolares demanda uma série de situações e representações, o que depende grandemente do planejamento do professor. Nessa atividade intelectual o estudante vai ampliando seu nível de consciência, à medida que se depara com novas e instigadoras situações-problema. Nesse caso, a linguagem é fundamental, pois cada palavra representa um conceito, sendo que a fala adquire a função planejadora para o estabelecimento e a execução dos planos de ação (Vigotski, 1998).

Na concepção de Vygotski, o conceito se forma durante uma operação intelectual, sendo que nesse processo

> participam todas as funções intelectuais em uma combinação original, cujo fator central é o uso funcional da palavra como meio de orientação deliberada da atenção, da abstração, da seleção de atributos e de sua síntese e simbolização com ajuda do signo (1993, p. 176).

Leontiev dá destaque a um tipo de atividade na vida das pessoas, a qual denomina atividade dominante, como sendo

> aquela cujo desenvolvimento condiciona as principais mudanças nos processos psíquicos da criança e as particularid dado estádio do seu desenvolvimento (1978, p. 293).

Além disso, o autor pontua que

> o homem pode fazer de um conceito o *seu* conceito, isto é, apropriar-se da sua significação (p. 168).

Desta forma, é de esperar que a atividade de estudo se constitua como atividade dominante por provocar avanços, tanto na aprendizagem como no desenvolvimento do pensamento.

Vale destacar, também, a concepção de Davídov e Márkova, para os quais,

> la actividad de estudio es, ante todo, aquella actividad, cuyo producto son las transformaciones en el alumno. Se trata de una actividad de autotransformación; en esto consiste su principal particularidad (1987, p. 324).

A ideia de Lave, sobre práticas de aprendizagem, na teoria da atividade situada, de que

> "pessoas que estão ajudando a constituir 'uma situação' juntas, sabem coisas diferentes, falam com interesses diferentes e experiências de diferentes posições sociais" tem relação com a escola, na medida em que os estudantes também têm experiências diferentes, mesmo estando na mesma sala de aula (2013, p. 242).

Significa dizer que, tanto as vivências fora da escola, como as experiências na escola diversificam os conhecimentos de cada sujeito, constituindo-os com diferentes zonas de

desenvolvimento proximal (Vigotski, 1998), o que potencializa grandemente as trocas ocorridas através da interação social.

Em suas pesquisas, Grando e Marasini (2014) defendem a ideia de o professor desenvolver sua atividade de ensino com base em princípios pedagógicos, destacando-se a necessidade da interação social para a aprendizagem da matemática e o desenvolvimento do pensamento.

Sobre os processos interativos em sala de aula

A seguir apresentam-se quatro episódios[1] que fazem parte de sequências didáticas desenvolvidas em sala de aula de duas escolas brasileiras de educação básica.

Episódio 1 – Jogo Veritek

O episódio que segue aconteceu com uma turma de quarta série do ensino fundamental composta de vinte estudantes, de uma escola da rede particular de ensino (Raupp & Grando, 2010a). A professora havia revisado alguns conceitos estudados na série anterior, como dobro, triplo, metade, dezena e dúzia. Como alguns estudantes ainda não haviam se apropriado dos significados desses conceitos, a professora procurou uma atividade que propusesse a resolução de problemas em que a aplicação dos conceitos fosse necessária. A ideia era trabalhar em grupos incentivando a leitura, a interpretação e a discussão das soluções. A atividade escolhida foi a do jogo Veritek[2], que proporciona aos jogadores momentos de trocas de informações e estratégias que auxiliem nas soluções.

Figura 1. Fotografia do jogo Veritek.

A análise da primeira sequência deste episódio evidencia o momento em que a interação entre pares é benéfica. Um dos problemas em questão dizia o seguinte: "Se minha irmã mais velha tem o dobro da minha idade, e eu tenho 13 anos, então ela tem ... anos". Após a leitura do problema, os estudantes estabeleceram uma rápida discussão sobre como resolver a questão, quando alguns sentiram necessidade de registrar o cálculo. José e Roberto faziam parte do

[1] Um episódio de ensino é um "conjunto de atividades e discussões que tem por objeto a aprendizagem de um determinado conceito ou aspecto importante do conceito por parte significativa dos alunos" (Carvalho apud Mortimer, 2000, p. 265). Cada episódio pode ser desdobrado em episódios menores, denominados sequências, separadas por turnos, entendidos como falas dos sujeitos da pesquisa (Hilgert, 2006).

[2] O jogo Veritek é um jogo de autocorreção composto por duas partes: uma caixa em MDF com pequenos quadrados e uma folha de questões. Na caixa há doze pequenas peças quadradas numeradas de 1 a 12 na frente e, no verso, partes coloridas. Conforme se resolvem as questões, deve-se colocar a peça correspondente de cada problema sobre a resposta encontrada. Observa-se a sequência numérica formada e organizam-se as peças no fundo externo da caixinha, cobrindo com a tampa; após, vira-se o conjunto de cabeça para baixo, retira-se a tampa e verifica-se o desenho formado. Se formar a figura indicada, estará tudo certo.

mesmo grupo. José disse que não havia resposta para o problema, pois não tinha encontrado "seis e meio". Ao perceber o início da conversa, a professora aproximou-se do grupo para acompanhar a discussão. Como não havia tempo marcado, nem competição direta com outros grupos, era maior a possibilidade de os estudantes utilizarem a palavra para a argumentação de respostas, conforme mostra a sequência 1.

Sequência 1

1. Roberto: Não é de dividir, é de vezes aqui ó: se a minha irmã tem o dobro, o dobro é de vezes, então!
2. José: Ah é, tá! (apagando em seu caderno os registros do algoritmo da divisão)
3. Roberto: Faz de vezes, é treze vezes dois.
4. José: É. Treze vezes dois dá 26.

O diálogo entre os dois meninos mostra a falta de apropriação por parte de José do significado do conceito de dobro e a desatenção para com o enunciado, pois, se dizia "irmã mais velha", como poderia ser uma idade menor que treze anos? Diante da situação, Roberto percebeu o erro do colega e auxiliou-o no processo de correção usando um vocabulário mais conhecido para multiplicação, "vezes", o que levou o estudante a refazer a questão.

Na realidade, o que Roberto fez foi aproximar o conceito científico "dobro", do conceito espontâneo que José possuía: "vezes". Isso só foi possível porque José já operava com este último conceito com certa facilidade, mas ainda não havia se apropriado do significado da palavra "dobro". De acordo com Vygotski,

> é preciso que o desenvolvimento de um conceito espontâneo tenha alcançado um certo nível para que a criança possa absorver um conceito científico correlato (2005, p. 135).

A interação ocorrida entre os meninos permitiu resgatar um conceito estudado por ambos, mas que para José ainda não havia se constituído, e a conversa entre os estudantes foi importante para a formação do conceito em questão, pois segundo Vygotski, pelo "uso do signo, ou palavra, como o meio pelo qual conduzimos as nossas operações mentais, controlamos o seu curso e as canalizamos em direção à solução do problema que enfrentamos" (2005, p. 73). Na sequência seguinte revela-se o resultado dessa interação:

Sequência 2

1. Roberto: Olha esse outro aqui ó: Se João fez 54 pontos em um jogo e seu amigo fez a metade, então o amigo fez ..... pontos.
2. José: Tá, então peraí ... ah! Esse é que é de dividir, né?
3. Roberto: É, e é de dividir por dois, que nem assim, o dobro é de vezes dois, a metade é de dividir por dois!
4. José: Então esse daqui vai dá ... dividindo por dois ... vinte e sete! Vinte e sete tem, vinte e sete tem!.

Roberto demonstrou confiança ao responder para o colega, pois mostrava estar estabelecendo relações sobre o que acontecera na sequência anterior, iniciando um processo de internalização dos conceitos apresentados. Os dois meninos estudavam juntos há três anos e tinham tido as mesmas aulas que trataram dos conceitos em questão, porém observou-se que estavam em níveis de desenvolvimento diferentes. As interações durante o jogo provocaram uma

mudança na apropriação de significados e manifestaram a constituição de uma nova zona de desenvolvimento proximal em José. Segundo Vigotski, "o aprendizado desperta vários processos internos de desenvolvimento, que são capazes de operar somente quando a criança interage com pessoas em seu ambiente e quando em cooperação com seus companheiros". Ainda, que "Uma vez internalizados esses processos tornam-se parte das aquisições do desenvolvimento independente da criança" (2007, p. 103).

Esta atividade teve um efeito positivo por possibilitar aos estudantes trocarem informações sobre a resolução dos problemas propostos no jogo. A cooperação se fez presente durante praticamente todo o tempo, pois para formar a figura indicada todos os problemas deveriam estar corretos. Dessa forma, o jogo atendeu à expectativa da professora no que diz respeito às interações e ao trabalho em equipe, pois houve a preocupação dos grupos em analisar os processos desenvolvidos para justificar os resultados, como se observou nas duas sequências, fazendo questionamentos no caso de divergência de ideias.

Episódio 2 – Resolução de problemas - Procurando idades

Com base no estudo de Hübner (2010), que analisou diferentes situações de sala de aula com resolução de problemas, numa turma de 6ª série do ensino fundamental de uma escola da rede particular de ensino de Erechim/RS, esse episódio traz o seguinte exemplo: *"A idade do pai é o triplo da idade de seu filho. Qual é a idade de cada um, sabendo que juntos eles têm 60 anos?"*.

Sequência 1

3. "Gabriel: (lê novamente devagar, raciocinando junto) Oh, é bem fácil, é trinta

(leem parte do problema), mas olha só 20 + 20 + 20, vai dá 60.

4. João: Calma, concentração, então o pai tem 40? 20 vezes 3, da quanto? 60.
5. Lucas: Lê de novo.
6. Gabriel: Ah, faz uma equação.
7. Estudantes: Verdade! Faz, faz uma equação.
8. Lucas: Oh, o triplo da idade de seu filho é 3 x.
9. Estudantes: É! 20. Então é a idade do pai, é 20!
10. Lucas: Não, ... não, é do filho, que é 15.
11. Gabriel: Não, o filho tem 15, e ... não, pera aí, ..., não é o filho, não é, vocês boiam, boiam (risos)

[...]

12. Lucas: Olha, cara! Vamo lá, vamo. A idade do pai é igual ao triplo, então é três x ... mais x.
13. Estudantes: Ah! É, ... tá certo. O Lucas tá mais esperto.
14. Lucas: Então é 60 dividido por 4, igual a ?
15. Gabriel: Ah! Eu falei que era 15.
16. João: Não, eu falei que era 15! Aaaaaaaaaa....
17. Gabriel: O filho tem 15 e o pai 25.
18. Lucas: Não, o pai é 45.
19. Gabriel: Ah é! É! (...)

20. Estudantes: (Os estudantes desenvolveram no caderno a equação e conversando apresentaram a resposta). Então, o filho tem 15 anos e o pai 45 anos.

$$3x + x = 60$$

$$4x = 60$$

$$x = 60 \div 4$$

$$x = 15$$

Então: o filho $x = 15$ e o pai, o triplo, $3x = 3 \times 15 = 45$

Resposta: O filho tem 15 anos e o pai tem 45 anos" (Hübner, 2010, p. 76).

O diálogo produzido nessa interação entre os próprios estudantes é revelador, na medida em que, ao iniciar um plano de ação envolvendo aritmética, e não chegando a um consenso sobre a estratégia de solução, tentam equacionar o problema, chegando a uma solução correta, ou seja, durante o processo, negociam os significados e conseguem resolver o problema.

Episódio 3 – Jogo Quebra-cabeça

O episódio a ser analisado aconteceu com uma turma de quinta série do ensino fundamental, composta por trinta estudantes (Raupp & Grando, 2010b). Na ocasião já haviam sido desenvolvidos os conteúdos sobre radiciação e potenciação e desejava-se dar continuidade ao processo de aprendizagem. Para tanto, pensou-se em utilizar um jogo em que fosse necessário resolver expressões que apresentassem potências e raízes. Como a ideia era a de trabalhar em grupos, confeccionaram-se cinco jogos em madeira, cada um com uma cor diferente, e escreveram-se as expressões em uma das faces e, na outra face indicaram-se multiplicações.

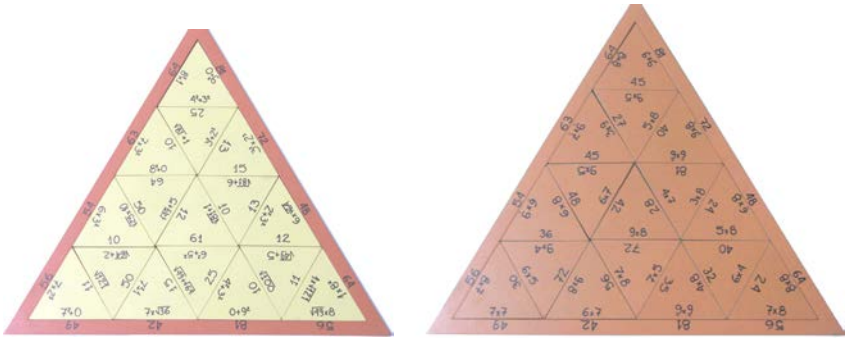


Figura 2. Quebra-cabeça.

A participação da professora neste episódio teve como foco aproximar-se do modo como os estudantes haviam procedido para chegar ao resultado. O material do jogo foi elaborado com a intenção de provocar possíveis conflitos ao não encontrar uma resposta em razão de um erro previsível, por exemplo: $2^3 + 4$. Algum estudante poderia encontrar dez como resposta, porém houve o cuidado de não colocar respostas que atendessem a esse tipo de erro.

Nesta aula foi possível perceber esse tipo de erro quando um estudante reclamou por não encontrar a peça cujo resultado fosse o número 16. A expressão que deveria resolver era: $8^2 + 0$. Ao se dar conta do que havia acontecido, ele começou a apagar seus registros, conforme se observa na sequência.

Sequência 1

1. Professora: Por que é que tu estás apagando, Augusto?

2. Augusto: Porque eu tinha botado errado.
3. Professora: O que é tu colocaste, que não estava certo?
4. Augusto: Eu coloquei oito ao cubo que era dezesseis.
5. Professora: Hã?
6. Augusto: Eu botei oito ao cubo dezesseis.
7. Professora: Cubo? Onde que tem cubo?
8. Augusto: Não, é ao quadrado. Oito ao quadrado.
9. Professora: E por que tu colocaste que oito ao quadrado é dezesseis?
10. Augusto: Porque eu me enganei.
11. Professora: E quanto é então?
12. Augusto: Eu vou fazer a conta: oito vezes oito ... oito vezes sete é cinquenta e seis.
13. Professora: Isso, e aí?
14. Augusto: Mais oito: cinquenta e seis, cinquenta e sete, cinquenta e oito, cinquenta e nove ... dá ... sessenta e quatro!

A intervenção da professora fez o estudante analisar o processo utilizado para encontrar a resposta, demonstrando que ele utilizara a multiplicação da base pelo expoente. O conflito estabelecido por não encontrar a resposta levou o estudante a retomar o significado da operação em questão. Dessa forma, o jogo, em razão da ausência da peça supostamente certa, proporcionou-lhe rever o significado de potenciação. É compreensível e esperado que a formação de conceitos não ocorra numa primeira abordagem; por isso, é importante que o estudante se depare com diferentes situações envolvendo um mesmo conceito. A esse respeito Vigotski esclarece que "o desenvolvimento; [...] se dá não em círculo, mas em espiral, passando por um mesmo ponto a cada nova revolução, enquanto avança para um nível superior" (2007, p. 56). Nas soluções seguintes, quando alguém do seu grupo não encontrava a resposta, Augusto imediatamente conferia se não haviam feito o mesmo que ele, ou seja, multiplicar base por expoente.

Ao observar os demais estudantes, verificou-se segurança na maioria das respostas; a maior dificuldade foi mesmo no momento da montagem do quebra-cabeça, já que havia peças com respostas iguais num dos lados de cada triângulo. Mesmo com esta dificuldade maior, todos os grupos conseguiram montar a figura no tempo certo.

Ao final da atividade, foi proposto como tarefa de casa montar um quebra-cabeça semelhante, porém menor, colando as peças em cartolina. No outro dia, em trios, eles elaboraram questões usando palavras que deveriam ser substituídas por expressões numéricas, por exemplo: "Qual a diferença entre o cubo de cinco e o quadrado de sete?". Durante esta atividade a necessidade de usar os termos corretamente levou, mais uma vez, a que se retomassem os conceitos de forma coletiva, o que rendeu bons resultados.

Nesse episódio se destaca a intervenção da professora ao questionar a ação dos estudantes. A intervenção foi propositadamente no sentido de fazer o estudante verbalizar seu pensamento para retomar o significado de potência, e então, associar as palavras "cubo" e "quadrado" àquela operação. De acordo com Vygotski, "o pensamento tem que passar primeiro pelos significados e depois pelas palavras" (2005, p. 186). O que aconteceu com Augusto foi, provavelmente, uma

dificuldade nessa organização do significado da nova operação e a relação com as novas palavras. Mesmo assim, o estudante demonstrou que estava numa fase de apropriação quando ele mesmo se corrigiu, no turno 8, com relação ao uso equivocado da palavra "cubo" e também, no turno 12, quando percebeu o processo adequado para oito ao elevado ao quadrado. Fazer o questionamento e, sobretudo, levar o próprio estudante a explicar o que estava pensando foi fundamental para que Augusto continuasse no processo de formação de conceito de potência e, na situação seguinte, conseguisse resolver a questão sem o mesmo "engano". Vygotski dá ênfase à questão de o professor trabalhar com o estudante, explicando, questionando, corrigindo e fazendo-o explicar, proporcionando a formação de conceitos em colaboração com o adulto (2005, p. 133).

Analisando a qualidade das interações, observou-se que o diálogo estabelecido permitiu acompanhar o pensamento dos estudantes e, dessa forma, auxiliou no desenvolvimento da atenção, da memória lógica, da abstração e da capacidade para comparar e diferenciar as operações envolvidas na atividade. De acordo com Vygotski, "esses processos psicológicos complexos não podem ser dominados apenas através da aprendizagem inicial" (2005, p. 104). Por isso a importância de se realizarem atividades em diferentes momentos e de diferentes formas envolvendo os mesmos conceitos.

Episódio 4 – Resolução de problemas - Viagem de estudos

Problema: *Na nossa viagem de estudos, o ônibus percorreu a distância de 245 km em 4 horas e 15 minutos. Qual foi a velocidade média do ônibus nesse percurso da viagem?*

Sequência 1

1. "Estudantes: São 245 quilômetros percorridos até a parada.
2. Pedro[3]: É, ... então vamos dividir.
3. Dani: Dividindo por 4, ... dá quilometro por hora.
4. Profª: Porque dividir por 4?
5. Dani: Porque é quatro horas de viagem (...).
6. Sandra: Mas ... o tempo é de 4h e 15 min!?

[...]

7. Marcelo: A divisão por 4, não dá bem certo ... tem os 15 minutos. E aí?
8. Carlos: Simples, arredonda!
9. Profª: É uma possibilidade arredondar, ... mas essa preocupação do Marcelo é importante.
10. Marcelo: Olha, nós temos aqui 4 horas e mais os 15 minutos. O quatro é hora e o quinze é minuto (o estudante quer esclarecer que horas e minutos são unidades de medidas de tempo diferentes, por isso argumenta que não pode ser escrito 4,15). A questão é, os 60 minutos da hora. (conversa)
11. Profª: Fala Fê! (a estudante estava cochichado com o Marcelo, a respeito da mesma ideia).
12. Fê: Não sei se tá certo! Faz tudo em minutos.

[3] Os nomes dos estudantes são fictícios.

13. Profª: Poderíamos fazer a velocidade em minutos. Mas pensando no dia a dia, é comum usar a ideia de km por minuto ou é km por hora? Vamos pensar, como são as placas que indicam a velocidade nas estradas? Vocês já observaram?
14. Estudantes: km por hora ... (conversa).
15. Profª: Quilômetro por hora, né! Então, a primeira informação que precisamos é quilômetros, que já sabemos ... é 245. E, agora precisamos as horas, que já sabemos que ... é 4 horas e um pouco, os 15 minutos. Também já sabemos que não pode ser escrito 4,15. Então, qual é o número decimal que representa 4 horas e 15 minutos? (conversa).
16. Franco: Quinze minutos de uma hora, ... é ... ?
17. Sandra: Um quarto!?
18. Profª: Vocês concordam?
19. Estudantes: É, ... é a quarta parte.
20. Marcelo: Mas, ... a hora não anda de 60 em 60!?
21. Profª: Então, se uma hora tem 60 minutos e 15 minutos ... é a quarta parte. Como fica o número decimal? (conversa)" (Hübner, 2010, p. 99).

Nesse segundo episódio envolvendo resolução de problemas identifica-se um tipo de interação com a intervenção da professora. O diálogo estabelecido envolveu a participação de vários sujeitos, mostrando uma acirrada discussão com diferentes pontos de vista sobre a estratégia de cálculo a ser adotada no plano de ação definido pelo grupo.

Com este exemplo, mais uma vez é possível perceber que um contrato didático considerando a interação social em sala de aula produz um verdadeiro processo de significação, ou seja, interagindo com os colegas ou com o professor, os estudantes ampliam seus conhecimentos e se desenvolvem intelectualmente.

É importante ressaltar que não só o cognitivo está em jogo nesses episódios apresentados, o companheirismo, a cooperação, o ajudar o colega, enfim, os aspectos social e afetivo estão potencialmente presentes nas mais diversas formas de interação.

Considerações finais

Observando os episódios e respectivas sequências destacam-se alguns aspectos importantes para os processos de ensino e de aprendizagem na escola, em relação aos papéis desempenhados pelos participantes. O estudante não é mais aquele que espera pelo professor e este, por sua vez, não é mais aquele que tenta, a todo o custo, fornecer o conhecimento que está pronto em sua mente. O primeiro participa ativamente de seu processo de aprendizagem (e de desenvolvimento), dialogando, negociando significados com seus colegas e com o próprio professor. Com isso identifica-se uma relação de pertencimento ao grupo. Mesmo aqueles que antes não se sentiam parte da turma, aos poucos começam a sentir-se mais à vontade, fazendo-se representar com suas ideias, defendendo seus pontos de vista. Quanto ao professor, é importante que o mesmo planeje e organize as situações didáticas de modo a contemplar, também, situações adidáticas para que os estudantes tenham autonomia, porém, não deixando de interferir sempre que necessário, como se pôde ver nos episódios.

Com essas metodologias o contrato didático estabelecido em sala de aula envolve um conjunto de regras implícitas/explícitas, das quais a ordem geral é interagir, participar, colaborar, ou seja, estar incluído ou incluir-se no grupo.

De um modo geral, pode-se ainda enfatizar que, nesse caso, o professor não precisa mais preocupar-se em dar conta de tudo, oportunizando ao estudante elaborar suas próprias sínteses mentais.

Para Davídov e Márkova "la assunción de la tarea de estudio por el escolar, su planteo autónomo están estrechamente relacionados con la motivación de estudio, con la transformación del niño en sujeto de la actividad" (1987, p. 324).

Para que isso aconteça, é importante que tanto o professor quanto o estudante tenham clareza de seu papel no processo ensino-aprendizagem da matemática, o que inclui a responsabilidade diante do outro e a preocupação com as expectativas geradas entre um e outro desde o início da relação pedagógica.

Referências bibliográficas

Davídov, V., & Márkova, A. (1987). La concepción de la actividad de estudio de los escolares. In *La psicología evolutiva y pedagógica en la URSS*: Antología. (316-337). URSS: Editorial Progreso.

Grando, N. I., & Marasini, S. M. (2014). Educação matemática: a sala de aula como espaço de pesquisa. (2ª ed. rev. ampl.). Passo Fundo: Ed. Universidade de Passo Fundo. Recuperado de http://www.upf.br/editora.

Góes, M. C. R. (2000). A abordagem microgenética na matriz histórico-cultural: uma perspectiva para o estudo da constituição da subjetividade. *Cad. Cedes*, *50*, 9-25.

Hilgert, J. G. (2006). *A construção do texto "falado" por escrito: a conversação na internet.* Disponível em <http://www.mackenzie.com.br/fileadmin/Pos_Graduacao/.../gastontexto01.pdf>.

Hübner, M. C. S. (2010). *Educação matemática: processo de resolução de problemas no contexto escolar.* (Dissertação de Mestrado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade de Passo Fundo, Passo Fundo.

Leontiev, A. N. (1978). *O desenvolvimento do Psiquismo*. Lisboa: Livros Horizontes.

Mortimer, E. F. (2000). *Linguagem e formação de conceitos no ensino de ciências*. Belo Horizonte: Editora UFMG.

Raupp, A. D., & Grando, N. I. (2010a). O potencial das interações sociais em situações de jogo no processo ensino-aprendizagem de matemática. In A*nais VIII Encontro de Pesquisa em Educação da Região Sul.*

Raupp, A. D., & Grando, N. I. (2010b). O jogo na sala de aula: aprendizado e desenvolvimento. In *Anais XV Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino.*

Vigotski, L. S. (1998). *A formação social da mente*: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores (6ª ed., Trad. J. C. Neto, L. S. Menna Barreto, & A. S. Castro). São Paulo: Martins Fontes.

Vygotsky, L. S. (1998). *Pensamento e linguagem* (2ª ed.). São Paulo: Martins Fontes.

Vygotski, L. S. (1993). *Obras escogidas II*. Madrid: Visor Distribuciones.

Vygotski, L. S. (2005). *Pensamento e linguagem* (3ª ed.). São Paulo: Martins Fontes.

Vigotski, L. S. (2007). *A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores* (7ª ed.). São Paulo: Martins Fontes.

Mategrama,
una excursión matemática al maravilloso mundo del I Ching

Mariana **Talamonti** Baldasarre
Eureka-Educación del Pensamiento, La Plata
Argentina
marianatalamonti@yahoo.com.ar

Resumen

Sé de la magia de un libro de hexagramas. Que marca los sesenta y cuatro rumbos. De nuestra suerte de vigilia y sueño. Borges (1975) en El Oriente.

El I Ching, obra clásica de la civilización china, es considerado un libro de sabiduría práctica, una guía cuando se debe enfrentar un dilema o se quiere abrir la mente. Comunicaremos una experiencia didáctica que se ha realizado con alumnos de primer año de la escuela secundaria en el Instituto Eureka-Educación del pensamiento-, algo así como una excursión matemática al maravilloso mundo del I Ching. Los alumnos lograron una mirada matemática del Ying -Yang, al involucrarse en combinaciones de líneas enteras y quebradas, traducciones al sistema binario de los hexagramas y al lenguaje de estos al álgebra modular del reloj y en el análisis de su disposición ajedrecística. Se favoreció el desarrollo del observar, analizar, clasificar, hipotetizar, traducir.

Palabras clave: pensamiento, didáctica, numeración, ajedrez, traducción, lenguaje.

Introducción

Comenzaremos haciendo alusión a una anécdota de Dyer (1992) que da cuenta de un profesor que le dice a sus compañeros con más de treinta años dictando clases: "*¿Han estado ustedes realmente enseñando treinta años, o han estado enseñando un año treinta veces?*"

Y nos preguntamos: ¿Nuestra carpeta de trabajo áulico ha pasado a ser un invariante con el transcurso de los años? ¿Por qué se sigue concibiendo a la matemática como una ciencia en que únicamente existe la repetición y la algoritmación extrema?

Teniendo en cuenta que los sistemas de numeración, entre otros temas, generan, un nivel complejo de comprensión por el modo tradicionalista en que se desarrollan las clases, se ha propuesto la serie de fichas de actividades que figuran a continuación tal como fue brindada a los alumnos para favorecer el desarrollo de operaciones del pensamiento tales como el observar, comparar, analizar, diferenciar, traducir, hipotetizar, etc.

Propiciando en todo momento la posibilidad de traducir de un código a otro, logrando así alcances más profundos en la abstracción de los conceptos.

Esta experiencia didáctica o excursión matemática-tal como la llamamos- fue realizada en el Instituto Eureka-Educación del Pensamiento de la ciudad de La Plata, Argentina, durante dos módulos de 8 clases cada uno, con una duración de una hora y media cada clase, con alumnos de 1er. y 2do. año del nivel secundario.

Presentación del módulo

Sé de la magia de un libro de hexagramas
Que marca los sesenta y cuatro rumbos
De nuestra suerte de vigilia y sueño
Jorge Luis Broges
"El Oriente" (La rosa Profunda)

El **I Ching**, o el Libro de los cambios, es una obra clásica de la civilización china, su origen aún es incierto pero sí se lo remonta a cientos y cientos de años antes de Cristo.

Ha pasado a ser considerado un libro de sabiduría práctica al cual se recurre cuando se desea una opinión, una guía, cuando se debe enfrentar un dilema o simplemente cuando se quiere abrir la mente.

Podríamos decir que el I Ching está escrito en códigos teniendo en cuenta que exhibe una considerable cantidad de símbolos; la persona que lo consulta determinará por azar cuál símbolo representa la situación que le está preocupando; luego lee el mensaje que acompaña dicho símbolo y finalmente reflexiona sobre el sabio comentario que versa a continuación. Así, por ejemplo, junto a uno de estos símbolos, se lee lo siguiente:

Querer conseguir lo perdurable
con prisa
trae mala fortuna.
Nada es favorable.

Comentario: Lo duradero se produce paulatinamente con largo trabajo y meditación esmerada. *"Cuando se quiere comprimir algo hay que dejar que se dilate"* dijo Lao Tse.
El que pide mucho de una vez, obra con precipitación; quiere conseguir demasiado y nada le resulta.

En el recorrido está previsto que te involucres en diversas aventuras tales como juegos de combinatoria con líneas enteras y quebradas, traducción al sistema binario de las configuraciones logradas y, ¡hasta su disposición en el tablero de ajedrez!, con el solo fin de propiciarte oportunidades para el desarrollo de habilidades del pensamiento tales como *observar, comparar, analizar, clasificar, hipotetizar, traducir, etc*.

Te invitamos a tomar la mochila y comenzar nuestra excursión matemática. ¿Estamos listos? , bien, ¡allí vamos!

Estructura general de las actividades

Ficha 1-Monogramas.

Ficha 2-Bigramas.

Ficha 3-Trigramas o kua.
Componentes del mundo. Composición.

Ficha 4-Tetragramas. Denominaciones.

Ficha 5-Pentagramas.

Ficha 6-Hexagramas:
Formación por combinación de líneas.
Formación por combinación de trigramas.

Búsqueda de regularidades.
Verbalización de reglas de formación descubiertas.
Redacción de reglas de formación descubiertas.
Sugerencia de regla de formación.
Comparación con la regla descubierta.

Ficha 7-Ordenamientos.
El ordenamiento de Fu Hsi.
El ordenamiento del Rey Wen.
Comparación de ambos ordenamientos.

Ficha 8-Sistema binario.
Traducción del lenguaje gráfico al simbólico.
Descubrimiento de las leyes de ordenamiento del Rey Wen.

Fichas de actividades

Ficha 1-Monogramas

Es hora de preparar el material para resolver esta primera situación que se nos presenta, para ello recortamos tiras de papel que representan líneas enteras y líneas discontinuas o quebradas (para el I Ching, las líneas continuas representan el yang y las quebradas el ying), tal como muestra la figura 1.

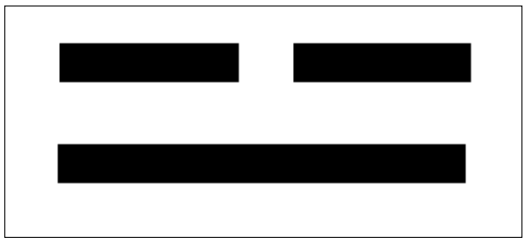


Figura 1. Líneas enteras y líneas discontinuas.

¿Cuántas posibilidades creés que existen para combinar las líneas tomando solo una? ¿Por qué? Registrá tu respuesta gráficamente.

Ficha 2-Bigramas

¿Cuántas posibilidades creés que existen para combinar las líneas tomándolas de a dos? ¿Por qué? Compará esta situación con la anterior y comentá en el grupo de trabajo las semejanzas y diferencias que hallaste. Registrá tu respuesta gráficamente.

Ficha 3-Trigramas

¿Cuántas posibilidades creés que existen para combinar las líneas tomándolas de a tres? ¿Por qué? Compará esta situación con las anteriores y comentá en el grupo de trabajo las semejanzas y diferencias que hallaste. Registrá tu respuesta gráficamente.

Como vimos recién un trigrama (conocido como KUA en el contexto del I Ching) consiste en una configuración de tres líneas, sean quebradas o enteras; esas posibles combinaciones en set de tres líneas representan las cosas que componen el mundo según el I Ching.

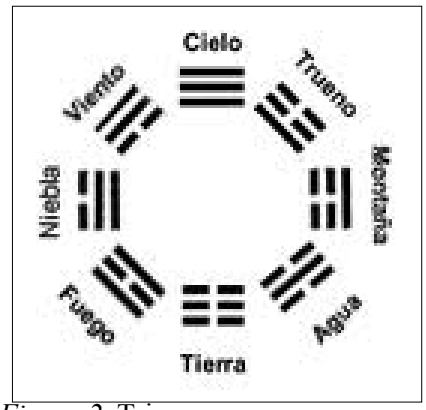


Figura 2. Trigramas.

¿Qué otras asociaciones podrías hacer respecto de estos ocho trigramas? Comentalas en grupo y registrá alguna a continuación.

Ficha 4-Tetragramas

¿Cuántas posibilidades creés que existen para combinar las líneas tomándolas de a cuatro? ¿Por qué? Compará esta situación con las anteriores y comentá en el grupo de trabajo las semejanzas y diferencias que hallaste. Registrá tu respuesta gráficamente.

Analizando tetragramas. Tal como hemos observado existe una relación entre las distintas configuraciones de líneas continuas y discontinuas; te proponemos ahora prestar especial atención y responder los siguientes interrogantes:

- ¿Consideraste una configuración como básica y luego derivaste otras? Si tu respuesta es afirmativa, danos un ejemplo.
- Entonces, ¿has seguido un criterio de formación de las distintas configuraciones? Si tu respuesta es afirmativa, enunciá dicho criterio.
- ¿Qué relación observás en la composición de los siguientes tetragramas? ¿Qué indica el código escrito en el inicio de cada grupo de tetragramas?

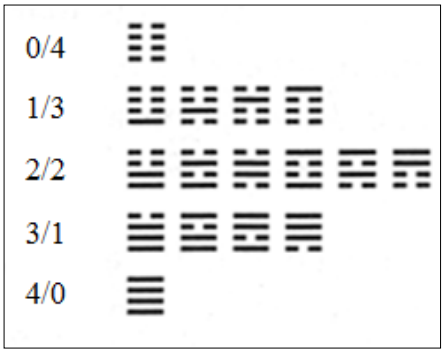


Figura 3. Tetragramas.

¿Dime cómo te formaste y te diré quién eres?

Llegó el momento de bautizar a las configuraciones surgidas a partir de una dada; nombrá y definí adecuadamente tales configuraciones teniendo en cuenta la regla de combinación usada y la relación existente entre las mismas.

Ficha 5-Pentagramas

¿Cuántas posibilidades creés que existen para combinar las líneas tomándolas de a cinco? ¿Por qué? Compará esta situación con las anteriores y comentá en el grupo de trabajo las semejanzas y diferencias que hallaste. Registrá tu respuesta gráficamente

Ficha 6-Hexagramas

A-¿Cuántas posibilidades creés que existen para combinar las líneas tomándolas de a seis? ¿Por qué?

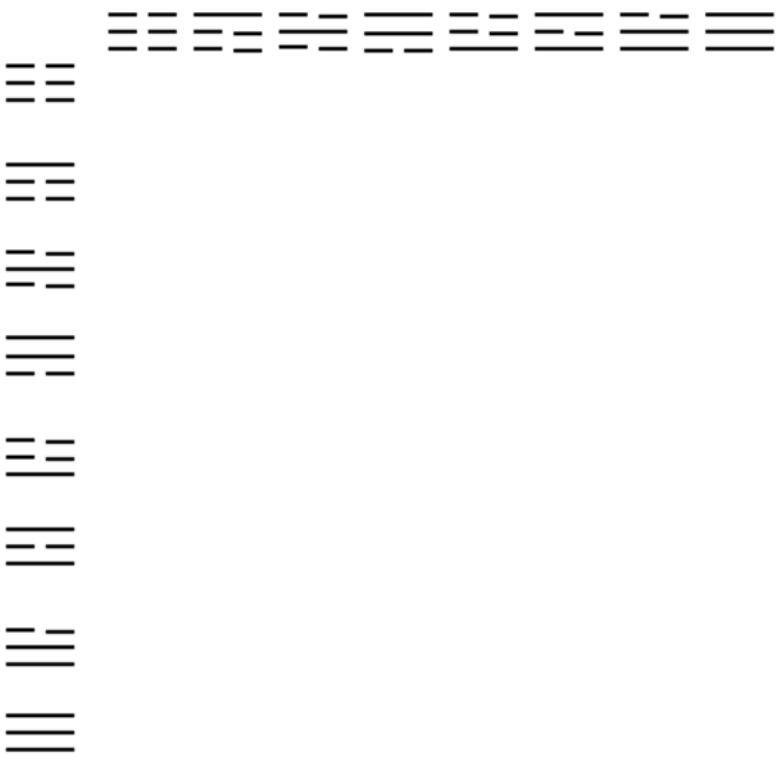
B-Si consideramos la formación de hexagramas por combinación de trigramas, teniendo en cuenta que son 8 trigramas, ¿cuál sería el cálculo que habría que realizar para totalizar la cantidad de hexagramas?

C-Sugerí en el grupo una ley de formación de hexagramas a partir de trigramas, pero antes redactala con claridad y fundamentala adecuadamente.

D-Te sugerimos ahora una ley de formación a partir de la tabla 1.

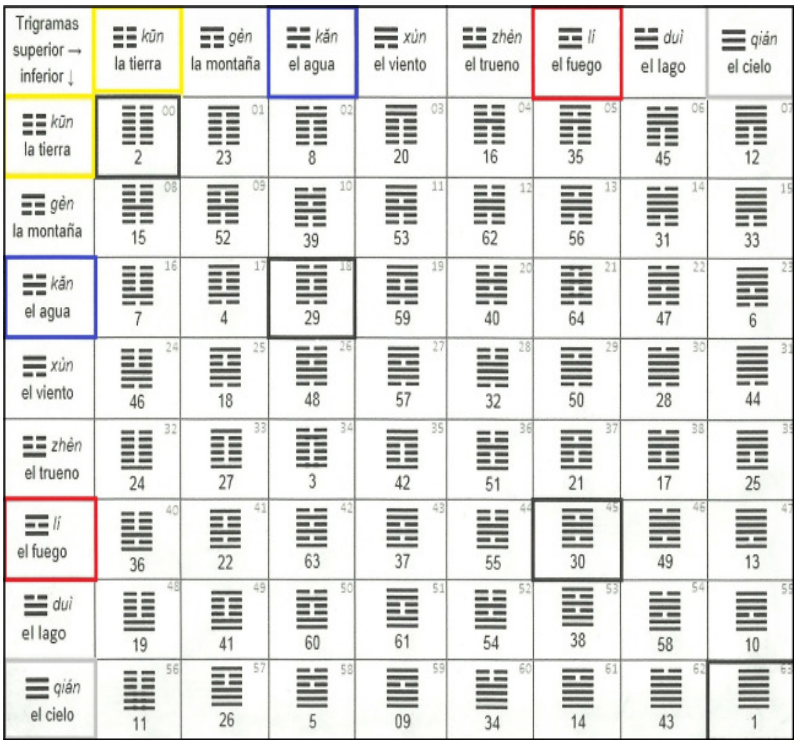
E- Observá y compará este criterio de formación con el que vos propusiste. En el presentado en la tabla 1 cada hexagrama se formará combinando el trigrama columna con el trigrama fila.

Tabla 1
Formación de hexagramas a partir de trigramas.



En la tabla 2 vemos el ordenamiento del Rey Wen según el número que figura debajo de cada casilla, en vez el ordenamiento de Fu Hsi según el número indicado en la esquina superior derecha.

Tabla 2
Tabla comparativa de ordenamientos.



Trigramas superior → inferior ↓	kūn la tierra	gèn la montaña	kǎn el agua	xùn el viento	zhèn el trueno	lí el fuego	duì el lago	qián el cielo
kūn la tierra	2	23	8	20	16	35	45	12
gèn la montaña	15	52	39	53	62	56	31	33
kǎn el agua	7	4	29	59	40	64	47	6
xùn el viento	46	18	48	57	32	50	28	44
zhèn el trueno	24	27	3	42	51	21	17	25
lí el fuego	36	22	63	37	55	30	49	13
duì el lago	19	41	60	61	54	38	58	10
qián el cielo	11	26	5	09	34	14	43	1

Ficha 8. El sistema binario en los hexagramas

Según hemos convenido, llamamos:
* YING a la línea discontinua _____ _____
* YANG a la línea continua _____

Estas dos posibilidades de líneas las traduciremos ahora en números, en ceros y unos, según la siguiente convención:
* YING línea discontinua: 0
* YANG línea continua: 1

Ahora podemos describir a los hexagramas como una sucesión de ceros y unos teniendo en cuenta las siguientes reglas:

- Se escribirán los seis números (ceros y/o unos), correspondientes a un hexagrama, de izquierda a derecha.
- El número de la izquierda corresponderá a la línea de abajo del hexagrama.

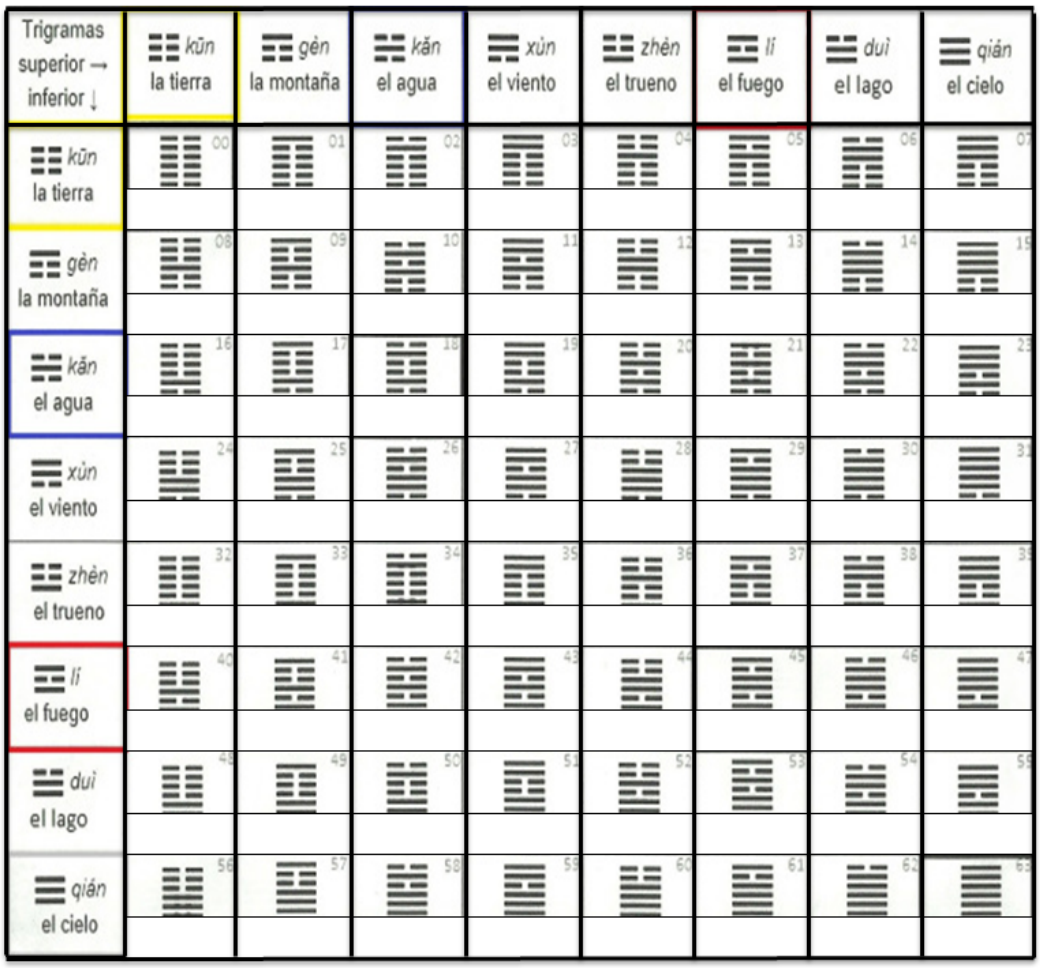
EJEMPLO:

_____ _____ 0
_____ 1
_____ _____ 0
_____ _____ 0
_____ _____ 0
_____ 1

A este hexagrama le corresponderá la sucesión 100010 en el sistema binario. Completá la tabla 3 traduciendo cada hexagrama al número binario correspondiente.

Tabla 3

Tabla comparativa con traducciones.

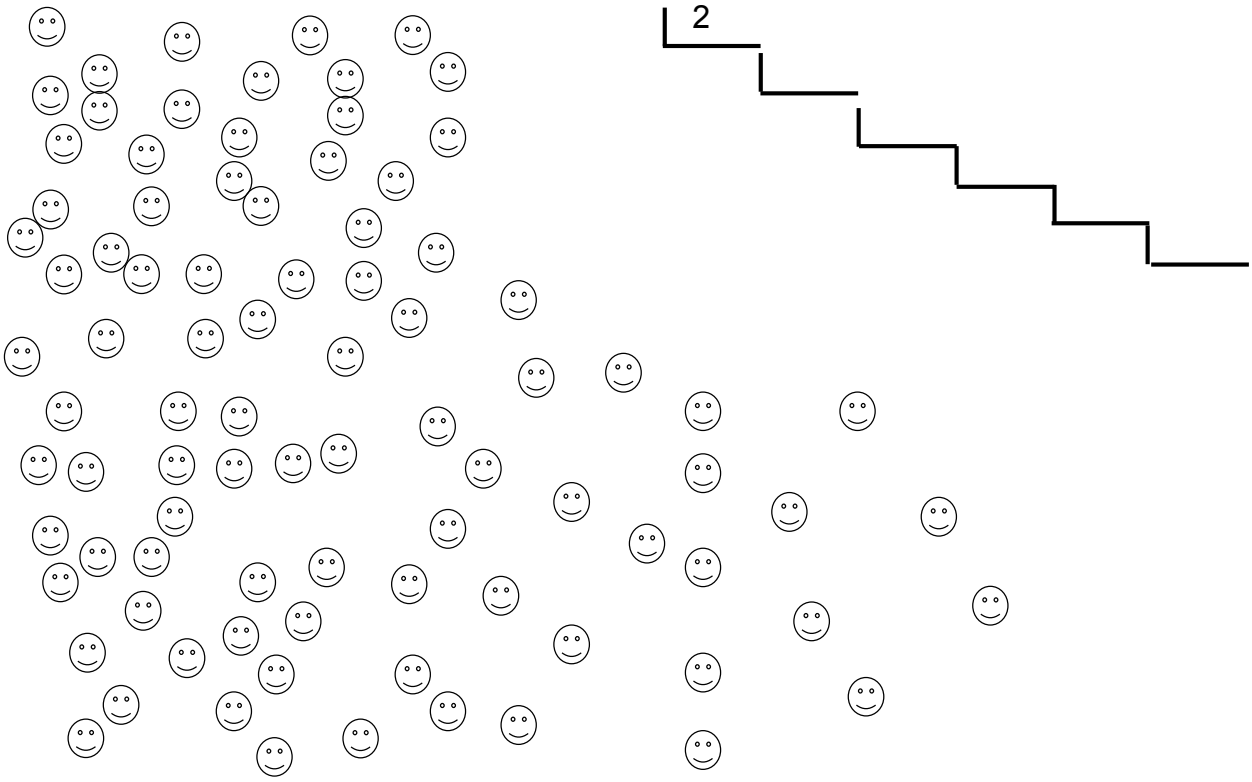


Ahora bien: analizá la tabla comparativa de ordenamientos, y relacioná los números que figuran en cada hexagrama, el que está debajo, el que está en el extremo superior derecho y el correspondiente a la traducción binaria que realizaste.

¿Qué podés decir al respecto? ¿Por qué el hexagrama 00 del ordenamiento de Fu Hsi pasa a ser el hexagrama 2 del ordenamiento del Rey Wen? ¿Por qué el hexagrama 18 del ordenamiento de Fu Hsi pasa a ser el hexagrama 29 del ordenamiento del Rey Wen?

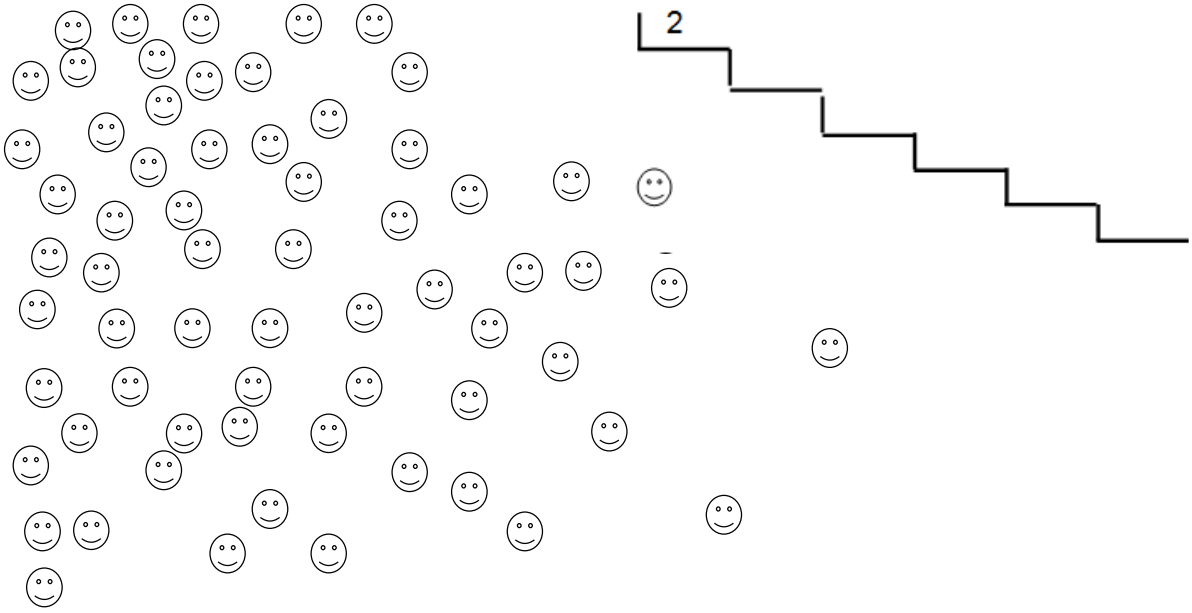
El sistema binario. Damos fundamento a las relaciones halladas completando las siguientes fichas de actividades.

Ficha A- Dividiendo por 2. Hemos realizado agrupamientos sucesivos de a dos con material concreto, ahora lo haremos con representaciones; simultáneamente iremos simbolizando el proceso por medio de divisiones sucesivas por 2.

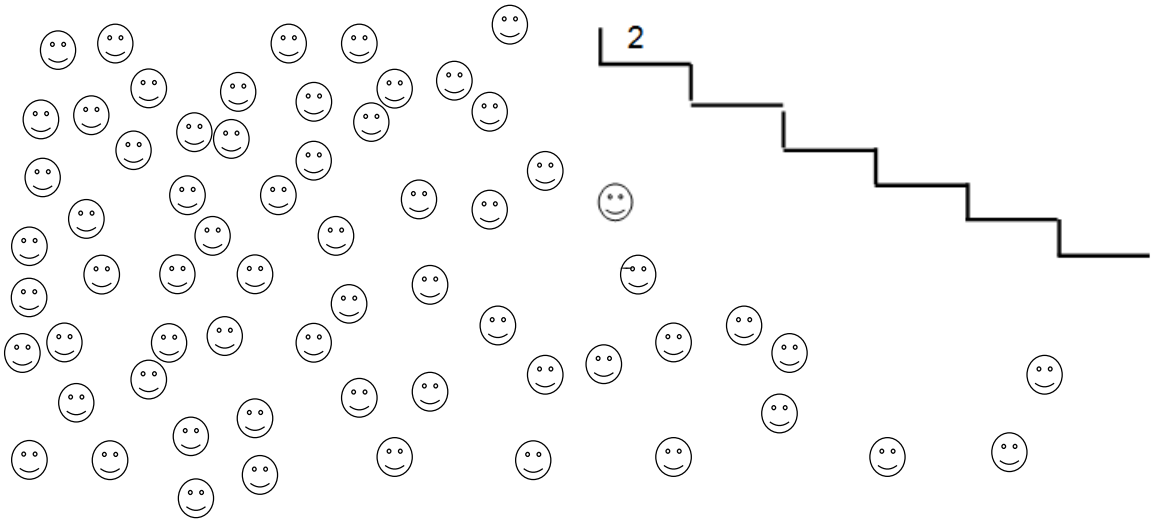


- Expresar el dividendo en forma polinómica en base 10.
- Expresar el dividendo en forma polinómica en base 2.
- Simbolizar la equivalencia del dividendo expresado en ambas bases.

Ficha B. Reiteramos el proceso según la cantidad de elementos que figuran en cada caso.



- Expresar el dividendo en forma polinómica en base 10.
- Expresar el dividendo en forma polinómica en base 2.
- Simbolizar la equivalencia del dividendo expresado en ambas bases.



- Expresar el dividendo en forma polinómica en base 10.
- Expresar el dividendo en forma polinómica en base 2.
- Simbolizar la equivalencia del dividendo expresado en ambas bases.

Conclusiones

Los alumnos no manifestaron dificultades para comprender cómo se relaciona nuestro sistema de numeración con el sistema binario; la traducción del lenguaje de hexagramas al lenguaje binario y de este al decimal fue claramente comprendida. Alcanzaron el objetivo de encontrar la relación entre los diversos ordenamientos de hexagramas a través de los sistemas de numeración. La tarea final consistió en cambiar la numeración de un reloj tradicional de pared por los hexagramas correspondientes, logrando así una relación con el álgebra del reloj que será profundizada en otro módulo de actividades.

Logramos interpretar la conocida frase que dice "en el mundo hay 10 clases de personas, la que conoce el sistema binario y la que no...vos, ¿en qué clase te incluís?

Referencias y bibliografía

Berger, P. L. & Luckmann, T. (2006). *La construcción social de la realidad*, Buenos Aires: Amorrutu.

Dyer, W. (1992). *Tus razones erróneas*. Barcelona: Ediciones Grijalbo.

Palacios, A. R, Martorelli, S. L., & Talamonti Baldasarre, M. (2011). *Cuestiones de maestros. Hacia el concepto matemático de función.* Buenos Aires: Lumen.

Poniachik, J (2010). *Excursiones matemáticas*. Buenos Aires: Ediciones de Mente.

Raths, L. E. y otros. (1986). *Cómo enseñar a pensar*. Buenos Aires: Paidós.

Trigramas recuperado el 13/X/14 de http://sipalkipaysandu.com/escuela-yamandu-historia-2/emblema-de-sipalki-do/

Música e Matemática:
novos projetos e perspectivas para uma abordagem interdisciplinar

Eduardo **Nespoli**
Universidade Federal de São Carlos
Brasil
edunespoli@ufscar.br
Chrisley Bruno Ribeiro **Camargos**
Instituto Federal de Minas Gerais
Brasil
chrisley.camargos@ifmg.edu.br

Resumo

Este trabalho descreve algumas conjecturas e observações que surgiram em uma pesquisa envolvendo pesquisadores da Educação Musical e Educação Matemática. Mediante o surgimento de uma eventual questão matemática em uma das atividades desenvolvidas no Laboratório de Construção de Instrumentos Musicais da UFSCar, possíveis hipóteses de uma relação matemático-musical implícita na atividade realizada foram levantadas e descritas, bem como, possibilidades de inter-relacionar música e matemática utilizando o software GeoGebra e o software Pure Data (PD). O foco aqui é enxergar conexões educacionais com a matemática a partir de uma questão musical que surge em meio ao processo de criação de instrumentos eletrônicos, e não utilizar a matemática para controlar, formatar ou buscar formas para criar estes instrumentos. A partir de novas possibilidades de se pensar a música e o som por meio do uso de recursos eletrônicos e computacionais, poder-se-á promover uma interação entre áreas de conhecimento de maneira interdisciplinar.

Palavras chave: música, matemática, educação, softwares, projetos, interdisciplinaridade.

Introdução

A ideia deste artigo surgiu no decorrer da disciplina "Construções de Instrumentos e Organologia 3", por meio de um olhar matemático de um dos autores deste artigo e do professor de música, também autor deste trabalho, que percebeu a necessidade de aprofundar as relações matemáticas que utiliza em algumas de suas atividades. Porém, não queremos aqui mostrar ou muito menos reforçar a ideia de uma racionalidade musical por meio da matemática, ou do discurso eurocêntrico que se estabeleceu atualmente de que a "Matemática está em todo lugar" conforme destaca Knijnik e outros autores (2012, p. 77), até porque temos muitas incertezas e questionamentos perante tal discurso e não queremos evidenciar a matemática como algo superior, conforme relata Walkerdine (1990, p. 5) descrevendo que a matemática tem ocupado uma "posição de rainha das ciências", principalmente pelo fato de outras ciências terem utilizado a linguagem matemática para descrever seus fenômenos naturais, o que parece permitir à matemática assegurar o sonho da possibilidade de controlar um "universo perfeitamente racional e ordenado".

A disciplina Construções de Instrumentos e Organologia 3 é realizada com apoio do Laboratório de Construção de Instrumentos Musicais do Departamento de Artes e Comunicação da Universidade Federal de São Carlos (UFSCar). Um dos objetivos observados nesta disciplina seria ultrapassar as barreiras formatadoras musicais impostas em diversas épocas, seja em meio à tonalidade ou a um estilo próprio de composição, e romper com o estruturalismo presente em obras musicais que definem o que seria "a música". Podemos observar na Música Tonal ocidental ou no Serialismo de Schoenberg exemplos formais deste pensamento "estruturalista" na música, um exemplo pode ser visto no Temperamento Musical que seguiu uma afinação por meio de modelos matemáticos, de uma maneira classicamente ocidental.

Sobretudo, em meio ao advento tecnológico pós-industrial, segundo Wisnik (2007, p. 56), a escuta musical se popularizou, já que não é mais necessário participar de um concerto ou apresentação musical para ouvir uma obra, pois os meio tecnológicos permitem que você ouça quando quiser, onde quiser e quantas vezes quiser.

A partir desta "dessacralização", "toda história dos símbolos, que vibra num acorde oculto (modal, tonal, serial), fica paradoxalmente mais exposta na sua simultânea contemporaneidade" (idem, p. 56). O som faz parte agora do mundo da repetição generalizada, do mundo tecnológico, e podemos decompor ou descontruir uma onda sonora, e fazê-la ressoar de uma forma particular até então nunca vista na modernidade musical. Essa quebra das estruturas modais, tonais, seriais e da própria onda sonora pela tecnologia nos faria adentrar em um "Pós-Estruturalismo" musical?

Evidentemente, novos conhecimentos filosóficos, científicos e tecnológicos relacionados à manipulação da matéria sonora alteraram radicalmente a compreensão do que é o som. A Música Contemporânea, segundo Wisnik (2007, pp. 202-203), vem revelando que "a relação entre tom e pulso" são elementos fundamentais do som. Laboratórios de música eletrônica que se desenvolveram na sequência da Segunda Guerra Mundial, por meio da utilização de recursos computacionais, assinalam a possibilidade de modular todos os atributos do som como refrações moduladas de um mesmo princípio, "sons contínuos e especializados podem ser correspondidos a sinais percutidos", "o contínuo e o descontínuo, a unidade e a diferença".

Deste modo, a tecnologia eletrônica e computacional redimensiona os modos de percepção do som, enfatizando que a estreita relação entre pulso e tom depende fundamentalmente das frequências de oscilação. Assim, devemos considerar que se acelerarmos o pulso, o batimento, ele se torna uma "nota" e se desacelerarmos uma "nota" ela se torna um pulso. A questão possui natureza tecnológica, pois os instrumentos acústicos dependem fundamentalmente das estruturas e dimensões dos corpos vibrantes, enquanto que na música eletrônica o que está em jogo são as velocidades. Para alterar a frequência de um instrumento de cordas, por exemplo, é necessário redimensionar o tamanho de uma das cordas, conforme mostrou Pitágoras (500 a. C.), enquanto que na música eletrônica a alteração das frequências ocorre por meio da alteração da velocidade do sinal de áudio. O que seria então o tom ou o pulso?

Fazemos aqui um contraponto entra a "Ideologia da Certeza" presente na matemática e possivelmente em conceitos musicais de teóricos tradicionais do que seria "a música" tradicional. Segundo Borba e Skovsmose (2006) a "Ideologia da Certeza", compreende um sistema de crenças que pode controlar, esconder, mascarar ou até mesmo filtrar uma série de questões relacionadas a situações problemáticas que envolvam grupos sociais. Assim domina a certeza de que a matemática que vale é a matemática dos livros, dos brancos, acadêmica ou

escolar. Os grupos dominados também passam a acreditar na ideologia de que a certeza e a exatidão são dadas por estas matemáticas, diferentes de suas práticas culturais. Será que a música que vale é também a música eurocêntrica? Dos brancos, acadêmica, erudita?

O que queremos mostrar neste texto é que, a partir destas novas possibilidades de se pensar a música e o som por meio do uso de recursos eletrônicos e computacionais, podemos promover uma interação entre áreas de conhecimento, como a matemática, a física, a educação tecnológica, dentre outras. Utilizando conceitos como artesanalidade e construção manual, torna-se possível trabalhar de forma interdisciplinar, seja por meio de projetos ou por eventuais questões que surjam nesse ambiente de aprendizagem rico em possibilidades e propício à criatividade.

Neste artigo mostraremos o surgimento de uma eventual questão matemática em uma das atividades desenvolvidas no Laboratório de Construção de Instrumentos Musicais da UFSCar, possíveis hipóteses de sua relação com a atividade realizada e possibilidades de inter-relacionar música e matemática utilizando o software GeoGebra[1] e o software Pure Data (PD)[2]. O foco aqui é enxergar conexões educacionais com a matemática a partir de uma questão musical que surge em meio ao processo de criação de instrumentos eletrônicos, e não utilizar a matemática para controlar, formatar ou buscar formas para criar estes instrumentos.

Sobre a disciplina, seus fundamentos e métodos

A disciplina Construção de Instrumentos e Organologia 3 sustenta-se em algumas noções contemporâneas da música, em especial as que se desdobraram após a Segunda Grande Guerra, em decorrência das transformações tecnológicas advindas da invenção dos transistores e circuitos integrados. Os anos de 1950 e 1960 são marcados socialmente pela popularização de diversos tipos de equipamentos tecnológicos que naquele momento sofreram forte redução de tamanho devido à invenção destes dois tipos de componentes eletrônicos (Holmes, 1985).

O surgimento destes novos equipamentos de áudio engendrou novos modos de criação e produção, assim como determinou novos hábitos de escuta. Sob o ponto de vista composicional, constata-se uma forte tendência de relacionar o processo composicional ao processo de criação de recursos materiais que tornassem possível a manipulação direta do material sonoro, incluindo aqui a síntese eletrônica e o trabalho com amostras sonoras gravadas, mas também o processamento de sinal de áudio adquirido em tempo real a partir de instrumentos musicais acústicos ou eletromecânicos. A criação musical adquiriu, nesta perspectiva, uma forte relação com a manipulação de componentes físicos e eletrônicos que possibilitassem a exploração da síntese sonora em sua dimensão mais ampla, redimensionando, deste modo, os sistemas musicais tradicionais baseados na noção abstrata de nota para atribuir ao fazer musical a noção concreta de som.

O que se observa como fator de destaque é que a artesanalidade do processo composicional é expandida em direção aos próprios recursos técnicos por meio da produção, também artesanal, de equipamentos que possibilitassem a geração de sons complexos, que não poderiam ser, de modo algum, reduzidos ao sistema tradicional de notas e escalas. Esta perspectiva reforçou a integração entre a criação musical e a construção de recursos produtores de som, na medida em que criar os próprios instrumentos passou a ser visto como uma etapa do processo

[1] Software matemático livre que apresenta possibilidades de se trabalhar com elementos geométricos e algébricos.

[2] O software PD (*Pure Data*) é um software de código aberto. Este software pode ser usado para processar e gerar som, vídeos e gráficos 2D/3D. Possui dispositivos de entrada e de protocolo MIDI.

composicional. A música eletrônica experimental expande-se, neste sentido, em direção a uma perspectiva que inclui o trabalho em equipe, a interdisciplinaridade e a combinação de conhecimentos diversos necessários à produção destes equipamentos.

Os métodos de produção são aqui diferenciados em relação ao processo industrial. No lugar de uma visão universal e linear acerca da tecnologia, observa-se a expansão gradativa das noções de singularidade e rede, o que coloca, inevitavelmente, novos paradigmas para a música, as artes e os processos sociais relacionados à produção e à transmissão de informações (Nespoli, 2014). No interior desta metodologia de criação, que envolve a composição musical e a luteria experimental, a criação de instrumentos musicais adquire métodos e processos muito diferenciados daqueles normalmente realizados pela indústria. A maioria dos músicos que se envolvem com esta dimensão criativa, não possui inicialmente o conhecimento técnico especializado, nem tampouco os recursos matemáticos que possibilitem a abstração numérica voltada para a teorização anterior à execução do projeto. Eles não desenvolvem projetos teóricos de instrumentos que posteriormente serão materializados em circuitos e sistemas de controle, mas partem de uma experimentação de combinatórias lógicas que podem ser sempre reformuladas e reordenadas experimentalmente a partir da própria escuta dos resultados. Trabalha-se, deste modo, com a escuta e a recombinação de um número limitado de elementos lógicos que podem ser reinventados a cada novo instrumento a partir da reordenação das partes.

Os trabalhos realizados nas disciplinas ministradas no Laboratório de Construção de Instrumentos Musicais encontram-se relacionados com este contexto metodológico da luteria experimental, e são propostos a partir da integração de conhecimentos necessários à própria prática de criação de sistemas geradores de som. Posteriormente, os equipamentos construídos serão utilizados em apresentações musicais realizadas por meio de projetos de extensão. Neste sentido, busca-se uma integração entre ensino, pesquisa e extensão, como meio de proporcionar aos estudantes um conjunto de experiências que se desdobre em uma formação mais integrada e dinâmica, voltada para a observação e apreensão de aspectos e tendências atuais da realidade social e tecnológica.

Reunindo conhecimentos por meio de projetos

Embora os procedimentos metodológicos da disciplina não partam de uma exposição teórica dos conhecimentos necessários para obtenção dos resultados, observa-se que tais conhecimentos emergem pouco a pouco pela necessidade de aquisição de referências que forneçam sustentação à prática. Deste modo, um conjunto de conhecimentos variados é reunido por meio de um único projeto que instiga os estudantes a conhecer e aprofundar diversas questões relacionadas à arte e à ciência.

Para se construir um instrumento eletrônico torna-se necessário reconhecer os princípios teóricos referentes às diversas técnicas de síntese sonora que podemos, de forma resumida, elencar em: síntese por modulação de amplitude, síntese por modulação de frequência e síntese por amostragem. Estes três princípios podem ser explorados de muitas formas, e por meio deles, pode-se alcançar diversos resultados.

Vale ressaltar que estes três procedimentos podem ser realizados por meio de recursos analógicos ou digitais, e a opção de utilizar um ou outro meio modifica significativamente as possibilidades de controle e os resultados que podem ser alcançados. Por meio de recursos computacionais e softwares, por exemplo, é possível uma observação muito mais aguçada de procedimentos matemáticos inerentes ao processo de criação de um instrumento, enquanto que,

por meio de recursos analógicos, a fisicalidade dos componentes e a soldagem dos circuitos dificulta, em certa medida, a observação mais direta dos cálculos, assim como torna mais complicado o alcance de um leque amplo de recursos. Isto porque um software comumente inclui em sua linguagem uma quantidade muito mais ampla de recursos sonoros que podem ser combinados, enquanto que o trabalho com a energia elétrica em meio analógico depende da aquisição de componentes físicos específicos que muitas vezes não estão imediatamente disponíveis. Assim, a simulação de algoritmos em software, possibilita uma expansão significativa das possibilidades de combinação de materiais para a aquisição de resultados sonoros, enquanto que instrumentos construídos fisicamente com componentes eletrônicos tornam a prática mais "limitada". Não obstante, a criação do hardware torna o processo interessantemente particular na medida em que coloca os estudantes em contato com o interior das "caixas-pretas", possibilitando para eles a percepção de que por detrás da virtualização digital do real existe todo um universo de trajetos químicos e energéticos. A eletrônica digital é sempre dependente da eletrônica analógica, pois é por meio desta que o registro da linguagem se conecta com a fisicalidade do mundo material.

Assim, observamos que os limites entre a realidade material do mundo e a tendência à virtualização ou simulação do real, podem ser conjugados de modo que se evite uma hierarquização entre as diferentes tecnologias que se nos apresentam no dia a dia. Ao contrário, pela compreensão mais aprofundada e integrada das camadas que se complexificam por interação, os conhecimentos científicos e artísticos são apreendidos segundo um método arqueológico[3] (Parikka, 2012) que investiga as tecnologias, as tendências e os discursos, assim como o jogo de forças que ocorrem entre as margens e os centros de poder. Isto proporciona aos estudantes uma apropriação de conhecimentos voltados para seus interesses, assim como propicia o desenvolvimento de uma metodologia de criação que inclui aspectos subjetivos na operacionalização da realidade material e intelectual.

A reunião de conhecimentos ocorre, portanto, pelas necessidades de compreender e alcançar os resultados que derivam do desejo coletivo em um trabalho em equipe. Neste processo, arregimenta-se saberes que compreendem a história, a física, a matemática, a eletrônica e, obviamente, a música em sua dimensão elementar, que é o próprio conhecimento acerca do som e dos sistemas vibratórios. Não são mais as notas em sua propensão abstrata que emergem como tema, mas os sistemas oscilatórios e o som em sua relação com a escuta. Desta forma, a prática e a apreensão dos saberes são vistos como elementos que se aproximam dos aspectos primordiais que dão origem ao fazer musical, que são o domínio, a ordenação e a combinação dos materiais existentes no mundo para se produzir uma sinergia que resulte num determinado sistema produtor de som (Nespoli, 2014).

Os elementos matemáticos, tão naturais ao fazer musical, e inerentes às formas e aos modos de organização do som, surgem em meio a esta proliferação de conhecimentos, e são simultaneamente, conjugados a todos os demais conhecimentos que irão constituir e materializar o instrumento musical.

[3] Segundo Parikka, o método arqueológico relacionado ao estudo das mídias "adota a ideia – familiar à Foucault – que a arqueologia é sempre, implicitamente ou explicitamente, sobre o presente: que é o momento presente em seus objetos, discursos, práticas, e como isto passa a ser percebido como realidade" (Parikka, 2012, p. 27). Neste sentido, a arqueologia das mídias investiga o antigo e o atual, propondo por meio de um método de criação em artes, relações não lineares entre as tecnologias "antigas" e "novas".

Produzindo um sintetizador AM[4]

Para melhor compreendermos esta dimensão, vejamos a seguir de modo mais direcionado o que se pode alcançar por meio da criação de um sintetizador AM, ou seja, um instrumento que produz efeitos sonoros por meio de uma técnica de modulação por amplitude. O que demonstraremos a seguir é um tipo específico de modulação por amplitude, chamada normalmente de modulação de anel (*ring modulation*). A descrição que faremos a seguir utilizou o software Pure Data (PD) para criar o instrumento digital. Trata-se de um software *opensource* que é utilizado em laboratório para se criar diversos tipos de instrumentos digitais os quais são posteriormente controlados por meio de interfaces também criadas artesanalmente. A interação dos estudantes com o software torna-se mais amigável, pois a linguagem de programação é realizada por meio de caixas e linhas que podem ser conectadas para se produzir os algoritmos necessários.

O sintetizador AM criado no software utiliza dois osciladores que produzem ondas senoidais. Os objetos que produzem estas ondas são designados nas caixas como "osc~". Acima deles é possível observar uma caixa numérica com o valor da frequência de cada onda gerada. A primeira onda é chamada de portadora, e a segunda de moduladora. As ondas senoidais geradas por estes dois osciladores são então levadas a um objeto de multiplicação do sinal de áudio, descrito na caixa como "*~".

Em situações musicais, entende-se que a frequência da onda portadora é modulada pela frequência da onda moduladora, por meio do objeto que multiplica os valores de suas amplitudes. Ao multiplicar as duas ondas senoidais uma pela outra obtemos uma terceira onda, derivada desta multiplicação, chamada de onda resultante. O algoritmo abaixo mostra uma onda portadora de 500HZ sendo multiplicada por uma onda moduladora de 20HZ. As imagens à direita mostram as duas ondas geradoras (acima) e a onda resultante (abaixo).

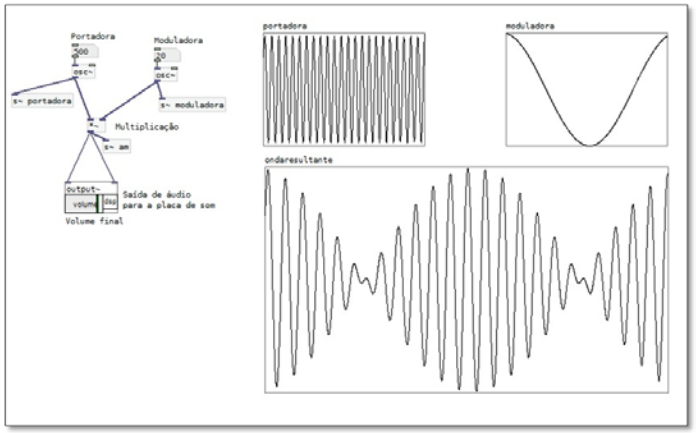


Figura 1: Princípio fundamental da modulação de anel no software Pure data.

Os resultados sonoros desta operação ocorrem de duas formas. Quando a onda portadora é multiplicada por uma frequência produzida pela onda moduladora que se encontra com valor igual ou abaixo à 20HZ, ouve-se um batimento resultante da modulação produzida pela alteração de intensidade gerada na onda portadora. Na imagem acima, observa-se uma onda de 500HZ sendo multiplicada por uma onda de 20HZ, e a oscilação abaixo mostra a resultante da variação

[4] *Amplitude Modulation* (Modulação por Amplitude).

de amplitude. Entretanto, quando a moduladora ultrapassa o valor de 20HZ, tornando-se assim audível ao ouvido humano, a velocidade de batimento tende a torna-se imperceptível e o que se passa a ouvir é a geração de parciais harmônicas que resultam da soma e da diferença entre os valores de frequências da portadora e da moduladora. Assim, na modulação de anel, quando a frequência da onda portadora é 500HZ e a da moduladora é 100HZ, o espectro sonoro resultante são duas frequências: 400HZ e 600HZ.

Surge uma questão matemática

Conforme descrevemos anteriormente, podemos observar e abstrair relações matemáticas na produção de um sintetizador AM e em outras atividades realizadas pelo professor de música no Laboratório de Construção de Instrumentos Musicais, que poderiam ser abordadas e discutidas sob um viés educacional.

Em uma das aulas da disciplina observada, surgiu uma hipótese que chamou a atenção de um dos autores deste artigo, porém, em um primeiro olhar, não foi possível obter detalhes para não interromper a aula. A hipótese relatada pelo professor a seus alunos foi: se temos duas ondas, uma denominada portadora e outra denominada moduladora (síntese AM) combinado elas teremos uma nova onda, denominada "resultante" que apresenta as seguintes características:

X_1 = Portadora + Moduladora

X_2 = Portadora - Moduladora

Assim, a onda resultante, apresenta um espectro sonoro resultante pelas duas frequências X_1 e X_2.

Em outra aula, ao trabalhar com o software PD, o professor nos mostra uma simulação no software de uma síntese AM: "Se tenho uma frequência (um som) de 200Hz (portadora) e combino (multiplico) com uma de 20Hz (moduladora) terei uma onda emitindo 220Hz e 180Hz". Surge aqui, uma questão matemática... O professor de música pergunta ao professor de matemática se ele poderia "explicar porque isso acontece". Conforme estabelecemos no início deste artigo, não queremos "forçar" uma relação matemática na disciplina observada, porém, esta surgiu de forma espontânea, por meio de observação ou curiosidade de como funcionaria ou como o computador interpretaria a síntese AM. Foram discutidas algumas possíveis hipóteses para a questão e o professor de matemática ficou responsável por analisar e tentar trazer algo sobre a questão na aula seguinte.

Análise da questão

Pudemos constatar que a questão levantada poderia ser transposta para um problema que envolveria funções senoidais simples, partindo do Teorema de Fourier que um sinal periódico qualquer pode ser decomposto em uma série de ondas senoidais com frequências múltiplas inteiras (mais simples) da frequência fundamental, conforme observa-se em Camargos (2011, pp. 61-62), Fourier percebeu que, até mesmo o mais complicado dos gráficos, podia ser desmembrado em ondas senoidais simples da nota fundamental e dos harmônicos de cada um dos instrumentos.

Partindo do princípio de que estávamos trabalhando com funções periódicas (ondas periódicas), observamos que muitas características destas funções podem ser descritas mediante os conceitos de velocidade da onda, amplitude, período, frequência e comprimento da onda,

como nos mostra Young (2008, pp. 107-109) em seu livro de Física sobre Termodinâmica e Ondas.

Portanto, uma função de uma onda senoidal pode ser expressar de diversas formas, como por exemplo:

$$y(x,t) = Acos(kx - \omega t)$$

onde, a partícula oscila executando um Movimento Harmônico Simples (MHS) com amplitude A, frequência f, uma constante k encontrada pela equação k= 2π/λ, comprimento de onda[5] λ, frequência angular[6] ω, deslocamento x e tempo t.

No entanto, pretendíamos trabalhar com uma função mais simples, onde pudéssemos verificar a relação de multiplicação entre a frequência das ondas portadoras e moduladoras. Observe que se considerarmos x = 0, teremos uma função com uma variável t (tempo) que nos mostrará o deslocamento y da onda em função do tempo. Desta forma, procuramos trabalhar com funções do tipo[7] y(t) = A.sen(mt) ou y(t) = A.cos(mt).

Pelo fato da constante "A" modificar a amplitude da onda, a consideramos como uma constante A = 1, pois, uma das observações que chamaram nossa atenção e auxiliaram a descobrir uma possível resposta para o problema foi que, no programa PD, apesar de mudarem os valores da frequência com a multiplicação, a amplitude da onda continuava entre o intervalo [-1, 1].

Como o software utilizado (PD) permite manipular ondas senoidais simples, para análise da questão levantada, buscamos transformações trigonométricas que apresentassem multiplicações de senoidais, objetivando o resultado descrito anteriormente.

Analisando possíveis fórmulas trigonométricas observamos uma possível relação com a seguinte equação:

Equação 1: $sen(x).sen(y) = 1/2[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$

Observe que nesta equação, se tivermos ondas senoidais conforme o exemplo dado pelo professor de música, "sen(200x) e sen(20x)", teremos:

$$sen(200x).sen(20x) = 1/2[\cos(180x) - \cos(220x)]$$

Levando essa conjectura para o software GeoGebra, pudemos testá-la com diferentes ondas senoidais. Criamos várias ondas senoidais do tipo y = sen(m.x), com m variável e obtivemos ondas idênticas às exibidas no software PD. Um exemplo a seguir, combinamos as ondas (funções) f(x) = sen(200x) e g(x)= sen(20x), obtendo a função i(x) = f(x).g(x), observe a figura:

[5] λ = v/f, sendo v a velocidade da onda e f sua frequência.
[6] ω = 2πf
[7] O parâmetro m varia o período da função.

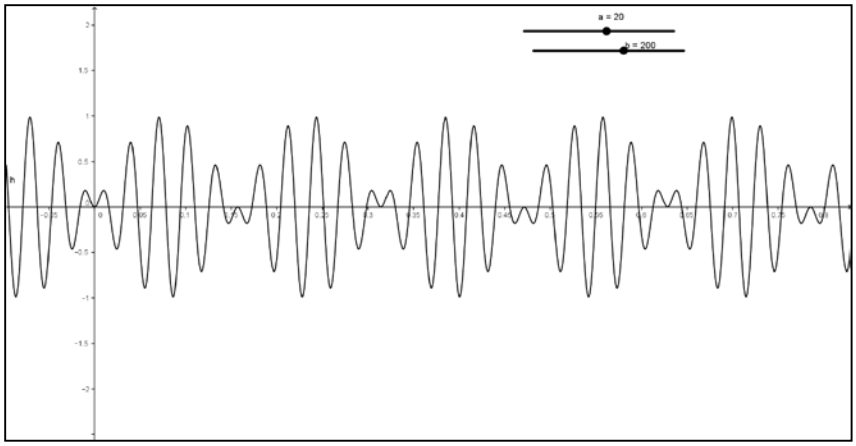


Figura 2: i(x) = sen(200x).sen(20x)

Observe que a função i(x) combina as variações das ondas f(x) e g(x) e não ultrapassa o limite do intervalo [-1, 1], assim como no programa PD, isso porque a multiplicação de senos dada pela equação 1: $sen(x).sen(y) = 1/2[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$, nos dá uma função que combina as funções senoidais anteriores em uma expressão de soma e subtração de cossenos, que também possuem formatos senoidais em seus gráficos, multiplicado pelo escalar ½, isso faz com que na soma de seus extremos no intervalo [-1, 1] tenhamos a imagem:

Obtendo o menor valor de sen(x).sen(y): ½.(-1 – (1)) = -1 ou

Obtendo o maior valor de sen(x).sen(y): ½.(1 – (-1)) = 1, continuando assim no intervalo [-1, 1].

Para testar com várias ondas ao mesmo tempo, criamos dois parâmetros (controles deslizantes) no GeoGebra, um parâmetro "a" variando de (-200 a 200) e um parâmetro "b" variando de (-1000 a 1000), obtendo diferentes combinações da multiplicação das funções criadas: p(x) = sen(a.x) e q(x) = sen(b.x).

Assim foi possível verificar a combinação das ondas e que essas não ultrapassaram o limite da imagem no intervalo [-1, 1]:

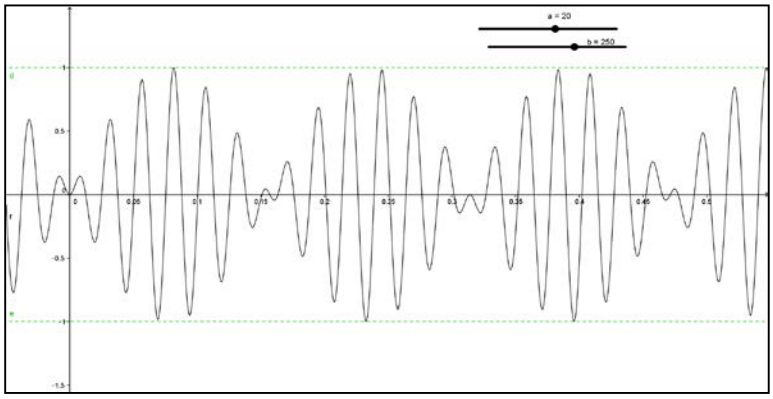


Figura 3: Função r(x) = sen(20x).sen(250x)

Não foi possível por meio do software GeoGebra verificar se o resultado das multiplicações das funções senoidais foram dadas pela equação 1, no entanto, trata-se de uma transformação trigonométrica válida (SPIEGEL, 1992, p. 29) e já demonstrada, logo, pudemos perceber um resultado idêntico ao observado no software PD mediante a simulação de ondas

sonoras, observe a função r(x) = sen(20x).sen(250x) comparada à síntese AM feita com ondas de 20Hz (portadora) e 250Hz (moduladora):

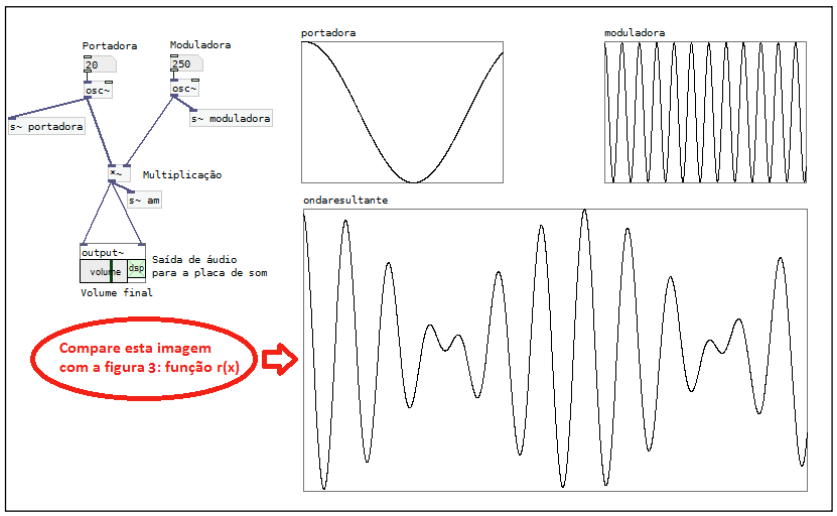


Figura 4: Software PD - Síntese A.M.: Portadora 20Hz e moduladora 250Hz

Conforme podemos observar nas figuras 3 e 4, a modulação das ondas de 20Hz e 250Hz feita no software GeoGebra por meio da multiplicação de funções senoidais nos forneceu uma onda que pôde ser observada também no software PD. Foram feitos vários testes no sintetizador AM do software PD e no software GeoGebra, constatamos que as ondas apresentavam características idênticas.

Consideramos aqui, que por meio da música eletrônica experimental, podemos fornecer meios ou hipóteses para um trabalho interdisciplinar entre duas áreas aparentemente disjuntas como a música e a matemática, seja por meio de projetos, ou numa perspectiva de trabalho em equipe, por professores de matemática e de música sob um viés educacional.

Considerações finais

O que descrevemos neste artigo foi um primeiro contato entre pesquisadores da Educação Musical e da Educação Matemática que anteriormente, em trabalhos específicos de cada área, já percebiam em meio às suas pesquisas, ou no dia a dia em sala de aula, situações onde a música e a matemática poderiam ser compreendidas por meio de uma abordagem interdisciplinar. Talvez, estejamos diante do início de um trabalho que possa promover ações pedagógicas que permitam levantar conhecimentos musicais e matemáticos de uma forma conjunta e possibilitem promover estas ações em sala de aula.

Uma forma interessante de pensar tal questão pode ser encontrada sob o ponto de vista de que tais áreas de conhecimento podem ser observadas como componentes de um dispositivo (Deleuze, 1990) maior e mais heterogêneo que envolve a própria operação da realidade, tanto do ponto de vista cognitivo quanto do ponto de vista material. Neste sentido, estamos vendo a junção da música e da matemática como dispositivo de compreensão e criação do mundo sonoro, mas também do modo de operacionalizar a percepção que se tem da realidade em que se vive.

Em meio à sociedade contemporânea altamente mediatizada, a relação que encontramos com estas áreas de conhecimento é inseri-las de forma prática no trabalho de criação de dispositivos tecnológicos realizado com os estudantes. Trabalhando num campo de maior multiplicidade prática e teórica, passamos a viabilizar tais linguagens enquanto instrumentos

agenciadores de percepções e ações; tratando, assim, o trabalho humano em seu aspecto ontológico: a construção do mundo cognitivo, social e material.

A busca aqui é por um processo mais voltado para aquilo que o filósofo Félix Guattari chama de Ecosofia[8] (Guattari, 1990). Trata-se, portanto, de unificar as esferas do pensamento às das ações sociais, indo de encontro ao ambiente e à sua reconstrução. Trabalhar nesta dimensão criativa por meio de projetos de ensino, pode garantir a produção de agenciamentos coletivos que estabeleçam uma intensificação de percepções singulares e não universais da operacionalização dos dispositivos técnicos que, neste caso, deixam de ser observados somente como elementos de uso (consumo), para serem vistos como elementos de mediação da criatividade. Esta operação permite tirar a relação com o conhecimento da esfera sacra-intelectual para inseri-la numa esfera de mediação prática e criativa do meio.

Mostramos neste artigo algumas possibilidades de se pensar a música por meio da interação com novas tecnologias e possíveis conexões com outras áreas, neste caso com a matemática, trazendo e comparando resultados em softwares matemáticos como o GeoGebra e em softwares de geração de sons como o PD, de uma forma onde pudéssemos comparar e comprovar uma questão matemática que surgiu espontaneamente em meio às atividades desenvolvidas no Laboratório de Construção de Instrumentos Musicais da UFSCar.

Por meio da questão aqui abordada e de outras questões ou hipóteses também observadas neste primeiro contato entre nós pesquisadores no primeiro semestre de 2014, percebemos novas possibilidades de inter-relacionar música e matemática. Desta forma, pretendemos em trabalhos ou pesquisas futuras, analisar conexões educacionais entre a música e a matemática a partir da criação de instrumentos acústicos, eletromecânicos ou eletrônicos, de uma maneira interdisciplinar, buscando evidenciar o potencial de experiências que envolvam ambos os conhecimentos, sobretudo, com o cuidado de não utilizar a matemática para controlar, formatar ou buscar formas para criar estes instrumentos. Neste sentido, observamos estas duas áreas de conhecimento como componentes de um único dispositivo que integra saberes heterogêneos que permitem fazer e compreender a música em sua dimensão sonora e matemática.

Obviamente, esta é uma reflexão inicial, e esperamos poder continuar nos aventurando por esses caminhos, sejam em leituras, discussões e pesquisas, mostrando não o poder formatador da matemática ou a Ideologia da Certeza descritos por Borba e Skovsmose (2006), mas uma forma de pensar diferente, pensar o poder "desformatador", criador ou inspirador da música e da matemática, mostrando formas de se trabalhar ou enxergar uma nova maneira de se unir educacionalmente estas duas artes: a música e a matemática.

Referências e bibliografia

Borba, M. C., & Skovsmose, O. (2006). A Ideologia da Certeza em Educação Matemática. *Educação Matemática Crítica: A Questão da Democracia*. (3rd ed.). Campinas, SP: Papirus, 127-148.

Camargos, C. B. R. (2011). *Música e Matemática: A harmonia dos números revelada em uma estratégia de modelagem*. São Paulo, SP: Edgard Blücher.

[8] Trata-se da noção descrita por Félix Guattari em seu livro "As três ecologias" (Guattari, 1990). O autor busca ampliar a definição de ecologia ao englobar a ela três universos, a saber: o do ambiente, o das relações coletivas e o da singularidade do indivíduo. A unidade formada pela relação entre estes três universos é chamada por Guattari de Ecosofia.

Deleuze, G. (1990). ¿Que és un dispositivo? *Michel Foucault, filósofo*. Barcelona: Gedisa, 155-161.Trad.: Wanderson Flor do Nascimento. doi: http://escolanomade.org/pensadores-textos-e-videos/deleuze-gilles/o-que-e-um-dispositivo

Guattari, F. (1990). *As Três Ecologias*. Campinas. Papirus.

Holmes, T. (1985). *Electronic and Experimental Music: Technology, Music, and Culture.* (3rd ed.). Nova York: Routledge.

Knijnik, G., *et al*. (2012). *Etnomatemática em movimento.* Belo Horizonte: autêntica Editora.

Nespoli, E. (2014). Máquinas em transformação: arte sonora, agência e indeterminação. *Antropologia e performance: ensaios na pedra*. São Paulo. Ed. Terceiro Nome.

Parikka, J. (2012). *What is Media Archaeology.* Polity Press. UK.

Spiegel, M. R. (1992). *Manual de fórmulas, métodos e tabelas de matemática*. Trad.: RobertoChioccarello. Ed. rev. e ampl. São Paulo: Makron, McGraw-Hill, Coleção Schaum.

Walkerdine, V. O. (1995). Raciocínio em Tempos Pós-Modernos. Trad.: Tomaz Tadeu da Silva. *Educação e Realidade.* n: 20(2), jul./dez. 1995. 207-226.

Wisnik, J. M. (2007). *O Som e o Sentido*. 2 ed. São Paulo: Companhia das Letras.

Young, H. D. (2008). *Sear and Zemansky's University physics.* Física II: Termodinâmica e Ondas /Young e Freedman. Trad.: Cláudia Santana Martins. (12th ed.). São Paulo: Addison Wesley.

Novas possibilidades de ensino de Matemática com avaliação integrada

Ademir **Basso**
UNILAGOS e CEPACS
Brasil
ademir_basso@yahoo.com.br
María José C**áceres** García
Universidade de Extremadura
España
mjcaceres@unex.es
Lindemberg Sousa **Massa**
Universidade Estadual do Centro-Oeste
Brasil
lindmassa@gmail.com
Pilar **Azcárate** Goded
Universidad de Cádiz
España
pilar.azcarate@uca.es

Resumo

Neste trabalho se mostram os resultados de um projeto desenvolvido em um colégio da Região Sudoeste do Paraná, Brasil, o mesmo propunha um processo de ensino de Matemática diferenciado onde o processo avaliativo ocorria de forma integrada. Foram utilizados dois grupos de 1ª série de Ensino Médio, dessa forma, no grupo experimental, se utilizaram inúmeras estratégias para ensinar e a avaliação ocorreu integrada ao processo, utilizando-se de inúmeros instrumentos para recolher informações, já no grupo controle, o ensino e a avaliação ocorreram da forma tradicional. A análise dos resultados ocorreu qualitativamente e mostrou que quando o ensino de Matemática ocorre de maneira diferenciada os resultados se mostram melhores.

Palavras chave: ensino de matemática, novas estratégias, avaliação integrada.

Ensino e avaliação de Matemática

É uma realidade a ser enfrentada na maioria das escolas, uma grande parte dos professores ainda ensina Matemática, utilizando-se quase exclusivamente de forma expositiva, com predomínio de dados e conceitos, para que os alunos os aprendam baseando-se, de maneira geral, na recepção para poder ser capaz de reproduzi-los, de forma quase literal, em uma avaliação, geralmente um exame, habitualmente escrito, que se realiza ao final de cada período. A impressão que se tem é que, na prática, se continua esquecendo a realidade e interesse dos alunos de maneira que estes não descobrem a relação entre a Matemática e seu entorno cotidiano (Luckesi, 2005).

Por outro lado, atualmente se vive um tempo de grandes mudanças onde conhecimentos, ferramentas e formas de fazer e comunicar Matemática evoluem constantemente. A necessidade de estar preparado para usar a Matemática na vida diária e no trabalho nunca foi tão grande e continuará crescendo. Em um momento de mudanças como o atual, aqueles que entendem e utilizam a Matemática terão melhores oportunidades do que aqueles que não a utilizam (NCTM, 2000).

Dessa forma, a natureza das aulas de Matemática deverá modificar-se para transformar o papel tradicional do professor como transmissor de conhecimento e do aluno como agente passivo, para enfatizar uma aprendizagem matemática através da resolução de problemas, a comunicação e outras estratégias que impliquem na atividade do aluno. Em outras palavras, o objetivo é formar cidadãos que sejam matematicamente competentes na escola e em seu cotidiano (Chamoso & Cáceres, 2009; Harkness, D'Ambrosio, & Morrone, 2007; NCTM, 2000, Törner, Schoenfeld, & Reiss, 2007).

Neste universo, o principal objetivo do ensino de Matemática é colaborar para que os alunos desenvolvam competência matemática, que conheçam e façam Matemática e que sejam capazes de raciocinar logicamente no cotidiano onde estão inseridos e, portanto, intervir nele para melhorar suas vidas e a dos seus. Por isso, é necessário conhecer os alunos e mais, conhecer o que eles sabem e o que necessitam aprender já que o conhecimento deve ser construído a partir de suas experiências e seus conhecimentos prévios.

Para dar conta desse objetivo, o ensino de Matemática deve utilizar outras ferramentas além do quadro negro e o livro texto, ferramentas tais como a possibilidade de investigar e dar sentido a situações novas que permitam construir conhecimento, elaborar argumentos e estabelecer conjecturas que permitam o trabalho em grupos e onde o professor atue como mediador (Brasil, 2001).

Nesse sentido, os professores de Matemática devem trabalhar para que os alunos saibam muita Matemática, mas, além disso, que aprendam inúmeros conceitos concretos, o objetivo deve ser a formação integral do indivíduo. Devem-se formar pessoas que sejam capazes de afrontar problemas, que superem as dificuldades e que reconheçam os erros que cometem, de maneira geral, em muitas ocasiões se aprende mais dos erros que dos acertos. Definitivamente, o trabalho do professor de Matemática consiste em preparar os alunos nas aulas de hoje para viver e trabalhar em um mundo de amanhã (Chamoso & Rawson, 2003).

Neste contexto, tanto em Matemática, como em qualquer outra disciplina, a avaliação é uma das partes mais importantes do processo de ensino e aprendizagem e, geralmente, determina as demais ações de tal processo. Nesse sentido, muitos docentes já consideram que a chave da mudança no processo de ensino e aprendizagem é a evolução da concepção da avaliação porque não parece possível um progresso na maneira de ensinar se não houver uma profunda mudança na ideia e desenvolvimento da avaliação (Boud, 2000).

Mesmo sabendo que a avaliação é um processo humano, é consenso que foi na escola que a avaliação encontrou seu espaço mais fecundo como instrumento de comprovação de êxito dos objetivos de aprendizagem pelo aluno, associada a uma ideia de controle e sanção da aprendizagem, de busca de seus erros e de outorgar o nível de aprendizagem, na maioria dos casos, para classificar. Os instrumentos habitualmente utilizados foram as provas ou exames realizados de forma separada do processo de ensino e aprendizagem e geralmente sem consulta e reunindo todo o conteúdo estudado.

No entanto, atualmente se considera a avaliação como uma ferramenta que se pode utilizar para ajudar aos alunos para que alcancem suas metas, apoie sua aprendizagem e ministre informação sobre o processo de ensino e aprendizagem tanto aos alunos quanto aos professores. Ou seja, se entende que a avaliação deve ocupar um lugar de destaque como regulador dos processos de ensino e aprendizagem, e não servir unicamente como elemento de controle dos resultados dos alunos (Azcárate, 2006).

Neste contexto, na Educação Matemática, a avaliação atual se apresenta como um processo de reflexão sobre o funcionamento de um indivíduo ou de um grupo de indivíduos, no desenvolvimento e aplicação do conhecimento matemático, orientada a formação matemática de forma contínua tanto do indivíduo como do grupo. Desde esta perspectiva, ela é entendida como um elemento fundamental dentro do currículo que deve, portanto, ir integrada à instrução (Webb, 1992).

A avaliação em Matemática deve delimitar, obter e facilitar informação para a tomada de decisões para a melhora e reorientação do processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Para conseguir essa melhora se deve considerar a atuação do aluno em uma variedade de contextos tanto na aquisição do conhecimento da Matemática como da disposição perante a Matemática. Dessa forma, a avaliação implica uma situação, respostas a essa situação, análise dessas respostas, interpretação dos resultados e interpretação de todo o processo (Bell, Burkhardt, & Swan, 1992; Hadji, 2001; Rico, 1997).

A avaliação da aprendizagem dos alunos possui estreita relação com a avaliação da prática de ensino que os professores levam a cabo em sala de aula, por isso, é importante recordar que a avaliação do aproveitamento escolar em Matemática ou em qualquer disciplina, deverá incidir sobre o desempenho do aluno em diferentes situações de aprendizagem, sendo vedada a avaliação em que os alunos são submetidos a uma só oportunidade de avaliação, em outras palavras, ela deve utilizar técnicas e instrumentos diversificados para alunos que são, em essência diferentes (Chamoso & Cáceres, 2009; Paraná, 1999; Ross, McDougall, & Hogaboam-Gray, 2003).

Portanto, essa mudança pressupõe passar de um modelo de ensino a um de aprendizagem, de um modelo de aulas magistrais a um de diversificação de atividades, de um modelo de avaliação somativa e de controle, a um de avaliação formativa e de ajuda. O objetivo, neste modelo, consiste em analisar, descrever, explicar e compreender o ensino e a aprendizagem desde uma perspectiva conceitual em que a aprendizagem se concebe como um processo onde o aluno constrói o conhecimento e o ensino como uma mediação do professor nesse processo, de maneira que o objetivo final é conseguir que o aluno aprenda Matemática.

Um enfoque de ensino diferenciado

No colégio ao qual se destinou este projeto, aplicação e a pesquisa que hora se apresenta, o ensino e a avaliação em Matemática, como se supõe, não era a ideal, para exemplificar, no último período letivo antes da aplicação deste, as taxas de reprovação foram bastante significativas, consideradas altas em comparação com outros colégios da região e até quando comparadas com as taxas estaduais. É claro que essa realidade não é exclusiva da disciplina de Matemática, mas a mesma possui um peso grande nessa taxa de retenção.

Diante desta realidade, se planejou e se executou uma experiência de ensino diferenciada, onde o processo avaliativo estava integrado ao processo de ensino, ou seja, que as avaliações

ocorressem ao mesmo tempo que o ensino e a aprendizagem. Tendo a problemática instalada, se propôs desenvolver um processo de ensino e aprendizagem de Matemática com um novo enfoque, utilizando-se de outras estratégias que não somente a tradicional, um ensino onde a avaliação deveriam ocorrer de forma integrada, analisando as possíveis diferenças nos resultados.

A partir desta ideia, se propôs: possibilitar aos alunos um ensino de Matemática com características diferenciadas; oportunizar aos alunos uma avaliação integrada ao processo de ensino e aprendizagem de Matemática e por fim, observar as diferenças nos resultados da aprendizagem matemática, em dois grupos, após a implementação da experiência de ensino.

A realidade a ser enfrentado era o número de reprovações em Matemática na 1ª série do Ensino Médio deste colégio, as reprovações nesta série se mostravam maiores que os reprovados em outras turmas do mesmo colégio. É importante recordar que o grande número de reprovações, no ano anterior, era uma realidade das turmas de 1º ano de Ensino Médio, bem como a de outras turmas. Uma das hipóteses é, possivelmente, a questão da avaliação e o ensino não se dar de forma concomitante, ou seja, em algumas semanas se ensinava os conhecimentos/conteúdos enquanto que a avaliação ocorria, de maneira geral, ao final de um certo período.

Por essa razão, a ideia desta intervenção foi trabalhar com dois grupos de 1ª série do Ensino Médio durante parte do 1º trimestre de 2013, o grupo controle, com 33 alunos e o grupo experimental, com 27 alunos. Os conhecimentos trabalhados foram os pertinentes aos Conjuntos Numéricos, conteúdos tais como: formas de representar um conjunto, a questão da pertinência, tipos de conjuntos, operações com conjuntos e os conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais, irracionais e reais).

É importante recordar que o mesmo professor trabalhou com os dois grupos, que os conteúdos trabalhados foram os mesmos, no entanto a metodologia de ensino utilizada foi diferenciada, assim como os instrumentos avaliativos. Dessa forma, no grupo controle, o ensino se baseou na forma tradicional, ou seja, o ensino centralizado no professor e as avaliações, também de cunho tradicional, realizadas ao final de um período e ao final do conteúdo, sendo utilizada a prova escrita e sem consulta. Todas as avaliações tinham o peso de 10,0 pontos.

Já no grupo experimental, o professor trabalhou como orientador do processo, buscando fazer com que os alunos trabalhassem em grupo, buscassem no livro texto, na internet, em revistas, em figuras de outras fontes, respostas para as questões levantadas por ele. A intenção foi motivar os alunos para que fossem em busca do conhecimento proposto, foi fazer com que os alunos fossem instigados a buscar a solução dos desafios que o professor propôs. A avaliação, por sua vez, estava integrada ao processo de ensino e utilizou-se de inúmeros instrumentos para recolher informações. Apesar dos instrumentos serem diferenciados, todas as avaliações realizadas no grupo experimental, tinham o mesmo poso, ou seja, para cada atividade, as qualificações eram de 0,0 a 10,0 pontos.

O início da experiência se deu a partir da pergunta “como surgiram os números?”, dessa maneira o professor aplicou uma avaliação diagnóstica, aos alunos do grupo experimental, para descobrir o que eles sabiam ou recordavam a respeito dos números. Uma avaliação na forma de um questionário que continha perguntas tais como: Como surgiram os números? Quais são as provas que temos hoje do surgimento dos números? Para que eram usados os primeiros números? Onde, em que material, os primeiros números eram “escritos”? Como os povos mais antigos faziam para contar? Quando foi que o primeiro número “pisou” na face da terra? Após

recolher as avaliações e fazer a correção, o professor discutiu em sala com os alunos as respostas dadas, em forma de plenária, o que caracterizou mais uma avaliação, a oral. Como as questões eram abertas, houve respostas das mais variadas, por isso todas foram consideradas durante a discussão, mesmo destoando umas das outras.

Após a plenária, noutra aula, intencionando mostrar a Matemática no cotidiano, o professor mostrou a seus alunos a charge da sequência:

Figura 1: Charge de Matemática e cotidiano[1]

A mesma trazia uma conversa entre alunos em um contexto que ficava evidente a Matemática no cotidiano. Quando todos puderam observar a charge e discutir um pouco a respeito, o professor convidou os alunos a produzirem um texto a respeito da importância dos números. Para a construção deste texto, os alunos deveriam escolher um número que lhes agradasse, descrever o porquê da preferência e, por fim, ressaltar a importância dos números.

De posse dos textos, o professor os corrigiu, deus dicas de como melhorar os textos e oportunizou aos alunos que rescrevam seus textos e, em um segundo momento, tiveram a oportunidade de apresentar seus textos na forma de um desenho, ao fazerem deveriam esclarecer aos colegas e ao professor os motivos da escolha daquele número em especifico.

Seguido da apresentação dos textos com seus respectivos desenhos, os alunos foram convidados pelo professor a realizar uma pesquisa, utilizando os recursos que lhes parecessem melhores, para descobrir como surgiram os números. A pesquisa deveria ir além, deveriam fazer uma busca sobre os principais sistemas numéricos inventados pelo homem durante os tempos. Esta pesquisa deveria ser entregue na próxima aula, por isso, os alunos puderam realizá-la em casa ou mesmo na biblioteca do colégio no turno contrário ao deles. Esta pesquisa, em sua forma escrita foi recolhida na aula posterior e corrigida pelo professor. Enquanto o professor procedia a correção, os alunos se prepararam de maneira conveniente para apresentar a pesquisa, uns preparavam somente o discurso, preparando-se em sala de aula, outros produziram cartazes, foram à sala de arte, outros construíram slides, estes foram ao laboratório de informática.

Quando as apresentações foram finalizadas, o professor convidou os alunos a ler o texto sobre o ancestral dos números, material produzido pelo professor para este fim. Este texto contou um pouco da história dos números e dos principais sistemas numéricos conhecidos, na verdade,

[1] *Jornal Hoje Centro Sul Paraná* – Irati. 03 de outubro de 2012, p. 10.

esse texto complementou a pesquisa realizada pelos alunos. Após a leitura individual do texto, os alunos foram convidados a criarem algumas questões, uma a respeito da origem dos números e uma questão referente a cada sistema numérico apresentado no texto lido. As questões deveriam versar sobre os conhecimentos aprendidos, o objetivo era que seus colegas respondessem tais questões com o conhecimento relativo ao texto lido.

O próximo passo foi o recolhimento das questões criadas pelos alunos. Após recolhidas, foram selecionadas e as mesmas foram usadas para compor uma avaliação escrita que foi realizada em duas fases, o chamado teste em duas fases. Nesta avaliação, os alunos realizaram uma avaliação em sala de aula sem consulta e, ao terminar receberam a mesma avaliação, só que agora a realizaram com consulta. Foram utilizadas duas aulas para realizarem as duas avaliações, o objetivo desta forma de avaliar é dar duas oportunidades ao aluno, uma para mostrar o que estudou sobre os conhecimentos abordados e a segunda fase foi para que complementasse tais conhecimentos. Ao final da correção das duas avaliações, o professor fez uma média aritmética entre as duas notas, compondo apenas uma menção numérica.

Como próximo passo, o professor convidou os alunos para assistirem ao documentário "A História do Número Um"[2], o mesmo conta, de uma maneira bastante divertida, a história dos números. Enquanto assistiam, os alunos deveriam responder a um questionário que abordava questões a respeito desta magnifica história. Ao final do documentário, deu-se mais um tempo para terminarem de responder e se recolheu para correção. Após a correção e em uma aula posterior, em forma de plenária, o professor discutiu com os alunos as respostas levantadas, deixando-os opinar e defender suas colocações, caracterizando mais uma avaliação oral.

Na sequência, os alunos foram convidados a lerem o texto sobre os conjuntos numéricos, sendo o primeiro deles sobre o conjunto dos números naturais. Após a leitura, os alunos deveriam sair no pátio da escola e buscarem na realidade, objetos ou situações que pudessem ser representados pelos números naturais. Após o passeio pelo pátio, os alunos já em sala de aula, descreveram, em forma de um bilhete, alguns exemplos de objetos e/ou situações que poderiam ser representados pelos números naturais, seguido de uma justificativa.

Vencido esta etapa, os alunos leram o texto que mostra o que são, como se comportam e quais as principais características dos números inteiros. Após a leitura, os alunos foram convidados a inventar uma pequena história, onde na realidade contada deveriam aparecer situações que podem ser representados pelo conjunto dos números inteiros.

Nesse ponto da experiência, a leitura já estava mais frequente. Dessa forma, os alunos leram o texto sobre os números racionais e foram orientados pelo professor para que ao final construíssem um desenho. Esse desenho, acompanhado de um justificativa, deveria mostrar um objeto ou evento que pudesse ser representado pelo conjunto dos números racionais.

As leituras seguiram com o conjunto dos números irracionais. Após a leitura, o professor reúne alguns voluntários para fazer as experiências do π com objetos redondos e a experiência da beleza, usando o número de ouro para isso. Ao terminarem as experiências, os alunos, orientados pelo professor, formaram grupos e escolheram figuras em revistas, jornais ou outros e montaram uma colagem com figuras que representavam de alguma forma o conjunto dos números irracionais, ao lado da figura uma breve explicação da relação.

[2] Documentário do Canal *The History Channel*.

Na sequência, o texto apresentado aos alunos foi sobre a teoria dos conjuntos. Após a leitura, os alunos deveriam, de forma rápida, em um pedaço de papel, dar um exemplo de conjunto, citando elementos que pertencem a esse conjunto e elementos que não pertencem a este conjunto, conforme suas características.

O texto que se seguiu foi a respeito da representação de um conjunto. Após esta etapa vencida, o professor pediu aos alunos que se organizassem em duplas e os conduziu à biblioteca. Lá eles deveriam pesquisar em livros os conceitos, a forma de representar e exemplos de conjunto vazio; conjunto unitário; conjunto finito; conjunto infinito; subconjunto; igualdade de conjuntos e conjunto universo. Este trabalho deveria ser organizado e redigido para entregar ao professor.

A pesquisa foi realizada e entregue ao professor, mas mesmo assim, os alunos deveriam apresenta-la. Como havia inúmeros conteúdos na pesquisa realizada, foi organizado um sorteio. O sorteio definiria qual dupla apresentaria um determinado conteúdo e também qual o componente da dupla faria a exposição da pesquisa. Ao final de cada apresentação, o professor fazia comentários para complementar e para sanar dúvidas que apareciam.

Quando as apresentações da pesquisa terminaram, os alunos foram convidados a ler o texto a respeito das operações entre conjuntos, inicialmente com a união de conjuntos. O professor explicou a eles como se representava a união de conjuntos na forma de diagrama. Na sequência os alunos foram convidados a criarem um exemplo onde figuravam dois conjuntos, os mesmos deveriam ser mostrados sob a forma tabular, de diagrama e de propriedade, por fim, eles deveriam representar, sob a forma tabular, a união entre estes dois conjuntos criados.

Da mesma forma ocorreu com o texto da interseção de conjuntos. Como avaliação, os alunos deveriam criar uma situação real, nela deveriam aparecer dois conjuntos, assim como foi na união de conjuntos, os mesmos deveriam ser representados sob a forma tabular, de diagrama e de propriedade. Ainda na avaliação, em seu final, eles deveriam mostrar, na forma de diagrama, esta situação onde estes dois conjuntos possuem intersecção.

O mesmo procedimento foi adotado para o conjunto diferença e para o conjunto complementar, sendo que o professor mostrou a relação do conjunto diferença com o conjunto complementar. Para avaliar, o professor incentivou seus alunos a criarem dois conjuntos C e D, por exemplo, os alunos deveriam mostrar os mesmos na forma tabular, diagrama e propriedade. Ao final, eles deveriam mostrar, sob a forma de propriedade, o conjunto diferença C–D e D–C Ao final, os alunos explicavam a questão do conjunto complementar no exemplo dado por eles.

Para finalizar esta experiência, o professor elaborou uma avaliação final, chamada de *Gran Finale*, a mesma continha todo o conhecimento estudado até então e foi realizada em sala de aula com a duração de duas aulas. As questões que figuraram nesta avaliação final se assemelhavam às questões das inúmeras avaliações que foram realizadas durante todo o projeto. As questões eram teóricas, que recordavam os conceitos estudados, questões onde os alunos deveriam responder comparando com elementos do cotidiano, em outras deveriam desenhar, dar exemplos, enfim uma réplica, em tamanho maior das pequenas avaliações realizadas durante a aplicação do projeto.

As informações a respeito do progresso dos alunos foram recolhidas durante todo o processo, pois a cada avaliação realizada, se tinha as menções de seus conhecimentos e ao final de cada avaliação o professor efetuava o *feedback*, ou seja, as mesmas eram discutidas com o

grupo que aproveitava para sanar suas dúvidas. A avaliação final foi apenas mais uma delas e tinha o mesmo peso que as demais, participando, portanto, da média final.

O processo descrito até aqui foi efetivado na turma experimental, enquanto isso, na turma controle, o ensino e a avaliação foram trabalhados na forma tradicional, ou seja, os conhecimentos eram trabalhados no quadro negro, com o apoio do livro texto, o professor trabalhava exemplos, os alunos repetiam e a avaliação, por sua vez, ocorria semanalmente na forma de testes escritos sem consulta. Neste grupo, também foi efetuada uma avaliação final, com todos os conhecimentos estudados no período, essa também de cunho tradicional, um teste sem consulta. Ao final foi efetuada uma média utilizando todas as avaliações realizadas.

Ao terminar a experiência, foram recolhidos todos os dados que se mostram nas figuras 2 e 3. De maneira que a qualificação média do grupo controle foi 6,58 enquanto que a do grupo experimental foi 9,36. É importante destacar que comparar números pode não indicar quais alunos aprenderam mais, mas, neste caso, mostrou uma diferença notável em valores numéricos, nos resultados.

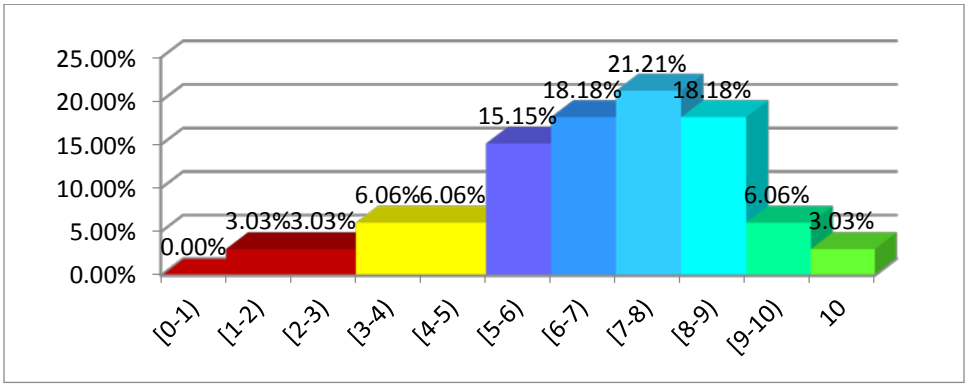


Figura 2: Frequência absoluta das qualificações médias obtidas pelos alunos do grupo controle

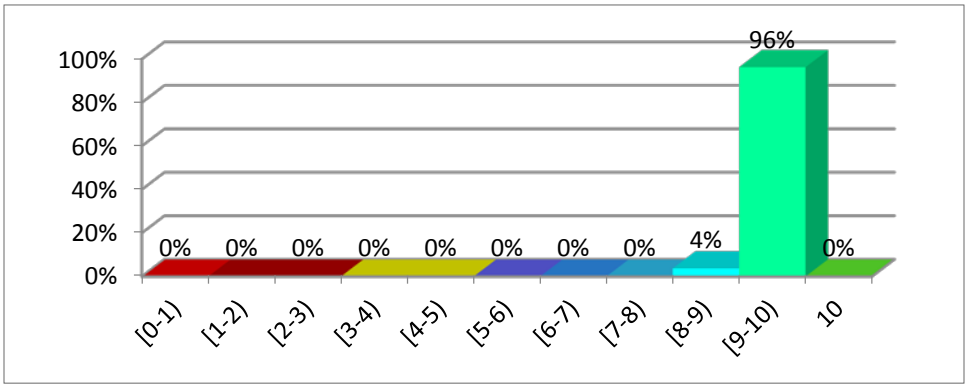


Figura 3: Frequência absoluta das qualificações obtidas pelos alunos do grupo experimental

A diferença entre as notas dos alunos do grupo experimental e do grupo controle é visível, aqui se mostra notas maiores, notas menos e uma média em cada grupo. Nesse contexto, no grupo controle, que realizaram nove avaliações durante o projeto, onde o ensino e a avaliação de Matemática tinham características tradicionais, um aluno obteve média final de 10,0, no entanto houve aluno com média de 1,50, outro com 2,90, um colega com 3,30, outro com 4,5, outro com 5,30 e outras notas abaixo da média mínima que é 6,00. Ao finalizar este projeto, a média final do grupo controle foi de 6,58.

Já no grupo experimental, ocorreram 21 momentos avaliativos ou avaliações durante o projeto. A maior média final ficou em 9,90 e a menor média final ficou em 8,80, esta média foi a única abaixo dos 9,00, a maioria das médias finais do grupo experimental ficou entre 9,00 e 10,0. A média final do grupo experimental ficou em 9,36. Como facilmente observado, a diferença entre os valores numéricos das médias dos dois grupos, foi bastante significativa.

É importante lembrar que os conteúdos/conhecimentos trabalhados nos dois grupos foram os mesmos, portanto, os dois grupos foram avaliados pelos mesmos conteúdos, más, como amplamente discutido neste trabalho, o processo de ensino e avaliação foi diferenciado. A avaliação final ou a *Gran Finale* foi realizada com os dois grupos, com os mesmos conteúdos, a diferença foi nas questões, no grupo controle, questões com viés tradicional e no grupo experimental com questões com viés diferenciado. A diferença observada quando ocorria as discussões ficou visível, pois os alunos do grupo experimental, perguntavam mais, respondiam com mais facilidade, mostrando que criaram o hábito de participar da aula.

Considerações finais

Recordando o objetivo geral deste projeto que foi desenvolver um processo de ensino e aprendizagem de Matemática onde o ensino e a avaliação deveriam ocorrer de forma integrada, a experiência mostrou que é possível ensinar Matemática e ao mesmo tempo avaliar, são duas partes de um mesmo processo que podem ocorrer de forma conjunta, ou seja, que o ensino e a avaliação podem se dar concomitantemente.

Ainda em se tratando dos objetivos do projeto, um deles era efetuar uma comparação nos resultados dos grupos experimental e de controle, dessa forma, observando os resultados, pode-se afirmar que é necessária uma mudança na maneira de ensinar e avaliar em Matemática, já que, nesta experiência de ensino, com o grupo experimental, os resultados foram significativamente melhores do que aqueles observados no grupo controle. Os alunos, nesta experiência, foram bastante receptivos quanto a esta forma de trabalhar, mostrando que é possível ensinar e avaliar de uma maneira integrada.

Como uma espécie de conclusão preliminar fica a ideia de que sejam utilizados diferentes recursos e estratégias para ensinar Matemática, estratégias diferentes daquela usualmente trabalhada, chamada de tradicional. A conclusão é preliminar, pois em um processo que sempre pode ser melhorado é difícil concluir algo em definitivo.

É possível também concluir que, assim como foi trabalhado neste projeto, é possível utilizar outros instrumentos avaliativos, que não somente os testes, para recolher informações a respeito da aprendizagem do aluno e do andamento do processo de ensino aprendizagem de Matemática. Trabalhando dessa forma, se pode evitar que a disciplina de Matemática continue sendo aquela que mais retêm alunos, aquela que é odiada e muitas vezes não compreendida por uma grande parcela dos alunos.

Como limitações deste trabalho estão as questões de realizar uma experiência com dois grupos distintos, com metodologias diferenciadas e com o mesmo professor, mesmo sendo essa a intenção, pois a comparação foi realizada sobre as diferenças nos resultados advindos de estratégias de ensino de Matemática diferenciados e da utilização de instrumentos avaliativos os mais diversos.

Quanto às perspectivas de futuro, seria interessante verificar o que ocorre com resultados de uma avaliação para recordar os conhecimentos/conteúdos trabalhados, ou seja, realizar a

mesma prova, com os dois grupos, do tema estudado, passado algum tempo, um mês, por exemplo e comparar novamente os resultados obtidos.

Referências e bibliografia

Azcárate, P. (2006): Propuestas alternativas de evaluación en el aula de matemáticas. En J.M. Chamoso (Ed.), *Enfoques actuales en la didáctica de las Matemáticas* (pp. 187-219). Madrid: MEC, Colección Aulas de Verano.

Bell, A., Burkhardt, H., & Swan, M. (1992): Balanced Assessment of Mathematical Performance. En R. Lesh & S.J. Lamon (Eds.), *Assessment of Authentic Performance in School Mathematics* (pp. 119-144). Washington D.C.: American Association for the Advancement of Science.

Boud, D. (2000). *Understanding learning at work*. Londres: Routledge.

Brasil. (2001). Parâmetros Curriculares Nacionais - Ensino Fundamental. *Matemática*. Brasília: MEC/SEF.

Chamoso, J.M., & Rawson, W. (2003). *Matemáticas en una tarde de paseo.* Colección Diálogos de Matemáticas. Madrid: Nivola.

Chamoso, J.M., & Cáceres, M.J. (2009): Analysis of the reflections of student-teachers of Mathematics when working with learning portfolios in Spanish university classrooms. *Teaching and Teacher Education, 25*(1), 198-206.

Hadji, C. (2001). *Avaliação Formativa*. Portugal: Porto Editora.

Harkness, S.S., D'Ambrosio, B., & Morrone, A. (2007): Preservice Elementary Teachers' Voices Describe how their teacher motivated them to do Mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 65*(2), 235-254.

Hoje Centro Sul (2012). Paraná: *Jornal de Irati*, 03 de outubro de 2012, p. 10.

Luckesi, C.C. (2005). Formalidade e criatividade na prática pedagógica. *ABC Educativo*, *6*(48), 28-30.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Virginia: NCTM.

Paraná (1999). *Deliberação N.º 007/99* de 9 abril de 1999. Conselho Estadual de Educação. Ensinos Fundamental e Médio.

Rico, L. (1997): Cuestiones abiertas sobre evaluación en Matemáticas. *Uno, 11*, 7-23.

Ross, J.A., McDougall, D., & Hogaboam-Gray, A. (2003): A Survey Measuring Elementary Teachers' Implementation of Standards-Based Mathematics Teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(4), 344-363.

The History Channel (2012). *A história do número um*. Disponível em: http://www.youtube.com/watch?v=3rijdn6L9sQ. Acesso em 19 de novembro de 2012.

Törner, G, Schoenfeld, A.H., & Reiss, K.M. (2007): Problem solving around the world: summing up the state of the art. *ZDM Mathematics Education, 39*(5), 353-563.

Webb, N.L. (1992): Assessment of Students' Knowledge of Mathematics: Steps toward a Theory. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 661- 683). New York: MacMillan.

Novo enfoque no ensino da Matemática relato de experiência: dimensionar, calcular e construir uma ponte em sala de aula

Marlon Freitas **Baptista**
Universidad Federal de Pelotas
Brasil
marlonf35@hotmail.com

Resumo

No presente artigo trataremos das novas perspectivas de ensino e de aprendizagem inclinadas à socialização e construção do conhecimento. Neste contexto este artigo busca compreender e aplicar o conhecimento matemático em uma nova atitude pedagógica através de estudos e experiências, onde o aluno através da interação com os demais integrantes de sala de aula, vivencia, cria, experimenta e participa de todo o processo de construção do seu próprio conhecimento, tornando-se o agente ativo de sua aprendizagem. Este artigo consiste no relato de experiência da construção de uma ponte com palitos de picolé. Utilizando cálculos e conceitos matemáticos, buscamos compreender e aplicar em sala de aula uma nova proposta de ensino baseado na participação ativa dos alunos, propiciando a eles o contato direto com os cálculos utilizados nas construções de pontes dos mais diversos modelos. Através de relatos obtidos em sala de aula abordaremos a nova tendencia pedagógica e seus resultados efetivos na aprendizagem de conceitos matemáticos utilizado diretamente em uma forma prática, atual e profissional dos alunos.

Palavras chave: Ensino-Aprendizagem de Matemática, construir uma ponte em sala de aula.

Introdução

Atualmente com a difusão de novas propostas pedagógicas e a busca constante de uma profissionalização com meio de mudança da realidade econômica, buscamos através deste artigo uma nova abordagem para o ensino da matemática. Nessa abordagem o aluno passa a ser o agente de construção do seu próprio conhecimento, vivencia, cria, experimenta participa de todo o processo, a construção do conhecimento voltado à profissionalização do educando, onde a aprendizagem passa a ser construída com a interação com os demais integrantes de sala de aula.

Utilizamos como agente motivacional, as possibilidades de construções tecnológicas com utilização dos conceitos de matemática como elemento propulsor de construção de uma ponte com palitos de picolé que suportasse uma força de compressão de no mínimo 100 Kgf.

> [...] os alunos são levados a aprender observando, pesquisando, perguntando, trabalhando, construindo, pensando e resolvendo situações problemáticas apresentadas, quer em relação a um ambiente de coisas, de objetos e ações práticas, quer em situações de sentido social e moral, reais ou simbólicos (Lourenço Filho, 1978, p. 151).

Ensino da Matemática com um novo enfoque Pedagógico, relato de experiências em sala de aula

De acordo com as transformações provindas da sociedade onde o desenvolvimento da tecnologia e um diferente modo de pensar cada vez mais presente no cotidiano escolar, a atividade profissional passa a ter um maior enfoque e por sua vez a escola, que ao longo deste processo vem sofrendo grandes dificuldades de motivação, ao ponto da grande maioria dos alunos preferirem outras disciplinas mais interativas e com o foco maior o ensino profissionalizante, do que o ensino tradicionalista e repetitivo da Matemática.

> educação como redenção, educação como reprodução e educação como transformação da sociedade. [...] A perspectiva redentora se traduz pelas pedagogias liberais e a perspectiva transformadora pelas pedagogias progressistas (Luckesi, 1993, p. 53).

Relato da Situação-Problema

Durante o relato de experiência buscamos a interação de todos aos alunos baseando-se em uma proposta de ensino, onde prioriza as atividades que fazem parte do cotidiano, a busca constante por inovação e conhecimento tecnológico.

Todavia buscando atender a estes questionamentos tecnológicos, propomos em sala de aula uma atividade que envolvesse a busca por uma profissionalização entrelaçando cálculos matemáticos, seus conceitos e fundamentos.

De acordo com Piaget (1924) o "professor não ensina, mas arranja modos de a própria criança descobrir. Cria situações-problemas", segundo propostas piagetianas o professor atua proporcionando, problematizando o ensino e não mais com o conhecimento centrado somente na exposição e na repetição de exercícios.

Os conhecimentos matemáticos aplicados em sala de aula durante o relato de experiência fazem parte do currículo escolar do ensino médio onde a decomposição de forças, cálculos vetoriais, lei de simetria, conceitos de força, peso, tração e compressão são aplicados nas disciplinas de matemática e física, trazendo assim também um enfoque multidisciplinar na construção e aprendizagem em ambas as áreas.

Discutindo a organização fragmentada do conhecimento nas escolas, Manacorda (1991) e Almeida Filho (1997) abordam que "o conhecimento veiculado nas escolas vem sendo organizado de forma tão estanque e fragmentado como a organização do trabalho industrial que coloca o indivíduo como objeto de ação parcial e obriga-o a constituir-se em um homem dividido, alienado, desumanizado. A realidade social e científica da modernidade é marcada por esta fragmentação".

Pensando então na desfragmentação disciplinar e com o objetivo de atender as necessidades pedagógicas atuais, aplicamos a proposta da construção de um ponte de palitos de picolé, com a finalidade de suporta uma carga peso de 100 Kgf (figura 1).

Figura 1. Aplicação da Situação Proposta: Construção de uma ponte com palitos de picolé.
Fonte: a pesquisa.

Os alunos foram divididos em grupos com 4 integrantes, onde deveriam dimensionar, calcular e construir uma ponte contendo apenas palitos de picolé e cola para madeira. Os cálculos matemáticos contendo também toda a fundamentação teórica da atividade deveriam ser elaborados através de um artigo em moldes científicos, contendo metodologia de pesquisa, cálculos e a explicação detalhada do projeto aplicado. Segundo (Charlot, 2005, P.85) "ensinar não é somente transmitir, nem fazer se aprender saberes. É, por meio dos saberes, humanizar, socializar, ajudar um sujeito singular a acontecer"

Esta ponte deveria suportar o peso de no mínimo 100 Kgf por um comprimento mínimo de 300 milímetros. A metodologia de avaliação seria que a ponte estando suspensa deveria suportar o peso do professor regente de sala de aula.

Figura 2. Teste da ponte.
Fonte: a pesquisa.

Utilizando de conceitos matemáticos e físicos, desenvolvemos exercícios e desmembramos formulas matemáticas de decomposição de vetores e momentos de uma força atuante sobre um corpo. Verificamos também a construção algumas leis físicas durante o processo de ensino e aprendizagem, onde a lei da simetria e a distribuição de forças eram a base de todo o desenvolvimento deste projeto.

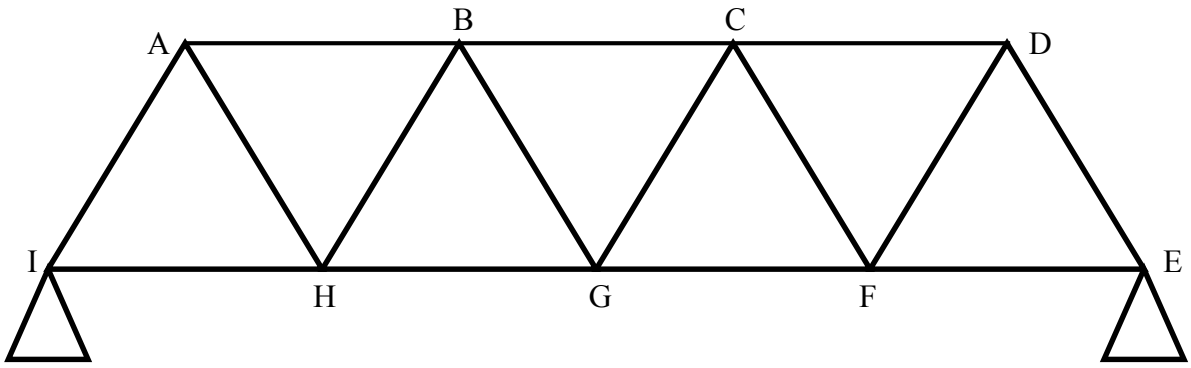
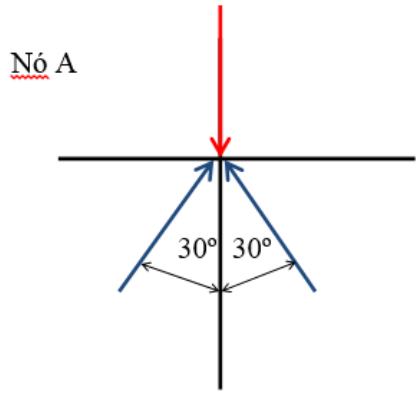


Figura 3. Aplicação da situação proposta: exemplo de uma ponte treliçada.
Fonte: a pesquisa.

Os exercícios realizados em sala de aula visaram o desenvolvimento dos cálculos matemáticos bem como o raciocínio lógico, juntamente com alguns conceitos da física que ajudariam no desenvolvimento de todo o processo de resolução do projeto. Foi necessária a atuação docente no acompanhamento das resoluções dos exercícios propostos, problematizando os conceitos matemáticos de uma forma prática e com o enfoque no projeto a ser executado, desta forma o entendimento dos conceitos da física e fundamentos da matemática para cada grupo de alunos teve um papel decisivo para um correto dimensionamento e escolha do ponte a ser construída "...é necessário elaborar intervenções didáticas que desestabilizem as certezas, levando o estudante a um questionamento sobre suas respostas." (Cury, 2007, p.80).

Dessa forma utilizando de exemplo de cálculos de decomposição de vetores podemos então iniciar o dimensionamento da ponte a ser construída em sala de aula. Através de varias discussões entre os grupos de alunos, eles escolheram o modelo e designer da ponte a ser projetada, calculada e construída.

Exemplo de cálculo de uma ponte treliçada.



$\sum FY = 0$
$B1.\cos 30° + B2.\cos 30° - 12,5 = 0$
$B1.\cos 30° + B1.\cos 30° = 12,5$
$B1.0,866 + B1.0,866 = 12,5$
$B1.1,732 = 12,5$
$B1 = 12,5 / 1,732$
$B1 = 7,21$ Kgf
$B1 = B2$

OBS: Como as barras 1 e 2 estão dispostas simetricamente, para efeito de calculo uniremos as mesmas.

$\sum FX = 0$

$B1.sen30º - B2.sen30º = 0$

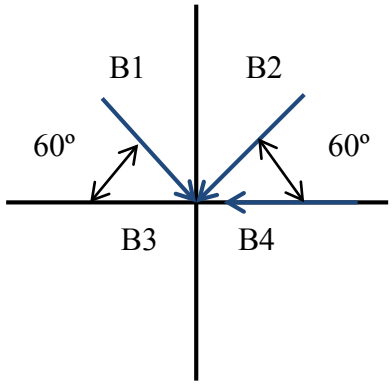
$7,21.0,5 = 7,21.0,5$

$3,6kgf = 3,6kgf$

Após a conclusão da decomposição das forças no Nó A, notamos que, os nós B, C e D, seriam iguais ao nó apresentado acima, pois a distribuição das barras são iguais. A barra B3 não sofrerá força alguma, se a carga for distribuída adequadamente, porém, ela poderá sofrer um esforço de tração ou compressão dependendo como o peso for aplicado inadequadamente.

Concluído a parte dos cálculos dos nós da parte de cima da treliça, iniciamos os cálculos das uniões da parte inferior da treliça, representados pelas letras F, G e H.

Nó G



Barra 1 = B1
Barra 2 = B2
Barra 3 = B3
Barra 4 = B4

Como o peso é distribuído uniformemente em toda a treliça, dividimos a carga que cada treliça suportará pelo número de nós em que será aplicado o peso.

Dessa forma obtivemos o valor necessário para iniciarmos a decomposição das forças na treliça.

Após a conclusão da decomposição das forças no Nó A, notamos que, os nós B, C e D, seriam iguais ao nó apresentado acima, pois a distribuição das barras é igual. A barra B3 não sofrerá força alguma, se a carga for distribuída adequadamente, porém, ela poderá sofrer um esforço de tração ou compressão dependendo como o peso for aplicado inadequadamente.

Os nós F, G e H, também apresentam simetria entre si

$\sum FY = 0$
$B1.sen60º + B2.sen60º = 0$
$7,21.sen60º + 7,21.sen60º = 0$
$7,21.0,866 + 7,21.0,866 = 0$
$6,24 + 6,24 = 0$
$12,48kgf = 0$

$\sum FX = 0$

$B1.\cos 60º + B3 - B2.\cos 60º - B4 = 0$
$7,21.0,5 + B3 = 7,21.0,5 – B4$
$3,6kgf = 3,6kgf$

Efetivados os cálculos no nó G, percebemos que os nós F e H serão iguais ao nó apresentado acima. No somatório das forçar em Y, notamos que devido há distribuição pelo triangulo que forma a treliça, os nós F, G e H estarão suportando uma força no eixo Y que não terá apoio. Já no somatório das força no eixo X haverá uma igualdade nos sentidos das forças, fazendo com que as forças sejam anuladas.

Os nós E e I são referentes aos apoios da ponte, esses nós são os pontos que ligam a ponte ao solo, por consequência, esses nós suportaram metade de toda a força aplicada sobre a ponte, ou seja, como calculamos para a estrutura resistir a um peso máximo de 150kg e como a mesma tem dois apoios igualmente distantes do centro da ponte, podemos definir que esses suportaram até 75kgf.

Após calculadas as forças atuantes em cada barra da estrutura, partimos para o dimensionamento das mesmas. Através de pesquisa e experimentos, definimos que um palito de picolé resiste em torno de 80kgf há uma força de tração. Como a ponte tem palitos que resistem a tração e a compressão, definimos através de testes que um palito resiste há 5kgf há uma força de compressão, porém, colamos dois palitos e refizemos os testes, dessa forma, os palitos resistiram há 27kgf. Devido às circunstancias, definimos um coeficiente de segurança igual a 3. Com esses dados, começamos a dimensionar a estrutura.

$\sigma_{adm}=\sigma_{rup}/ k$
$\sigma_{adm} = 27kgf/3$
$\sigma_{adm} = 9kgf$ a cada 2 palitos colados

Analisando o resultado obtido através do desenvolvimento da situação-problema podemos verificar que houve uma grande evolução na aprendizagem do conteúdo desenvolvido, todas os artigos foram corrigidos e o resultado foi excelente. Os alunos ficaram muito motivados no desenvolvimento da atividade pois chegaram a conclusão que as forças podem ser distribuídas igualmente pela lei da simétrica e que era possível sim a construção penas com palitos de picolé de uma ponte capaz de suportar uma força de compressão relativamente alta e que suportaria o peso de mais de 100 kgf.

Houve também uma maior socialização, integração e troca de conhecimento entre os alunos, o que complementa não só a aprendizagem, mas também a busca por uma metodologia que contemple uma educação voltada também para a cidadania.

Considerações Finais

É preciso afirmar e reafirmar que uma nova proposta pedagógica deve ser colocada em prática, relevando todos os pensadores inclusos na nova pedagogia. Formar alunos pensantes, capazes de criar. Aplicar a nova pedagogia levando em consideração o meio onde os alunos estão inseridos a busca pela atividade prática juntamente com a profissionalização e a realidade vivenciada em seu cotidiano, uma metodologia didática voltada a realidade de cada um, objetivando assim um aprendizado mais significativo e prazeroso.

> a principal meta da educação é criar homens que sejam capazes de fazer coisas novas não simplesmente repetir o que outras gerações já fizeram. Homens que sejam criadores,

> inventores, descobridores. A segunda meta da educação é formar mentes que estejam em condições de criticar, verificar e não aceitar tudo que a elas se propõe (Piaget, 1982, p. 246).

Referências

Anisio, P. (1995). *Tratado de Pedagogia.* Rio de Janeiro: Organização Simões.

Charlot, B. (2000). *Da relação com o saber: elementos para uma teoria* (Trad. Bruno Magne). Porto Alegre: Artes Médicas Sul.

Cury, H. N. (2007). *Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos.* Belo Horizonte: Autêntica.

Denora, T. (1995). *Beethoven and the construction of Genius. Musical Politics in Vienna, 1792-1803*. London: University of California Press.

Libâneo, J. C. (2008). *Didática: Coleção magistério, série formação do professor.* São Paulo: Cortez, 2008.

Lourenço Filho, M. B. (1993). *Introdução ao estudo da Escola Nova* (13ª ed.). São Paulo: Cortez.

Luckesi, C. C. (1993). *Filosofia da educação* (6ª ed.). São Paulo: Cortez, 1993.

Máximo, A. R. da Luz. Alvarenga, B. Álvares. (2003). *In Física – Coleção de olho no mundo do trabalho. A física no campo da ciência* (1ª ed., pp. 7-18). Editora Scipione.

Piaget, J. (1976). *Psicologia e Pedagogia*. Rio de Janeiro: Forense Universitária.

O ensino de Matemática nos primeiros anos de escolarização

Luciana Figueiredo Lacanallo **Arrais**
Universidade Estadual de Maringá-Paraná
Brasil
llacanallo@ig.com.br
Silvia Pereira Gonzaga de **Moraes**
Universidade Estadual de Maringá-Paraná
Brasil
silvia.moraes@uol.com.br
Augusta **Padilha**
Universidade Estadual de Maringá-Paraná
Brasil
augustapadilha@yahoo.com.br
Juliana **Vignoto**
Universidade Estadual de Maringá-Paraná
Brasil
vignotoju@gmail.com

Resumo

Este trabalho tem como objetivo refletir sobre a organização do ensino nos primeiros anos de escolarização, em especial o ensino de matemática. Para isso, primeiramente, expomos os dados de uma pesquisa que analisou as tarefas mais comuns realizadas pelas crianças do primeiro ano do Ensino Fundamental, a qual revelou-nos, dentre outros aspectos, que há uma secundarização do ensino de matemática neste nível de ensino. A partir desses dados, realizamos uma investigação, tendo como referência os pressupostos da Teoria Histórico-Cultural e a Pedagogia Histórico-Crítica, sobre o ensino das disciplinas formais na escola e sua inerente relação com o processo de aprendizagem e desenvolvimento humano. Este estudo permitiu-nos sintetizarmos premissas teóricas fundamentais para a organização do ensino.

*Palavras chave***:** Organização do ensino de matemática; disciplinas formais; processo de aprendizagem e desenvolvimento.

Introdução

O objetivo principal do presente trabalho constitui-se em refletir acerca da organização do ensino nos anos iniciais de escolarização, em especial sobre o ensino de matemática, a fim de encaminhar propostas para a educação escolar na atualidade.

Para isso, primeiramente, expomos os dados de uma investigação que buscou compreender como são trabalhados os conceitos matemáticos no processo inicial de escolarização, por meio do exame das tarefas mais comuns, realizadas pelas crianças desse nível de ensino. Esta pesquisa teve como fonte os cadernos dos alunos do primeiro ano do Ensino Fundamental, por meio dos quais analisamos as tarefas realizadas pelos escolares, focalizando os seguintes aspectos: tempo e espaço destinados ao ensino de matemática, as tarefas mais comuns, sua estrutura e desenvolvimento (Vignoto, Moraes; 2011). No âmbito das análises, compreendemos tarefa como a materialização das ações dos escolares, sob a direção do professor, no processo de ensino e aprendizagem.

Na sistematização dos dados sobre as tarefas contidas nos cadernos dos escolares, verificamos elementos relevantes sobre a organização do ensino de matemática no processo inicial de escolarização, bem como no que se refere à concepção de matemática presente na prática pedagógica desse nível de ensino.

Constatamos, por meio da análise dos dados, que as tarefas referentes ao ensino da língua materna ocupam maior tempo e espaço no processo de ensino e aprendizagem se comparadas com o ensino de matemática. De um total de 555 tarefas, 344 referem-se à língua portuguesa; 148, à matemática e 63 envolvem as duas áreas. Tal desigualdade merece reflexão, pois nos remete pensar sobre a relação entre o trabalho com o ensino da língua materna e as diferentes áreas de conhecimento.

A ênfase da prática educativa no trabalho com o código alfabético evidencia a concepção de que é preciso, primeiramente, aprender os códigos linguísticos (língua materna), por meio do processo de alfabetização, para, em um segundo momento, apropriar-se dos conceitos matemáticos.

Outra constatação, mediante a análise dos dados sobre as tarefas mais comuns nesse nível de escolarização, foi a predominância do eixo de conhecimento Números e Operações dentre os demais eixos matemáticos. Encontramos nos cadernos das crianças um total de 171 tarefas que trabalhavam o eixo Números e Operações; 32 referiam-se à Estatística e Probabilidade; dez, à Geometria; e apenas oito tarefas abordavam o eixo Grandezas e Medidas.

Destacamos que, em relação às tarefas que envolvem o eixo Números e Operações, mais de 80% referem-se à quantificação, e as demais exigem a escrita da notação numérica e cálculos. Compreendemos que o eixo de conhecimento Números e Operações é o mais trabalhado no primeiro ano de escolarização, devido ao fato de serem os signos numéricos a primeira notação matemática vivenciada pelas crianças. Verificamos a importância concedida à apropriação dos signos matemáticos, entretanto, torna-se relevante refletirmos sobre a persistência dessa desproporção entre os diferentes eixos de conhecimento matemático durante o processo de escolarização no Ensino Fundamental e, ao mesmo tempo, pensar se a quantidade de tarefas garante, efetivamente, a apropriação dos conceitos matemáticos pelos escolares, de modo que os mesmos utilizem-os nas suas práticas sociais.

Verificamos, tendo por base os dados analisados, que as tarefas mais comuns no ensino de Matemática no primeiro ano de escolarização são aquelas que objetivam a quantificação, o cálculo e a escrita numérica por extenso. Constatamos, também, a ausência de problematização no encaminhamento metodológico no ensino de matemática.

Essas constatações, no nosso entendimento, não são dados ou informações isoladas de determinadas escolas, são expressões particulares de uma totalidade universal que diz respeito à forma de organização da escola brasileira sob a ordem social vigente. Têm, portanto, suma importância à medida que contamos hoje com inúmeras pesquisas que apontam para o fracasso e a evasão escolar na Educação Básica, entre outros fenômenos que incidem nos processos de aprendizagem e desenvolvimento intelectual das crianças em idade escolar. Também temos os indicadores das avaliações nacionais e internacionais que declaram parâmetros de insuficiência de grande parte dos alunos em questões que envolvem conteúdos de Matemática, bem como o baixíssimo número de estudantes que conseguem adentrar as primeiras fases das chamadas Olimpíadas de Matemática. Por exemplo, nas Olímpiadas de 2009, do total de 19 198 710

estudantes inscritos na primeira fase, apenas 841.139 passaram para segunda fase, isso representa somente 4,4% em relação ao total de inscritos (Brasília – CGEE, 2014).

Os dados da pesquisa, realizada pelo Instituto Paulo Montenegro e a Organização Não Governamental Ação Educativa para estabelecimento do Indicador de Analfabetismo Funcional no Brasil (INAF), constataram que os brasileiros confiam menos na sua capacidade de cálculo do que nas de ler e escrever. Os pesquisadores verificaram, também, que 24% dos que completaram entre 5a e 8a séries do Ensino Fundamental ainda permanecem no nível rudimentar de alfabetização (São Paulo, 2014).

A análise sobre o baixo desempenho matemático dos brasileiros pode ser realizada, levando-se em consideração vários aspectos. Nos limites deste texto, consideraremos a concepção de matemática em relação ao ensino das disciplinas formais, à organização do ensino nos anos iniciais do Ensino Fundamental e às consequências do modo de trabalhar com as disciplinas formais para a apropriação dos conceitos matemáticos e a formação do pensamento teórico.

O ensino de Matemática como uma das disciplinas formais

Na sociedade contemporânea vivemos o momento histórico de negação da ciência, da prática sem a reflexão, em que se enfatizam a competência e a espontaneidade que favorecem o imediatismo, a subjetividade, limitando, com isso, a capacidade de reflexão dos sujeitos. É nesse contexto que encontramos a secundarização do ensino de matemática nos anos iniciais, ou seja, aprender os conceitos científicos matemáticos é um fator de segunda ordem no cotidiano das escolas.

Destacamos, também, que os dados levantados, tanto pela investigação sobre as tarefas mais comuns nos primeiros anos de escolarização quanto em relação ao desempenho dos alunos nas Olimpíadas de Matemática e do Índice de Analfabetismo Funcional dos Brasileiros, comprovam o que observamos na prática nas escolas dos anos iniciais de escolarização – o modo de condução do ensino de matemática, dentre os diferentes aspectos, destacamos a secundarização do ensino desta disciplinas.

Essa secundarização pode-se manifestar de diferentes maneiras, desde o processo de planejamento até a forma de execução do trabalho com os alunos. Não é raro verificarmos que o trabalho com a quantificação das letras do nome da criança, do número de estrofes de um poema ou dos dias da semana seja tomado como uma prática de ensino de matemática, como foi constatado na pesquisa de Vignoto e Moraes (2011). Ou seja, muitas vezes essa ação simples e direta de contagem e mesmo de registro são modos cristalizados de se trabalhar com os conceitos matemáticos nos anos iniciais de escolarização. Do terceiro ao quinto ano o ensino de matemática, privilegia o trabalho com os algoritmos, os cálculos desprovidos de problematização. Cabe questionarmos: Quais conceitos matemáticos estão sendo trabalhados nessas tarefas? Quais operações mentais os escolares desenvolvem com essa prática educativa?

Podemos inferir que essa forma de organização do ensino de matemática enfatiza a aprendizagem de procedimentos e técnicas destituídas de conceitos e de sua utilização social. A consequência desse ensino é que os escolares terão restrições em compreender e utilizar as formas mais elaboradas de controle de quantidades, das diferentes grandezas e espaço, bem como em formar o pensamento teórico.

Esses dados são indicadores que nos levam a questionar acerca da concepção de homem e de ensino que serve de base tanto para orientação/organização dos currículos escolares quanto para as metodologias empregadas pelos professores. O que fazer diante das constatações de que, hoje, a maioria das crianças, na escola, não está desenvolvendo intelectualmente o que de fato e de direito pode e deve desenvolver?

Encontramo-nos em uma época que os resultados das pesquisas no campo escolar precisam ser articulados com as causas e consequências de determinadas políticas educacionais. Uma articulação que aborda os seguintes aspectos: que focaliza na história da educação as necessidades da sociedade e como essas necessidades terminam em se expor nos processos pedagógicos; que localiza os fenômenos (dificuldade de aprendizagem, evasão e fracasso escolar, indisciplina e violência na escola, etc.) na expressão das circunstâncias atuais do modo capitalista de produção e seus interesses. Essa articulação exige que compreendamos as transformações do capitalismo e como, no interesse da manutenção da ordem social vigente, aperfeiçoam- se, por exemplo, na educação escolar, os mecanismos de controle das formas de formação docente e de avaliação institucional. De qualquer modo, chegamos a um patamar de dificuldades na administração dos fenômenos sociais, em especial no âmbito escolar, que por si só expõe a necessidade de uma transformação que movimente os interesses educacionais a favor das crianças e por causa delas.

Focalizamos, no presente texto, o ensino da matemática nos anos iniciais de escolarização, embora, a nosso ver, a análise não se restrinja a esse, mas, por meio da pesquisa do que acontece em relação ao ensino dessa disciplina, colocamos em foco o modo como é o trabalho com as disciplinas formais e suas consequências para a formação humana dos estudantes. Assim, constatar ou trazer ideias acerca da realidade escolar não basta para mudar o rumo dos encaminhamentos, mas o estudo e o debate a respeito de alternativas para a educação escolar na atualidade podem traduzir-se em força prática. Insistimos, nesse sentido, na concepção de homem e de ensino, engendrada e cultivada pelo Materialismo Histórico-Dialético e suas ramificações na Teoria Histórico-Cultural e na Pedagogia Histórico-Crítica.

De longa data existem investigações sobre o processo de aprendizagem e como esta se relaciona com o desenvolvimento intelectual das crianças, jovens e adultos. Desse modo, muitos estudiosos têm se dedicado à tarefa de constituir um conteúdo teórico-prático que integre estudos das áreas da Psicologia e da Pedagogia como forma de sistematizar o trabalho com o processo ensino e aprendizagem. Com base nos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural, compreendemos que

> O ensino nas escolas não pode limitar-se apenas a transmitir ao discípulo determinados conhecimentos, a formar um mínimo de aptidões e de hábitos. A sua tarefa é desenvolver o pensamento dos alunos, a sua capacidade de analisar e generalizar os fenômenos da realidade, de raciocinar corretamente; numa palavra, desenvolver "no todo" as suas faculdades mentais. Se se pretende alcançar essa meta, tem de se encontrar uma solução satisfatória para os problemas mais urgentes do ensino. O desenvolvimento do pensamento lógico é um dos fatores mais importantes do sucesso escolar. Todavia, isto não significa que qualquer ensino contribua para garantir esse desenvolvimento (Kostiuk, 1991, p. 25).

Nas afirmações do citado autor, encontramos algumas premissas por meio das quais podemos estruturar propostas para o trabalho com as disciplinas escolares. Isso significa que, a concepção de escola, de ensino, de aprendizagem e de estudante, devem ser concebidas na sua

interdependência e reciprocidade no processo de organização do ensino. Para exemplificar a inter-relação desses elementos, buscamos em Saviani a seguinte explicação:

> Em princípio, considero positivo o esforço em conseguir-se maior articulação entre as diversas disciplinas que compõem o currículo escolar. Isso porque o aluno é um todo e, como tal, deve ser formado integralmente, sendo as disciplinas meios pelos quais se busca atingir aquele objetivo formativo. O que se faz necessário é evitar que se traduza esse desejo de interligação como uma mistura a qual, aí sim, confundiria os alunos reforçando uma visão sincrética, isto é, uma visão indiferenciada dos aspectos que constituem a realidade que se quer compreender. Diferentemente disso, entendendo-se que a constituição das disciplinas se deu pela diferenciação dos aspectos que constituem o todo concreto, elas representam o momento analítico, mais avançado, portanto, que a visão sincrética em que se tinha a percepção do todo sem, porém, se compreenderem os seus aspectos constitutivos. O que se faz necessário, então, é que o ensino não se detenha nesse momento analítico, mas avance em direção ao momento sintético em que o todo concreto é reconstituído como articulação dos aspectos que o integram. Aí se chega à visão do todo, agora, porém, não de forma confusa mas de maneira clara, isto é, com consciência de suas partes constitutivas. É nesse ponto que ocorre, propriamente, a aprendizagem, isto é, o processo por meio do qual se passa da visão sincrética à visão sintética pela mediação da análise (Saviani, 2010, p. 138).

Consideramos também que "a aprendizagem ocorre em todas as fases do desenvolvimento da criança, porém, em cada faixa etária, ela tem não só formas específicas, mas uma relação totalmente original com o desenvolvimento" (Vigotski, 2000, p. 337). Assim, chamamos a atenção para a especificidade da aprendizagem que se processa por meio das disciplinas escolares, organizando o processo sucessivo do desenvolvimento intelectual dos alunos. Isto é,

> [...] a idade escolar é o período optimal de aprendizagem ou a fase sensível em relação a disciplinas que se apoiam ao máximo nas funções conscientizadas e arbitrárias. Assim, a aprendizagem dessas disciplinas assegura as melhores condições para o desenvolvimento das funções psíquicas superiores que se encontram na zona de desenvolvimento imediato. A aprendizagem pode interferir no curso do desenvolvimento e exercer influência decisiva porque essas funções ainda não estão maduras até o início da idade escolar e a aprendizagem pode, de certo modo, organizar o processo sucessivo de seu desenvolvimento e determinar seu destino (Vigotski, 2000, p. 337).

Compreendemos que há uma relação recíproca entre o ensino nos anos iniciais de escolarização e o desenvolvimento das funções psíquicas superiores, cujo processo é desencadeado com a inclusão das crianças em várias formas de atividade educativa intencional, dentre as quais incide a aquisição da leitura, da escrita, do léxico da língua materna, da gramática, da aritmética, da física, da geometria, entre outras. Tais aquisições não devem ser consideradas simples, mas sim um aperfeiçoamento da atividade cognitiva dos alunos e da sua capacidade para assimilar conhecimentos (KOSTIUK, 1991, p. 22). Poderíamos dizer que o processo de aprendizagem relacionado a tais aquisições exige da criança o que ela ainda não possui como função intelectual respectiva, que lhe assegure a linguagem escrita, por exemplo, entre outras aprendizagens.

Concordamos com Vigotski (2000) acerca das peculiaridades específicas da aprendizagem e do desenvolvimento precisamente na idade escolar e sua relação direta com a ótima fase ou período da vida das crianças em que poderá incidir o trabalho com a escrita, com a gramática e, em especial, com os conceitos científicos. De fato, nessa fase ótima para aprendizagem, a grande maioria das crianças se encontra matriculada nas escolas, frequenta as aulas ordinariamente, faz

as tarefas escolares, etc. Pode parecer contraditório que grande parte dessas crianças, em ótima fase para aprender as disciplinas escolares, acabe por não ter sucesso escolar, não termine o Ensino Médio ou não corresponda ao seu potencial de aprendizagem e desenvolvimento.

No processo de organização do ensino das diferentes disciplinas formais, em especial o de matemática, é fundamental considerarmos que

> Para descobrir o que no desenvolvimento do conhecimento beneficia o desenvolvimento psíquico, é **necessário conhecer como é assimilado o material escolar, ou seja, que operações de pensamento se usam**. É importante encontrar o nível de assimilação das noções a que chegaram diferentes alunos em diferentes etapas do cumprimento do programa (Bogoyavlensky, Menchinskaya, 2005, p. 75, grifos nossos).

Os autores chamam a atenção para a importante relação entre o processo de apropriação dos conteúdos escolares – os quais denominam de noções – e as operações mentais que os estudantes utilizam nesse processo, e é nessa relação que é possível compreender o nível de aquisição dos conhecimentos.

Bogoyavlensky e Menchinskaya (2005) defendem que o nível de aquisição dos conceitos não é determinado pela simples acumulação dos conhecimentos nem mesmo pela quantidade de tarefas a que os escolares são submetidos, mas sim pela qualidade das tarefas escolares propostas a eles, se estas são capazes de mobilizar as capacidades intelectuais, dentre elas, a atividade analítico-sintética.

Os referidos autores destacam que é impossível compreender o nível de assimilação e a atividade mental das crianças sem se referir à especificidade das disciplinas escolares. Bogoyavlensky e Menchinskaya (2005) detalham a especificidade de algumas disciplinas escolares (língua materna, história, ciências, matemática) e revelam que o conteúdo de cada disciplina exerce importante influência sobre as características do processo de ensino e aprendizagem. De acordo com Bogoyavlensky e Menchinskaya (2005, p. 80), "Parece-nos que as diferenças psicológicas na aquisição de diferentes disciplinas escolares se originam, em primeiro lugar, nas relações entre os elementos sensoriais e abstratos das noções implicadas". A seguir nos deteremos sobre a especificidade da disciplina de matemática.

Especificidade da disciplina de Matemática e a organização do ensino

No caso da matemática, diferentemente dos estudos da natureza, a qual avança da experiência visual para o abstrato,

> [...] os conceitos matemáticos (no campo da álgebra e das matemáticas superiores) compreendem noções em que a separação do pensamento e da realidade nunca é nítida, posto que o material inicial para estes setores da matemática compreendem apenas de conceitos abstratos. Em cada etapa superior de abstração, todavia, a aquisição de noções matemáticas baseia-se no conhecimento concreto adquirido na anterior etapa de aprendizagem. [...] Portanto, ainda que a ciência matemática se baseia exclusivamente em abstração, estas abstrações são um reflexo da realidade efetiva, ainda que muito alienada desta (Bogoyavlensky, Menchinskaya, 2005, p.81).

Krutetsky (1991, p. 60), nessa mesma direção, afirma que "[...] a matemática é essencialmente uma ciência que se ocupa das propriedades abstratas e generalizadas dos objetos e das suas relações". Trata-se, portanto, de características reais da função psíquica, que se realiza necessariamente na ontogênese humana, tendo em conta sua natureza dialética, nesse caso, manifestada na transformação gradual das ações exteriores em ações interiores, intelectuais. Tal

necessidade ocorre pelo fato de que o conteúdo central do desenvolvimento da criança consiste na apropriação, por ela, das aquisições do desenvolvimento histórico da humanidade, em particular das do pensamento e do conhecimento humanos. De acordo com Leontiev:

Assim, se se quer construir na criança uma nova acção intelectual, como a acção da adição, é preciso apresentar-lhe inicialmente como uma acção exterior, é preciso **exteriorizá-la**. A acção interior constitui-se, portanto, primeiro, sob a forma de uma acção exterior desenvolvida. Posteriormente, após uma transformação progressiva – generalização, redução específica dos seus encadeamentos, modificação do nível em que se efetua – ela interioriza-se, isto é, transforma-se em acção interior, desenrolando-se inteiramente no espírito da criança (Leontiev, 1978, p. 168, grifos nossos).

Essas definições sobre o ensino de matemática são importantes para pensarmos a organização do ensino atualmente. À medida que não podemos ensiná-la da mesma maneira que se ensinam conteúdos de Ciências Naturais, pela sua própria constituição, torna-se imprescindível que o seu ensino seja organizado de modo que os escolares se apropriem da linguagem científica e sua terminologia e dos sistemas simbólicos, como, por exemplo, da aritmética, álgebra. Trata-se de um processo mental, ligado inseparavelmente às palavras, as quais representam uma abstração da realidade; um processo de formação na criança que, nos estágios posteriores, quando o estudante já adquiriu a "[...] faculdade de compreender e de utilizar a linguagem seguida, os processos de aprendizagem revestem uma forma muito mais evoluída e a sua função complica-se, eleva-se de certa maneira" (Leontiev, 1978, p. 183).

Compreendemos que essa deve ser a direção/orientação da prática educativa em relação aos conteúdos escolares, em especial, os de matemática. O ensino deve ser organizado para que o processo de aquisição de conhecimentos torne-se um processo que provoque igualmente a formação no escolar de ações e operações interiores cognitivas, intelectuais, que, segundo Leontiev (1978), serve de ponto de partida para a aquisição dos conceitos, nas suas ligações e no seu movimento.

A nosso ver, o estudo desse processo, por parte de todos os professores da Educação Básica, poderia alavancar melhores resultados educacionais à medida que, desde os primeiros anos de escolarização, esses professores trabalhassem, organizando o ensino com mais clareza sobre o que Leontiev (1978, p. 184, grifos nossos) chama de "mecanismo de **interiorização** das acções exteriores" e Vigotski (1999, p. 74, grifos nossos) denomina de "**internalização** a reconstrução interna de uma operação externa." Para isso, consideramos fundamental que as políticas de Estado se encarreguem de priorizar, na definição do calendário escolar, horas necessárias aos estudos voltados ao ensino, cuja tarefa seja, inclusive, conduzir o estudante-criança a superar sua capacidade natural, fazendo todos os esforços para encaminhá-lo numa "forma evolucionada de pensamento abstrato" (Vigotski, 1991, p. 13).

> Em uma época como a que estamos atualmente, em que tantas crianças se encontram nas escolas, precisamente devemos trabalhar, consolidando novos conhecimentos e, assim, atuar no que se chama "zona do seu desenvolvimento potencial" no processo de apropriação dos conceitos (Vigotski, 1991, p. 13).

No curso do processo de ensino e aprendizagem, podemos perceber que são muitas as possibilidades de aquisição e ampliação do conhecimento que podem ser desenvolvidas no espaço escolar. A apropriação dos conceitos matemáticos, assim como os demais conceitos, são ferramentas que conduzem o desenvolvimento do psiquismo humano, confirmando, assim, a tese

de Luria (2006) de que os eventos ocorridos no externo refletem na consciência e regulam o comportamento do homem.

Organizar o ensino nas condições preconizadas até aqui torna-se um desafio, cujo enfrentamento exige, em especial ao professor, perseguir a meta de se trabalhar com conceitos matemáticos considerando, entre outros aspectos, o processo histórico- cultural em que foram criados e em que contexto são aplicados. Ao considerarmos o professor como dirigente do processo de ensino acrescenta-se, também, a responsabilidade em engendrar ou criar necessidades que motivem os escolares a aprenderem e desenvolverem suas capacidades humanas para as quais o desenvolvimento intelectual é condição.

Defendemos que o professor precisa apropriar-se, antecipadamente, do conhecimento a ser transmitido ao estudante; dominar as bases teóricas em que se pautam as situações de ensino e os elementos constituintes dos respectivos conhecimentos ministrados em sala de aula. Nesse processo de ensino e aprendizagem, compreendemos que aprender não é algo natural e que ocorre no imediatismo, mas se constitui, com a mediação dos instrumentos e a intervenção do professor, um processo de formação de novas qualidades psicológicas, tornando possível o acesso dos estudantes aos conhecimentos científicos.

Atualmente, o Grupo de Estudos e Pesquisa sobre a Atividade Pedagógica (GEPAPe-USP) tem pesquisado sobre os princípios teórico-metodológicos para organização do ensino, os quais foram materializados no conceito da Atividade Orientadora de Ensino (AOE). A AOE reconhece e procura explicitar a unidade entre a atividade de ensino e a atividade de estudo na atividade pedagógica. Isto é, a AOE busca articular a concepção de escola, aprendizagem, desenvolvimento, ao se constituir em um modo geral de organização do ensino, cujo conteúdo principal é o conhecimento teórico e seu objeto é a transformação do sujeito no movimento de apropriação desses conhecimentos (Moraes e Moura, 2009). Assim, o professor, ao organizar o processo de ensinar, também qualifica seus conhecimentos, por isso, a AOE constitui-se em unidade de formação do professor e do aluno (Moura, 1996, 2001).

As principais características da AOE são: a intencionalidade pedagógica; a existência de situação desencadeadora de aprendizagem; a essência do conceito como núcleo da formação do pensamento teórico; a mediação como condição fundamental para o desenvolvimento da atividade; o trabalho coletivo como contexto de produção e legitimação do conhecimento (Moraes e Moura, 2009).

Desse modo, consideramos que particularmente o professor, sob a coordenação do Estado, tem a importante tarefa de organizar o ensino que tenha como referência a cultura produzida no desenvolvimento da humanidade de forma a criar sentido para os escolares se apropriarem de conhecimentos que lhes permitam articular significados no seu meio social. Essa é uma tarefa que, certamente, demanda condições objetivas para sua efetivação. Uma delas, que destacamos, é a formação do professor, a qual deve ter como núcleo dos seus estudos sua atividade principal: o ensino.

Considerações finais

Este estudo permitiu-nos compreender questões teóricas e metodológicas importantes sobre a organização do ensino, em especial o de matemática no processo inicial de escolarização. Dentre elas destacamos que: o modo como são constituídas as disciplinas formais influencia diretamente o desenvolvimento intelectual dos estudantes. Em relação à disciplina de matemática

verificamos que, por suas propriedades abstratas e generalizadas, torna-a diferente de outras disciplinas, por exemplo: ciências da natureza. Isso implica que a organização do ensino de matemática precisa ser diferenciada. Nas atividades propostas aos escolares é preciso que eles apropriem das abstrações por meio de operações mentais.

Para que isso ocorra o professor precisa compreender como os diferentes conhecimentos são assimilados pelos escolares, quais as operações mentais necessárias para apropriação destes. Assim, na organização do processo de ensino e aprendizagem é fundamental que o professor tenha domínio dos conhecimentos matemáticos a serem ensinados (conhecimentos da área de referência – dimensão matemática); compreenda como o estudante se apropria destes conhecimentos (dimensão psicológica) e, também, como devem ser ensinados (dimensão pedagógica). Essas três dimensões – matemática, psicológica e pedagógica – devem ser concebidas de forma articulada e constituem-se fundamentais para a organização de ensino de modo que os escolares apropriem dos conhecimentos matemáticos e desenvolvam suas máximas capacidades intelctuais.

Destacamos, a concepção de homem e de educação expressas nos pressupostos da Teoria Histórico-Cultural e na Pedagogia Histórico-Crítica para repensarmos a escola atual. E, ainda, a Atividade Orientadora de Ensino (AOE) como base teórico-metodológica para a organização do ensino que promova a aprendizagem e o desenvolvimento humano dos estudantes. A aprendizagem não se constitui pelo acúmulo de conhecimentos, nem mesmo pela quantidade de tarefas realizadas pelos escolares, e sim, se a apropriação de conhecimentos e realização das tarefas incidem no desenvolvimento das funções psicológicas superiores, dentre elas o pensamento lógico.

Refletimos sobre a situação contraditória em que se encontra a educação brasileira, na qual conta com a maioria das crianças de seis a quatorze anos nas instituições escolares, porém o desenvolvimento intelectual dos estudantes é critico. Tal situação precisa ser enfrentada efetivamente pelos governantes, de modo que as políticas públicas educacionais não sejam apenas paliativas e emergenciais, ao contrário precisam ser sistemáticas e planejadas a longo prazo, de modo que os escolares possam ter uma educação de qualidade que garanta seu pleno desenvolvimento humano.

Com a intenção de prosseguir com os estudos nessa perspectiva, colocamos em relevo a tese de Leontiev (1978) de que quanto mais progride a humanidade, mais rica é a prática sócio-histórica acumulada por ela, mais cresce o papel específico da educação e mais complexa é a sua tarefa. Concordamos com esse estudioso, por considerarmos necessário que os escolares apropriem dos conhecimentos científicos em atividade escolar adequada, de modo especial, que garanta seu direito a um desenvolvimento livre e completo, não somente com relação à matemática, mas no conjunto das disciplinas escolares.

Referências

Bogoyavlensky, D. N. E Menchinskaya, N. A. (2005). Relação entre aprendizagem e desenvolvimento psicointelectual da criança em idade escolar. In. Leontiev, A., Vigotsky, L. S., Luria, A.R. e outros. *Psicologia e Pedagogia*. São Paulo: Editora Moraes. pp. 63-85.

Brasília, Centro de Gestão e Estudos Estratégicos (2011). *Avaliação do impacto da Olímpiada Brasileira de Matemáticas nas escolas públicas – OBMEP 2010*. Brasília: CGEE, http://server22.obmep.org.br:8080/media/servicos/recursos/251395. Acesso: 30 de Mar de 2014.

Kostiuk, G. S.[et al.] (1991) Alguns aspectos da relação recíproca entre educação e desenvolvimento da personalidade. In: *Psicologia e pedagogia*: bases psicológicas da aprendizagem e do desenvolvimento. São Paulo: Editora Moraes, pp. 20-36.

Krutetsky, V. A.(1991) Algumas características do desenvolvimento do pensamento nos estudantes com pouca capacidade para as matemáticas. In: Luria, A.R.; Leontiev, A.;Vigotski, L.S. *Psicologia e Pedagogia* II.Lisboa: Editorial Estampa.

Leontiev, A. N. (1978). *O desenvolvimento do psiquismo*. 2. ed. São Paulo: Centauro.

Luria, A. R. (2006). O Cérebro Humano e a Atividade Consciente In Vigotskii, L. S.; Luria, A. R.; Leontiev. *Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem*. São Paulo: Ícone.

Moraes, S. P. G. Moura, M.O. (2009). Avaliação do processo e ensino e aprendizagem em matemática: contribuições da teoria histórico-cultural. *Bolema*, Rio Claro, Ano 22, n.33. pp. 97-116.

Moura, M. O. de.(2001). A atividade de ensino como ação formadora. In: Castro, A. D.; Carvalho, A. M. P. (Orgs.). *Ensinar a ensinar*. São Paulo: Pioneira, pp.143-162.

Moura, M. O (1996). A atividade de ensino como unidade formadora. *Bolema*, Ano II, n. 12, pp. 29-43.

Saviani, D. (2010). *Interlocuções pedagógicas: Conversa com Paulo Freire e Adriano Nogueira e 30 entrevistas sobre educação.* Campinas, SP: Autores Associados.

São Paulo, Instituto Paulo Montenegro, Ação Educativa**.** *Indicador Nacional de Alfabetismo Funcional (INAF) Brasil/2007***.** Disponível em: http://www.educacao.salvador.ba.gov.br/site/documentos/espaco-virtual/espaco-dados-estatisticos/indicador%20de%20analfabetismo%20funcional%202007.pdf. Acesso em 18 de Abr de 2014.

Vignoto, J. Moraes, S. P. G. (2011) Prática de ensino de matemática: uma análise sobre os cadernos dos escolares. *Anais***.** I Encontro de Educação Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Marília.

Vigotski, L.S. (2000). *A construção do pensamento e da linguagem*. São Paulo: Martins Fontes.

Vigotski, L.S. (1999). *A formação social da mente.* São Paulo: Martins Fontes.

Vigotski, L.S. [et al.] (1991) Aprendizagem e Desenvolvimento Intelectual na Idade Escolar. In: *Psicologia e pedagogia: bases psicológicas da aprendizagem e do desenvolvimento*. São Paulo: Editora Moraes, pp.1-17.

Reflexões sobre educação financeira no ensino fundamental

Neiva Ignês **Grando**
Universidade de Passo Fundo
Brasil
neiva@upf.br
Lidinara Castelli **Scolari**
Instituto de Desenvolvimento Educacional do Alto Uruguai
Brasil
lidinaracastelliscolari@gmail.com

Resumo

Este trabalho tem como objetivo analisar se as interações produzidas no desenvolvimento de uma proposta didático-pedagógica baseada na reflexão de um documentário possibilitam a apropriação de significados sobre educação financeira, com vistas à conscientização por parte dos estudantes sobre sua importância e necessidade para a tomada de decisões financeiras conscientes. A metodologia da pesquisa é de abordagem qualitativa, tendo seus objetos de análise sido compostos por gravações em áudio das aulas, material produzido pelos estudantes, planos de ensino/aulas e memórias da professora/pesquisadora. O estudo analítico desta pesquisa foi desenvolvido à luz dos pressupostos da teoria histórico-cultural. Concluiu-se que as propostas pedagógicas que priorizam a interação social para a atribuição de sentido qualificam o processo de ensino-aprendizagem e propiciam a evolução cognitiva dos sujeitos envolvidos.

Palavras chave: educação financeira, consumismo, atribuição de sentido.

Introdução

Em um sistema capitalista, a ideia do crédito fácil é tida como critério de inclusão, em que seu status é medido de acordo com seus bens, induzindo o ser humano a utilizar-se dessas facilidades para satisfazer certas necessidades que lhe são impostas. Dessa forma, o ser humano passou a consumir independentemente de sua capacidade financeira, ocasionando um endividamento. De acordo com Segalla e Perez (2012), houve um aumento espantoso no índice de consumo das famílias brasileiras, fator decisivo para tornar o Brasil um dos países campeões de vendas em diversos setores, aumentando mais rapidamente o ranking no consumo comparado a outros países.

Mas a questão é que a sociedade está sendo bombardeada por ofertas de crédito fácil e gastando dinheiro abusivamente sem ter tido qualquer aula, instrução ou até mesmo auxílio sobre cómo se comportar diante dessa nova realidade, fato esse que faz com que pessoas muitas vezes contraiam empréstimos, até chegar a situação de endividamento, ocasionando um problema pessoal e social.

De acordo com os dados do Instituto Brasileiro de Defesa do Consumidor, deve-se refletir sobre a importância de ter uma educação financeira de qualidade, na qual as pessoas saiam da escola com uma ideia de como agir na sociedade de consumo (IDEC, 2008, p. 4).

Apesar de a Matemática, e em especial os conteúdos de Matemática financeira, estarem presente na vida das pessoas, percebem-se lacunas no processo ensino-aprendizagem, justificadas pelas dificuldades apresentadas pelos estudantes na resolução de problemas simples, relacionados com o dia a dia de qualquer cidadão.

Nesse contexto, o objetivo geral dessa pesquisa, de abordagem qualitativa, a qual de acordo com Minayo, "[...] trabalha com o universo dos significados, dos motivos, das aspirações, das crenças, dos valores e das atitudes" (2010, p. 21), concentra-se em analisar se as interações produzidas no desenvolvimento de uma proposta didático-pedagógica possibilitam a apropriação de significados dos conteúdos de educação financeira.

Utilizaram-se como objetos de análise gravações de aulas, memórias da professora/pesquisadora, planos de ensino e de aulas, material produzido pelos estudantes e planejamento dessas aulas. A proposta foi desenvolvida com uma turma de 7º ano do ensino fundamental, composta por 22 estudantes, de uma escola da rede municipal de ensino de Getúlio Vargas/RS/Brasil.

Foram desenvolvidas dezesseis aulas[1], as quais foram, por sua vez, divididas em três etapas: a primeira e a segunda etapas apresentam dois episódios[2] cada e a terceira etapa envolve quatro episódios. Esses episódios se apresentam em sequências, envolvendo transcrições menores das falas dos sujeitos envolvidos na pesquisa. Na concepção de Mortimer, "cada episódio pode conter várias sequências que são episódios menores evidenciando situações de construção de significados ou rupturas e lacunas no processo de significação" (2000, p. 196). Para facilitar ao leitor a localização dos diálogos nas sequências, esses são apresentados em turnos, que, segundo Raupp, define como "falas relevantes para a análise do episódio [...], os quais são numerados para facilitar a localização dos trechos do diálogo durante a análise" (2009, p. 49). Em cada episódio de ensino, registraram-se uma ou mais sequências, tendo como foco a atribuição de sentido na interação entre aluno e aluno e entre alunos e professora que pudessem identificar situações de aprendizado e desenvolvimento.

Fundamentos da pesquisa

Dentre os estudos realizados, destacam-se nesse artigo para embasar o processo de análise realizado, alguns conceitos e significados sobre educação financeira e reflexões acerca da formação de conceitos, atribuição de sentido e interação tomando como base principal a teoria histórico-cultural.

Educação Financeira

Ao pensar em educação financeira, deve-se ter em mente os vários aspectos que estão ligados ao tema, como ética e dinheiro, consumo consciente, altas taxas de produção de lixo, impacto ambiental, exercício de cidadania e sustentabilidade. Embora seja um tema com importantes contribuições ao ser humano e a natureza, pode-se perceber, a partir de experiências, que a temática não se faz presente na grande maioria das escolas de educação básica.

A falta de educação financeira está refletida nas palavras de Theodoro, ao apontar que,

[1] Cada aula é composta por dois períodos de 50 minutos.

[2] Segundo Carvalho, um episódio do ensino se constitui num "conjunto de atividades e discussões que tem por objetivo a aprendizagem de um determinado conceito ou aspecto importante do conceito por parte significativa dos alunos" (apud Mortimer, 2000, p. 265).

> [...] pesquisas que comprovam que setenta e cinco por cento dos brasileiros das classes C, D e E não se preocupam com o valor dos juros a ser pagos numa compra. Outro agravante é que o consumidor brasileiro paga os juros mais altos do mundo. Com a estabilidade aparente da economia, a facilidade de se obter crédito e devido à influência da mídia (cada vez mais voltada para o consumo), perde-se a percepção de controle dos gastos e fica-se cada vez mais vulneráveis ao endividamento e dificuldade de sair dele (2010, p. 173).

Um dos fatores que contribuem para essa situação é o crédito fácil oferecido por agências financeiras, sendo que um número significativo de pessoas acaba usando sem limite seus cartões de crédito, muitas vezes sem consciência e sem condições de julgar por si próprio a melhor modalidade financeira, impossibilitando a reversão no quadro de inadimplência.

Esse fato acontece porque a educação financeira não consiste simplesmente em conhecer a moeda e suas modalidades de serviços, mas, como afirma Negri,

> [...] é um processo educativo que por aplicação de métodos próprios, pelos quais as pessoas de diversas idades, níveis sociais, raça ou cor, permite que as pessoas desenvolvam atividades que auxiliem na manipulação do seu dinheiro ou títulos que as representem; são informações e formações importantes para que as pessoas exerçam uma atividade, um trabalho, uma profissão e lazer, tendo acesso ao bem-estar, que faz com que os seres humanos tenham vontade para vencer as dificuldades do dia a dia (2010, p. 19).

Para que seja proporcionada a verdadeira educação financeira, especialmente nas escolas da educação básica, é preciso abordar seu conteúdo de modo que tenha sentido para o aluno. Sobre esse aspecto, Panizza defende essa ideia quando diz que "[...] não é possível tratar o tema da aprendizagem e o ensino da Matemática sem se referir seriamente à questão do sentido" (2006, p. 19), ou seja, os alunos deveriam poder estabelecer relação entre o que estudam na escola com situações relacionadas ao seu dia a dia ou a outras áreas do conhecimento.

Reflexões acerca da formação de conceitos

Pensar em educação financeira é também pensar nas condições de ensino da Matemática financeira na escola, e esse, por sua vez, lançaria o desafio aos educadores de refletir sobre sua prática pedagógica, a fim de planejarem aulas contextualizadas e relacionadas aos demais conhecimentos escolares. Na falta de aulas contextualizadas, os conteúdos ficam apenas no plano superficial, sendo que, para Vigotski, "o estudo isolado da palavra coloca o processo no plano puramente verbal [...]" (1998, p. 66). Nesse caso, os conteúdos, em especial de Matemática financeira, ficam soltos, sem sentido, o que passa a não ter significado para o estudante. Além disso, para o autor, "um conceito não é uma formação isolada, fossilizada e imutável, mas sim uma parte ativa do processo intelectual, constantemente a serviço da comunicação, do entendimento e da solução de problemas" (1998, p. 67).

Ao refletir sobre o processo ensino-aprendizagem, uma das dificuldades encontradas ao pensar a formação de conceitos é que, segundo Vygotsky (1998), as escolas muitas vezes não consideram os conceitos espontâneos dos alunos, dando valor e atenção aos conceitos científicos. No entanto, para se conseguir uma evolução real do pensamento, é necessário que haja a interação dos dois conceitos.

Com essas considerações teóricas, percebe-se que é importante que a escola construa uma proposta pedagógica baseada, inicialmente, na realidade de seu público-alvo, levando em consideração sua bagagem intelectual, preocupando-se em ampliar as estratégias de pensamento dos estudantes, buscando o desenvolvimento da autonomia de pensamento, provocando

aprendizagens mais significativas. Ainda nessa concepção, para Tugde (1996), é fundamental que a escola conheça os conceitos prévios dos alunos, priorizando em suas propostas de sala de aula a interação a fim de que o estudante possa estabelecer relações entre conhecimento espontâneo e o conceito formal.

Tomando como base a sala de aula de matemática, a atribuição de sentido aos conceitos científicos escolares por parte dos estudantes depende da natureza das interações sociais, tanto entre professor/aluno como entre aluno/aluno. O estudante necessita estabelecer relação entre a Matemática estudada na escola e sua aplicação no meio em que está inserido, para que, assim, consiga atribuir sentido ao que está estudando na escola. Essa ideia é enfatizada por Leontiev (1978), ao referir que, para uma atividade ter sentido ao sujeito, deve atender as suas necessidades. Para o referido autor, o sentido refere-se ao significado pessoal da palavra para cada indivíduo, dessa forma, o sentido é produzido por relações, ou seja, "[...] o sentido é antes de mais nada uma relação que se cria na vida [...]. O sentido consciente é criado pela relação que se reflete no cérebro do homem, entre aquilo que o incita a agir e aquilo para o qual a sua ação se orienta como resultado imediato. [...] o sentido consciente traduz a relação do motivo ao fim" (p. 103). Em relação a essa questão, Panizza esclarece que,

> A palavra 'sentido' parece estar cada vez mais presente nas preocupações dos professores sobre o ensino da matemática. 'Como conseguir que os alunos encontrem o *sentido* da atividade matemática?', 'Os alunos agem mecanicamente sem dar *sentido* ao que fazem', entre outras, são expressões habituais dos professores. A palavra 'sentido' parece explicar intenções, conquistas e frustrações. No entanto, questões como qual significado se atribui à palavra, onde se encontra o sentido, se é algo que o docente *dá* ou o aluno *constrói* e em que condições, longe de serem claras e compartilhadas, comportam profundas diferenças e contradições (2006, p. 19, grifos do autor).

Dessa forma, esse fator (falta de sentido) pode impossibilitar o estudante de relacionar aquilo que vê na sala de aula com o que vivencia fora dela.

Descrição da proposta didático-pedagógica

Ao elaborar a proposta, optou-se por utilizar duas abordagens didático-pedagógicas, resolução de problemas e investigação matemática em sala de aula. A escolha pela resolução de problemas é justificada pelo fato de que, de acordo com Pereira, esta "tem seu grau de importância relacionado à quantidade de ideias novas que ele traz à matemática e o quão ele é capaz de impulsionar os diversos ramos da Matemática, sobretudo àqueles em que ele não está diretamente relacionado" (2007, p. 2). A resolução de problemas tem ganhado força nos últimos tempos e vem se destacando entre as metodologias, além de ser uma das tendências em Educação Matemática.

E a escolha pela abordagem didático-pedagógica de investigação matemática em sala de aula se deu em razão de que, segundo Ponte et al., essa metodologia de ensino possibilita ao estudante experimentar, discutir, formular conjecturas, e participar ativamente no processo ensino-aprendizagem. De acordo com os autores, nessa atividade de ensino-aprendizagem, "o aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjeturas e na realização de provas e refutações, mas também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor" (2013, p. 23). Essa proposta contribui para o desenvolvimento de cidadãos mais autônomos, criativos e reflexivos, promovendo um ensino-aprendizagem baseado em questionamentos e não apenas em respostas. De acordo com os referidos autores, nas atividades baseadas na abordagem de investigação matemática em sala de

aula o professor instiga os estudantes a se envolverem, dialogarem, discutirem, defenderem suas ideias, num ambiente de troca e negociação do conhecimento. As atividades de investigação matemática em sala de aula envolveram a elaboração de um orçamento doméstico, de uma cesta básica, de um jogo, e a escrita de um livro sobre educação financeira.

Iniciou-se a proposta solicitando que os estudantes respondessem a um questionário sobre educação financeira, respondido individualmente e, a partir desse instrumento de pesquisa, foram organizadas as atividades seguintes.

Na segunda aula, iniciou-se assistindo a um documentário "Criança a alma do negócio", com o objetivo de proporcionar aos estudantes um momento de reflexão sobre sua vida, seu comportamento em meio à sociedade de consumo: será que realmente precisamos comprar tudo que vimos para sermos felizes? Realmente necessitamos de tudo que compramos? Após, os estudantes receberam quatro questões sobre o tema, que foram respondidas em duplas e apresentadas para o grande grupo em forma de seminário.

Na semana seguinte (aulas três e quatro), iniciou-se com o estudo de razão, tendo como objetivo trabalhar os conteúdos previstos no plano de ensino, mas sem deixar de lado o foco da educação financeira, contemplando a questão do consumismo e o consumo consciente. Privilegiou-se como tópico o consumo consciente da água, levando os estudantes a refletir sobre quanto de água estão gastando, se estão economizando e consumindo conscientemente. Para introduzir esse tópico, a professora trouxe um texto sobre o consumo de água, o qual foi lido e discutido em aula. Para a próxima aula os estudantes deveriam uma conta de água de sua residência. Para a quarta aula os estudantes organizaram-se em duplas de acordo com a afinidade de cada um, e a proposta foi de que realizassem uma pesquisa sobre o seu próprio consumo de água e de sua família, buscando responder às seguintes questões:

a) aproximadamente quantos litros de água você e sua família utilizam por dia? E mensalmente?

b) Quantos litros de água são utilizados para tomar banho? Para lavar roupa? Para lavar louça?

Para responder a esse conjunto de perguntas, os estudantes poderiam consultar as contas de água de sua residência para pesquisar quanta água é utilizada em um minuto de banho, ou em outra atividade e ainda poderiam pesquisar na internet. Feita a pesquisa, os estudantes deveriam refletir sobre uma maneira de organizar os dados coletados em uma tabela, para entregar na aula, seguinte.

Para a quinta aula, os estudantes já estavam com a apresentação dos resultados da pesquisa, então, foi possível fazer algumas considerações sobre a importância do consumo de água consciente, e cada um conseguiu ver se estava dentro do considerado correto ou se poderiam economizar, e no que deveriam economizar. Após, a professora introduziu a ideia de razão através de uma tabela elaborada pelos estudantes.

Na sexta aula, os estudantes desenvolveram as atividades individualmente, as quais envolvendo situações-problema sobre razão, com o objetivo de fixar o conteúdo introduzido na aula passada. As atividades foram retiradas do livro didático adotado pela escola, com modificações nos dados para que ficassem mais próximos da realidade daquela turma.

Nas aulas seguintes (sétima, oitava e nova), foi dada ênfase a proporção e grandezas diretamente e inversamente proporcionais, introduzindo-os com base em situações-problema

retiradas do livro didático adotado pela escola. As situações-problemas foram facilmente trazidas para a realidade da turma, como, desconto por litro de combustível, distância entre a escola e zoológico da Universidade de Passo Fundo. Para a dedução da propriedade fundamental das proporções, a professora usou um jogo, e para a introdução de grandezas, a professora utilizou os mesmos exemplos do conteúdo de proporção. Foram apresentadas situações para identificar a relação de regra de três simples, entre as grandezas, sendo que para isso, a professora retomou todos os conteúdos que já haviam sido estudados até aquele momento. O objetivo dessa proposta consistia em mostrar aos estudantes que os conteúdos matemáticos, em especial os de Matemática financeira estão todos interligados, que um é a base para outro, e que naquele caso para identificar a relação representada por uma regra de três seria necessário ter distinguido a diferença entre grandezas direta e inversamente proporcionais, o que por sua vez, necessita do conteúdo de proporção. E as proporções dependem da compreensão de razão. Feito essa retomada, a professora entregou a atividade para aquela aula, a qual iniciou com uma situação-problema entre duas grandezas, na qual apenas três dados eram conhecidos, sendo necessário encontrar o quarto valor.

As atividades da décima aula foram realizadas individualmente, para introduzir o conteúdo de porcentagem a professora confeccionou um cartaz e colou no quadro branco, com várias imagens contendo anúncios de promoção de lojas, taxas de descontos, e outras situações em que aparecesse o símbolo de porcentagem, como no exemplo a seguir:

Figura 1. Cartaz sobre porcentagem.

Após, a professora fez perguntas aos estudantes sobre o significado daquelas imagens, indagando se havia algo em comum entre elas. Perguntava, também, o que havia de matemática nesse contexto e onde poderiam ser encontradas, no dia a dia, imagens como as que estavam vendo. A partir dessa situação, os estudantes desenvolveram o conteúdo de porcentagem e escreveram matematicamente seu significado, tanto na forma de razão, como em números decimais, representando assim uma taxa centesimal. Posteriormente, a professora solicitou que fizessem uma pesquisa sobre o surgimento da porcentagem, escrevendo um pequeno texto com as próprias palavras, para ser apresentado na aula seguinte.

A décima primeira aula iniciou com a socialização, na qual os estudantes comentaram sobre o que haviam encontrado na pesquisa realizada. Após isso, foi introduzido juro simples,

utilizando duas situações-problema, a primeira situação se tratava de uma pessoa que não tinha a quantia de dinheiro necessário para comprar uma casa, sendo assim teria que pegar emprestado de um banco a quantia que faltava. E a segunda situação envolvia o caso de uma pessoa que conseguiu economizar certa quantia de dinheiro e irá aplicar essa quantia em um banco. Nos dois casos, pediu-se para os estudantes o que ocorria com a quantia de dinheiro na hora de pagar o empréstimo. Permanecia igual? Na segunda situação, ao resgatar a quantia depositada após algum tempo, a pessoa receberia a mesma quantia depositada? Os estudantes foram provocados a responder as indagações da professora, justificando sua resposta. Com base nessas situações-problema, os estudantes, juntamente com a professora, desenvolveram o conteúdo de juro simples e representaram matematicamente seu significado. Como tarefa extraclasse, os estudantes, em duplas, deveriam elaborar dois problemas envolvendo juro simples, com base em panfletos.

Na décima segunda aula, após as discussões e correção da atividade de tema de casa, as duplas trocaram os problemas elaborados como tema de casa, ou seja, entregaram para outra dupla os problemas elaborados em casa e em troca receberam de alguma dupla, outros dois problemas para resolver. Concluída essa atividade, os estudantes continuaram em duplas para a realização da próxima atividade, que foi um trabalho de pesquisa no laboratório de informática da escola, no qual as duplas deveriam pesquisar sobre o que é um orçamento doméstico e como elaborá-lo. Com isso, as duplas deveriam elaborar um orçamento doméstico, seja o seu próprio orçamento, seja baseado em sua família ou em uma família fictícia. Como tema de casa, cada dupla deveria elaborar uma apresentação para socializar com os demais colegas, sobre orçamento construído e uma conclusão em relação ao tema proposto.

Na aula seguinte (décima terceira), a atividade prevista foi a socialização dos resultados obtidos com a pesquisa para o grande grupo. Como tarefa de casa, as mesmas duplas deveriam fazer uma pesquisa em pelo menos dois supermercados sobre os produtos que uma cesta básica contempla e qual seu custo. Feito isso, deveriam pesquisar também o preço individual de cada item que contém a cesta básica, em pelo menos dois supermercados.

Para a décima quarta aula, os estudantes trouxeram as informações coletadas na pesquisa de campo Antes de iniciar a atividade, a professora fez um comparativo entre os preços das cestas básicas, a fim de refletir sobre as diferenças encontradas na pesquisa. A atividade pensada para esta aula foi que cada grupo deveria fazer a simulação de uma cesta básica com base nos dados da pesquisa de campo, tendo disponível, para isso, hipotéticos R$ 100,00. Podiam optar pelos produtos e marcas que disponibilizariam na cesta básica, devendo ser levado em conta os preços dos produtos unitários. No final, cada grupo deveria entregar a pesquisa de campo e a cesta básica, especificando cada item em relação à quantidade, preço e marca. Para a próxima aula, os grupos deveriam apresentar a cesta básica simulada para os demais colegas.

No penúltimo encontro (décima quinta aula), os estudantes apresentaram os resultados obtidos com a atividade de simulação de uma cesta básica. Além disso, foi feito um jogo sobre educação financeira "Administrando seu dinheiro de forma consciente". Em grupos, os alunos receberam um jogo, contendo um tabuleiro, quatro peões de cores diferentes (amarelo, vermelho, azul e verde), 60 fichinhas plásticas (sendo 15 de cada cor), para serem usadas para marcar a compra de uma propriedade, 25 fichas redondas contendo mensagens, 84 cédulas (distribuídas em 14 cédulas de 500, 14 cédulas de 200, 14 cédulas de 100, 14 cédulas de 50, 28 cédulas de 10, totalizando 12180) e um dado. As regras estavam descritas nas instruções do jogo. Como tema de casa, os estudantes deveriam organizar um livro sobre educação financeira, em duplas, com

base nas atividades desenvolvidas nas aulas ou poderiam recorrer a outras fontes. E no último encontro, os estudantes entregaram o livro sobre educação financeira e responderam pela segunda vez ao questionário, utilizado como instrumento de pesquisa.

Análise de um episódio da situação didática

Para a análise, seguiu-se a mesma lógica da sequência desenvolvida em sala de aula. Porém neste trabalho dar-se-á maior ênfase a primeira etapa, em especial o episódio no qual analisa-se o documentário sobre a influência das mídias nas decisões de consumo.

Esse episódio inicia com a projeção de um filme intitulado "Criança, a alma do negócio". O objetivo dessa exibição era o de levar os estudantes a refletirem sobre a influência da mídia na sociedade atual, na qual as crianças e os adolescentes estão sendo os principais alvos a serem atingidos. O filme apresenta alguns dados impressionantes, como por exemplo, o de que o necessário para uma determinada marca atingir uma criança é de apenas 30 segundos. Ou até que 80% da influência de compra em uma família vem das crianças. Após a visualizaçãso do filme, foram elaboradas algumas questões, as quais foram respondidas em duplas, a fim de identificar a percepção dos estudantes frente a essa realidade.

A primeira questão apresentada foi sobre o que eles perceberam ao assistir o filme, podendo-se observar que alguns alunos têm uma preocupação em relação ao futuro e uma percepção em relação à influência direta das mídias para elevar o grau de consumismo, como pode ser verificado nas falas[3] que se seguem.

Primeira sequência

1. E_{19} - Percebi que as pessoas têm a mania de comprar e não têm o controle sobre o que elas compram.
2. E_{10} - A mídia influencia muito na vida e no caráter das pessoas, e está fazendo com que as crianças brinquem menos e comprem mais, perdendo sua infância.

[...]

3. E_2 - Hoje em dia tá mudando a consciência, o consumismo tá cada vez maior e se não mudarmos isso, nosso futuro estará comprometido.
4. E_5 - Que mesmo tendo as coisas, as crianças continuam pedindo outras coisas e quando os pais compram, elas deixam de lado e querem outra.
5. P - Acham que se elas tiverem aquela sandália vão ser feliz, vão ser melhor e depois que elas têm a sandália, vão ver que não é aquilo que precisavam e vão querer outra coisa. E a gente não é assim também?
6. E_7 - É sim, eu quando era pequenininho queria uma sandália do Nekstil, daí minha mãe me deu.
7. P - Gente e a partir do vídeo, agora o que a gente vai começar a fazer? A gente tem que começar a pensar, se realmente o que a gente vê é o que a gente tá precisando, e não sair comprando tudo que vimos pela frente.

[3] Os estudantes foram identificados como E_1, E_2, ... E_{22}, e a professora pela letra P. As transcrições das gravações obedeceram às falas dos sujeitos, com poucas correções gramaticais, utilizando-se: [...] para mostrar que houve supressão de algumas falas, para as quais não se evidenciaram necessidade de análise; ( ) para introduzir informações afim de explicar ao leitor o que estava ocorrendo nos diálogos.

Nesse contexto, pode-se perceber que alguns estudantes ultrapassaram as mensagens do documentário e se posicionaram mais criticamente em relação à influência que as mídias e as publicidades têm na sociedade atual, principalmente na vida das crianças e se mostraram preocupadas com o futuro (por exemplo, E_2, turno 3). E outros se deram conta de que já foram influenciados através da televisão e seus personagens, a comprar determinado produto, (por exemplo, E_7, turno 6). Nessa sequência a professora contribuiu de forma positiva, fazendo com que os estudantes refletissem sua realidade, sugerindo que começassem a rever suas atitudes e seu senso crítico frente aos seus gastos, para que não se deixassem influenciar e nem comprassem coisas desnecessárias, que os bens materiais não os deixariam mais felizes. Acredita-se que a intervenção, nesse caso da professora, foi válida no sentido de avançarem em suas zonas de desenvolvimento proximal, considerando que para Vygotsky (1998) a intervenção auxilia a criança a realizar o que não consegue fazer sozinha hoje, mas que com ajuda conseguirá realizar e compreender. No entanto, ao questionar os estudantes sobre suas atitudes a partir do vídeo, a professora poderia ter deixado um tempo para que os próprios estudantes refletissem e respondessem, ao invés de somente emitir sua própria opinião.

Em relação à questão, que estava relacionada ao que nos define como pessoas a maioria se referiu a qualidades pessoais, como caráter, atitudes, maneira de pensar, ou seja, destacam o lado mais humanista para definir uma pessoa, não levando em consideração os seus bens materiais e sua aparência como pode ser percebido nas falas dos estudantes a seguir.

Segunda sequência

1. E_2 - O jeito de pensar, de se vestir (por conhecer o estudante pode-se dizer que o mesmo leva em consideração os bens materiais), de fazer escolhas e o comportamento na sociedade.
2. E_{15} - Nosso caráter, nossas atitudes, a maneira de pensar, pensando nas amizades como ser um bom amigo, querendo e tendo vontade de mudar o que é preciso ser melhorado, sendo você mesmo e não o que os outros querem que você seja.
3. E_{22} - Muitas pessoas pensam que para ser pessoas de verdade precisam estar na moda, mas na verdade o que nos define é o caráter, ter boas atitudes, ser uma boa pessoa.

[...]

4. P - Gente, eu usar uma roupa de marca influência na pessoa que eu sou?
5. Vários estudantes - não.

[...]

6. E_4 - Se aquele grupo veste roupa mais de rico, daí quem veste roupa mais simples não pode.

Observa-se que há aqueles que levam em consideração os bens materiais e o status/aparência para definir uma pessoa (por exemplo, E_2, turno 1). Embora o estudante citado pareça estar preocupado com o comprometimento do futuro, e demonstre ter consciência do consumismo excessivo, assim mesmo deixa transparecer que a roupa que usamos nos define como pessoas, ou seja, leva em consideração a aparência e os bens materiais. Outro fato que chama atenção é que embora um número significante pensa que a marca não influencia na pessoa como um todo, há aqueles estudantes que afirmam que para participar de certos grupos sociais é necessário usar roupas de grife (por exemplo, E_4, turno 6). A maioria deixa transparecer que não leva em consideração esse quesito, ou seja, se mostra mais humanista, define o ser humano por seu caráter e suas atitudes e não pela marca da roupa que veste (por exemplo, E_{22}, turno 3). Ao pensar na prática da professora, observa-se que essa profissional poderia ter interagido quando

esta questão foi tratada, instigando os estudantes a exporem mais suas ideias e não apenas seguir o roteiro da aula.

Sobre a questão que perguntava se as mídias influenciam nas tomadas de decisões financeiras e como influenciam, todos responderam afirmativamente, o que demonstra que os estudantes têm clareza que são influenciados mesmo que muitas vezes sem ter consciência desse fato.

Terceira sequência

1. E_4 - Influenciam muito as pessoas, principalmente as crianças, que acabam querendo comprar o que veem na TV. Isso se torna um desejo para o dia a dia das crianças, e elas sabem que implorando muito aos pais eles darão a ela, só para agradá-la. Dessa forma, gastam mais do que o necessário.
2. E_{11} - Fazendo propaganda que influencia os telespectadores a consumir mais, assim gastando muito dinheiro.
3. E_{13} - Sim, pedindo para que compremos certo produto, e até certa marca.

Os estudantes demonstraram ter consciência sobre a influência da mídia na tomada de decisão de compras, estimulando as pessoas (crianças principalmente) a consumirem cada vez mais, gerando no consumidor pensamentos de necessidades ilusórias e compulsivas. As crianças e adolescentes são mais visados por essas propagandas, por exercerem certa influencia sobre seus pais na hora da compra, fazendo com os pais comprem determinado produto mesmo sem necessidade, apenas para agradar seu filho (por exemplo, E_4, turno 1). Outro motivo de as crianças e os adolescentes serem facilmente influenciados deve-se ao fato de serem inexperientes para discernir sobre o que é transmitido pelas mídias, vindo ao encontro do que Strasburguer acredita, ao referir-se que "as crianças aprendem o comportamento observando outros diretamente na vida real e, de um modo substitutivo, através dos meios de comunicação" (1999, p. 87). Mais uma razão para que se desenvolvam conteúdos de educação financeira na escola, uma vez que os mesmo podem auxiliar o estudante a ser um cidadão crítico, que saiba analisar conscientemente o que ocorre na sociedade e à sua volta.

Quando questionados a se posicionarem quanto à afirmação de que vivemos em um país com regime democrático, e, por isso, poderíamos afirmar, somos livres para decidir o que é melhor para nossa vida, a maioria respondeu afirmativamente, mas alegou que se deve cuidar a parte financeira para não acabar endividados, como pode ser observado no diálogo que segue.

Quarta sequência

1. E_4 - Em minha opinião, acho que todos nós somos livres para fazer e decidir o que queremos, a gente pode usar o que quiser, ir aonde quiser, sem ninguém nos criticar. Hoje podemos ver que muitas pessoas deixam-se levar por outros, mudando seu jeito, sua aparência para não ser criticado, mas somos livres [...].
2. E_{19} - A gente não resiste, porque a gente é influenciado por qualquer coisa.
3. E_{22} - Podemos comprar tudo que queremos, mas temos que cuidar, porque às vezes as pessoas se endividam e não conseguem pagar tudo o que consumiram, mas podemos escolher o que quisermos, somos livres para usar e comer o que queremos.
4. E_1 - Sim, somos livres para decidir o que fazer e o que ser em nossas vidas, mas temos que escolher certo.

5. E_{21} - Sim, somos livres para fazer os nossas escolhas, mas devemos tomar cuidado com a parte financeira.
6. P - Se eu sou uma menina e eu querer raspar o meu cabelo?
7. E_{19} - Pode.
8. P - E eu vou ser aceita no grupo do qual faço parte?
9. E_{19} - Depende, se todo mundo for raspar, se todas as meninas forem raspar o cabelo.

[...]

10. E_4 - O que vale é a amizade.

Nessa perspectiva, pode-se dizer que todos veem a liberdade de uma forma simples e natural, e que todos a possuem, embora se deva arcar com as consequências daquilo que se faz. Por exemplo, pode-se sair comprando tudo o que quiser, mas deve-se cuidar a parte financeira, para não acabar se endividando e comprometendo vários anos de sua vida (como por exemplo, E_{22} turno 3, E_1 turno 4, e E_{21} turno 5. Por outro lado, há aqueles que dizem que o ser humano não é livre para fazer suas escolhas, uma vez que é influenciado pelo meio em que vive (E_{19}, turno 2). Em relação à turma como um todo, subtende-se que, para eles, ser livre é não se prender a preconceitos e regras sociais, mas ter a capacidade de raciocinar e entender por si mesmo qual o melhor caminho a seguir.

Conclusões

A partir desse estudo é possível afirmar que as práticas de sala de aula fundamentadas num cenário para investigação em sala de aula são diferentes daquelas baseadas em exercício. Sendo que, com momentos de reflexões e discussões acerca de temas transversais, como no caso o consumismo e a educação financeira auxiliam os estudantes a refletirem sobre suas atitudes, perceber a importancia de ter um senso crítico e possíveis mudanças de pensamento frente a essa realidade. Ou seja, as crianças/adolescentes podem atuar como sujeitos na construção de uma sociedade educada financeiramente, como cidadões críticos e reflexivos, auxiliando, assim, diretamente na economia de sua família e, consequentemente, de seu país.

Nesse sentido, os professores e as escolas, de maneira geral, precisam estar atentos à importância do seu papel na formação de pessoas mais conscientes e de sua participação na sociedade. A educação financeira pode ser o fio condutor de conteúdos tradicionais da matemática desenvolvidos no formato de temas transversais, além de contribuir na capacitação e preparação dos estudantes para atuarem de forma crítica na sociedade contemporânea.

Acredita-se na importância de estimular os estudantes a refletirem sobre os aspectos financeiros de forma comprometida e criativa, independente da faixa etária, pois se as pessoas tiverem a oportunidade de aprender a planejar sua vida econômica, profissional e pessoal, desde cedo terão mais abtidão para administrar sua vida com mais eficiência.

Referências bibliográficas

IDEC. *Estudo sobre o crédito e superendividamento dos consumidores dos países do Mercosul*. São Paulo, 2008. Disponível em: <http://www.cm-santarem.pt/apoioaomunicipe/Informao%20ao%20Consumidor/Endividamento%20Excessivo%20no%20Brasil_2013.pdf>. Acesso em: 20 maio 2013.

Leontiev, A. N. (1978). *O desenvolvimento do psiquismo*. Lisboa: Horizonte Universitário.

Minayo, M. C. de S. (2010). O desafio da pesquisa social. In S. F. Deslandes, et al. (Orgs.), *Pesquisa social*: *teoria, método e criatividade* (29ª ed., pp. 9-29). Petrópolis: Vozes.

Mortimer, E. F. (2000). *Linguagem e formação de conceitos no ensino de ciências*. Belo Horizonte: Editora UFMG.

Negri, A. L. L. (2010). *Educação financeira para o Ensino Médio da rede pública: uma proposta innovadora* (Dissertação de Mestrado em Educação). Centro Universitário Salesiano de São Paulo, São Paulo.

Paniza, M. (2006). *Ensinar Matemática na Educação Infantil e nas Séries Iniciais: análise e propostas.* Porto Alegre: Artmed.

Pereira, A. L. (2007). *Problemas matemáticos: caracterização, importância e estratégias de resolução.* Disponível em <http://www.ime.usp.br/~trodrigo/documentos/mat450/mat450-2001242-seminario-8-resolucao_problemas.pdf>.

Ponte, J. P. da et al. (2013). *Investigações Matemáticas em sala de aula* (3ª ed.). Belo Horizonte: Autêntica.

Raupp, A. D. (2009). *Educação matemática: processos interativos em situações de jogo no ensino fundamental* (Dissertação de Mestrado em Educação). Universidade de Passo Fundo, Passo Fundo.

Segalla, A. & Perez, F. (2012). Como os brasileiros gastam. *Revista ISTOÉ Independente*, 2210. ed. mar. 2012. Disponível em < ttp://www.istoe.com.br/reportage-ns/195047-_COMO+BRASILEIROS+GASTAM>.

Strasburguer, V. C. (1999). *Os adolescentes e a mídia* (Tradução Dayse Batista). Porto Alegre: Artmed.

Theodoro, F. R. F. (2010). Matemática e Educação Financeira: uma experiência com o ensino médio. *Revista de Educação*, *13*(15), 171-179.

Tudge, J. (1996). Vygotsky, a zona de desenvolvimento proximal e a colaboração entre pares: implicações para a prática em sala de aula. In L. C. Moll (Org.), *Vygotsky e a educação: implicações pedagógicas da psicologia sócio-histórica* (pp.151-168). Trad. F. a. Tesseler. Porto Alegre: Artes Médicas.

Vygotsky, L. S. (1998). *Pensamento e linguagem* (3ª ed.). São Paulo: Martins Fontes.

Vigotski, L. S. (1998). *A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores* (6ª ed.). São Paulo: Martins Fontes.

The role of Mathematics in vocational education curricula: a comparative study

Ana Lúcia Braz **Dias**
Central Michigan University
United States of America
dias1al@cmich.edu

Summary

In the study reported in this paper, the author takes a comparative framework to study, compare, and contrast legislations, guidelines, and programs of Career and Technical Education in the United States of America and programs of Professional and Technological Education in Brazil. The study seeks to answer the question: How do the educational goals and aims of the different curricula shape the role of mathematics education in the curriculum? The main official legislations analyzed were the American Perkins IV and the Brazilian National Guidelines for Technical and Professional Education at the Secondary Level. The methodology used was the development and application of a criterion for comparison, using a four-stage process to produce comparative hypotheses that can be used in future typologies. Preliminary results suggest that, although the American system is concerned with preparing students for postsecondary education as well as career, this emphasis is not found in the Brazilian case.

Key words: education, mathematics, vocational education, curriculum integration, comparative education.

Introduction

Vocational education has been defined differently in different countries. The legislations governing such segment of education are diverse, as are the social, economic, and cultural factors that affect them. Nonetheless, in today's globalized world vocational education systems face many of the same challenges in different countries, and have the general mission of preparing students careers and jobs, by focusing on the development of occupation-specific knowledge and skills.

In the context of mathematics education, the contextualization of mathematics in realistic situations (realistic mathematics education), the use of mathematical modeling as a teaching strategy, and an interdisciplinary approach to mathematics education has been a focus of research and recommendations for many decades (Barbosa, 2001, 2004; Lozada, 2011).

The connections between vocational education and mathematics education take then an obvious dimension, since we are led to ask if vocational education, with its focus on occupation-specific knowledge and skills, wouldn't be a context where mathematics appears integrated, par excellence, into aspects of the real world and into meaningful problems.

A previous work by Gonçalves, Dias and Peralta (2014) indicates that this connection might not be so obvious, or does not occur to a great extent. The study investigated the conceptions that teachers in an institution of secondary vocational education in Brasil (an

institution of *Educação Profissional Técnica de Nível Médio*, as the segment is coined in Brasil) have concerning the integration of mathematics into vocational-specific courses. That study describes structural aspects indicated by the teachers as obstacles to an integration of mathematics into vocational curricula.

The connection between mathematics education and vocational education, which theoretically makes a lot of sense, has also caught the attention of North American researchers. Nkata (2013) posits that the search for relevance in STEM (Science, Technology, Engineering, and Mathematics) suggests that we should look for more synergy between STEM education and Career and Technical Education (the term used in the United States for the formerly so-called vocational education).

Still in the context of American Career and Technical Education (CTE), Meeder and Suddreth (2012) affirm that, even in CTE programs, the integration of real world contexts with academic content are almost non-existent.

> Effective career and technical education (CTE) programs have an inherent advantage because they are modeled closely after real careers that students may one day enter. They can readily demonstrate the answer to questions such as "How am I ever going to use this?" and "Why should I learn this?" Reading, written communications, listening, speaking and mathematical reasoning (with problem solving) are embedded in careers — especially in the middle- and high- skills careers that lead to family-supporting wages and benefits. And given that the majority of those middle- and high skills jobs require some education and training beyond high school, the link between the academic preparation and the technical preparation for careers becomes even stronger. (p. 4)

Despite this argumentation, Meeder and Suddreth affirm that career preparation and academic preparation remain in two separate "silos".

In 2012, the investigators involved in this project wrote a series of three research articles in which they delineate the history of professional education in Brazil. (Gonçalves et al., 2013a, 2013b, 2013c). With the aim of advancing such studies towards an international perspective, in 2013 the group sought the formalization of an agreement between the institutions to which they are affiliated. In 2014, a Memorandum of Understanding between the Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" (UNESP) and Central Michigan University (CMU) was signed. The agreement foresees, among other things, the formation of collaborative research teams and the development of collaborative research projects involving the two universities.

> In the study reported in this paper, the authors take a comparative framework to study, compare, and contrast legislations, guidelines, and programs of Career and Technical Education (CTE) in the United States of America and programs of Professional and Technological Education (PTE) in Brazil[1]. The study seeks to answer the question: How do

[1] Education for careers and work take different names in different countries and at different times. At the present, the United States use the term "Career and Technical Education" (CTE), whereas the equivalent in Brazil is "Professional and Technological Education" (PTE). At the secondary level, the Brazilian educational segment is termed Educação Profissional Técnica de Nível Médio, or Professional and Technical Education at the Secondary Level. In the past, both countries used terms including the word "vocational", which has been avoided now in these two countries. In Europe, the term "Vocational Education and Training" (VET) is being used. In our writing, most of the time we will use the term that is used in the original context – place or time.

the educational goals and aims of the different curricula shape the role of mathematics education in the curriculum?

Methodology

The Theoretical Basis for Comparative Research into Vocational Education

In face of the global "new economic order", vocational education systems are affected by what goes on internationally (Gordon, 2014). Many governments compare their states' curricula with international models when seeking new initiatives and when trying to boost international competitiveness.

Pilz (2012a) explains the need for research into comparative vocational education and training. In his argument, made from several examples of current events in vocational education and training, he makes clear that different countries may be facing different challenges, but that they are related in important ways, and that an international and comparative approach is necessary for a comprehensive understanding and improvement of any particular system. This is not an easy task. In Pilz's view, "[a]voiding ethnocentrism is important but also perhaps the most serious challenge in moving forward." (p. 2)

Pilz (2012b) raises the point that because vocational and technical training is defined in fundamentally different ways in an international context, we need elaborate on how we can "compare apples to oranges". He cites Hörner (in Pilz, 2012b, in his own translation from the German) to argue that the key point is how the comparison is framed: "In contrast to popular belief, apples can be compared with oranges or pears, provided there is a meaningful criterion for comparison (their juice content, for example) or a criterion for establishing difference, such as the shape of the fruit." (p. 563).

As examples of criteria for comparison in comparative vocational training research, Pilz (2012b) cites a) the relative value of general and vocational education; b) the permeability of education and training systems; c) different forms of certification assigned by vocational education; d) the costs of a vocational education or training; and d) the extent to which such education has currency on the labor market. Another much used criterion for comparison in the field is how attractive vocational education is in each context.

In this paper we will compare the American and the Brazilian vocational education systems in relation to how their educational goals and aims shape the role of mathematics education in the curriculum.

Pilz (2012b) also points out that the selection of countries to be compared is also relevant to the second aspect, that of access. The choice of countries to be the contexts of investigations should entail not only worthwhileness to the field, but also a pragmatic dimension. It is imperative that researchers are fluent in the language of the countries, so as not to rely on translations of the literature and documents produced by a country. This pragmatic justification of convenience and possibility of access can definitely aid the justification of a comparison between Brazilian Professional and Technical Education at the Secondary Level and American Secondary Career and Technical Education.

Data and Methods

For the development and application of a criterion for comparison, a four-stage process has been applied, based on the framework developed by Pilz (2012b). The initial stage involved

observation and description of the two cases (the *descriptive* stage). In this initial phase, we conducted a study of the planned curricula of the two countries by describing and analyzing policy documents and official curricular prescriptions in each nation. A theoretical interpretation for the observations constructed in the first phase is sought next (the *explanatory* stage) and presented as preliminary results in this paper. Subsequently, a *juxtaposition* stage will offer a side-by-side analysis, and a final *comparative* stage will produce comparative hypotheses that can be used to assess relationships between countries with reference to the criterion for comparison.

The data used in this study consist mainly of documents that were obtained from the websites of government offices, associations, and educational institutions. The official legislations analyzed were the Carl D. Perkins Career and Technical Education Act of 2006 (United States Congress, 2006) and the *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional* (LDB - Lei nº 9394/1996), the *Diretrizes Nacionais para Educação Profissional Técnica de Nível Médio*, Resolution CNE/CEB number 06/2012.

A content analysis of the data is being performed, coding, categorizing, and scaling relevant textual units and applying interpretative abstraction to the text. As a first method, a computer program was used to find the mentions of the words *mathematics*, *integration*, and *STEM* in the referenced texts.

Preliminary results and discussion

Seeking information for understanding the relationship between mathematics teaching and professional education in the American literature we could not help but notice an effort to assess how participation in CTE courses was reflected in enrollment and degrees in disciplines in the exact sciences, particularly mathematics in higher education. This finding led us to conjecture a basic difference between the American case and the Brazilian case, since this seemed to be a non-issue in the Brazilian case. In looking for an explanation for this observation, we conjectured that the difference came from the different goals of Career and Technical Education in the United States and the Professional and Technical Education in Brazil. In the next phase of the study we tried to verify our conjecture by examining planned/prescribed curricula as they were found in major legislations in each country – the Carl D. Perkins Career and Technical Education Act of 2006 (U. S. Congress, 2006) and the *Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional* (LDB - Lei nº 9394/1996), the *Diretrizes Nacionais para Educação Profissional Técnica de Nível Médio*, Resolution CNE/CEB number 02/1997 and the amendments made by the resolutions numbers 01/2005 and 04/20005.

The Constitution of the United States makes no provision for federal control or support of education (Gordon, 2014). However, the federal government has had an enduring interest in vocational education. Since 1917 there have been a number of legislations concerning vocational education. But it was after the publication of *A Nation at Risk* (National Commission on Excellence in Education, 1983) that education reforms have focused on secondary education, as a means of attacking the perceived deficit in the American Educational system.

In 1990, President George H. W. Bush signed into the law the Carl D. Perkins Vocational and Applied Technology Act (Perkins II), which amended and extended the Carl D. Perkins Vocational Education Act of 1984. The 1990 Act introduced the new terminology "Vocational and Applied Technology", which points at the congress' view that academic and technological skills are necessary, together with vocational skills, for jobs in an advanced society.

In 2006, the language in the Perkins Act was updated from "vocational and technical education" to "career and technical education", with the Carl D. Perkins Career and Technical Education Improvement Act of 2006 (Perkins IV: Public Law 109-270).

In the hearing held in Washington, DC, in September 20th of 2013, entitled *Preparing today's students for tomorrow's jobs : a discussion on career and technical education and training program*, Deputy Commissioner John Fischer explains that "[t]his transition was more than just a name change. It represented a fundamental shift in philosophy from CTE being for those who were not going to college to a system that prepares students for both employment and postsecondary education." (United States Congress, 2013, p. 51.)

The term 'career and technical education', as defined in the Carl D. Perkins Career and Technical Education act of 2006 (U. S. Congress, 2006) means "organized educational activities that:

(A) offer a sequence of courses that—

(i) provides individuals with coherent and rigorous content aligned with challenging academic standards and relevant technical knowledge and skills needed to prepare for further education and careers in current or emerging professions;

(ii) provides technical skill proficiency, an industry-recognized credential, a certificate, or an associate degree; and

(iii) may include prerequisite courses (other than a remedial course) that meet the requirements of this subparagraph; and

(B) include competency-based applied learning that contributes to the academic knowledge, higher-order reasoning and problem-solving skills, work attitudes, general employability skills, technical skills, and occupation-specific skills, and knowledge of all aspects of an industry, including entrepreneurship, of an individual." (p. 4)

The use of terms such as "rigorous content" and "challenging academic standards" embedded career and technical education into the "college and career readiness" national agenda. According to the new paradigm, career and technical education's aim is not only preparing for jobs and careers, but also for postsecondary education.

According to the new act, State Plans for the use of Perkins grants had to describe:

"how the eligible agency will—

(A) improve the academic and technical skills of students participating in career and technical education programs, including strengthening the academic and career and technical components of career and technical education programs through the integration of academics with career and technical education to ensure learning in—

(i) the core academic subjects (as defined in section 9101 of the Elementary and Secondary Education Act of 1965); and

(ii) career and technical education subjects;

(B) provide students with strong experience in, and understanding of, all aspects of an industry; and

(C) ensure that students who participate in such career and technical education

> programs are taught to the same challenging academic proficiencies as are taught to all other students." (U. S. Congress, 2006, Sec. 122(c)(7)).

State leadership activities shall include developing, improving, or expanding the use of technology in career and technical education that may include ''providing career and technical education students with the academic and career and technical skills (including the mathematics and science knowledge that provides a strong basis for such skills) that lead to entry into technology fields, including non-traditional fields". (U. S. Congress, 2006, Sec. 124(2)(B)).

At the 1996 National Education Summit a group of governors and corporate leaders created an organization dedicated to transforming the concept of "college and career readiness "from a radical proposal into a national agenda." (Achieve, 2012) The organization, Achieve, is "an independent, bi-partisan, non-profit education reform organization." (Achieve.org)

In *The Future of the U.S. Workforce: A Survey of Hiring Practices across Industries* (Society for Human Resource Management and Achieve, 2012) it is argued that "all industries are projecting that future jobs will require more skills, education and credentials at all levels, with some variations based on the industry and current levels of education required."(p. 2) The report anticipates higher education requirements for most jobs, and more jobs with more specific technical requirements in the future.

Under this argument a push has been made for the integration of high-quality academic and technical education programs, further emphasizing that students participating in CTE must meet the same rigorous academic standards as all other students.

In particular, the role of Science, Technology, Engineering and Mathematics education (STEM) has been emphasized.

> CTE has long been a leader in the integration of high-level academics and technology For example, CTE courses in agriculture, nutrition and health care have always contained strong science, components, in many places earning students core academic credits. During the last decade, however, literally thousands of new cutting-edge, STEM-intensive CTE programs have been launched or expanded in schools across the nation." (Association for Career and Technical Education, 2009, p. 3).

According to the Independent Electrical Contractors (IEC), career and technical education has been succeeding at that. "The national average graduation rate for CTE students is over 90 percent, while the average national graduation rate for all students is less than 74 percent. CTE students are out-performing academic benchmarks." (In United States Congress, 2013, p. 20). The association provides the indicators in Table 2.

Table 2.
Academic Benchmarks and CTE indicators.

CTE indicator	Target performance	Actual performance
Reading/Language Arts (Secondary	67%	72%
Mathematics (Secondary)	59%	63%
Technical Skill Attainment (Secondary)	68%	75%
Technical Skill Attainment (Postsecondary)	70%	82%

Source: Prepared Statement of John Fischer, Deputy Commissioner, Transformation & Innovation, Vermont Agency of Education. In United States Congress, 2013, pp. 20-21.

In Brazil, the National Guidelines for Technical and Professional Education at the Secondary Level (CNE / CEB No. 06/2012) indicates that the aims of professional and technical education is to provide the student with professional skills and knowledge necessary for professional practice and citizenship. The document emphasizes that the Technical and Professional Education at the Secondary Level should be articulated with secondary education and its different modalities, including Youth and Adults (EJA), and the dimensions of work, technology, science and culture.

According to the guidelines, professional education courses are organized by technological axes contained in the National Catalogue of Vocational Courses, established, organized by the Ministry of Education or in one or more occupations Brazilian Classification of Occupations (CBO). The structuring of the courses must consider: (i) the technological matrix, covering methods, techniques, tools, and other elements of technology relating to the courses; (ii) the common core corresponding to each polytechnic technological hub in the course, comprising scientific, social, organizational, economic, political, cultural, environmental, aesthetic and ethical foundations underpinning technologies and their contextualization in the system of social production; (iii) the knowledge and skills in the areas of languages and codes, humanities, mathematics and natural sciences, linked to basic education should permeate the curriculum of technical secondary courses, according to the specifics of these as essential elements for training and professional development of the citizen; (iv) the relevance, coherence, cohesion and consistency of content, articulated in terms of the work undertaken as an educational principle, contemplating the necessary conceptual and methodological bases; (v) the permanent updating of courses and curricula, structured comprehensive database, research and other relevant sources of information.

The article 14 of the guidelines makes explicit that curricula must provide students: (i) dialogue with various fields of work, science, technology and culture as fundamental references of their formation; (ii) elements to understand and discuss the social relations of production and labor, as well as the historical specificities in contemporary societies; (iii) resources to perform their work with competence, intellectual and technological competence, autonomy and responsibility, guided by ethical, aesthetic and political principles as well as commitment to building a democratic society; (iv) intellectual mastery of the relevant technological axis to enable the ability to build new knowledge and develop new professional skills with intellectual autonomy; (v) occupation-specific tools, grounded in the experience of different practical work situations; (vi) fundamentals of entrepreneurship, cooperatives, information technology, labor law, professional ethics, environmental management, safety, innovation management and scientific research, managing people and managing social and environmental quality of the work.

It is noted that in Brazilian Professional Education the predominance is training professionals to meet the demands of the "world of work", which, although a concept that transcends market positions when it recognizes its egresses as autonomous workers that are ready to act on and transform the reality of their future professions, is very far from the concern with preparing students for college. For careers that require postsecondary education, the Brazilian system has a network of federal institutes of higher education, whose reglamentation is out of the scope of this work.

It seems thus that in this preliminary batch of results we can identify a fundamental difference between the American and Brazilian vocational systems. This can be used as a criterion for the examination of other systems or the development of typologies in the future.

References and Bibliography

Association for Career and Technical Education (2009). CTE's role in science, technology, engineering & math. *ACTE Issue Brief*, June 2009.

Barbosa, J. C. (2001). Modelagem matemática: concepções e experiências de futuros professores. 2001a. 253 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista: Rio Claro.

Barbosa, J. C. (2004). Modelagem matemática: o que é? por que? como? In: Veritati. Salvador, no 4, pp. 73-80.

Brasil. (1996). Lei nº 9394, de 20 de dezembro de 1996. Lei de diretrizes e bases da educação nacional. p. 1-27. Brasília: Congresso Nacional.

Brasil. (2012). Resolução CNE/CEB nº 06, de 20 de setembro de 2012: Define Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Profissional Técnica de Nível Médio. Brasília: CNE/CEB.

Carvalho, E.J.G. (2009). Estudos comparados: repensando sua relevância para a educação. Em Tercer Congreso Nacional, Segundo Encuentro Internacional de Estudios Comparados en Educación. Buenos Aires: SAECE - Sociedad Argentina de Estudios Comparados en Educación.

Gonçalves, H. J. L; Pires, C. M. C.; Dias, A. L. B; Monteiro, A. C. R. (2013a). Marcas e Trajetórias da Educação Profissional no Brasil: 'Primeiros Quatrocentos' Anos de História do Brasil (1500 a 1900). Revista iluminart, v. 10, p. 7-22. http://lnk.nu/cefetsp.br/3nc7.pdf.

Gonçalves, H. J. L; Pires, C. M. C.; Dias, A. L. B; Monteiro, A. C. R. (2013b). Marcas e Trajetórias da Educação Profissional no Brasil: Das Escolas de Aprendizes Artífices à Reforma Capanema. Revista iluminart, v. 10, p. 23-42. http://lnk.nu/cefetsp.br/3nc7.pdf.

Gonçalves, H. J. L; Pires, C. M. C.; Dias, A. L. B; Monteiro, A. C. R. (2013c). Marcas e Trajetórias da Educação Profissional no Brasil: Dos Anos 60 ao Surgimento dos Institutos Federais. Revista iluminart, v. 10, p. 43-59. http://lnk.nu/cefetsp.br/3nc7.pdf.

Gonçalves, H. J. L., Dias, A. L. B.; Peralta, D. A. (2014). O que dizem os professores de uma instituição de educação profissional sobre interdisciplinaridade no ensino de matemática. Ciência e Ensino. No prelo.

Gordon, Howard R. D. (2014). *The history and growth of career and technical education in America* (4th edition). Long Grove, IL: Waveland Press.

Lozada, C. O. (2007). Alternativas de modelagem matemática aplicada ao contexto do ensino de física: a relevância do trabalho interdisciplinar entre matemática e física. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, Belo Horizonte. Anais do 9º ENEM, Belo Horizonte, MG: UNI-BH. http://www.sbem.com.br/files/ix_enem/Html/comunicacaoCientifica.html

Meeder, H., and Suddreth, T. (2012). *Common core state standards & career and technical education; Bridging the divide between college and career readiness*. Retrieved from http://www. Achieve.org/files/CCSS-CTE-BridgingtheDivide.pdf

National Commission on Excellence in Education (1983). *A nation at risk: The imperative for educational reform*. Washington, DC: U.S. Government Printing Office.

Nkhata, Bentry (2013). *Career and Technical Education (CTE) directors' experiences with CTE's contributions to science, technology, engineering, and math (STEM) education implementation*. Doctoral dissertation. Blacksburg, VA: Virginia Polytechnic Institute and State University.

Pilz, M. (2012a). Introduction. In: Matthias Pilz (Ed.), *The future of vocational education and training in a changing world*, pp. 1-5. Cologne, Germany Springer.

Pilz, M. (2012b). International comparative research into vocational training: Methods and approaches. In: Matthias Pilz (Ed.), *The future of vocational education and training in a changing world*, pp. 561-588. Cologne, Germany: Springer.

Society for Human Resource Management and Achieve (2012). *The future of the U.S. workforce: A survey of hiring practices across industries*. KSA-Plus Communications, Inc.

United States Congress. (2006). *Carl D. Perkins career and technical education Act of 2006*. Washington, DC: U.S. Government Printing Office.

United States Congress (2013). *Preparing today's students for tomorrow's jobs: a discussion on career and technical education and training program.* Washington, DC: U.S. Government Printing Office.

Uma experiência do uso da ludicidade no ensino de Frações nas séries iniciais

Nair **Rodrigues de Souza**
Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista
Brasil
nair_rod@yahoo.com.br
Luciana Paro **Scarin Freitas**
Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista
Brasil
melscarin@gmail.com
Lucila Paro **Scarin Correia**
Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista
Brasil
lucilascarin@gmail.com

Resumo

A Educação brasileira passa por um momento delicado em que resultados de avalições externas apontam para o fracasso escolar. Os resultados negativos do ensino da matemática fazem com que muitos professores reavaliem as estratégias do ensino da matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental e proporcionem ao aluno um conhecimento matemático significativo. Foram desenvolvidas atividades explorando a ludicidade no ensino das frações em uma turma de Ensino Fundamental. Através do desenvolvimento deste trabalho podemos considerar que a matemática aliada a ludicidade auxilia as crianças a compreenderem, assimilarem e melhor aprenderem não só os conceitos matemáticos mas o mundo ao seu redor. Foi possível notar que a após a compreensão do conteúdo é fundamental propor situações-problemas desafiadoras através de textos significativos às crianças, relacionando seus intereses, bem como o contexto social e cultural em que estão inseridas.

Palavras chaves: ensino, matemática, didática, frações, lúdico.

Introdução

A Educação brasileira passa por um momento delicado em que resultados de avalições externas como SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica) apontam para o fracasso escolar. Os resultados negativos do ensino da matemática fazem com que muitos professores reavaliem as estratégias do ensino da matemática nas séries iniciais do Ensino Fundamental e busquem caminhos para solucionar tais deficiências. Nesse contexto nós, educadores, temos como função ensinar a matemática com a preocupação em formar sujeitos ativos, críticos e autênticos; capazes de utilizarem os conhecimentos adquiridos em sala de aula durante sua vida social, em outra palabras o objetivo é promover ao aluno um conhecimento matemático significativo.

Dentre os conteúdos matemáticas ensinados nas séries iniciais do Ensino Fundamental, os conceitos relacionados as frações estão entre os principais conteúdos para os quais os alunos apresentam maiores dificuldades de compreensão, asssociado a isso, muitos professores apresentam dificuldades em ministrar tais contéudos. É preciso que se compreenda que o ensino da Matemática depende diretamente das estratégias de trabalho do professor, diálogo, domínio do conteúdo, contextualização e estímulo à aprendizagem. As crianças precisam ser motivadas e desafiadas através de relações concretas e qualitativas.

O estudo de frações no Ensino Fundamental é extremamente importante pois apresenta fundamentações de ordem prática, psicológica e matemática. Behr et. al., (1983) destaca que, do ponto de vista prático, o estudo do conceito de fração aperfeiçoa a habilidade de dividir, e sendo assim, é possível que haja um melhor entendimento e manipulação dos problemas e das situações cotidianas.

O processo de aprendizagem em matemática, segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN - (Brasil, 2001) deveria incorporar situações para os aprendizes despertassem sua inteligência ao resolverem problemas, ao tomarem decisões, bem como permitissem a aquisição de processos mentais indispensáveis para a evolução do pensamento matemático. Quando a escola trabalha com esta perspectiva, ela favorece o aluno construir e reconstruir o seu conhecimento, melhorando consequentemente o seu aproveitamento nas atividades matemáticas.

Ainda de acordo com o documento de Matemática dos Parâmetros Curriculares Nacionais "a atividade matemática escolar não é olhar para coisas prontas e definitivas mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade" (Brasil, 1997, p. 19).

A fração pode assumir diferentes significados, dependendo do contexto no qual está inserida, tais como: número, parte/todo, medida, quociente, operador multiplicativo e outros. E todos devem ser explorados durante o processo de ensino e aprendizagem. Na Tabela 1 são apresentadas as considerações de alguns autores sobre a concepção de frações.

Tabela 1
Diferentes significados das frações

Autores	**Significados**
Behr, Lesh, Post e Silver (1983)	Evidenciam sete interpretações para as frações que denominam de subconstructos: medida, razão, taxa, quociente, coordenadas lineares, decimal e operador.
Kieren (1988)	Afirma que a noção completa de fração abrange quatro subconstructos, medida, quociente, número proporcional e operador multiplicativo.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Parâmetros Curriculares Nacionais, expressadas da seguinte forma:

> O conhecimento matemático formalizado precisa, necessariamente, ser transformado para se tornar passível de ser ensinado/aprendido; ou seja, a obra e o pensamento do matemático teórico não são passíveis de comunicação direta aos alunos. Essa consideração implica rever a ideia, que persiste na escola, de ver nos objetos de ensino cópias fieis dos objetos da ciencia (Brasil, 2001, p.39).

O ensino de frações no início da escolarização deve proporcionar aos alunos o entendimento, a compreensão do conceito de fração e as suas relações. Toledo e Toledo (2009, p. 164), sinaliza que "segundo Piaget, o conceito de fração é construído pela criança no período

operatório- concreto, desde que ela já seja capaz de conservar quantidades-tanto discretas, quanto contínuas".

Além disso, "o recomendável é que o ensino de frações não se limite a um único significado, à reprodução de notação, nomenclatura e classificações, sem significado para os alunos, e nem fique limitado apenas a casos simples e particulares" (Brasil, 2010, p. 115).

Para compreendermos as ideias relacionadas à fração, é fundamental analisar situações problema ou um contexto em que a fração se faz presente e refletir em busca de soluções. Nunes e Bryant (1997) mencionam que existe uma grande diferença entre a compreensão que as crianças possuem de divisão e de números racionais no seu cotidiano e no seu conhecimento de representações ensinadas na escola devido ao modo de como a linguagem fracionária é ensinada, como um procedimento simples de contagem dupla em situações estáticas de parte-todo. Os autores ainda colocam que quando os alunos são levados a resolver problemas usando seu conhecimento cotidiano e representações simbólicas, eles podem fazer as conexões adequadas espontaneamente.

Nunes e Bryant (1997) afirmam que, em muitas vezes, as crianças são levadas a construir ideias com base na pura percepção ao invés de serem incentivadas a estabelecer relações lógico-matemáticas nas situações envolvidas.

Os mesmo autores consideram que a forma como as frações geralmente são ensinadas na escola pode levar os alunos a erros. Em geral, são apresentados desenhos de inteiros repartidos e os alunos realizam uma dupla contagem: número de partes em que o inteiro foi repartido e número de partes que foram pitadas e a partir disso é atribuída uma escrita x/y.

Com o intuito de contribuir para o processo de ensino aprendizagem das frações nas séries iniciais do ensino fundamental serão discutidas e apresentas neste artigo, metodologias que podem contribuir para o trabalho dos professores e melhorar o desempenho dos alunos no processo de ensino aprendizagem das frações.

Para o desenvolvimento desta pesquisa optamos pela pesquisa qualitativa. Lüdke e André (1986) apontam algumas características básicas que configuram este tipo de pesquisa. Dentre elas destacam que na pesquisa qualitativa, o pesquisador é tido como o principal instrumento para coleta de dados e assim faz contato direto com o ambiente. Ressaltam ainda que "O material obtido nessas pesquisas é rico em descrições de pessoas, situações, acontecimentos" (Lüdke; André, p. 12, 1986). Mencionam também que "[...] o interesse do pesquisador ao estudar um determinado problema é verificar como ele se manifesta nas atividades, nos procedimentos e nas interações cotidianas" e sugerem que todos os dados sejam aproveitados.

É preciso salientar que em uma pesquisa qualitativa, os instrumentos não são um fim em si mesmo e sim ferramenta interativa entre o pesquisador e os sujeitos investigados. A metodologia escolhida nos permite estudar a realidade de determinada unidade buscando coletar informações acerca do objeto pesquisado.

Como instrumentos de coleta de dados, foram aplicadas as atividades propostas pelas autoras para um grupo de 30 alunos de uma turma do 6º ano do Ensino Fundamental de uma Escola Estadual. Os procedimentos foram realizados através de atividades individuais. Foram analisadas as estratégias que os alunos utilizaram para a resolução das atividades, como procederam para superar as suas dificuldades, como concluíram e sobretudo, como relacionaram os conteúdos matemáticos envolvido.

A Experiência

Entendemos que o ensino da Matemática depende diretamente das estratégias de trabalho do professor, diálogo, domínio do conteúdo e estímulo à aprendizagem. As crianças precisam ser motivadas e desafiadas através de relações concretas e qualitativas.

Para que o processo de ensino e aprendizagem das frações tenha êxito, o professor deve conhecer as necessidades e desejos da criança a fim de selecionar conteúdos, propor desafios, e fazer intervenções adequadas que possibilitem o confronto de hipóteses, as quais possam contribuir com a construção do conhecimento.

> (...) uma educação comprometida com a democracia só é possível de ser alcançada dentro de um processo educativo que respeita o educando como sujeito do conhecimento, porque estimula seu auto reconhecimento, clarifica sua consciência e não a doméstica, não a resume a memorização; nessa prática, os sujeitos envolvidos possuem saberes que se completam mediados pelo diálogo e, pela horizontalidade da relação, o educador estimula a atividade crítica do educando (Freire, 2006).

Para proporcionar uma aprendizagem significativa há necessidade de oferecer ao aluno uma visão integrada dos números racionais e o uso de materiais concretos e manipuláveis na realização das diversas atividades contribui para ensinar e para aprender.

Uma forma significativa de ensinarmos frações é ilustrar a representação das frações através desenhos, pois assim é possível despertar o interesse da criança e fazer com que aprendam o conceito de fração. Contudo devemos também abordar o uso de frações comparando razões, realizando estimativas entre outras distintas situações envolvendo frações.

A criança deve compreender as relações entre as frações e saber escolher qual delas é a melhor numa determinada situação. Assim, o professor tem que fazer escolhas didáticas, por exemplo, como introduzir uma ideia matemática. É preciso pensar no que vem adiante, e não apenas no que parece ser mais fácil de explicar naquele momento. Em relação às operações fracionárias é necessário que o professor faça o máximo para articular as ideias matemáticas com as técnicas operatórias.

No cotidiano da criança o que aparece de frações é, em geral, coisas muito simples, como "meia dúzia de ovos" , "meia xícara de leite", "vinte e cinco centavos". Mas, não podemos nos prender apenas ao que é estritamente parte da vida da criança, ou seja, há aspectos do uso de frações que podemos trabalhar com as crianças, como comparar razões, fazer estimativas e compreender situações envolvendo frações.

Durante o desenvolvimento do trabalho com frações, nós, professores, devemos privilegiar a manipulação, a comparação e a observação. As primeiras atividades precisam ser diversificadas, concretas e coloridas, envolvendo colagem, recortes, dobraduras, sobreposições e comparações. Em momentos posteriores, faz-se necessário a introdução do vocabulário e da simbologia.

No trabalho com os alunos é importante enfatizar a relação entre frações, numerais decimais e porcentagem (ex: 65/100 ou 0,65 ou 65%), apresentando as três representações e estimulando um pensamento mais flexível e autônomo. Cada uma destas representações facilita certos modos de pensar e de operar sobre ela; reconhecer sua equivalência permite que os alunos passem de uma a outra quando estão resolvendo situações-problemas ou tentando entender um texto.

Para auxiliar no processo de aprendizagem é possível utilizar atividades que envolvem a utilização de materiais concretos como, folhas de papel sulfite, EVA, tiras de barbante, lápis e outros são mais produtivas, pois o aluno tem a oportunidade de experimentar e buscar soluções sem medo de errar. A própria criança pode demarcar tiras de papel sulfite em partes iguais ou cortar pedaços de EVA em tamanhos iguais, conforme mostram a Figura 1 . Os materiais utilizados no trabalho foram elaborados pelas autoras e desenvolvidos pelos alunos que fizeram parte do grupo no qual as atividades foram aplicadas.

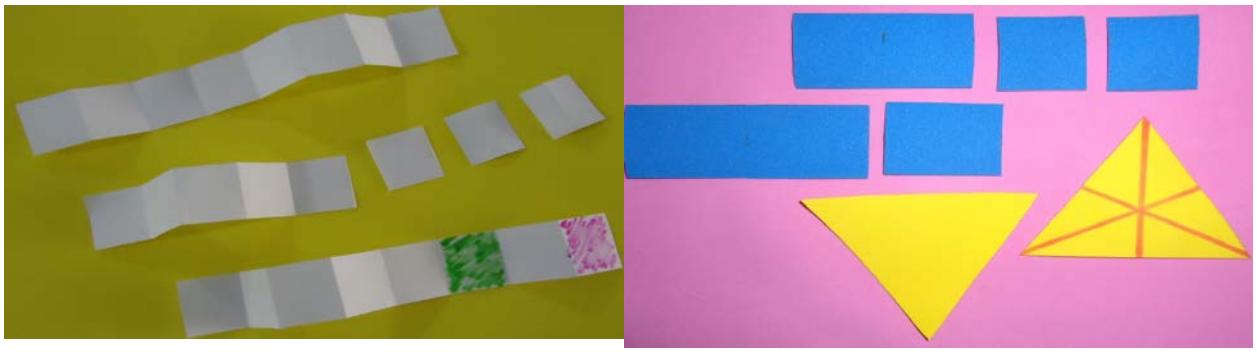


Figura 1. (a) Experiência com tiras de papel. (b) Experiência com pedaços de EVA.

O lúdico é uma estratégia fundamental de ensino das frações nas séries iniciais do ensino fundamental; é um recurso muito importante e contribui para o estímulo na construção do conhecimento e na progressão das diferentes habilidades operatórias. De acordo com (Vygotsky, 1984, p. 27), é na interação com as atividades que envolvem simbologia e brinquedos que o educando aprende a agir numa esfera cognitiva.

As atividades devem ser orientadas e fazer com que os alunos sejam capazes de construir noções matemáticas a partir da socialização dessas atividades entre seus pares.

Desenvolvimento das atividades

Diante da importância do trabalho com materiais lúdicos, concretos, sugerimos entre tantas outras possibilidades, como atividades:

Atividade no. 1. – Utilização das barras de chocolate, para mostrar para os alunos as representações de uma quantidade contínua, como ilustra a Figura 2. Após a atividade e sua conceitualização o professor pode dividir o chocolate entre seus alunos.

Figura 2. Representação de uma quantidade contínua.

Atividade no. 2. – Utilização dos potes de leite fermentado para que o professor possa explorar o conceito e representar uma quantidade discreta, como mostra a Figura 3. Nesta atividade também há possibilidade de dividir o leite fermentado entre os alunos.

Figura 3. Representação de uma quantidade discreta.

Atividade no. 3. – Utilização das frações elaboradas em EVA colorido para mostrar aos alunos que quanto mais de divide o inteiro, menores serão as suas partes, ou seja, quanto maior o denominador, menor será o tamanho de cada parte. O material depois pode ser fixado na parede da sala de aula, como representa a Figura 4.

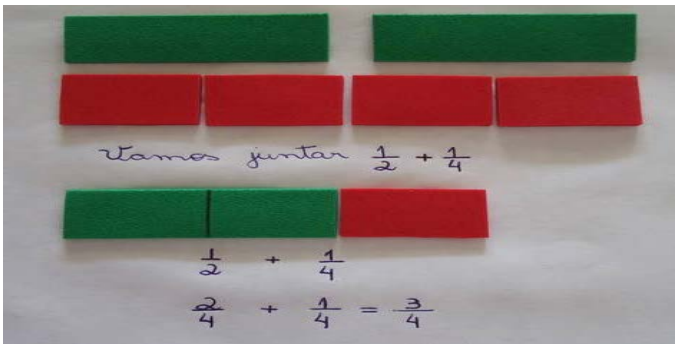


Figura 4. Representação das frações.

Atividade no. 4. – Utilização das frações elaboradas em EVA colorido para mostrar para os alunos que é possível dividir o mesmo inteiro em muitas partes e que quanto mais se divide, menor será cada parte. O material depois também pode ser fixado na parede da sala de aula, como representa a Figura 5.

Figura 5. Representação das partes do inteiro.

Nesse contexto, aos educadores, cabe à função de fazer com que os alunos entendam que a matemática não é algo estático e que pode ser vista como uma forma de desenvolvimento da criatividade e criticidade. A construção do sentido de número fracionário não é uma tarefa que possa ser desenvolvida em poucas aulas. É preciso encontrar caminhos para que o estudante identifique essas quantidades em seu contexto cotidiano e possa se apropriar da ideia de número fracionário, usando-o com significado. (Romanatto & Passos, 2011).

As atividades que foram aplicadas possibilitaram que as autoras visualizassem que este modo matemático de pensar comporta movimentos do pensamento que envolve hesitações e incertezas e momentos de ludicidade.

Considerações finais

O objetivo principal foi proporcionar momentos no ensino da matemática que priorizassem por atividades matemáticas que levassem a ludicidade e a brincadeiras. Para isso sugerimos as atividades propostas anteriormente e consideramos que as mesmas possibilitaram que todos os envolvidos vivenciassem a prática pedagógica e também social.

Através do desenvolvimento deste trabalho podemos considerar que a matemática aliada a ludicidade operam como um rico instrumento para auxiliar as crianças a compreender, assimilar e melhor aprender os conceitos matemáticos, além de desenvolver certas competências e habilidades necessárias para o desenvolvimento escolar, pessoal e social da criança.

Foi possível notar que a após a compreensão do conteúdo, é fundamental propor situações-problemas desafiadoras, com textos significativos às crianças, relacionando-se aos seus interesses e ao contexto social e cultural em que estão inseridas. Assim, as mesmas podem ter interesse em buscar soluções.

A aprendizagem das frações nos anos iniciais do Ensino Fundamental deve estar centrada na relação de diálogo entre crianças e adulto e nas diferentes maneiras utilizadas pelas crianças para responder perguntas, registrar e comunicar suas ideias matemáticas e resolver as situações que lhes forem apresentadas. Ensinar matemática nas series iniciais de forma direcionada e bem articulada, é um recurso propulsor para desenvolver nos alunos o conhecimento, o interesse e o gosto pela matemática.

Aprender identificar frações, representá-las e escrevê-las, são habilidades que os alunos vão construindo através das diversas situações de aprendizagens que possibilitam o trabalho com materiais que favorecem essas construções.

Referencias y bibliografía

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. (1983). Rational Numbers Concepts. In *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. New York: Academic Press.

Brasil, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. (2010). *Coleção Explorando o Ensino. Matemática: Ensino fundamental.* Brasília: MEC.

Brasil, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Fundamental. (2001). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática.* Brasília: MEC.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília: DF.

Freire, P. (2006). *Pedagogia do Oprimido* (43ª ed.). Rio de Janeiro: Paz e Terra.

Kieren, T. (1988). Personal knowledge of rational numbers: its intuitive and formal development. In J. Hiebert, & M. Behr (Eds.), *Number concepts and operations in the middle grades* (pp.162-80). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Lüdke, M., & André, M. (1986). *Pesquisa em educação: Abordagens Qualitativas*. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária Ltda.

Nunes, T., & Bryant, P. (1997). *Crianças fazendo matemática.* Porto Alegre: Artes Médicas.

Passos, C. L. B., & Romanatto, M. C. A. (2011). *Matemática na formação de professores dos anos iniciais: aspectos teóricos e metodológicos*. São Carlos: EdUFSCar. (Coleção UAB-UFSCar).

SAEB. (2014). *Sistema de Avaliação da Educação Básica.* Disponivel em: http://provabrasil.inep.gov.br/

Toledo, M. B.A., & Toledo, M. (2009). *Teoria e Praticas de Matemática: como dois e dois.* São Paulo: FTD.

Vygotsky, L. S. (1984). *A formação social da mente*. São Paulo: Martins Fontes.

Uma investigação sobre a abordagem de situações financeiras envolvendo taxas de juros no Brasil em um curso pós-médio

Ivail **Muniz** Junior
Departamento de Matemática, Colégio Pedro II
Brasil
ivailmuniz@gmail.com
Samuel **Jurkiewicz**
Universidade Federal do Rio de Janeiro
Brasil.
jurki@pep.ufrj.br

Resumo

Nesse artigo apresentaremos uma investigação sobre os conceitos construídos e articulados por estudantes de um curso pós-médio de administração quando analisam situações econômico-financeiras envolvendo taxas de juros praticadas no Brasil, a partir de tarefas em uma atividade educacional. Analisamos alguns significados produzidos pelos alunos, a partir do que disseram sobre a atividade proposta, que envolveu a comparação das taxas de juros cobradas nas modalidades cartão de crédito, cheque especial e crédito consignado, com as taxas de remuneração oferecidas pela poupança. A metodologia adotada foi a pesquisa-ação, com apoio teórico da Educação Matemática Crítica e do Modelo dos Campos Semânticos. A partir das soluções e dos relatórios apresentados pelos alunos para a atividade proposta, identificamos a presença de uma articulação de saberes envolvendo aspectos matemáticos, financeiros e comportamentais que podem ajudar o professor de Matemática na abordagem de situações financeiras em sala de aula, em especial no Ensino Médio e Técnico.

Palavras chave: abordagem de situações financeiras, educação financeira crítica, matemática financeira, finanças comportamentais, produção de significados, conceitos emergentes.

Introdução

A abordagem de situações econômico-financeiras (*SEFs)* na educação básica brasileira é recente, e aparece geralmente associada à matemática financeira, cujos conceitos iniciais fazem parte de um a dois capítulos de todos os livros de matemática do Ensino Médio integrantes do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD 2015), gerenciado pelo Ministério da Educação. O tema, quando voltado para a educação escolar tem atraído o interesse de professores de Matemática e pesquisadores em Educação Matemática, por diversos motivos, e vem ganhando espaço nas pesquisas.

Nos últimos 10 anos, podemos ver claramente uma tentativa de "orientar" financeiramente a população em nível mundial, orquestrada pela Organização pra Cooperação e desenvolvimento econômico (OCDE) através do seu *Financial Education Project* (2005), cuja intenção, conforme Kistemann (2011) e Brito (2012), era analisar o que estava acontecendo em termos de Educação

Financeira pelo Mundo, e diante do diagnóstico, enviar uma série de recomendações e diretrizes para orientar ações de educação financeira em diversos países, incluindo o Brasil (Muniz, 2014).

As demandas do cenário econômico mundial no século XXI, repleto de grandes transformações, e do cenário brasileiro caracterizado principalmente pela estabilização da moeda a partir de 1994 (Leitão, 2011), pelo aumento gradual da oferta de crédito, principalmente a partir de 2004, e pelo aumento da renda de grande parte da população, juntamente com os efeitos da irradiação das iniciativas da OCDE, têm contribuído consideravelmente para que o tema educação financeira ganhasse importância, e se tornasse recorrente nos últimos anos no Brasil.

À medida que a discussão sobre temas envolvendo orientações financeiras se intensifica, Muniz (2014) observa que o entendimento do que seja educação financeira está longe de ser consensual, uma vez que existe uma pluralidade de definições e intenções promovidas por variados agentes promotores de tal "educação financeira". Organizações governamentais, Bancos públicos e privados, Instituições Financeiras, consultores financeiros, dentre outros, têm se preocupado e se envolvido, apresentando diversas definições e estratégias para educar financeiramente a população, incluindo crianças, jovens e adultos, com objetivos variados e de acordo com seus próprios interesses. Tais definições, ações e objetivos são muitas vezes contraditórios, ou em alguns casos até mesmo questionáveis do ponto de vista do exercício da cidadania, conforme apontamos e detalhamos em Muniz e Jurkiewicz (2013).

Assim, é nesse contexto dinâmico e repleto de desafios, informações, escolhas e tomada de decisões, que a abordagem de situações financeiras no ambiente escolar se insere. E se entendermos que o ensino de matemática precisa contribuir para a cidadania, bem como para a democracia, então a abordagem de situações financeiras na educação básica e tecnológica, que inclua e faça uso da matemática que se pretende abordar é uma excelente oportunidade para isso.

O experimento dessa investigação foi desenhado para criar um ambiente de sala de aula onde a construção de sentido fosse uma norma cultural (Powell, 2004) em que tentamos engajar os estudantes a realizarem as tarefas propostas. Junto a isso, o desenho também buscou oferecer oportunidades para que estudantes percebessem que na maioria das vezes, as taxas que nos pagam é consideravelmente menor do que as taxas que nos cobram, e que isso, ao longo do tempo, tem efeitos significativos no valor de dívidas e investimentos, e que podem impactar o orçamento e a vida das pessoas. A percepção dos estudantes ficou explícita nos relatórios produzidos, o que pode ser evidenciado por diversos relatos que serão transcritos neste trabalho. Identificamos também que além do aspecto matemático, outros aspectos emergiram dessa discussão, em especial os aspectos comportamentais e financeiros.

Neste artigo, apresentaremos inicialmente nossa concepção para a abordagem de situações financeiras na educação básica e técnica de nível médio. Em seguida apresentaremos brevemente a metodologia e os pressupostos teóricos nos quais se apóiam nossa investigação. Finalmente apresentaremos uma análise dos significados produzidos pelos alunos, a partir do Modelo dos Campos Semânticos proposto por Lins (1999, 2012), seguida das considerações finais.

Sobre a abordagem de situações financeiras na escola: nossas concepções.

A abordagem de situações financeiras na escola – considerada aqui como a escola que oferece ensino básico (fundamental ou médio) e técnico de nível médio – deve ser um convite à reflexão, ou seja, deve oferecer oportunidades de investigação de situações financeiras, relacionadas ao modo de pensar e agir dos indivíduos dentro da sociedade, através da articulação

da matemática escolar com outros saberes de forma crítica, reflexiva e matética. Tal abordagem não pode ignorar que as situações econômicas a serem analisadas fazem parte de questões econômicas, sociais, comportamentais, antropológicas, ambientais, em que o pensar e agir financeiramente interfere na vida do indivíduo e impacta na vida em sociedade.

Pretende-se que as situações financeiras abordadas representem, quer de forma integral, quer por uma transposição didática, questões com as quais a população tem lidado ao planejar, consumir, poupar e investir.

A partir desse cenário multidisciplinar, construímos uma estrutura conceitual que sintetiza os aspectos que devem ser levados em consideração, segundo essa abordagem que apresentamos. Essa estrutura conceitual apresenta quatros aspectos – conceituais, contextuais, didáticos e comportamentais – que compõe a abordagem de situações financeiras na Educação Básica, segundo a nossa perspectiva, e pode ser representada no esquema a seguir.

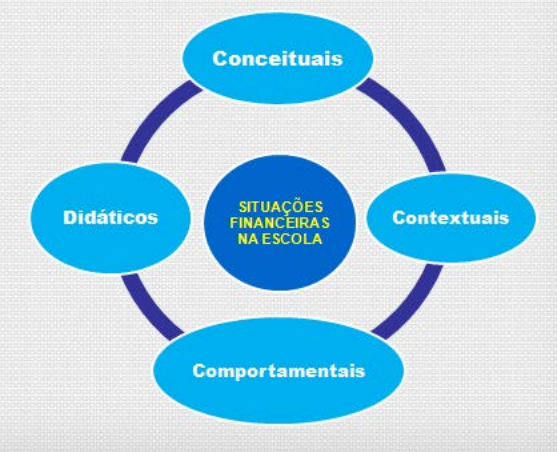


Figura 1. Os quatro aspectos envolvendo a abordagem de SEF na Escola.

Buscamos que essa abordagem se beneficie da matemática para entender, analisar e tomar decisões em situações financeiras, e que também permita explorar situações financeiras para aprender matemática. *A abordagem de SEFs na Escola pode e deve ser uma via de mão dupla.* Entendemos, portanto, que a relação entre ensino de matemática e a abordagem de situações financeiras são dois lados de uma mesma moeda.

Ao estudarmos, por exemplo, a transformação do dinheiro no tempo, temos uma oportunidade de usar conceitos como fator de atualização, função exponencial e progressão geométrica para refletir sobre a velocidade de crescimento do saldo devedor de um empréstimo ou do valor acumulado de um investimento, regida por taxas de juros, bem como explorar seus impactos na vida do cidadão em suas decisões de consumo, endividamento e investimento. Temos também a chance de abordar questões sociais (relações trabalhistas, desigualdade econômica, direitos sociais, etc), ambientais e comportamentais (consumismo x necessidade, desejo desenfreado, descartes, reaproveitamento, etc). A transformação do dinheiro no tempo, por exemplo, pode contribuir para a investigação de oportunidades de investimento, poupança para os filhos, empreender o próprio negócio, ou da aquisição de bens, e ao mesmo tempo ajudar na compreensão das potências com expoentes inteiros e fracionários, na construção dos gráficos de funções exponenciais, e na resolução e aplicação de equações polinomiais e exponenciais por métodos algébricos diretos ou até mesmo recursivos, fazendo uso inclusive de planilhas eletrônicas e calculadoras científicas.

Nessa concepção não dizemos o que os estudantes devem fazer, nem definimos qual a melhor decisão, ou qual o aspecto deve ser predominante em suas escolhas. Optamos por outra direção, na qual buscamos oferecer oportunidades de reflexão aos estudantes através da leitura de situações financeiras que contemple aspectos de diferentes saberes, dentre eles as idéias matemáticas, para que eles avaliem e tomem suas próprias decisões. Essa reflexão deve levar em conta que as atitudes do indivíduo têm impacto pra si e para a sociedade da qual faz parte. Nossa perspectiva é que essa abordagem seja um convite a uma reflexão crítica, através da articulação de conhecimentos, que propicie ações que levem em conta o indivíduo, sua família, a sociedade ao seu redor e o planeta como organismo vivo do qual é parte.

Metodologia e Referencial Teórico

A investigação foi realizada em uma sala de aula com 22 alunos, no primeiro semestre de 2014, com uma turma do curso técnico de Administração pós-médio[1] de uma Escola Técnica Estadual no Rio de Janeiro – Brasil, na qual o pesquisador leciona a disciplina Matemática Aplicada e Matemática Financeira. As tarefas foram realizadas em grupos de 3 a 4 alunos, e a atividade teve duração total de 1h40min, incluindo a elaboração dos relatórios, estes últimos individuais.

Foram apresentadas duas tarefas com uma situação financeira cada, envolvendo taxas de juros praticadas no Brasil. Tais tarefas estão apresentadas integralmente no *apêndice A*, e levam em consideração que o aluno poderia usar calculadora científica, cedida durante a aula para cada aluno pelo professor.

Os alunos já haviam estudado, nas aulas anteriores, porcentagens, taxas de crescimento e fatores de atualização. Mas ainda não tinham visto situações envolvendo a transformação do dinheiro no tempo, a partir de uma taxa constante, por períodos sucessivos. Em outras palavras, não tinham sido abordados os temas juros compostos e nem equivalência de capitais.

A metodologia adotada foi a pesquisa-ação que, segundo Thiollent (1996), é um tipo de pesquisa social com base empírica que é concebida e realizada em estreita associação com uma ação ou com a resolução de um problema coletivo e no qual os pesquisadores e os participantes da situação ou do problema estão envolvidos de modo cooperativo ou participativo. Neste tipo de pesquisa, os pesquisadores desempenham um papel ativo no equacionamento dos problemas encontrados, tendo a pesquisa aspectos importantes tais como (i) há uma interação efetiva e ampla entre pesquisadores e pesquisados; (ii) O objeto de estudo é constituído pela situação social e pelos problemas de diferentes naturezas encontradas nesta situação; (iii) volta-se para a resolução e/ou esclarecimento da problemática observada; (iv) há o objetivo de se aumentar o conhecimento dos pesquisadores e aumentar o nível de consciência das pessoas e grupos considerados.

A abordagem que apresentamos na sessão anterior, e todos os seus pressupostos, têm forte ligação com a Educação Matemática Crítica de Ole Skovsmose (2001), na medida em que os alunos se envolvem com toda a construção do conhecimento e com o processo de ensino-aprendizagem, além de se referirem a problemas sociais objetivamente existentes.

Nossa concepção epistemológica de conhecimento vem do modelo dos Campos Semânticos (MCS) proposto por Lins (1999). Nesse modelo, conhecimento não pode ser

[1] O curso técnico pós-médio é oferecido para alunos que já terminaram o Ensino médio, e é composto apenas de disciplinas da área técnica escolhida.

transmitido, mas sim construído pelo sujeito a partir da produção de significados. Conhecimento é entendido como uma crença – algo que o sujeito acredita e expressa, e que se caracteriza, portanto, como uma afirmação – junto com o que o sujeito considera ser uma justificação para sua crença-afirmação. Significado de um objeto é aquilo que efetivamente se diz a respeito do objeto no interior de uma atividade, e objeto é aquilo para que se produz significado (LINS, 1993, p.86; 2012, p.28).

Assim, os 3 aspectos-chave para conhecimento são: a crença, a afirmação e a justificação. Conforme Silva (2003) o sujeito acredita naquilo que está afirmando, o que implica que ele acredita estar autorizado a ter aquela crença. Mas não é suficiente que a pessoa acredite e afirme; é preciso também que ela justifique suas crenças-afirmações para que a produção do conhecimento ocorra. Porém, o papel da justificação não é explicar a crença-afirmação, mas tornar sua enunciação legítima, o que faz com que as justificações tenham um papel central no estabelecimento do conhecimento do sujeito. Como observa Lins (1999), as justificações desempenham um duplo papel na constituição do conhecimento, pois, ao mesmo tempo em que elas são parte do processo de legitimá-lo, elas também são parte do processo de constituir objetos. Compartilhamos a concepção de Kistemann (2011) ao dizer que embora dois indivíduos possam saber uma dada coisa, o conhecimento desses indivíduos não é o mesmo, o que a nosso ver, reforça cada vez mais a relevância da individualidade e das idiossincrasias de cada ação diante de situações de planejamento, consumo, poupança e investimento.

Como já dissemos, e reforçamos, o MCS tem por objeto os processos de produção de conhecimento e significado, e se constitui em um instrumento teórico que permita ao pesquisador fazer uma leitura dos processos de produção de significados dos indivíduos investigados.

Análise de significados a partir de textos e soluções

A atividade foi desenhada para convidar os estudantes à reflexão sobre as taxas de juros praticadas no Brasil, em algumas modalidades quando tomamos empréstimos e quando concedemos empréstimos (nesse caso, quando investimos na poupança). Foram apresentadas duas tarefas envolvendo uma situação financeira cada, conforme integralmente apresentada no apêndice A. Passaremos a tratar dos aspectos financeiros, comportamentais e matemáticos que emergiram na realização das tarefas pelos alunos.

Aspectos Financeiros

Identificamos e classificamos dois grupos de idéias relacionadas aos aspectos financeiros que emergiram da realização das atividades. Apresentaremos as transcrições de trechos dos relatórios dos alunos, para em seguida, fazer uma análise dos significados produzidos.

a) Sobre a percepção da diferença entre as taxas que nos cobram e as taxas que nos pagam.

> Percebemos que as taxas de juros são muito injustas, enquanto crescem rapidamente, fazendo com a gente pague juros absurdamente altos, a poupança cresce muito lento, rendendo pouco. Se você coloca na poupança 10.000,00, rendendo 0,6% ao mês, durante 1 ano, no final você terá R$ 10.744,24 e se você contraísse uma dívida que é de 10% ao mês, em 4 meses você teria passado o valor do seu investimento na poupança e o valor seria R$ 14.641,00. Para os R$ 10.0000,00 que você investiu na poupança ultrapassar a sua dívida de R$ 14.641,00 irá demorar 63 meses, ou seja, as taxas de juros são absurdamente altas no nosso país, muito maior que a taxa da poupança. (12)

> Enquanto os juros da dívida em um curto tempo correm rapidamente o rendimento de uma poupança os juros aplicados correm em passos lentos e pequenos (19)
>
> Ao contrário do que muita gente acha, que comprar no cartão de crédito é algo vantajoso, por poder parcelar suas compras, o não pagamento podem gerar juros rotativos, ou seja, os juros cobrados pela financeira dos cartões, no caso de atraso, torna-se uma bola de neve incapaz de controlar. (06)
>
> ... e agora estou mais consciente de como o banco trabalha em relação aos juros, que cresce em uma velocidade absurda. Já quando investimos o dinheiro cresce a uma velocidade menor. (07)
>
> O aspecto mais importante nessa atividade para mim foi me deixar mais consciente com relação a juros, cartões e bancos, pude perceber o quão perigoso pode ser usar cartões de créditos sem sabedoria/moderação, pude perceber que quando alguém deixa de pagar a parcela toda ou paga o mínimo dela essa dívida acaba virando uma "bola de neve" por conta dos juros. (10)
>
> Foi muito construtivo e produtivo, ainda mais depois que vimos a porcentagem das taxas de juros do consignado e cheque especial. Deixar de ser leiga nesse assunto, faz querer ter mais conhecimento na área, para não cair nas armadilhas, para que assim podermos ter mais controle de nossos gastos e fazer com nosso salário renda mais. (04)

Uma leitura que fizemos a partir do que os estudantes disseram, dentro dessa atividade, foi a de que associaram taxas de juros a velocidade de crescimento de dívidas e investimentos (algo que infelizmente não é enfatizado nos livros didáticos brasileiros), e procuraram reforçar a enorme diferença entre as taxas que nos pagam quando investimos, por exemplo na poupança, com as taxas que nos cobram, por exemplo, quando não pagamos o valor total da fatura do cartão do crédito ou usamos o cheque especial.

Além disso, aspectos sócio-econômicos foram identificados a partir do que os alunos disseram. A indignação quanto às taxas cobradas e as consequências disso na evolução do saldo devedor emergiram da atividade. Olhar só para a taxa não trouxe a percepção imediata dos efeitos ao longo do tempo no saldo devedor. Foi a partir da transformação e comparação da evolução do saldo devedor e do valor aplicado, considerando as taxas reais aplicadas pelas Instituições Financeiras na época da atividade, a partir de dados reais disponibilizados pelo Banco Central do Brasil, que os estudantes fizeram a leitura dos efeitos dessa situação econômica na vida da sociedade, e em especial, em suas próprias vidas.

Expressões como "injustiça", "bola de neve incapaz de controlar", "não cair em armadilhas", "consciente de como o banco trabalha", "é o que mais enrola as pessoas", "juros abusivos", "juros exorbitantes", "cresce desenfreadamente" emergiram dos discursos dos estudantes na realização da atividade, algumas das quais não eram consideradas antes por eles conforme dito explicitamente em alguns dos relatos aqui apresentados, indicando que novas percepções sobre essa realidade foram construídas.

b) Sobre lições práticas e tomada de decisão em situações financeiras apresentadas pelos alunos.

A percepção sobre as diferentes taxas, e, portanto, da diferença de velocidade de crescimento de dívidas e investimentos, veio acompanhada de lições práticas e sugestões para a tomada de decisões para tal realidade. Em alguns casos, os textos indicam uma extrapolação,

apresentando argumentos para outras situações além das taxas. Vejamos alguns exemplos do que os alunos disserem nessa direção:

> o exercício deixou claro a enorme e clara forma de como os juros se elevam de maneira rapidíssima, mostrando que devemos ficar alertas ao usarmos cartões a longo prazo ou com muitas parcelas futuras (05)
>
> mostra a importância de pesquisar a porcentagem dos juros, como: do banco, empréstimo, cartão de crédito e principalmente do cartão, pois é o que mais enrola as pessoas, porque se tem o conhecimento sobre a dívida, porém não se sabe sobre os juros (passa desapercebido ou até é desconhecido).(22)
>
> As pessoas devem se prevenir ao contraírem uma dívida e pensar muito bem se realmente vale a pena parcelar a dívida no cartão de crédito para que não fiquem enroladas na hora de pagar as contas.(20)
>
> podemos perceber o quanto podemos evitar juros abusivos, economizar e também fazer uma melhor escolha. E isso nos mostra o quão importante é não acumular dívidas.(08)
>
> Os juros cobrados pelas instituições financeiras atingem valores exorbitantes, deve-se tomar cuidado para que as dívidas não virem uma bola de neve. O ideal é não cair em parcelamentos, e caso necessite de um empréstimo, recorrer ao crédito consignado, pois os juros são menores. (19)
>
> O mais aconselhável seria pagar suas contas à vista e na impossibilidade da mesma, comprar com parcelas suaves que caibam no orçamento. (15)
>
> Entendo que quando podemos realizar um planejamento, a respeito destes temas, poderemos alcançar resultados favoráveis, evitando problemas com dívidas.(02)
>
> A solução mais eficaz para fugir dessas armadilhas é planejar, calcular os ganhos e os gastos, se tem ou não condições de comprar um produto e no mês seguinte poderá pagar; reservar uma parte do salário para aplicar na poupança, pois nos momentos mais difíceis a pessoa terá um dinheiro extra para usar, ter apenas um cartão de crédito e se possível, comprar somente à vista, assim terá descontos na loja. (03)
>
> O ideal é não cair em parcelamentos, e caso necessite de um empréstimo recorrer ao crédito consignado, pois os juros são menores. (09)
>
> Levando em consideração as modalidades de crédito pessoal, o cartão de crédito ganha fácil, pois apresenta a maior taxa de juros, o empréstimo e cheque especial também não ficam pra trás, quando falamos em taxa de juros abusivas. O melhor a fazer é evita-los e poupar para poder investir futuramente. Mas no aperto financeiro se não tiver outra saída é recomendável optar pelo empréstimo consignado pro causa de sua taxa de juros. (11)

Esses fragmentos apresentam não somente várias lições práticas sobre o consumo. Lemos desses discursos que questões como planejamento, uso adequado do cartão de crédito de acordo com cada pessoa, orçamento, tomada de decisões em relação às formas de financiamento (cartão de crédito, cheque especial, crédito consignado) se constituíram em objetos pelos alunos, e a partir deles significados foram produzidos. Novas questões foram abertas, refletidas e algumas respostas foram apresentadas.

Aspectos comportamentais.

Durante a aula, identificamos a emergência de algumas idéias envolvendo aspectos comportamentais, algumas das quais foram registradas pelos alunos através de seus relatórios. Os

estudantes produziram significados sobre o comportamento das pessoas diante de situações de consumo e investimento, bem como expuseram o que pensam ser o comportamento mais adequado em alguns casos.

Expressões como "querer status"; "querer mais e mais", "gasta mais do que ganha"; "Marketing como vilão", "contrair empréstimos de forma precipitada", "não se controlarem na hora de comprar", refletem aspectos comportamentais que apareceram nos discursos dos alunos e que podem ser diretamente identificados em alguns trechos dos relatórios transcritos a seguir.

> O brasileiro **gasta mais do que ganha** para comprar bens materiais e **querer status**. Junto com o Capitalismo vem o **desejo de que querer mais e mais** e com isso acaba se endividando. (16)
>
> A explicação para esse problema (se referindo à inadimplência com o uso do cartão de crédito e cheque especial) é o **próprio consumidor gastar mais do que ganha,** ou seja, **adquirir bens materiais é melhor do que "estar com o nome limpo na praça"** e este pensamento é causado principalmente pelo **Marketing** através da televisão, revistas, jornais ou outdoors; um forte vilão presente no nosso dia a dia. (17)
>
> Há uma enorme diferença entre os juros pagos pela poupança e os juros cobrados pelos bancos por razão de empréstimos adquirido muita das vezes de **forma precipitada**. Ao contrário do que muita gente acha, que comprar no Cartão de Crédito é algo vantajoso, por poder parcelar suas compras, o não pagamento pode gerar juros rotativos, ou seja, os juros cobrados pela financeira dos cartões, no caso de atraso, pagamento mínimo ou não pagamento (02)
>
> não faça **empréstimos com agiotas**, tente fazer consignado (16)
>
> os juros no Brasil são altos, porque muitas pessoas por **não controlarem na hora de comprar,** principalmente no cartão de crédito, perdem o controle do que gastou e não conseguem pagar as parcelas e até tentam o famoso calote. Isso faz com que muitas pessoas peçam empréstimo para cobrir o que não se tem e vão se enrolando mais ainda, para tentar contornar o mal planejamento e isto caba virando um círculo. (15)
>
> Devemos então **saber administrar** muito bem nosso dinheiro e não **comprar por impulso** para não contrairmos uma dívida com juros muito alto que não consigamos pagar. (18)
>
> Dessa forma, as pessoas deveriam **tomar consciência e passar a refletir** sobre as compras e seus meios de pagamento senão ficarão endividados e perderão dinheiro à toa. (12)
>
> O aspecto mais importante nesse atividade pra mim foi me deixar mais consciente com relação a juros e cartões e bancos pude perceber o quão perigoso pode ser usar cartões de crédito sem sabedoria/moderação.(20)

Aspectos matemáticos.

Identificamos, tanto nos cálculos como nos textos apresentados, algumas características sobre o papel de idéias Matemáticas na análise das situações financeiras apresentadas, em especial da relação entre taxa e fator de atualização, em entre valor inicial e final do empréstimo.

Os cálculos e estratégias usados pelos estudantes para responder às perguntas indicam que estes construíram conhecimentos a partir do conceito de fator de atualização e usaram essa ideia para transformar o valor do dinheiro no tempo. Nos relatórios, alguns alunos disseram que essa forma de operar usando fatores foi apresentada como facilitadora. O uso da calculadora e a não dependência de fórmulas para abordar problemasdiferentes dos que já tinham visto – uma vez

que usaram apenas a ideia de fator conversada nas aulas anteriores – foram dois aspectos que emergiram na realização da atividade. Apresentamos a seguir, alguns registros da atividade realizada que utilizamos para fazer essa leitura.

> Basta usarmos a matemática para entender que a velocidade com que os juros deste tal empréstimo cresce desenfreadamente.
>
> Os exercícios referentes a aula passada serviu-me para ver a praticidade que é resolver questões sem ter uma dependência ao uso de fórmulas. Mas também me trouxe uma auto-confiança, pois apesar de ter muitas dificuldades em matemática consegui resolver a maiorias das questões. (19)
>
> Percebemos que as taxas de juros são muito injustas, enquanto crescem rapidamente, fazendo com a gente pague juros absurdamente altos, a poupança cresce muito lento, rendendo pouco. Se você coloca na poupança 10.000,00, rendendo 0,6% ao mês, durante 1 ano, no final você terá R$ 10.744,24 e se você contraísse uma dívida que é de 10% ao mês, em 4 meses você teria passado o valor do seu investimento na poupança e o valor seria R$ 14.641,00. Para os R$ 10.0000,00 que você investiu na poupança ultrapassar a sua dívida de R$ 14.641,00 irá demorar 63 meses, ou seja, as taxas de juros são absurdamente altas no nosso país, muito maior que a taxa da poupança. (14)
>
> O modo de fazer as contas sem o uso de fórmulas é muito importante, pois estimula o nosso raciocínio lógico e nos faz ficar menos mecanizados.(17)
>
> o mecanismo usado neste meio tempo durante as aulas foi excelente, pois com o fator final e a variação, posso usá-lo em qualquer situação envolvendo matemática financeira.(02)
>
> Na minha opinião, os aspectos mais importantes foi a utilização do fator que facilita ao ato da conta, e agora posso calcular os juros do cartão. (12)
>
> As técnicas ensinadas em aula têm auxiliado nas questões do dia a dia dando rapidez aos processos, antes de aprender os novos caminhos para se calcular juros, eu utilizava a regra de três, que embora seja útil demanda muito tempo.(22)

Desses relatos apresentados, fizemos as seguintes leituras:

1) Percebemos uma mudança de paradigma: da aplicação de fórmula para o processo de transformação do dinheiro no tempo usando o fator de atualização. A álgebra não entra em ação, e a aritmética permeia os processos de transformação do dinheiro no tempo. Isso é tido como facilitador para os alunos. Com isso percebemos também uma mudança de foco: da utilização da fórmula (objeto matemático) para a realização de um processo: transformar dinheiro no tempo.
2) Cálculos são indispensáveis para a geração de resultados que indicam a velocidade de crescimento e as diferenças de retorno quando pagamos e quando nos pagam. Mas não só isso. Quando pedimos para encontrar o tempo que seria necessário investir na poupança para atingir o valor da dívida no cartão de crédito após apenas 4 meses, o resultado não apenas respondeu a uma pergunta, mas também contribuiu para a percepção de como essa prática financeira no Brasil gera uma enorme disparidade entre os valores devidos e aplicados e como isso é prejudicial para a vida de milhões de Brasileiros.
3) Olhar só para a taxa não trouxe a percepção imediata dos efeitos ao longo do tempo no saldo devedor. Foi a partir da transformação e comparação da evolução do saldo devedor e do valor aplicado, considerando as taxas reais aplicadas pelas Instituições Financeiras na época da atividade, a partir de dados reais disponibilizados pelo Banco Central do Brasil,

que os estudantes fizeram a leitura dos efeitos dessa situação econômica na vida da sociedade, e em especial, em suas próprias vidas.

4) Perceber a evolução do saldo devedor, através dos fatores de atualização, diante de diferentes cenários envolvendo taxas reais foi considerado importante pelos alunos. E realmente entendemos que é. Não defendemos aqui que a utilização de fórmulas, em especial a de equivalência de capitais, dada por $VF = VP.(1+i)^n$, deva ser abandonada. Mostramos apenas que começar por um outro caminho pode ter resultados que indicam uma melhor compreensão do mecanismo de transformação do dinheiro no tempo. Transformar fica naturalmente associado a multiplicar e dividir pelo fator de atualização, na maior parte das situações financeiras – aquelas em que a taxa incide sobre o valor do período anterior, e não apenas saber uma fórmula e aplicá-la. Além disso, os expoentes passam a indicar quantas vezes o fator está transformando o valor e não simplesmente o número que substitui o "n".
5) Se as taxas não forem constantes, em diferentes períodos, continua-se operando da mesma forma. Essa talvez seja uma das maiores vantagens de se utilizar os fatores, antes de se passar para a generalização da expressão algébrica que representa a equivalência de capitais. Situações com taxas diferentes e taxas iguais são tratadas por um mesmo processo.
6) Sugerimos e vimos que os alunos resolveram equações exponenciais por um método heurístico, através de aproximações sucessivas. A calculadora propiciou que equações exponenciais fossem resolvidas por um método não muito comum em aulas de matemática. Uma excelente oportunidade para a produção de novos significados para os logaritmos, incluindo aí suas vantagens e desvantagens.

Considerações Finais

Nesse artigo apresentamos uma leitura de uma investigação sobre os conceitos construídos e articulados por estudantes de um curso pós-médio de administração quando analisam situações financeiras envolvendo taxas de juros praticadas no Brasil, a partir de tarefas desenhadas sob a ótica de nossa percepção sobre abordagem de situações financeiras e da Educação Matemática Crítica.

Analisamos alguns significados produzidos pelos alunos, a partir do que disseram sobre a atividade proposta, que envolveu a comparação das taxas de juros cobradas nas modalidades cartão de crédito, cheque especial e crédito consignado, com as taxas de remuneração oferecidas pela poupança. Permitir que os alunos interagissem em grupos, para que depois pudéssemos conversar sobre a atividade, permitiu que os alunos tivessem tempo para produzir significados para os objetos da teoria que estávamos tratando. As idéias matemáticas caminharam, em muitos momentos, ao lado de concepções financeiras e comportamentais. Deslocamos o foco do conteúdo para colocá-lo na aprendizagem.

A partir das soluções e dos relatórios apresentados pelos alunos para a atividade proposta, identificamos a presença de uma articulação de saberes envolvendo aspectos matemáticos, financeiros e comportamentais que podem ajudar o professor de Matemática na abordagem de situações financeiras em sala de aula, em especial no Ensino Médio e Técnico, bem como em pesquisas futuras ligadas à essa abordagem, que permitam uma análise mais ampla sobre a

construção de significados dentro do grupo, que podem revelar mais informações que as apresentadas neste trabalho, limitadas pelos registros dos relatórios.

Referências e bibliografía

Brito, R.R. (2012). Educação Financeira: Uma pesquisa documental crítica. Dissertação de Mestrado. UFJF – Juiz de Fora – MG.

Kistemann Jr. M.A. (2011). *Sobre a produção de significados e a tomada de decisão de indivíduos-consumidores*. Tese de Doutorado – UNESP - Rio Claro-SP

Leitão, M. (2012). Saga Brasileira. A longa luta de um povo por sua moeda. 3 ed. Rio de Janeiro: Record.

Lins, R. C. (1993). Epistemologia, História e Educação Matemática: tornando mais sólidas as bases de pesquisa. Revista da SBEM – SP, Campinas, v.1(1), 75-79.

Lins, R.C. (1999). Por que discutir teoria do conhecimento é relevante para a Educação Matemática. In: Bicudo, M. A. V. (org.). Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas. São Paulo: Editora da UNESP, 75-94.

Lins, R.C (2012). O Modelo dos Campos Semânticos e notas de teorizações. In: Angelo, C. L (org.). Modelo dos Campos Semânticos e Educação Matemática. Rio Claro: Midiograf, 11-30.

Muniz, I. Jr. (2010). *Educação Financeira: Conceitos e Contextos para o Ensino Médio*. In: X Encontro Nacional de Educação Matemática – X ENEM, Salvador.

_____. (2013). *Finanças no Ensino Médio: Atividades na Perspectiva da educaçãoeconômico-financeira* In XI Encontro Nacional de Educação Matemática – XI ENEM, Curitiba, PR, Brasil.

_____. (2014). *Situações Financeiras e Ambientes de Aprendizagem: perspectivas para o Ensino Médio.* In Encontro Estadual de Educação Matemática – VI EEMAT, Niterói, RJ, Brail.

Muniz, I. Jr e Jurkiewicz, S. (2013). Educação Econômico-Financeira: uma nova perspectiva para o Ensino Médio. In: VII Congresso Iberoamericano de Educacion Matematica, 12., 2013, Curitiba. *Actas del VII CIBEM*, Montevideo, Uruguai: XI ENEM, p. 3125-3135

OCDE (2005). Organização de cooperação e de desenvolvimento econômico. Recommendations on principles and good practices for financial education and awareness. Disponível em www.oecd.org. Consultado em 17/01/2013.

Powell, A.B, Francisco, J. M.; Maher, C. A. (2004). *Uma abordagem à análise de Dados de Vídeo para Investigar o Desenvolvimento de Ideias e Raciocínios Matemáticos de Estudantes***.** Bolema, Rio Claro: Unesp, Programa de Pós Graduação em Educação Matemática, n.21, ano 17.

Silva, A. M. (2003). Sobre a Dinâmica da Produção de Significados para a Matemática. 243p. Tese de Doutorado – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP.

Skovsmose, O. (2001). *Educação Matemática Crítica: a questão da democracia*. Campinas: Papirus.

Thiollent, M.(1996). Metodologia da Pesquisa-ação. Rio de Janeiro: Cortez.

Apêndice A

Tarefas realizadas na atividade investigada neste artigo.

Cenário de Investigação I

Velozes e Furiosos - Diferenças entre os juros que nos pagam e os juros que nos cobram!

No Brasil funciona assim:

- Uma pessoa que investe na poupança, ou seja, empresta dinheiro para o BANCO, vê seu dinheiro crescer a uma velocidade de 0,6% ao mês.
- Uma pessoa que faz uma dívida com um BANCO, ou seja, pede dinheiro emprestado, vê sua dívida crescer a uma velocidade de 10% ao mês.

Vamos usar Matemática para entender como funciona essa disparidade e os efeitos destas diferentes velocidades de crescimento.

a) João investiu 10.000 reais na poupança, em 02 de Dezembro de 2013. Qual o saldo acumulado em 02 de Dezembro de 2014?

b) Maria contraiu uma dívida de 10.000 reais, a uma taxa de juros de 10% ao mês. Qual o valor do saldo devedor após 4 meses sem pagar absolutamente nada da dívida nesse período?

c) Quanto tempo João o valor investido por João atingirá o valor que Maria devia ao Banco depois de 4 meses da contração da dívida?

d) Se o dinheiro fizesse aplicado na poupança durante 30 anos, qual seria o valor acumulado ao final desse período? Refaça as contas para uma taxa de 1% ao mês e compare os valores acumulados. E se fosse 2% ao mês (isso é utópico!)?

e) Quais os aspectos mais importantes dessa atividade na sua opinião? Se quiser, escreva um pequeno texto (5 a 10 linhas).

Os Juros atacam novamente - Comparação entre diferentes modalidades de Crédito Pessoal.

Uma pessoa gastou 1500,00 no cartão de crédito. Na data do vencimento da fatura, dia 05 de Dezembro de 2013, não tendo TODO o dinheiro, pagou 500 reais e ficou devendo 1000 reais para a administradora do Cartão. Preencha a tabela abaixo com a evolução da dívida dessa pessoa nos 5 primeiros meses de 2014, considerando que o Banco lhe cobra uma taxa de juros de 10% ao mês.

Exemplo da Fatura.

Valor total = 1.500,00

Pagou 500,00

Saldo Devedor = 1.000 reais de dívida.

SITUAÇÃO: "Sorria, você está participando do Crédito Rotativo"

Montar o Fluxo analítico da Dívida.

Mês	Dívida Inicial	Pagamento	Dívida Final
0			
1			
2			
3			
4			
5			

a) Qual seria a dívida desta pessoa após 1 ano?

b) Em quanto tempo a dívida dessa pessoa triplicaria?

c) Porque as instituições financeiras nos cobram Juros?

d) Por que os juros no Brasil, principalmente os do cartão de crédito, são tão altos?

e) O que essa pessoa deveria ter feito tão logo tivesse percebido que não teria condições de pagar a dívida? (sugestão: Use a tabela a seguir)

Una propuesta didáctica para la noción de indeterminación

Fabio Alexánder **Cortés** Garcés
Universidad Nacional
Colombia
faalcoga@hotmail.com
René Alejandro **Londoño** Cano
Universidad de Antioquia
Colombia
renelondo@gmail.com

Resumen

La propuesta pretende describir el nivel de comprensión de estudiantes que cursan espacios de conceptualización relacionados con el Cálculo en cuanto a la noción de indeterminación, partiendo de nociones previas fundamentales como las de límite e infinito. Este análisis se hará por medio de una entrevista socrática, la cual se consolida como una propuesta didáctica para tal fin, en el marco del modelo educativo de van Hiele. Las preguntas del guión entrevista se corresponderán con unos descriptores que inicialmente son hipotéticos, de acuerdo a la experiencia del investigador, pero que finalmente serán concebidos a medida que la entrevista se esté refinando; estos permiten situar y describir el nivel de comprensión en el que se encuentra razonando el estudiante.

Palabras claves: Indeterminación, límite, infinito, entrevista socrática, niveles de van Hiele.

Formulación del problema

Justificación

Es evidente que un buen número de estudiantes de último año de bachillerato o primer año de universidad, pueden poseer los conocimientos previos necesarios para resolver operaciones relacionadas con la evaluación de límites. De hecho, algunos estudiantes tienen manejo de las propiedades en los números reales para la solución aritmética y algorítmica de un límite y si éste produce una forma indeterminada la solucionan de manera correcta; sin embargo, el significado de esta solución desde alguno de los tres contextos (aritmético, gráfico y analítico) no es comprendido.

No obstante, el rastreo bibliográfico realizado, muestra que son pocas las investigaciones hechas alrededor de la comprensión de la noción de indeterminación, aunque se han encontrado algunos estudios referidos solo a una o dos de las formas indeterminadas más comunes y, es por esto, que esta estrategia sería el inicio a otras investigaciones en esta dirección.

El objeto de estudio sobre el cual se fundamenta el problema identificado hace referencia a la comprensión de la noción de indeterminación, vista desde los contextos aritmético, gráfico y

analítico. Una de las dificultades que tienen los estudiantes para la comprensión de esta noción es la complejidad que se tiene al momento de razonar con la concepción de infinito. Por eso, aunque algunos de los estudiantes pueden tener el manejo aritmético y algorítmico en la solución de límites que producen formas indeterminadas, siguen teniendo dificultades en la comprensión e interpretación de dichos resultados, lo cual muestra que no hay manejo del pensamiento variacional. Según los lineamientos curriculares se afirma:

> Un primer acercamiento en la búsqueda de las interrelaciones permite identificar algunos de los núcleos conceptuales matemáticos en los que está involucrada la variación:
>
> - Continuo numérico, reales, en su interior los procesos infinitos, su tendencia, aproximaciones sucesivas, divisibilidad;
> - la función como dependencia y modelos de función; las magnitudes;
> - el álgebra en su sentido simbólico, liberada de su significación geométrica, particularmente la noción y significado de la variable es determinante en este campo;
> - modelos matemáticos de tipos de variación: aditiva, multiplicativa, variación para medir el cambio absoluto y para medir el cambio relativo. La proporcionalidad cobra especial significado. (MEN, 1998)

La presente investigación está directamente relacionada con el primer núcleo conceptual de los señalados anteriormente, dado que para el cálculo de límites que producen formas indeterminadas o determinadas en las que está involucrado el infinito, la tendencia de la función y las aproximaciones sucesivas son aspectos fundamentales. De acuerdo a lo anterior, la propuesta pretende abordar el siguiente problema:

Los estudiantes de último año de bachillerato y primeros años de universidad que cursan los espacios de conceptualización de cálculo, aunque solucionan de manera correcta ejercicios o problemas de límites que producen formas indeterminadas, no comprenden la noción de indeterminación desde las componentes aritmética, gráfica y analítica.

La investigación busca fundamentar en los estudiantes la noción de indeterminación y propiciar la aprehensión de ésta mediante una propuesta didáctica, la cual pretende posibilitar avances en la comprensión por parte de los estudiantes de grados superiores de las diferentes instituciones educativas, además de los estudiantes de primer año de universidad que cursen espacios de conceptualización del cálculo.

Marco teórico

En algunos estudios referidos a la comprensión de conceptos matemáticos, tales como el de Jurado y Londoño (2005), se argumenta la pertinencia de la entrevista de carácter socrático, enmarcada en el modelo de van Hiele, en tanto que, se consolida como una propuesta didáctica que propicia un razonamiento crítico y reflexivo en torno al concepto que se está trabajando, a la vez que se convierte en una experiencia de aprendizaje.

El modelo de van Hiele en el cual se enmarca la investigación se caracteriza por tener tres componentes principales, en los cuales se da un proceso de razonamiento en el estudiante: el primero está relacionado con el *insight,* que da cuenta de la comprensión de los estudiantes del concepto estudiado; el segundo está relacionado con el aspecto descriptivo, postulando y clasificando los niveles de pensamiento en nivel 1 (de reconocimiento o visualización), nivel 2 (de análisis), nivel 3 (de clasificación o abstracción), nivel 4 (de deducción) y nivel 5 (de rigor);

el tercero está relacionado con el aspecto prescriptivo, en el cual se definen cinco fases para que un estudiante pase de un nivel a otro, así: Fase 1 (de información), fase 2 (de orientación dirigida), fase 3 (de explicitación), fase 4 (de libre orientación) y fase 5 (de integración).

Aunque este modelo educativo está influenciado por la propuesta de aprendizaje planteada por Piaget, también surgen algunas diferencias, tales como:

- Para Piaget es más importante el desarrollo del niño que el aprendizaje, mientras que para los van Hiele el hecho de que los estudiantes avancen en los niveles es lo más importante.
- Para avanzar en los diferentes niveles del modelo de van Hiele, es necesario que los estudiantes tengan un manejo conceptual de los niveles inferiores; si ellos no han alcanzado estos niveles no pueden avanzar a los niveles superiores, mientras que para Piaget,el niño nace con estos niveles superiores, lo único que hace falta es que ellos sean conscientes de ello.

Los objetos matemáticos

De acuerdo a Sánchez (s.f.), la indeterminación matemática:

> se refiere a aquellos casos del cálculo de límites en que realizando las operaciones habituales, basadas en las propiedades aritméticas de los límites, llegamos a un resultado indefinido, es decir, nos encontramos con una falta de resolución o de determinación en el resultado, que no permite obtener directamente el valor del límite buscado, sino que hace necesarias operaciones adicionales para que, transformando la expresión desaparezca la indeterminación y lleguemos al valor del límite. (Sánchez, s.f).

Uno de los sustentos para la investigación de la noción de indeterminación en los estudiantes de los grados superiores de bachillerato y primer año de universidad, está basado en el proyecto de investigación "una metodología alternativa para la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite", de la cual surge un trabajo de investigación a nivel de maestría para la comprensión de la noción de límite, usando como estrategia la entrevista de carácter socrático. (Jurado y Londoño, 2005).

Para alcanzar las pretensiones de la investigación, se hace necesario diferenciar las formas indeterminadas de las formas determinadas, mediante una propuesta didáctica que permita identificar un mecanismo desde los contextos aritmético, gráfico y analítico. Esta diferencia en la que se quiere enfatizar se propone, en tanto que, muchas de esas *formas extrañas* que pueden ser determinadas o indeterminadas, usan los mismos símbolos matemáticos en los que está involucrada la idea de infinito. Tal es el caso de las formas: 0^{∞} (forma determinada que equivale a 0) e ∞^{0} (forma indeterminada).

Ahora bien, se logra apreciar que los autores que han trabajado con la noción de indeterminación, se enfocan sólo en las formas indeterminadas $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$ dejando de lado las otras expresiones.

Metodología

Para propiciar el avance en la comprensión en cuanto a la noción de indeterminación, se diseña una entrevista de carácter socrático fundamentada en el capítulo denominado "Menón" de los diálogos de Platón (Platón, 1996); inicialmente se diseñan y formulan unas preguntas, luego, se hipotetizan descriptores, los cuales permiten evidenciar el nivel en el que se encuentra

razonando un estudiante en cuanto a la noción de indeterminación, en el marco del modelo de van Hiele. Las preguntas en primera instancia, son aplicadas en estudiantes de último grado de bachillerato y en estudiantes que están iniciando en la universidad sus procesos académicos en carreras relacionadas con los cursos de Cálculo.

Los resultados son analizados para determinar cuáles preguntas son las más acertadas para el guión de la entrevista final y ayudan a consolidar los descriptores hipotéticos, de tal forma que estén en correspondencia con los niveles del modelo de van Hiele. El guión de entrevista fue diseñado con 40 preguntas, distribuidas en cuatro bloques que están en correspondencia con los niveles que postula el modelo de van Hiele, permitiendo la descripción de la comprensión de la noción en cuestión, en función de las respuestas dadas por los estudiantes.

Según el análisis de los resultados de la entrevista, se ubican los diferentes casos encontrados en uno de los niveles propuestos por van Hiele. Teniendo en cuenta este proceso de análisis de datos, la metodología está basada en un enfoque cualitativo, usando como método el estudio de casos. A continuación, se describe un episodio de las respuestas dadas por el caso Brian en el bloque 3 de la entrevista, quien alcanza el nivel III de razonamiento en el modelo de van Hiele, ya que cumple con los descriptores planteados para dicho nivel.

Bloque 3: caso Brian

Para este nivel de la entrevista, C2 podrá intuir que el resultado de $\frac{0}{0}$ y 0^0 no es ni 1 ni 0, además 1^{∞} no es 1 y 0^{∞} corresponde al valor 0. Para lograr estos procesos de razonamiento, las preguntas proponen al estudiante que relacionen el componente algebraico con el componente gráfico de una función.

En el análisis de la forma $\frac{0}{0}$, C2 entra en confusión con sus respuestas, puesto que cuando encuentra la imagen de una función en un valor en el que no está definida, la identifica como indeterminada, pero cuando analiza las tendencias de los valores decimales en los cuales se hacen acercamientos a 0 por derecha y por izquierda, dice que su resultado es un decimal como se muestra a continuación.

Pregunta 7: Teniendo en cuenta las tendencias de los resultados de las expresiones fraccionarias, en las cuales el numerador es un valor muy cercano a 0 y el denominador es otro valor muy cercano a 0 (por izquierda en la tabla 3 y por derecha en la tabla 4), ¿qué puedes concluir acerca de la expresión $\frac{0}{0}$?

Tabla 3

$\frac{10^{-15}}{-10^{-12}}$	$\frac{10^{-15}}{-10^{-14}}$	$\frac{10^{-15}}{-10^{-16}}$	$\frac{10^{-15}}{-10^{-18}}$	$\frac{10^{-15}}{-10^{-20}}$	$\frac{10^{-15}}{-10^{-22}}$
$-0{,}001$	$-0{,}1$	-10	-1000	-100000	-10000000

Tabla 4

$\frac{10^{-15}}{10^{-12}}$	$\frac{10^{-15}}{10^{-14}}$	$\frac{10^{-15}}{10^{-16}}$	$\frac{10^{-15}}{10^{-18}}$	$\frac{10^{-15}}{10^{-20}}$	$\frac{10^{-15}}{10^{-22}}$
0,001	0,1	10	1000	100000	10000000

Respuesta del estudiante

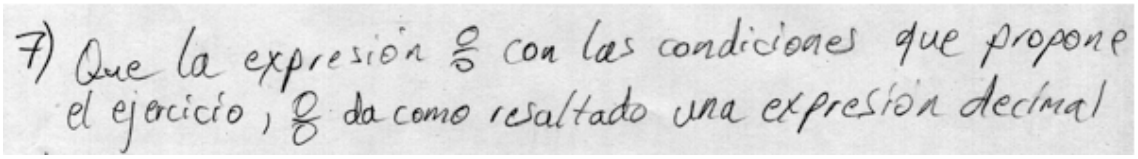


Figura 1: Respuesta de C2 a la pregunta 7

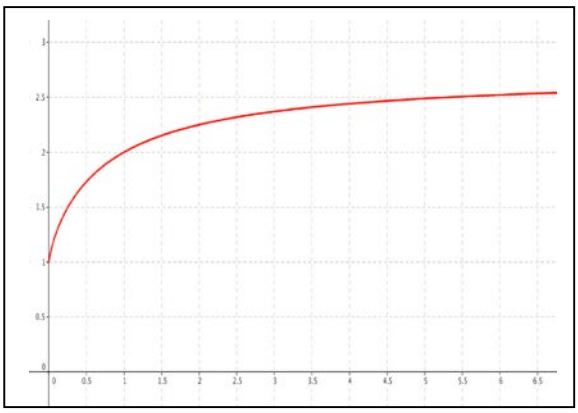
Esto cumple con el segundo momento de la entrevista de carácter socrático, en el cual acontece un desequilibrio conceptual.

Con la forma 1^{∞}, el estudiante ya determina que su resultado no es 1 y logra relacionar el componente algebraico con el gráfico, al determinar el valor de los límites propuestos.

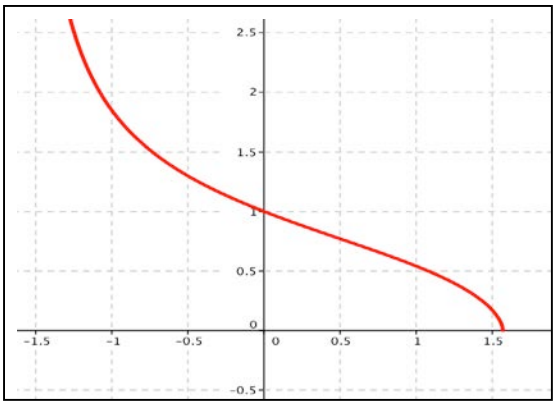
Pregunta 29:

A continuación, se presentan algunas funciones con sus respectivas gráficas:

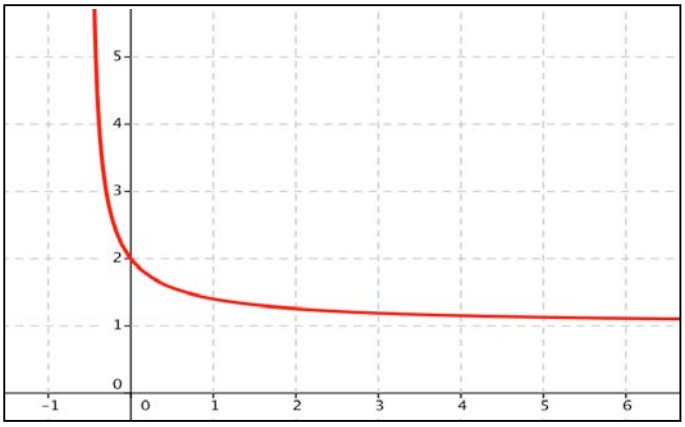
a. $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$



b. $g(x)=(\cos x)^{\frac{1}{x}}$



c. $h(x)=\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^{\frac{1}{x-1}}$



A partir de las gráficas anteriores, podrías encontrar el valor al cual tiende la función cuando:

- ✓ x tiende a ∞ en la gráfica a)
- ✓ x tiende a 0 en la gráfica b)
- ✓ x tiende a 1 en la gráfica c)

Pregunta 30:

¿Los resultados anteriores, pertenecen al conjunto de los números reales?, ¿hay diferencias en los resultados?

Respuesta del estudiante

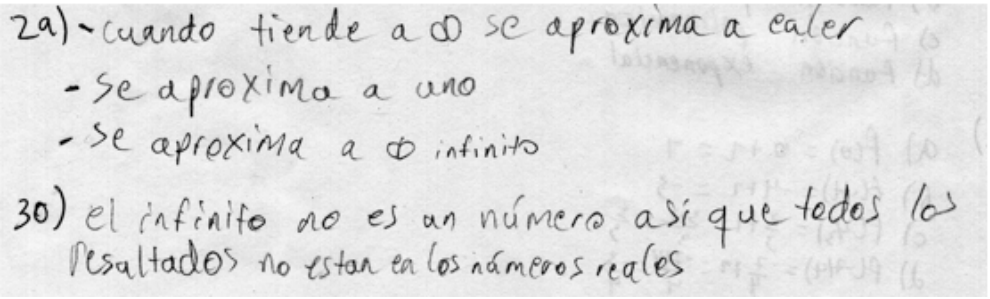


Figura 2: Respuesta de C2 a las preguntas 29 y 30

Para los demás casos también logra encontrar el valor de los límites, aunque en este caso no se le pide al estudiante que conjeture cuáles son las condiciones para que una expresión matemática corresponda a una forma indeterminada o determinada, sin embargo, abre el camino para que el entrevistado logre crear nuevas redes de relaciones que lo lleven a deducirlas.

En vista del análisis de las preguntas, se puede concluir que C2 logra cumplir con los descriptores planteados para el nivel 3 de razonamiento del modelo de van Hiele.

Teniendo en cuenta que la entrevista socrática diseñada, además de permitir ubicar a los estudiantes en un nivel de razonamiento en el modelo, se convierte en una experiencia de aprendizaje en relación a la noción de indeterminación, se consolida como una propuesta didáctica para tal fin.

Resultados

Los resultados obtenidos en la investigación, muestran como el caso etiquetado como C1 logra alcanzar el nivel II de razonamiento del modelo de van Hiele, mientras que el caso etiquetado como C2 alcanza el nivel III; la entrevista de carácter socrático se consolida así como una propuesta didáctica que permite evidenciar los descriptores cumplidos por los entrevistados, en función de las respuestas dadas, además de propiciar un avance en la comprensión, mediante preguntas alternas acerca de la noción de indeterminación.

Los descriptores planteados, producto del trabajo de campo y del refinamiento continuo de la entrevista, se convierten en resultado esencial del presente estudio y se detallan a continuación:

Nivel I:

- Identifica la operación potencia como el producto de la base tantas veces lo indique el exponente.
- Reconoce gráficamente una función en el plano cartesiano.

- Dado un conjunto de expresiones algebraicas que corresponden a funciones, identifica las polinómicas, las racionales y las exponenciales.
- Calcula límites de funciones por simple inspección, cuyos valores son números reales.

Nivel II:

- Determina de forma aritmética la tendencia de las expresiones $\frac{k}{0}$, $\frac{0}{k}$, $\frac{k}{C}$, 1^k, k^0, 0^k, con $k, C \in R \neq 0$.
- Dada la expresión algebraica o la gráfica de una función, encuentra su imagen en un punto determinado.
- Identifica claramente el crecimiento o decrecimiento de una función.
- Establece los valores de x para los cuales una función racional no está definida.
- Interpreta gráficamente el límite de una función en un punto, teniendo en cuenta que no es necesario que exista en este punto.

Nivel III:

- Conjetura que las expresiones de la forma $\frac{k}{0}$, $\frac{0}{k}$ y $\frac{k}{C}$ pueden tender a valores distintos de 0 ó 1.
- Conjetura que expresiones de la forma C^k, con $0 < C < 1$ tienden a 0 cuando k crece, y con $C > 1$ tienden a valores cada vez mayores, conforme k también lo hace.
- Conjetura que expresiones de la forma k^0 y 0^k pueden tender a valores distintos de 0 y 1.
- Reconoce gráficamente cuando una función crece al infinito o decrece al infinito.
- Establece gráficamente el valor del límite de funciones tales como $y = x^{\frac{1}{x}}$, $y = \left(\frac{1}{x}\right)^x$, $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$, entre otras, que conducen a las formas especiales.

Conclusiones

Consecución de los objetivos:

Objetivo general:

Diseñar una entrevista socrática para la comprensión de la noción de indeterminación, a través de la descripción y análisis de los procesos de razonamiento de los estudiantes, de acuerdo a la consecución de ciertos descriptores en el marco del modelo educativo de van Hiele.

Para alcanzar este objetivo fue necesario plantear unos objetivos específicos de carácter experimental:

Objetivos específicos:

1. Aplicar una entrevista socrática a estudiantes de último grado de bachillerato y primeros semestres de universidad que estudian matemáticas, para determinar los descriptores que los ubica en uno de los niveles del modelo de van Hiele.

Los descriptores planteados para ubicar los estudiantes en uno de los niveles de van Hiele, fueron construidos a partir de los conceptos matemáticos propios que hacen parte del objeto de estudio (noción de indeterminación). Para cada uno de los niveles del modelo de razonamiento de van Hiele se proponen los descriptores que conceptualmente deben tener los estudiantes para determinar el grado de comprensión de la noción de indeterminación.

2. Diseñar los descriptores apropiados para determinar la comprensión de los estudiantes de la noción de indeterminación, en correspondencia con el modelo educativo de van Hiele.

El diseño de los descriptores se hacen en conformidad con los niveles de van Hiele y los procesos de razonamiento de los estudiantes sobre el concepto en cuestión. A continuación se hace una descripción detallada del cumplimiento de los descriptores en cada uno de los niveles.

Para el nivel 1 (visualización) se proponen cinco descriptores, los cuales tratan conceptos matemáticos como: números en forma de fracción e interpretación de una potencia, se aborda al concepto de función desde su componente gráfico y el de límite de una función en un punto. Este nivel se toma como el momento de confianza en términos de Menón tomado de los diálogos de Platón, en el cual el estudiante por su claridad en los conceptos cree saber las respuestas a las preguntas planteadas en la entrevista. Este primer nivel fue superado por los casos C1 y C2 puesto que cumplieron con cada uno de los descriptores planteados para el nivel, el análisis a las respuestas se hizo a partir del método de investigación planteado por Stake (1999), estudio de casos.

Para el nivel 2 (análisis) se plantean cinco descriptores, los cuales tratan el objeto de estudio (noción de indeterminación) mediante el análisis de los resultados decimales que se hacen a los diferentes acotamientos por izquierda y por derecha a las formas indeterminadas $\frac{0}{0}$, 1^{∞} y 0^{0}; también a la forma determinada 0^{∞}. Este es el primer acercamiento que hace el estudiante a la concepción de infinito potencial, puesto que puede deducir cuando una serie de resultados crece o decrece. También analiza el límite de una función desde la gráfica intuyendo que no es necesario que exista la función en ese punto para que el límite de la función exista, y además logra establecer cuáles son los valores en los cuales una función racional no está definida. Este nivel hace parte del segundo momento (desequilibrio) de la entrevista de carácter socrático en el cual se torpedea al estudiante para que sus conocimientos previos entren en conflicto. Para los casos que se estudian sus procesos de razonamiento logran superar este nivel de comprensión.

Para el nivel 3 (abstracción) Se plantean cinco descriptores, donde para este nivel se pide al estudiante que identifique con claridad algunas características de las formas indeterminadas. Por ejemplo, deducir que el resultado de las formas indeterminadas $\frac{0}{0}$, 1^{∞} y 0^{0} no es ni el valor 0 ni el valor 1 y el resultado de la forma determinada 0^{∞} es 0. Los estudiantes están en capacidad de determinar si una función crece o decrece al infinito, e identifica el valor del límite de las funciones que generan formas indeterminadas de forma gráfica. Todavía este nivel hace parte del momento del desequilibrio de la entrevista de carácter socrático. En el análisis realizado a C1 y

C2 se pudo concluir que en este nivel tuvieron algunas dificultades, puesto que algunas de sus respuestas eran ambiguas, pero mediante los aportes de información lograron concretar algunas, lo cual hizo que lograran alcanzar este nivel.

Nivel 4 (análisis) Se plantean cuatro descriptores, los cuales dan cuenta del análisis realizado a las características que hacen que una expresión matemática pueda generar una forma determinada o indeterminada. En este punto de la entrevista ninguno de los casos estudiados logro alcanzar el nivel puesto que no tuvieron el lenguaje para elaborar conjeturas válidas acerca de cuando una forma es determinada o indeterminada. Este nivel hace parte del momento de equilibrio conceptual.

3. Identificar el nivel de razonamiento de un estudiante en cuanto a la noción de indeterminación, mediante los descriptores que son concebidos, a través del refinamiento del guión entrevista.

Ahora bien, mediante los descriptores planteados se pudo analizar los procesos de razonamiento de los dos casos de estudio, se pudo concluir que el caso C1 analizado no logra alcanzar el nivel 3 de razonamiento puesto que no intuye cuales son las condiciones para identificar que una expresión matemática es una indeterminación o una forma determinada. El caso C2 no logra alcanzar el nivel 4 de razonamiento puesto que no tiene el lenguaje para interpretar las condiciones que hacen que una expresión matemática corresponda a una forma determinada o indeterminada.

Proyectos hacia futuro

Las futuras líneas de investigación que se abren a partir de este trabajo, pueden ser:

- Mejorar el guión de la entrevista abordando las formas indeterminadas que tienen que ver con infinito como $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, ∞^0, $0 \cdot \infty$; llevando al estudiante que razone sobre qué las hace indeterminadas.
- La presente investigación logra ubicar al estudiante en uno de los niveles de van Hiele, sobre la comprensión que éste tiene acerca de la noción de indeterminación; quedan las puertas abiertas para una nueva investigación en la cual se construya una entrevista de carácter socrático la cual permita conseguir que un estudiante pueda avanzar de un nivel de razonamiento a otro en la comprensión de la noción de indeterminación.
- Extender la entrevista socrática como una nueva estrategia metodológica en la comprensión de otros conceptos matemáticos como la noción de infinito, límite de una función, discontinuidad y derivada los cuales dan sentido a las formas indeterminadas.

Referencias y bibliografía

Jurado, F. M., & Londoño, R. A. (2005). *Diseño de una entrevista socrática para la construcción del concepto de suma de una serie via áreas de figuras planas.* Medellín, Colombia.

MEN. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas.* Bogotá.

Platón. (1996). *Diálogos.* México: Porrúa.

Sánchez, J. (s.f.). *Cala.unex*. Recuperado el 5 de 12 de 2013, de Cala: http://cala.unex.es/cala/epistemowikia/images/6/69/Indeterminaciones.pdf

Stake, R. (1999). *Investigación con estudio de casos.* España: Ediciones Morata.

Vrancken, S., Gregorini, M. I., Engler, A., Muller, D., & Heckelin, M. (2010). *Dificultades relacionadas con la enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite.* Santa Fé, Esperanza, Argentina.

Vinculación de la Matemática con administración mediante problemas contextualizados

Verónica **Neira** Fernández
Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas
Perú
pcmavnei@upc.edu.pe
Jesús V. **Flores** Salazar
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú
jvflores@pucp.pe
Patricia **Camarena** Gallardo
Instituto Politécnico Nacional
México
pcamarena@ipn.mx

Resumen

El objetivo de esta comunicación es identificar algunas deficiencias que presentan los estudiantes al modelar problemas contextualizados de la matemática en el contexto de la administración, mediante sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Nuestro marco teórico es la Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC) centrándonos en la Fase Didáctica de la teoría y como metodología recurriremos a la metodología propia de la Fase Didáctica. Nuestra investigación se realizó con nueve estudiantes del primer año de Ciencias Administrativas de la Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas de Lima-Perú. Se elaboraron tres paquetes con problemas contextualizados, los cuales están estructurados según la categorización de problemas que se explica en la teoría. Como uno de los resultados señalamos la importancia de la etapa de la traducción del lenguaje natural al lenguaje matemático para la modelación de problemas que vinculan la matemática con la administración mediante sistemas de ecuaciones lineales con dos variables.

Palabras clave: matemática contextualizada, modelación, categorización, problemas contextualizados, administración.

Introducción

A partir de nuestra experiencia observamos que los estudiantes del curso de Matemáticas Básicas del primer año de Ciencias Administrativas de una Universidad Peruana de Ciencias Aplicadas de Lima, Perú, muestran dificultades en la modelación de sistemas de ecuaciones lineales no homogéneos con dos variables, es decir, cuando se les presenta un problema matemático contextualizado en la administración para que elaboren el sistema de ecuaciones lineales no homogéneo asociado al problema.

En vista de esta problemática, se investigaron algunos problemas que se encontraban en su libro texto "Nivelación Matemática para Administradores" que se utiliza en la Universidad Peruana de Ciencias y Aplicadas, estos problemas fueron clasificados según la categorización de problemas contextualizados de la teoría Matemática en el Contexto de las Ciencias.

Marco teórico

Para llevar a cabo esta investigación tomamos aspectos de la Teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias (MCC) desarrollada por Camarena (1984) y para analizar algunos conflictos cognitivos de los estudiantes utilizaremos la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas de Duval (1999). Además de la teoría presentamos la metodología didáctica propia de la MCC.

La Teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias es una línea de investigación establecida desde hace treinta años en México. La filosofía educativa de esta teoría es que el estudiante esté capacitado para hacer la transferencia del conocimiento de la matemática a las áreas que la requieren y con ello las competencias profesionales y laborales se vean favorecidas. Esta teoría contempla cinco fases:

1. Fase curricular iniciada desde 1982.
2. Fase epistemológica que se aborda desde 1988.
3. Fase docente definida desde 1990.
4. Fase cognitiva desarrollada desde 1992.
5. Fase didáctica que se establece desde 1987.

En este trabajo nos enfocaremos en la fase didáctica, ya que nos interesa elaborar una propuesta didáctica para mejorar el aprendizaje en el modelamiento de problemas de matemáticas contextualizados en la administración mediante sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Este trabajo fue aplicado a estudiantes que culminaron el primer año de estudios en la carrera de Administración y por ello sólo utilizaremos la primera etapa de esta Fase.

Fase didáctica

Esta fase contempla un modelo didáctico para el desarrollo de las competencias profesionales referidas a la resolución de problemas contextualizados, con ello pretende fomentar el desarrollo de las habilidades para la transferencia el conocimiento, éste incluye tres etapas (Camarena, 2000):

1. Usar la estrategia didáctica de la Matemática en Contexto en el ambiente de aprendizaje.
2. Implantar cursos extracurriculares en donde se llevan a cabo actividades para el desarrollo de habilidades del pensamiento, habilidades meta cognitivas y habilidades para aplicar heurísticas al resolver problemas, así como actividades para bloquear creencias negativas.
3. Implantar un taller integral e interdisciplinario en los últimos semestres de los estudios del alumno, en donde se resuelvan eventos reales de la industria.

A continuación se presentará en la tabla 1, las características de la primera etapa (Camarena, 2000):

Tabla 1
Primera etapa de la Fase didáctica

Primera etapa	Características
Uso de la estrategia didáctica de la Matemática en Contexto.	• Planteamiento del problema de las disciplinas el contexto o vida cotidiana (problemas reales). • Determinación de las variables y de las constantes del problema. • Inclusión de los temas y conceptos matemáticos necesarios para el desarrollo del modelo matemático y la solución del mismo. • Determinación del modelo matemático. • Solución matemática del problema. • Determinación de la solución requerida por el problema en el ámbito de las disciplinas del contexto. • Interpretación de la solución en términos del problema y área de las disciplinas del contexto. • Presentación de una matemática descontextualizada.

Fuente: Tesis Neira (2012)

En la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias se concibe a la modelación matemática como *el proceso cognitivo que se tiene que llevar a cabo para llegar a la construcción del modelo matemático de un problema u objeto del área del contexto* (Camarena, 2009).

Este proceso cognitivo consta de tres momentos, los que constituyen los indicadores de la modelación matemática:

1. Identificar variables y constantes del problema, se incluye la identificación de lo que varía y lo que permanece constante, tanto implícito como explícito.
2. Establecer relaciones entre éstas a través de los conceptos involucrados en el problema, implícita o explícitamente, ya sean del área de la matemática o del contexto.
3. Validar la "relación matemática" que modela al problema, lo cual se hace a través de regresarse y verificar que involucre a todos los datos, variables y conceptos del problema. Dependiendo del problema, algunas veces se puede validar el modelo matemático a través de ver si la expresión matemática predice la información otorgada o la información experimental. En otros casos, para validar el modelo, es necesario dar la solución matemática para ver que se predicen los elementos involucrados.

La teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias incluye una clasificación para los modelos matemáticos, establecida a través de cuatro generaciones (Camarena, 2009), de tal forma que cuando los modelos matemáticos describen problemas de la ingeniería, éstos se pueden clasificar en modelos de primera generación, los cuales se obtienen de datos experimentales de la ingeniería, como por ejemplo determinar la ley de Ohm; también se incluyen en este tipo de modelos los fenómenos de la ingeniería como la carga de un condensador, la caída libre de un cuerpo, el movimiento de un péndulo, etc. En general son relaciones matemáticas que dan origen a leyes o teoremas de la física, la cual es el cimiento de la ingeniería, ya que para el caso de estas ingenierías se pueden considerar que son física aplicada.

Se denominan modelos de segunda generación, cuando requieren hacer uso de expresiones matemáticas ya elaboradas, como los modelos de primera generación, además, el área cognitiva que representan son las ciencias básicas de la Ingeniería (en nuestro caso: Administración). Si a

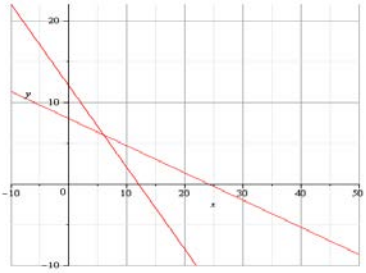
partir de estas ecuaciones construimos nuevos modelos, como por ejemplo sistemas de ecuaciones que modelan una red de circuitos eléctricos, entonces tenemos los llamados modelos de tercera generación.

Cuando el ingeniero está en ejercicio de su labor profesional, requiere de modelos que describen problemas complejos, los cuales puede trabajar de forma más eficiente a través de la paquetería de software existente denominada de simulación, a esto modelos se les denomina de cuarta generación. Es decir, los modelos de cuarta generación son aquellos modelos que requieren de varios de tercera generación o que por su complejidad no es suficiente la combinación de modelos de tercera generación, en algunas ocasiones tienen la posibilidad de ser simulados a través de la computadora, con lo cual se construye una familia de modelos matemáticos sobre el mismo elemento.

En relación a los problemas, la teoría de la Matemática en el Contexto de las Ciencias, se establecen tres categorías (Olazábal, 2005). Problemas con enunciado literal correspondiente a la primera categoría, se refiere a problemas en los que se puede hacer una traducción literal de los significados, del lenguaje común al lenguaje algebraico. La segunda categoría la definen Problemas con enunciado evocador; son problemas cuyo enunciado no es suficiente para establecer el modelo matemático que permite resolverlo a través de las situaciones, objetos y/o fenómenos y las relaciones entre ellos que expresa literalmente, sino que son necesarios otros modelos que evoca el mismo enunciado, nombrándolos, describiéndolos o refiriéndose a ellos en forma indirecta; el problema sirve de puente entre la información del enunciado y la traducción final al modelo representativo del problema. Mientras que la tercera categoría corresponden a Problemas con enunciado complejo, son problemas en los que se puede o no llevar a cabo traducciones literales (1ª categoría) y/o traducciones con evocación de enunciado (2ª categoría) pero lo que los caracteriza es que la expresión matemática necesaria para relacionar los significantes no emana del enunciado, como en las categorías anteriores, sino de la estructura cognoscitiva del individuo.

Además, en nuestra investigación se hacen conversiones del registro verbal al algebraico y del registro algebraico al gráfico, tratadas conforme a la Teoría de Registros de Representaciones Semióticas de Duval (1999), como lo muestra la tabla 2 a seguir.

Tabla 2
Sistema de ecuaciones con dos variable

<table>
<tr><th>Registro Verbal</th><th>Registro Algebraico</th><th>Registro Gráfico</th></tr>
<tr><td>Un fabricante produce modelos I y II de lámparas. Durante la producción se requiere del uso de dos máquinas A y B. El número de horas necesarias para la producción de una lámpara está indicado en la siguiente tabla:
<table>
<tr><td></td><td>Máquina A</td><td>Máquina B</td></tr>
<tr><td>Modelo I</td><td>2</td><td>1</td></tr>
<tr><td>Modelo II</td><td>2</td><td>3</td></tr>
</table>
Si cada máquina puede utilizarse 24 horas por día, ¿cuántas lámparas de cada modelo se producen al día?</td><td>$\begin{cases} x + 3y = 2 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$</td><td>  </td></tr>
</table>

Fuente: Tesis Neira (2012)

Aspectos metodológicos

Esta investigación se llevó a cabo con nueve estudiantes que culminaron el primer año de estudios de la carrera de Administración y por ello sólo se trabajaron los modelos matemáticos de primera y segunda generación en las dos primeras categorías de los problemas.

Como es de nuestro interés enfocarnos en la Fase Didáctica de la MCC identificaremos los problemas de matemáticas contextualizados en la administración relacionados con un sistemas de ecuaciones lineales con dos variables presentes en el libro texto "Nivelación Matemática para Administradores", para ello se hace un análisis de los contenidos de cada área básica, tanto explícitos como implícitos, en los cursos específicos de la ingeniería (Camarena, 2000). En nuestra investigación, el análisis del contenido Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables se hace con base en el libro texto.

El análisis

Esta prueba se aplicó a un grupo de treinta y dos estudiantes, de ellos se escogieron sólo a nueve estudiantes por tratarse de estudiantes que habían llevado un curso previo de Matemática. Luego se dividió al grupo en tres subgrupos y a cada subgrupo se le entregó un paquete diferente de problemas para evitar que los estudiantes se distraigan entre ellos con preguntas, sin embargo los problemas considerados en los tres paquetes fueron seleccionados del libro texto que utilizan los estudiantes en el primer ciclo de la carrera de Administración. Cada paquete incluye un problema de las dos primeras categorías y además un problema que nos permita identificar si realmente hubo un aprendizaje que les permita hacer uso del cambio de registros, del registro gráfico al registro algebraico. Los tres problemas están relacionados con el tema de sistemas de ecuaciones lineales con dos variables. Estos problemas se le presentan ordenados según las mismas categorías.

Para el presente artículo mostramos sólo los problemas del modelo de segunda generación y la segunda categoría vistos en cada uno de los tres paquetes con sus respectivos análisis, considerando el desarrollo de los estudiantes Tiffany, Geraldo y Claudia en sus paquetes respectivos.

Paquete 1

La empresa TK planea fabricar y vender un nuevo modelo de lapiceros. El costo de producir 300 lapiceros es S/.1 000 y el costo de producir 200 lapiceros es de S/.700. Cada unidad será vendida a S/. 5

a) Determine la ecuación del Costo total, Ingreso y Utilidad, en términos del número de lapiceros fabricados y vendidos.
b) Grafique las ecuaciones encontradas en la parte anterior.

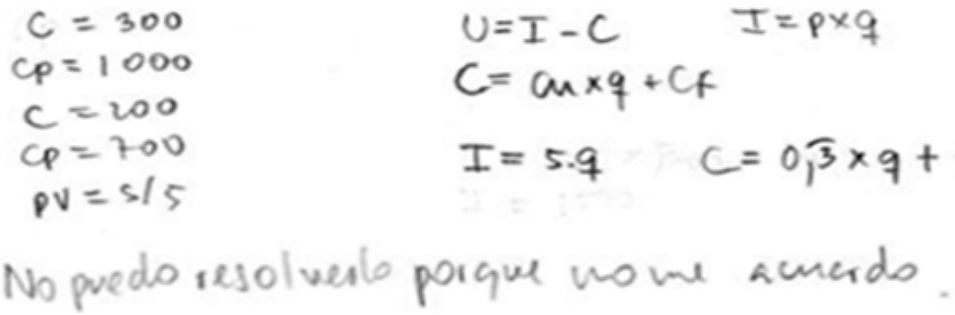


Figura 1. Desarrollo de Tiffany

En este problema, el objetivo era que el estudiante logre comprender el significado de los términos para la traducción con evocación, pues los modelos matemáticos son:

- $C_T = C_f + C_v$
- $I = P_v \times q$
- $U = I - C_T$

Y además esperábamos que hicieran el conversión del registro algebraico al registro gráfico, pero esto se podía lograr sólo si hacían la parte a).

Tiffany (figura 1), tuvo dificultad para reconocer los datos que se brindaban en el problema y además reconocer que puntos de paso de la función costo. Vemos que en su desarrollo muestra un tratamiento en el registro algebraico equivocado.

Se esperaba que pudiera hallar dicha función ya que se le enseñó a determinar la ecuación de una recta utilizando dos puntos de paso. Sin embargo, recordó los modelos matemáticos que estaban en juego y logró modelar la función ingreso. Tampoco realizó la gráfica que se le pedía ya que no tenía las funciones para que las graficara.

De acuerdo con nuestra teoría, en la fase didáctica, Tiffany no pudo traducir el problema contextualizado, del lenguaje verbal al algebraico, pues no logró: ni identificar las variables, ni establecer una relación entre las variables.

Ella colocó como un comentario: "*No puedo resolverlo porque no me acuerdo",* observándose la forma frecuente de proceder de los estudiantes, recurrir al recuerdo en vez del razonamiento.

Paquete 2

Al taller de carpintería "Creaciones Miguelito" le cuesta fabricar cada mesa S/50, los gastos fijos son de S/3 000. Si cada mesa cuesta S/100.

a) Determinar las ecuaciones del costo total y del ingreso.
b) Graficar el costo total y el ingreso.

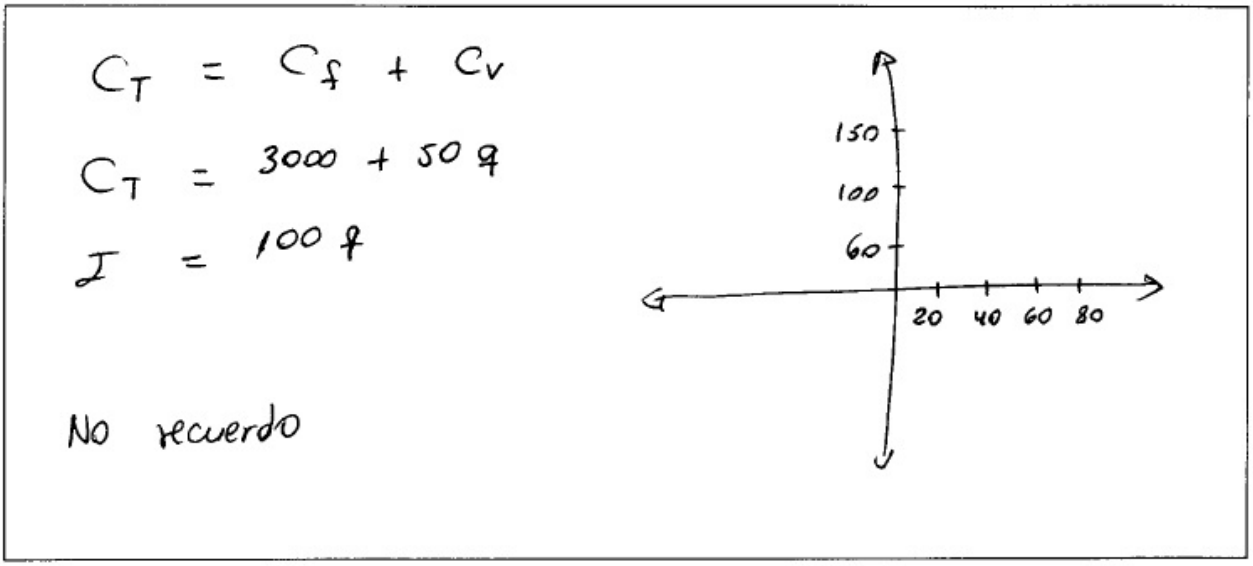


Figura 2. Desarrollo de Geraldo

En este problema, el objetivo era que el estudiante logre comprender el significado de los términos para la traducción con evocación, pues los modelos matemáticos son:

- $C_T = C_f + C_v$
- $I = P_v \times q$

Y además esperábamos que hicieran el cambio del registro algebraico al registro gráfico, pero esto se podía lograr sólo si hacían la parte (a). Describiremos el desarrollo que Geraldo realizó (figura 2):

En la parte (a) se observa que el estudiante identificó lo que debería evocar y se ve reflejado en la función costo e ingreso que modela en su desarrollo, sin embargo, no identifica las constantes ni las variables. Por lo tanto no realizó la traducción correctamente lo que indica que no concluyó con la fase didáctica.

Él no completó la parte (b) porque sólo muestra la intención de graficar el plano pero no graficó las funciones encontradas en la parte (a). Geraldo comentó: "*No recuerdo"*

Geraldo no pudo hacer la conversión del lenguaje algebraico al gráfico.

Paquete 3

Una compañía de refinamiento de maíz produce gluten de maíz para alimento de ganado, con un costo variable de $76 la tonelada. Si los costos fijos son de $11 000 por mes y el precio de venta es de $126 la tonelada.

a) Determine la ecuación del Costo total, Ingreso y Utilidad, en términos del número toneladas de gluten de maíz.
b) Grafique las ecuaciones encontradas en la parte anterior.

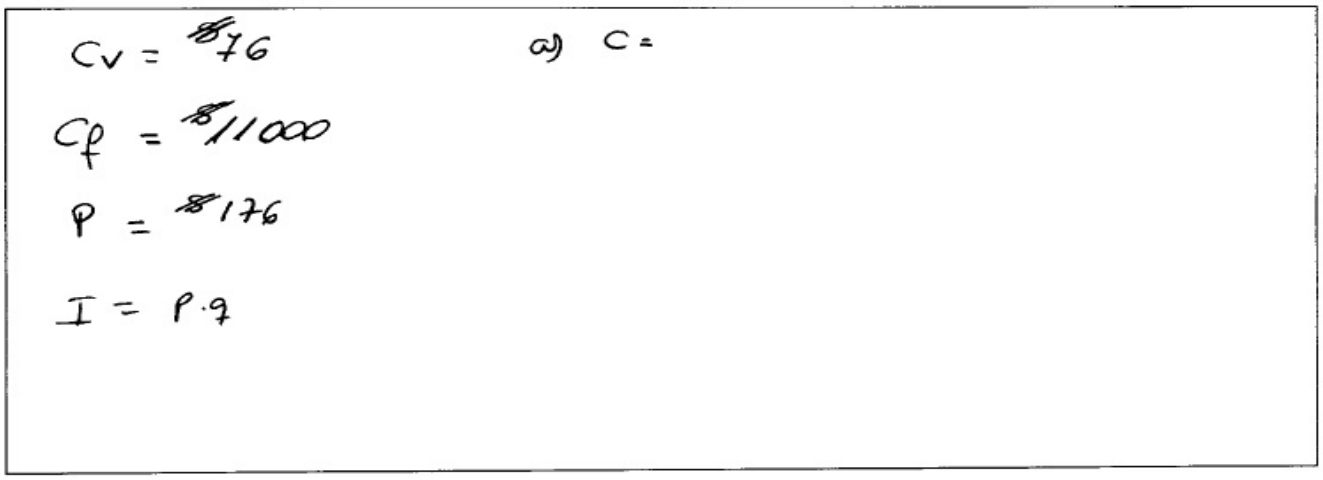


Figura 3. Desarrollo de Claudia

En este problema, el objetivo era que el estudiante logre comprender el significado de los términos para la traducción con evocación, pues los modelos matemáticos son:

- $C_T = C_f + C_v$
- $I = P_v \times q$
- $U = I - C_T$

Y además esperábamos que hicieran el cambio del registro algebraico al registro gráfico, pero esto se podía lograr sólo si hacían la parte (a).

Claudia (figura 3), en la parte (a) logra identificar cada uno de los datos del problema pero no puede relacionarlos para que luego realice la traducción final al modelo representativo del problema. No pudo concluir la fase didáctica de nuestra teoría.

En la parte (b), no graficó las funciones que se le pedían porque no las encontró en la parte (a).

En los tres problemas que se escogieron para esta categoría, la traducción toma un papel clave en el entendimiento, planteamiento y resolución de los mismos. En los tres paquetes se requería evocar los siguientes modelos:

- $C_T = C_f + C_v$
- $I = P_v \times q$
- $U = I - C_T$

Desde el momento en que se eligieron estos problemas para la puesta a prueba de la categorización se hizo en un campo delimitado de la matemática: Matemática Básica.

En nuestra investigación confirmamos que los problemas de esta categoría requieren de la comprensión de los conceptos: función costo total, función ingreso y función utilidad. Estimamos que su resolución refuerza su conocimiento, ya que cuando el estudiante utiliza las fórmulas entendiendo las leyes a las que representa, les está dando sentido verdadero de modelo matemático y no de "recetas" algebraicas.

Conclusiones

Se pudo observar en este análisis que los estudiantes no validan la relación matemática que modela al problema, ni verifican o interpretan los resultados. Esto se observa en el desarrollo de Katherine, donde todo el desarrollo parece mecánico sin la verificación ni la interpretación de sus resultados.

También observamos que a medida que aumenta la categoría de los problemas contextualizados, el número de estudiantes que entienden y traducen del lenguaje natural al matemático, dichos problemas, disminuye. Esta conclusión es porque se observó que la mayoría de estudiantes hicieron los problemas de la primera categoría pero ya no hicieron los problemas de la segunda categoría.

Además pudimos constatar, como lo establece la MCC, que el conocimiento del contexto juega un papel primordial para el éxito de la resolución de situaciones contextualizadas.

Referencias y bibliografía

Camarena, P. (1984). El currículo de las matemáticas en ingeniería. *Memorias de las Mesas Redondas sobre Definición de Líneas de Investigación en el IPN* (pp. 21-25). México, México: Instituto Politécnico Nacional.

Camarena, P. (2000) *La Matemática en el Contexto de las Ciencias: Modelo Didáctico.* Documento de trabajo de la Red Internacional de Investigación MaCoCiencias. Capítulo: "Fase Didáctica" del libro: "La Matemática en el Contexto de las Ciencias", Editorial ESIME-IPN.

Camarena, P. *(2009).* Mathematical models in the context of sciences. IMFUFA, Matematik og Fysik. Nr. 461 – 2009, pp. 117-132. *Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics. Denmark.*

Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales. Bogotá, Colombia: Universidad del Valle.*

Neira, V. (2012). *Sistemas de ecuaciones lineales con dos variables: Traducción de problemas contextualizados del lenguaje verbal al matemático con estudiantes de Ciencias Administrativas.* Tesis del grado de Magíster en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú.

Olazábal, A. (2005*). Categorías en la traducción del lenguaje natural al algebraico de la matemática en contexto.* Tesis de Maestría en Ciencias en el área de Educación Matemática del Instituto Politécnico Nacional, México.