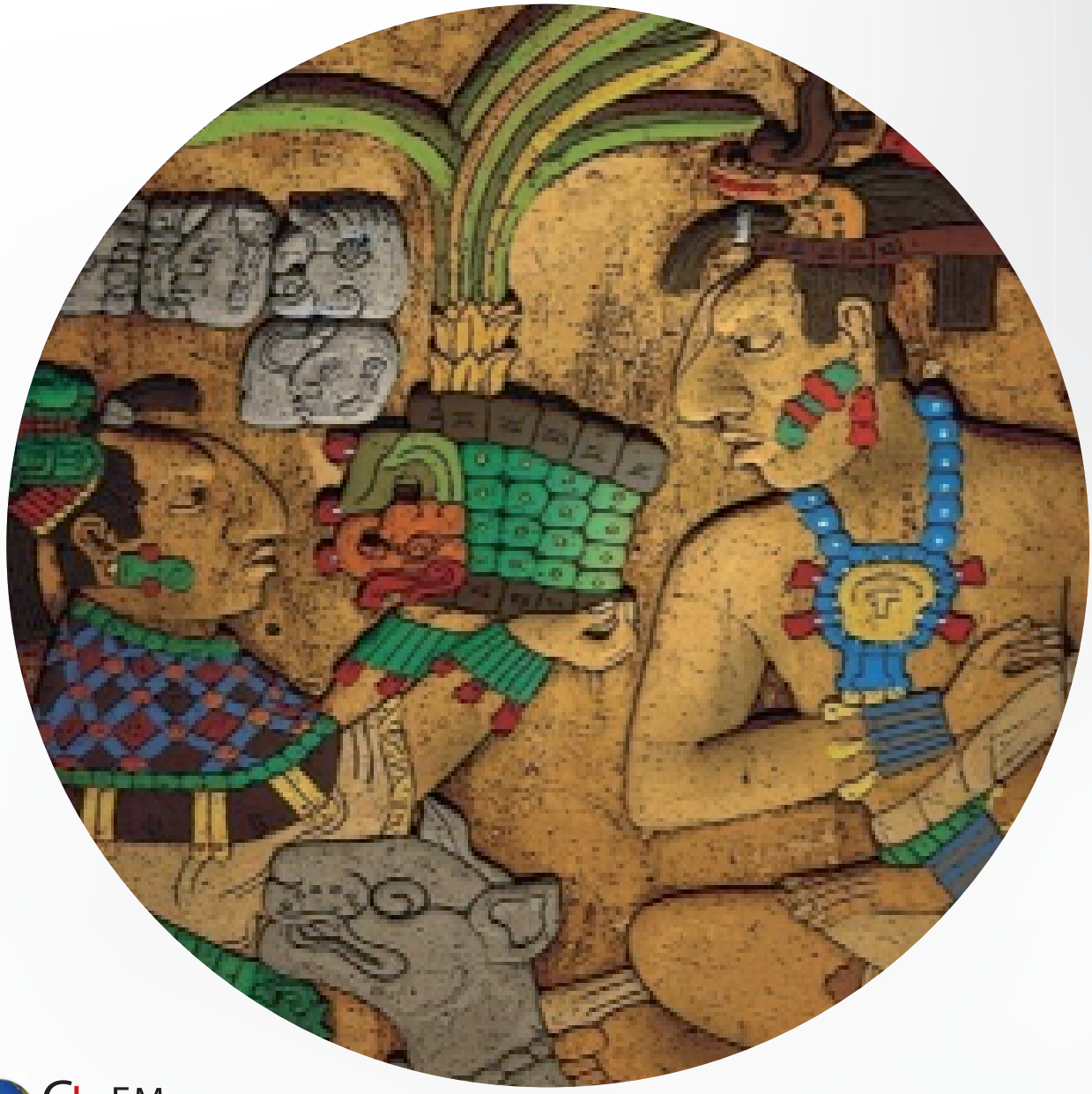
Educación Matemática en las Américas 2015

Volumen 11: Educación Primaria



CIAEM
CME
Fundado Founded: 1961

© 2015
Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM)
Paseo de la Reforma 383., 7° Piso,
Colonia Cuauhtémoc, Delegación Cuauhtémoc,
México D.F. CP 06500, MÉXICO

www.ciaem-iacme.org
ciaem.iacme@gmail.com

Educación Matemática en las Américas 2015
Volumen 11: Educación Primaria
Editado por Patrick (Rick) Scott y Ángel Ruiz
Colaboradora: Sarah González.

ISBN Volumen: 978-9945-603-08-8
ISBN Obra Completa: 978-9945-415-97-1

El Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM) es una organización fundada en 1961 asociada a la International Commission on Mathematical Instruction. Busca potenciar la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en las Américas.

Se permite la reproducción de cualquier parte de este libro para fines no lucrativos siempre que se consignen los créditos a los autores y al Comité Interamericano de Educación Matemática.

Para citar este libro y este volumen:

Comité Interamericano de Educación Matemática (2015). *Educación Matemática en las Américas: 2015. Volumen 11: Educación Primaria*. Editores: Patrick (Rick) Scott y Ángel Ruíz. República Dominicana.

Tabla de Contenidos

Presentación i-iii

Área y perímetro de cuadriláteros en estudiantes colombianos de grado 5° de educación formal 1-9
Shirley Galvis Gómez-CO, Kevin Vásquez Reyes-CO

¿Cómo se enseñan las matemáticas en la escuela primaria? 10-21
Edith Arévalo Vázquez-MX

Conocimiento Matemático para la enseñanza en la resolución de problemas geométricos con futuros maestros de educación infantil 22-32
Marjorie Samuel Sánchez-CL, Yuly Vanegas Muñoz-ES, Joaquim Giménez Rodríguez-ES

El lenguaje, modelos y representaciones utilizados por los maestros de 5° de primaria, en la enseñanza de la fracción 33-42
Marta Cecilia Salazar Aburto-CL, Sergio Martinic Valencia-CL, Alexander Maz Machado-ES

Enseñando operaciones con números decimales: Representaciones conflictivas 43-51
Carlos Lopez Leiva-US, Juan Castro-GT, Jorge Monge-GT

Exploración del pensamiento de los niños sobre el concepto de fracción. 52-61
Carlos Castillo Morales-CO, Lady Perdomo Rincón-CO

Implicaciones en la comprensión del valor posicional 62-70
Vivian Uzuriaga López-CO, Geoffrin Gallego Cortés-CO

La construcción del concepto de número natural, mediado por materiales manipulativos en el preescolar 71-82
Lina Gutiérrez Vecca-CO

La enseñanza de la multiplicación: Una propuesta a partir de tareas de proporcionalidad directa 83-92
Liliana Quintero López-BR, Sara Mejia Vasco-CO, Francisco Brabo Bezerra-BR

La interpretación de infantes preescolares de entre 5 y 6 años sobre imágenes didácticas vinculadas con el conocimiento numérico que implica al uso del sistema monetario ($1, $2, $5 y $10) 93-104
Jocelin Venegas Martínez-MX

O desenvolvimento das noções geométricas na Educação Infantil: um estudo de caso 105-117
Suelene de Rezende e Silva-BR, Rute Cristina Domingos da Palma-BR

O ensino da Matemática em uma escola portuguesa 118-127
Sandra Mattos-BR, Maria do Céu Roldão-PT, Laurinda Almeida-BR

Práticas de professoras dos anos iniciais em aulas de Matemática 128-138
Reginaldo Carneiro-BR, Cármen Brancaglion Passos-BR

Recursos didácticos para la enseñanza del pensamiento métrico y espacial con estudiantes de grado primero. 139-150
Francy Castañeda Torres-CO, Lina Fernanda Torres-CO, Luisa Amaya-CO

Representaciones numéricas en niños de primer grado de primaria 151-163
Linda Gómez Ortiz-MX, Cristianne Butto Zarzar-MX

Un número "no decimál" 164-176
Francisco Sánchez Acero-CO

Utilidad de los recursos didácticos, para desarrollar el pensamiento espacial y los sistemas geométricos desde la situación "Recorrido por el mundo geométrico" 177-184
Oscar Gonzáles Pinilla-CO, Camilo Arévalo Vanegas-CO

Presentación

La **XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática** realizada en Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México, del 3 al 7 de mayo del 2015, contó con la participación de cerca de 1000 personas de 23 países y la presentación de más de 500 trabajos (conferencias plenarias y paralelas, mesa redonda, minicurso, diálogos, comunicaciones, talleres y posters) Esta fue una reunión regional de la *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI). El CIAEM es la organización afiliada al ICMI con mayor antigüedad. Su creación se remonta al año 1961 cuando se realizó la primera conferencia en Bogotá, Colombia.

Un gran nivel científico dominó los trabajos, en un ambiente cultural muy especial, con una gran hospitalidad por parte de los colegas de Chiapas.

Los conferencistas plenarios fueron Michèle Artigue (Francia), Carlos Vasco (Colombia), Diane Briars (USA), Abraham Arcavi (Israel-Argentina), Celia Hoyles (Reino Unido), María Teresa Tatto (USA) y Alicia Ávila (México). Ellos también desarrollaron *Diálogos* especiales, espacios adicionales de conversación e intercambio.

Una mesa plenaria organizada por la *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe* contó con la participación de Carlos Sánchez (Cuba), Nelly León (Venezuela), Edison de Faría (Costa Rica), Luis Carlos Arboleda y Jhony Villa (Colombia).

El evento tuvo conferencias paralelas y minicursos impartidos por académicos invitados, entre ellos: Gabriele Kaiser (Alemania), Richard Noss (Reino Unido), Manuel Santos (México), Gert Schubring (Alemania), José Chamoso (España), José Luis Lupiáñez (España), Arthur Powell (USA), Alessandro Ribeiro (Brasil), Roberto Araya (Chile), Gilberto Obando (Colombia), Uldarico Malaspina (Perú).

Los dos temas principales fueron la *Preparación de docentes que enseñan matemáticas* y el *Uso de tecnologías en la Educación Matemática*.

El congreso tuvo el valioso patrocinio de varias instituciones internacionales y nacionales: International Commission on Mathematical Instruction; Universidade Luterana do Brasil; Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas, y Centro de Investigación y Formación en Educación Matemática de la Universidad de Costa Rica; Secretaría de Educación del Estado de Chiapas; Universidad del Valle de México; Sindicato de Trabajadores de la Educación de México; Centro Regional de Formación Docente e Investigación Educativa (CRESUR); Oficina de Convenciones y Visitantes de Chiapas; Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas de México; Escuela Normal Superior de Chiapas; Universidad de Costa Rica; HP; CASIO; y EduSystems.

Desde el 2007 el CIAEM ha logrado, entre otras cosas:

- Potenciar la calidad académica en los trabajos, la organización eficiente y la proyección de las conferencias interamericanas
- Consolidar la publicación de trabajos seleccionados de la Conferencias en la revista *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* (editada en Costa Rica)

- Fortalecer la relación del CIAEM con la comunidad internacional de Educación Matemática, especialmente con el ICMI y la *International Mathematical Union*.
- Crear y consolidar la Medalla *Luis Santaló*
- Apoyar el desarrollo del *Capacity and Networking Project* del ICMI en América Latina (Costa Rica 2012, Perú 2016)
- Auspiciar la creación y las actividades de la *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe*
- Apoyar la organización del *I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe*, celebrado en Santo Domingo, República Dominicana, en noviembre del 2013
- Consolidar el uso intenso de tecnologías de la comunicación en todas las actividades del CIAEM
- Crear una comunidad virtual del CIAEM de gran proyección tanto a través de su sitio web principal como de su página en Facebook
- Fundar en México el *Comité Interamericano de Educación Matemática* con personalidad jurídica para atender los múltiples compromisos formales que posee
- Traducir al español y publicar algunos textos del NCTM relacionados con la temática *Principles to actions* y continuar una línea importante de colaboración con el *National Council of Teachers of Mathematics* de los USA

En la XIV CIAEM fue confirmada la decisión de tener la XV CIAEM en Medellín, Colombia, en el 2019. Será desde hará 58 años la segunda ocasión en que se realizará una CIAEM en tierra colombiana.

CIAEM es el evento internacional más importante en Educación Matemática en América Latina. Constituye un punto de referencia para investigadores, docentes y estudiantes en todo el continente.

La mayoría de los textos de base para las presentaciones plenarias o paralelas ha sido incluidas en el número 15 de los *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* que se edita en Costa Rica: http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem.

Las comunicaciones, talleres, minicursos y posters han sido incluidas en esta colección digital de volúmenes que titulamos *La Educación Matemática en las Américas: 2015.* Los trabajos se han organizado de la siguiente manera:

- Volumen 1 *Educación Matemática en las Américas 2015: Formación Inicial para Primaria*
- Volumen 2 *Educación Matemática en las Américas 2015: Formación Inicial para Secundaria*
- Volumen 3 *Educación Matemática en las Américas 2015: Formación Continua*
- Volumen 4 *Educación Matemática en las Américas 2015: Uso de Tecnología*
- Volumen 5 *Educación Matemática en las Américas 2015: Etnomatemática y Sociología*
- Volumen 6 *Educación Matemática en las Américas 2015: Currículum, Evaluación y Competencias*
- Volumen 7 *Educación Matemática en las Américas 2015: Investigación*
- Volumen 8 *Educación Matemática en las Américas 2015: Estadística y Probabilidad*
- Volumen 9 *Educación Matemática en las Américas 2015: Geometría*
- Volumen 10 *Educación Matemática en las Américas 2015: Álgebra y Cálculo*

- Volumen 11 *Educación Matemática en las Américas 2015: Educación Primaria*
- Volumen 12 *Educación Matemática en las Américas 2015: Historia y Epistemología*
- Volumen 13 *Educación Matemática en las Américas 2015: Nuevos Enfoques y Relación con Otras Áreas*
- Volumen 14 *Educación Matemática en las Américas 2015: Necesidades Especiales*
- Volumen 15 *Educación Matemática en las Américas 2015: Resolución de Problemas*
- Volumen 16 *Educación Matemática en las Américas 2015: Modelación*
- Volumen 17 *Educación Matemática en las Américas 2015: Talleres y Minicursos*
- Volumen 18 *Educación Matemática en las Américas 2015: Posters*

El CIAEM desea agradecer a todos los autores que presentaron sus trabajos en la XIV CIAEM y que incluimos en esta colección de volúmenes. Y a todos los revisores, directores de tema, y colaboradores que participaron en la revisión científica de las ponencias de este magno evento.

La organización detallada y la edición en sus diversas dimensiones fue realizada por nuestro segundo vicepresidente Patrick Scott (Estados Unidos) quien dedicó un esfuerzo extraordinario para tener estas *Memorias* disponibles. Quiero expresar en nombre de nuestra organización nuestro agradecimiento a Rick. Nuestra compañera Sarah González (Vocal para El Caribe) se encargó de tramitar su registro en República Dominicana que contó con el apoyo de la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra de ese país, a las que también expresamos nuestra gratitud.

Los enlaces de estos volúmenes se han colocado en las páginas web oficiales del CIAEM.

Esperamos que la publicación de todos estos trabajos contribuya al progreso de la investigación y la acción de aula en la Educación Matemática de las Américas.

Angel Ruiz
Presidente
Comité Interamericano de Educación Matemática

Área y perímetro de cuadriláteros en estudiantes colombianos de grado 5° de educación formal

Shirley Tatiana Galvis **Gómez**
Universidad del Tolima
Colombia
stgalvisg@ut.edu.co
Kevin Johan Vásquez **Reyes**
Universidad del Tolima
Colombia
kjvasquezr@ut.edu.co

Resumen

Este estudio explora dificultades evidenciadas por estudiantes colombianos de quinto grado de primaria de educación formal, sobre construcción de las nociones de área y perímetro de cuadriláteros. Se ha profundizado en conocimiento útil para docentes, tanto en formación inicial como en ejercicio, en la construcción de tales conceptos por estudiantes de la clase de matemáticas. Con base en los trabajos de Agudelo-Valderrama (2000), García-Amadeo, G., & Carrillo, J. (2006), entre otros, se formularon actividades para fomentar la caracterización de área y perímetro de cuadriláteros. Estas se desarrollaron, por cada uno, con material manipulativo, enfocado hacia las nociones previas de los estudiantes. Con estas actividades, los estudiantes avanzaron en la conceptualización de una manera no convencional: se muestra el paso de la confusión de área y perímetro a la caracterización y diferenciación de los mismos.

Palabras clave: conceptualización, área, perímetro, cuadriláteros, investigación-acción.

Problemática

En las aulas de clase de matemáticas de Colombia, los docentes tienen como referente los estándares y lineamientos curriculares para la educación matemática del Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006) en donde se dan ejemplos de lo que deben lograr los estudiantes en sus clases. Para quinto grado y con relación a área y perímetro los estándares proponen que el estudiante debe: "Desarrollar, comprender y utilizar fórmulas para encontrar áreas de paralelogramos y triángulos" y además, debe "Manejar con fluidez las unidades métricas cuadradas (cm^2, m^2, etc.)"

Muchos docentes de matemáticas tienen concepciones tradicionalistas asumiendo que el conocimiento es estático, es decir, que el único sitio en que se encuentra es en libros de texto, además de tener la idea de que el conocimiento solamente se transmite en una sola vía: del docente al estudiante, sin dar cabida a la posibilidad de que el docente también aprende del estudiante. Lo anterior conlleva a que algunos estudiantes mengüen su capacidad de generar conocimientos en muchas materias, en especial en matemáticas que siempre han sido vistas como "El coco" en la escuela. (Ver, por ejemplo, Agudelo-Valderrama, 2002).

Para este proyecto hemos escogido como foco de atención las dificultades que tienen los estudiantes de quinto grado de primaria en la creación de conceptos de área y perímetro y su interrelación; y el propósito de este proyecto es aumentar nuestro conocimiento sobre posibles situaciones que se nos puedan presentar en las aulas de clase como futuros docentes, para de esta manera apoyar la formación de conceptos en nuestros estudiantes futuros.

Desde nuestra experiencia hemos observado cómo muchos de nuestros compañeros desde la escuela tenían dificultades a la hora de aprender sobre área y perímetro, la gran mayoría de ellos realizaban los ejercicios propuestos en clase desconociendo por completo el origen de los algoritmos que usaban, llevándolos a un desconocimiento de las posibles aplicaciones del área y del perímetro en la vida cotidiana.

Muchas investigaciones (Agudelo-Valderrama, 2005; Carrillo y García, 2006; Marchett, et al., 2005; entre otros) muestran que en la enseñanza de las matemáticas en general persisten los enfoques instrumentalistas (Skemp, 2006), siendo estos descritos como 'reglas sin razones' que hasta hace poco eran considerados como la verdadera "comprensión".

Se observa que cuando en una clase de matemáticas el profesor ha explicado la fórmula para hallar el área de un rectángulo (A = L x B), y alguno de los estudiantes manifiesta no comprender, el profesor le explica así: "La fórmula dice que para hallar el área de un rectángulo, se multiplica la base por la altura", a lo cual el alumno parece entender y procede a realizar ejercicios. Si le dijéramos que en realidad no ha entendido, el estudiante no estaría de acuerdo, argumentando que tiene la respuesta correcta (Skemp, 2006).

Vemos en el ejemplo anterior, que el estudiante cree "comprender" el proceso para hallar el área de un rectángulo, pero lo que en realidad hace, es un proceso de mecanización de un algoritmo, del cual desconoce su origen y significado.

Marco conceptual

La geometría ha sido un elemento esencial en la vida del ser humano desde épocas muy antiguas, Heródoto atribuye su origen a la época del auge de la cultura egipcia (Boyer, 1999). Actualmente el uso de la geometría es mucho más variado que en esas épocas antiguas. La geometría es esencial para distintos ámbitos, como el arte, debido claro a la necesidad del ser humano para conservar el orden, la proporción, la estética; también en la arquitectura, porque brinda un elemento clave para la ubicación espacial; y así en muchas otras áreas que permiten el desarrollo del pensamiento matemático.

Siendo nuestro propósito explorar el pensamiento de los estudiantes de quinto grado, sobre los conceptos de área y perímetro, es pertinente definir estas dos nociones.

Concepciones de área y perímetro

¿Qué es área? Según el diccionario de la Real Academia Española, área es: "Espacio de tierra comprendido entre ciertos límites" notamos en esta definición una contextualización en donde se puede ver las aplicaciones del área en la vida diaria; luego aparece la siguiente definición en lo que respecta a la geometría: "Superficie comprendida dentro de un perímetro" y añade luego: "Extensión de dicha superficie expresada en una determinada unidad de medida". Notamos así que esta definición es algo complicada, usa terminología que puede resultar difícil de entender para los estudiantes, por ello el estudiante buscará el significado de perímetro que dice: "Contorno de una superficie", "Contorno de una figura", "Medida de este contorno".

Estas dos acepciones son problemáticas, pues la definición de área menciona una serie de nociones como "perímetro" y "unidad de medida" y en perímetro incluyen términos como "superficie" "contorno" y nuevamente "medida"; todas estas nociones son problemáticas para los estudiantes, incluso confunden área con perímetro (García-Amadeo y Carrillo, 2006).

Algo que no resulta problemático para los estudiantes es usar intuitivamente áreas y perímetros en muchas situaciones prácticas, sin embargo, los conceptos matemáticos no aparecen claros cuando se intenta explorarlos en ellos.

Área y perímetro en los estándares curriculares

Unreferente que tienen los docentes de matemáticas son los estándares curriculares para la educación matemática del Ministerio de Educación Nacional de Colombia (MEN, 2006) en donde se establecen los objetivos que deben alcanzar los estudiantes; con relación a área y perímetro los estándares proponen que el estudiante debe:

- Desarrollar, comprender y utilizar fórmulas para encontrar áreas de paralelogramos y triángulos.
- Manejar con fluidez las unidades métricas cuadradas (cm^2, m^2, etc.).

Observamos que la educación matemática en Colombia actualmente no se cumple con el desarrollo de estos estándares de manera que el aprendizaje sea significativo; ya que muchos estudiantes se dedican solo a la memorización de algoritmos y fórmulas, sin comprender el significado de éstas (Agudelo-Valderrama, 2000); también el método de enseñanza del profesor influye, ya que la enseñanza tradicionalista aún persiste en muchas aulas de clase colombianas. Aunque hay muchos docentes que quieren mejorar esta situación, aún hay algunos colegas que se "resisten al cambio" (Agudelo-Valderrama, 2005), y esto puede ser debido a que para ellos es difícil afrontar un nuevo paradigma.

Dificultades de los niños

En general los estudiantes desconocen el carácter bidimensional de "área", y en algunos casos incluso llegan a confundir los conceptos "área" y "perímetro"; lo que se manifiesta en un uso indebido de las fórmulas (García-Amadeo & Carrillo, 2006). A partir de esto, los estudiantes muestran un desconocimiento, en algunos casos total, de los dos conceptos en cuestión. En parte, los estudiantes se encuentran en un "nivel implícito del conocimiento", en el cual no entienden el tema, solo lo verbalizan, es decir lo memoriza y opera mecánicamente; lo que se debería lograr en las aulas de matemáticas es un "nivel explícito" en donde el estudiante entiende y logra exteriorizar sus conocimientos (Karmiloff-Smith, 1994).

Para los conceptos de área y perímetro es posible alcanzar el nivel de "conocimiento explícito" de forma significativa; pues comprender las diferencias y relaciones entre ambos significa categorizar los diferentes elementos que los conforman por medio de conclusiones propias y no las que se le da por hecho. Para alcanzar éste nivel el estudiante debe desarrollar sus propias concepciones hacia los distintos términos que se utilizan, las unidades de medida y sus magnitudes.

Concepciones de los profesores

Las diferentes definiciones cotidianas de magnitud, área, perímetro, etc., se pueden encontrar en cualquier diccionario, pero el significado de éstas para la persona que las lee, puede ser diferente. El profesor, en su proceso de enseñanza, puede mencionar definiciones detérminos

a usar en clase y remitir a los estudiantes a libros de texto para que lean y traten de comprender; sin embargo, el profesor no tendrá conocimiento de lo que está pasando por las mentes de sus alumnos. El docente debe organizar ambientes de aprendizaje que involucren activamente un proceso que lo lleve a conocer las concepciones de los estudiantes.

Ésta es una de las principales dificultades que podemos detectar y que se presenta en el aula de clase en la práctica cotidiana, como lo muestra la investigación (Agudelo-Valderrama, 2005; Carrillo y García, 2006; Marchett, et al. 2005; entre otros); según éstos resultados el docente necesita crear estrategias y espacios para conocer el pensamiento de los estudiantes y para identificar la presencia o ausencia de saberes. Como consecuencia de lo anterior debería poderse replantear el proceso de enseñanza desde sus nociones previas, para así lograr una continuidad en el proceso de construcción de conceptos por parte de los estudiantes.

Skemp (2006), describe como "Comprensión Instrumental" ese proceso en el que al estudiante se le dan una serie de pasos a seguir para aplicarlos en una serie de ejercicios, como una serie de 'reglas sin razones' para su posterior aplicación. En consecuencia los estudiantes desconocen los significados originales de las "fórmulas" recibidas y no comprenden el origen de tales reglas; tampoco llegan a conocer los amplios espacios existentes de aplicación de los conceptos de área y perímetro.

Metodología

Nuestro proyecto se desarrolló mediante el siguiente ciclo de investigación acción adaptado del propuesto por Ponte (1995):

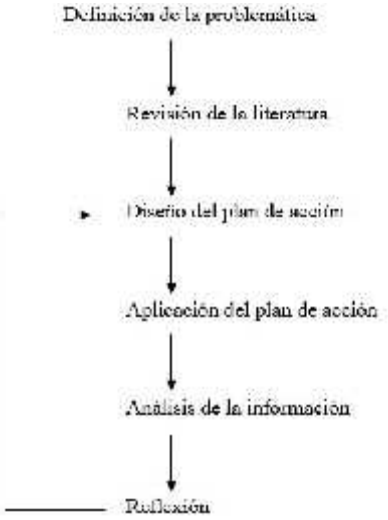


Figura 1. Ciclo de Investigación-acción

El sentido de cada etapa de las relacionadas en la Figura 1 es el siguiente:

- Definición del problema: en este paso, indagando desde nuestras experiencias escogimos una problemática con un foco sobre área y perímetro, debido a que muchos de nuestros compañeros de clase presentaron problemas cuando estábamos trabajando este tema. Kemmis y McTaggart (1992) proponen que:

Una buena manera de iniciar un proyecto de investigación – acción consiste en acopiar unos datos iniciales en un área de interés general.

A partir de lo propuesto por Kemmis y McTaggart surgió la pregunta: ¿tienen los niños una diferenciación clara entre los conceptos de área y perímetro?

- Revisión de la literatura: En este punto nos remitimos a diferentes autores para identificar lo que ellos plantean sobre la problemática por nosotros identificada.
- Diseño del plan de acción: Ya con la sustentación de las dificultades pudimos pasar al diseño del plan de acción en un aula de contexto real de clase, para así, reforzar los conocimientos sobre área y perímetro.
- Aplicación del plan de acción: en esta etapa procedimos a obtener el consentimiento de directivos y profesores en una institución educativa de la ciudad, en un grado quinto de primaria. El grupo constaba de 31 estudiantes.
- Análisis de la información: Una vez aplicado el plan de acción, se llevó a cabo la sistematización para su debido análisis, en el cual nos pudimos dar cuenta de regularidades y tendencias de los niños al contestar las preguntas, información que permitió ver la efectividad del plan de acción y contar con ejemplos claros de la forma de cómo los estudiantes abordan las preguntas, y resaltar las dificultades y obstáculos de éste.
- Reflexión: Finalmente con el análisis de la información ya hecho, llegamos a conclusiones bastante relevantes para nosotros como futuros profesores.
- Redefinición del plan de acción: Después de reflexionar sobre los resultados del plan de acción procedemos a redefinir nuestra idea inicial del mismo, con el fin de que en futuros trabajos el enfoque sea más preciso para abordar nuestra problemática.

Plan de acción

El plan de acción que utilizamos fue diseñado, basándonos en la información recolectada mediante nuestro instrumento de recolección de información, éste consistió en dos actividades: la primera enfocada principalmente en el concepto y noción de área,la segunda en el concepto y noción de perímetro, para de esta forma establecer relaciones y diferencias entre los mismos.[1]

Para explorar los conocimientos de los estudiantes, durante cada actividad se recolectó información de manera constante mediante una hoja formato (diferente para cada una de las dos actividades), en la que respondieron algunas preguntas de acuerdo a sus progresos.

Resultados

En la actividad enfocada en área, se realizaron preguntas como la siguiente:

"¿Cuántas figuras azules necesitas para rellenar completamente el suelo A? ¿Cómo lo hiciste? Por favor escribe todo lo que hiciste y todo lo que pensaste para hacerlo"

Algunas de las repuestas obtenidas fueron:

"96 fichas, lo hice mirando que 4 triángulos forman 1 cuadrado. Yo hice una multiplicación, había 24 cuadrados hechos por 4 triángulos y multipliqué 24x4."

"*96, me dio 96, multipliqué 24x4=96. Habían 4 triángulos para formar un cuadrado"*

Las siguientes gráficas muestran los resultados de la pregunta 1 de la actividad 1:

[1] Ambas actividades se dividieron en dos grupos: uno con un cuadrado y el otro con un rectángulo, por lo que se obtuvieron dos grupos de resultados.

Gráfica 1. Respuestas a la pregunta 1, actividad 1, grupo de rectángul*os*

Gráfica 2. Respuestas a la pregunta 1, actividad 1, grupo de cuadrados

En el desarrollo de la actividad, se detectó que, para responder la pregunta, algunos estudiantes contaron uno a uno el número de unidades de área requerido para rellenar la figura, otros hicieron uso del principio multiplicativo del área, pues en sus respuestas comunicaban los procesos realizados por cada uno, expresando que, para rellenarla, multiplicaban la base con la altura; se encontraron casos diferentes en los cuales, los estudiantes respondieron de otra manera, pero sin mostrar ningún proceso aparente para ello.

Además, se notó una tendencia en el grupo de cuadrados, pues un porcentaje significativamente alto en contraste con el grupo de rectángulos, obtuvo una respuesta similar en la pregunta. Esto permite inferir que el cuadrado, al ser una figura regular, presentó menor dificultad que el rectángulo.

En la actividad enfocada en perímetro, una de las preguntas fue:

"¿Cuántos trozos de guarda escobas grande usaste para bordear completamente todos los pisos? ¿Cómo lo hiciste? Por favor escribe todo lo que hiciste y todo lo que pensaste para hacerlo"

En este caso, se obtuvieron respuestas como:

"16, bordeando a los lados con las fichas azules (verdes). Yo no pensé cómo hacerlo, sino que sólo miré el cuadrado y sus lados puse las fichas, y en cada lado habían 4 fichas y 4 lados y multipliqué 4x4=16."

"20 trozos grandes. Conté. Cuando terminé conté cuántos trozos gasté."

Las siguientes gráficas muestran los resultados de la pregunta 1 de la actividad 2:

Gráfica 3. Respuestas pregunta 1, actividad 2, grupo de rectángulos.

Gráfica 4. Respuestas a la pregunta 1, actividad 2, grupo de cuadrados.

En el desarrollo de la actividad enfocada al concepto de perímetro, la información recolectada destaca dos procesos los cuales los estudiantes relacionaron y dieron respuesta a la pregunta, los cuales fueron: el conteo de unidades de perímetro para determinar la suma total de los lados y el proceso de multiplicación, en el que usaban el producto como método de suma abreviado.

El grupo que desarrolló el cuadrado, mostró un efecto techo en las respuestas a la pregunta 1, pues los estudiantes en su totalidad respondieron de manera acertada, independientemente del método usado; en cambio, los estudiantes que se dedicaron a desarrollar el rectángulo, presentaron algunas dificultades al momento de responder. Esto muestra que el cuadrado representó menor dificultad en comparación con el rectángulo.

Al finalizar las actividades se realizó un foro en el que los estudiantes dieron a conocer sus experiencias durante las actividades, a la vez que se concluyó que las actividades realizadas correspondieron a los conceptos de área y perímetro.

Discusión de los resultados

Acorde a lo expuesto en el marco conceptual, tras aplicar el instrumento de recolección de información se pudo asumir que existe confusión entre los conceptos "área" y "perímetro"; en cambio, mediante el uso intuitivo de estos conceptos, los estudiantes presentaron dificultades menores, lo que nos da a entender que, la confusión se crea, posiblemente, en la transición entre las intuiciones de los estudiantes y los conceptos dados en el aula de clase.

Los estudiantes además, muestran en sus procesos cognitivos, procesos equivalentes al uso de las fórmulas para hallar áreas y perímetros, a pesar de no hacer mención de ninguna en ningún momento de la actividad, lo que señala que están construyendo sus propios métodos a partir de situaciones concretas, métodos que los llevan a desarrollar nuevos algoritmos y así, de manera práctica, dar respuesta a una situación en particular.

Conclusiones

- La figura cuadrada presentó una dificultad significativamente menor que la del rectángulo.
- Los estudiantes mostraron una tendencia natural de asumir el cuadrado como unidad de área.
- Con estas actividades, los estudiantes tuvieron una oportunidad de conceptualizar de una manera no convencional las nociones de área y perímetro.
- Los estudiantes, mediante el uso intuitivo del área y perímetro, pueden generar procedimientos similares a los propuestos por los algoritmos generales de los mismos.

Limitaciones del estudio

Durante las actividades, se presentaron situaciones que dificultaron el desarrollo de las mismas, como festividades internas de la institución, las cuales limitaron el tiempo de la realización de las actividades, además de dispersar la atención de los estudiantes.

Otro de los limitantes del trabajo fue la falta de una entrevista clínica a los estudiantes para profundizar sobre el porqué de sus respuestas y evitar confusiones al momento de su interpretación.

Además, el número de sesiones realizadas en este estudio, consideramos que fue poco en comparación con el número de las actividades propuestas, ya que cada una exigía más tiempo para su realización.

Bibliografía

Agudelo-Valderrama, C. (2000). *Una innovación curricular que enfoca el proceso de transición entre el trabajo aritmético y algebraico*. Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.

Agudelo-Valderrama, C. (2005). Explicaciones de ciertas actitudes hacia el cambio: las concepciones de los profesores y profesoras de matemáticas colombianos (as) sobre los factores determinantes de su práctica de enseñanza del álgebra escolar. *EMA, 10*(3), 375-412.

Boyer, C. (1999). *Historia de la Matemática*. Madrid: Alianza Editorial S.A.

García-Amadeo, G., & Carrillo, J. (2006). Relación entre perímetro y área: el caso de Patricia y las interacciones. *Investigación en educación matemática: actas del X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 185-194). Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses.

Hopkins, D. (2008). *Hacia una Buena Escuela: Experiencias y Lecciones*. Santiago de Chile: Quebecor World Chile.

Karmiloff-Smith, A. (1994). *Más allá de la modularidad*. Madrid: Alianza Editorial.

Kemmis, S., & McTaggart, R. (1992). *Cómo planificar la Investigación-Acción*. Barcelona: Deakin University Press, Victoria.

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Curriculares en Educación Matemática*. Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Skemp, R. (2006). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching in the middle school, 12*(2), 88-95.

¿Cómo se enseñan las matemáticas en la escuela primaria?

Edith **Arévalo** Vázquez
Normal "Miguel F. Martínez"
México
edith.arevalo@enmfm.edu.mx

Resumen

En el presente estudio se pretende indagar las formas de enseñanza de los profesores en torno al tratamiento de la asignatura de Matemáticas en las escuelas primarias, en virtud de que en México, se ha implementado el Plan de Estudio 2011; en cuyo modelo educativo se espera una participación activa tanto del docente como de los estudiantes en la construcción social de conocimientos matemáticos. Se plantecomo objetivo valorar las formas de enseñanza de los profesores en el tratamiento de esta asignatura, desde los primeros grados de escolaridad. La investigación es de tipo descriptivo con enfoque cualitativo. Se ha obtenido información que posibilita conocer el estado actual sobre la práctica de docentes en servicio. Participan profesores de primero y segundo grado de instituciones ubicadas en diversos contextos, en quienes se ha identificado elpredominio de una metodología alejada de los principios pedagógicos propuestos desde este documento rector.

Palabras clave: Matemáticas, Plan de Estudios, enfoque didáctico, enseñanza, profesores.

Planteamiento del problema

En México, al igual que en otros países latinoamericanos, en tiempos recientes se han implementado reformas curriculares con el ánimo de reorientar la enseñanza hacia modelos centrados en las particularidades y necesidades de quienes aprenden, tomando como referente el marco de la sociedad y cultura en la que se encuentran inmersos y el entorno globalizado en el que actualmente se vive. Particularmente en el país, entró en vigor el Plan de Estudios 2011 para Educación Básica al valorar que las propuestas académicas en las que se fundamentaban los planes y programas que le antecedieron, no habían logrado corresponder con los vertiginosos cambios socioculturales y tecnológicos que se visualizaban. Razón por la cual, los principios pedagógicos que nutren a este documento rector, colocan a los estudiantes como centro del proceso educativo, pretendiendo promover en ellos una formación académica que les posibilite enfrentar y resolver problemas en su quehacer cotidiano como efecto de la propia construcción de conocimientos, el desarrollo de habilidades y la promoción de actitudes adquiridos a través del abordaje de las diversas asignaturas incorporadas desde la malla curricular (SEP, 2011b).

Para el tratamiento delas Matemáticas en aula -desde la implementación de Planes anteriores-,se ha pretendido romper con el esquema clásico de enseñanza en donde el profesor es el poseedor de un cuerpo de conocimientos acabados que deben ser transmitidos al estudiante y donde éste los recibe y los reproduce en la medida de sus posibilidades. Esperando en consecuencia, una participación más activa de ambos actores en la construcción de lo que se aprende, y donde el interés debe centrarse en entender las razones, los procedimientos, las

explicaciones que construyen y utilizan los estudiantes para responder tareas matemáticas que posibiliten el fortalecimiento del pensamiento matemático (Cantoral, 2008).

Bajo esta dinámica, la enseñanza implica al profesor la incorporación de habilidades profesionales que le faciliten una gestión de la clase en mejores condiciones esperando por consiguiente, mejores resultados. Y en este sentido, es valorado como pieza clave en el contexto escolar, ya que es el verdadero agente del desarrollo del currículum, responsable de aplicar con éxito los nuevos programas en el aula, y encargado de atender las necesidades educativas que se requieran (SEP, 2009). Acciones que sin duda, le comprometen a seguir transformando su práctica, modificar sus creencias sobre lo que representa abordar la asignatura; le implica dejar de lado la postura rígida y cuadrada, en la que se sostiene un riguroso control de lo que acontece en la clase en la donde se dicta una cátedra con base a definiciones y "resolución" de expresiones que distan mucho de ser realmente situaciones de aprendizajes en Matemáticas.

Su labor es ahora la de diseñar y facilitar tareas didácticas en las que sus estudiantes actúen empleando su potencial conforme a los aprendizajes esperados que se plantean desde los programas de estudio, con el firme propósito de que lleguen a ser matemáticamente competentes. Que se vea no como la única persona que sabe lo que hay que hacer en la clase (Lee, 2006); su función de mediación supone ocuparse de la enseñanza y ayudar a sus estudiantes en su proceso de aprendizaje para que progresivamente se hagan cargo del mismo.

Sin embargo, en encuentros institucionales hemos identificado algunas prácticas de docentes que, pese a la implementación del Plan de Estudios 2011, plantean y efectúan acciones que dejan de lado las recomendaciones didácticas sugeridas para el tratamiento de los contenidos matemáticos propuestos desde los documentos normativos. En sus voces se reflejan expresiones como

> "*yo enseño con la misma metodología que me enseñaron… algo tradicional; es una pérdida de tiempo dejar que los niños resuelvan problemas por ellos mismos sin que les des primero un ejemplo; dedico mucho tiempo para realizar una actividad, lo que resta tiempo para socializar procesos de solución, mejor paso a un niño a escribir la respuesta al pizarrón; contestamos grupalmente los ejercicios del libro de texto"*.

Posicionamientos de los profesores que nos han llevado a la reflexión y el planteamiento de cuestionamientos como qué sucede realmente en las aulas con la enseñanza de esta asignatura y por qué no podemos obtener mejores aprendizajes en nuestros alumnos; ya que como es de conocimiento público, resultados en recientes evaluaciones aplicadas a nivel nacional e internacional, han arrojado datos que dan cuenta del poco avance académico en los niveles de educación primaria y secundaria. Cuestionamientos que a su vez, reforzaron nuestra convicción e interés por indagar más de cerca sobre lo que acontece dentro de los espacios educativos, con la finalidad de conocer las realidades que se tejen en torno al tratamiento de ésta tan infortunada asignatura; esperando tener a su vez una visión más clara sobre el papel que desempeñan los profesores en el aula y el de los elementos implicados en su práctica docente.

Centramos la mirada en los procesos de enseñanza debido a que los profesores son un elemento importante**,** dado que son ellos los que en último término, deben diseñar e implementar en contexto áulico las estrategias de enseñanza más adecuadas a las necesidades de sus estudiantes con la finalidad de promover la construcción de mejores aprendizajes(Rico, 2010). En este sentido es importante señalar que el límite de la calidad de cualquier sistema educativo es la calidad de sus profesores (Arends, 2007), en el entendido de que el *profesor* como actor

protagónico, es responsable de contribuir a la mejora educativa a través de sus actitudes y prácticas ajustadas conforme a lo propuesto desde los programas de estudio.

Razones por las cuales, a través de la presente investigación pretendemos dar respuesta a ¿cómo enseñan los profesores los contenidos de la asignatura de Matemáticos desde los primeros grados, en la escuela primaria? y en consecuencia ¿qué resultados se obtienen con la implementación de estas formas de enseñanza? Planteando como objetivo valorar las formas de enseñanza de los profesores, en el tratamiento de esta asignatura desde los primeros grados de escolaridad; buscando con ello describir las formas de enseñanza que implementan en las aulas, así como los tipos de producciones que utilizan para recuperar los aprendizajes de sus estudiantes en clase, y en consecuencia los efectos de estas prácticas docentes.

Se focalizó el estudio particularmente con profesores de primero y segundo grado de educación primaria, con la finalidad de conocer cómo se inicia el proceso desde los primeros encuentros en las aulas. Al respecto, investigadores como Rico y Castro (1997), Coll (2009) y Chamorro (2003) ponen de manifiesto que los primeros años de escolaridad, son de vital trascendencia para la educación matemática posterior del educando; refiriendo que en estos primeros contactos formales es donde se van formando los conceptos básicos o primarios y los primeros esquemas matemáticos conceptuales sobre los que posteriormente, se construirá toda una serie de aprendizajes cada vez más abstractos y complejos. Razón por la que desde los primeros años, la escuela tiene la responsabilidad de encauzar acciones de enseñanza efectiva, para que los estudiantes evolucionen hacia procesos más abstractos de pensamiento y desarrollen a su vez, una actitud favorable hacia el estudio de la asignatura (SEP, 2011c).

Enfoque didáctico para el tratamiento de las matemáticas

Para el tratamiento de la asignatura, se propone la creación de un ambiente de trabajo que ofrezca a los estudiantes la oportunidad de *aprender* haciendo matemáticas. Queda expresado asimismo, la promoción del planteamiento de situaciones problemáticas para que las resuelvan con sus propios recursos, que discutan en grupo, analicen sus procedimientos y resultados con la finalidad de que expresen sus ideas y las enriquezcan con las opiniones de sus compañeros de clase, poniendo en juego las competencias matemáticas a desarrollar a través a través de su tránsito por la educación básica. Se busca de igual forma, despertar el interés por la asignatura a través del desarrollo del pensamiento matemático, desde estos espacios de trabajo y a edades tempranas.

Se destaca la importancia del tratamiento de los contenidos en cuestión mediante la puesta en marcha de secuencias de situaciones de aprendizaje que resulten atractivos y con sentido para los alumnos, esperando propiciar con ello la reflexión que les conduzca hacia la resolución de las mismas, haciendo uso preferentemente de sus propios recursos y estrategias. Bajo este tratamiento, el conocimiento de reglas, algoritmos, fórmulas y definiciones sólo es importante en la medida en que puedan utilizarlo de manera flexible para la solución de problemas. De ahí que los procesos de estudio vayan de lo informal a lo convencional, tanto en términos de lenguaje como de representaciones y procedimientos; para ello, la actividad intelectual fundamental en estos procesos se apoya más en el razonamiento que en la memorización (SEP, 2011b). Momentos en donde tanto el profesor como su(s) alumno(s) tienen la oportunidad de interactuar, participar y comunicarse con la intención de construir socialmente saberes; hechos que poniendo de manifiesto con toda claridad, los nuevos retos a los cuales se enfrentan, al requerirse actitudes

distintas frente al conocimiento matemático y ante lo que representa enseñar y aprender matemáticas, teniendo como referentes los principios pedagógicos en cuestión.

Se pone de manifiesto que el actuar con apego a la metodología propuesta, asegura en buena medida cambios significativos en este proceso, donde la enseñanza del profesor habrá de ir mucho más allá de la transmisión de conocimiento, siendo entendida en entonces como "…la creación de las condiciones que produzcan la apropiación del conocimiento por parte de los estudiantes" (Cantoral, 2008, p. 25); pretendiendo de esta manera dejar de lado el enfoque tradicional de enseñanza en el que se identifica una atmósfera donde se reduce a la comunicación de verdades totalmente acabadas e inamovibles.

Es así como el aula de clase ya no debe ser considerada solamente como el escenario físico donde se enseña y se adquieren aprendizajes escolares. Ha de ser entendida como el espacio donde se habla y se escucha, en el que se generan y se construyen saberes; en donde las matemáticas sean concebidas y tratadas como una herramienta fundamental utilizada en prácticamente todas las áreas del quehacer humano, desde las actividades cotidianas más simples hasta en la investigación más sofisticada en cualquier área científica (SEP, 2009). Esperando con ello que los estudiantes desarrollen habilidades operatorias, de comunicación y de descubrimiento para que estén en posibilidad de aprender permanentemente y con independencia, teniendo la oportunidad de resolver problemas matemáticos de diversa índole y en diversos contextos, pues no son ocupación exclusiva de un grupo reducido de especialistas; forman parte de la vida de la colectividad.

Esta perspectiva sin duda alguna, compromete a todo profesor a seguir transformando y mejorando su práctica en las aulas; le implica modificar sus paradigmas sobre lo que representa abordar contenidos matemáticos en los espacios educativos, dejar atrás la postura en la que se sostiene un riguroso control de lo que acontece en la clase (SEP, 2009), donde el conocimiento de reglas, algoritmos, fórmulas y definiciones son prácticamente la base bajo la que se abordan temáticas, dando apertura al planteamiento de verdaderas situaciones de aprendizaje que conduzcan a la adquisición de verdaderos aprendizajes, tal como se sugiere desde el enfoque didáctico actual.

Diseño y Metodología

La presente investigación es de tipo descriptivo. En ella se generaron diferentes rutas en la búsqueda de información, y se aplicaron instrumentos que dan cuenta del uso del enfoque cualitativo; ya que este tipo de estudios sirven para comprender la realidad social dejando de lado las visiones unificadas que no se pueden aplicar al hecho social, y donde no hay leyes generalizadas, sino emociones, pensamientos, he historias de los actores que son captados a través de lo que hacen y dicen en el momento. En este tipo de investigación se observa el contexto natural y el sentido social, y cómo afecta a los individuos; se aprende sobre los fenómenos que ocurren a su alrededor y sus relaciones de causa y efecto, con el fin de poder interferir en ellos o utilizar este conocimiento para la mejora de los procesos.

Para la recolección de dato se hizo uso de la observación cualitativa en ambientes naturales, con apoyo de videos de clases y una guía de observación para el estudio de la enseñanza de los profesares; su análisis, posibilitó el conocimiento sobre cómo el profesor organizó y desarrolló su quehacer docente en el aula; complementando a ello, sus opiniones vertidas en entrevistas semiestructuradas en torno a sus concepciones sobre esta disciplina y las formas de enseñanza en la escuela primaria. De igual manera, se hizo la revisión de materiales escritos, como

producciones de los alumnos para recuperar el impacto de la enseñanza de los profesores en la presente asignatura.

La guía de observación está conformada por quince categorías, mismas que fueron estructuradas conforme a la revisión de los fundamentos pedagógicos y metodológicos para abordar la asignatura en estos grados, los que se encuentran expresados en los documentos normativos editados por la Secretaría de Educación Pública del país. De igual manera se recuperaron y contrastaron otras más de Arévalo (2007) y Díaz-Barriga (2007) utilizadas en sus respectivas investigaciones. Para su tratamiento y análisis, la información se concentró en matrices de datos (Profesor/Categorías), efectuando registros descriptivos en cada una de las celdas en torno a lo identificado en las observaciones y videos. La entrevista constó de cuestionamientos que giraron en torno a cuatro dimensiones: formación docente y actualización, concepciones de los profesores sobre su enseñanza, conocimiento del Plan y Programa de Estudio 2011, y conocimiento disciplinar y didáctico.

En referencia a las producciones y participaciones de los estudiantes, se clasificaron con respecto a lo sugerido desde el enfoque didáctico así como de literatura de expertos en la materia; las descripciones y hallazgos se registraron en un concentrado (Contenido/Producción) con fines de interpretación. Se consideraron aspectos como el tipo de recurso/instrumento utilizado, tipo de producción, tipo de actividad(es), tiempo de dedicación para su solución, momentos para la revisión, momentos para la retroalimentación. Para la estructuración de los mismos se tomaron como referencia también, diversas fuentes bibliográficas y materiales de apoyo que integran el acervo que debe poseer el docente para organizar su enseñanza, ente ellos Plan de Estudios, Programa y Libro para el Maestro de Matemáticas. Fueron elaborados a partir de las propuestas y sugerencias de los autores revisados en el marco teórico del presente reporte y validados por un grupo de experto en la materia, al igual que las categorías de la guía antes referida.

La muestra para la investigación está integrada por seis profesores que laboraron en primero y cuatro en segundo grado de educación primaria de escuelas primarias públicas, ubicadas en tres municipios en el estado de Nuevo León. Se buscaron escuelas pertenecientes a diferentes contextos y población, así como con diversas condiciones de trabajo. Tres instituciones forman parte de programa Escuela de Tiempo Completo, en las cuales se trabaja doble jornada en horario de 8:00 am a 4:30 pm. El resto de las escuelas laboran un solo turno, cuatro en turno matutino en jornada de 7:30 am a 12:30 pm y tres en turno vespertino en horario de 1:00 pm a 6:00 pm. El número de alumnos por grupo de las diez instituciones oscila entre 28 y 40 estudiantes, habiendo entre ellas escuelas con alta demanda educativa consecuencia de su reconocimiento social.

Siete son maestros de base y tres de contrato, con una antigüedad que oscila entre los 2 y 24 años en el servicio docente. Uno es de sexo masculino y 9 de femenino, ya que es una práctica recurrente en el país, ubicar a profesoras en el primer ciclo de escolaridad (1º y 2º grados) de la educación primaria. Para garantizar el anonimato y la confidencialidad de los participantes, todos fueron identificados bajo el rubro de *profesor,* evitando mencionar su sexo.

Resultados

A manera de síntesis presentamos los siguientes resultados preliminares con una interpretación de tipo cualitativo, destacando aquellos que valoramos posibiliten al lector un breve panorama sobre los primeros hallazgos obtenidos hasta el momento, esperando en la

siguiente etapa de la investigación, ofrecer resultados lo suficientemente explícitos y profundos en torno a cada uno de los instrumentos recuperados para el análisis de la información.

Sobre las entrevistas a los profesores (el decir)

Sus voces fueron recuperadas con la finalidad de identificar la forma de concebir y tratar a las matemáticas en el aula, dejando de manifiesto expresiones como:

- *Los niños no entienden las matemáticas por falta de comprensión, les cuesta trabajo relacionar los conceptos abstractos, como principios, fórmulas y algoritmos con las diversas situaciones de la vida cotidiana, aunque les pongas "problemas razonados" para que los resuelvan.*
- *No quieren pensar cómo resolver el problema que les pongo en el pizarrón, esperan que les diga qué tenemos que hacer… esto hace que mejor decida cambiar de actividad y poner una más sencilla.*
- *Creo que los procesos en matemáticas son muy complejos para ser entendidos por los niños, trato de buscar la manera más sencilla de explicarlo, pero aun así no todos "me entienden qué tienen qué hacer".*
- *Desde primer grado se les dificulta a los niños realizar operaciones básicas porque no entienden cuándo sumar o cuándo restar y por eso les tengo que poner muchos ejercicios parecidos.*

Manifestaciones como las anteriores, dan cuenta del limitado trabajo que se realiza sobre el tratamiento de las matemáticas con respecto al enfoque actual, limitando así la construcción de saberes matemáticos, y dejando de lado por consiguiente, la participación activa que le correspondería a los alumnos, identificándose con toda claridad el protagonismo y "el decir" del profesor, en el escenario áulico.

Otras respuestas más, atribuyen la total responsabilidad a los alumnos sobre las problemáticas y el rechazo hacia la asignatura, al manifestar que:

- *No les interesa, hay apatía, no están motivados, no ponen atención.*
- *No intentan construir sus propias estrategias para entender o resolver un simple problema.*
- *Las actividades que propician interacción, las usan para jugar y no para aprender…pierden fácilmente el interés.*
- *No asimilaron adecuadamente algunos conceptos básicos para continuar aprendiendo.*

Dentro de las respuestas emitidas por los profesores con respecto al tratamiento de la asignatura conforme al enfoque sugerido, podemos identificar claramente las limitadas oportunidades hacia los alumnos para "hacer matemáticas" y disfrutar de ellas, pese a que éste sea uno de los propósitos esenciales en la enseñanza de la asignatura; ya que sus voces dan cuenta de ello:

- *Para qué dejarlos que platiquen y opinen en clase, si no saben cómo resolver un problema.*
- *Trabajar en equipo y compartir ideas lleva mucho tiempo y después estamos apurados porque no terminamos de ver los temas… el programa está muy cargado de contenidos.*

- *Creo que seguimos enseñando como nos enseñaron a nosotros, mostrar primero cómo se resuelven los problemas, el "aprendizaje" de reglas y después escribir una serie de ejercicios en el pizarrón.*
- *Pienso que para no perdernos y avanzar en los contenidos, debamos basarnos en las actividades del libro del alumno, porque nos va indicando qué tenemos que enseñar.*

Manifestaciones que refuerzan el hecho de que en algunos casos -sobre todo en los grupos de los primeros grados de educación primaria- el enfrentamiento con las matemáticas inicia de una manera totalmente diferente a la sugerida desde el enfoque didáctico y como los alumnos las habían tratado en la educación preescolar, espacio desde donde se promueve el desarrollo del *pensamiento matemático* a través de situaciones de aprendizaje que involucran juegos educativos ajustados a su realidad con la intención de favorecer la construcción de nociones y conceptos matemáticos a través de la manipulación constante de material concreto (SEP, 2006), y donde la comunicación interpersonal maestro-alumno es prioritaria.

Evidencia clara de ello lo reflejan también las formas en las que los profesores manifestaron la manera de abordar y solucionar por ejemplo problemas aditivos, ya que se les solicitó dar explicación al respecto. La mayoría de los entrevistados expresaron de manera inmediata que el problema debía ser solucionado a través del algoritmo, ya que así lo requería el problema, sin considerar que para llegar a la comprensión y utilización de los mismos, se debe trabajar sobre todo un proceso. Al respecto, investigadores como Cantoral (2008) refieren que los conocimientos adquiridos así se olvidan fácilmente y no quedan integrados en las estructuras lógicas de los alumnos, ni parecen fortalecer su pensamiento matemático. Se ha de destacar asimismo que, sólo dos profesoras manifestaron buscar la vinculación del problema con situaciones de contexto del estudiante.

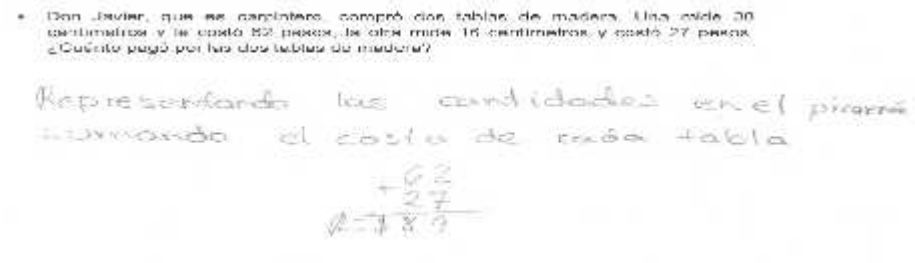


Figura 1. Forma típica de solucionar un problema escolar con los alumnos

Sobre la enseñanza de los profesores (el hacer)

Las observaciones de clase y registros se efectuaron durante un semestre del ciclo escolar; las sesiones fueron calendarizadas conforme a los tiempos de clase de los profesores en las escuelas primarias, y de acuerdo al horario establecido en cada institución. Toda vez recuperada la información, se procedió a sistematizar las categorías recuperadas de la práctica docente y concentrar en los instrumentos a los que ya se hizo referencia. Entre ellas se han de destacar por su relevancia las siguientes, mismas que se pueden contrastar con el decir de los profesores:

Escenario/contexto áulico: La mayoría de las aulas cuenta con bancos individuales (con estructura silla/paleta) distribuidos en tradicionales filas, de tal forma que los alumnos estén en posibilidad de observar el frente del salón donde está ubicado el pizarrón o pintarrón, y el escritorio del profesor instalado a un costado. Sólo tres de los profesores utilizaron diferente organización del mobiliario durante el desarrollo de algunas sesiones. Dos aulas de primer grado

disponen de mesas de trabajo como mobiliario para los alumnos; sin embargo, los profesores subutilizaron esta forma de organización, obteniendo limitado provecho para el desarrollo de actividades.

Tiempo de la clase: La duración fue muy variada, osciló entre 30 y 65 minutos. Las más de las clases tuvieron una larga duración, propiciando distracción en los niños al momento de realizar ejercicios, aburrimiento, somnolencia, desorden al transitar por el aula y conversaciones entre compañeros en determinados momentos de la sesión. Se invirtió excesivo tiempo en algunas actividades, lo cual generó desinterés en la mayoría de los alumnos; sin embargo, el profesor no atendió estas visibles señales para optimizar los tiempos con la finalidad de favorecer la enseñanza y generar en consecuencia mejores aprendizajes. Pocos profesores organizaron y distribuyeron los tiempos de la clase en función de los aprendizajes esperados y de los propósitos del tema a tratar, tal como se sugiere en las recomendaciones del Libro para el Maestro y Guía para el Maestro.

Actividades de aprendizaje: En seis clases, los profesores trabajaron exclusivamente con una actividad; la mayoría organizó de dos a cuatro actividades durante la sesión, pese a que en su planeación se incluyeron otras más. Entre ellas se han de citar la implementación de juegos sugeridos desde los materiales de apoyo proporcionados por la SEP, trabajados de forma grupal o en equipos; contestar en grupo ejercicios propuestos por el profesor haciendo uso del pizarrón; resolver ejercicios manipulando material concreto, contestar ejercicios del libro de textos; hacer uso del material recortable del libro para resolver problemas; resolver ejercicios en los cuadernos en lo individual, contestar fichas de trabajo, entre otras. Se identificaron sólo algunas actividades que favorecieron el aprendizaje de los alumnos, pese a que el planteamiento central en cuanto a la metodología didáctica que se sugiere para el tratamiento de la matemáticas gira en torno al uso de secuencias de situaciones problemáticas (SEP, 2011c).

Material didáctico/manipulable: Hubo limitado uso de material didáctico por parte del profesor, como dibujos o carteles con imágenes. Asimismo se observó que los alumnos utilizaron en algunos momentos material manipulable/concreto. Entre los manipulados se pueden citar monedas del material recortable del libro de texto, Tangram, fichas de colores, corcholatas para el conteo, regletas, productos de uso diario para compra-venta, dados, ábaco; pese a que dentro de las recomendaciones expresadas en el Libro para el Maestro de Matemáticas se hace referencia a que en los primeros grados de educación primaria, la mayor parte de los contenidos matemáticos se deben introducir con actividades que impliquen el uso de material concreto, pues la forma en que los alumnos utilizan dichos materiales determina, en gran medida, la posibilidad de aprender el contenido que se trabaja (SEP, 2000).

Trabajo en equipo: Limitadas actividades a ser trabajadas en equipo, en las cuales implicaba a los alumnos sólo contestar ejercicios del libro de texto, fichas de trabajo o bien participación durante la implementación de algún juego con fines educativos. Este tipo de trabajo es importante porque ofrece a los alumnos la posibilidad de expresar sus opiniones y enriquecerlas con las de sus iguales; explicando sus razonamientos, intercambiando y contrastando ideas ante situaciones planteadas (SEP, 2009).

Creación de ambiente adecuado de clase: No todos los profesores propiciaron un ambiente agradable de trabajo en el que los alumnos trabajaran con confianza y seguridad. La mayoría dio excesiva formalidad al tratamiento de las matemáticas en el aula, solicitando/ordenando a sus alumnos en diversos momentos de la clase prestar atención a las

explicaciones, permanecer callados, observar al frente, indicar en silencio para participar; las más de las actividades limitaban la participación activa de los estudiantes, pese a que la edad de los alumnos y el tipo de contenidos a adquirir, requieren la creación de entornos de aprendizajes contextualizados y más prácticos para generar mejores condiciones de aprendizaje. Algunos, favorecieron el ambiente de trabajo haciendo uso de una comunicación efectiva, gestionando su clase como espacio de comunicación y de relación con unos objetivos pedagógicos determinados, haciendo uso de una comunicación más horizontal y entre iguales.

Socialización de saberes: Limitadas oportunidades para que los estudiantes comunicaran a sus pares las formas de solución utilizadas o bien los resultados obtenidos, con la finalidad de construir y reconstruir procesos matemáticos. En algunos casos se solicitaba a algunos alumnos manifestar en voz alta las soluciones encontradas o bien los profesores las expresaban al grupo; situación que presenta desapego conforme a lo propuesto desde el enfoque para el tratamiento de las matemáticas en la escuela primaria, en donde se expresa que "vale la pena insistir en que los estudiantes sean quienes encuentran las soluciones… compartan sus ideas, en las que quizá habrá acuerdos y desacuerdos, pero la finalidad es que se expresen con libertad y aprendan" (SEP, 2009, p. 79).

Participación del profesor: La mayoría de ellos tuvieron una *participación activa* durante las clases. El más del tiempo comunicando verbalmente a sus estudiantes, bien para dar instrucciones, para determinar conceptos y definiciones, formas de solución, solicitar respuestas, indicar cómo resolver problemas, anotar respuestas en el pizarrón expresadas por ellos o por los alumnos, sancionar conductas, coordinar juegos; sin embargo, algunos intentaban ser acompañantes del proceso de construcción de saberes matemáticos pretendiendo a través de sus acciones "ir más allá de la transmisión de conocimientos, definiciones y algoritmos matemáticos… buscando diseñar situaciones problemáticas para propiciar el aprendizaje… y favorecer la evolución de los procesos de los alumnos" (SEP, 2006, p. 15) ; debiendo ser éste el posicionamiento de todos los profesores con la finalidad de despertar el gusto en sus alumnos por las matemáticas y por consiguiente, obtener mejores resultados en sus proceso de aprendizaje.

Sobre lo que hacen y dicen los alumnos

Participación de los estudiantes: Los más de los profesores ofrecieron pocos espacios para que los alumnos participaran de forma activa en clase. Su intervención giró en torno a responder preguntas cerradas como en el siguiente episodio, donde M representa la voz del maestro y Aos la de los alumnos:

M*: Acuérdense… las sumas ¿qué es los que hacen?... ¿juntan o quitan?*

Aos*: ¡Juntan*!

M*: ¿Y las restas*?

Aos*: ¡Quitan*!

M: *Quitan… nosotros tenemos que buscar si el símbolo que voy a poner es de "Más", o el símbolo que voy a poner es de…*

Aos*: "Menos*

De igual manera, tuvieron limitada participar en juegos matemáticos, en la resolución de ejercicios en el pizarrón y trabajaron escasamente en binas para resolver problemas. Tuvieron limitada participación durante la socialización en torno a los procesos de solución de las

situaciones planteadas, ya que los profesores se focalizaron más en los resultados obtenidos en las diversas producciones escritas.

Producciones de los estudiantes: Con respecto a la recolección de información sobre el estado de los saberes de los alumnos, los cuales deben proporcionar al profesor elementos para la toma de decisiones en pro de la mejora de la calidad de su enseñanza y en consecuencia de los aprendizajes de los estudiantes, podemos referir que los recursos/instrumentos utilizados durante las clases para la recuperación de los mismos, los profesores hicieron uso frecuente del cuaderno especial para Matemáticas (de cuadro); en él se identificaron la ejecución de algoritmos, comparación de cantidades, trazo de imágenes y números, series numéricas, copiado de ejercicios efectuados colectivamente, trazos de números y figuras geométricas, entre otros. Las Fichas de trabajo elaboradas por el docente y utilizadas como reforzador de los aprendizajes, fueron otro de los recursos utilizados en clase. En ellas, los alumnos debían resolver ejercicios como descomposición de cantidades, colorear objetos, colorear monedas y billetes para formar cantidades, unir puntos siguiendo una serie numérica, completar espacios vacíos con números, algoritmos para la suma y la resta, y pocos problemas de aplicación; concluyendo por consiguiente que la mayoría, fueron ejecuciones rígidas en torno a acciones mecánicas más que retos matemáticos.

Por su parte, el Libro de texto, como un recurso más, fue contestado recurrentemente de forma colectiva, donde el profesor daba lectura a la introducción al tema, a las instrucciones y las situaciones planteadas en cada actividad, solicitando posteriormente a un o algunos alumnos, dar respuesta a lo planteado para que el resto del grupo tomaran nota en el espacio correspondiente. Este tipo de práctica generó la distracción y desinterés de la mayoría de los alumnos por participar en el reforzamiento y la construcción de nuevos aprendizajes; se invirtió asimismo un alto porcentaje del tiempo de la clase en su resolución. Práctica que fue recurrente en la mayoría de las clases observadas, dejando de lado la recomendación que ofrece el Libro para el Maestro de Matemáticas al referir que es necesario dar al Libro de texto la función de material de enseñanza, el cual debe ser usado como una culminación de una serie de actividades organizadas por el maestro, y realizadas por el alumno, con el apoyo del profesor (SEP, 2006).

Los tiempos de dedicación para la resolución de las actividades/ejercicios en algunos casos fueron muy limitados para que todos los alumnos los concluyeran, hubo sesiones en las que el profesor simplemente solicitó suspender las acciones del momento para dar paso a otra actividad, dejando inconclusos algunos procesos de construcción; ello hace concluir que los profesores sólo atendieron a los alumnos "promedio", en los cuales desde su perspectiva, su enseñanza resultó efectiva, dejando de lado a aquellos que sus procesos cognitivos no les alcanzaron para llevar el ritmo requerido por el profesor, pese a que una de sus finalidades es estimular las capacidades de aprendizaje de sus alumnos, comprendiendo asimismo que éstos habrán de aprender conforme a su ritmo y nivel cognitivo, debiendo permitirles asumir cierto grado de responsabilidad en este proceso (Arends, 2007; Lee, 2010).

En la mayoría de los casos, la cantidad de alumnos generó una revisión acelerada de las producciones efectuadas por los alumnos en los cuadernos y los libros de texto, debido a que se efectuó en tiempos de la clase. La mayoría de las fichas aplicadas no fueron revisadas durante las sesiones, los profesores las solicitaron para ser valoradas en otros espacios. Algunos docentes optaron por integrarlas al cuaderno de Matemáticas. Todos revisaron las producciones de forma convencional (correcto/ incorrecto). En cuanto a la retroalimentación de procesos, pocos fueron los que cuestionaron a los alumnos sobre las formas de resolución cuando se efectuaron

actividades grupales, sobre todo en las situaciones donde se detectó algún desacierto; en los momentos de revisión de ejercicios (bien en el cuaderno o en el libro), sólo se solicitó al alumno en la mayoría de los casos, regresar a su lugar a corregir para volver a la revisión, pese a que éstos son momentos esenciales en los que los profesores deben analizar las ejecuciones de los alumnos ante las tareas matemáticas, como formas de entender el proceso de construcción de los conceptos y procesos matemáticos, así como identificar las formas en las que los niños van desarrollando su pensamiento matemático (SEP, 2011b). Estas formas de "recuperar saberes" y las formas de hacer la revisión de los mismos, no dan total cuenta de los logros alcanzados por cada uno de los alumnos; sin embargo, se esperaría que los profesores en tiempos y espacios posteriores hicieran una valoración sobre ellos y otros recursos más, con la finalidad de identificar con claridad, fortalezas y áreas de oportunidad en los temas abordados en el tratamiento de las matemática escolares.

A manera de Conclusión

Pese a la puesta en marcha desde el 2011 del Plan de Estudios actual, se ha de reconocer que las formas de enseñanza de la mayoría de los profesores observados, independientemente del contexto, del tipo de organización de las instituciones, de la antigüedad en el sistema y el tipo de contratación, reflejan escaso apego a lo establecido desde el enfoque metodológico propuesto. Sus prácticas recurren frecuentemente a transmisión de información y control casi estricto sobre lo que sucede en el aula, dejando limitadas oportunidades a que los alumnos y sobre todo de estas edades escolares, aprendan "haciendo matemáticas en las aulas".

Este tipo prácticas conduce de manera natural hacia una enseñanza directiva, en donde el alumno sigues siendo un receptor de información y un ejecutor de acciones que el docente indica, teniendo éste en todo momento el control de lo que se dice y se debe hacer a lo largo de la sesión. Las formas tradicionales de enseñanza siguen orientando muchas de las prácticas cotidianas de los profesores, pese a que en los programas de estudio se promueven enfoques constructivistas, reflexivos y críticos; aspectos que la mayoría de los profesores deciden no incorporar para mejorar sus prácticas, ya que sus concepciones sobre "el decir y el hacer" sobre este proceso, así lo reflejan.

Asimismo, es importante y necesario trabajar desde los primeros grados con apego a los fundamentos pedagógicos y metodológicos propuestos, pues ello garantizará sin duda, mejores resultados en los subsiguientes ciclos escolares; ya que las primeras experiencias que vivan los alumnos al estudiar matemáticas en la escuela primaria traerá como consecuencia el gusto o el rechazo, la creatividad para encontrar soluciones o la pasividad para escuchar y reproducir patrones, la búsqueda de explicaciones o bien la sujeción de éstos al criterio de su profesor como ha sucedido durante décadas en los espacios educativos.

Finalmente, habría que considerar que los cambios en el diseño curricular no tendrían efecto en el aula a menos que fueran acompañados de un conocimiento profundo sobre los fundamentos pedagógicos y didácticos del enfoque actual para el tratamiento de las matemáticas, un conocimiento sobre los procesos cognitivos por los que atraviesan los niños de esta edad y un cambio en la concepción sobre su nuevo rol de docentes, concibiendo y concretando así, formas diferentes de enseñanza a las que cotidianamente han realizado a lo largo de su profesión.

Referencias y bibliografía

Arends, R. (2007). *Aprender a enseñar*. México: Mc Graw Hill

Arévalo, E. (2007). *Evaluación del dominio de propósitos, contendidos y enfoques del Plan de Estudios 1993 de los egresados de la Normal "Miguel F. Martínez", Centenaria y Benemérita. Generación 2002 - 2006*. Tesis de Maestría en Escuela de Graduados ENSE NL. México.

Cantoral, R. (2008). *Desarrollo del pensamiento Matemático*. México: Trillas.

Coll, C. (2009). *Psicología genética y aprendizajes escolares*. México: Siglo XXI Editores.

Chamorro, M. (2003). *Didáctica de las Matemáticas*. Madrid: Pearson.

Díaz-Barriga, F. (2007). *Aprendizaje situado. Vínculo entre la vida y la escuela*. México: Mc Graw Hill.

Freire, P. (2010). *¿Extensión o comunicación?* México: Siglo Veintiuno Editoriales.

Lee, C. (2006). *El lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Ediciones Morata.

Rico, L. & Castro, E. (1997). *Estructuras matemáticas y su modelación*. Bogotá: Iberoamericano.

Rico, L. (2010). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.

SEP. (2000). *Libro para el Maestro. Primer grado. Educación Primaria*. México: SEP.

SEP. (2006). *Libro para el Maestro. Segundo grado. Educación Primaria*. México: SEP.

SEP. (2009). *Plan de Estudios 2009. Educación Básica, Primaria*. México: SEP..

SEP. (2011a). *Libro de texto. Matemáticas Primer grado de Educación Primaria*. México: SEP.

SEP. (2011b). *Plan de Estudios 2011. Educación Básica, Primaria*, México: SEP..

SEP. (2011c). *Programa de Estudio 2011. Guía para el Maestro, Educación Básica Primaria Primer grado*. México: SEP.

Conocimiento matemático para la enseñanza en la resolución de problemas geométricos con futuros maestros de educación infantil

Marjorie **Samuel** Sánchez
Universidad Católica del Maule
Chile
msamuel@ucm.cl
Yuly **Vanegas** Muñoz
Universidad Autónoma de Barcelona
España
yulymarsela.vanegas@uab.cat
Joaquim **Giménez** Rodríguez
Universidad de Barcelona
España
quimgimenez@ub.edu

Resumen

En esta investigación se describen algunos aspectos del conocimiento matemático para la enseñanza que ponen en juego futuros profesores de educación infantil, cuando se enfrentan al análisis de tareas geométricas, relacionadas con la noción de simetría, desarrolladas con niños de 5-6 años. Hemos empleado como marco analítico el modelo del conocimiento matemático para la enseñanza (Ball, 2008), considerando cuatro de sus subdominios. Los resultados demuestran que los futuros maestros de infantil, si bien desarrollan algunas ideas matemáticas en relación a aspectos de la simetría, se hace necesario quepuedan desarrollar su conocimiento y justificar sus propias estrategias, así como dar sentido a las demás estrategias y justificaciones, con la finalidad de profundizar y ampliar su comprensión de las matemáticas.

Palabras clave: formación de profesores, conocimiento matemático, tareas profesionales, simetría.

Introducción

La discusión de la naturaleza compleja del conocimiento profesional es una preocupación constante de los investigadores en Educación Matemática. Diversos estudios argumentan que los profesores de matemáticas necesitan dos tipos de conocimiento: *el conocimiento de las matemáticas*, saber cómo resolver un determinado problema y *el conocimiento especializado de las matemáticas*, saber por qué el método funciona y si se es generalizable a otros problemas (Ball, 1990; Lubienski y Mewborn, 2001 y Hill, Sleep, Lewis y Ball, 2007).

Shulman (1987), señala que un docente puede transformar la comprensión, las habilidades de desempeño y valores o actitudes deseadas, en acciones y representaciones pedagógicas. Por tanto, la docencia se inicia cuando el docente reflexiona en qué es lo que debe ser aprendido y cómo será aprehendido por los estudiantes.

Autores como Llinares (2013), caracterizan las competencias profesionales de los futuros maestros, fundamentalmente la reconocida como *mirada profesional de la práctica matemática*. Esta competencia involucra el desarrollo de habilidades cognitivas por parte de los futuros maestros para, identificar e interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes y posibilita unatoma de decisiones fundamentada.

Diferentes resultados de investigación (Fernández et al, 2011; Sánchez-Matamoros y otros, 2012) indican que aunque algunos futuros profesores pueden tener antecedentes adecuados de preparación en matemáticas, a otros les resulta difícil describir las soluciones de los estudiantes utilizando elementos matemáticos pertinentes e identificar las características de la comprensión matemática de los estudiantes. Esta situación se evidencia de manera más notoria en los futuros maestros de educación infantil, al pensar en la formación del profesorado, uno de los grandes problemas, es la falta de conocimientos matemáticos de los estudiantes (Gómez Chacón, 2006; Torra, 2009)

Ser capaz de analizar el pensamiento matemático de los estudiantes permite al futuro profesorconstruir su conocimiento matemático para la enseñanza (MKT). Por lo tanto, el conocimiento matemático que necesitan los futuros profesores para enseñar, está vinculado con el conocimiento de las matemáticas que necesitan, para entender el pensamiento matemático de los niños (Llinares, 2013).

En este sentido, este estudio busca describir y caracterizar aspectos del conocimiento matemático para la enseñanza de futuros maestros de educación infantil relacionados con problemas geométricos de simetría.

Referentes teóricos

Ball y Bass (2000), señalan que el conocimiento del contenido pedagógico es una forma especial de conocimiento que une conocimiento matemático con conocimiento de estudiantes, aprendizaje y pedagogía. Esta unión ofrece un recurso crucial para enseñar matemáticas, ya que puede ayudar al profesor a anticipar en quépodrían tener dificultades los estudiantes, tener listos modelos alternativos o explicaciones que medien esas dificultades. El modelo *Mathematical Knowledge for Teaching* (MKT), (Ball et al, 2008), es un modelo en el que se hace un refinamiento a los dominios del conocimiento del contenido (SMK) y didáctico del contenido (PCK) propuesto por Shulman (1986) adaptado a las matemáticas, incluye el conocimiento curricular (KCC), conocimiento pedagógico del contenido (PCK). Siguiendo esta misma línea Climent y Carrillo (2002) aportan que en el conocimiento del profesor se consideran diferentes componentes: Conocimiento del contenido matemático *de* y *sobre* las matemáticas y el conocimiento de la materia para su enseñanza.

El cambio en la visión de los procesos de enseñanza y aprendizaje de los contenidos de las matemáticas escolares, promovidos por la construcción social y cultural como elemento facilitador en la adquisición de estos contenidos, conlleva un cambio en el rol del profesor,esto subyace a la imagen de que un maestro de educación infantil, debe ser capaz de tomar decisiones tomando como referente un cuerpo de conocimientos teóricos y especializados. Llinares (2003), señala que ser competente como maestro en estas situaciones implica poseer un conocimiento específico de cómo gestionar las situaciones comunicativas en la clase de matemáticas, con el fin de potenciar el desarrollo de la competencia matemática en los alumnos, centrando la atención en cómo se comunican los procesos matemáticos usados y en qué medida las representaciones usadas ayudan a transmitir lo que se pretende.

Wilhelmi (2007), argumenta que la formación en didáctica de las matemáticas es compleja, y esto se hace aún más difícil en la especialidad de educación infantil, en la que la formación en esta línea no es suficiente por diversas razones. Lo cual, hace que los futuros profesores no tengan herramientas adecuadas para la toma de decisiones cuando se enfrentan a diversos problemas profesionales. Así mismo, Alsina (2009) plantea que el conocimiento profesional del futuro profesor de matemáticas en las primeras edades, debiera contemplar el conocimiento del marco curricular, conocimiento de la materia, conocimiento de la naturaleza de la enseñanza y del aprendizaje de las matemáticas y conocimiento de la complejidad de la enseñanza.

Desde el punto de vista de las investigaciones la mayoría de los estudios sobre el conocimiento matemático de los maestros o futuros maestros en infantil se centran en aspectos relacionados con número y operaciones, y poco se ha indagado sobre la enseñanza de la geometría. Al respecto Espinoza, (2007), señala que los profesores tienden a postergar la enseñanza de la geometría dada sus escasa formación matemática y didáctica.

Bressan (2000), aporta que la enseñanza sistemática de la geometría desarrolla en el sujeto habilidades: visuales, verbales (o de comunicación), de dibujo y construcción, lógicas (o de pensamiento), de aplicación o transferencia. Particularmente, Knuchel, (2004), señala que la simetría es una parte fundamental de la geometría, la naturaleza y las formas. Crea patrones que nos ayudan a organizar nuestro mundo conceptual. Así mismo, plantea que es importante que los estudiantes manejen los conceptos de la geometría y la simetría, mientras están en el nivel primario como un medio para que ellos expongan las cosas que ven día a día, que no están obviamente relacionados con las matemáticas, pero que tienen una fuerte base en ella.

Pacheco y García (2008), señalan que para que los niños puedan apropiarse de los contenidos enseñados, es necesario que el docente proponga un trabajo intencional en el que actividades que impliquen la observación, construcción, anticipación, representación, descripción, interpretación, etc., se proyecten en la resolución de situaciones problemáticas de tal forma que favorezcan el pasaje a un plano de conceptualización.

Así, a partir de nuestra preocupación por mejorar los procesos de formación de los futuros maestros de educación infantil y considerando los planteamientos expuestos en párrafos anteriores, uno de los cuestionamientos que orienta esta investigación, es: ¿Qué conocimientos matemáticos reconocen los estudiantes para maestros cuando analizantareas que involucran aspectos relacionados con la simetría?

Proceso Metodológico

Enfoque y diseño

De acuerdo con nuestra pregunta de investigación,los objetivos que nos proponemos, son: (a) identificar el conocimiento matemático para la enseñanza que poseen futuros maestros de educación infantil, a partir de las interpretaciones que hacen de las producciones matemáticas de niños y niñas con uso de material concreto para desarrollar aspectos de la simetría, y (b) caracterizar las interpretaciones que hacen futuros maestros de educación infantil de las producciones matemáticas de niños y niñas cuando realizan actividades que involucran aspectos relacionados con la simetría.

Para dar respuesta a los objetivos de investigación optamos por un enfoque cualitativo a través de un diseño de estudio de casos. La investigación cualitativa es una actividad sitemática orientada a la comprensión en profundidad de fenómenos educativos y sociales, a la transformación de prácticas y escenarios socioeducativos, a la toma de decisiones y también

hacia el descubrimiento y desarrollo de un cuerpo organizado de conocimiento (Albert, 2007). Específicamente, el estudio de caso, permite el descubrimiento de nuevas relaciones y conceptos por su carácter inductivo (Bisquerra, 2009). Es de esta manera que el investigador puede alcanzar una mayor comprensión de un caso particular, conseguir una mayor claridad sobre un tema (Stake,1994).

Contexto y participantes

Esta investigación se ha desarrollado con estudiantes para maestros de educación infantil de tercer añoen la Universidad de Barcelona. El curso está integrado por 33 estudiantes de entre 21y 26 años que cursan la asignatura de Didáctica de las Matemáticas. La unidad de análisis se focalizó en las producciones de 3 estudiantes. Los cuales fueron elegidos por la variedad de sus respuestas a las preguntas planteadas en la tarea profesional, el reconocimiento de diferentes aspectos de los subdominios del MKT y la estructuración de sus argumentaciones que nos permite reconocer diversos niveles de profundización.

Recogida y análisis de los datos

Para esta investigacion se ha propuesto el diseño de una *tarea profesional* cuya intencionalidad es reconocer posicionamientos iniciales de los futuros maestros de infantil, en relación al conocimiento matemático, especificamente los conocimientos necesarios para la enseñanza dela noción de simetría, así como la valoración inicial que realizan de las producciones matemáticas de niños y niñas.

La tarea profesional (Fig.1), toma como referencia una actividad propuesta por un grupo[1] de profesores de educación infantil para niños de 5-6 años y las respuestas de algunos de ellos. La actividad se centra en la construcción y reproducción de figuras usando el tangram. Junto a la descripción de la actividad y las respuestas, se propone a los futuros maestros una serie de preguntas para poder identificar y caracterizar sus conocimientos matemáticos.

Figura 1. Tarea Profesional.

[1]CEIP "San Marcos". Jaén. España

Las respuestas de los futuros maestros a la tarea profesional se recogieron a través de laplataforma online (mooddle). En una primera revisión y sistematización, se codificaron las respuestas detodos los estudiantes a cada uno de los items. Se clasificaron sus respuestas en relación a los subdominios planteados por elMKT y posteriormente, haciendo una revisión con el equipo de investigación se seleccionan los estudiantes que se asumieron para el estudio de caso.

Resultados y discusión

En las tablas siguientes, encontramos respuestas de los futuros maestros a cada una de las preguntas en algunos de los subdominios del MKT, así como la descripción de algunos aspectos del conocimiento matemático que identifican en las producciones de los niños. Y un breve análisis comparativo.

Tabla 1
Respuestas y análisis del conocimiento común del contenido.

Pregunta1: Describe lo que esta haciendo cada uno de los niños para construir el modelo elegido.			
Subdominio	Estudiante N°1	Estudiante N°2	Estudiante N°3
Conocimiento común del contenido	*En esta imagen se observa que Ana ha empezado colocando las **piezas de mayor tamaño**. Además, ha colocado las **piezas triangulares** (amarilla y naranja) de forma simétrica (formando **un cubo**), aunque la figura de muestra no es así.*	*Ana une las piezas, tanto las de mayor tamaño como las de menor, todas correspondiéndose en cuanto a medida, formando así **cuadrados más grandes** o más pequeños, posiblemente teniendo en mente la forma inicial del Tangram que el maestro había presentado.*	*En primer lugar, creo que para describir lo que cada alumno está realizando en las fotografías, es importante hablar sobre el procedimiento previo, del que también se hablara más adelante. En primer lugar, cada niño ha relacionado cada figura con un color diferente y las identifica con cada uno de ellos.*
		Descripción	
	Describe las acciones, nombrando las piezas, aludiendo a características matemáticas (piezas triangulares). Al relacionar los conceptos con las formas. Deduce las relaciones con los objetos.	Identifica las relaciones de las figuras, forma y tamaño.	Alude a procedimientos asociados a las acciones observables.

En la interpretación se observa que dos de los tres estudiantes señalan que el trabajo de los niños está enfocado a la composición de figuras, específicamente en la obtención de un cuadrado a partir de la unión de dos triángulos. Uno de los estudiantes menciona cubo en vez de cuadrado, pero no podemos afirmar si este error se debe a una confusión léxica o conceptual.No hay enunciados explícitos relacionados con la congruencia y semejanza, sin embargo los estudiantes aluden al tamaño y la forma en la composición.

No hacen alusión de cómo llegan a formar este cuadrado, es decir a través de transformaciones geométricas, no utilizan conceptos matemáticos que den cuenta de sus conocimientos.

Tabla 2
Respuestas y análisis del conocimiento del contenido y los estudiantes

Pregunta 2:¿En que te fijas para ver que Jorge esta construyendo el modelo demanera adecuada?			
Subdominio	Estudiante N°1	Estudiante N°2	Estudiante N°3
Conocimiento del contenido y los estudiantes	*Jorge es un niño tranquilo y pensativo, ya que mira con cierta distancia las piezas y parece hacer movimientos lentos para poder observar la transformación que sufre la figura con sus actos y, así poder llegar a conseguir su objetivo (reproducir la figura modelo).*	*Jorge está llevando a cabo la construcción del dibujo de manera adecuada ya que se observa que las formas que componen el Tangram están en su lado correspondiente para crear la obra final, aunque no queden unidas porque las separa un pequeño espacio.* *Jorge establece continuamente yespontáneamente, equivalencias entre las distintas combinaciones de piezas para resolver las diferentes situaciones problemáticas que le surgen*	*En lo que cada niño está haciendo para elaborar la figura, parece que Jorge está identificando las partes de cada una de las piezas y la relación que existe entre ellas.*
		Descripción	
	Analiza las formas en que se representan las ideas, comprende las transformaciones geométricas en su aspecto conceptual	Reconoce características, regularidades. Desarrolla esquemas deductivos informales en relación a equivalencia, composición y descomposición de figuras.	Analiza que el niño al tomar conciencia de las forma, puede interpretar modelos geométricos

En la interpretación de las respuestas de los estudiantes, se puede señalar que los estudiantes 1, 2 y 3 reconocen las transformaciones geométricas en aspectos conceptuales, como nociones de cambio, van tomando conciencia de las nuevas formas a partir de los objetos. Sin embargo no explican cómo esto es desarrollado por los niños, cuáles son las acciones que les permiten iniciarse en estos aspectos, ni como están elaborando sus esquemas mentales o como están visualizando la figura para poder hacer sus propia construcción, además no expresan como al experimentar con la composición y descomposición de las figuras establecen relaciones de comparación entre estas.

Tabla 3
Respuestas y análisis del conocimiento especializado del contenido

Pregunta 3: Uno de los profesores que propuso la actividad dice que con ella se esta trabajando la simetría ¿ por que crees que lo dice?			
Subdominio	Estudiante N°1	Estudiante N°2	Estudiante N°3
Conocimiento especializado del contenido	*Además, con esta actividad también se trabaja la simetría porque los niños pueden observar figuras, o partes de figuras, que son simétricas y otras que no lo son, como por ejemplo las orejas del "gato".*		*Con los triángulos que se usan en el Tangram pasa lo mismo, si se corta un triángulo desde el vértice de los catetos hasta la mitad de la hipotenusa, conseguimos dos triángulos más pequeños que son iguales.*
	Descripción		
	Desarrolla argumentos matemáticos sobre las propiedades de la simetría, no obstante pareciera que no está claro este concepto, pues las orejas del gato están dispuestas como simetría de reflejo		Identifica a partir del razonamiento de los niños y las estrategias utilizadas como él logra construir el modelo. Percibe las figuras y las relaciones que se establecen con el modelo. Identifica figuras semejantes.
Las interpretaciones que hacen los estudiantes N° 1 y 3, nos señalan que con estas tareas de enseñanza se permite trabajar la simetría, y dada las estrategias que utilizan los niños para construir el modelo, se visualiza como establecen relaciones entre los objetos matemáticos. Sin embargo los futuros maestrosno son claros en sus planteamientos y no es posible señalar si tienen o no conocimiento especializado del contenido en cuestión, dado que no proporcionan ideas desimetría como transformación geométrica que permita construir otras representaciones.			

Tabla 4
Respuestas y análisis del conocimiento del contenido y la enseñanza

Pregunta 4: En que cambiaria la actividad si en vez de pedir a los niños que coloreen y recorten las piezas del tangram, se les diera un tamgram ya elaborado.			
Subdominio	Estudiante N°1	Estudiante N°2	Estudiante N°3
Conocimiento del contenido y la enseñanza			*Manipulando de estas piezas, se da la oportunidad también a los niños, de reconocer las partes de cada figura, en el caso del romboide, por ejemplo, está formado por dos lados iguales largos y dos lados iguales cortos, el cuadrado en cambio tiene los cuatro lados iguales y cada triángulo tiene dos lados iguales y uno más largo.*
		Descripción	
			El estudiante señala que la manipulación de las piezas permite al niño establecer relaciones entre estas, y dar cuenta de sus características

El estudiante argumenta respecto de las posibilidades que puede dar la manipulación de objetos para establecer relaciones entre estos, comenta en relación de aspectos de propiedades de las formas. Se le hace complejo argumentar como a partir de los razonamientos que logra realizar el niño, él como maestro puede visualizar las ventajas y desventajas con respecto a la utilización de este tipo de representaciones para desarrollar contenidos o para enseñar una idea específica en este caso de aspectos simétricos, identificando cuáles son los métodos y los diferentes procedimientosmás pertinentes para construir ideas geométricas**.**

Tabla 5
Respuestas y análisis del conocimientocomún del contenido

Pregunta 5: ¿Por qué podemos decir que es "bueno" que el modelo se presente en el plano vertical (pizarra) y se pida a los niños que se desarrolle la producción en el plano horizontal (mesa)?			
Subdominio	Estudiante N°1	Estudiante N°2	Estudiante N°3
Conocimiento común del contenido	*Es mejor que la figura modelo este en un plano vertical y diferente al que se les pide a los niños y niñas, porque de esta manera evitamos que copie la figura modelo, utilizándola como plantilla.*	*En este sentido, va modificando sus esquemas de conocimiento espacial y aplicando las nociones básicas de espacio y ubicación.*	*No se trata solo de comprender la figura en el plano vertical, sino que después el niño/a debe trasladarla al plano horizontal y esto puede suponer un ejercicio mental importante a llevar a cabo sobre los planos.*
		Descripción	
	El estudiante señala que este tipo de representaciones son más apropiadas para enseñar una idea específica, puesto que el estudiante al trabajar en planos distintos tiene desafíos cognitivos que son favorecedores para la construcción de ideas o conceptos matemáticos.	Señala como el niño para poder copiar el patrón, realiza cambios de posición de los objetos, para construir y componer nuevas figura, esto a partir de la modificación de sus esquemas mentales.	Analiza los procesos que realiza el niño para poder representar la figura en un plano distinto. Especifica que sedesarrollan relaciones espaciales de posición.

En este apartado los estudiantes N°1, 2 y 3, señalan que estas representaciones presentan desafíos cognitivos a los niños, permitiendo la reproducción de modelos, desarrollando figuras semejantes. Esta capacidad está vinculada con ciertas habilidades necesarias para interpretar las imágenes y establecer uniones operativas y relaciones entre las imágenes y lo representado. Por otra parte dan cuenta de las conexiones que establecen los niños entre las distintas formas que están representados los objetos matemáticos. Utilizan puntos alternativos de razonamiento para explicar las posibles estrategias de solución desarrolladas por los niños. Si bien comentan como este tipo de representaciones permite desarrollar en los niños las relaciones de posiciones entre los objetos o configuraciones, no argumentan desde una reflexión teórica aspectos relacionados con la simetría, con las transformaciones geométricas, y como se pueden aplicar al estudio de distintas figuras.

Reflexiones finales

Las tareas profesionales planteadas a los futurosmaestros de infantil, han permitido describir y caracterizar aspectos del conocimiento matemático para la enseñanza de problemas relacionados con la simetría.Este tipo de tareas exigen a los a futuros maestrosrealizar análisis

respecto de los contenidos tratados. Al ser preguntas abiertas se estimula la creatividad en la búsqueda de respuestas, aparecen las debilidades y fortalezas de los estudiantes respecto del dominio de los contenidos y de la comprensión de las propias situaciones planteadas.

Respecto al diseño de las tareas matemáticas para la enseñanza,podemos concluir que los futuros maestros no expresan explícitamente qué conocimientos matemáticos se requieren para desarrollar aspectos de la simetría, como se deben secuenciar estos contenidos, tener claridad en relación a con qué ejemplos comenzar, y qué ejemplos utilizar para llevar a los estudiantes a profundizar en el contenido. No profundizan en relación a la propuesta de la tarea como una situación de aprendizaje, la cual, les permite a los niños desarrollar conocimiento.

Llinares (2011), aporta que las tareas por una parte, deben permitir que los estudiantes para maestro re-examinen su comprensión de las ideas matemáticas para que puedan llegar a cuestionarse su propio conocimiento de las matemáticas escolares, y por otro lado, las tareas matemáticas deben permitir que los estudiantes para maestros amplíen su comprensión de algunos contenidos matemáticos.

Por otra parte y en relación al conocimiento matemático, los estudiantes en la generalidad perciben las figuras y las relaciones sugeridas por los objetos con la idea de elaborar modelos nuevos a partir de las mismas construcciones, de manera de poder realizar nuevas observaciones lo que llevaría a descubrir propiedades geométricas, sin embargo se les hace complejo el argumentar como esto le permitiría ver el pensamiento que están desarrollando los niños, los posibles errores, y conocer las concepciones erróneas, de manera de poder utilizar puntos de vista alternativos para aprovechar la potencialidad de la experiencia y los recursos con el fin de desarrollar aspectos de la simetría.

Mason (2002), plantea que el profesor debe ser consciente de lo que él interpreta de las situaciones de enseñanza y aprendizaje, mediante la adopción de una visión estructurada de lo que es relevante para los objetivos de aprendizaje de sus alumnos

Los estudiantes no reflexionan respecto de cómo estas tareas y el diseñar secuencias didácticas, conformadas por varias actividades que impliquen o no niveles de complejidad creciente,les permite desarrollar procesos, representar ideas, proporcionar explicaciones matemáticas más precisas y adecuadas, aplicar modelos y visualizar métodos en la resolución de problemas matemáticos, en este caso relacionados con la simetría.

Por otra parte, debemos señalar que si bien el modelo MKT, nos permitió estructurar la tarea profesional yhacer unas caracterizaciones iniciales, respecto de los conocimientos de los futuros maestros en relación a la simetría y su enseñanza,también consideramos pertinente señalar, que la identificación de las respuestas y su relación con cada uno de los subdominios (propuestos desde el modelo), es un proceso complejo, ya que en una misma respuesta podemos reconocerdiversos aspectos que involucran un entramado de conocimientos,por ejemplo, relacionados con el conocimiento del contenido, de los estudiantes, de la enseñanza, entre otros. En consecuencia debemos seguir avanzando en el estudio de dichos análisis y considerar nuevas categorías.

Consideramos que el presente trabajo de carácter exploratorio, aporta informaciónrelevante para describir y comprender mejor el conocimiento matemático que desarrollan los estudiantes para maestros de infantil cuando se enfrenta a problemas que abordan aspectos de la simetría. Por otra parte creemos también quees información que puede contribuir en el diseño de

instrumentos técnicos de tal manera que nos permitan reconocer mejores aspectos del conocimiento profesional del maestro de infantil quefavorezcan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En consecuencia, el maestro de Educación Infantil debe tener un nivel de conocimiento matemático, debe conocer y ser capaz de aplicar prácticas matemáticas operativas y discursivas, necesarias para resolver los problemas aplicables en este nivel. Y por otra parte debe ser capaz de analizar la actividad matemática cuando se enfrenta a la resolución de problemas de simetría. Esto incluye saber construir a partir del razonamiento de los estudiantes y las estrategias utilizadas por ellos, procesos para tratar y corregir sus errores y concepciones erróneas. Se hace necesario que los futuros maestros de infantil puedan desarrollar su conocimiento y justificar sus propias estrategias, así como dar sentido a las demás estrategias y justificaciones, con la finalidad de profundizar y ampliar su comprensión de las matemáticas a fin de incluir el desarrollo de este conocimiento especializado.

Agradecimientos

Este trabajo se ha realizado en el marco del programa: Becas Chile. Doctorado en el extranjero. CONICYT 2013. Resolución 87.

Referencias

Albert, M.J. (2007). *La investigación Educativa*. Madrid: McGraw Hill.

Alsina, Á. (2009). Un análisis optimista de la educación matemática en la formación de maestros de educación infantil. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 13*(51), 30-43.

Ball, D.L., Lubienski, S., and Mewborn, D. (2001). *Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers´ mathematical knowledge*.

Ball, D., Thames, M. H., y Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389–407.

Ball, D. L., & Bass, H. (2000). Interweaving content and pedagogy in teaching and learning to teach: Knowing and using mathematics. *Multiple perspectives on the teaching and learning of mathematics*, 83-104.

Bisquerra, R. (Coord.) (2009). *Metodología de la investigación educativa*. Madrid: La Muralla

Bressan, A, M. (2006). *Razones para enseñar geometría en la educación Básica*. Buenos aires: Ediciones Novedades educativas.

Climent, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de Primaria respecto de la enseñanza de la matemática. Un estudio de caso*. Tesis doctoral. (Publicada en 2005, Michigan: Proquest Michigan University. www. Proquest.co.uk)

Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2007). Un modelo cognitivo para interpretar el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas. Ejemplificación en un entorno colaborativo. *Enseñanza de las Ciencias, 25*(1), 33-44.

Climent, N.; Romero, J.M., Carrillo, J., Muñoz, M.C. y Contreras, L.C. (2013). ¿Qué conocimientos y concepciones movilizan futuros maestros analizando un video de aula? *RELIME. Revista latinoamericana ce investigación en matemática educativa, 16*(1), 5-12.

Espinoza, L., Barbé, J., Mitrovich, D., & Rojas, D. (2007). El problema de la enseñanza de la geometría en la educación general básica chilena y una propuesta para su enseñanza en el aula. In *II Congreso Internacional sobre la Teoría Antropológica de lo Didáctico*.

Fernández, C., Llinares, S., & Valls, J. (2011). «Mirando con sentido» el pensamiento matemático de los estudiantes sobre la razón y proporción. *Acta Scientiae, 13*(1), 9-30.

Gómez-Chacón, I. M. (2006). Matemáticas: El informe PISA en la práctica. Una acción formativa del profesorado. *Uno. Revista de Didáctica de la Matemática, 41*, 40-51.

Hill, H. C., Sleep, L., Lewis, J. M., & Ball, D. L. (2007).Assessing teachers' mathematical knowledge: What knowledge matters and what evidence counts.*Second handbook of research on mathematics teaching and learning, 1*, 111-156.

Knuchel, C. (2004). Teaching symmetry in the elementary curriculum. *The Montana Mathematics Enthusiast, 1*(1), 3-8.

Llinares, S. (2003). Matemáticas escolares y competencia matemática. En C. Chamorro (Ed.), *Didáctica de las matemáticas* (pp. 3-30). Madrid: Pearson-Prentice Hall.

Llinares,S. (2013). Formación de profesores de matemáticas. Caracterización y desarrollo de competencias docentes. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación matemática*, 10.

Llinares, S. (2013). Professional Noticing: A Component of the Mathematics Teacher's Professional Practice. *Sisyphus-Journal of Education, 1*(3), 76-93.

Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. London: Routledge Falmer.

Pacheco, S. M., & Asorey, M. I. G. La geometría en el Jardín de Infantes: En búsqueda de su sentido. *Artículos: Centros Infantiles en zonas de vulnerabilidad social. Un proyecto en marcha*, 33.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., Valls, J., García, M., & Llinares, S. (2012). Cómo estudiantes para profesor interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes de Bachillerato: La derivada de una función en un punto. In A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. Salvador Llinares; García & L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 497- 508). Jaén: SEIEM.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. Harvard *Educational Review, AZ*, 1-22.

Torra, M. (2009). Reflexiones desde el aula sobre la formación del profesorado. *UNO: Revista de Didáctica de las Matemáticas, 51*, 71-80.

Wilhelmi, M. R., & Lacasta, E. (2007). *Un modelo docente para la formación en geometría de maestros en educación infantil*.

El lenguaje, modelos y representaciones utilizados por los maestros de 5° de primaria, en la enseñanza de la fracción

Marta Cecilia **Salazar** Aburto
Universidad Central de Chile
Chile
martacecilias@gmail.coM
Sergio **Martinic** Valencia
Pontificia Universidad Católica
Chile
smartini@uc.cl
Alexander **Maz** Machado
Universidad de Córdoba
España
ma1mamaa@uco.es

Resumen

Presentamos un estudio sobre los recursos y representaciones que utilizan los profesores chilenos de 5º año de primaria cuando enseñan las fracciones. El objetivo del estudio es evidenciar cuales son los significados de fracciones que ponen de manifiesto cuando enseñan el contenido de fracción. La investigación se realiza bajo un enfoque cualitativo, descriptivo y exploratorio. Se analizaron videos de clases tomados durante los procesos de evaluación docente del profesorado. Para el análisis de los videos se elaboró un registro de observaciones mediante la asignación de tablas descriptivas, definiendo en qué consiste cada una de ellas y que se observará en los videos. Dentro de los principales hallazgos se encontró que los profesores presentan como único constructo para enseñar las fracciones el parte-todo, ocultando el proceso de medida, y el todo medible, con este uso restringido, el estudiante no logra construir el número fraccionario.

Palabras claves: fracciones, profesores de primaria, matemáticas, modelos, representaciones, recursos, enseñanza en Chile.

Introducción

La enseñanza-aprendizaje de la matemática ha sido una de las principales preocupaciones tanto de profesores, los que manifiestan un deseo generalizado de entender como aprenden sus estudiantes y como obtener mejores estrategias que ayuden a un mejor aprendizaje, como por los investigadores en Educación Matemática, que durante décadas han venido estudiando y reflexionando con el fin de identificar cómo la formación matemática puede contribuir más eficazmente a las grandes metas y propósitos de la educación actual.

Diversos investigadores en educación matemática (Llinares y Sanchéz, 2000; Pereda y Valdemoros, 2007), coinciden en que dentro de los contenidos matemáticos que presentan mayores dificultades tanto en la enseñanza como en los aprendizajes escolares son las fracciones,

sobre todo en niveles básicos de educación. Así mismo, hay dificultades en el nivel conceptual y la destreza en el cálculo de las fracciones (Lesh, Post, y Behr, 1987).

Las fracciones son importantes en el currículo escolar obligatorio, su importancia radica fundamentalmente en la capacidad de desarrollar una gran diversidad de competencias cognitivas en los sujetos en edad escolar (Gairín y Sancho, 2002). Lo que ha generado una variedad de estudios con el fin de superar las dificultades que presentan los escolares en la comprensión del concepto.

Desde esta perspectiva y, reflexionando la importancia de las fracciones en el proceso de la enseñanza y del aprendizaje, resulta primordial que los docentes conozcan las fracciones dominando la diversidad de representaciones que tiene este concepto. Si el profesor conoce los diferentes modelos de interpretación de las fracciones, será capaz de lograr que los estudiantes comprendan el concepto de fracción, resolviendo situaciones en diferentes contextos (no todas pueden ser resueltas por una misma interpretación). Además, el conocimiento y aplicación de varias representaciones o modelos permitirá al estudiante desarrollar procesos mentales tales como: la comparación, análisis, síntesis y planteamientos de inferencia, procesos que son propios del razonamiento matemático, de este modo se puede señalar que el estudiante ha llegado a comprender el concepto de fracción (Ríos, 2007; Llinares y Sánchez, 2000).

Por otra parte, los profesores de primaria no tienen como una especialización en la enseñanza de las matemáticas, la formación de los profesores de Educación Primaria tiene una gran diferencia en la formación inicial docente de matemática de secundaria, en Chile. Los profesores de Educación Primaria no han recibido una formación específica ni en matemáticas ni para enseñar matemáticas, a diferencia de los profesores de matemática de secundaria.

Utilizar mal el lenguaje matemático, puede ser una barrera para el aprendizaje de los estudiantes, debido a los requerimientos y convenciones especificas necesarias para expresar los conceptos matemáticos. De esta forma, el profesor, es el primero que debe dominar el lenguaje matemático, a través de él podemos develar el dominio que tiene del concepto de fracción, si corresponde a parte-todo, medida, cociente, razón y operador. (Lee, 2010).

En esta investigación buscamos identificar los significados que establecen de manera evidente, los profesores chilenos de 5º año básico en la enseñanza de las fracciones, analizando el lenguaje, modelos y representaciones utilizadas en el aula.

Planteamiento de la investigación

La importancia de esta investigación es que está centrada en el docente, resultando de interés y actualidad, debido a que las fracciones han sido investigadas en diversas perspectivas, pero escasamente en el dominio de los profesores chilenos, de enseñanza primaria sobre el conocimiento de las fracciones. Esta investigación estudia el lenguaje utilizado, los modelos y representaciones de éstas que pueda aplicar en la enseñanza de este contenido, y el constructo(s) o concepto(s) de fracción que utiliza en la clase de primaria.

La pregunta interrogante que guio esta investigación es:

> ¿Qué tipo de lenguaje, modelos y representaciones utiliza el profesor en la clase de matemática durante la enseñanza de las fracciones?

Objetivos

- Conocer qué tipo de lenguaje utiliza el profesor en la clase de fracciones.

- Identificar los modelos de fracciones que pone de manifiesto el profesor en la enseñanza de las fracciones.
- Analizar y describir las representaciones que utiliza los profesores chilenos, de 5º año básico en la enseñanza de un contenido de fracciones.

Marco de Referencia

La dificultad de los escolares para comprender el concepto de fracción se puede atribuir a las formas "restringidas" con que se enfoca el concepto en la enseñanza básica, al respecto Llinares y Sanchéz (2000) señalan que en los textos escolares, muchas veces no se presenta el tema con una visión pluralista. Escolano y Gairín (2005) también atribuyen gran parte de las dificultades de comprensión de las fracciones al proceso instructivo, coincidiendo en que la forma casi exclusiva de enseñar las fracciones en el proceso de enseñanza en el sistema español, se da bajo el modelo parte-todo, es más, mencionan que dicho modelo se utiliza al mismo tiempo para introducir el número decimal como "otra forma" de escribir las fracciones decimales.

Ríos (2007) observó, que en las aulas escolares venezolanas de enseñanza básica y secundaria, predomina la interpretación parte-todo, con representaciones gráficas tales como el círculo y el rectángulo. De este modo, el tratamiento de totalidad predominante es el continuo, no considerando el caso discreto, sino que este es planteado como caso particular de la multiplicación de fracciones por un número natural.

Existen diferentes constructos del concepto de fracción, Behr (1993) considera los de parte-todo, cociente, razón, operador y medida. Sin embargo, autores como Llinares y Sánchez (2000) incluye el concepto de medida en el de parte-todo, mientras que Kieren (1993) incluye el constructo de cociente y medida en parte-todo.

En esta investigación asumimos lo planteado por Berh (1993), parte-todo, cociente, razón, operador y medida. Cada uno de estos constructos tiene sus propias representaciones y modelos, así como su propio lenguaje y actividades.

En el aula los profesores de matemáticas, utilizan generalmente datos e informaciones visuales en el aprendizaje de éstas. Son escasos los docentes que toman en consideración la teoría de las etapas de desarrollo del intelecto. La que en algunos casos puede utilizarla solo en forma intuitiva. Existen dos medios por los que, se proporciona información en la sala de clase, para potenciar la formación del conocimiento matemático, estos medios son la representación y los modelos. Las representaciones y los modelos están asociados entre sí.

Así tenemos que, Representación son las notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, a través de las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos, así como sus características y propiedades más relevantes. Las notaciones simbólicas, pueden alcanzar gran complejidad, por lo general se basan en signos alfanuméricos estructurados (Castro y Castro, 1997), las gráficas se basan en combinaciones de figuras o iconos, también estructuradas. La noción de representación la vinculamos con los signos, notaciones, figuras y expresiones usuales de las matemáticas, las representaciones forman parte específica de los sistemas matemáticos de signos, incluidos los gráficos.

Modelo: La enseñanza y los aprendizajes del conocimiento matemático están ligados a la noción de modelo. No debemos olvidar que la mente humana permite que se piense mejor, que se analice y reflexione, es decir, que se comprenda mejor si se hace en torno a lo familiar,

perceptible y manipulable. No debemos olvidar la teoría de Bruner teoría de las etapas de desarrollo del intelecto,

He aquí la importancia, sobre todo en los niveles educativos obligatorios, que la instrucción sobre conceptos matemáticos, se presente asociada a situaciones reconocible por el escolar (Gairín y Sancho, 2002).

Lenguaje matemático: El lenguaje aritmético se estructura con un sistema de notación particular, diferente del lenguaje ordinario. Los problemas matemáticos deben de obedecer a ciertas reglas, estas no son todas simples, en particular los numerales, las divisiones, las fracciones, la jerarquía de las operaciones y los paréntesis, etc. Requiere de mucho trabajo para llegar a realizar las operaciones que tienen símbolos con significados (Socas, 1999).

Metodología de la investigación

Tipo de investigación: es de enfoque cualitativo. El tipo de investigación a realizar es descriptiva y exploratoria. Es descriptiva, por cuanto pretende describir una situación, ilustrar lo que es un fenómeno en cuanto a tal, en este caso, los modelos, representaciones y lenguaje utilizados por profesores en la enseñanza del concepto de fracción. Es exploratoria, por cuanto no hay estudios realizados anteriormente en la educación chilena, que se focalicen en el tema de mi investigación (Hernández, Fernández y Baptista, 2006).

Criterios utilizados para la selección de la de la muestra

Los sujetos con los que se llevó a cabo esta investigación son los profesores que participaron en el proceso de evaluación docente a nivel nacional. La población son los maestros de primaria sometidos a la evaluación del programa Docente más del año 2009, donde fueron evaluados un total de 4.421 docentes en segundo ciclo básico a nivel de todo Chile.

La muestra es intencional y por conveniencia, es intencional porque se eligieron los docentes que trabajaron el concepto de fracción, contenido de estudio de esta investigación y está constituida por un total de 17 docentes de 5º año de Educación General Básica pertenecientes a diversas regiones a lo largo de todo Chile, quienes en su proceso de evaluación debían impartir una clase la cual se grabó en vídeo.

Pautas de observación de videos

Para analizar los videos se elaboró un registro de observaciones mediante la asignación de etiquetas descriptivas, de este modo se podía organizar la información, las cuales se explican y definen en qué consiste cada una de ellas y que se observara en los videos. Estas etiquetas se presentan en una tabla en la que se registraran las observaciones y luego se pasaron a una base de datos. Cada video será sometido a la tabla. Una vez elaborada la base de datos se procedió a realizar los análisis.

Criterios para análisis de los videos

Como el objetivo de la investigación consiste en determinar cuál o cuáles son los modelos, representaciones y lenguaje que utilizan en la enseñanza de fracciones en la clase de 5° de primaria. A continuación se establecen y definen en qué consisten las etiquetas que estarán en el registro de observaciones de los videos.

Estrategia que utiliza el profesor en la clase

1.- Recursos utilizados (RU): Se señalará si el profesor utiliza o no utiliza materiales o recursos

en la clase. Además se describirá como utiliza los recursos y, si los estudiantes tienen participación con éstos, o son pasivos, como también, tanto profesores como estudiantes en forma conjunta utilizan los recursos; indicando la acción realizada en cada uno de los casos. Esta diferencia se hace debido a que los materiales el profesor los puede utilizar como ayuda para la enseñanza, o bien como recurso para el aprendizaje.

2.- Lenguaje utilizado por el profesor y relacionado con las fracciones (L): Se registraran todas aquellas palabras que utiliza el profesor en forma verbal, aunque puede estar apoyado de material manipulable o visual. El lenguaje utilizado tiene importancia para relacionarlo con la representación de fracción que lleva a la clase el profesor al enseñar el concepto de fracción. Se entiende por acción a los movimientos que acompañan a la expresión verbal, sólo en los casos que se considere que la acción es relevante con el lenguaje utilizado se registraran las acciones, en caso contrario solo se considerará el lenguaje.

3.- Tipo de contexto que utiliza: puede ser discreto y/o continuo.

Contexto (CX)- Modelo (MO)

a) Continuos: es una magnitud medible, la superficie (también la longitud)

Modelos utilizados: por lo general se usan modelos de áreas, figuras geométricas, siendo las más utilizadas el circulo, el rectángulo y/o el cuadrado.

b) Discreto: una magnitud medible por la cardinalidad.

Modelos utilizados: por lo general se usan conjuntos de cosas, como puntos, círculos pequeños, destacando mediante recursos gráficos, algunas de esas figuras, ya sea pintando algunas de ellas.

Por cada docente analizado se utilizara una secuencia donde se señala el código del profesor y el número correlativo de la secuencia.

Algunos resultados

A continuación podemos ver algunas tablas de análisis de Lenguaje, Modelos y recursos utilizados, con esto se muestra como se trabajó con el análisis de datos por cada profesor.

En la siguiente tabla podemos develar los recursos del profesor, que estos, no son para el aprendizaje, por el contrario son para la enseñanza, y en las actividades los estudiantes son pasivos. Se puede observar claramente el constructo parte-todo.

Tabla 1
Recursos utilizados por el profesor

	Actividad profesor	**Estudiantes**	**Escolares y docentes**
UN POWER POINT TARJETAS CON REPRESENTACIONES SIMBÓLICAS DE	En el power point se ven ejemplos de fracciones en representaciones gráficas y simbólicas. Escribe en el pizarrón la definición: “fracciones: repartición en partes iguales”. Además realiza representaciones gráficas con algunas partes destacadas y los estudiantes deben señalar la representación simbólica.	Los escolares deben recordar de memoria las características de las fracciones señaladas por la docente, para utilizarlas cada vez que sea necesario, clara muestra de la psicología conductista en el aprendizaje de las matemáticas.	Los estudiantes deben contestar preguntas de la profesora sobre la clasificación de las fracciones, las preguntas están hechas de tal forma que los estudiantes responden sin errores.

LAS FRACCIONES	Pregunta por las "partes" de las fracciones, no muestra el entero medible, siempre está con figuras superpuestas. Les indica lo que deben mirar para clasificar en fracciones, iguales propias e impropias, no les da una explicación, los estudiantes deben recordar esta regla cada vez que sea necesaria.	Actividad en clase: deben realizar en unas fichas de fracciones cuales son las clasificaciones que les corresponden ,según las reglas que aprendieron de memoria	Además, profesora ayuda a recordar las reglas.

En la tabla siguiente el docente usa recursos también para la enseñanza, si bien menciona la medida, pero en las actividades dadas el estudiante no conoce el entero medible, sino que se oculta, enseñándolo en forma errónea, relaciona el entero con números racionales con denominador 1, con esto el estudiante solo se confundirá y no será capaz de relacionar el concepto de fracción en aprendizajes posteriores.

Tabla 2
Recursos utilizados por el profesor

Recursos utilizados	**Actividad profesor**	**Estudiantes**	**Escolares y docentes**
PIZARRÓN Y PLUMÓN. DOS BOTELLA DE BEBIDA UNA DE UN LITRO Y DE MEDIO LITRO.	Escribe en el pizarrón diferentes sistemas de medidas, de masa, peso. Con las botellas de bebida una de un litro, representa el entero, luego señalan los medios. Pregunta a los estudiantes: ¿2 litros, es un número racional o un entero?. Confirma a los estudiantes que corresponde a un entero, gran error. Señala que las fracciones son difíciles porque se acostumbra a los enteros en la vida cotidiana, muestra la botella de 1/2 litro y dice que es una parte del entero. Muestra la botella de 1 litro señala que es el entero, pero no explica que el litro es una medida, y que no siempre el entero puede ser un número exacto como 1*litro*. 2*litros*, también puede ser una fracción, producto de la medida del entero, con una medida arbitraria.	Guía de ejercicios con enunciados, las fracciones están con medidas de magnitud, pero los estudiantes no realizan mediciones con una medida arbitraría, para visualizar cuantas veces está contenida en el entero, entero medible. El entero ya tiene una capacidad de 1 litro, pero no explica que el litro es una medida, no siempre el entero puede ser un número exacto, también puede ser una fracción, producto de la medida del entero, con una medida arbitraria.	Muestra la fracción 2/5 y, pide que realicen la representación gráfica, dibujan 5 botellas y pintan dos de ellas.

En los recursos utilizados por el profesor, el total de los observados no utiliza recursos para el aprendizaje, sino que los recursos son para la enseñanza, los estudiantes deben realizar las actividades de acuerdo a las instrucciones dadas por el docente. Las actividades no presentan una situación problemática. Los estudiantes son pasivos, solo siguen las instrucciones dadas por los docentes, el aprendizaje es visual.

En la tabla 3 se observa el modelo utilizado por el docente es parte-todo, en un contexto continuo representado por una figura geométrica como cuadrados.

Tabla 3
Modelos utilizados por el profesor

Tipo de contexto	**Modelo utilizado**	**Interpretación**
Continuo	**Áreas**	**Parte-todo**
Ejemplo de la docente de dividir una hoja de block de dibujo en partes iguales, y pintar ciertas partes de un color y las demás de otro color.	Figuras geométricas, cuadrado.	Hace una representación gráfica de la fracción, el todo no es señalado a los estudiantes como una superficie medible, sino con figuras superpuestas, "Iguales", con algunas de ellas destacadas (pintadas).

En la tabla 4 podemos ver un conjunto discreto está formado por estudiantes, el total de los estudiantes corresponde al entero, y las estudiantes con buzo corresponde a las partes consideradas del entero. El estudiante es pasivo en esta actividad.

Tabla 4
Modelos utilizados por el profesor

Tipo de contexto	**Modelo utilizado**	**Interpretación**
Discreto	**Conjuntos**	**Parte-todo**
Da ejemplo de la asistencia con buzo de las estudiantes señalado la mitad del todo.	Niñas de buzo y niñas con uniforme.	Es parte todo porque existe un total de partes (el total de estudiantes) y unas diferentes del todo (estudiantes con buzo).

Los contextos que utilizan los docentes observados, son continuos o discretos, jamás usó la medida de magnitudes para comparar las superficies que ocupaban cada una de las fracciones, sino que presentan el entero con figuras superpuestas, donde el estudiante debía tener una focalización visual, y comparar las partes pintadas, si ocupaban la misma superficie o era mayor o menor, debía realizar un doble recuento, partes destacadas y el total de las partes. En los contextos discretos el total de las partes representa el entero y, las partes diferenciadas representan las partes tomadas del entero. En los todos los casos se oculta el entero medible al estudiante, debe realizar doble conteo, con esto no construye el significado de numero fraccionario.

En la tabla siguiente se puede observar el lenguaje utilizado por el docente, lenguaje que no es matemático, sino que es un lenguaje cotidiano, dificultado que los estudiantes puedan relacionar conceptos posteriores, o relacionar conexiones y redes matemáticas que le serían fáciles de evocar

Tabla 5
Lenguaje utilizado por el profesor

lenguaje de la profesora	tipo de lenguaje	interpretación
Vamos a estudiar a las señoritas fracciones	La docente no usa un lenguaje matemático, sino por el contrario, personifica a las fracciones.	Mal uso del lenguaje, porque los estudiantes no deben tener barreras por la forma en que debe usarse el lenguaje al expresar los conceptos

	matemáticos, y el hecho que la docente mencione al concepto de los números fraccionarios con terminología que le da una personificación y, no un objeto de conocimiento matemático, impide que los escolares expresen sus ideas o dudas matemáticas en un lenguaje que les ayude a expresar las ideas y conceptos que forman su disciplina

Resultados

De los trece profesores estudiados, se observó que todos no utilizaron lenguaje matemático, para referirse a las fracciones, en algunos casos solo se utilizaba al comienzo de la clase, pero se continuaba con el lenguaje ordinario.

El total de la muestra utilizó recursos para la enseñanza y no para el aprendizaje, esto es que, facilitaba la manera de enseñar el concepto de fracción a los profesores, pero no había recursos donde se observara que los estudiantes realizaran actividades, que evidenciara el proceso de aprendizaje de las fracciones, es decir, donde ellos pudieran construir el concepto de numero fraccionario, por el contrario, solo realizaban un doble conteo de números naturales, el total de las partes y las partes consideradas del entero.

Tampoco se observó que algún profesor mostrara el entero, entero medible, todo lo contrario éste se oculta al estudiante, se muestra con figuras superpuestas.

Con relación al modelo que se enseña, el total de los profesores se refiere al parte-todo, esto se observa a través de las actividades y del lenguaje utilizado.

El contexto continuo representado por áreas de figuras geométricas, está presente en doce de los trece profesores, y el contexto discreto, representado por conjunto de elementos está presente, como único contexto, en un solo profesor.

El contexto continuo y discreto presentes en una misma clase, se observa en dos profesores. Luego, el contexto continuo presentado en forma exclusiva en la clase se visualiza en dos de los doce los profesores que utilizan el contexto continuo.

Conclusiones

Analizando todas las clases observadas podemos señalar que en cuanto al lenguaje, el total de los profesores observados, no utiliza el lenguaje matemático, produciendo un obstáculo a los estudiantes para relacionar conceptos que pueden estar relacionados con las fracciones, impidiendo realizar conexiones y redes matemáticas y evocar el concepto a través del lenguaje matemático. Se observa a través del lenguaje que predomina el constructo parte-todo.

En los recursos utilizados con todo tipo de materiales, no existen grandes diferencias entre los profesores estudiados, por el contrario, hay una gran similitud entre los recursos y la forma en que son utilizados. Estos no son manipulativos, el estudiante es pasivo, debido que los recursos son más bien para facilitar al profesor las actividades para su enseñanza, pero no para el aprendizaje, lo emplean para explicar el algoritmo que deben aplicar para resolver las diferentes

actividades, y también para explicar el concepto de fracción, todos sin excepción se refieren al concepto parte-todo, no hay casos donde se observen acciones de medir con alguna medida arbitraria, no se observa replicar una unidad de medida arbitraria, sino que mencionan, en algunos casos la medida de magnitud, como el kilo, etc., pero como mero dato.

Los modelos utilizados por los docentes, predomina el continuo con modelos de áreas, figuras geométricas, donde no se da importancia a la magnitud de las partes, los estudiantes deben aceptar que la división del entero es en partes iguales, pero no realizan medida de esas partes, es más dibujan las figuras geométricas en el pizarrón dividiendo el entero en partes que no son notoriamente iguales, sin embargo, el estudiante debe aceptar que son de igual medida. Con esto podemos señalar que el estudiante no construye el concepto de fracción, sino que deben realizar un doble conteo de números naturales, el total de las partes y las partes pintadas, para luego realizar la representación simbólica, además, deben realizar transferencias de la representación gráfica a la representación simbólica y, de la representación simbólica a la representación gráfica. Se da importancia a la cardinalidad por sobre la magnitud.

En consecuencia, podemos señalar que el total de los profesores observados se refieren al constructo parte-todo, pero no dominan éste concepto, por el contrario, queda en evidencia que ellos ocultan la parte entera a sus estudiantes, no trasmiten que en realidad existe un proceso de medida, no se le hace explícito. Sino que se les muestra el entero con figuras superpuestas, donde debe contar que las que componen el total y las que sobresalen o están pintadas, que corresponden al número de partes consideradas.

Luego, los estudiantes no construyen el concepto de fracción, debido que en los profesores no se observa que tengan un dominio de los diversos constructos del concepto, es más el constructo parte-todo tampoco lo conocen, lo entregan en forma intuitiva y, que sea fácil para ellos enseñar, pero no para el aprendizaje de los estudiantes, las actividades están programadas para el éxito de éstos, pero no para la comprensión.

Con este estudio debemos poner una voz de alerta en la formación inicial docente de primaria, y considerar que los estudiantes, en este caso de 5° básico de primaria, resultan notoriamente perjudicados para desarrollar sus capacidades en matemática en cursos superiores, debido que el concepto de fracción está presente a través de todos los cursos del currículo.

Referencias

Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

Berh, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1993). Rational Numbers: toward a Semantic Analysis. Emphasis on the Operador Construct. En T. P. Carpenter, E. Fennema, & T. A. Romberg, *Rational Number. An Integration of Research.* Hilldale, Nueva Jersey: Lawrence Erlbaum Associtess Publishers.

Castro, E., & Castro, E. (1997). Representaciones y modelización: conocimiento matemático y visualización. Granada, España: Universidad de Granada.

Ecolano, R., & Gairín, J. M. (2005). Modelos de medida para la enseñanza del número racional en Educación Primaria. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 1*, 17-35.

Gairín, J. M., & Sancho J. (2002). *Números y Algoritmos*. Madrid: Ed. Síntesis.

Hernández, R. F. C., & Baptista, P. (2006). *Metodología de la investigación.* Buenos Aires: McGraw- Hill.

Kieren, T. (1980). "The Tarional Number Construct-Its Elements and Mechanisms", Recent Research on Number Learning. Kieen, T. E. Columbus, Ohio: ERIC/SMEAC.

Lee, C. (2010). El lenguaje en el aprendizaje de las matemáticas. Madrid: Ed. Morata.

Llinares, S., & Sánchez, M. V. (2000). *Fracciones.* Madrid, España.

Perera, P., & Valdemoros, M. E. (2007). Propuesta didáctica para la enseñanza de las fracciones en cuarto grado de educación primaria. *Investigación en Educación XI, CINVESTAV*, 209-218.

Ríos, Y. (2007). Una Ingeniería Didáctica Aplicada Sobre Fracciones. *Redalyc,* 120-157.

Socas, M. (1999). Números. Revista didáctica de las matemáticas, 77, 5-34.

Enseñando operaciones con números decimales: representaciones conflictivas

Carlos A. **López Leiva**
University of New Mexico
USA
callopez@unm.edu
Juan **Castro**
Colegio William M. Botnan
Guatemala
juancastrocutz@gmail.com
Jorge Alfredo **Monge**
Common Hope Guatemala
Guatemala
jorgemonge.aa@outlook.com

Resumen

Este documento describe el análisis del surgimiento y la resolución de un conflicto cognitivo al representar simultáneamente números decimales y mixtos usando bloques de base diez. El conflicto surgió cuando un grupo de estudiantes del 5to grado usó la misma representación matemática para operar números usando ambas notaciones. Presentamos el proceso a través del cual los estudiantes clarificaron esta confusión por medio del uso paralelo de múltiples representaciones matemáticas, especialmente a través del uso constante de una representación (bananos) la cual permitió la manipulación versátil de las representaciones para formar tanto decenas como décimos. La resolución de tal conflicto es presentada y a la vez discutida desde puntos de vista pedagógico y de aprendizaje.

Palabras Clave: Números decimales y mixtos, bloques de base diez, representaciones conflictivas y representaciones múltiples, fondos de conocimiento, metacognición, y educación primaria

Durante nuestro trabajo con un grupo de alumnas/os de 5to primaria, nosotros, los autores de este documento, aprendimos no solo acerca de la importancia de prestar atención a lo que los estudiantes piensan y entienden durante una lección matemática, sino también sobre el beneficio pedagógico y de aprendizaje que trae el hacer explícitas las construcciones y manipulaciones que aplicamos a ciertas representaciones físicas al asignarles los valores matemáticos que estudiamos. Esto es importante porque frecuentemente en el uso del material didáctico físico en la clase de matemáticas los estudiantes asumen un valor absoluto asignado a estas representaciones. Por ejemplo, a los bloques de base diez les asignamos un valor diferente cuando los usamos con números enteros o con números decimales. Un pequeño cubito puede representar ya sea una unidad en el caso de números enteros o un centésimo o un milésimo en el caso de los decimales. Aquí compartimos el proceso que nos ayudó a resolver un conflicto que surgió al utilizar los bloques de base diez para representar físicamente operaciones con números decimales y números mixtos y también cómo este proceso propició el desarrollo meta-cognitivo

de los estudiantes. Primeramente, describimos recomendaciones ofrecidas por trabajos previos con números decimales y enteros. Luego, presentamos el marco teórico que dirige nuestro análisis, seguido por la descripción del contexto donde trabajamos, así como de los ejemplos de las lecciones que implementamos y donde centramos nuestra descripción en el conflicto y resolución del uso de bloques de base diez para representar y operar números decimales y números mixtos. Finalmente, discutimos lo que aprendimos por medio de esta experiencia y brevemente proveemos recomendaciones didácticas.

Estudios Previos

Las representaciones físicas en el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas han sido consideradas útiles para apoyar la comprensión y razonamiento de los estudiantes. Esto se debe a que la manipulación física de estos materiales realizada conjuntamente con la manipulación de símbolos matemáticos estimula una comprensión y un razonamiento integrado acerca de cómo estas representaciones se relacionan mutuamente (Hiebert, 1992; Lesh et al., 2003). La conexión entre los distintos tipos representaciones ayuda a que los estudiantes puedan hacer mejor sentido sobre el sistema matemático, especialmente en cuanto a entender procedimientos y conceptos implícitos en los símbolos y algoritmos matemáticos (Hiebert, 1992). Por ello la enseñanza matemática multimodal es efectiva para ayudar a los estudiantes en la escuela primaria y secundaria a entender los conceptos matemáticos de una manera interactiva y conceptual más que memorística y repetitiva (Hiebert, 1992; Lesh et al., 2003; Morales, Khisty, & Chval, 2003). Particularmente los bloques de base diez representan un tipo de modelo matemático útil para enseñar el concepto de valor relativo y posicional numérico, las operaciones con números enteros (Dienes, 1960; Fuson & Briars 1990; Hunter et al., 1994), como también con números decimales (Cramer et al., 2009; Hiebert, Wearne, & Taber 1991; Suh et al., 2008).

Se ha enfatizado que el uso de representaciones concretas resulta más efectivo cuando el uso centra en el entendimiento de los conceptos matemáticos en relación a las representaciones, más que cuando la exploración se enfoca en la estructura de las representaciones propiamente dichas y las acciones realizadas con las mismas (Lesh et al., 2003). El uso fluido y entendimiento de las distintas notaciones numéricas en cuanto a su valor y significado se desarrollan a través de tres clases de conocimiento: (a) el conocimiento acerca de los símbolos y las notaciones matemáticas de los números (758), las fracciones (½), o fracciones decimales (0.5); (b) el conocimiento de las reglas de los pasos y procedimientos para alcanzar resultados precisos; (c) el conocimiento sobre el mundo real para comprender el valor que representan las notaciones matemáticas (Hiebert, 1992). La relaciones entre estos tipos de conocimiento pueden ser fortalecidas por medio de un proceso multimodal y que a la vez ayudan al aprendizaje y uso efectivo de los símbolos y las notaciones matemáticas. En este proceso multimodal, las notaciones pueden ser aprendidas utilizando bloques base diez. Sin embargo, con cada notación cada componente de los bloques base diez toma distinto valor. Por ejemplo, la tablita que contiene 100 cubos pequeños puede representar 100 unidades; al mismo tiempo esta tablita puede representar una unidad que puede ser dividida en facciones como medios o décimos; además esta tablita se puede usar para representar una unidad divida en decimales, de manera que cada cubo representa un centésimo. Por lo tanto, en el uso de los bloques con la distintas notaciones el enfoque del uso ha de centrarse en los conceptos matemáticos que los bloques representan. Sin embargo, en nuestro caso, al prestar atención a las decisiones tomadas para usar los bloques de base diez con las distintas notaciones matemáticas ayudó a los estudiantes a una

comprensión conceptual de las notaciones, como también a desarrollar una perspectiva metacognitiva al adaptar el valor de los bloques al de las notaciones (Schoenfeld, 1987).

A pesar sus beneficios, los modelos o representaciones matemáticas concretas pueden ser mal utilizadas (Cramer et al., 2009; Hiebert, 1992; Lesh et al., 2003). Primero, los estudiantes deben de entender cómo las representaciones de los números y los bloques de base diez aunque estén conectadas una con otra, también se pueden referir a contextos de notaciones diferentes y estas diferencias deben ser clarificadas explícitamente (Hiebert, 1992). Segundo, las representaciones pueden carecer de transparencia. Este concepto refiere a que la estructura de un modelo puede guiar a los estudiantes a fijarse en aspectos físicos de los modelos que son irrelevantes a los conceptos matemáticos (Stacey et al., 2001). La *transparencia* se refiere a que la estructura de los modelos o representaciones ayuda a los estudiantes a comprender y aprender conceptos matemáticos (Lave & Wenger, 1991; Stacey et al., 2001). Por esta razón el uso de variedad de representaciones o modelos (e.g., símbolos numéricos, símbolos verbales, dibujos, objetos reales, acciones, y representaciones físicas como bloques base diez) con respecto a un concepto matemático ayuda a una mejor comprensión y aprendizaje de ese concepto (Cramer et al., 2009; Lamon, 2005; Lesh et al., 2003).

Marco Conceptual

Para nuestro análisis, tomamos como marco conceptual el constructo de fondos de conocimiento, el cual resalta el valor del conocimiento que las niñas y niños obtienen como resultado de formar parte de su comunidad y de sus familia. Este conocimiento no se detiene cuando ellos llegan a la escuela, sino por el contrario este conocimiento representa un fundamento para el aprendizaje en la escuela. Estos conocimientos del hogar, de la comunidad, de la vida representan fondos que estos niños y niñas tienen y que deben ser considerados, utilizados y promovidos en la escuela de manera que los estudiantes pueden apreciar que sus experiencias y conocimiento fuera y dentro de la escuela son válidos, legítimos y útiles (González, Andrade, Civil, & Moll, 2001). Además con respecto al aprendizaje de las matemáticas, reconocemos que en el proceso de enseñanza-aprendizaje como educadores debemos de iniciar la instrucción matemática al nivel del conocimiento y del entendimiento de las niñas o niñas está (Van de Walle, Karp, & Bay-Williams, 2013), para ello es indispensable prestar atención, valorar, escuchar, y usar lo que los estudiantes hacen, piensan, y dicen durante la instrucción matemática (Yackel, Cobb, Wood, Wheatley, & Merkel, 1990).

Métodos

El Contexto

Las lecciones descritas aquí se implementaron en un aula de quinto grado en una escuela privada situada en una aldea en una zona rural y montañosa en Guatemala. La aldea se encuentra a hora y media de la ciudad más cercana. Los quince estudiantes (6 niñas y 9 niños) son de origen maya y bilingües (español e ixil). La mayoría han estudiado en esta escuela desde el primer grado y todos viven en la aldea. Los profesores colaboradores son guatemaltecos y trabajaron juntos durante una semana y co-planificaron y co-enseñaron las lecciones. Los educadores Juan, Jorge, y Carlos respectivamente pertenecen a una escuela primaria rural privada en Guatemala, una Organización no Gubernamental (ONG) dedicada parcialmente al mejoramiento de la calidad educativa en Guatemala, y una universidad pública de los Estados Unidos. Antes de este tiempo ellos no se conocían entre sí, pero lo hicieron por medio del programa “Teachers2Teachers”. Los educadores trabajaron unidos por una semana, iniciando el

lunes. Las lecciones fueron impartidas en español e ixil, pero predominantemente en español. Cada período de matemáticas duró aproximadamente una hora. El maestro de la clase (profesor 1) es maya y bilingüe (español e ixil) y tiene una amplia experiencia en la enseñanza. Los profesores visitantes, uno (profesor 2) es ladino (mezcla de europeos y mayas), monolingüe (español), y es educador en una ONG. El otro educador (profesor 3) también es ladino y bilingüe (español e inglés) y es educador de matemática bilingüe en los Estados Unidos. La escuela cuenta con un plan de estudios alineado con los estándares de contenido de Guatemala. El plan de estudios de matemáticas incluye un libro de texto para cada estudiante.

Cada día, los profesores tomaron notas sobre lo que sucedió durante la clase y por la tarde se reunieron para planificar la lección del día siguiente. Los trabajos de los estudiantes fueron documentados y fotografiados. Los datos presentados acá fueron seleccionados para demostrar los procesos que ayudaron a los estudiantes a resolver este conflicto y que emergió a falta de la transparencia de los bloques de base diez para pensar y ver simultáneamente a los bloques de base diez como una representación de decimales y de números mixtos. Nuestro análisis se centra en las decisiones que tomamos en base a lo que detectamos que los estudiantes estaban entendiendo.

Resultados

Las Primeras Lecciones y el Surgimiento del Conflicto

Los estudiantes empezaron a estudiar los números decimales una semana antes de la llegada de los profesores visitantes. Los estudiantes utilizaron también los bloques de base diez para aprender y operar números enteros en grados inferiores. El lunes, el profesor 1 presentó la suma y resta de decimales siguiendo lo que el texto sugirió. El contenido del texto proporcionó algunos ejercicios y no tenía ilustraciones además del texto y números. El texto destacó dos reglas antes de sumar o restar: (a) alinear las cantidades en la base al punto decimal y (b) llenar con ceros los espacios vacíos y luego operar. El martes, los profesores 1 y 2 trajeron un juego para repasar estas operaciones. El juego fue realizado en grupos de tres e incluyó el uso de bloques de base diez. Los estudiantes tomaron turnos tirando los dados. Lo que marcaban los dados representaban centésimos y los estudiantes debían de sumar este valor al número previo (todos los grupos iniciaron con 0.15). Al llegar primero al 1.00, el grupo ganaba. Luego el proceso se revirtió y los estudiantes restaban los centésimos que marcaban los dados. El grupo que llegaba a cero primero ganaba. Al final se tuvo una discusión acerca del juego y los procedimientos y los conceptos relacionados al mismo. Por este medio se logró percibir que a pesar de la manipulación fluida de los bloques (Hiebert, 1992; Lesh et al., 2003) y el entusiasmo de los estudiantes aún se detectaba profundizar el razonamiento de los estudiantes entre el uso de los bloques de base diez y los números decimales (Yackel, et al., 1990), por lo que se decidió proceder con un repaso más reflexivo en este concepto el día siguiente (Hiebert, 1992). El repaso incluyó un juego similar al del día anterior usando los bloques de base diez y los dados, pero a los grupos se les dio aleatoriamente un número decimal al cual el grupo decidía sumar o restar centésimos tirando los dados hasta llegar a 0.5 ó cinco décimos. En el juego también se hicieron conexiones a la notación de fracciones al destacar que 0.75 = 75/100. Los bloques de base diez ayudaron a hacer esta conexión (Cramer et al., 2009; Hiebert, 1992, and et al.,1991; Suh et al., 2008). Pero al tener una puesta en común al final de la actividad y en relación a lo que se discutía, Profesor 3 preguntó: *¿Qué tal si hubieras sumado 0.65 con 0.75 en vez de restarlo?* La discusión sobre este punto generó un gran conflicto ya que el total de la suma era más de una unidad. La representación de números mixtos usando los bloques de base diez luego de haberlos

usado para representar números decimales casi exclusivamente confundió a los estudiantes (Cramer et al., 2009). Los bloques de base diez con números mixtos perdieron su transparencia que previamente había ayudado a los alumnos a procesar decimales (Lave & Wenger, 1991; Stacey et al., 2001). Por lo que se planeó estudiar y discutir este punto el día siguiente (Van de Walle et al., 2013).

Aclarando el Conflicto: Uso Simultáneo de Bloques de Base Diez y Plátanos

Aunque el plan original era introducir la multiplicación de decimales al final de la semana, la situación durante la tercera lección nos llevó a planificar una forma para resolver el conflicto conceptual matemático que los estudiantes encontraron para representar los números decimales y mixtos con los bloques de base diez. El nuevo plan incluyó dos partes. Primero se hizo un repaso sobre la agrupación de unidades y creación de decenas, y como también de su partimiento, para esto utilizamos tres tipos de representaciones (Hiebert, 1992; Lesh et al., 2003; Morales et al., 2003) que los estudiantes ya conocían (ver Figura 1). La primera fue una tira de papel de colores en la pizarra para demostrar las columnas de los valores posicionales de los números enteros y decimales (desde cientos hasta las centésimos). Se destacó la colocación del punto decimal. La segunda representación incluyó objetos discretos que los estudiantes pudieron partir, para ello usamos plátanos pequeños. Los plátanos se cultivan extensamente en la comunidad y fueron obtenidos de las plantaciones de algunos alumnos (González et al., 2001). Profesor 1 sugirió utilizar los plátanos, ya que se usaron para enseñar las fracciones. La tercera representación fue un modelo de área continua, los bloques de base diez.

La lección inició con el objetivo de aclarar el conflicto que inició el día anterior, y se pidió a los estudiantes que expresaran sus ideas sobre los números mixtos y que usaran la tira de valores en la pizarra. Ya que los estudiantes demostraron una comprensión clara en esta representación, se prosiguió al siguiente punto. Para ello los estudiantes trabajaron en grupos y a cada estudiante se le dio tres plátanos. Y se les pidió que pensaran y representaran con símbolos numéricos y con los plátanos el total de plátanos de cada persona, grupo, y de la clase. Para el total de la clase un estudiante pasó al frente, mentalmente multiplicó 3 x 15 para obtener un producto de 45 plátanos, y lo escribió en la tira numérica. Aunque todos los estudiantes aprobaron el resultado, se les pidió que lo representaran físicamente con los plátanos, con los números, y los bloques (Hiebert, 1992).

Al no haber conflicto, la siguiente tarea incluyó el uso de bananos para representar y operar decimales. Profesor 1 dijo: *Hemos utilizado muchos plátanos para pensar y escribir números enteros usando unidades, decenas y centenas. Pero ahora, vamos a tomar un plátano en su grupo y lo dividirán en décimos. ¿Cómo van a hacer esto?* (El maestro esperó a que cada miembro en los grupos de tres estudiantes dividieran un plátano y lo cortaran en diez piezas). *Ahora, cada quien cómase una pieza. ¿Cuánto comió cada persona, qué cantidad de plátano se comió cada grupo, y cuánto plátano se comió en toda la clase? Averígüenlo y escriban las respuestas usando números*. Las discusiones grupales incluyeron cómo una pieza de plátano no podría representarse con un número 1, pero con 0.1, ya que era una décima parte. Pero, después de varias operaciones, un nuevo reto para todos que causó confusión fue cómo escribir en números 15 décimos. Profesor 1 intervino diciendo: "*¿Cuántos pedazos o décimos haría un plátano entero? Y así, 15 de esas piezas, cuántos plátanos van a hacer?*" Sin dudarlo, los estudiantes de acuerdo en que 10 piezas hacían 1 plátano ya que habían cortado uno en 10 décimos, se les hizo evidente de que 15 piezas era un plátano y medio.

Figura 1: Representaciones matemáticas

Pero luego el uso de números decimales aplicado a esta situación presentó un problema también, por lo que la clase entera discutió cómo un décimo se representa con "0.1". Profesor 1 preguntó: "*Si sabemos que diez piezas o diez décimos hacen un plátano y si tenemos cinco décimos más, entonces ¿cómo se escribe esa cantidad?*" Esto ayudó a los estudiantes llegaran a la notación 1.5. Luego de acordar con esa respuesta, Profesor 1 pidió a un estudiante en cada grupo que se comiera un determinado número de décimos para que luego cada grupo tuviera que encontrar el resultado para el grupo y luego para toda la clase. Este proceso ayudó al grupo a afirmar lo que se entendió en el problema previo. Los grupos resolvieron efectivamente el número de décimos de plátano que quedaron en cada grupo y toda la clase. Estos procesos confirman que al conectar un contexto conocido a uno nuevo (González et al., 2001) ayuda a los estudiantes no solo a entender mejor nuevas ideas, sino también que el sistema matemático es clarificado por medio de aplicaciones a situaciones de la vida real (Hiebert, 1992; Lesh et al., 2003).

Enseguida que los plátanos nos ayudaron a representar números mixtos, se procedió a usar también los bloques de base diez. Para esto, Profesor 3 pidió que representaran usando los bloques de base diez y números el total de plátanos que la clase tenía al principio. Los estudiantes usaron 4 bloques largos (decenas) y 5 cubos pequeños (unos) y el número 45. Profesor 3 destacó cómo cada cubito representaba un plátano, iniciando con lo que los estudiantes sabían (Van de Walle et al., 2013). Luego les planteó otro problema: "*Si un cubito* [de los bloques de base diez] *representa un plátano, ¿cómo podemos representar con los bloques de base diez los décimos o las diez piezas en que cortamos un plátano? Hablen con los miembros de su grupo y dígannos qué piensan*." Después de la discusión, un par de estudiantes voluntarios afirmó que los décimos podrían representarse usando los bloques largos, porque diez son igual a una tabla (de 10 por 10 cubos), como diez piezas de un plátano o décimos hacen un

plátano entero. Profesor 3 les pidió que aclararan aún más diciendo: "*Estoy confundido. Explíquenme cómo es posible que si dijimos que un cubo pequeño representa a un plátano, y ahora usamos diez bloques largos para representar un plátano? ¿No es el bloque largo mucho más grande que el cubito?*" Ellos dijeron que el cubo era demasiado pequeño para dividirlo, así que usaron la tabla en vez del cubito y pensaron en la tabla como si fuera un plátano. El maestro recalcó: "*Entonces, ¿estás diciendo que una tablita y un cubo pequeño ambos pueden representar un plátano o un entero? ¿Cómo? ¿Son lo mismo?*" Los estudiantes respondieron: "*No, no son lo mismo, pero como si fueran lo mismo*." El maestro hizo hincapié en la frase: "*¡Ah! 'Como si fueran' Mmm?"* pidió al grupo discutir la arbitrariedad de los bloques de base diez y cómo las decisiones que tomamos nos hacen ver los bloques con un valor diferente. Los estudiantes razonaron eficientemente utilizando lo que sabían en cuanto a los números y en cuanto a los plátanos y ellos expandieron y reaplicaron esta relación a una relación que no les fue evidente al principio (González et al., 2001). El razonamiento sobre varias representaciones (Hiebert, 1992; Lesh et al., 2003) mitigó en los ojos de los estudiantes la falta de transparencia de los bloques de base diez para representar números mixtos (Stacey et al., 2001). Ellos llegaron a darse cuenta de que un entero puede representarse con un cubo o una tablita, y una tablita puede representar 100 enteros ó 1 entero que se puede partir.

Al final, se sostuvo una conversación para pensar en cómo podemos decidir los valores de los modelos matemáticos. Y cómo estas decisiones afectan los valores que vemos o pensamos en una representación. Este valor no está implícito en la representación misma, sino en cómo decidimos verla; este punto trasciende a un entendimiento meta-cognitivo (Schoenfeld, 1987) logrado al escribir y representar valores múltiples modalidades. Los plátanos, familiares a los estudiantes, ayudaron en la creación de un nuevo significado matemático (Irwin, 2001). La no transparencia de los bloques para representar números mixtos se aclaró al contrastarla con la de los plátanos. Los plátanos como una unidad discreta y constante, permitió su manipulación para representar enteros y décimos junto a los bloques de base diez. Los estudiantes avanzaron la fluidez de su conocimiento matemático al notar la arbitrariedad de las representaciones (Hiebert, 1992). Y al final, el error o conflicto inicial sólo propició un mejor entendimiento (Resnick et al., 1989).

Discusión

Las representaciones multimodales ayudaron a los estudiantes y a los maestros a abordar explícitamente los conceptos matemáticos que fueron inicialmente confusos. La confusión surgió a través del uso aislado de un modelo o representación (Cramer et al., 2009). También es crucial reconocer que la falta de transparencia de los bloques de base diez (Lave & Wenger, 1991; Stacey et al., 2001) para representar enteros, decimales, y números mixtos se hizo más clara y explícita a los niños a través de la interacción social entre los estudiantes y los profesores (Vygotsky, 1978). La conversación y el razonamiento junto a la manipulación de las representaciones propició un nuevo conocimiento matemático (Hiebert, 1992) el cual fue fundado en un ambiente de reflexión centrado en entender que el valor de las representaciones es relativo a las decisiones externas que las personas hacen, y no inherente a las representaciones mismas (Cramer et al., 2009; Lamon, 2005; Lesh et al., 2003). La clarificación del conflicto o error (Resnick et al., 1989) por medio de un análisis explícito del valor arbitrario de las representaciones generó un mejor entendimiento de los números mixtos conectado a un contexto real y significante para los estudiantes (González et al., 2001).

Creemos que la lección más significante para nosotros como docentes colaboradores en estas lecciones es la noción de que el entendimiento significativo es producto de una participación relacional entre los estudiantes, sus historias, su entendimiento previo, su entendimiento actual, y su entendimiento emergente, con sus compañeros, sus maestros, y la actividad matemática en que participan (Domínguez, LópezLeiva, & Khisty, 2014). Es necesario que esta participación relacional se construya a través de un mutuo entendimiento y atención (Yackel et al., 1990), pero sobretodo en un proceso que le permita a los estudiantes destruir el mito de que las matemáticas son mágicas que solo están en las manos de otros, y en vez reconstruir su actitud en una productiva que les permita apreciar las matemáticas como una práctica social en la que ellos pueden intervenir y hacer cambios, como también poder entender, operar, y manipular la misma conceptualmente y no solo físicamente y numéricamente. Esta actitud se refiere a una actitud metacognitiva matemática que genere y promueva agentividad estudiantil con entendimiento (Schoenfeld, 1987). De manera que los estudiantes puedan participar en la "creación" de procesos y soluciones matemáticas. Porque aunque estos procesos y soluciones son conocidos para otros, para los estudiantes el descubrir como funcionan las matemáticas les ayudará no solo a entenderlas, sino también a verse a sí mismos como creadores de la mismas y por ende un sentido como participantes y practicantes de las matemáticas, una agentividad matemática. Esto lo vimos evidente por medio del proceso de nombrar y reconstruir unidades y al utilizar múltiples modelos o representaciones, algo que ellos nunca habían hecho. Finalmente, aseveramos que éste es un caso particular y que generalizaciones aplicadas a cualquier contexto en cuanto al uso de plátanos en conexión a los bloques de base diez para explicar los números decimales y mixtos no proceden. Lo que procede y debería de ser implementado es una exploración multimodal y escuchar a los estudiantes y facilitar y desafiar su entendimiento en base a lo que saben y ven. Puede ser que siguiendo los juegos sea suficiente, o puede ser que ni el uso de plátanos u otro objeto familiar facilite tal entendimiento (Hiebert, 1992). Intensa comunicación sobre el razonamiento mutuo será útil y pertinente (Domínguez et al., 2014; Resnick et al., 1989; Vygotsky, 1978; Yackel et al., 1990).

Referencias

Cramer, K. A, Monson, D. S., Wyberg, T., Leavitt, S., & Whitney, S. B. (2009). Models for Initial Decimal Ideas - Put a Twist on the Familiar 10 X 10 Grid Model to Build Your Students' Understanding of Effective Decimal Models. *Teaching Children Mathematics, 16*(2), 106-117.

Dienes, Z. (1960). *Building up mathematics*. London: Hutchinson Educational Ltd.

Domínguez, H., LópezLeiva, C. A. & Khisty, L. L. (2014). Relational Engagement: Proportional Reasoning with Bilingual Latino/a Students. *Educational Studies in Mathematics, 85*(1), 143-160. doi: 10.1007/s10649-013-9501-7.

Fuson, Karen. C. & Briars, D. J. (1990). "Using a base-ten blocks learning/teaching approach for first- and second-grade place-value and multidigit addition and subtraction." *Journal for Research in Mathematics Education*, *21*,180-206.

González, N., Andrade, R., Civil, M., & Moll, L. (2001). Bridging funds of distributed knowledge: Creating zones of practices in mathematics. *Journal of Education for Students Placed at Risk*, *6*(1-2), 115-132.

Hiebert, J. (1992). Mathematical, cognitive, and instructional analyses of decimal fractions. In G. Leihardt, R. Putnam, R. A. Hattrup (Eds.), *Analysis of arithmetic for mathematics teaching* (pp. 283-322). Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Hiebert, J., Wearne, D. & Taber, S. (1991). Fourth graders' gradual construction of decimal fractions during instruction using different physical representations. *The Elementary School Journal, 91*(4), 321-341.

Hunter, J., Turner, I., Russell, C., Trew, K., & Curry, C. (1994). Learning multi-unit number concepts and understanding decimal place value. *Educational Psychology, 14*(3), 269-282.

Irwin, K. C. (2001). Using Everyday Knowledge of Decimals to Enhance Understanding. *Journal for Research in Mathematics Education, 32*(4), 399-420.

Lave, J. & Wenger, E. (1991). *Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation*. New York: Cambridge University Press,

Lamon, S. J. (2005). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding: Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers*. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, Inc. Publishers,

Lesh, R., Cramer, K., Doerr, H. M., Post, T., & Zawojewski, J. S. (2003). Model Development Sequences. In R. Lesh and H. M. Doerr (Eds.). *Beyond Constructivism: Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching* (pp. 35-58). Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, Inc. Publishers,

Morales, H., Khisty, L. L., & Chval, K. (1999). Beyond discourse: A multimodal perspective of learning mathematics in a multilingual context. In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of PME, 27*(3), 133–140

Resnick, L. B., Nesher, P., Leonard, F., Magone, M., Omanson, S., & Peled, I. (1989). Conceptual Bases of Arithmetic Errors: The Case of Decimal Fractions. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(1), 8-27.

Schoenfeld, A. H. (1987). What's all the fuss about metacognition? In A. H. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive science and mathematics education* (pp. 189-215). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Stacey, K., Sue H., Shona A., & Condon, C. (2001). The Effect of Epistemic Fidelity and Accessibility on Teaching with Physical Materials: a Comparison of Two Models for Teaching Decimal Numeration. *Educational Studies in Mathematics, 47*(2), 199-221.

Suh, J. M., Johnston, C., Jamieson, S., & Mills, M. (2008). Promoting decimal number sense and representational fluency. *Mathematics Teaching in the Middle School*, *14*(1), 44-50.

Van de Walle, J. A., Karp, K. S., & Bay-Williams, J. M. (2013). *Elementary and Middle School Mathematics: Teaching Developmentally* (8th ed). Upper Saddle River, NJ: Pearson.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Yackel, E., Cobb, P., Wood, T., Wheatley, G., & Merkel, G. (1990). The importance of social interaction in children's construction of mathematical knowledge. In T. Cooney & C. Hirsch (Eds.), *Teaching and learning mathematics in the 1990s* (pp. 12–21). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Exploración del pensamiento de los niños sobre el concepto de Fracción

Carlos Andrés **Castillo** Morales
Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad del Tolima
Colombia
Andres-4593@hotmail.com
Lady Jazmín **Perdomo** Rincón
Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad del Tolima
Colombia
Ladisita-93@hotmail.com

Resumen

El interés que nos llevó a realizar el presente trabajo, fue poder explorar el pensamiento de los niños sobre el concepto de Fracción en sus diferentes interpretaciones por medio de una secuencia didáctica, basada en las dificultades que presentan los niños a la hora de trabajar las fracciones al momento de la aplicación del instrumento de recolección de información. A través de la investigación-acción, como enfoque de trabajo en el aula de clase para que el docente pueda mantenerse en un continuo proceso de aprendizaje y mejoramiento de la práctica enseñanza; esto nos permitió ver que la mayor dificultad de los niños es el salto de los números naturales a los números fraccionarios y la utilización de las diferentes interpretaciones de la fracción.

Palabras clave: pensamiento, fracción, unidad, secuencia didáctica, aprendizaje.

Planteamiento del problema

> Juan cuenta a sus amigos que solo le queda la cuarta parte del dinero que le dieron para la semana, pues el lunes se había gastado la mitad del dinero y el martes la mitad de lo que le quedaba. Sin embargo, cuando su maestra le pregunta ¿Cuánto da ½ + ¼? él contesta: No se profe, no me acuerdo como se suman fracciones heterogéneas. (Rojas, Mora y Barón, 1999, p. 127-128).

Podemos evidenciar que Juan utiliza las fracciones en su vida cotidiana, pero a la hora de trabajar fracciones en el contexto escolar, no tiene los conceptos claros para realizar dicha actividad. El Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2006) en sus lineamientos curriculares da una sugerencia pedagógica, que consiste en explorar los sistemas concretos que utilizan los niños, para partir de ellos hacia la construcción de los sistemas conceptuales respectivos; cuando ya se ha hallado la construcción de este, el mismo alumno puede desarrollar sistemas simbólicos apropiados, aprender los usuales y aun traducir de unos sistemas simbólicos a otros. A Juan le falta la conceptualización de este proceso para llegar a una mejor comprensión y así poder desarrollar sus competencias que le ayudaran a enfrentar los retos actuales como la complejidad de la vida y del trabajo.

Los estándares curriculares plantean el desarrollo de los procesos curriculares y la organización de actividades centradas en la comprensión del uso y de los significados de los números y de la numeración, y el desarrollo de diferentes técnicas de cálculo y estimación (MEN, 2006, p. 58). Al terminar tercer grado el estudiante debe cumplir con ciertas competencias en las cuales encontramos la descripción de situaciones de medición utilizando fracciones comunes, y al terminar quinto grado, interpretar las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones. Para que el niño adquiera una comprensión de los números racionales, es necesario ayudar a contribuir una buena enseñanza – aprendizajedesde grado primero para así, tener buenas bases y resolver cualquier actividad o problema.

Sin embargo, la investigación nos muestra las dificultades que presentan los niños a la hora de comprender y realizar procedimientos con fracciones. En el ámbito escolar, los alumnos relacionan las fracciones con un lenguaje cotidiano (octavos y cuartos de finales de un campeonato; cuartos, quintos y sextos puestos en una clasificación; etc.), donde:

> … al escuchar las conversaciones de los niños dentro y fuera de la clase, se aprecia que utilizan espontáneamente expresiones en las que aparecen las fracciones. Frecuentemente, los niños de la escuela elemental utilizan determinadas fracciones al expresarse verbalmente. Ahora bien, aunque el niño pueda oíry usar expresiones tales como, por ejemplo, medio día, eso no significa que piense necesariamente en la mitad de un día con relación a un día completo. (Llinares y Sánchez, 1997, p. 18)

Presentándose así, que el lenguaje a veces puede estar identificado estrechamente con las nociones matemáticas, pero a veces no.Se plantea la necesidad de que los profesores conozcan las diversas interpretaciones del concepto y desarrollen en las clases secuencias de enseñanza tendientes a proporcionar a los niños la experiencia suficiente con cada uno de los muchos contextos que hacen significativa la noción de fracción, pues presentar una única interpretación conducirá a los niños a un conocimiento atrofiado, sin una comprensión amplia y operativa de todas las ideas relacionadas con el concepto de fracción. En latendencia de relación parte todo se presenta dificultades tales como el no reconocimiento propio de una fracción, sino como una relación entre dos cantidades; se refleja un desconocimiento sobre la necesidad de que las partes sean “congruentes”, no necesariamente de la misma forma pero si con igual superficie y no tienen en cuenta el área, sino los trozos.

Con respecto al conocimiento profesional del profesor, la investigación nos señala, que en Colombia, y no solo en este sino en muchos países, se acepta que para enseñar matemáticas solo es necesario saber mucho de ello, pero esto no es suficiente, hay que aprender a enseñar matemáticas, que se fundamenta en un conocimiento matemático-pedagógico, basado en tres tipos de conocimiento:

> …conocimiento de matemáticas, el cual se incluye los conceptos matemáticos, la actividad matemática y el currículo de las matemáticas; el conocimiento sobre el aprendizaje de las nociones matemáticas, tienen que ver con ideas y concepciones previas de los estudiantes de diferentes edades, y con propuestas específicas para guiar el aprendizaje de cada concepto; y el conocimiento sobre el proceso instructivo, que comprende la planificación de la enseñanza, representaciones instruccionales, recursos didácticos, rutinas instruccionales, características de las interacciones didácticas, y tareas académicas. (Rojas et al, 1999, p. 130).

Si no se tiene claro estos tres tipos de conocimiento, el docente, será un obstáculo para que el niño comprendalas diferentes interpretaciones de fracción, debido a que le está entregando una serie de reglas a seguir (comprensión instrumental) sin dejar que el mismo construya el concepto de esta (comprensión relacional).

Antecedentes y fundamentos teóricos.

Planteamiento de los Lineamientos y Estándares Curriculares del MEN

> La educación matemática de nuestro país ha tenido renovaciones curriculares a través de la historia con el propósito de desarrollar mejor las competencias básicas, encontrándose la resolución de ejercicios cotidianos, desarrollo de habilidades y destrezas para resolver problemas, para usar ágilmente el lenguaje simbólico, los procedimientos y algoritmos; desarrollando así el pensamiento lógico-formal. (MEN, 2006, p. 9).

Los estándares curriculares plantean el desarrollo de los procesos curriculares y la organización de actividades centradas en la comprensión del uso y de los significados de los números y de la numeración, y el desarrollo de diferentes técnicas de cálculo y estimación (MEN, 2006, p. 58). Al terminar tercer grado el estudiante debe cumplir con ciertas competencias en las cuales encontramos la descripción de situaciones de medición utilizando fracciones comunes, y al terminar quinto grado, interpretar las fracciones en diferentes contextos: situaciones de medición, relaciones parte todo, cociente, razones y proporciones. Para que el niño adquiera una comprensión de los números racionales, es necesario ayudar a contribuir una buena enseñanza-aprendizaje desde grado primero para así, tener buenas bases y resolver cualquier actividad o problema.

El aprendizaje no se puede restringir a un solo proceso de aprendizaje como el razonamiento, se deben involucrar otros procesos que están estrechamente relacionados con la actividad matemática, como los de modelación y comunicación que también requieren razonamiento. Los fraccionarios por pertenecer al pensamiento numérico, están presentes en la comprensión del sistema numérico, vinculando también a los sistemas métricos, sistemas de datos y en general a los demás sistemas.

> El paso del concepto de número natural al número racional necesita una re conceptualización de la unidad y del proceso mismo de medir, así como una extensión del concepto de número. El paso del número natural al número racional implica la comprensión de las medidas en situaciones en donde la unidad de medida no está contenida un número exacto de veces en la cantidad que se desea medir o en las que es necesario expresar una magnitud en relación con otras magnitudes. (MEN, 2006, p. 59).

Esta expectativa de aprendizaje planteada en los lineamientos/estándares curriculares, corresponde al gran salto de los números naturales a los números fraccionarios, explicado de manera clara en la parte donde se cita las dificultades que presentan los niños al momento de comprender las fracciones según la investigación.

Diferentes interpretaciones de la fracción

Llegar a la conceptualización de fracción conlleva a un proceso de aprendizaje a largo plazo, por esto, se tiene la necesidad de identificar las diferentes interpretaciones donde aparezca el concepto de fracción como un megaconcepto. Así como se expresa:

> Parece ser que la capacidad de trasladar esa comprensión a situaciones distintas no es del todo clara; es decir, puede ser que el niño tenga claro el significado de una fracción en una

> situación, sabiendo realizar su representación con diagramas y de forma numérica, así como reconocer el significado de las diferentes operaciones en dicho contexto y esto no implique que sepa utilizar la misma herramienta en contextos distintos, aunque también conlleva implícitamente la idea de fracción. (Llinares y Sánchez, 1991, p. 53).

La interpretación relación parte-todo se presenta cuando un todo se divide en partes congruentes de superficie o cantidad de objetos, y la fracción indica la relación que hay entre un número de partes y el número total de partes.

La interpretación de las fracciones como cociente se asocia a la fracción con la operación de la división con números naturales. "Dividir una cantidad en un numero de partes dadas". (Kieren, 1980).

La fracción como razón, es usada como un índice comparativo entre dos cantidades de una magnitud. En esta situación, no está establecido un todo naturalmente como en las anteriores interpretaciones de fracción. Por otra parte, en la interpretación de fracción como operador, las fracciones son vistas desde el punto de transformaciones, por esto la fracción se concibe como una sucesión de multiplicación y divisiones o a la inversa.

Dificultades que presentan los niños al momento de comprender las fracciones según la Investigación

Según Rojas (1999):

> Los profesores de matemática reconocen que en el estudio de las fracciones, los niños y jóvenes encuentran grandes dificultades de aprendizaje; muchos niños de los primeros cursos, que pueden resolver correctamente problemas sencillos con fracciones mediante la argumentación verbal o el uso de modelos concretos, se muestran en incapacidad de resolverlos cuando se les exige usar una representación simbólica. (p. 127)

El gran salto de los números naturales a los números fraccionarios ocasiona uno de los obstáculos que presentan los niños a la hora de trabajar las diferentes interpretaciones de fracción, ya que ellos están acostumbrados a manejar unidades simples del conjunto de los naturales. En los números naturales, la unidad "uno" siempre se refiere a un objeto solo. Cuando el niño está estudiando fraccionarios, la unidad deja de ser la unidad simple que él conocía; por ejemplo: Si voy a repartir 3 almendras.

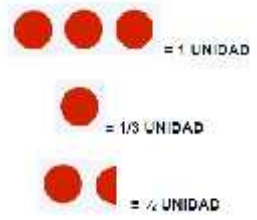


Figura 1. Fuente: (Lamon, S., 1999)

Al momento de repartir las tres almendras, éstas se convertirán en mi unidad y mi todo; si le doy una almendra a un niño, mi fracción quedaría representada por 1/3 y así sucesivamente.

Las fracciones son uno de los contenidos de las matemáticas que presentan dificultades para su enseñanza y aprendizaje, principalmente, en los niveles básicos de educación. Uno de los factores que posiblemente inciden en este proceso es la didáctica tradicional empleada en la

enseñanza, la cual sería uno de los factores determinantes del aprendizaje en el niño, que es impartida a través del desarrollo del concepto, instruyendo el aspecto formal de las definiciones.

En la fracción como medida, se encuentran dificultades en los niños para nombrar la parte fraccionaria que se genera al partir un todo continuo en dos partes iguales, afirmando que los conocimientos que tiene el alumno, limita sus habilidades para desarrollar estrategias apropiadas de partición, nombrando así, el desconocimiento de un vocabulario apropiado para la parte fraccionaria. Con respecto al significado de cociente de fracción, tienen dificultad para resolver la distribución de un todo discreto en un determinado número de personas, manifestando conflictos para establecer la relación de orden y equivalencia entre las partes fraccionarias obtenidas en dos repartos diferentes. Y en cuanto al significado de operador multiplicativo de la fracción, tienen problemas para agrandar al doble los lados de una figura dada o para disminuirlos a la mitad. La relación parte todo debería ser la base para una buena construcción del concepto de los tres aspectos citados anteriormente (Llinares y Sánchez, 1991).

Conocimiento Profesional del Profesor

Las fracciones son un contenido básico en la etapa de educación primaria, donde la responsabilidad de la enseñanza inicial y el aprendizaje de este campo conceptual recaen en los maestros, cuya preparación profesional demanda un incremento y mejora de sus conocimientos sobre este tema matemático.

> La mayoría de los estudios realizados sobre formación de profesores durante las últimas décadas, se centran directa o indirectamente, en las dificultades o deficiencias que estos presentan en conceptos o procesos matemáticos particulares. Estos estudios tratan una variedad de temas matemáticos. Entre los que obtienen una mayor atención se encuentran la geometría, la estructura aditiva y multiplicativa, las fracciones y la resolución de problemas. (Castro, 2010, p. 8)

Llinares y Sánchez (1991) estudiaron el conocimiento pedagógico del contenido sobre fracciones que presentan los maestros en formación inicial. Encontraron que muchos de los participantes tienen dificultades para identificar la unidad, representar fracciones y trabajar con fracciones impropias. Además, llegaron a la conclusión de que en la comprensión de los estudiantes de licenciatura, influye tanto la presentación que se haga del concepto, como las representaciones que el profesor utiliza en su instrucción.

La manera de enseñar a sus alumnos los números fraccionarios, depende de la metodología aplicada que el docente haya recibido y adquirido en su formación; un buen resultado dependerá de si la metodología es efectiva o no. Si el profesor dauna serie de reglas a seguir a sus estudiantes, inmediatamente está limitando al niño para que no obtenga su propio concepto sino tener la iniciativa de seguir una serie de pasos dados convirtiéndolo en algo mecánico.

Diseño y metodología

Este proyecto está basado en un enfoque de investigación-acción. La investigación-acción es un enfoque de trabajo en el aula de clase para que el docente pueda mantenerse en un continuo proceso de aprendizaje y mejoramiento de la práctica enseñanza. El modelo de Ponte (1995) fue el marco que tomamos para elaborar nuestro proyecto, basado en este modelo, en la clase de Indagación en el Aula 3 (Optativa profesional 3) se elaboróunmodelo propio de investigación-acción, como se presenta a continuación.

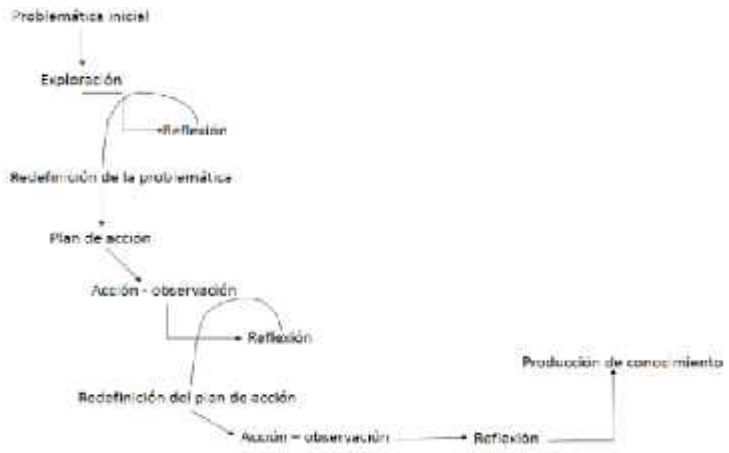


Figura 2. Fuente: Los investigadores (2013)

Partiendo de un planteamiento general de que algo puede mejorarse, por medio de preguntas como ¿Qué está sucediendo actualmente? ¿En qué sentido es problemático?, llegando así a un planteamiento particular que lo denomínanos como nuestra problemática inicial. En la exploración elaboramos un instrumento de recolección de información para saber cuál es el pensamiento de los niños con respecto a la problemática. De acuerdo a los resultados arrojados por el instrumento podemos hacer nuestras propias reflexiones y llegar así a una posible redefinición de la problemática. Así mismo, se elaboró un plan de acción dirigido a niños de quinto grado, el cual se ejecutó y en medio del proceso se observaron dificultades para así redefinir este; por último y mediante la reflexión se llegó a la producción de conocimiento.

Resultados

En la etapa de exploración se aplicó el instrumento de recolección de información que podemos observar en el siguiente enlace miproyectofraccion.blogspot.com, que consta de cuatro preguntas que fueron elaboradas con asesoría de la tutora de la clase de Indagación en el Aula 3. Los resultados obtenidos se mostraran a continuación.

En la pregunta número uno se planteó el siguiente interrogante: En una canasta hay 10 manzanas, pero hay 6 rojas y 4 verdes. ¿Qué fracción representa las 6 manzanas rojas?

Esta pregunta fue categorizada de tres maneras según las respuestas obtenidas de los estudiantes; como se puede evidenciar en la siguiente tabla.

Tabla 1
Datos de la pregunta uno

Pregunta uno	Frecuencia	Porcentaje
Tiene establecida la unidad	10	27,0
No tiene establecida la unidad	19	51,4
Respuesta sin categorizar	8	21,6
Total	37	100,0

La anterior pregunta permitió evidenciar que la mayor de los estudiantes no tiene establecida la unidad o no utiliza la interpretación correcta para esta situación, debido a que pudieron haber utilizado la fracción como razón donde no hay una unidad establecida.

Para la pregunta numero dos se planteó el siguiente problema: En el zoológico hay 20 felinos. Las tres cuartas partes son leones, y el resto tigres. ¿Cuantos leones y cuantos tigres son?

Al igual que la pregunta anterior, se categorizo de tres formas, como lo podemos ver en la siguiente tabla.

Tabla 2
Datos de la pregunta dos

Pregunta dos	Frecuencia	Porcentaje
Utiliza la interpretación de fracción como cociente	11	29,7
Confusión con la fracción	13	35,1
Respuesta sin categorizar	13	35,1
Total	37	100,0

Esto nos dice que, el 35% de los estudiantes tuvieron una confusión con la fracción,ya que debían obtener la tercera parte del grupo de felinos en vez de obtener las dos cuartas partes de este grupo.

En la pregunta tres se formuló la siguiente situación problemática: ¿Cuántas almendras tengo que darle a Juan de mi paquete de 10, si se gana 1/3 de mis almendras?

Al igual que en las anteriores preguntas, las repuestas se categorizaron en tres ítems (todas las preguntas realizadas en este instrumento tienen tres categorías). Que podemos observar en la siguiente tabla.

Tabla 3
Datos de la pregunta tres

Pregunta tres	Frecuencia	Porcentaje
No tiene establecida la interpretación de fracción como cociente	16	43,2
Está llegando a la interpretación de fracción como cociente	2	5,4
Respuesta sin categorizar	19	51,4
Total	37	100,0

Del anterior interrogante podemos deducir que tan solo el 6% de los estudiantes se acerca a la interpretación de fracción como cociente.

Basada en la pregunta anterior se formuló un segundo ítem interrogante de la siguiente manera: Si mi paquete tiene 6 almendras, ¿Cuántas almendras le tengo que dar a Juan?

Pero este ítem no se categorizo debido a una mala edición y creación del método de recolección de información que pudo haber confundido a los estudiantes. Por esta razón solo se mostraran a continuación las respuestas obtenidas.

Tabla 4
Datos de la pregunta cuatro

Pregunta cuatro	Frecuencia	Porcentaje
Tres almendras	28	75,7
Seis almendras	2	5,4
Otras respuestas	7	18,9
Total	37	100,0

Luego en la etapa del plan de acción implementamos una secuencia didáctica que podemos observar en el siguiente enlacemiproyectofraccion.blogspot.com, basada mediante los siete atributos de (Suydam, 1979, pág. 15) y por los cuatro atributos que agrego (Payne, 1976)citados por Llinares y Sánchez (1997, pág. 71). Esta secuencia didáctica nos arrojó los siguientes resultados que fueron categorizados de tres formas: buena comprensión, regular comprensión, y

mala comprensión; que por falta de espacio debimos hacer una síntesis de ellos pero se pueden ver completos en el enlace ya mencionado con anterioridad.

En el atributo uno que nos plantea lo siguiente: Un todo está compuesto por elementos separables. Una región o superficie es vista como divisible.Obtuvimos que el 86% de los estudiantes tuvieran una buena comprensión de este punto. Para el atributo dos que nos dice lo siguiente: La separación se puede realizar en un número determinado de partes. El <<todo>> se puede dividir en el número de partes pedido. Los estudiantes tuvieron una regular comprensión debido a que el 92% de los estudiantes obtuvieron esta categoría. En el atributo tres el autor nos plantea lo siguiente: Las subdivisiones cubren el todo; ya que algunos niños cuando se les pedía dividir un pastel entre tres muñecos, cortaban tres trozos e ignoraban el resto. Pudimos observar en los resultados que el 72% de los estudiantes tienen una mala compresión de este atributo. Luego en el atributo cuatro que nos plante lo siguiente: El número de partes no coincide con el número de cortes. Las respuestas de los estudiantes nos arrojaron los siguientes resultados, que el 58% de los estudiantes tienen una mala comprensión y solo 11% tiene una buena comprensión. El atributo cinco nos dice lo siguiente: Los trozos (partes) son iguales. Las partes tienen que ser del mismo tamaño (congruentes). En este atributo podemos observarque el 58% de los estudiantes están en la categoría de mala comprensión. En el siguiente atributo que nos enseña lo siguiente: Las partes también se pueden considerar como totalidad (un octavo de un todo se puede obtener dividiendo los cuartos en mitades). Los resultados obtenidos son que el 86% de los estudiantes tienen una regular comprensión de este atributo. El último atributo planteado por (Suydam, 1979, pág. 15) nos dice lo siguiente: El <<todo>> se conserva. Obtuvimos estos resultados, el 64% de los estudiantes tienen una mala comprensión y el 36% tiene una regular comprensión.

Ahora vamos a observar los resultados obtenidos por los cuatro atributos de Payne (1976). En el atributo número uno que nos plantea lo siguiente: Control simbólico de las fracciones, es decir, el manejo de los símbolos relacionados a las fracciones. Donde obtuvimos que el 54% de los estudiantes tienen una regular comprensión de este. Ahora, en el atributo dos que nos dice lo siguiente: Las fracciones mayores que la unidad. Los resultados nos arrojan que el 77% de los estudiantes tienen una buena comprensión. En el siguiente atributo que nos enseña lo siguiente: Subdivisiones equivalente. Las respuestas obtenidas de los estudiantes nos muestran que el 57% de ellos tienen una mala comprensión y el 43% manejan una regular compresión. Por último, en el atributo número cuatro nos muestran lo siguiente: La relación parte-todo en contextos discretos. Donde pudimos evidenciar que la mayor parte de los estudiantes tiene una mala comprensión, debido a que el 80% de ellos están en esta categoría.

Discusión de resultados

Según nuestros resultados, podemos evidenciar que algunos factores influyen en las dificultades que los niños tienen para la construcción del concepto de Fracción en sus distintas interpretaciones. Por tal motivo, encontramos que el salto de los números naturales a los números fraccionarios, es de mucha dificultad para los niños porque están habituados a trabajar con una unidad simple en los números naturales en cambio en los fraccionarios esa unidad deja de ser tan simple, como se pudo evidenciar en el ejemplo dado por Lamon (1999).Esto también deriva que los niños no puedan utilizar la interpretación correcta de fracción en los diferentes contextos de la vida actual; a pesar de las renovaciones curriculares del MEN que pretenden mejorar el desarrollo de competencias matemáticas que nos ayuden para la resolución de problemas. Y aunque el MEN nos recomienda una re conceptualización de la unidad y del proceso de medir,

así como del concepto de número, se tiene la dificultad de la unidad en los números fraccionarios.Sabiendo que el concepto de fracción es un proceso de aprendizajea largo plazo, que necesita de la compresión de las diferentes interpretaciones solo se llega a la interpretación de relación parte-todo en un contexto continuo. Otro de los factores que influyen en el proceso de aprendizaje del concepto de fracción es que los niños manejan verbalmente y cotidianamente dicho concepto, pero al momento de llegar a la representación simbólica en el ámbito escolar muestran dificultad para expresarlo, como podemos reafirmarlo con los resultados obtenidos con la secuencia didáctica.

Teniendo en cuenta la secuencia didáctica más innovadora y basada en algunos autores pudimos explorar el pensamiento de los estudiantes de mejor manera, que con una educación tradicional.

Conclusiones

Como resultado de la investigación realizada, podemos concluir que las causas fundamentalesde la dificultad que presentan los niños al momento de comprender el concepto de fracción,se debe al gran salto de los números naturales a los números fraccionarios y la carencia de enseñar las diferentes interpretaciones de la fracción.

De otro lado, podemos vislumbrar que la enseñanza del concepto de fracción es un proceso a largo plazo y complejo, que requiere innovación por parte de los docentes, lo cual permita explorar con mayor profundidad el pensamiento de los niños y niñas, a través de nuevas secuencias didácticas que incentiven a su vez, a los estudiantes a mostrar interés y su forma de pensar, para generar una educación basada en el aprendizaje significativo.

Limitaciones del estudio

Una de las limitaciones fue el tiempo, debido a que se debía entregar el proyecto en unas fechas acordadas con los tutores de la clase de investigación en el aula, por esto debimos agilizar la implementación de la secuencia didáctica y así poder obtener unos resultados pronto. Otra dificultad, fue el espacio porque en la Institución Educativa en la que se realizó el proyecto,tenían que cumplir con los temas ya establecidos para la clase de matemáticas; por esta razón se tuvieron inconvenientes para poder ir a implementar la secuencia didáctica o también por los actos culturales que se realizaban en la Institución ocupaban el espacio de tiempo que se tenía con los estudiantes en dichas actividades. También en el instrumento de recolección se tuvieron algunas limitaciones debido a la mala edición y creación del mismo lo que causo confusión en los estudiantes y esto se vio reflejado en los resultados.

Prospectivas

Teniendo en cuenta el proceso por el cual se desarrolló este proyecto y tomando como base los resultados obtenidos, asumimos que como futuros docentes debemos enseñar con precaución ese gran salto de los números naturales a los números fraccionarios, ya que es la base para un buen entendimiento de estos números, explicando también sus diferentes interpretaciones.

Bibliografía y referentes

Castro, R. E. (2010). *Fraccionar y repartir: un estudio con maestros en formación inicial*. Universidad de Granada. Facultad de Ciencias de la Educación. Departamento de Didáctica de la Matemática.Granada.

Colás, M., Buendía, L. (1998). *El Informe de Investigación*.Alfar S.A

Llinares, S., Sánchez, & M. (1997). *Fracciones la relación parte-todo*. Editorial Síntesis.

Llinares, C. S. (1997). *Matemáticas: cultura y aprendizaje*. Editorial Síntesis.

MEN. Ministerio de Educación Nacional (2006). Colombia. Disponible en: www.mineducacion.gov.co*7-305*.

Ponte, P. (1995). Action Research as a FurtherEducation Strategy for School Counselling and Guidance. *Educational Action Research*. *3*(3), 28

Implicaciones en la comprensión del valor posicional

Vivian Libeth **Uzuriaga** López
Departamento de Matemáticas, Universidad Tecnológica de Pereira
Colombia
vuzuriaga@utp.edu.co
Geoffrin Ninoska **Gallego** Cortés
Facultad de Educación, Universidad Tecnológica de Pereira
Colombia
milla@utp.edu.co

Resumen

Comprender el valor posicional de las cifras dentro de una cantidad implica con niños de básica primaria el desarrollo de una serie de estrategias didácticas que los lleven a fortalecer la resolución de operaciones básicas. En esta investigación se evidencian algunas dificultades que poseen los niños de segundo y tercer grado de básica primaria en la comprensión del valor de una cifra en una cantidad, y en la relación de inclusión de cantidades y por lo tanto las implicaciones de estas dificultades en la resolución de las operaciones básicas.

Palabras clave: inclusión, cantidad, operaciones básicas, valor posicional.

Introducción

Favorecer la comprensión de las partes involucradas en el todo de una cantidad para lograr así asignar un nombre de acuerdo al orden de ubicación, a las agrupaciones realizadas designando la base en la cual está agrupándose la cantidad y por tanto, el valor que adquiere cada cifra dentro de un número para representar la cantidad descrita, es parte fundamental en la comprensión del sistema de numeración y de la solución de operaciones.

Trabajar matemáticas con niños de primero, segundo y tercer grado de básica primaria es un espacio que requiere tener claro el saber matemático[1]. Proponer espacios pedagógicos para que ellos y ellas comprendan lo que significa el valor que adquiere una cifra de acuerdo al lugar que ocupa o a la posición que posee dentro de un número que representa una cantidad es realmente una tarea de constante innovación y apropiación conceptual.

Construir las agrupaciones y desagrupaciones usando diversas herramientas didácticas para que los niños y niñas en primero, segundo y tercer grado logren apropiarse en forma sólida de lo que significa el sistema en base diez, implica realmente abordar en clase experiencias para que expresen los intercambios o transformaciones que sufre una cantidad representada por una cifra de acuerdo al lugar en el que se encuentre y de acuerdo a las agrupaciones realizadas, resolver operaciones y hacerlo de manera acertada lleva a tener una concepción clara de lo que significa trabajar con nuestro sistema de numeración decimal.

[1] Saber matemático entendido como el conjunto de conocimientos asociados a los procesos de enseñanza de la matemática, lo cual implica la comunicación de los mismos.

En el siguiente documento se describen algunas situaciones de enseñanza[2] y de aprendizaje en las cuales se encuentran implicaciones asociadas a la comprensión del valor posicional y su relación en la solución de la estructura aditiva y multiplicativa.

Planteamiento del problema

Las situaciones internas ocurridas en el proceso de enseñanza y aprendizaje del sistema de numeración decimal son verdaderamente sorprendentes. Apropiarse de los conceptos elaborados a partir de las bases de agrupación de las cantidades y luego usarlos en la resolución de operaciones y de situaciones problemas posee implicaciones de diversa índole: implicaciones desde el saber, donde la apropiación de los conceptos juega un papel fundamental; implicaciones del hacer donde lo didáctico es parte de ese proceso de enseñanza y aprendizaje, e implicaciones del ser donde sus facultades y características biológicas le permiten asumir diversas actitudes hacia el conocimiento que va a ser desarrollado.

El Trabajo con las dos estructuras aditiva y multiplicativa (suma, resta, multiplicación y división) da cuenta de la dificultad conceptual que existe respecto a la comprensión de las agrupaciones y desagrupaciones realizadas al resolver estas operaciones. Cuando los niños y niñas incluso los adolescentes enfrentan diferentes operaciones donde están involucradas cantidades de más de cuatro cifras su solución se convierte en un trabajo de gran labor cognitiva. Comprender la razón por la cual 456 está incluido en 4056 es para ellos un misterio. Ahora, entender que 4056 está formado por 405 grupos de 10 y 6 grupos de 1 y que es lo mismo tener 4056 grupos de 1 o tener 40 grupos de 100 y 56 de 1, o tener 3 de 1000,10 de 100 y 56 de 1 o también tener 2 de 1000, 20 de 100 y 56 de 1, es lo que realmente implica desde el saber, comprender una cantidad, saber su conformación, y así mismo poder hacer con esta cantidad todo aquello que es solicitado.

Este proceso de construcción por parte de los niños y niñas promueve el fortalecimiento y desarrollo de su pensamiento lógico matemático en los grados primero, segundo y tercero partiendo de la comprensión del valor posicional.

El problema de no comprender el concepto de cantidad, de valor posicional, agrupación y desagrupación se observa hasta la universidad cuando por ejemplo la mayoría de los estudiantes que ingresan al primer semestre del programa Administración Ambiental no tienen claridad al resolver situaciones como: determine un número de cuatro cifras donde la cifra de las decenas es el doble de las unidades, la cifra de las centenas supera en tres a las decenas, las unidades de mil son el doble de las centenas y sumados los cuatro dígitos da 9. Situación que debe ser resuelta desde el planteamiento de ecuaciones lineales. Este ejemplo muestra la implicación negativa que trae la falta de comprensión del valor posicional.

Con base en lo anterior en donde se destaca la importancia del valor posicional para el desarrollo del pensamiento lógico, surge la pregunta de investigación: ¿cuáles son las implicaciones que tiene la comprensión del valor posicional en la resolución de operaciones básicas en niños de primero, segundo y tercer grado?

[2] Se entiende el término enseñanza no solo como la transmisión de información dada por otro, sino como todo un sistema organizado que requiere de la interacción continua desde el conocimiento adquirido y el conocimiento transformado para ser enseñado y propiciar un aprendizaje.

Antecedentes y fundamentación teórica

Las matemáticas son la música de la razón." -Silvester

Un sistema de numeración se entiende como el resultado de un conjunto de signos, relaciones, normas que expresan el valor de los números y sus elementos fundamentales son: la base, los numerales y las normas establecidas de combinación.

Desde este punto de vista el sistema de numeración "…no es un artilugio de mera traducción de cantidades en formas gráficas, sino un sistema de representación de las cantidades. La construcción de cualquier sistema de representación involucra un proceso de diferenciación de los elementos y relaciones reconocidos en el objeto a ser representado (…) y una selección de aquellos elementos y relaciones que serán retenidos en la representación… Para poder representar las cantidades, el sistema de numeración posee ciertas reglas que permiten organizar la cuantificación para hacerla económica, y estas reglas, lejos de ser «naturales», son producto de la elaboración histórica de ciertas convenciones." (Terigi y Wolman 2007) Así, todo sistema de numeración se rige por tres principios: principio de orden, principio de base y principio de posición estos tres están relacionados entre sí y se conjugan para construir las representaciones de las diferentes cantidades.

El siguiente mentefacto conceptual, figura 1, muestra las características del valor posicional de acuerdo a dos autores (Constance Kamii 1986) y (Delia Lerner 2005)

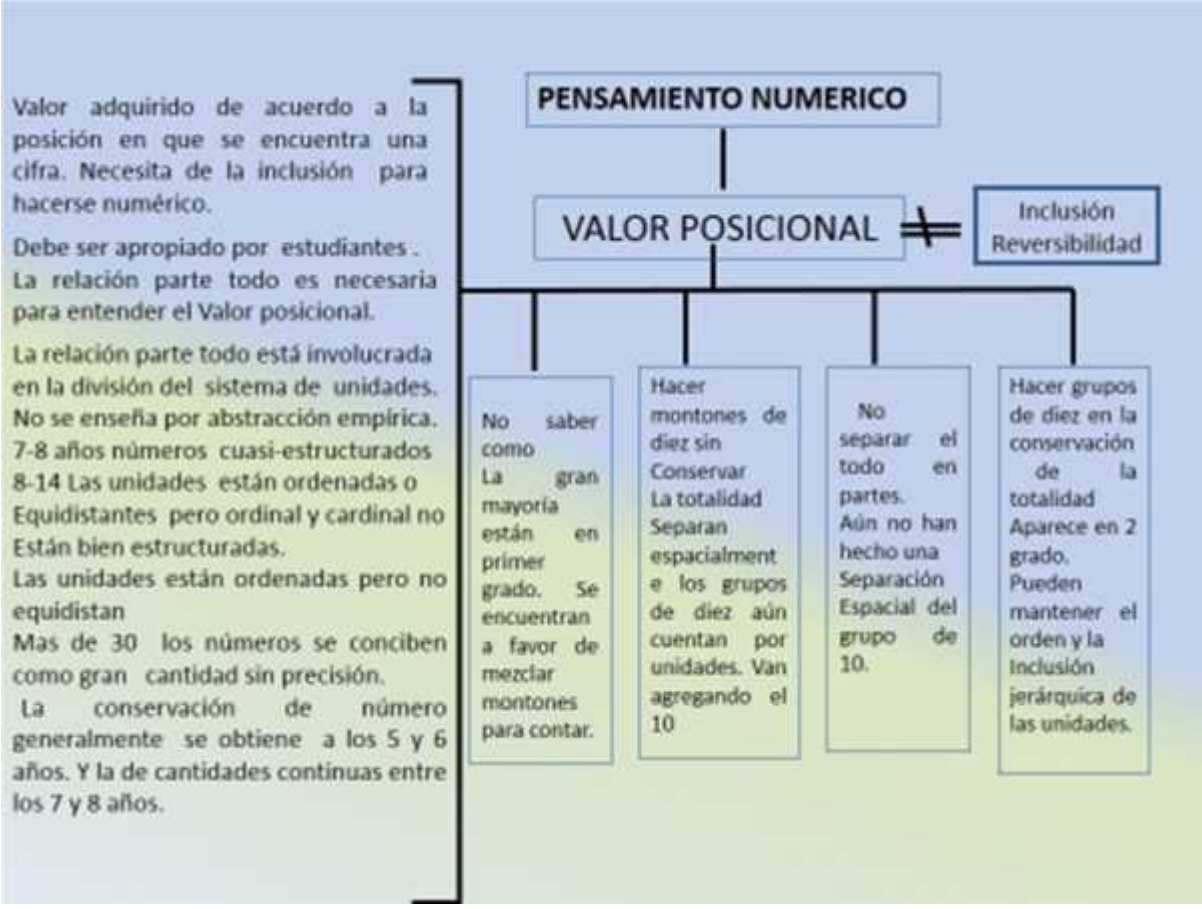


Figura 1. Mentefacto valor posicional

La comprensión del principio de posición es una herramienta fundamental para el desarrollo de las diferentes operaciones aritméticas básicas. Para su apropiación se usan diversas herramientas como: la yupana. Este instrumento tal como lo afirma Clara Higuera[3] es de carácter pedagógico y produce un valioso aporte a las matemáticas en el momento que familiariza al estudiante con la realidad de operaciones tales como la división, la multiplicación, la suma y la resta de una manera específica y concreta para los estudiantes.

La relación del valor posicional con las operaciones

Cuando a los estudiantes de diferentes grados se les proponen análisis de cantidades respecto a la posibilidad de operar con ellas de diversas formas, la mecanización de las operaciones es evidente, la capacidad para resolver una suma o una resta partiendo de la escritura tradicional de esta es casi que inmediata, sin embargo, al proponerles algunas situaciones donde deban argumentar las razones por las cuales resolvieron dicho ejercicio de una u otra manera, la devolución[4] por parte de los estudiantes se convierte en un problema. Por ejemplo, cuando los niños se enfrentan a una resta cuyo minuendo este conformado por cifras que tengan ceros intermedios lo usual para ellos es sumar desde el sustraendo hacia el minuendo, es inusual que los niños elaboren la diferencia; ahora, ante la pregunta de ¿cuál es el valor del reconocido "le pido prestado uno al vecino" ? generalmente el concepto desde el valor está errado.

Estas propuestas se asocian a situaciones en las cuales los niños y las niñas que han tenido una aproximación poco didáctica a su sistema de numeración decimal, crean, un obstáculo epistemológico que no les permite más adelante abrir un camino hacia un desarrollo del pensamiento lógico matemático que los lleve a lograr obtener mejores resultados en la solución de ejercicios básicos y la aplicación de estos en situaciones problemas y por lo tanto mejorar su desempeño académico en esta disciplina.

De este modo, teniendo en cuenta las dificultades que se presentan en la comprensión del valor posicional se plantean propuestas para desarrollar un proceso didáctico que lleve a situaciones dentro de una clase tales como: Realizar agrupaciones, identificar cambios en las agrupaciones, identificar el valor de una cifra en una cantidad, resolver situaciones aditivas y multiplicativas, integrar la totalidad y las partes partiendo de las agrupaciones, des agrupaciones y cambios en diferentes bases, desarrollar espacios de atención superiores a los 15 minutos logrando en los niños el gusto y placer por el hecho de aprender matemáticas. Todas y cada una de esas situaciones es propuesta dentro de un marco de indagación lúdica usando material didáctico diseñado y pensado específicamente para este propósito.

Esos materiales son: La ratonera, las cajas de inclusión, las bolsas de cambio, el tablero numérico, los dados valiosos, y el contador; de igual forma se acude a otros dispositivos didácticos existentes tales como: la yupana y las cartas de póker. A continuación podrán observar dos de los materiales la ratonera y los dados valiosos. Todos estos materiales permiten la fundamentación del valor posicional desde fundamentos lúdicos y matemáticos.

---

[3] Lecturas matemáticas volumen 15 página 66.

[4] Para Brousseau (2007) se entiende como un componente esencial del contrato didáctico, integra la actividad a partir del aprendizaje a didáctico llevando a diferentes situaciones contextos problemas y trabajos. Ubica al estudiante en una posición en la cual él puede asumir una mirada del saber. Para Chevalard esta mirada se da desde una descontextualización y despersonalización del saber.

Figura 2. Ratonera

Figura 3. Dados valiosos

En la ratonera el niño puede jugar con 5 esferas intentando introducir dichas esferas en las diferentes casillas (o ratoneras) y de este modo obtener puntos que lo llevan al uso del lenguaje cuando expresa: "3 de 100, y 2 de 1" y halla la totalidad 302 de igual forma se dan las bases para construir la potenciación y se evita mecanizar pues la ubicación de las potencias de 10 pueden estar en cualquier lugar como se evidencia en la foto. En la ejercitación de este juego el niño logra ir multiplicando por 10 ,100 o 1000 de manera indirecta.

Con los dados valiosos los niños logran expresar de igual forma cuántos de 10 o de 100 o de 1000 o de 1 tienen según los colores que obtuvieron en el lanzamiento. Por ejemplo si salen 3 caras azules las cuales tienen un valor de 10 el niño expresa "tengo 3 de 10" se puede jugar con 4 o 5 dados o más de acuerdo a la cantidad de cifras que desee construir. El valor de los colores puede variar, al igual que los colores. Por ejemplo Azul vale 10, amarillo 1000, rojo 100 y blanco 1 estos colores se reparten aleatoriamente en los dados que se usen.

Estos materiales didácticos se elaboran previamente con el apoyo de los padres de familia y son usados durante el desarrollo de la secuencia didáctica obteniendo así un acercamiento afectivo al hecho de aprender y permitir que se les enseñe, mediando continuamente a través de evaluaciones que muestran si realmente se está avanzando o no en la comprensión y aplicación del sistema decimal de numeración.

El proceso de enseñanza y de aprendizaje del valor posicional desde lo pedagógico, desde lo didáctico, y desde lo epistemológico es una construcción que se realiza paulatinamente y por tal razón su mediación debe ser pensada y analizada buscando medios que le permitan al niño abrirse campo dentro de este conocimiento. Si bien es cierto la teoría cognitiva nos aporta respecto a las concepciones previas con las que el niño va elaborando sus estructuras, también es cierto que para ir precisamente evolucionando en todo su desarrollo cognitivo el niño necesita de mediaciones para reinventar sus procedimientos y construir sus propias lógicas.

Ahora, la relación entre el sistema de numeración como estructura organizada que confluye en la apropiación de un orden numérico implica comprender dicha ordenación, ese carácter ordinal y cardinal que poseen los números se ve reflejado a partir de nuestro sistema decimal.

Organizar las agrupaciones hechas cada diez, los cambios que estas agrupaciones requieren y luego la permanencia de estas cantidades construidas a partir de las normas propuestas por el mismo sistema y la situación dada desde el valor posicional al tratar de que se comprenda, por qué razón el 56 se llama así y el 65 que está conformado por las mismas cifras recibe un nombre diferente, son relaciones fundamentales para llegar a comprender: ¿cómo es posible que una cifra que no tiene nada "le pida al vecino prestado un uno" y de la nada se convierta en 10 para que pueda ser restado?. De igual forma se requiere ir más allá de la situación de inclusión en un proceso de des agrupación, y a la situación de reiterar una cantidad para obtener una total. Así todas las anteriores son relaciones necesarias para comprender la conformación de las operaciones. (Sumar, restar, dividir y multiplicar).

Por ejemplo al realizar 30.067 – 895 = el niño dice: al cinco le falta dos para llegar a 7; aquí está sumando no realizando la diferencia. Luego expresa: seis menos nueve no se puede, y pregunta: ¿Profe puedo poner este número arriba? Continúa… entonces el cero le presta uno al seis pero como no tiene nada le pide prestado al otro cero pero como no tiene nada le pide al tres que le da uno y se convierte en 10. En estos casos se observó que un 95% de los niños presentaban errores al resolver este tipo de operaciones.

De esta manera, acercarse a los niños para desarrollar o resolver con ellos situaciones donde las cantidades estén involucradas en su solución hace pensar en una transformación en las formas de mediación realizadas en el aula de clase. Para esto se propone: a) Tener clara la intención pedagógica a trabajar en el aula b) Diseñar la secuencia didáctica a desarrollar c) Involucrar espacios de indagación d) Permitir el uso de implementos didácticos.

Se desea entonces relacionar, la comprensión del valor posicional a través del uso de material didáctico con una intencionalidad pedagógica clara, partiendo de secuencias didácticas notoriamente concebidas pero sobre todo pensadas para generar en los niños y niñas el deseo por el conocimiento, el deseo por querer saber más sobre la solución de situaciones problema y su relación con las cantidades numéricas buscando que la comprensión que haga el niño desde sus inicios con el sistema de numeración y en el con el valor posicional que adquieren las cifras al interior de una cantidad sea apropiado para su aplicación en la solución de cualquier situación problema.

Si se observa que la comprensión del valor posicional tiene implicaciones de orden conceptual tales como entender que el valor que adquiere una cifra dentro de un número está directamente relacionado con la cantidad de cambios que esta ha sufrido durante sus agrupaciones. Por ejemplo: en 78.960 ante la pregunta cuántas decenas tiene 78.960 es comprender la totalidad de la cantidad, es observar cuántos grupos de diez es posible realizar con 78.960 unidades. Otro aspecto distinto es decir ¿en dónde está ubicada la cifra 6?. Situación que desde un contexto superior es hacer notar al estudiante la "construcción" del sistema base diez a partir de la potenciación dependiendo de la posición de cada cifra.

Entonces la solución de cualquier situación problema para Polya[5] tiene vínculos emocionales, por tal razón es necesario conocer cómo aprende nuestro cuerpo para reconocer que es posible enfocar aspectos como la corporeidad y las posibilidades que se dan a partir de esta, para abstraer del mundo aquellos elementos que lo conforman logrando confluir desde sus partes, la totalidad que regula las estructuras funcionales de nuestro sistema de aprendizaje. Así, esas estructuras deben transformarse, deben movilizarse y dinamizarse en la escuela, en el salón de clases pero sobre todo en el cuerpo del niño, en su piel, en sus sentidos, en su cerebro. Vincular entonces el uso de material didáctico al proceso de enseñanza[6] del sistema de numeración emerge como solución a la situación de lograr que los niños comprendan el valor posicional.

Al usar el material didáctico como la ratonera, la yupana, el ábaco, las cartas, las bolsas de cambio, los dados valiosos, el contador numérico, los niños logran realizar las operaciones sin someter su apropiación a mecanizaciones de solución inmediatas si no, a espacios de análisis que los llevan más adelante a realizar razonamientos lógicos cuando se enfrentan a cualquier tipo de operación matemática. De esa manera se consigue que la matemática sea interesante como lo expresa Brousseau (1998) “La matemática es interesante, una actividad cultural placentera para los niños también. Pero si es presentada de manera que no genere interés, se torna dificultosa" .

Cuando en la enseñanza, en nuestro quehacer como docentes, no tenemos en cuenta los aspectos afectivos y motivacionales de la enseñanza de la Matemática se contribuye a las causas del fracaso escolar, como lo expresa Bernaza (2014) “dentro de las causas del fracaso en el aprendizaje escolar, un factor del que casi nunca se habla, y es el que la Matemática no despierta el interés de la mayoría de los niños. El fracaso de muchos de ellos no se debe a una falta de inteligencia o a una incapacidad innata para la Matemática, sino a un total desinterés, generalmente, porque no se le encuentra ninguna vinculación con las situaciones de la vida.”

Metodología

En el desarrollo de este estudio se diseñaron entrevistas que fueron aplicadas en el aula de clase a una muestra aleatoria de niños de los grados primero, segundo y tercero de básica primaria del colegio Salesiano en diferentes ciudades del país. La pregunta central de la entrevista fue: ¿Cuál es la diferencia entre 345 y 453?, con el propósito de identificar si ellos manejaban el valor posicional de las cifras dadas. Asimismo, para indagar sobre el valor posicional, con esas mismas cantidades se preguntó ¿cuántas unidades y decenas tienen las cantidades dadas?

También se realizaron talleres con 50 profesores de básica primaria del colegio Salesiano en diferentes ciudades del país, el objetivo fue: Identificar las concepciones sobre la enseñanza del valor posicional y su importancia en la resolución de operaciones aritméticas básicas y en el desarrollo del pensamiento lógico. Se realizó un estudio exploratorio y descriptivo.

---

[5] Polya, resolución de problemas. En: Revista Magisterio Vol. (2009) p. citado por: Gallego, Geoffrin. Niños y niñas solucionadores de problemas. Bogotá.

[6] Se entiende el término enseñanza no como la transmisión de información dada por otro, sino como un sistema organizado que requiere de un proceso cíclico de mediaciones continuas desde el conocimiento adquirido y el conocimiento transformado para ser enseñado; donde el lenguaje, la didactización y lo epistémico del conocimiento se ponen en juego para consolidar un ambiente de aprendizaje en el cual los procesos y los productos de la enseñanza emergen simultáneamente.

Además, se tomó una muestra de 90 adolescentes de las instituciones involucradas en la investigación.

Resultados y análisis

Se asume que comprender una cantidad implica identificar las partes y el todo que la conforman.

A continuación se muestran algunos de los hallazgos o resultados obtenidos durante la investigación.

Se pudo observar que la básica primaria se ha dedicado a fortalecer la resolución de ejercicios asociados a identificar las unidades, las decenas, las centenas de una cantidad o en el mejor de los casos ejercitan en la descomposición de cantidades siempre desde colocar los ceros a cada cifra que conforma el número (457= 400 + 50+7). Sin embargo, cuando se les pregunta a los jóvenes de secundaria por: "¿cuántas centenas hay en 14.739?" sus respuestas son asociadas a la ubicación de la cifra en las centenas, (7) esta confusión se presenta por lo general en cantidades superiores a tres cifras. Incluso, existen otras situaciones asociadas, por ejemplo, al preguntarles a estudiantes universitarios ¿cuántas centenas tiene la cantidad 45008? su respuesta inmediata es cero, la ubicación y el valor es una confusión que la formación básica nos ha dejado, la misma pregunta se hizo a los 90 adolescentes y 50 profesores de básica primaria involucrados en la investigación y sus respuestas coincidieron en un 91.42 %, 45008 tiene 0 centenas.

De las respuestas anteriores surge un interrogante: ¿cómo lograr que los profesores de matemáticas mejoren los procesos de enseñanza y aprendizaje del valor posicional ?, proceso que debe iniciar en el preescolar; pero de forma preocupante se observa que allí, se muestra a los niños la grafía de los números como el gran avance conceptual, dejando de lado que la comprensión del número requiere de un proceso, por ejemplo: Comprender el cinco es saber que tener cinco, incluye también tener cuatro, y de igual manera si tengo cinco elementos también tengo tres o dos o uno de los mismos. Comprender el cinco es saber que si tengo cinco unos también tengo cinco y que si tengo un grupo de dos y un grupo de tres también tengo un grupo de cinco, los niños en preescolar continúan lastimosamente haciendo planas del cinco para… ¿entenderlo o para aprenderlo? o mejor, ¿para memorizar su grafía?.

De este modo, la preparación por parte de los profesores debe fortalecerse hacia el hecho de mejorar el conocimiento de las diversas formas que requiere un saber específico como es el caso del valor posicional, profundizar en el proceso de enseñanza y aprendizaje requiere de conocimientos sobre didáctica, esto involucra más tiempo pero demanda sobre todo de profesores que deseen hacer pensar a sus estudiantes, implica desde el saber un mayor sentido epistemológico del conocimiento y así mismo propender por espacios de reflexión y análisis que evidencian la necesidad de hacer propuestas didácticas, pedagógicas y metodológicas cuyo propósito sea el estudiante y su desarrollo como ser integral, como persona pensante, analítica, crítica, propositiva y auto reguladora.

Conclusiones y recomendaciones

El valor posicional es un concepto que ha tenido diversas interpretaciones por lo tanto ha sido enseñado como ubicación desde las partes de un número no desde el valor que adquiere, razón por la cual los niños y adolescentes no han logrado una comprensión de su sistema decimal

de numeración para lograr desenvolverse con él en la cotidianidad de la resolución de operaciones y de situaciones problemas.

Diferenciar la ubicación y el valor posicional es parte de la comprensión del sistema decimal de numeración.

La enseñanza y el aprendizaje del valor posicional son fundamentales en la formación integral de los niños y niñas en el preescolar y la básica primaria. Acudir a diversas herramientas didácticas conlleva en el proceso de enseñanza y de aprendizaje un trabajo conjunto entre conocimiento, estudiantes, padres de familia y profesores que permite la apropiación de los conceptos necesarios para la comprensión del concepto de valor posicional.

Comprender las agrupaciones y los cambios hechos cada diez permite a los niños, niñas y adolescentes aplicar estos cambios en los procesos de inclusión involucrados en el valor posicional, y cuando avanzan en su etapa escolar analizarlo desde las potencias de diez, o potencias base 2, cuando pasan al sistema binario, el cual es de total importancia en la programación de computadores, por mencionar un ejemplo.

El uso de materiales variados como la ratonera, la yupana, el ábaco, las cartas, las bolsas de cambio, las cajas de inclusión, los dados valiosos y otros, abren un camino a la construcción comprensiva del valor posicional y resaltan la importancia del diseño de materiales didácticos con un propósito en el aula de clase, es decir como una componente de la didáctica y no como un espacio únicamente de juego con los niños.

El concepto de valor posicional debe ser trabajado en forma constante desde preescolar concibiendo el concepto a partir de las diferentes agrupaciones y los cambios ocurridos en las cantidades.

La formación de profesores de preescolar y básica debe ser fortalecida desde el análisis del sentido epistemológico del conocimiento y desde los conocimientos sobre la didáctica de las matemáticas con el ánimo de desarrollar mayores habilidades por parte de los profesores en el proceso de enseñanza y de aprendizaje y para lograr que sus estudiantes deban pensar y no solamente mecanizar la solución de ejercicios o situaciones problemas en matemáticas.

Bibliografía y referencias

Beillerot, J. (1998). *Saber y relación con el saber*. Argentina: Paidos educador.

Brousseau, G. (1998). *Théorie des situations didactiques*. Grenoble: La Pensée sauvage.

Bernaza, G. (2014). Aprendizaje de conceptos matemáticos desde la lógica dialéctica. *Conferencia para los maestros de primaria y secundaria del Municipio de Medellín. VI congreso internacional en formación y modelación en Ciencias Básicas*.

Dickson, L. & Brown, M. (1996). *El aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona: Labor.

Gallego, G. N. (2006). *Didáctica de las situaciones problema en preescolar y primaria*. Universidad Tecnológica de Pereira, Colombia.

Gallego, G. N. (2009). Niños y niñas solucionadores de problemas matemáticos. *Revista Magisterio, Junio 2009*. Bogotá, Colombia: Magisterio.

Lerner, D. (2005). *¿Tener éxito o comprender? Una tensión constante en la enseñanza y el aprendizaje del sistema de numeración*

Terigi, W. (2007) Sistema de numeración: consideraciones acerca de su enseñanza. *Revista Iberoamericana de educación 43*.

La construcción del concepto de número natural mediado por materiales manipulativos en el Preescolar[1]

Lina Vanessa **Gutiérrez** Vecca
Universidad del Valle
Colombia
gutty.gu@gmail.com

Resumen

Esta comunicación está basada en los resultados del trabajo de investigación enfocado en aportar elementos conceptuales y procedimentales sobre la construcción del concepto de número natural en preescolar, mediante una secuencia didáctica que involucra juegos con materiales manipulativos. Esta propuesta se fundamenta en aspectos curriculares, didácticos y matemáticos, los cuales, se articulan en la elaboración de la secuencia didáctica y posibilitan el análisis de los resultados. La secuencia didáctica está conformada por cuatro situaciones que parten del conteo hasta la composición y descomposición de cantidades. La implementación y análisis de los resultados de la propuesta muestran que el niño se apropia de diferentes conceptos relacionados con el concepto de número como la cardinalidad, la ordinalidad, la cuantificación y principios de conteo, la comunicación de cantidades, la resolución de problemas aditivos, y el dominio de secuencia numérica verbal.

Palabras clave: Concepto de número natural, educación preescolar, materiales manipulativos, secuencia didáctica, cardinalidad.

Planteamiento del problema y antecedentes

En Colombia, sólo hasta la década de los setenta, se empieza a pensar en los niños menores de 7 años, a partir de la obligatoriedad del nivel de preescolar dentro del sistema educativo con la ley 115 de 1994; nivel que comprende tres ciclos a saber: Prejardín, Jardín y Transición, siendo el último obligatorio para todos los niños y niñas colombianos.

A partir de esto, se crean los Lineamientos Curriculares de Preescolar (1998a) orientados a la creación de ambientes de aprendizaje enfocados hacia la integralidad de todas sus dimensiones (cognitiva, socio-afectiva, comunicativa, ética, espiritual, corporal, estética) y contemplaron como principios: la integralidad, la participación y la lúdica, en este último, el juego tienen un papel protagónico. Sin embargo, no hay unas orientaciones claras para trabajar pensamiento matemático en estos primeros años.

[1] Documento realizado en base al trabajo de Grado titulado "*La construcción del concepto de número natural en preescolar: una secuencia didáctica que involucra juegos con materiales manipulativos*" (Cerón & Gutierrez, 2013). Directora de Trabajo de Grado: Ligia Amparo Torres Rengifo. Universidad del Valle (Colombia)

El fortalecimiento las dimensiones, antes expuestas, es un propósito de estos Lineamientos, puesto que el niño trae consigo experiencias e ideas sobre el mundo que lo rodea, influido por su familia, su comunidad y su cultura que se consolidan en cada una de las dimensiones. Sin embargo, en ocasiones se desconocen las experiencias previas de los estudiantes a la escolaridad, dejando de lado el considerar a los pequeños como actores sociales y culturales, quienes deben aprender a hacer, a vivir juntos, a ser y a conocer.

Paralelo a la publicación de los Lineamientos Curriculares de Preescolar (1998a), el Ministerio de Educación Nacional (MEN) publica los Lineamientos Curriculares para las áreas obligatorias y fundamentales de la educación colombiana. De esta manera, aparecen los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998b), en los cuales se aborda una orientación sobre la manera en que las Instituciones Educativas deben construir sus currículos y la actividad matemática en el aula, a partir de los conocimientos básicos, procesos generales de pensamiento y contextos, como ejes centrales de esta propuesta curricular a partir de grado primero, los cuales, resaltan la importancia de involucrar al niño desde los primeros años en diversas experiencias significativas que posibiliten el desarrollo del pensamiento matemático, estos constituyen los únicos referentes para enseñar matemáticas en los primeros grados.

Particularmente los Lineamientos enfatizan en la importancia del desarrollo del pensamiento numérico a partir de la construcción del concepto de número natural. Este marco curricular permite reconocer los niveles de Jardín y Transición como grados fundamentales en la educación de los sujetos, y la importancia del pensamiento numérico en el aprendizaje de las matemáticas. Sin embargo, Chamorro (2005), evidencia de una parte, que la mayoría de los padres y docentes creen que en el preescolar no se puede hacer un trabajo matemático de calidad, y de otra, que aún se nota la resistencia hacia la formación matemática en este nivel.

Además de las orientaciones curriculares que rigen la educación de los niños y niñas respecto de las matemáticas, diferentes autores como Castro, Rico & Castro (1988), Chamorro (2005), Kamii & DeVries (1980), entre otros, desde la didáctica resaltan la importancia de construir significativamente el concepto de número natural desde los primeros años.

Castro et al. (1988), por ejemplo, expone que los números son una herramienta conceptual, elaborada por el hombre para dar satisfacción a necesidades sociales y solucionar problemas complejos de comunicación, administración de recursos, etc. Por esta razón, el niño desde temprana edad recibe muchos conocimientos numéricos de su medio social. Este aspecto, frecuentemente es olvidado en las aulas de clase, en donde se tiene la visión de un sujeto vacío, que debe ser llenado de conocimientos, los cuales deben aprender casi que de memoria para dar cuenta de su saber. Al integrar la educación numérica como una parte de la educación inicial, los educadores pierden la perspectiva del sentido que tienen los números para el hombre y se enfocan en la transmisión de los aspectos operativos de los mismos, principalmente los cálculos numéricos.

Desde la experiencia pedagógica de las autoras se reconocen dos aspectos fundamentales a tener en cuenta. En primer lugar, se sitúa el hecho de que la mayoría de las actividades preescolares se limitan a la nemotecnia de la secuencia numérica, clasificación, ordenación y agrupación, y el reconocimiento de los símbolos numéricos. Pero más allá de estas actividades los niños están en la capacidad de desarrollar el pensamiento numérico, pues es una noción que abarca el sentido numérico, como una intuición sobre los números que surge de todos los diversos significados del número natural.

En segundo lugar, se reconoce que prevalece una manera tradicional de enseñar el conteo y acercar a los niños a las matemáticas implementando actividades de clasificación y seriación sin relación con un significado real del concepto de número natural, a pesar de que desde la reglamentación de estos primeros años, se alude a ciertos principios del nivel preescolar destacando que el aprendizaje debe apuntar a ser significativo; esto es, relacionar las experiencias de los estudiantes con los contenidos a ser enseñados (Ausubel, Novak & Hanesian, 1983), de manera que los estudiantes desarrollan una relación entre lo que conocen y lo que deben aprender.

De acuerdo con lo anterior, una de las estrategias para lograr un aprendizaje significativo es introducir el juego, aspecto fundamental de la lúdica, dadas las características de los niños y niñas entre 4 y 6 años. Kamii & DeVries (1980), reflejan cómo los juegos son una herramienta potente para la construcción significativa del concepto de número natural.

A su vez, Alan Bishop (1999), identifica el juego como una de las seis actividades del entorno cultural que impulsan el desarrollo de ideas matemáticas. Según este autor, el juego promueve habilidades de comunicación, plantea desafíos, genera situaciones de incertidumbre y desarrolla el razonamiento matemático. Al mismo tiempo, obliga a definir reglas, ritmos y armonías, y permite crear un orden. Pero más que jugar por jugar, como en ocasiones se plantea en la escuela, se deben posibilitar actividades lúdicas que invitan a los niños a interactuar con las diferentes formas del concepto de número natural (cardinal, ordinal, etiqueta, etc.). Los juegos de reglas, por ejemplo como lo menciona Chamorro (2005), van evolucionando paralelamente al desarrollo psicológico del niño.

Por último, desde la experiencia personal se constata que pocas veces se integran aspectos formales de las matemáticas (conceptos como el sucesor, el antecesor, el cardinal, el conjunto, entre otros) al momento de diseñar actividades que construyan el concepto de número natural. Si bien, la investigación no pretende que la formalidad del concepto se asuma en las aulas de preescolar, sí se destaca que el maestro debe tener claro que las propiedades del número natural y las teorías plantean aspectos fundamentales de este concepto, lo cual es un referente importante para desarrollar las propuestas de aula.

A partir de estas reflexiones desde lo curricular, didáctico y matemático se genera la pregunta: ***¿Cómo a través de una secuencia didáctica que involucra juegos con materiales manipulativos, se aporta al significado y comprensión del concepto de número natural en preescolar?***

Marco teórico de referencia

Para dar respuesta a la pregunta problema planteada en el trabajo de investigación, se toman en consideración tres perspectivas a saber: curricular, didáctica y matemática, las cuales posibilitarán el diseño de la secuencia didáctica y posterior análisis de los resultados.

Desde la perspectiva curricular se plantean los Lineamientos Curriculares de Preescolar (1998a) y Lineamientos Curriculares de Matemática (1998b), los cuales son una herramienta para el diseño e implementación de los currículos en las instituciones educativas, pues a partir de estos se orientan reflexiones acerca de los aprendizajes que se pueden desarrollar en los estudiantes en esta área de conocimiento.

Por una parte los Lineamientos curriculares de Preescolar (1998a) contemplan tres principios que debe comprender el currículo en las instituciones para ese nivel: *la integralidad*,

en donde se contempla al educando como un ser único y social quien se relaciona con la familia, sociedad, cultura y etnia; *la participación*, que considera importante el trabajo en equipo permitiendo el intercambio de pensamientos y la construcción de valores y normas; y la *lúdica*, en el que se considera el juego como dinamizador de la vida del educando, pues a través de éste, el niño aprende, construye conocimientos sobre el mundo físico y social que lo rodea. Estos tres principios se materializan en los cuatro tipos de aprendizajes que se consideran relevantes para trabajar con el estudiante: aprender a conocer, aprender a hacer, aprender a vivir juntos y aprender a ser.

En esta investigación que se articula en una propuesta didáctica sobre la enseñanza de algunos aspectos relacionados con el concepto de número natural, se incorporan elementos sobre los cuatro aprendizajes y el aspecto lúdico, además de competencias matemáticas en transición que apuntan al desarrollo de cuatro funcionamientos cognitivos: "cuantificación y principios de conteo, comunicación de cantidades, establecimiento de relaciones de orden y resolución de problemas aditivos" (MEN, 2009, p. 100).

A su vez, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998b) orientan la organización de las propuestas curriculares en las instituciones educativas a partir de tres grandes ejes: conocimientos básicos, procesos generales y contextos.

Los conocimientos básicos tienen que ver con procesos específicos que desarrollan el pensamiento matemático y con sistemas propios de las matemáticas, dichos procesos específicos están relacionados con el desarrollo de cinco tipos de pensamiento: numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional. Estos pensamientos están estrechamente ligados con los sistemas numéricos, geométricos, de medida, de datos, algebraicos y analíticos, respectivamente. Por otra parte, los procesos generales están ligados con el aprendizaje, tales como el razonamiento; la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación; la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. Los contextos, por su parte, hacen referencia a los ambientes que rodean al estudiante y le dan sentido a las matemáticas que aprende. Variables como las condiciones sociales y culturales tanto locales como internacionales, el tipo de interacciones, los intereses que se generan, las creencias, así como las condiciones económicas del grupo social en el que se concreta el acto educativo, deben tenerse en cuenta en el diseño y ejecución de experiencias didácticas, tales contextos son los cotidianos, los de las mismas matemáticas y los de otras disciplinas.

A través de los ejes anteriormente mencionados se estructura la forma de organización curricular de las instituciones educativas y la actividad matemática de aula. En lo referido a los conocimientos básicos, este trabajo centra la atención en el desarrollo del pensamiento numérico y los sistemas numéricos, como los números naturales; de procesos generales privilegia la resolución de problemas y la comunicación; y de los contextos, se retoman los contextos cotidianos y matemáticos, adecuados para la edad de los niños de Jardín y Transición.

Por otro lado, desde la perspectiva didáctica permite conocer algunas dificultades en la construcción del concepto de número. Una de estas dificultades está relacionada con el desconocimiento de las experiencias previas de los estudiantes y los contextos en los cuales los niños usan los números antes de llegar a la escuela. Esto puede verse como resultado de los "currículos de las instituciones-aún en uso- en los que el principal objetivo es trasmitir al niño conceptos matemáticos sin la consideración de los conocimientos previos" (Fernandez, Gutierrez, Gómez, Jaramillo, & Orozco, 2004, p.44), esto influye en la enseñanza del concepto

del número natural, la cual no permite fortalecer la clasificación, la cardinalidad, la ordinalidad ni la seriación, al disociar las actividades propuestas del contexto cercano a la realidad del niño.

Otro aspecto que reportan algunos investigadores como Castro et al. (1988) y Vásquez (2010), se refiere a que muchas veces la enseñanza del número natural se limita al trazo de los símbolos dejando por fuera la reflexión necesaria para que el estudiante construya el concepto de número natural.

Así mismo, los procesos de lectura y escritura de los números en tanto están relacionados con el sistema de numeración decimal, suponen ciertas leyes y propiedades tanto para leerlos como para escribirlos, en estos subyace otra dificultad. Al respecto, Lerner & Sadovsky (1994) afirman que "los niños elaboran conceptualizaciones acerca de la escritura de los números, basándose en las informaciones que extraen de la numeración hablada y en sus conocimientos de la escritura convencional" (p. 108). La intervención en el aula debe permitir a los niños descubrir y construir las ideas acerca del sistema de numeración decimal, aspecto inherente a la construcción del concepto de número natural.

En este sentido, el hecho de que se le preste más importancia a la representación simbólica de los números que a su contenido, desconoce por un lado, los procesos motrices finos que los niños entre 4 y 6 años desarrollan paralelo al concepto de lateralidad, y por otro, reflexiones importantes acerca de los significados que pueden otorgarse a los números: que forman parte de una serie, que representan cantidad, que representan clases de equivalencias, etc. Tal como lo dice Castellanos: "se han podido constatar las dificultades de los alumnos para identificar el número, ya sea de forma gráfica o por medio de un conjunto" (Castellanos, 2004, p. 6). En este sentido, si la enseñanza se limita a la elaboración de símbolos, los números carecen de sentido y significado en los contextos en los que se usan.

Es más, al desconocer estas dificultades en el proceso de construcción del concepto de número y continuar un aprendizaje tradicional, los niños pueden tener limitaciones en el sentido que le otorgan al uso de los números, en la habilidad para interpretarlos y en la manera de resolver problemas, a pesar de que los escriban correctamente. Por lo tanto, en la secuencia didáctica que se presenta en este trabajo, se abordan algunos aspectos relacionados con lo anterior, con el fin de evitar que se agencien estas dificultades en el aula.

Por tanto, en las actividades lúdicas resulta importante implementar Materiales manipulativos pues diferentes autores como Godino (1988), Cañal (2002), Kamii & DeVries (1980), entre otros, afirman que el uso de este tipo de materiales en clase de matemáticas constituye un potencializador para el desarrollo del conocimiento matemático, puesto que motivan al estudiante y ayudan en la comprensión de conceptos matemáticos. Así lo expresa Cañal (2002, p.32) "los materiales potencian una enseñanza más rica, más creativa, más activa, más participativa. Los alumnos trabajan desde otras perspectiva pues manipulan y desarrollan estrategias que ayudan a adquirir y afianzar de una manera más atractiva los conceptos". Kamii (1985) da a conocer algunos juegos con materiales manipulativos que sirven como referencia para desarrollar pensamiento matemático, por eso, se retoman algunos juegos los cuales son la base de las situaciones problemicas que se plantean en la Secuencia Didáctica

Por último, con relación a la perspectiva matemática se toman en cuenta tres matemáticos importantes en la construcción del concepto de número: Dedekind, Peano y Cantor. Dedekind por su parte, fundamenta la ordinalidad como el principio mismo de la construcción de los números naturales como un sistema simple, infinito y ordenado, asociando los números naturales

con los sistemas que ha definido a partir de su teoría de sistemas. Peano desde su teoría presenta en el axioma 1 y el 6 la fundamentación del principio de "siguiente" a través del sucesor y el principio de "antecesor"; que son propiedades básicas del número natural. Por ultimo, Cantor define el cardinal como el número de elementos de un conjunto dado, con esto se aclara lo que quiere decir ser el "número de un conjunto", los principios fundamentales que deja la teoría de cantor son: la correspondencia biunívoca (equipotencia), la cardinalidad, la ordinalidad. Conceptos claves para el diseño de la secuencia didáctica

En síntesis, los aspectos curriculares, didácticos y matemáticos son fundamentales en la construcción del concepto de número natural, y por tanto, son relevantes al momento de diseñar actividades en una secuencia didáctica para permitir el desarrollo de pensamiento matemático.

Diseño metodológico

El desarrollo de este trabajo de investigación está enmarcado en una metodología analítica y descriptiva. Al indagar sobre la construcción de número natural en los grados de Jardín y Transición a partir de una secuencia didáctica que involucra juegos con materiales manipulativos, esta investigación toma datos cualitativos y cuantitativos dentro de un enfoque descriptivo, lo que permite detallar procesos, conceptos y actitudes de los niños al desarrollar las actividades propuestas.

La primera fase se inició con la revisión y análisis del contexto curricular que comprende la formación matemática en los primeros años, las competencias matemáticas y la propuesta curricular del preescolar. Luego, se realizó la perspectiva didáctica desde la lúdica, las dificultades en la construcción de número natural, y las corrientes de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Posteriormente se fundamentó la perspectiva matemática desde referentes histórico-matemático del número natural teniendo en cuenta a Dedekind, Peano y Cantor.

En la segunda fase se articularon los referentes antes mencionados por medio del diseño de la secuencia didáctica que consta de cuatro situaciones problema y una plenaria final, las cuales involucran juegos con materiales manipulativos, para aportar elementos conceptuales y procedimentales en lo referido a la construcción del concepto del número natural. En esta fase se implementó la secuencia didáctica en los grados de Jardín y Transición, en el Colegio Jardín Infantil Helen Keller (un grupo de grado Jardín) y en el Colegio Mayor San Francisco de Asís (un grupo de grado Transición) de Cali (Colombia); con el propósito de identificar conceptos y procedimientos que se movilizan y fortalecen en las tareas, mediante la tipificación de las respuestas y su análisis e interpretación posterior.

En la fase final, se concretan las conclusiones generales y reflexiones didácticas con base a la problemática, los referentes teóricos y los resultados de la implementación realizada con los estudiantes de preescolar.

Con relación a la secuencia didáctica[2] sobre la construcción del concepto del número natural que se expone en este trabajo, se apoya en lo que denomina Linares (Citado por Guerrero, 2006) como la actuación del profesor en la fase pre-activa, la cual aborda los aspectos más importantes del sistema didáctico que rigen el proceso de enseñanza y aprendizaje en la

[2] Aunque la propuesta de Secuencia Didáctica tiene como base la Teoría de las Situaciones Didácticas, este trabajo solo asume los aspectos que establecen la relación entre el maestro, el concepto de número natural, y el estudiante y se entiende la Secuencia Didáctica como un plan previo, organizado y concatenado de actividades para el aula.

escuela. Por lo tanto, las secuencias didácticas dentro de la Ingeniería Didáctica estructuran el trabajo del docente de manera sistemática dentro de la relación didáctica estudiante, maestro, saber y medio.

En lo referido a este trabajo de investigación, se retoma la fase pre-activa en cuanto a la organización y planificación de la intervención, en contraposición a una improvisación, reiteración o saltos injustificados de un tema a otro. En esta fase se busca una coherencia entre los contenidos que aborda cada una de las situaciones, con la finalidad de tomar decisiones de planificación y análisis de la práctica, entendiendo esta planificación como la preparación para las múltiples circunstancias que se presentan en el ejercicio docente.

Con respecto a la elaboración de la secuencia didáctica se plantean cuatro situaciones (ver Anexo 1): "Juego: Cincuenta Fichas" que moviliza la noción de cardinalidad a partir de la correspondencia uno a uno y la asociación a un número como cardinal; "Juego: Estrellas" que involucra la noción de cardinal usando la correspondencia y el recuento por medio de las relaciones de orden y equivalencia (es igual que, es mayor que, es menor que); "Juego: Tens" con el propósito de realizar composiciones del número 10; y "Juego: Veinte en Línea" en el que se trabaja la adición de cantidades de 1 a 20. Estos juegos que involucran materiales manipulativos se retoman y adaptan del libro *El niño reinventa la Aritmética* (Kamii, 1985).

Con respecto a la noción de situación y actividad, por *situación* se entiende el conjunto de problemas que se elaboran basados en las matemáticas, en los contextos cotidianos y que en su tratamiento generan el aprendizaje de los estudiantes. Por *actividad* se refiere al trabajo intelectual personal y grupal de los estudiantes, para interpretar, analizar, modelar y reformular la situación; formular preguntas, conjeturas, utilizar materiales manipulativos, producir, interpretar y transformar representaciones (verbales, gestuales, gráficas, algebraicas, tabulares, etc.) (MEN, 2006). En este sentido, la actividad estimulada por la situación permite avanzar y profundizar en la comprensión, en las habilidades y en las actitudes de los estudiantes, en una palabra: en las competencias matemáticas

Con base en estos referentes metodológicos, el trabajo de investigación se lleva a cabo a partir de las fases antes mencionadas. La puntualización de la definición de secuencia didáctica, situación y actividad, posibilitan una mayor comprensión de los resultados y las conclusiones.

Discusión de resultados y conclusiones

A partir de los resultados de la implementación de la Secuencia Didáctica se tipificaron las respuestas de los estudiantes por medio de tablas o descripciones de los resultados, teniendo como referentes los registros escritos, audiovisuales y toma de notas, por medio de lo cual se analizaron cada una de las situaciones: situación 1: "Juego: Cincuenta Fichas", situación 2: "Juego: Estrellas", Situación 3 "Juego: Tens" y Situación 4 "Juego: Veinte en Línea".

En el "Juego: Cincuenta Fichas" se destaca la correspondencia biunívoca que establecen los estudiantes al contar uno a uno los elementos de un conjunto, y le otorgan un nivel superior al último número contado para determinar la cantidad de elementos de un conjunto. El trazo y la escritura de los números progresan en tanto los estudiantes van construyendo el concepto de número natural a través de situaciones significativas, se nota aquí una diferencia entre los estudiantes de Jardín y Transición. Los niños de Jardín privilegian las representaciones icónicas, mientras que los niños de transición ya están familiarizados con el registro simbólico de los números a pesar de que realizan notaciones en espejo con frecuencia.

Con respecto al "Juego: Estrellas", se nota un avance significativo a nivel de la representación simbólica de los números, reconociendo la importancia de la visualización en el proceso de la escritura, este avance podría deberse a la constante interacción de los niños con el material manipulativo (cartas), al parecer observan e interiorizan la manera correcta de escribirlos. De otra parte, se resalta la importancia que le otorgan los estudiantes al valor posicional de las cifras en el sistema de numeración decimal como estrategia privilegiada para comparar cantidades, al tiempo que establecen hipótesis acerca de que cuanto mayor es la cantidad de cifras de un número, mayor es el número. Por último, los aprendizajes fundamentales (aprender a ser, a hacer, a vivir juntos, a conocer) influyen en el desarrollo de las actividades en tanto los niños conozcan, hagan, vivan en armonía y sean ellos mismos, con sus particularidades y características propias.

En el "Juego: Tens", se destaca el hecho de que los estudiantes pueden realizar diferentes agrupaciones de la cantidad diez, por lo cual, se van apropiando de su significado, que más adelante será la base para construir agrupaciones de diferente orden, e influirá en la lectura y escritura de diferentes cantidades. Así mismo, las composiciones y descomposiciones posibilitan una mayor comprensión de los números y de las operaciones entre ellos. De otra parte, los niños y niñas atribuyen al cero el significado cardinal y hacen uso de su símbolo para expresar que 10 +0 = 10. De lo anterior, se puede inferir que los estudiantes tienen claridad acerca del significado y uso de esta cantidad en el contexto cardinal, aspecto importante tanto en la construcción del concepto de número natural, como en el sistema de numeración decimal, puesto que el cero representa a su vez, la ausencia de agrupamiento de un determinado orden. Así, con las orientaciones de los Lineamientos Curriculares de las Matemáticas (1998b), el sistema de numeración decimal, además de contemplar el contexto cardinal, el contexto ordinal, la magnitud entre otros, desarrolla estrategias propias en la resolución de problemas, lo cual se evidencia en las tareas propuestas para esta situación, en donde los niños implementan diferentes estrategias para realizar las composiciones pues implementaron objetos concretos, los dedos de las manos, procesos mentales, entre otros.

En el "Juego: Veinte en Línea", los niños asumieron la complejidad del juego y lo desarrollaron con entusiasmo, lo que demuestra que el juego en sí mismo les plantea retos y les permite contextualizar las situaciones. Se resalta la interpretación y uso de la representación simbólica de los estudiantes de Jardín y Transición en las cuales se nota un gran avance, además que alcanzan a realizar composiciones con más de dos cantidades. Por otro lado, esta actividad invitó a los estudiantes a involucrarse con las primeras tareas en torno a las operaciones aditivas, con un nivel mayor al que se habían enfrentado, pues requieren de componer una cantidad con seis sumandos, lo cual permite reconocer la importancia de ofrecerle al niño actividades diferentes y retos potencializando un aprendizaje significativo en el niño. Se resalta la interpretación y uso de la representación simbólica de los estudiantes de Jardín y Transición quienes, se involucran con actividades y juegos con números de manera natural y participan de manera activa en el desarrollo de las tareas.

Finalmente en la realización de la plenaria, los estudiantes reconocen los juegos que se implementaron durante la secuencia, las reglas y la metodología de los mismos. Además, expresan que aprendieron a contar, a sumar, a escribir los números, a llenar diferentes tipos de tablas, entre otros. Lo anterior permite inferir que el principio lúdico es realmente importante en este nivel, así como la intervención de las investigadoras, puesto que de no haber sido así, en el juego por el juego no aportaría elementos de tipo conceptual y procedimental como ocurrió con

esta implementación.

Todos estos resultados permiten dar cuenta del proceso de construcción del concepto de número en los primeros años de la escolaridad, específicamente en los grados Jardín y Transición a partir de la implementación de la secuencia didáctica que involucra juegos con materiales manipulativos.

De modo que, es importante empezar a incorporar desde los primeros años de escolaridad, actividades para la construcción del concepto de número natural, lo cual se valida en la implementación que se hace de la secuencia en relación con los avances que se presentaron en cada una de las actividades. Los niños en edad preescolar están en la capacidad de enfrentarse a situaciones matemáticas acordes con su edad, pues la diversidad de situaciones y juegos propició la exploración de diferentes combinaciones numéricas para componer cantidades, lo cual permitió que los estudiantes comprendieran que una cantidad es el resultado de componer varias cantidades, aspecto fundamental del desarrollo de pensamiento numérico.

Además, los materiales manipulativos potencian el desarrollo de estrategias de conteo, comparación de cantidades, agrupaciones, repartos, composiciones, descomposiciones, entre otros, en vista de que son mediadores en el paso de lo concreto a lo abstracto y permiten ejercitar procedimientos y consolidar las principales nociones matemáticas, siempre y cuando esté articulado a situaciones o actividades que potencien esto, por lo tanto, el material manipulativo en sí mismo, no moviliza pensamiento matemático en el aula, puesto que se requiere la orientación adecuada por parte del docente para potenciar éste en los estudiantes.

A su vez, el proceso que vivieron los estudiantes de Jardín y Transición respecto a la escritura de los símbolos numéricos fue evidentemente positivo, lo cual confirma que las experiencias de los niños con los juegos y la visualización de los símbolos que hacen parte del material, les permitió otorgarle un sentido a la escritura de los números, como parte de la construcción del concepto de número natural. Esto valida el hecho de que el aprendizaje no es lineal ni obedece a patrones específicos. La Secuencia en sí misma da cuenta de los procesos que vivieron los estudiantes de Jardín y Transición en aspectos relacionados con la escritura de los números.

También, el aprendizaje de los números naturales debe involucrar actividades relacionadas con el conteo, la comparación, composición y descomposición de cantidades, en tanto se potencien aspectos de tipo conceptual y procedimental relacionados con este concepto, donde emergen operaciones básicas aritméticas que hacen parte de la construcción de concepto de número natural. Las primeras ideas acerca del pensamiento aditivo hacen parte de las experiencias que vivieron los estudiantes en el desarrollo de esta Secuencia.

Así mismo, los estudiantes de preescolar, por medio de esta Secuencia didáctica, utilizan y fortalecen conceptos elementales de las matemáticas escolares como el principio de biunivocidad, principio de cardinalidad, principio de orden estable, así como emplean estrategias de conteo tales como, agregación sucesiva, y reunión y conteo, a la vez que perfeccionan los dominios de secuencia numérica verbal.

Los resultados de la implementación de la Secuencia Didáctica sugieren que a los niños desde temprana edad se les facilita hacer agrupaciones de 10 lo cual fortalece la construcción del Sistema de Numeración Decimal, si se tienen en cuenta las experiencias previas y se potencian contextos significativos para su uso.

En este sentido, los niños y niñas de preescolar son capaces de elaborar hipótesis acerca del código escrito y del valor de la posición para comparar cantidades (cuánto mayor es la cantidad de cifras de un número, mayor es el número, el valor de una cifra depende de su posición respecto de las demás), las cuales obedecen a los resultados de investigaciones preliminares realizadas con niños que cursan el primer grado de escolaridad (Lerner & Sadovsky, 1994).

Finalmente, la Secuencia Didáctica presentada en este trabajo contribuye a que los estudiantes construyan elementos conceptuales y procedimentales sobre la construcción del concepto de número natural al desarrollar diferentes funcionamientos cognitivos como cuantificación y principios de conteo, comunicación de cantidades, establecimientos de relaciones de orden, y resolución de problemas aditivos, tal como se plantea en los Elementos Conceptuales Aprender y Jugar, Instrumentos Diagnóstico de Competencias Básicas en Transición (MEN, 2009)

Limitaciones del estudio y prospectiva

Este trabajo de investigación constituye un aporte a todos los profesores de la educación inicial que se interesen por movilizar en el aula aspectos matemáticos desde los primeros años, sin embargo, los resultados obtenidos pueden ser un punto de partida para diseñar otro tipo de secuencias didácticas a partir de situaciones problemas que representen un reto para los estudiantes, aspectos como la cardinalidad, ordinalidad, el conteo, la cuantificación, la comunicación de cantidades, la resolución de problemas aditivos y la secuencia numérica verbal, son temas importantes en la construcción del concepto de número que podrían ser abordados en secuencias didácticas posteriores. Para nuevos trabajos diseñados a partir de este es conveniente realizar algunos ajustes en cuanto al diseño de la estructura, hacerlo más conciso eliminando preguntas que resultaron un poco confusas para los niños. De este modo, está latente la posibilidad de retroalimentar, ajustar y validar el diseño de la secuencia didáctica que en este trabajo se presenta.

Bibliografía

Ausubel, D., Novak, J., & Hanesian, H. (1983). *Psicología educativa: un punto de vista cognoscitivo*. México: Trillas.

Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática*. Madrid: Paidós.

Cañal, P. (2002). *La innovaciòn educativa. Universidad Internacional de Andalucía*. Madrid: Akal S.A.

Castellanos, A. (2004). *La enseñanza de las nociones de las matemáticas en el preescolar, el concepto del número: del modelo mecanicista al constructivismo*. Universidad Pedagógica Nacional, Sinaloa, Colombia.

Castro, E., Rico, L., & Castro, E. (1988). *Números y operaciones: fundamentos para una aritmética escolar*. Madrid: Síntesis.

Cerón, C. y Gutierrez, L. (2013). *La construcción del concepto de número natural en preescolar: una secuencia didáctica que involucra juegos con materiales manipulativos*. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Chamorro, M. (2005). *Didáctica de las matemáticas para Educación Preescolar*. Madrid: Pearson.

Fernández, K., Gutiérrez, I., Gómez, M., Jaramillo. L., & Orozco, M. (2004). El pensamiento matemático informal de los niños en edad preescolar: creencias y prácticas de docentes de Barranquilla (Colombia). *Zona Próxima* 5, 42-73.

Godino, J. (1988). *Uso de Material Tangible y Gráfico-Textual en el Estudio de las Matemáticas. Superando Algunas Posiciones Ingenuas*. Portugal.

Guerrero, F., Sánchez, N., & Lurduy O (2006). *La práctica docente a partir del modelo deca y la teoría de situaciones didácticas*. V festival internacional de matemática.

Kamii, C. (1985). *El niño reinventa la aritmética. Implicaciones de la teoría de Piaget*. Madrid: Visor.

Kamii, C., & DeVries, R. (1980). *Juegos colectivos en la primera enseñanza: implicaciones de la teoría de Piaget*. Madrid: Visor.

Lerner, D. y Sadovsky, P. (1994). El sistema de numeración: un problema didáctico. En Parra, Cecilia y Saiz, Irma (comps.): *Didáctica de las matemáticas. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires: Paidós.

MEN (1998a). *Lineamientos Curriculares de Preescolar*. Santafé de Bogotá, Colombia.

MEN (1998b). *Lineamientos Curriculares de Matemática*. Santafé de Bogotá, Colombia.

MEN (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden*. Santafé De Bogotá, Colombia

MEN (2009). *Documento No 13: Elementos conceptuales aprender y jugar. Instrumento diagnóstico de competencias básicas en Transición*. Santafé de Bogotá, Colombia.

Vásquez, N. (2010). *Un Ejercicio de Transposición Didáctica en Torno al Concepto de Número Natural en el Preescolar y el Primer Grado de Educación Básica*. Universidad de Antioquia, Medellín, Colombia.

Apéndice A

ANEXO 1: *Estructura de la secuencia didáctica*

Situación			Tareas	Número de preguntas
Nº	Nombre	Propósitos:		
1	El juego cincuenta fichas, el conteo y la correspondencia uno a uno	• Movilizar la noción de cardinalidad a partir de la correspondencia uno a uno y la asociación a un número como cardinal. • Utilizar la correspondencia biunívoca entre la secuencia numérica verbal y la cantidad de puntos en los dados para contar, totalizar, comparar cantidades e identificar el cardinal asociado a una cantidad de puntos.	Tarea 1	1
			Tarea 2	3
			Tarea 3	3
2	Juego Estrellas y comparación de cantidades	• Comparar cardinales usando la correspondencia y el recuento por medio de las relaciones de orden y equivalencia: es igual que, es mayor que, es menor que. • Potenciar nociones iniciales sobre la estructura multiplicativa a partir de actividades que involucran reparto.	Tarea 1	3
			Tarea 2	3
3	Juego Ten. Composición y descomposición de cantidades	• Realizar composiciones del número 10 a partir de dos sumandos en el círculo del 0 al 10.	Tarea 1	3
			Tarea 2	1
			Tarea 3	2
4	El juego veinte en línea, la composición y descomposición de cantidades	• Utilizar la adición de cantidades de 1 a 20 (Grupo 2)	Tarea 1	1
			Tarea 2	1
			Tarea 3	1

Nota: esquema general de la secuencia didáctica aplicada a estudiantes de Jardín y Transición

La enseñanza de la multiplicación: una propuesta a partir de tareas de proporcionalidad directa

Liliana **Quintero** López
Universidade Federal do ABC –UFABC-
Brasil
liliql22@gmail.com
Sara **Mejía** Vasco
Universidad de Antioquia –UDEA-
Colombia
saramejia19@gmail.com
Francisco Brabo **Bezerra**
Universidade Federal do ABC –UFABC-
Brasil
francisco.bezerra@ufabc.edu.br

Resumen

El trabajo que se presenta a continuación corresponde a reflexiones que se adelantan como parte de los estudios de maestría, pero que dan continuidad al trabajo de grado elaborado en pregrado que tiene como título "El aprendizaje de la multiplicación desde tareas de proporcionalidad directa". El objetivo de esta comunicación es compartir con profesores en ejercicio y con futuros profesores, comentarios e reflexiones sobre el desarrollo de dos tareas de proporcionalidad directa que fueron diseñadas y aplicadas para analizar la actividad matemática de los estudiantes de grado quinto con relación al aprendizaje de la multiplicación; este tipo de tareas son importantes porque permiten reconocer y establecer relaciones entre dos espacios de medida y guiar así hacia un pensamiento multiplicativo.

Palabras clave: Multiplicación, actividad, proporcionalidad directa, enseñanza, tarea.

Introducción

El trabajo que se presenta a continuación surgió a partir de las reflexiones hechas como parte del proceso de maestría en la Universidade Federal do ABC (Brasil) pero que tienen su motivación e insumo principal en la investigación "el aprendizaje de la multiplicación a partir de tareas de proporcionalidad directa" que fue elaborada como trabajo de grado para el programa licenciatura en educación básica con énfasis en matemáticas de la Universidad de Antioquia (Colombia); en ella se buscaba comprender de qué manera las tareas de proporcionalidad directa mediaban el aprendizaje de la multiplicación, para esto, fueron propuestas tres tareas que se compartieron en una escuela pública de la ciudad de Medellín (Colombia), en su desarrollo en el aula de clase se analizó la actividad matemática de las estudiantes a la luz de los objetos de conocimiento, las interacciones entre los sujetos y los instrumentos.

A partir de los resultados y conclusiones obtenidas en esta investigación, nace la necesidad de organizar y compartir el trabajo realizado, pensando en ayudar a los profesores, para que tengan como ejemplo y apoyo las formas de acción que surgieron en este proceso, puedan llevarlas a sus aulas y contribuir así con el mejoramiento de su práctica y de la educación matemática en general.

El objetivo de la comunicación es presentar las tareas elaboradas y aplicadas en la investigación ya mencionada, como una propuesta para la enseñanza de la multiplicación a partir de tareas de proporcionalidad directa, el texto se encuentra organizado de la siguiente manera; primero están los aspectos generales de la investigación, luego el marco de referencia, las tareas propuestas y por ultimo las consideraciones finales.

Aspectos generales

La investigación se hizo desde un enfoque cualitativo, donde se adoptaron las ideas de Sandoval (2002), se orientó la investigación hacia el descubrimiento de la realidad y no a la comprobación, a través de la simultaneidad de los procesos que comprenden la realidad. Es decir, en la investigación se apuntó a mostrar cómo a través de las tareas de proporcionalidad directa los estudiantes pueden ver y comprender la multiplicación, de modo diferente a la suma de sumandos iguales.

Bajo esta mirada, el trabajo de investigación se centró en las ideas de Galeano (2007) con relación al estudio cualitativo de caso, este permitió narrar el proceso realizado con las estudiantes del grado quinto, interpretando las interacciones entre ellas, la forma cómo se acercaron al conocimiento y cómo se apropiaron de él.

El interés de la investigación se centró en el aprendizaje de la multiplicación desde la proporcionalidad directa, estableciéndose como elemento fundamental para su enseñanza, tareas desde esta idea matemática; la mirada estaba centrada en analizar cómo la tareas llevadas al aula lograban que las estudiantes comprendieran la multiplicación de una forma diferente a como les había sido enseñada. En el desarrollo de la investigación se observó como las estudiantes centraban su actividad matemática en la utilización constante del algoritmo y la resolución de problemas matemáticos a partir de una única vía de solución, la suma de sumandos iguales. Es decir, buscaban resolver cada tarea por medio de conteos, lo cual mostró un pensamiento basado exclusivamente en la adición, no lograban poner en correspondencia dos familias de cantidades y no había consciencia de las cantidades ni de la variación entre ellas.

Se reconoce que si bien la enseñanza de la multiplicación desde la idea de suma de sumandos iguales y desde la asimilación del algoritmo es importante para generar en los estudiantes un modelo inicial de significación y para avanzar en su asimilación, no es suficiente para llegar a pensar multiplicativamente. Por esto, se recomienda a los profesores iniciar la enseñanza de la multiplicación desde esta mirada, pero avanzar hacia el desarrollo del pensamiento multiplicativo.

La multiplicación es más que sumar, es más que una asimilación de un algoritmo, pues está permite relacionar dos espacios de medida, permite que el estudiante comprenda que en ella aparece una correspondencia que se establece entre las cantidades, que hay una correlación positiva y lineal y por tanto hay una proporcionalidad directa; elementos que desde la suma es imposible comprender e interiorizar. Es desde estas ideas que nace la propuesta de crear tareas,

pensadas desde la idea que expresa Obando (2011) donde asume el conocimiento matemático como una construcción de los sujetos a través de la acción mediada por instrumentos.

Como resultado de la investigación se logró identificar en la actividad matemática de las estudiantes varios elementos importantes que se hicieron evidentes en las observaciones y en los diferentes registros que las estudiantes compartieron. Estos elementos se organizaron en tres categorías emergentes, la primera fue *la importancia de la medida en la actividad matemática de las estudiantes*, la segunda fue denominada de las *relaciones cualitativas a las relaciones cuantitativas* y la tercera, *las tareas de proporcionalidad directa en el aprendizaje de la multiplicación*.

Marco de referencia

La enseñanza de la multiplicación ha sido un tema de gran discusión y apropiación entre diversos investigadores que se han centrado de una u otra manera en discutir sobre su enseñanza en la actualidad y en proponer maneras para que los profesores guíen sus estudiantes a una mejor comprensión y aplicación.

En los últimos años se han realizado varias investigaciones centradas en la enseñanza y el aprendizaje de la multiplicación; la profesora Ana Ruth Stare (São Paulo, 2010) en su trabajo de doctorado "A multiplicação na Escola Fundamental I: análise de uma proposta de ensino" expresa, entre muchas de sus ideas que:

Para muchos profesores, la enseñanza de la multiplicación (también de las demás operaciones) pretende básicamente el dominio del algoritmo convencional y su posterior aplicación para resolver problemas. De esa forma, se espera que los alumnos dominen las tablas de multiplicar (hasta el 10) al comienzo de la enseñanza fundamental, este dominio pasa a ser tratado como un pre-requisito para la utilización del algoritmo de la multiplicación y de la división. (Stare, 2010, p.67)

También aparecen en este escenario la tesis de maestría de la profesora Olga Botero (2006) "Conceptualización del pensamiento multiplicativo en niños de segundo y tercero de educación básica a partir del estudio de la variación" y la tesis de Monly Torres (2013) "Formas de acción en el tratamiento de situaciones multiplicativas: una mirada del isomorfismo de medida en términos del análisis relacional". La primera trasciende el modelo tradicional de la multiplicación como suma de sumandos iguales aportando elementos conceptuales y metodológicos para la conceptualización de las estructuras multiplicativas a partir de situaciones problema que permitan al estudiante interactuar con la variación simultánea entre cantidades. Y la segunda analiza las formas de acción de los estudiantes al tratar situaciones problema de tipo multiplicativo en términos del análisis relacional tipo función.

Ambas buscan ampliar el pensamiento multiplicativo y trascender el modelo inicial de multiplicación que es enseñado en la escuela. Resguardan una nueva mirada de la multiplicación en la que se consideran dos espacios de medida, la unidad como cantidad explícita y la correlación entre pares de cantidades.

Reconocen como la escuela aún no ha logrado ir más allá de la enseñanza de la multiplicación como una suma reiterada, donde se asume que el estudiante ha aprendido a multiplicar porque aplica correctamente el algoritmo, tal como lo expresa Torres (2013)

El tratamiento que se le ha dado a la multiplicación en la escuela, en la mayoría de los casos, se ha reducido a su enseñanza como una suma reiterada, al aprendizaje de un algoritmo y

a la memorización de las tablas de multiplicar, (Valencia & Gómez, 2010), dejando a un lado el significado de la multiplicación en la resolución de situaciones de tipo multiplicativo y la relación de la multiplicación con otros conceptos matemáticos, como la razón, la proporción y la proporcionalidad. (p.10)

También es importante considerar en este camino las características especiales de la proporcionalidad como la correlación positiva y lineal que limitan las situaciones y las transforman en situaciones de proporcionalidad directa que muestran la correspondencia con un real sentido de la multiplicación y de lo que es pensar multiplicativamente. Además, generar espacios donde a partir de las necesidades e intereses de los estudiantes emerja el conocimiento matemático, a través de tareas donde la actividad de aprendizaje se vea fortalecida por lo que el estudiante conoce del mundo y por las interacciones entre pares.

Es pertinente considerar la Teoría de la Actividad, pues ésta reconoce la importancia del intercambio cultural y aporta elementos para la comprensión de la dialéctica entre lo social y lo individual; destaca la acción, los instrumentos y la agencia social, reconociendo la heterogeneidad de los procesos psicológicos. Es de aclarar que el concepto de actividad surge desde las ideas de Vygotsky, el cual lo incorporó en su teoría cultural-histórica de las funciones psicológicas superiores; él estudio la conciencia del hombre en la actividad, pensando el sujeto como un agente individual; por su parte Leontiev pensó el sujeto que se relaciona con los Otros y es en esa relación que constituye conocimientos. Éstas miradas de Leontiev transformaron la idea de mediación, pues para él fue necesario incluir nuevos elementos sociales para dar cuenta de los procesos de mediación; también expresaba que "en la sociedad humana, la relación entre el individuo y el objeto no es inmediata sino que está mediada por la experiencia colectiva *y por* la división del trabajo" (Kozulin, 2000, p.43)

Bajo esta mirada, se entiende por actividad el "*conjunto de acciones socialmente dirigidas (orientadas) con el objetivo de alcanzar un fin"* (Leontiev, 1978 citado en Obando, 2011, p.18) es decir, la actividad se establece a partir de acciones organizadas, estructuradas, orientadas para lograr un objetivo. Entendiendo acción como aquello que implica un acto intencional, es una forma de organización de la experiencia e implica una dialéctica entre la realidad y el individuo que la modifica.

Dentro de la actividad se resalta la relación objeto/motivo hacia la cual se orientan las acciones tanto externas como internas, puesto que permite que se oriente y se genere la actividad y a su vez logra que el sujeto reflexione sobre la actividad misma. También se resaltan los instrumentos que son quienes median las reflexiones externas e internas, en la medida en que comportan los dos lugares, cumplen el papel como instrumento material y posteriormente como instrumento psicológico.

Tareas

Estas tareas muestran un posible camino para llevar a los estudiantes a pensar multiplicativamente. Se reconoce en ellas lo que Davidov en palabras de Montealegre expresa "la principal diferencia entre ésta y otras tareas consiste en que su finalidad y resultado es la transformación del propio sujeto actuante y no la trasformación de las cosas con las que actúa el sujeto" (Montealegre, 2005, p. 41)

Tarea 1: Jugando con Agua

Esta tarea tiene como finalidad llevar a los estudiantes a afianzar el conjunto de los números racionales, haciendo que transiten por otros conjuntos numéricos, es decir, tiene como fin posibilitar espacios en los que los estudiantes trasciendan su pensamiento matemático; que vayan más allá de los números naturales.

Ilustración 1: Vasos

Para el desarrollo de la tarea se propone el uso de cinco vasos desechables de 1, 2, 4 y 16 onzas nombrados con la letra **A, B, C** Y **D**. Se debe proponer a los estudiantes la siguiente situación: en una reunión familiar se estaba repartiendo gaseosa en el vaso **C**, y este se acabó ¿De qué manera se puede seguir repartiendo la misma cantidad de gaseosa usando los otros vasos?

Se recomienda organizar a los estudiantes en equipos de 4 estudiantes, donde cada uno debe consignar y entregar las recomendaciones para seguir repartiendo la gaseosa. (Ver apéndice A).

Tarea 2: Agua Azucarada

En presencia de los estudiantes se deben echar 6 vasos de agua medidos con el vaso **D** y 24 cubos de azúcar en una botella de gaseosa grande. La indicación que se debe dar a los estudiantes es que deben preparar la misma agua azucarada que la preparada por el profesor pero en las botellas que les fueron dadas, que deben ser diferentes para cada equipo de trabajo. Se debe entregar también una tabla de registro donde los estudiantes indicaran cada uno de los ensayos con la cantidad de agua y azúcar utilizada. La pregunta orientadora del trabajo es ¿Cómo lograr preparar agua azucarada de igual sabor que la presentada por la profesora pero en un recipiente más pequeño?

Para el desarrollo de ésta, se recomienda el trabajo en equipos de 4 personas, a cada equipo se le debe entregar una botella plástica de diferente capacidad (150, 200, 250,300, 350, 400 y 620 ml) vasos de 16, 4, 2 y 1 onzas, que servirán para medir la cantidad de agua necesitada; además se debe repartir una cantidad indeterminada de cubos de azúcar, es decir, cada equipo utilizara la cantidad de azúcar que crea conveniente. (Ver apéndice B)

Consideraciones finales

Orientar la enseñanza de la multiplicación usando tareas pensadas desde la idea de la proporcionalidad directa, le permite al profesor el uso de la multiplicación con un significado completo, es decir, donde logra contextualizar y dar sentido a los números presentes en cada situación presentada.

En el trabajo se pudo ver como los estudiantes pueden resolver las tareas como situaciones de proporcionalidad directa, y en ese proceso establecen relaciones entre dos espacios de medida, y dan cuenta de un pensamiento multiplicativo. Desde Torres (2013) pensar multiplicativamente implica que: se identifiquen dos sistemas de cantidades, se establezcan las relaciones entre las cantidades de los dos sistemas de cantidades, y se identifiquen las razones y proporciones que permiten correlacionar las cantidades entre los dos sistemas. Es por esto que se presenta como una propuesta posible para que los profesores la repliquen.

Referencias y bibliografía

Ballestero Alfaro, E. (2007). Instrumentos psicológicos y la teoría de la actividad instrumentada: fundamento teórico para el estudio del papel de los recursos tecnológicos en los procesos educativos . *Cuadernos en Educación Matemática,* 125-137.

Botero Hernandez , O. (2006). *Conceptualización del pensamiento multiplicativo en niños de segundo y tercero de educación básica a partir del estudio de la varición*. Tesis de grado de Maestría. Universidad de Antioquia, Medellín.

Daniels, H. (2003). *Vygotsky y la pedagogia*. España: Paidós.

Galeano Marín , M. E. (2007). *Estrategias de investigación social cualitativa (El giro en la mirada)*. Medellín : La carreta Editores.

Kozulin, A. (2000). *Instrumentos Psicologicos*. (G. Sanchéz Barberán, Trad.) Barcelona: Paidós.

Montealegre, R. (2005). La actividad humana en la psicologia historico cultural. *Avances en psicologia latinoamerica*, 33-42.

Obando Zapata , G. (2012). *Filosofía, matemáticas y Educación: Por un enfoque Histórico-cultural en Educación matemática*. Manuscrito en preparación .

Obando, G., Vasco, C., & Arboleda, L. C. (s.f.). *Razón, Proporción, proporcionalidad: Configuraciones Epistémicas para la educación Básica*. Manuscrito sometido para publicación .

Posada Balvin, F., & otros . (2006). *Módulo 2: Pensamiento Variacional y Razonamiento Algebraico*. Medellin: Artes y Letras Ltda.

Posada Balvin, F., & otros. (2006). *Módulo 3: Pensamiento Métrico y sistema de medidas*. Medellin: Artes y Letras Ltda.

Sandoval Casilimas , C. A. (2002). *Investigación cualitativa*. Bogotá : ARFO.

Stare Pravo , A. R. (2010). *A multiplicação na Escola Fundamental I: análise de uma proposta de ensino*. Tesis de grado de Doctorado. Universidade de São Paulo, São Paulo.

Torres Jaramillo, M. C. (2013). *Formas de acción en el tratamiento de situaciones multiplicativas: una mirada del isomorfismo de medida en terminos del análisis relacional*. Tesis de grado de Maestría. Universidad de Antioquia, Medellín.

Vergel Causado , R. (s.f.). Perspectiva Sociocultural del aprendizaje de la multiplicación. *Memorias XIV Encuentro de geometría y II de Aritmetica*, 494.

Apéndice A

Planeación jugando con agua

Objetivo:

Favorecer el estudio de las fracciones como una relación cuantitativa resultado de un proceso de comparación en un espacio de medida: la capacidad de los vasos, a través de la medición de volúmenes.

Descripción de la actividad:

Para iniciar la clase se debe empezar contándoles a los estudiantes los materiales que se van a utilizar en la clase, tales como: cinco vasos desechables de 1onza, 2 onzas, 4 onzas, 8 onzas, y 16 onzas, el líquido o sólido medido y la guía. Así mismo, se debe explicar la actividad a desarrollar la cual se hará en equipos de cuatro integrantes.

Para iniciar se debe proponer a los estudiantes la siguiente situación:

En una reunión familiar se está repartiendo gaseosas usando el vaso **C** y se acaban. Se desea seguir repartiendo la misma cantidad de gaseosa a cada uno de los invitados, usando vasos de otros tamaños. ¿De qué manera se puede seguir repartiendo la misma cantidad de gaseosa usando los otros vasos?

En esta primera parte se espera que los estudiantes hagan comparaciones entre los volúmenes de los vasos, y por tanto enfaticen en las relaciones "n veces…" y "n-ésima parte de…" como dos relaciones inversas que se pueden utilizar la una para definir la otra.

Posteriormente se debe hacer una socialización con todo el grupo donde además de indagarles sobre cómo les pareció la actividad se les escuche las soluciones que cada grupo le dio a la situación. También se deben hacer preguntas auxiliares tales como:

- Si quiero servirme la misma cantidad gaseosa que contiene el vaso **B**, utilizando el vaso **A** ¿Cuántos vasos **A** necesito?
- Si un señor desea gaseosa en el vaso **C** utilizando el vaso **D** ¿Qué cantidad de gaseosa del vaso **D** se le debe dar?

Se pueden hacer más preguntas de este tipo con la finalidad de completar en el tablero la siguiente tabla de registro

Medir / Con	**A**	**B**	**C**	**D**
A				
B				
C				
D				

Luego de lo anterior se debe proponer a los estudiantes la siguiente situación

Luciana decide hacer un postre para el cumpleaños de su mamá y encuentra la siguiente receta:

a) 2 vasos **D** de harina
b) 2 vasos **C** de azúcar
c) 8 vasos **B** de jugo de limón
d) 10 vasos **A** de agua.

• Ahora escribe nuevamente la receta del postre pero midiendo los ingredientes con el vaso **B**.

• Escribe nuevamente la receta del postre pero midiendo los ingredientes con el vaso **D.**

Como último momento se propone un espacio de conceptualización donde se busque aclarar y formalizar las ideas matemáticas encontradas en la realización de la actividad.

Apéndice B

Planeación agua azucarada

Objetivo del maestro:

Observar cómo los estudiantes asumen el problema del agua azucarada, qué preguntas se hacen y cómo logran diferenciar las magnitudes que cambian y aquella que permanece igual.

Analizar la forma cómo los estudiantes manejan las dos cantidades que varían para conseguir un agua azucarada de igual concentración a la presentada por las profesoras.

Objetivo de la clase:

Iniciar en el camino de situaciones que involucran la proporcionalidad directa para el aprendizaje de la multiplicación.

Tarea

¿Cómo lograr preparar agua azucarada de igual sabor que la presentada por la profesora pero en un recipiente más pequeño?

Momentos de la clase

Primer momento

Se les debe explicar a los estudiantes que la actividad a realizar consiste en preparar agua azucarada de igual sabor que la presentada por la profesora pero en un recipiente más pequeño. Sólo se debe dar como datos importantes la cantidad de vasos de agua y de cubos de azúcar con la que fue preparada.

Para la realización de dicha actividad se puede pedir a los estudiantes que se organicen en grupos de 4 personas, a cada equipo se les entrega una botella plástica que será distinta para cada equipo, un vaso de 16 onzas, un vaso de 4 onzas, un vaso de 2 onzas y uno de 1 onza, los cuales servirán para medir la cantidad de agua que las niñas pondrán en sus botellas. Además se les dará cierta cantidad de cubos de azúcar.

Es de aclarar que los estudiantes deberán llevar un registro de los ensayos que hacen en busca de su agua azucarada, a través de la siguiente tabla:

Ensayo	Cantidad de agua	Cantidad de azúcar
Ensayo 1		
Ensayo 2		
Ensayo 3		
Ensayo 4		

Después de los 4 ensayos deberán decidir cuál es el ensayo que más se aproximó o que logro el mismo sabor del agua azucarada.

Segundo momento

Se puede hacer una socialización para conocer los resultados que obtuvieron los grupos de trabajo, y aprovechar el momento para ver si los estudiantes lograron diferenciar las magnitudes presentes en el problema y cómo manipularon las cantidades que allí aparecen.

Tercer momento

Presentar una situación hipotética donde ya no tomarán el agua y el azúcar, pero que podrán pensar desde la experiencia anterior a través de una guía de trabajo (ver anexo 1).

Cuarto momento

En un tercer encuentro socializar las respuestas que cada grupo dio a las preguntas planteadas en la guía, se propondrá llenar las siguientes tablas, para que las estudiantes teniendo la información organizada, puedan pensar en una regla general que les permita calcular la cantidad de agua y azúcar que se necesitan para preparar cualquier cantidad de recipientes.

N° de recipientes A	N° de vasos de agua	N° de cucharadas de azúcar
2		
4		
10		
20		

N° de recipientes B	N° de vasos de agua	N° de cucharadas de azúcar
2		
4		
10		
20		

La interpretación de infantes preescolares de entre 5 y 6 años sobre imágenes didácticas vinculadas con el conocimiento numérico que implica al uso del sistema monetario ($1, $2, $5 y $10)

Jocelin **Venegas** Martínez
Departamento de Investigaciones Educativas-CINVESTAV, Instituto Politécnico Nacional
México
joxxik@hotmail.com

Resumen

En este documento se presenta una parte de los hallazgos obtenidos a partir de una investigación que tuvo como objetivo documentar y analizar la interpretación que 6 infantes, de entre 5 y 6 años, pueden hacer sobre un conjunto de imágenes didácticas vinculadas con el conocimiento numérico que implica el uso del sistema monetario ($1, $2, $5 y $10). Para lograr este propósito se realizaron una serie de entrevistas individuales en las cuales cada niño debía resolver, con base en la información recuperada de una imagen, diversos problemas matemáticos relacionados con situaciones de compra-venta. Los resultados obtenidos muestran que la imagen didáctica es un recurso que beneficia la enseñanza de las matemáticas, pues posibilita que los niños desplieguen sus estrategias y conocimientos numéricos vinculados con el uso del dinero (conteo de colecciones, relaciones aditivas, cálculo mental, entre otras).

Palabras clave: resolución de problemas, nivel preescolar, imagen didáctica, habilidades numéricas, estructura semántica de un problema, sistema monetario.

Introducción

Este documento se divide en cuatro secciones. En la primera, se aborda la problemática subyacente de esta investigación, así como su relevancia y el objetivo que persigue. En la segunda, se explican, a grandes rasgos, algunos de los conceptos teóricos relevantes para este estudio. Después, en la tercera sección, se describen las características de los participantes, el escenario, los instrumentos, materiales, y el procedimiento seguido para la obtención del referente empírico y su análisis. Finalmente, se muestran los resultados y las conclusiones correspondientes a una parte de la investigación global.

Planteamiento del problema

Antecedentes

El Pensamiento Matemático (PM) es uno de los seis campos formativos que incluye el Programa de Educación Preescolar 2004 (PEP04) y está integrado por aspectos relacionados con el número, la forma, el espacio y la medida (SEP, 2004). Las competencias vinculadas con el número ocupan el 50% del campo formativo de PM, sin embargo su importancia aún no se ve reflejada en las prácticas educativas utilizadas por las docentes, en gran medida porque carecen

de una resolución didáctica, es decir, de las herramientas teóricas y metodológicas que les posibiliten la óptima implementación del PEP04, por lo que sigue observándose que a los niños de preescolar no se les dan oportunidades de desarrollar su pensamiento matemático, más allá de verse inmersos en tareas de correspondencia entre la cuantificación de elementos de una colección y el número que la representa (Fuenlabrada, 2005; Fuenlabrada, 1991; Griffin & Case, 1997).

Con base en el reconocimiento de esta situación, en los lineamientos metodológicos del PEP04 se propone la inserción de problemas matemáticos en contextos familiares a los niños pequeños, que tengan efectos prácticos para su vida y además los reten intelectualmente, de modo que los aprendizajes matemáticos que construyan en la escuela puedan aplicarse a situaciones reales y funcionales, por un lado, y permitan su desarrollo cognoscitivo, por otro (Edo i Baste, 2005; Fuenlabrada & Ávalos, 1996; Van den Heuvel- Panhuizen & Elia, 2013). El planteamiento de problemas desde los primeros años de escolaridad, se considera pertinente porque es una de las actividades más eficaces para la construcción del pensamiento matemático. De acuerdo con Block (1996, p. 22), "los conocimientos matemáticos son herramientas que se crean y evolucionan frente a la necesidad de resolver ciertos problemas", por lo que se "aprende matemáticas no sólo para resolver problemas, sino al resolverlos", razón por la cual no es necesario esperar a que los aprendices dominen determinado conocimiento matemático para así poder aplicarlo -tal como se ha hecho durante muchos años-, por el contrario, es mientras éstos resuelven problemas que están en posibilidad de desarrollar sus habilidades matemáticas. Desde este enfoque, un problema no se entiende como el planteamiento de situaciones cuyo único propósito sea la realización de operaciones o bien la aplicación de conocimientos ya adquiridos, por el contrario, un problema se denomina como tal cuando representa un obstáculo a resolver, que sea asimilable para el alumno, pero que al mismo tiempo le implique un desafío (Duhalde, 1996).

De igual forma, es importante que los infantes comiencen a desarrollar su aprendizaje matemático desde los primeros años de escolaridad, debido a que uno de los propósitos fundamentales del PEP04 es construir los cimientos necesarios para que al ingresar a la Primaria, los niños tengan un grado adecuado de conocimientos y habilidades que les permitan desarrollarse de manera efectiva en el nivel educativo mencionado[1]. Dos aspectos que inciden en que el cumplimiento de este propósito, son la formación y la capacitación docente para el mejoramiento de la enseñanza de las matemáticas en preescolar, procesos en los que se considera indispensable que las educadoras conozcan y dominen diferentes recursos didácticos, pues a través del uso adecuado de los mismos, pueden facilitar el acceso de los estudiantes a diferentes aprendizajes. Uno de estos recursos es la imagen, la cual a pesar de tener un potencial pedagógico significativo pues permite comunicar ideas matemáticas y sostener la reflexión sobre lo que se aprende (Agathangelou, Gagatsis & Papakosta, 2008; Gagatsis & Elia, 2004), ha sido poco estudiada. Probablemente, esto se debe a que las imágenes no son concebidas como un recurso fundamental para la enseñanza, y más bien se le otorga un papel secundario o complementario. Además, suele pensarse que su significado es transparente, y que por lo tanto, es innecesario ocuparse del análisis de su función en el proceso didáctico (Cruder, 2008). En

[1] Los resultados obtenidos por los Exámenes de la Calidad y el Logro Educativos (EXCALE) aplicados en año 2007 y 2011 a niños que concluyen el 3° de preescolar, indican que apenas el 50% de éstos posee el nivel básico de conocimientos y habilidades matemáticas ideales para comenzar la Primaria (INEE, 2008; INEE, 2013).

consecuencia, no existe un marco de referencia que oriente a las docentes respecto al uso de imágenes en contextos educativos, llevándolas a un uso meramente intuitivo de las mismas (López & Castañeda, 1993). Tal vez esta sea la causa por la que, aun cuando puede encontrarse un número importante de ilustraciones en los libros de matemáticas para preescolar, el modo en que se trabaja con éstas, en la mayoría de los casos, no explota toda su riqueza didáctica, inclusive, hay ocasiones en las que solamente cumple una función decorativa.

Objetivo

Analizar la función de las imágenes didácticas en la enseñanza de las matemáticas. En específico, en lo que corresponde a la interpretación que elaboran 6 infantes de entre 5 y 6 años de preescolar de imágenes didácticas vinculadas con el conocimiento numérico implicado en el uso del dinero que se encuentran en el libro "El niño hace matemáticas"[2].

Es importante precisar que se trabaja con situaciones matemáticas en las que está implicado el dinero porque, por una parte, es un recurso que se encuentra presente en diversas actividades que los niños de preescolar realizan en su vida diaria y por otra, porque el manejo del dinero, considerado en el PEP04, requiere la movilización de múltiples conocimientos vinculados con el número, tales como: el conteo, la identificación de numerales, el cálculo de cantidades, el reconocimiento del valor de las monedas, (Duhalde & González, 2003) y sobre todo, relaciones de equivalencia.

Preguntas de investigación

1. ¿Cómo interpretan los niños de entre 5 y 6 años de edad imágenes didácticas vinculadas con el conocimiento y uso del dinero?
2. ¿Cuáles son los conocimientos y habilidades numéricas que utilizan los infantes de entre 5 y 6 años de edad en la resolución de problemas relacionados con el manejo de dinero que se plantean a partir de imágenes didácticas?

Aportaciones

- Establecer la importancia de utilizar imágenes didácticas como recurso para la promoción del conocimiento numérico por parte de los infantes de entre 5 y 6 años de edad.
- Identificar cómo puede beneficiar la utilización de imágenes didácticas a la enseñanza de las matemáticas impartida por las educadoras de este nivel educativo.

Marco teórico

La imagen en la resolución de problemas matemáticos

A nivel mundial existe muy poca investigación sobre el uso de imágenes para la enseñanza de las matemáticas, y aún más durante la edad preescolar. Esto a pesar de que su utilización desde los primeros años de escolaridad es conveniente porque el pensamiento de los niños pequeños es predominantemente iconográfico, es decir, que las imágenes son un elemento importante en su desarrollo cognitivo, pues les ayuda a comprender y explicar la realidad. Además de que el aprendizaje avanza a través de 3 niveles: el enactivo, el icónico y el simbólico;

[2]El libro "El niño hace matemáticas", es una propuesta didáctica diseñada para infantes que cursan el tercer grado de preescolar centrada en la resolución de problemas, y contiene actividades que favorecen el desarrollo y fortalecimiento de las competencias planteadas en el PEP04.

en otras palabras, la función de las imágenes es ser mediadoras entre el entendimiento/comprensión práctico y el nivel teórico formal (Méndez, 1997; Bruner, 1961 citado en Elia & Philippou, 2004).

Deliyianni, Monoyiou, Elia, Georgiou, y Zannettou (2009) afirman que en los últimos años los efectos positivos del uso de imágenes en la resolución de problemas matemáticos se han estudiado, principalmente, desde dos vertientes. La primera, indaga la influencia de las representaciones visuales en la resolución de situaciones matemáticas, mientras que la segunda, tiene como objetivo analizar el rol de las representaciones visuales, espontáneas o funcionales, hechas por los estudiantes durante el proceso de solución de un problema. En adherencia con la primer vertiente, Theodoulou, Gagatsis y Theodoulou (2004), construyeron con base en la propuesta de Carney y Levin (2002)[3], una clasificación de las funciones que pueden desempeñar las imágenes en la resolución de problemas matemáticos. Ésta se integra por las siguientes categorías:

1. Decorativa. Sólo acompaña el problema sin proveer de información que es relevante para el contenido matemático del mismo.
2. Representativa. Como su nombre lo dice, representa una parte o todo el contenido del problema, pero no es indispensable para su comprensión o resolución.
3. Organizativa. Da dirección para la organización de la información matemática del problema, ya sea para elaborar imágenes o trabajo escrito que pueden ayudar a encontrar la solución (representaciones, números, etc.). Tampoco son necesarias para la solución del problema.
4. Informativa. Provee información que es esencial para la solución del problema, en otras palabras, el problema está basado en la imagen (e. g. una imagen en la que se presenta un aparador con ropa y sus precios tiene una función informativa, si se acompaña de un problema relacionado con la cantidad de dinero que un cliente de la tienda debe pagar al comprar determinadas prendas).

A partir de diversos estudios, varios investigadores coinciden en que las imágenes representativas, informativas y organizativas, pero no las decorativas tienen un efecto positivo en la resolución de problemas matemáticos (Agathangelou et al., 2008; Elia & Philippou, 2004). Pyke (2003) argumenta que las imágenes informativas tienen un rol más complejo en la resolución de problemas en comparación con el uso de otros modos de representación, pues requiere procesos mentales adicionales y más elaborados.

Para la presente investigación, una imagen didáctica es un recurso diseñado para propiciar aprendizaje a través de la interacción de los estudiantes con ésta. Esto significa que los niños pueden y deben obtener de la imagen los datos necesarios y suficientes para resolver situaciones matemáticas diversas, que se les planteen, en otras palabras, el problema está basado en la imagen. Esta definición posee características de la función informativa de la imagen.

Una experiencia en la que se utilizaron imágenes didácticas, desde esta perspectiva, fueron los libros de texto para matemáticas elaborados por Block y Fuenlabrada en el cambio curricular del nivel Primaria ocurrido en 1993. Cada lección del libro estaba integrada por una imagen con

[3] Carney y Levin (2002) conceden 5 funciones a las imágenes, específicamente en el procesamiento de textos: decorativa, representativa, organizativa, interpretativa y transformativa.

muy poco texto, a partir de la cual podían plantearse diversos e interesantes problemas para los niños (Block & Fuenlabrada, 2007). Otro caso similar se presentó en el libro correspondiente al segundo nivel de matemáticas del proyecto denominado "Dialogar y descubrir", diseñado para el sistema de cursos comunitarios a petición del Consejo Nacional del Fomento Educativo (CONAFE) por el Departamento de Investigaciones Educativas del Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (CINVESTAV). En este libro se proponen problemas a nivel gráfico "Por ejemplo, se plantean problemas en los que es necesario seleccionar la información de una fuente de datos, como el dibujo de una tienda en el que aparece varios artículos con sus precios, una nota de compra, un fragmento de mapa de carreteras, etcétera" (Block & Fuenlabrada, 1999, p. 282).

Resolución de problemas en el preescolar

La resolución de problemas como actividad generadora de conocimientos matemáticos, fue ampliamente reconocida en México a partir de la reforma curricular efectuada en 1993 para el nivel Primaria (Ávila, 2006). Sin embargo, aun cuando en los programas de educación matemática y en el discurso docente se resalta la importancia de plantear y solucionar problemas como recurso principal para favorecer el aprendizaje matemático, prevalece un predominio de la enseñanza de los signos matemáticos (e. g. algoritmo de la suma) sobre el desarrollo de la capacidad para resolver problemas (Baroody, 2000; Fuenlabrada, 1995). Esta situación permea el nivel preescolar, pues los problemas se utilizan como "un espacio de aplicación del conocimiento" y no como un recurso para propiciarlo y favorecerlo. Por el contrario, las educadoras concentran sus esfuerzos en la enseñanza de aspectos específicos del número -como el conteo y la representación gráfica de los primeros números-, más allá de promover el uso significativo de tales conocimientos en diversas situaciones matemáticas. Es probable que esta realidad sea consecuencia de algunas creencias docentes que aún persisten. La primera, es que los infantes preescolares son muy pequeños para resolver un problema y necesitan que se les diga qué hacer. Y la segunda, es la idea generalizada, incluso en niveles educativos más avanzados, de que es necesario tener cierto dominio sobre el recurso convencional de cálculo (operaciones, ecuaciones, etc.) para poder resolver un problema (Fuenlabrada, 2009).

En el nivel de preescolar, el desarrollo del pensamiento matemático puede favorecerse si a los niños se les da ocasión de "recrearse" con el conteo, resolviendo problemas que involucren a los primeros diez números (el resultado puede rebasar al 10); en este caso sus procedimientos tendrán que ver con juntar colecciones, separarlas, igualarlas, distribuirlas, compararlas; pero "darles" como recurso la operatoria (sumas y restas) no tiene sentido, éste les resulta ajeno y distante a lo que ellos espontáneamente hacen cuando su conocimiento se sitúa en los primeros números y el conteo. No obstante que para muchos (educadoras y padres de familia) la aparición de las "cuentas" les resulte "más matemático" o "de mayor nivel" (Fuenlabrada, 2009).

Tipos de problemas aditivos

En los últimos años el estudio de los problemas matemáticos se ha concentrado en el análisis de su estructura semántica, ya que, de acuerdo con Maza (1989, p. 26), ésta determina "las acciones y relaciones (entre las cantidades) implícitas en un problema". De esta forma, la estructura semántica influye en el grado de dificultad de un problema y por lo tanto en las estrategias implementadas para solucionarlo (Bermejo & Rodríguez, 1987; Lago, Rodríguez, Lozano & Dopico, 2001). En el preescolar, más allá de ocupar una determinada operación, es importante que los más pequeños puedan establecer la relación semántica entre los datos del

problema, lo que implica "razonar sobre las acciones" que realizan frente a éstos (Fuenlabrada, 2009). Pues además de que la operatoria se aborda hasta la Primaria, la comprensión de la relación que guardan los datos contenidos en un problema, implica ya en sí misma, una tarea cognitiva compleja que lleva a los niños a poner en juego las diversas estrategias y conocimientos matemáticos que poseen (e. g. conteo, conocimiento de las relaciones aditivas).

De acuerdo con Vergnaud (1991), los problemas de tipo aditivo pueden ser de medida, de transformación y de relación. A continuación se explica, de manera general, en qué consiste cada uno de ellos:

1. Medida. Dos medidas componen una tercera. Ejemplo. *Emir tiene 3 paletas de chile y 5 paletas de dulce ¿Cuántas paletas tiene Emir?*

   En este problema el 3 y el 5 son la medida (la cantidad de) paletas de chile y de dulce que tiene Emir.

2. Transformación. Implican una acción directa sobre una cantidad a la que se añade o quita algo para dar como resultado una cantidad mayor o menor (Bermejo & Rodríguez, 1991; Orrantia, González, & Vicente, 2005).

   a) Una medida sufre una transformación y da lugar a otra medida. Ejemplo. *Emir tenía 3 paletas y su mamá le regaló 5 paletas ¿Cuántas paletas tiene Emir?*

   El 3 es una medida (las paletas que tiene Emir) el 5 ya no lo es; ahora está funcionando como una transformación, porque modifica la cantidad de paletas que tenía Emir (de 3 pasó a tener 8 paletas).

   b) Dos transformaciones se componen para dar lugar a otra transformación. Ejemplo. *Emir tenía algunas paletas, le regaló 3 a Yahir y a su mamá le regaló 5. A Emir ya no le quedaron paletas ¿Cuántas paletas tenía Emir?*

   En este problema tanto el 3 como el 5 son transformaciones, cada uno modificó la cantidad de paletas que tenía Emir, en el proceso él se quedó sin paletas; "recuperar" la cantidad de paletas que éste tenía antes de regalarlas pasa por desandar el camino.

3. Relación. Se establece una relación entre los elementos (medidas -cantidades-) que integran el problema. Ejemplo. *Emir tiene 3 paletas y su mamá tiene 5 paletas más que Emir ¿Cuántos paletas tiene la mamá de Emir?*

   En este problema, el 3 nuevamente es una medida; sin embargo el 5 es una relación. El 5 en ese problema no es una medida, porque ni Emir ni su mamá tienen 5 paletas; tampoco el 5 modifica la cantidad de paletas de Emir como tampoco las que tiene su mamá, el 5 no es una transformación. El 5 en este problema, establece una relación entre la cantidad de paletas que tienen ambos sujetos.

Otros tipos de problemas que pueden plantearse en el preescolar son los de separación y comparación. Éstos se describen en seguida:

4. Separación. Para solucionar este tipo de problemas es necesario separar o "dividir", una cantidad en determinadas partes. Ejemplo. *¿Para cuántas paletas de $2 te alcanza con estos $5?*

   En este caso, es preciso "estimar" cuántas paletas de $2 se pueden comprar con $5. Para lo cual se separan o "dividen" los $5 en conjuntos de $2 para obtener la respuesta requerida.

5. Comparación. Como su nombre lo dice, implican la comparación de dos cantidades -colecciones-, una es la comparada y otra la que sirve de referente; es decir, se establece una relación de similitud o equivalencia entre dos o más colecciones. Ambas se comparan para producir una tercera (Orrantia et al., 2005). Ejemplo. *Emir tiene 5 paletas y su mamá tiene 2 paletas ¿Quién tiene más paletas?*

   En este problema tanto el 2 como el 5 son medidas, mismas que deben compararse para determinar el resultado deseado.

Metodología

Este estudio es de tipo cualitativo, por lo que para la exploración de los conocimientos matemáticos de los niños, se privilegió su punto de vista, ya que permite profundizar en sus teorías personales y comprender cómo, a partir de las mismas, se explican, construyen y emplean las matemáticas; en este caso, lo referente al manejo del dinero y las competencias numéricas implicadas en la resolución de problemas.

Escenario y participantes

La experimentación se llevó a cabo en un Centro de Educación Preescolar privado ubicado en la delegación Coyoacán del Distrito Federal. La muestra quedó constituida por seis infantes, 3 niños y 3 niñas, cuyas edades oscilaron entre los 5 años 8 meses y los 6 años 8 meses, 3 de los niños y 2 de las niñas cursaban el 3° de preescolar, mientras que sólo una niña pertenecía al 2°del mismo nivel educativo.

Instrumentos y materiales

Se utilizaron cinco lecciones del libro "El niño hace matemáticas" (Fuenlabrada, Ortega, Valencia y Vivanco, 2008), porque a partir de las imágenes que lo conforman se pueden plantear situaciones matemáticas que es probable que se presenten en ambientes que son familiares para los infantes preescolares, por medio de las cuales desarrollen una comprensión mayor y una conciencia crítica de cómo y cuándo emplear cualquier contenido matemático (SEP, 2004). El libro se acompaña del otro texto denominado "Secuencias de enseñanza propuestas en ¿Cómo desarrollar el pensamiento matemático? Fichero de Actividades didácticas para Preescolar", éste contiene 40 fichas distribuidas de acuerdo con el peso curricular que se otorga a cada aspecto del campo formativo PM en el PEP04. Cada ficha se estructura en tres o cuatro versiones, éstas van aumentando progresivamente de grado de dificultad con el propósito de atender las posibilidades cognitivas de los niños en el tratamiento de cada contenido temático del PEP04. La versión de las fichas que se utilizó en este estudio fue la que implica mayor grado de dificultad, ya que en ellas se indica cómo trabajar con las imágenes didácticas de las lecciones elegidas.

Todas las sesiones se grabaron en audio y video. Asimismo, se registró en un cuaderno de notas las respuestas y expresiones de los participantes que se consideraron relevantes.

También se usaron monedas de diferente denominación ($10, $5, $2 y $1) como material de apoyo para la resolución de los problemas planteados en caso de ser necesario, ya que en la mayoría de los casos, los infantes podían decidir si las utilizaban o no.

Procedimiento

Primero se elaboraron diferentes problemas de comparación, separación, medida y relación, con base en las 5 lecciones seleccionadas del libro "El niño hace matemáticas".

Además, se diseñaron una serie de actividades cuyo objetivo fue explorar los conocimientos que tenían los niños sobre el valor de las monedas y la equivalencia de cantidades.

Después se solicitó a los participantes, en una entrevista individual, resolver los problemas planteados para cada lección. En total se tuvieron 5 sesiones con cada niño, una por lección. En concreto, la tarea que se les solicitaba era explorar la imagen y reconocer los elementos que la integraban, para después resolver los problemas que se les planteaban con base en la información observada. En total se plantearon 59 situaciones matemáticas, en el Cuadro 1 puede observarse el modo en que se distribuyen por tipo de problema, lección y sesión.

Cuadro 1
Distribución de los problemas por lección y sesión

Tipo de Problemas	Lección 14 Sesión 1	Lección 38 Sesión 2	Lección 15 Sesión 3	Lección 39 Sesión 4	Lección 40 Sesión 5	Total
Comparación	2	3	3	2	2	12
Medida (+)	3	5	2	7	3	20
Medida (-)	5	2	1	2	4	12
Relación (+)	1	1	2	0	0	6
Relación (-)	1	1	0	0	0	2
Separación	0	1	2	2	2	7
Total	12	13	10	13	11	59

Finalmente se realizó la transcripción y la organización de los datos por lección, de modo que por cada niño se tienen 5 entrevistas, es decir 30 archivos en total. La codificación de los datos se elaboró mediante el programa *Atlas-ti 4.1.,* debido a que sus características favorecen el análisis cualitativo de grandes cuerpos de datos textuales, gráficos y de vídeo.

Resultados

A continuación se presentan, de manera sucinta, los resultados correspondientes a las estrategias utilizadas por los participantes de este estudio para resolver los problemas planteados a partir de la Lección 15 "¿Cuánto gasta cada niño?". Se seleccionaron solamente tres problemas por considerarse los más representativos, así como por optimizar la información.

De acuerdo con la clasificación de Carpenter y Moser (1984) y Baroody (2000), en los siguientes ejemplos se realizó un análisis de las estrategias que los infantes pusieron en juego para enfrentarse a las situaciones matemáticas que se les presentaron.

Problema de medida. *¿Cuánto pagaría el segundo niño por un cuaderno ($8) y un pegamento ($3)?*

MJ y M eligen pagar $8, el precio del cuaderno, una de las cantidades que forman parte del planteamiento, por lo que podría decirse que éste es un *error de representación,* el cual es común en niños preescolares y se refiere a la falta de comprensión del problema. Por lo general, este tipo de error se refleja en las siguientes tres acciones: repetir una de las cantidades mencionadas en el problema, seleccionar una operación o estrategia inadecuada, o bien, inventar una respuesta. La mayoría de los errores cometidos por los niños pequeños se producen en esta fase.

T, E1, C y E2 responden que pagarían $11. E1, C y E2, se apoyan en el conteo de sus dedos para llegar a este resultado. C y E1 comienzan representado el número menor con sus dedos, es decir, 3, y a éste le agregan 8. Así, utilizan primero la estrategia de *pautas digitales*

pues representan con sus dedos el 3 y después cuentan dedo por dedo las 8 unidades que les falta, es decir, que en esta última parte ocupan la estrategia de *cuenta concreta global.*

Por el contrario, T resuelve el problema mediante una estrategia mental. Cuando se le cuestiona cómo llegó a este resultado, representa el 8 con sus dedos (el precio del cuaderno) y dice "y si le sumo 3" (del pegamento), son 11", agrega las últimas 3 unidades de manera mental. Tal parece que ocupa la estrategia de *contar todo a partir del término mayor*, pues comienza contando desde el número más grande y agrega la cantidad menor. Este es el procedimiento informal de adición más económico.

Problema de relación. *Tenías una moneda de $10 y no te sobró nada ¿qué pudiste haber comprado?*

Tres de los participantes, E2, C y T responden que comprarían una lonchera ($9) y una goma ($1). Y ya que todos comenzaron por elegir el producto de mayor precio, puede decirse que echaron mano de la estrategia *contar a partir del término mayor*.

Por otro lado, E1 comienza a resolver el problema eligiendo un producto que tenga un precio "chiquito", y a éste le va agregando otros productos de mayor precio. Primero selecciona la goma ($1), después el sacapuntas ($3), el pegamento ($3) y finalmente, un lápiz ($4). Al parecer lleva la suma mental de los productos, pero después verifica su resultado con el conteo de sus dedos "1 más 2 (el precio de la goma y el sacapuntas), 3 más 3 (resultado más el pegamento) 6, más 4, 1, 2, 3, 4 (va levantando sus dedos uno por uno), 10 (a los 6 que tenía le suma los $4 del lápiz y pone el número 10 con sus dedos". En lo que corresponde a la estrategia concreta, lo que hace E1 es utilizar primero la *pauta digital* al representar el número 1, 2 y 6, sin embargo después ocupa la estrategia de *cuenta concreta global*, que implica contar elemento por elemento, esto ocurrió cuando se contaron las últimas 4 unidades.

Problema de medida. *¿Cuánto pagaría el primer niño por unas crayolas ($6) y las etiquetas ($5)?*

MJ dice que pagaría "un 5 y un 6". Para llegar a esta respuesta agrupa 5 monedas de diferente denominación (que representa el precio de las etiquetas) y otro conjunto de 6 monedas, también de distinta denominación (que representa el precio de las crayolas). Sin embargo no considera juntar ambos conjuntos para saber cuánto pagaría en total, es decir que manifiesta un *error de representación.*

E1 y C utilizan estrategias mentales y concretas. E1 dice de inmediato que pagaría 11, utiliza una estrategia mental, sin embargo, verifica su respuesta contando con sus dedos, pone primero 6 dedos (el precio de las crayolas) y dice "6 más 5, y llevo 4, más 5, 11", quita el 6 y pone con los dedos de su mano el número 5, utilizando así la estrategia de *contar todo a partir del término mayor*. Por su parte, C se auxilia de sus dedos, primero cuenta 6 con sus dedos (el precio de las crayolas) a partir de ahí suma mentalmente el precio de las etiquetas, o sea 5, es decir que ocupa la *estrategia de pauta digital* y de ahí suma el resto.

T y E2 resuelven el problema de manera mental. Al cuestionarle a T cómo llegó a su respuesta dice "lo sumo, 6 más 6, 12 y si, y si, y si le quitó 1, es 11". Esta estrategia correspondería a la de *hechos numéricos*, es una de las más avanzadas y consiste en el descubrimiento de reglas del sistema de numeración y propiedades de las operaciones como la conmutatividad y la asociatividad. Tal como lo hace T, se trata de componer y descomponer los números para hallar la suma total o resultado de un problema.

En resumen, las estrategias utilizadas por los infantes se dividen en concretas y mentales (Carpenter & Moser, 1984; Baroody, 2000). En las estrategias concretas podemos encontrar la que corresponde a la *cuenta concreta global* y la denominada como *pauta digital*. En lo que se refiere a las estrategias mentales, se observó con mayor frecuencia la estrategia de *contarlo todo a partir del término mayor,* así como estrategias de *hechos numéricos*, por ejemplo, el descubrimiento de ciertas reglas sobre el sistema de numeración. Asimismo, se observaron también *problemas de representación*, lo que refleja la necesidad de seguir planteando situaciones que lleven a los niños a pensar matemáticamente.

Conclusiones

Los resultados mostrados evidencian que al enfrentar a niños preescolares con problemas matemáticos diseñados a partir de una imagen didáctica, se propicia que éstos pongan en juego las estrategias vinculadas con el número que poseen, lo que repercute de manera favorable en su comprensión de las matemáticas, ya que eventualmente podrán complejizar dichas estrategias hasta conseguir hacer uso de recursos convencionales de solución, como la operatoria. Por lo tanto, se puede decir que, en efecto, la incorporación de imágenes didácticas para la enseñanza de las matemáticas conforma un recurso que propicia la construcción del pensamiento matemático infantil, que sin embargo, ha sido poco estudiado. Es necesario, además de seguir realizando investigaciones sobre el tema, brindar una orientación metodológica pertinente a las educadoras, desde su formación, en lo que respecta al uso de recursos didácticos, pues no basta con que exista una innovación para que se implemente de manera eficaz.

Referencias y bibliografía

Agathangelou, S., Gagatsis, A. & Papakosta, V. (2008). The role of verbal description, representational and decorative picture in mathematical problem solving. En Gagatsis, A. (Ed.), *Research in Mathematics Education. Conference of Five Cities: Nicosia, Rhodes, Bologna, Palermo, Locarno* (39-56). Nicosia-Cyprus: University of Cyprus. Recuperado de http://www.academia.edu/2657822/An_ICT_environment_to_assess_and_support_students_mathematical_problem-solving_performance_in_non-routine_puzzle-like_word_problems

Ávila, A. (2006). Transformaciones y costumbres en la matemática escolar. México: PAIDÓS EDUCADOR.

Baroody, A. (2000). El pensamiento matemático de los niños. Un marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial y educación especial. Madrid: Visor.

Bermejo, V. & Rodríguez, P. (1991). La operación de sumar: el caso de los problemas verbales. *SUMA*, (8), 35- 39. Recuperado de http://revistasuma.es/IMG/pdf/8/035-039.pdf

Bermejo, V. & Rodríguez, P. (1987). Estructura semántica y estrategias infantiles en la solución de problemas verbales de adición. *Infancia y Aprendizaje,* 39, 71-80. Recuperado de http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=749248

Block, D. (1996). Comparar, Igualar, Comunicar en Preescolar: análisis de situaciones didácticas. *Básica. Revista de la escuela y del maestro*, 11 (3), 21-33. Recuperado de http://www.die.cinvestav.mx/Portals/0/SiteDocs/Investigadores/DBlock/EstudiosDidEPN/compararIgualarcomunicar.pdf

Block, D. & Fuenlabrada I. (2007). Innovaciones curriculares en matemáticas. *Documento DIE* 45, 1-16.

Block, D. & Fuenlabrada I. (1999). Materiales curriculares de matemáticas para el nivel básico. En Remedi, E. (Ed.), *Encuentros de investigación educativa* 95-98 (259-286). México: Plaza y Valdes Editores. Recuperado de

http://www.die.cinvestav.mx/Portals/0/SiteDocs/Investigadores/DBlock/Ensayos/1315-materialesCurriculares1.pdf

Carney, R. & Levin, J. (2002). Pictorial Illustrations Still Improve Students´ Learning From Text. *Educational Psychology Review*, 12 (1), 5-26. Recuperado de http://www.ucs.mun.ca/~bmann/0_ARTICLES/Graphics_Carney02.pdf

Carpenter, T. & Moser J. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education,* 15, 179-202. doi: 10.2307/748348

Cruder, G. (2008). La educación de la mirada: sobre los sentidos de la imagen en los libros de texto. Buenos Aires: La Crujía.

Deliyianni, E., Monoyiou A., Elia, I., Georgiou, C., & Zannettou, E. (2009). Pupils' visual representations in standard and problematic problem solving in mathematics: their role in the breach of the didactical contract. *European Early Childhood Education Research Journal*, 17 (1), 95-110. doi: 10.1080/13502930802689079

Duhalde, M. (1996). Al encuentro de la matemática. En González, M. (Ed.), *Articulación entre el jardín y la EGB*. *La alfabetización expandida* (85-111). Buenos Aires: AIQUE.

Duhalde, M. & González, M. (2003). *Encuentros cercanos con la matemática*. Buenos aires, Argentina: AIQUE.

Edo i Baste, M. (2005). La educación matemática en infantil. *EDUCAR: Revista de Educación*, (32), 23-38.

Elia, I. & Philippou, G. (2004) The functions of pictures in problem solving. En Johnsen, M. & Berit, A. (Eds.), *Proceeding of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 327- 33. Bergen, Norway: Bergen University College. Recuperado de http://www.emis.de/proceedings/PME28/RR/RR193_Elia.pdf

Fuenlabrada, I. (2009). *¿Hasta el 100? ¡NO! ¿Y las cuentas?... TAMPOCO Entonces ¿Qué?* México: SEP. Recuperado de http://www.curriculobasica.sep.gob.mx/pdf/preescolar/pensamiento_matematico/FUENLABRADA.pdf

Fuenlabrada, I. (2005). El programa de educación preescolar 2004: una nueva visión sobre las matemáticas en el jardín de niños. *Cero en conducta*, (51), 55-74.

Fuenlabrada, I. (1995). Actualización en la enseñanza de las matemáticas. *Sinéctica,* (7), 30-34.

Fuenlabrada, I. (1991). La investigación en didáctica de la matemática. Un problema actual. *Avance y Perspectiva*, 10, 226-230.

Fuenlabrada, I. & Ávalos, A. (1996). Cómo se resuelven los problemas matemáticos. Las estrategias espontáneas vs. las estrategias convencionales. *Educación 2001*, (19), 32-35.

Fuenlabrada, I. Ortega, J. Valencia, R & Vivanco, B. (2008). El niño hace matemáticas. Libro para tercero preescolar. México: Fuenlabrada Velázquez, Irma Rosa.

Gagatsis, A. & Elia, I. (2004). The effects of different modes of representation on mathematical problem solving. En Johnsen, M. & Berit, A. (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (447- 454). Bergen, Norway: Bergen University College. Recuperado de http://emis.impa.br/EMIS/proceedings/PME28/RR/RR171_Gagatsis.pdf

Griffin, S. & Case, R. (1997). Re-thinking the primary school math curriculum: An approach based on cognitive science. *Issues in Education*, 3, 1-20.

INNE (2008). *El aprendizaje en tercero de preescolar en México*. Recuperado de http://www.inee.edu.mx/index.php/72-publicaciones/resultados-de-aprendizaje-capitulos/563-el-aprendizaje-en-tercero-de-preescolar-en-mexico-lenguaje-y-comunicacion-pensamiento-matematico-resumen-ejecutivo

INEE (2013). Exámenes de la Calidad y el Logro Educativos. Tercer grado de preescolar, aplicación 2011. Tablas de resultados de logro académico de los niños. Recuperado de http://www.inee.edu.mx/index.php/bases-de-datos/bases-de-datos-excale/excale-00-ciclo-2010-2011

Lago, M., Rodríguez, P., Lozano, M. & Dopico, C. (2001). La reformulación de los enunciados del problema: un estudio sobre las variables que inciden en el éxito infantil en los problemas de comparación. *SUMA*, (37), 55-62. Recuperado de http://revistasuma.es/IMG/pdf/37/055-062.pdf

López, M. & Castañeda, S. (1993). Inducción y empleo de la imagen como recurso instruccional. En Jiménez, R. & Yankelevich, G. (Eds.), *Imágenes. De los Primates a la Inteligencia Artificial* (75-98). México: UNAM, Instituto de Investigaciones Sociales.

Maza, C. (1989). Sumar y restar. El proceso de enseñanza y aprendizaje de la suma y de la resta. Madrid: Visor.

Méndez, J. (1997). Dimensiones asociadas con el papel de la imagen en material didáctico. *Perfiles Educativos*, (75), 1-14. Recuperado de http://www.redalyc.org/pdf/132/13207506.pdf

Orrantia, J., González, L. & Vicente, S. (2005). Un análisis de los problemas aritméticos en los libros de texto de Educación Primaria. *Infancia y Aprendizaje*, 28 (4), 429-451. Recuperado de http://hdl.handle.net/10366/22530

Pyke, C. (2003). The use of symbols, words, and diagrams as indicators of mathematical cognition: A causal model. *Journal for Research in Mathematics Education,* 34(5),406-432. doi: 10.2307/30034794

SEP (2004). Programa de renovación curricular y Pedagógica de la Educación Preescolar. México.

Theodoulou, R., Gagatsis, A. & Theodoulou, A. (2004). Un' imagine vale piu di mille parole...Ma che tipo di imagine risulta piu efficace nell attivita di problem solving matematico degli studenti? *La matematica e la sua didattica*, 2, 4-32. Recuperado de http://www.researchgate.net/profile/Ricardo_Cantoral/publication/262257328_Uno_studio_socioepistemologico_sul0la_predizione/links/0c960537a4b85a967600000

Vergnaud, G. (1991) El niño, las matemáticas y la realidad: Problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. México: Trillas

Van den Heuvel- Panhuizen, M. & Elia, I. (2013). The role of picture books in young children's mathematical learning. En English, L. & Mulligan, J. (Eds.), *Reconceptualizing Early Mathematics Learning* (227-251). Springer: Dordrecht. doi: 10.1007/978-94-007-6440-8_12

O desenvolvimento das noções geométricas na educação infantil: um estudo de caso

Suelene de Rezende e **Silva**
Universidade Federal de Mato Grosso
Brasil
sueleners@gmail.com
Rute Cristina Domingos da **Palma**
Universidade Federal de Mato Grosso
Brasil
rutecristinad@gmail.com

Resumo

Neste texto, apresentamos os resultados de uma investigação sobre o desenvolvimento das noções geométricas na Educação Infantil. O objetivo da pesquisa foi compreender quais noções geométricas as crianças mobilizam e manifestam durante brincadeiras. Para a produção de dados desenvolvemos uma proposta de intervenção a partir de brincadeiras, dentre elas a "Caça ao tesouro" e a "Construção do muro do gato", as quais discutimos neste trabalho. Para fins de análise, os dados foram organizados através de episódios, que por sua vez foram divididos em cenas que apresentaram os diferentes momentos do movimento das crianças. A partir da análise destes episódios, consideramos que as crianças mobilizaram noções geométricas referentes à percepção do espaço (posição, direção, sentido, distância, pontos de referência) e das formas, comparando, organizando objetos e diferenciando-os a partir de suas características. Destacamos ainda que elas manifestaram-se nesse processo, principalmente, através da oralidade e de gestos.

Palavras chave: Educação Infantil, Educação Matemática, Noções geométricas.

Nesta pesquisa assumimos como premissa que o saber matemático se constitui nas relações humanas, caracterizando-se como um conhecimento social. Dessa maneira, considera-se que o trabalho com a Educação Matemática na infância prevê o desenvolvimento de atividades que sejam significativas para a criança.

Os questionamentos, que originaram a presente investigação, relacionam-se ao trabalho insuficiente e muitas vezes descontextualizado que comumente observamos no que diz respeito ao desenvolvimento das noções geométricas na Educação Infantil. De modo geral, o que se percebe é que as práticas pedagógicas desencadeadas nesse sentido envolvem exercícios mecânicos de reconhecimento e a nomeação das formas geométricas planas, desconsiderando-se as noções intuitivas das crianças, a tridimensionalidade do espaço e dos objetos e o próprio movimento. Nesse processo, ignora-se que as primeiras experiências das crianças são justamente de caráter espacial e constituídas pela exploração do espaço ao seu redor e dos objetos que o compõe.

Assim, a pergunta norteadora dessa investigação foi: quais noções geométricas as crianças de duas turmas de Educação Infantil mobilizam e manifestam a partir das brincadeiras?

Inicialmente, consideramos necessário apresentar alguns pressupostos em que nos fundamentamos para a discussão, o que faremos na próxima sessão.

A criança, o brincar e a matemática

Consideramos a criança, como protagonista social, que traz consigo um potencial criativo e interpretativo e que aprende e se desenvolve por meio das relações que estabelece com os seus pares e com seu entorno.

Nesse sentido, Vigotsky (1998) aponta que o desenvolvimento e a aprendizagem são aspectos interdependentes e que estes são mediados por artefatos ou instrumentos. Segundo o mesmo autor, a linguagem é o mais importante desses instrumentos de mediação, pois é através dela que a criança amplia a sua capacidade de representar e atribuir significados à realidade.

Conforme a criança se insere nesse movimento de atribuição de significados, apropria-se dos conhecimentos socialmente construídos, estabelece diversas relações e amplia suas noções sobre o mundo no intuito de interagir socialmente. Dentre esses conhecimentos estão os matemáticos.

Segundo Moura (2007), a linguagem matemática consiste em um instrumento que amplia a capacidade do ser humano em adaptar-se e viver em sociedade.

Assim, entende-se que o acesso ao conhecimento matemático é, para a criança, uma necessidade, pois ele constitui-se como um mediador cultural que vai instrumentalizá-la para o convívio social e a resolução de problemas cotidianos.

Para oportunizar e garantir este acesso, compreende-se que são necessárias práticas pedagógicas que não destituam as características da infância, mobilizando a criança a ampliar seus conhecimentos a partir da ludicidade e da interação com seus pares, numa perspectiva de dialogicidade.

Partimos da premissa de que esse seja o papel das Instituições Educativas, inserir a criança nesse universo do saber instituído, a partir das suas próprias necessidades, buscando percebê-la em suas especificidades, predispondo-nos a entender o que ela precisa apreender para exercer sua cidadania.

Concordamos com Leontiev (1991a, 1991b) que esse processo de aprendizagem é desencadeado pela *atividade principal* da criança: o brincar. O autor considera que a partir dessa atividade ocorrem as principais mudanças nas funções psicológicas superiores, ou seja, é através do brincar que a criança se apropria do mundo e de novos conhecimentos.

Ainda considerando os apontamentos de Elkonin (1987), entende-se que a atividade do brincar não consiste somente em situações desencadeadas livremente na interação entre as crianças. Para além dessa modalidade de brincadeira livre, acreditamos que o professor pode promover intencionalmente atividades que mobilizem as crianças e possibilitem diversas interações e que, conforme a maneira como este professor conduza essas atividades, também consistirão em brincadeiras, podendo configurar-se enquanto atividade (Leontiev, 1991a, 1991b).

Dessa maneira, acreditamos que é papel da Educação Infantil, enquanto espaço social mediador de interações e aprendizagens, tomar como ponto de partida a experiências e saberes

da criança ampliando-os, promovendo ações pedagógicas intencionalmente planejadas, desencadeadas pelas brincadeiras.

Diante dos pressupostos teóricos apresentados e no intuito de responder nossa pergunta de investigação desenvolvemos o caminho metodológico apresentado na próxima sessão.

Caminho metodológico

Esta pesquisa busca compreender as manifestações de um fenômeno em sua complexidade, o qual consiste em entender quais noções geométricas as crianças mobilizam e manifestam durante as brincadeiras, no contexto de duas turmas de Educação Infantil, caracterizando-se assim, em um estudo de caso qualitativo.

Nesse sentido, concordamos com Stake (2012, p. 11) que "o estudo de caso é um estudo da particularidade e complexidade de um caso único, conseguindo compreender a sua atividade no âmbito de circunstâncias importantes". Para o autor, o caso pode ser uma criança, uma sala, um professor ou uma situação específica.

A nossa pesquisa foi realizada em uma escola da Rede Municipal de Ensino de Cuiabá/ MT/Brasil, que atende a Educação Infantil e o 1º Ciclo, sendo desenvolvida em duas turmas da Educação Infantil com crianças na faixa etária de cinco anos.

O processo de produção de dados (Gonzáles Rey, 2010) ocorreu em momentos distintos, porém complementares, sendo estes: 1) reuniões para conversar sobre as propostas e o desenvolvimento das atividades com as professoras regentes das salas de aula; 2) desenvolvimento das atividades pela pesquisadora com o acompanhamento das professoras; 3) reunião com as professoras para a discussão sobre as atividades desenvolvidas com as crianças.

Para a produção de dados, desenvolvemos uma proposta de intervenção com intuito de promover algumas brincadeiras que pudessem desencadear as discussões de espaço e forma nas turmas pesquisadas, dentre elas a "Caça ao tesouro" e a "Construção do muro do gato", as quais discutimos neste trabalho.

As atividades elaboradas e desenvolvidas tinham como objetivo, através da mediação simbólica associada à resolução de problemas, levar as crianças a se mobilizarem para atender a necessidade dos personagens, ampliando suas noções de espaço e forma.

Destacamos ainda que, para fins de análise das atividades, foram considerados os registros fotográficos, videográficos, orais e pictográficos das crianças, assim como as anotações da pesquisadora, tendo em vista a utilização das mais variadas formas de registro para que a voz e as ações das crianças não se perdessem no processo.

A organização dos dados para análise ocorreu através da constituição de episódios que por sua vez foram divididos em cenas, as quais apresentaram ações específicas ilustrando os diferentes momentos do movimento das crianças nas atividades.

Análise dos resultados

Episódio 1 – A brincadeira da caça ao tesouro.

Este episódio compreende a brincadeira da "Caça ao Tesouro", que teve como móvel desencadeador a história adaptada "Caça ao tesouro no Sítio".

Lá no Sitio do Pica-pau Amarelo Pedrinho, Narizinho e Emília aprontam as maiores confusões e brincam de tudo: amarelinha, pular corda, empinar pipa, bolinha de gude, pega-pega e esconde-esconde. Eles brincam juntos todos os dias até cansar de tanto brincar, depois começam tudo de novo.

Um dia, quando eles menos esperavam, apareceu por aquelas redondezas um pirata, o primeiro a vê-lo foi o Saci, que foi correndo (pulando) contar ao Pedrinho. O menino se escondeu na mata para descobrir o que o pirata queria e viu que ele carregava um baú do tesouro e procurava um lugar para escondê-lo. Pedrinho não pensou duas vezes e começou a segui-lo. Só que o pirata não era bobo não! Ele estava fugindo há muito tempo, tentando esconder o seu tesouro, e percebeu que tinha alguém por perto.

Vendo que não poderia esconder seu tesouro com segurança ali, usou seu medalhão mágico e abriu uma porta que o levaria a outro lugar mais seguro. Sabe onde ele foi parar? Aqui na nossa escola! Então, ele escondeu o seu tesouro para que nem Pedrinho, nem outros piratas o encontrassem. Onde será que o pirata escondeu seu tesouro? Será que poderíamos encontrá-lo? Ah! O pirata muito esperto desenhou um mapa para não esquecer onde tinha escondido seu tesouro, só que, na pressa de fugir, deixou-o cair. Se nós tivéssemos o mapa poderíamos encontrar o tesouro que ele escondeu? Vejam! O mapa está aqui! Então, vamos procurar o tesouro do pirata?

Configuramos a partir deste episódio, as três cenas a seguir destacadas:

Cena 1
Os conhecimentos prévios manifestados durante a contação da história.

P[1]: Como é que a gente vai fazer pra virar pirata?

Thalia: Colocar um negócio vermelho, cabeça?

P: Negócio vermelho? Fita?

P: O que você acha, Allan?

Allan: Coloca a roupa do pirata e coloca a máscara do pirata.

Thalia: Tem que amarrar aqui, oh? (*passando as mãos pelo rosto e levando-as para trás da cabeça, dando a impressão que tinha que amarrar algo naquele local*[2])

Marlon: Tem que colocar um chapéu de pirata.

P: Espera aí, vou ver se eu tenho essas coisas que vocês falaram aqui para gente virar pirata. *(tirando os lenços vermelhos e os tapa-olhos, confeccionado em tnt, de sua bolsa*)

A cena 1 evidência que mesmo antes de ir para a escola a criança, em seu contato com o mundo seja através da mídia ou na interação com seus pares em diversos contextos, elabora conhecimentos prévios sobre assuntos variados, como é o caso do personagem pirata.

[1] O P representa a transcrição da fala das pesquisadoras.
[2] Falas entre parênteses e com escrita em itálico constituem comentários da pesquisadora sobre os elementos gestuais que acompanham as falas.

Verificamos isso ao indagarmos sobre as características do 'pirata', pois neste momento as crianças se mobilizaram e resgataram seus conhecimentos prévios sobre o assunto, buscando elementos para responder ao questionamento, utilizando-se de um conjunto de significações que já haviam constituído.

É possível percebermos este movimento quando Thalia, mesmo sem pronunciar o nome correto do objeto (lenço), aponta, através da linguagem gestual, que este deve ser amarrado na cabeça do pirata e que deverá da cor vermelha ou quando Allan sugere que tem uma roupa específica para o pirata e que ele usa um chapéu.

Esses foram os elementos que as crianças trouxeram do seu contato com o personagem pirata em histórias, filmes ou imagens e que podemos considerar enquanto apropriação do acervo cultural da humanidade.

Cena 2
Exploração do mapa do pirata coletivamente.

P: Então, onde nós estamos mesmo?

C[3]: Na nossa sala.

P: Nós temos que sair da nossa sala e, depois que a gente sair da nossa sala, nós vamos pra onde?

João: Pra... *(Pensando)*

Maria Eduarda: Para o banheiro.

Matheus: Pra cá. *(Apontando a figura do baú no mapa)*

Bryan: Pro baú.

P: Mas onde as pegadas estão indo? De onde que elas saíram?

C: Daqui. *(Apontando o local no mapa)*

P: Elas saíram daqui e foram pra onde?

Bryan: Pra cá, pra cá e pra cá. *(Fazendo o percurso com o dedo)*

P: Então, nós saímos daqui da sala *(mostrando a posição no mapa)*. Essa saída daqui, oh, aqui nós estamos saindo da escola *(apontando no mapa o portão onde as pegadas levavam)*, essa saída daqui é a saída da frente ou a saída dos fundos da escola?

Allan: Do fundo.

P: E o que tem aqui?

Brayan: Bebedouro *(olhando a figura de uma menina bebendo água no mapa)*

P: Então, primeiro nós saímos daqui *(apontando a posição no mapa)*, fomos por aqui *(seguindo as pegadas com o dedo)* e chegamos, onde?

C. Bebedouro.

[3] Utilizaremos o C em situações em que mais de uma criança se manifestar da mesma maneira, num determinado momento.

P: Aqui perto do bebedouro, tem um portão, não tem? Depois desse portão, a gente foi até a onde?

Allan: Aquiiii *(mostrando o caminho das pegadas com o dedo).*

P: Mas aqui tem uma marcação, o que é isso aqui? *(mostrando a figura da bandeira do pirata)*

Allan: Bandeira do pirata.

P: Ah? É uma bandeira do pirata. Ela tá mais perto do banheiro, ou mais perto da quadra?

Maria Eduarda: Mais perto do banheiro.

P: Mais perto do banheiro? Mas e depois daqui, nós vamos até onde? Qual é a próxima marcação?

João: Até aqui oh... *(mostrando a segunda bandeira)*

Allan: Bandeira.

P: Tem outra bandeira, a segunda bandeira. E essa bandeira está mais próxima do banheiro ou mais próxima da quadra?

Thalia: Não. Tá longe...

Allan: Tá longe do banheiro e tá perto da quadra.

P: E agora, nós vamos pra onde?

Thalia: Pra essa *(apontando no mapa a terceira bandeira)*, essa outra bandeira.

Na cena 2, conforme o diálogo entre as professoras/pesquisadoras (que aqui representam o papel de mediadoras da atividade) e as crianças sobre o mapa (Figura 1), percebeu-se que ao serem questionadas, estas mobilizaram-se no grupo para compreendê-lo, localizando os pontos de referência que o mesmo apresentava.

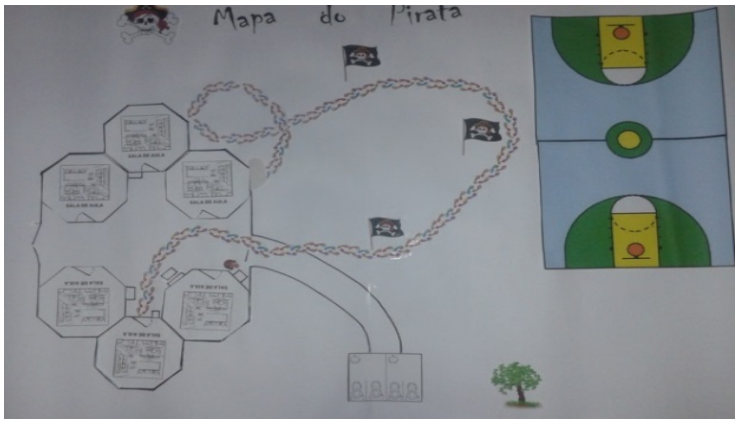


Figura 1. O mapa do pirata.

No decorrer da atividade, foi possível observar que as crianças já possuíam noções de orientação espacial ao manifestarem indicações de posição e direção. No entanto, elas utilizaram na maioria das situações, a linguagem gestual, apontando para a direção que deveriam tomar ou para o chão quando queriam indicar a sua posição atual.

Considera-se importante destacar que, nesta cena, para se orientarem durante o percurso realizado da sala até o local em que o tesouro estava escondido, as crianças utilizaram-se dos advérbios de lugar ao indicarem as direções que deveriam seguir, no entanto percebemos que elas demonstraram familiaridade com os termos que indicavam distância (longe/perto) e os utilizavam com fluência e segurança.

Essas observações nos remetem a necessidade de explorarmos tanto a linguagem matemática quanto as noções de direção (para frente/para trás) e de sentido (esquerda/direita), nesta turma de Educação Infantil, para que as crianças ampliem suas noções de espaço e compreendam as ações que executam na relação com o mesmo, conseguindo, ainda, nomeá-las adequadamente. Considera-se que a linguagem tem um importante papel neste processo, pois nomear objetos, ações ou situações, pode auxiliá-las a melhor compreendê-los e representá-los.

Cena 3
A procura ao tesouro – Diário de campo da pesquisadora.

Depois da leitura do mapa, partimos para a busca do tesouro, utilizando-o como apoio. Durante os primeiros momentos, a turma andou em grupo e foram conversando sobre a atividade e, também, contando os passos com a pesquisadora, apesar de não se mostrarem interessados nesta ação em particular. Estavam focados no seu objetivo, que era achar o tesouro.

Ao chegarmos ao bebedouro, primeiro ponto de referência do mapa, nos reunimos para olhar o mapa novamente. Neste momento, as crianças já haviam localizado visualmente a primeira bandeira. Maria Eduarda é a primeira que sinaliza a sua localização: "*Tem uma bandeira bem ali."* Ela diz toda animada. Assim, fomos em direção a ela. Paramos então para olhar o mapa novamente, quando Thalia aponta para a próxima bandeira e diz: *Tem mais uma!* Referindo-se à próxima bandeira. Perguntamos às crianças onde estávamos no mapa e onde deveríamos ir. No que Maria Eduarda responde: *Nós já chegamos numa.* Referindo-se a bandeira que segurava. E Allan completa: *Aí a gente vai pra aquela outra. (apontando na direção da próxima bandeira) e aí depois a gente vai pra aquela outra lá (apontando a terceira bandeira).*

A partir daí, o grupo começou a se dispersar, pois alguns queriam correr na frente e chegar logo na terceira bandeira. Neste momento, as crianças não queriam mais observar as orientações do mapa, mas queriam chegar às referências já observadas nele anteriormente e, consequentemente, ao tesouro. Contudo, ao chegarmos na terceira bandeira, não havia mais pontos de referência visíveis, então todos se reuniram em volta do mapa novamente.

Como no esquema visual do mapa havia um movimento circular com as pegadas para chegar ao tesouro, isto se constituiu em uma informação que as crianças não atribuíram significado e começaram a dar a volta no prédio da escola em busca do local onde estava o tesouro.

Nesse momento, a empolgação das crianças foi maior do que a vontade de pensar sobre a sua localização. A necessidade de se movimentar livremente no espaço para reconhecê-lo se manifestou e, depois de algumas explorações, finalmente eles encontraram o tesouro.

No entanto, antes de encontrarem o tesouro, as crianças contornaram o prédio da escola, enquanto procuravam por indícios que os levassem até ele, mencionando algumas vezes as

bandeiras do pirata. Nesse momento, eles correram, pularam, nomearam os locais por onde passaram e conversavam animadamente sobre a atividade.

Quando chegamos novamente ao ponto onde estávamos, uma das crianças localizou o 'x' que demarcava onde o tesouro se encontrava, há alguns passos de nós. E todos se dirigiram eufóricos para o local.

Ao retornamos para a sala com o baú, a alegria era geral. Todos pulavam e gritavam animados. Antes de abri-lo, porém, retomamos a discussão sobre o que eles achavam que tinha dentro e até passamos o baú na roda para sentirmos o seu peso. As crianças, contudo, não ficaram desapontadas com o tesouro, pois o baú estava cheio de balas e pirulitos, que foram repartidos entre o grupo com muita animação.

Na cena 3, optou-se por analisar o diário de campo das professoras/pesquisadoras, no intuito de destacarmos o movimento e a manifestação do corpo das crianças no espaço, no decorrer da brincadeira desenvolvida.

A partir das anotações apresentadas no diário, observa-se que o mapa constitui-se como elemento mediador da atividade e que, de modo geral, as crianças utilizaram-no para se movimentar no espaço escolar. Porém, em determinado momento, quando elas chegaram ao movimento circular feito pelas pegadas e não encontraram no mapa recursos para orientá-las, o que prevaleceu foi à exploração livre.

Considera-se relevante, também, o fato de as crianças identificarem as bandeiras do pirata como pontos de referência. Esse movimento é sinalizado quando Maria Eduarda percebe a primeira bandeira e, a partir daí, desencadeia-se um "efeito cascata", mobilizando todas as crianças na busca pelas outras bandeiras. A partir da observação, constatamos que a consulta ao mapa, neste momento, foi abandonada e somente retomada quando não haviam mais bandeiras à vista.

Destaca-se ainda que, durante toda a atividade, a mediação simbólica foi de fundamental importância na mobilização das crianças para a atividade. Os significados e sentidos atribuídos aos artefatos mediadores como o mapa, as bandeiras do pirata e o próprio tesouro fizeram toda a diferença e, a nosso ver, desencadearam os motivos para que a brincadeira se configurasse numa "atividade" na acepção de Leontiev (1991). Isso se evidencia na interação das crianças durante a brincadeira, pois, até encontrarem o baú do tesouro e saberem o que tinha dentro dele, mantiveram-se muito animadas, demonstrando envolvimento e entusiasmo.

Assumimos enquanto premissa que o desenvolvimento das noções geométricas está diretamente relacionado ao reconhecimento, à organização e à representação do espaço, assim como essas noções estão relacionadas à percepção dos objetos que estão dispostos nesse espaço, suas formas e características. Sobre isso discorremos no episódio 2, que apresentaremos a seguir:

Episódio 2 – A Construção do muro do gato.

O episódio 2 compreende a brincadeira "Construindo o muro do gato" que teve como móvel desencadeador a música "O gato" de Vinícius de Moraes.

Fragmento da música:
O Gato (Vinícius de Moraes)
Com um lindo salto
Leve e seguro
O gato passa
Do chão ao muro
Logo mudando
De opinião
Passa de novo
Do muro ao chão
E pisa e passa
Cuidadoso, de mansinho
Pega e corre, silencioso
Atrás de um pobre passarinho
E logo para
Como assombrado
Depois dispara
Pula de lado
Se num novelo
Fica enroscado
Ouriça o pelo, mal-humorado
Um preguiçoso é o que ele é
E gosta muito de cafuné

Configuramos a partir desse episódio "A construção do muro do gato", quatro cenas a seguir destacadas:

Cena 1
Manifestação dos conhecimentos prévios das crianças em roda de conversa após apresentação da música.

Emanoel: Pega a massa e coloca, aí pega o tijolo e coloca.

P: É assim que constrói o muro?

Emanoel: É. Aí coloca a massa, coloca a massa, aí coloca o tijolo.

Raonny: É. O tijolo.

(...)

P: Mas o que nós vamos utilizar para construir o nosso muro para o gato pular em cima?

Emanoel: Hum... *(pensando)*

P: A gente tem tijolo aqui na sala?

Raonny: Não.

Emanoel: Tem.

P: Tem tijolo aqui na sala?

Emanoel: É porque colocaram aí, aí colocaram e tamparam... *(apontando para a parede da sala)*

P: Ah! *(surpresa com a observação)* A nossa parede tem tijolo?

Emanoel: É colocaram, aí pegaram e pintaram.

Caio: Eles pintam o tijolo.

Na cena 1, chamou-nos a atenção as relações iniciais que as crianças manifestaram quando foram questionados sobre como construir um muro e sobre quais os materiais necessários para a construção do mesmo. Estas nos surpreenderam com suas observações e demonstraram que, a partir das relações que estabeleceram, outras noções poderiam ser desencadeadas.

Quando as crianças apontaram para a parede e disseram que nela existiam tijolos, demonstraram que, a partir da sua interação com o meio e do seu convívio social, já haviam provavelmente presenciado ou participado de ações e situações vinculadas à construção de uma casa, o que evidencia o que vínhamos discutindo anteriormente no episódio 2. A criança, enquanto ser social, transita entre contextos diversos e apropria-se de conhecimentos e noções que as auxiliam a interagir nos mesmos.

Observar esse movimento nos oportunizou a reflexão sobre a necessidade de elegermos os conhecimentos prévios das crianças como elementos relevantes no momento do planejamento das nossas práticas pedagógicas.

Cena 2
Relações estabelecidas pelas crianças entre os objetos e as formas (o tijolo).

P: Mas nós temos tijolos soltos aqui na sala pra fazer a parede do muro?

Raonny: Tem.

P: Onde?

Emanoel: Ué. Vai onde se compra tijolo.

P: Ah! Temos que comprar o tijolo?

Caio: É.

P: Mas e se, e se nós usarmos outra coisa no lugar do tijolo? Será que dá?

Emanoel: Dá sim.

(...)

P: Mas eu ainda tenho um problema. O que eu vou usar como tijolo pra construir a parede. Eu tenho alguma coisa aqui na sala que parece com tijolo que eu posso usar?

Raonny: Tem.

P: O que? Mostra pra mim, Raonny.

Emanoel: Eu sei, eu sei, aquele, uns tijolo aí...

Raonny: Esse. *(apontando os materiais feitos com caixa de leite que estão dispostos perto da mesa da professora)*

P: Esse? Esse aqui parece com tijolo? Porque que parece?

Emanoel: Sim. Porque também tem uns tijolos pequenos assim...

P: Ah? Tem um tijolo pequeno que é assim desse jeito? Então tem um tijolo maior e um tijolo menor? Mas dá pra fazer o muro com esse tijolo menor?

Caio: Olha aqui tia, esse daí é de fazer casa de cachorro.

P: Mas será que a gente consegue construir um muro com esses tijolos de mentirinha?

Crianças: Sim.

P: É sério? Então tá bom, vamos tentar.

Na cena 2, nota-se que, ao ter contato com diferentes objetos em variados contextos, as crianças começam a estabelecer entre eles relações de forma, observando suas propriedades e características.

Quando Raonny apontou os materiais confeccionados de caixa de leite dispostos na sala e as professoras/pesquisadoras questionam se era possível usá-los, Emanoel afirmou que sim e completou dizendo "*Porque também tem tijolos pequenos assim...*" e Caio complementou que esse tijolo menor servia para fazer a casa de cachorro.

Essas falas das crianças demonstraram que ao terem contato com o tijolo em situações do seu dia-a-dia tiveram facilidade em estabelecer uma aproximação entre a forma do tijolo, ou pelo menos, entre uma das formas que este objeto apresenta e os materiais que estavam disponíveis na sala. De fato, esses materiais estavam ali dispostos de maneira proposital, visto que era nossa intenção observar quais relações às crianças manifestariam.

Esses contatos iniciais com o espaço vivido e os objetos que nele estão dispostos são fundamentais para desencadear as primeiras noções geométricas, instrumentalizando a criança no sentido de agir no mundo e transformá-lo. Tendo isso em vista, acredita-se que pensar o trabalho relacionado ao espaço e a forma, desvinculado do cotidiano é negar à criança a oportunidade de ampliar seus conhecimentos a partir do que ela já conhece e vivencia todos os dias.

Cena 3

Observação das características dos objetos.

P: O muro, ele fica reto ou ele fica torto? Ele faz uma linha reta ou uma linha curva?

Emanoel: Talvez, talvez tenha uma linha curva, né?

P: Por quê?

Emanoel: Vira assim ó, tipo um carro virando.

P: Mas ele não faz um canto na hora de virar, igual o canto da parede?

Emanoel: Aham! Sim.

A cena 3 caracterizou-se pela exploração dos objetos que representavam os tijolos, dispondo-os de diversas maneiras na tentativa de construir o muro do gato.

Quando Emanoel disse que o muro fazia uma curva, ou seja, que em algum momento ele virava numa direção perpendicular e que tinha cantos que se formavam entre as paredes desse muro, evidenciou-se que ao lidar com objetos e orientá-los ou visualizá-los dispostos no espaço as crianças começam a perceber tanto as características do próprio objeto quanto à influência que essas características têm sobre esse espaço.

Cena 4
Outras relações estabelecidas.

Emanoel: Professora, eu estou do tamanho do muro. *(esticando o braço para cima, na direção da pilha de tijolos que tinham feito).*

P: É, Emanoel, você está do tamanho do muro.

(Emanoel agora começa a comparar a altura do colega que estava empilhando os tijolos com a altura da coluna que construíram).

Emanoel: Agora o Miguel está do tamanho do muro. *(E continua colocando tijolos)* Agora o muro está maior que o Miguel.

Na cena 4, percebe-se indícios de que a atividade foi potencializadora de outras noções matemáticas, não somente as geométricas, como também as métricas. Isso se evidenciou nas falas do Emanoel durante a sua tentativa de comparar a altura dele e dos colegas em relação ao muro. Parece-nos que seja utilizando-se do corpo como referência ou estabelecendo relações com os objetos e contextos do espaço vivido, a criança, ao interagir com as situações cotidianas, pode estabelecer relações com o seu entorno e se apropriar de conhecimentos que fazem parte do nosso acervo cultural.

Ao utilizarem os tijolos falsos para construírem o muro, as crianças levantaram questionamentos e fizeram comparações não somente entre os objetos, mas também entre os objetos e elas mesmas. Quando Emanoel estabeleceu uma comparação entre a sua altura e a altura da pilha de "tijolos" que estava construindo, ele intuitivamente começou a elaborar noções de medida a partir da interação com o objeto "tijolo".

Assim, acredita-se que ao oportunizar, durante esta atividade, a exploração da réplica do objeto tijolo na sala de aula, mediada por uma situação problematizadora, deixando um espaço para questionamentos e levantamento de hipóteses pelas crianças, as professoras/pesquisadoras mobilizaram-nas para a investigação e a ampliação de algumas noções matemáticas, dentre elas as geometrias e métricas.

Algumas considerações

Tendo em vista a análise dos episódios das atividades desenvolvidas, percebe-se que as crianças mobilizaram noções espaciais, sendo estas de posição, direção, sentido e distância, orientando-se a partir de referenciais e manifestando-se, principalmente, através da oralidade e de gestos.

Nesse sentido, evidencio-se que as crianças perceberam que o espaço é composto por elementos, cada um deles tendo forma, tamanho, cores, entre outras características específicas. Essa percepção levou-as a comparar, diferenciar e organizar esses mesmos objetos. Neste caso, os tijolos no espaço.

Destacamos ainda que ao manifestarem-se, principalmente através dos gestos e da oralidade, elas demonstraram a importância do corpo no processo de desenvolvimento e apropriação de noções geométricas e da linguagem oral na mediação deste processo.

Acreditamos que, conforme apontam os estudos da psicologia histórico cultural, a criança está constantemente em processo de apropriação do mundo e que, ao considerá-la como protagonista da sua aprendizagem, valorizando as noções e conhecimentos que esta já possui em seu acervo cultural, o professor oportuniza um canal de comunicação entre o que a mesma já sabe, pensa e acredita e os conhecimentos sistematizados dos quais precisa apropriar-se.

Nas atividades aqui discutidas, evidenciaram-se as experiências e saberes das crianças e os significados que atribuíam a partir deles, a papéis sociais (personagem pirata), objetos (o tijolo), situações (a construção do muro) e aos artefatos mediadores (o mapa, as bandeiras do pirata e o tesouro). Significados estes que compuseram a atividade no seu decorrer, assim como a partilha destes significados no grupo acabaram por mobilizá-los em busca de soluções para os problemas apresentados (encontrar o tesouro e construir o muro para o gato).

É importante destacar, ainda, a importância da mediação simbólica na mobilização das crianças, desencadeando os motivos para que a brincadeira se configurasse realmente numa "atividade" (Leontiev, 1991a, 1991b).

Diante dessas considerações, compreendemos que, ao pensarmos o trabalho com a matemática na Educação Infantil, é importante buscarmos estratégias metodológicas que potencializem as interações, valorizem a oralidade e tenham como elemento desencadeador, principalmente, situações problemas que mobilizem as crianças na busca por respostas e soluções no coletivo, respeitando a sua especificidade e a sua forma de interagir com o mundo através da atividade do brincar. Acreditamos ainda que seja essencial um trabalho pedagógico intencionalmente planejado baseado no conhecimento sobre as crianças e nos conhecimentos específicos articulados e contextualizados.

Referências

Elkonin, D. (1987). Problemas psicológicos del juego en la edad preescolar. En M. Shuare (Comp.), *La Psicología Evolutiva y Pedagógica en la URSS. Antología.* Moscú. Progreso.

González Rey, F. (2010). *Pesquisa qualitativa e subjetividade: os processos de construção da informação*. SãoPaulo: Cengage Learning.

Leontiev, A. N. (1991a). Os princípios psicológicos da brincadeira pré-escolar. In: Vigotskyi, L.S.; Luria, A. R.; Leontiev, A. N. *Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem.* São Paulo: Ícone.

Leontiev, A. N. (1991b). Uma contribuição à teoria do desenvolvimento da psique infantil. In: Vigotskyi, L.S.; Luria, A. R.; Leontiev, A. N. *Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem.* São Paulo: Ícone.

Moura, M. O. de. (2007). Matemática na Infância. In: Migueis, Marlene da R., Azevedo, Maria da Graça. *Educação matemática na infância: abordagens e desafios*. Gaia: Gailivro.

Stake, R. E. (2007) *A arte de investigação com estudos de caso.* Lisboa: Gulbenkian.

Vigotsky, L. S. (2000). *A formação social da mente: o desenvolvimento dos processos psicológicos superiores*. São Paulo: Martins Fontes.

_____. (1998). *Pensamento e linguagem*. São Paulo: Editora Martins Fontes.

O ensino da Matemática em uma escola portuguesa

Sandra Maria Nascimento de **Mattos**
Pontifícia Universidade Católica-São Paulo
Brasil
smnmattos@gmail.com
Maria do Céu **Roldão**
Universidade Católica Portuguesa
Portugal
mrceuroldão@gmail.com
Laurinda Ramalho de **Almeida**
Pontifícia Universidade Católica-São Paulo
Brasil
laurinda@pucsp.br

Resumo

Este artigo tem por objetivo apresentar a proposta desenvolvida, para o ensino da matemática, da escola Tangerina para trabalhar os conteúdos. O principal aporte teórico está inserido na perspectiva da alfabetização matemática (Danyluk, 1991, 2002) e do letramento matemático (Fonseca, 2004), em que a criança deve estar imersa em um contexto escolar, que foque as práticas culturais e sociais na aquisição das habilidades matemáticas. É uma pesquisa exploratória, que se insere em uma abordagem de estudo de caso. A conclusão aponta que as crianças são capazes de aprender os conteúdos matemáticos quando a cultura é respeitada e quando há uma preocupação com o fazer matemático, para a construção do conhecimento pelo aluno, visando à compreensão de si, dos outros e do mundo ao redor.

Palavras chave: alfabetização matemática, letramento matemático, ensino, aprendizagem, projetos.

Introdução

Este artigo tem com objetivo apresentar a proposta de ensino para a matemática desenvolvida pela Escola Tangerina. Esta escola situa-se à cidade do Porto, em Portugal e apresenta um trabalho diferenciado e específico por enfocar o ensino e a aprendizagem dos conteúdos matemáticos como atividade natural da vivência infantil. Foram feitas duas visitas à escola e entrevista ao diretor da escola. Nos dias em que foram realizadas às visitas houve a coleta de imagens e observação das atividades desenvolvidas nas salas de aula. Além disso, foi consultado o projeto educativo e o regulamento da escola. A pesquisa transcorreu com a metodologia exploratória de investigação, com abordagem de estudo de caso.

Os alunos são envolvidos por projetos, que são criados dos interesses e vivências dos mesmos. Para o diretor da escola é importante que a matemática seja trabalhada como linguagem de interpretação e organização do mundo, imersa na cultura e misturada, permanentemente, às

diversas áreas curriculares. Desse modo, segundo o diretor, é banhar-se de matemática e trabalhá-la como linguagem normal da leitura da realidade dos alunos. Esta proposta de ensino e de aprendizagem, tomando a matemática como linguagem, possibilita aos alunos atribuirem sentido e significado a mesma. Para atribuir sentido e significado, o aluno precisa estar mobilizado para aprender e querer aprender, em que a relação com o saber é uma relação de apropriação e de construção do conhecimento.

A escola trabalha os conceitos matemáticos criando histórias e cenas, com as quais as crianças constroem seu conhecimento. Parte do princípio que a aprendizagem se desenvolve pela exposição do conhecimento e pela interpretação e compreensão do mundo. Portanto, o aluno é alfabetizado e letrado matematicamente pela aquisição de habilidades matemáticas através das práticas sociais. Este trabalho não fácil, mas é possível. Assim, faz-se matemática ao mesmo tempo que faz-se discussão da expressão artística. Entende, desse modo, que as crianças aprendem matematica, mas aprendem de formas diferentes. Portanto, as situações são variadas para poder encontrar os diferentes estilos. Diversificar é palavra chave que a escola encontrou para atender seus alunos.

Em suma, a variedade de atividades desenvolvidas permitem as crianças aprender e apreender as regras constantes dos coneitos matemáticos. Esta variedade de atividades permite, ainda, que seja aproveitado aquilo que o aluno traz, aquilo que ele sabe e ir atrás dos interesses e necessidades do seu tempo, para ajustá-los aos conteudos curriculares, sempre na perspectiva de integração das diferentes áreas.

A escola Tangerina e seu método de ensino da matemática

A escola Tangerina é particular e está situada na Av. Boavista no Porto, Portugal. Atende a crianças com idade de 3 a 10 anos, no jardim de infância e no primeiro ciclo do ensino básico. Atualmente, conta com 170 alunos e uma equipe especializada de professores, educadores e outros profissionais. Em seu currículo existem áreas como a matemática, língua portuguesa, estudo do meio, além de expressão plástica, dramática e musical, interligadas por projetos, cujos temas derivam da experiência das próprias crianças. Além das áreas curriculares, existem atividades extracurriculares, dentre elas está o Xeque-mate, que trabalha competências como atenção, concentração, tomada de decisão, entre outras.

No que diz respeito à aprendizagem, a escola assume a perspectiva do desenvolvimento e da construção do conhecimento, para torná-lo significativo e assegurar a aquisição da herança cultural. Estimula o desejo natural para aprender por meio da curiosidade, da criatividade e pelo interesse na partilha dos conhecimentos em grupo. Para a matemática mais precisamente, a escola assegura que a aquisição do conhecimento matemático constitui-se em um contributo fundamental para o desenvolvimento do pensamento lógico e autônomo, bem como, para a capacidade de ler e interpretar o mundo e, desse modo, retirar, das experiências vividas pelas crianças, situações que permitam compreender o mundo em que vivem.

Os projetos são aliados ao método Papy de ensino, com utilização da pedagogia das situações está fundamentado em histórias e situações retiradas da vida cotidiana das crianças. O método Papy trabalha com o princípio básico que é introduzir as crianças às *"ideias matematicamente importantes"*. Para apresentar essas "*ideias matematicamente importantes*" aos alunos, três princípios norteadores foram observados: 1) A Matemática é um corpo unificado de conhecimento e deve ser organizado e ensinado como tal, de modo que, por exemplo, a separação artificial da aritmética, álgebra e geometria não deve ser mantida; 2) A Matemática

como um corpo de conhecimento requer certas formas de pensar e não pode ser feito com o uso exclusivo de memória; e 3) A Matemática é melhor aprendida pelos alunos quando as aplicações apresentadas são apropriadas aos níveis de compreensão e aos interesses naturais dos alunos.

Este método de ensino tem uma característica essencial que é o uso de três linguagens não-verbais: linguagens das cordas; linguagens das setas e linguagem da mini-calculadora Papy, que dá às crianças o acesso imediato as ideias e métodos matemáticos necessários, não apenas para resolver problemas, mas também para continuamente expandir sua compreensão dos conceitos próprios da matemática. Por meio destas linguagens o currículo funciona como um veículo que envolve as crianças imediatamente e, naturalmente, com o conteúdo da matemática e suas aplicações, sem pré-requisitos lingüísticos complicados. Estas linguagens, cada uma com sua especificidade, são explicadas sucintamente a seguir: Linguagens das cordas – utilizam cordas coloridas e pontos que lidam com a noção matemática fundamentalmente útil e importante de conjuntos; Linguagens das setas – utilizam setas coloridas entre pares de pontos que estimulam a pensar sobre as relações entre objetos; e Linguagem do minicomputador Papy - utilizado para representar a natureza e as propriedades de números. É um ábaco simples com os modelos de estrutura posicional do sistema de numeração. É usado tanto como um dispositivo de computação como motivação para o cálculo mental.

Desse modo, as crianças vão aprender matemática e vão aprender a gostar de matemática porque estão trabalhando os conceitos matemáticos relacionados à vida real. As crianças estão a fazer matemática, estão transformando o mundo em que vivem. Isto significa matematizar, ou seja, ser repleta de relações, intermediada pelo diálogo crítico e reflexivo, tanto do professor como dos alunos. Para Mattos, Roldão e Almeida (2014) falar de matemática rica de relações significa falar de uma realidade já vivida e, de acordo com Skovsmose (2001) a realidade já vivida é a espinha dorsal que une as experiências matemáticas.

Há uma escola a vestir-se de conhecimento, pois todas as paredes estão repletas de atividades desenvolvidas pelos alunos. Tudo fica exposto para que qualquer criança observe, toque, aprenda e divirta-se com os placards criados por cada turma. A criação do placard é uma maneira de suscitar a curiosidade, o interesse e a motivação para aprender os conteúdos, além de valorizar a produção dos alunos. Rangel e Coimbra (2012) afirmam que esta maneira de exposição, no que diz respeito à matemática, torna-a mais visível, mais presente, mostrando-a em sua face séria, com suas regras e regularidades e, ao mesmo tempo, mostrando-a mais interessante e atrativa.

A escola está desenvolvendo a alfabetização matemática, quando permite às crianças compreender o mundo que as cerca e está desenvolvendo o letramento matemático, quando permite às crianças a aquisição e aplicação das habilidades matemáticas inseridas nas práticas sociais, das quais elas próprias são produtoras. Não é pura e simplesmente o domínio de técnicas, é a interpretação dos sentidos e significados, que o sistema simbólico da matemática possa despertar nos alunos. A escola entende que ensinar matemática perpassa ter o domínio da linguagem e dos conceitos matemáticos e usá-los significativamente. E, além disso, reconhece que o uso e a aplicação dos conceitos matemáticos formais estão vinculados aos usos e práticas sociais. A escola compreender que o uso da linguagem e dos conceitos matemáticos precisam ser desenvolvidos naturalmente, ou seja, que sejam retirados das vivências das crianças. Desta forma, as crianças estarão desenvolvendo significados e sentido aos símbolos matemáticos e a linguagem matemática.

Alfabetização e letramento matemático: dois olhares, uma perspectiva

A alfabetização matemática (Danyluk, 1991, 2002) e o letramento matemático (Fonseca, 2004; Galvão e Nacarato, 2013) são assuntos recentes nas pesquisas brasileiras e portuguesas e sua ênfase recai sobre o ensino básico nos primeiros anos. No Brasil a alfabetização matemática é entendida como instrumento para leitura do mundo e está relacionada ao Pacto Nacional pela Alfabetização na Idade Certa (PNAIC), na perspectiva do letramento. Em Portugal ser alfabetizado em matemática está relacionado com o conceito de matemática para todos, em que os alunos tornam-se matematicamente competente, para desenvolver as próprias competências e interpretá-las em situações da vida pessoal e social.

A matemática é uma linguagem, portanto, precisa ser adquirida na educação infantil e nos anos iniciais do ensino básico, aqui no Brasil são os anos iniciais do ensino fundamental e, em Portugal, são o jardim de infância e os anos iniciais do primeiro ciclo do ensino básico. A matemática tida como uma linguagem visa à interpretação e compreensão dos signos, símbolos e significados matemáticos, possibilitando ao aluno atribuir sentido à matemática. Para Gómez-Granell (2002) a linguagem matemática tem duas dimensões: uma formal com regras e regularidades próprias e outra referencial, que permite dar significado e sentido, além de associar os símbolos matemáticos às situações reais, próprias do cotidiano. Assim, alfabetizar matematicamente significa situar os conteúdos matemáticos nos contextos histórico, cultural e social, implicando os alunos na construção do conhecimento.

De acordo com Fonseca (2004) existem diferentes termos para se referir à prática da matemática trabalhada em uma perspectiva cultural e social, tais como literacia, materacia, numeracia, numeramento, letramento, alfabetismo funcional, alfabetismo matemático, entre outros. Segundo a autora justifica-se a utilização do termo letramento, pois foca as "habilidades matemáticas como constituintes das estratégias de leitura que precisam ser implementadas para uma compreensão da diversidade de textos que a vida social nos apresenta com frequência e diversificação cada vez maiores" (Fonseca, 2004, p. 27). Entretanto, focar somente a prática dos conteúdos matemáticos por meios dos textos pode prejudicar as habilidades de matemáticas no que diz respeito às notações na construção do conhecimento pelos alunos. A autora afirma que as habilidades matemáticas envolvem conhecimentos que estão associados "[...] à quantificação, à ordenação, à orientação e às suas relações, operações e representações, na realização de tarefas ou na resolução de situações-problema, tendo sempre como referência tarefas e situações com as quais a maior parte da população brasileira se depara cotidianamente (Fonseca, 2004, p. 13).

O letramento matemático está voltado para a aquisição de habilidades matemáticas, sua aplicação e entendimento dessas habilidades nas práticas sociais. Galvão e Nacarato (2013, p.84) consideram que o letramento matemático "[...] dá uma ideia mais profícua, mais ampla, sobre o uso da matemática nas práticas sociais, [...]". Machado (2003) aproxima o conceito de letramento matemático ao conceito de alfabetização matemática, pois segundo o autor significa adquirir os conceitos e habilidades matemáticas, com auxilio de práticas notacionais, compreendida e construída com a aptidão para a sua leitura e para a sua escrita. A aquisição dessas aptidões permite atribuir sentido e significados aos conceitos matemáticos e a linguagem matemática. As práticas de alfabetização e letramento matemático são construídas na sala de aula. Soares (2004a) afirma que há uma diferença fundamental entre letramento e alfabetização que é a ênfase dada nas relações entre as práticas sociais de leitura e escrita (letramento) e o conceito de aquisição do sistema convencional de uma escrita alfabética e ortográfica (alfabetização). Segundo a autora alfabetização e letramento:

> [...] não são processos independentes, mas interdependentes, e indissociáveis: a alfabetização desenvolve-se no contexto de e por meios das práticas sociais de leitura e de escrita, isto é, através de atividades de letramento, e este, por sua vez, só se pode desenvolver no contexto de e por meio da aprendizagem das relações fonema-grafema, isto é, em dependência da alfabetização. (Soares, 2004a, p.14).

Ainda, segunda a autora (2004b) alfabetizar é muito mais que apenas ensinar a codificar e decodificar, pois significa letrar, que é o uso competente da leitura e da escrita em práticas sociais. Partindo do pressuposto que a matemática é uma linguagem, há necessidade de fazer as mesmas conexões realizadas para a língua materna, que a torna significativa para os alunos. Tornar a aprendizagem significativa para os alunos impõe contextualizar conceitos. Mattos, Roldão e Almeida (2014) afirmam que adquirir conhecimento significativo é uma construção pessoal, que parte de um conjunto de estímulos e interações com o meio e com os outros. Para as autoras, a aprendizagem significativa assegura a aquisição da herança cultural, pelo estímulo e desejo natural para aprender, através da curiosidade da criança, e da necessidade de partilhar o conhecimento com os outros.

A matemática é criação humana e sendo criação está relacionada com o fazer humano, com as necessidades e preocupações sócio-histórico. Desse modo, a alfabetização e o letramento matemático encontram-se associados à leitura do mundo. Freire (1989) afirma que a leitura do mundo precede a leitura da palavra, portanto, contextualizar os conteúdos matemáticos precede adquirir o sistema notacional. Existe um alfabeto matemático manifestado por signos que envolvem compreender significados. Assim, para ler a linguagem matemática é necessário interpretar e compreender a experiência vivida. Danyluk (2002, p.20) afirma que "[..] considerada como ciência, a matemática mostra-se mediante uma linguagem, a qual possui uma disposição convencional de ideias que são expressas por signos com significados." Ler a linguagem matemática abre novas possibilidades de compreender a si mesmo, o outro e o mundo.

Dois projetos desenvolvidos na Sala dos 3 anos (Jardim de Infância)

Na sala dos 3 anos, as crianças haviam trabalhado o projeto "Atividades Piscatórias". As atividades piscatórias fazem parte do cotidiano da cidade do Porto e da vida de muitas crianças. Para o desenvolvimento do projeto as crianças foram estimuladas a confeccionar um barco pesqueiro. A atividade envolve, além do barco de pesca, os utensílios necessários à pesca, tais como rede, ancora e bóia de salvamento, além do próprio rio, do qual seria realizada a atividade. Todas as crianças foram envolvidas e houve a integração de diferentes áreas curriculares. Assim, houve o envolvimento da expressão plástica, do estudo do meio, da matemática e da língua portuguesa. Nesta parte, de desenvolvimento do barco, utensílios e rio, no que diz respeito à matemática, as crianças puderam dimensionar os objetos, o barco e o rio. Além de trabalhar aspectos ligados as formas geométricas.

Figura 1. Projeto Piscatório – Área de pesca (Imagem do arquivo da autora)

No início, a escola não tem a preocupação de nomear aquilo que as crianças estão desenvolvendo. O mais importante é o fazer, o realizar relações. Para a comercialização dos peixes, as crianças confeccionaram um autêntico local de compra e venda do pescado. Nesta área de venda havia diferentes compartimentos para separação dos peixes por espécie, possibilitando às crianças formarem conjuntos com as diferentes variedades de peixes. Pode-se afirmar que as crianças utilizaram conceitos de classificação, agrupando os peixes por semelhanças e conceitos de seriação, pois fez arranjos com conjuntos de peixes, de modo que eles mantivessem a mesma relação de diferença com os outros peixes. Na área de limpeza dos peixes, que eram comprados, havia os utensílios necessários, todos confeccionados pelos alunos. Na área de compra e venda dos peixes havia balança para pesar, máquina para pagamento, telefone para encomendas e área para embrulhar os peixes.

Figura 2. Projeto Piscatório – Área de comercialização (Imagem do arquivo da autora)

As crianças tiveram a oportunidade de ter o conhecimento de uma atividade realizada por pessoas moradoras do local. Além disso, os conteúdos matemáticos foram tratados

significativamente, pois possibilitou às crianças desempenharem o papel de pescador e comerciante de peixes. Com isso, elas puderam ter contato com medidas de peso, sistema monetário e troco. Desta forma, as crianças construíram seus conhecimentos matemáticos à medida que foram necessários para compreender e dominar a realidade deles.

O segundo projeto foi o da "Granja". Neste projeto as crianças construíram uma granja ou galinheiro. Havia local para as galinhas ficarem, colocar ovos e chocá-los. Havia, também, local para colocar os ovos coletados e loca para colocar a ração para as galinhas comerem. As atividades relacionadas à matemática eram relativas à quantificação, pois as crianças observavam e anotavam a quantidade de pintinhos que haviam nascido, a quantidade de ovos produzidos, quantos ovos seriam necessários para realizar alguma receita culinária, quantos ovos outra turma havia buscado para realizar sua receita, etc. os ovos utilizados na granja eram de verdade, o restante foi produzido pelas crianças em conjunto com o professor da turma.

De acordo com Nogueira (2011, p.112)

> Ao analisarmos as ações que a criança precisa desenvolver para contar objetos fica evidente que o número resulta da síntese original da classificação e da seriação, conforme sistematizado por Rangel (1992): juntar os objetos que serão contados, separados dos que não serão contados (classificação); ordenar os objetos para que todos sejam contados e somente uma vez (seriação); ordenar os nomes aprendidos para a enumeração dos objetos, utilizando-os na sucessão convencional, não esquecendo nomes e nem empregando o mesmo nome mais de uma vez; estabelecer a correspondência biunívoca e recíproca nome-objeto; e finalmente e entender que a quantidade total de elementos de uma coleção pode ser expressa por um único nome.

Neste projeto as crianças realizaram atividades de contagem. A noção de numeral é estruturada, pela criança, com a noção de contagem e quantificação em determinado conjunto.

A contagem é um elemento estratégico para o desenvolvimento da noção de número.

Primeiro, pela realização da classificação, em que a criança tem a possibilidade de juntar objetos a serem contados no meio de outros. Segundo, pela seriação, em que os objetos serão contados uma única vez. Terceiro, pela correspondência biunívoca, em que será estabelecida a relação nome-objeto. Por último, a criança pode entender que um único nome representa quantidades de objetos. Segundo Nogueira (2011, p.113):

> Fuson (1991) estabeleceu que a contagem é um instrumento cultural utilizado pela criança para construir os conceitos de número cardinal, ordinal e de número-medida, quando se trata de coleções de média dimensão". Para Butteworth (apud Senna & Bedin, 2007, p. 6) "a contagem é uma das primeiras formas que a criança tem de entrar em contado com o sentido de número e isto ocorre espontaneamente em brincadeiras do cotidiano infantil.

Para Senna & Bedin:

> Associado ao conceito de numerosidade, o desenvolvimento da contagem pela criança se desenvolve como a grande abertura para a compreensão de quantidades. Esta habilidade requer da criança que associe a nomeação dos números de acordo com a sua ordem, a coordenação dos nomes dos números com a identificação dos objetos no conjunto e a contagem única de cada objeto. Ao final da contagem, a criança deverá perceber a correspondência com o total de objetos pertencentes ao conjunto. O processo do desenvolvimento da contagem na criança estende-se pelo período dos dois aos seis anos em média, para então adquirir esses "princípios" ou habilidades. (Senna & Bedin, 2007, p. 11-12).

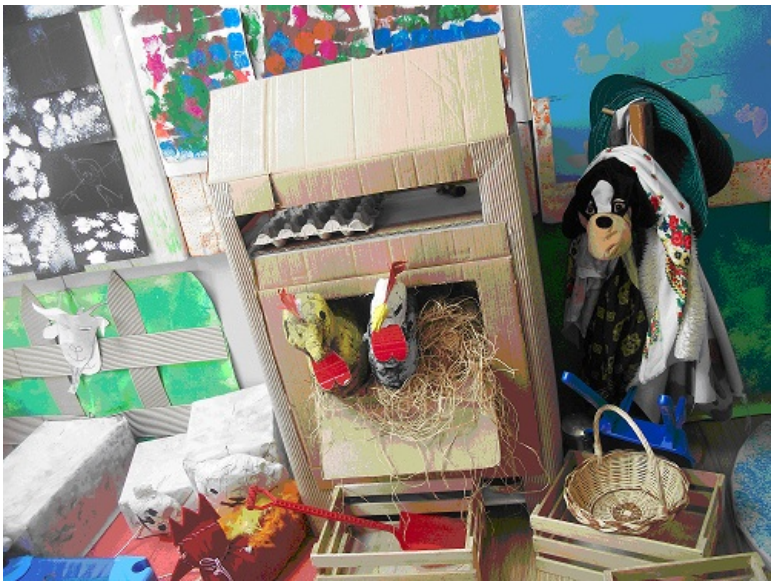


Figura 3. Projeto Granja (Imagem do arquivo da autora)

As crianças têm contato com diferentes tipos de materiais. A utilização de materiais manipuláveis como recurso didático ajuda ao professor organizar a aula. Materiais manipuláveis são quaisquer materiais concretos, que tem a finalidade educativa. Estes materiais são utilizados para qualquer situação de ensino e de aprendizagem. Cabe ao professor escolher ou confeccioná-lo. Entretanto, no trabalho desenvolvido na escola Tangerina o que se faz presente são materiais concretos, os quais as crianças utilizam para construírem cenas que serão trabalhadas os conteúdos curriculares, sejam eles matemáticos ou de qualquer área. Este material construído pode ser considerado estruturado, pois é organizado e desenvolvido com a intenção de apresentar um conceito matemático.

Considerações finais

É um desafio grande desenvolver atividades com as quais o professor tem um planejamento flexível, em que tudo vai sendo uma construção conjunta entre professor e alunos. Surpresas podem acontecer e devem, para que supra a curiosidade natural dos alunos. É também um grande desafio desenvolver um currículo escolar com seus conteúdos fixos e transformá-lo em experiências vividas, contextualizadas e situadas na cultura local dos alunos.

O trabalho implementado na Escola Tangerina abarca estes desafios, envolvendo não só os alunos como toda comunidade escolar, pois pais participam ativamente em alguns projetos que a escola desenvolve. Os conteúdos transbordam de uma área para as outras e integram-se, interligando-se interdisciplinarmente para lhes dá sentido. A todo o momento os alunos são desafiados, instigados pela variedade de estratégias e situações de aprendizagem, onde todos os conteúdos são sempre retomados de maneira mais aprofundada.

Dessa maneira, os conteúdos matemáticos são trabalhados para que as crianças percebam e conheçam o mundo em que vivem. Diariamente, em sala de aula, o professor está a perceber a forma como os alunos pensam, a forma como realizam as tarefas propostas, a forma como intervêm na busca das soluções e as dúvidas e dificuldades que têm em relação a alguns conteúdos. É essencial o diálogo, o estímulo por meio de perguntas e o debate constante entre todos, construindo ideias e conhecimentos em relação com os materiais e como as vivências diárias.

Expor os trabalhos das crianças seja de matemática seja de qualquer área é uma forma de motivação para os alunos. Expor trabalhos de matemática é uma forma de valorizar o conhecimento que as crianças têm e, ao mesmo tempo, é uma maneira de valorizar cada criança. Expor trabalhos de matemática é valorizar a própria matemática. É torná-la visível, atrativa e interessante às crianças. É mostrar seu impacto e rigor, mas tornando-a afetivamente confortável aos alunos, que surge aos seus olhos como uma disciplina que é possível aprender. E essa aprendizagem transcorre com uma abordagem contextualizada do ensino da matemática. Integrar a matemática a projetos é trazer os conteúdos matemáticos para os interesses e questões que são postos diariamente pelos alunos. É mostrar que a matemática se aprende, interligada às outras áreas do conhecimento, mas, sobretudo com o envolvimento afetivo de cada um e todos em conjunto, para criar um ambiente harmonioso de convívio.

O ensino de conceitos matemáticos, na educação infantil, realizado através de atividades lúdicas é um mecanismo para o desenvolvimento de habilidades e conhecimentos necessários às etapas seguintes de desenvolvimento e de aprendizagem da criança. Essas atividades diminuem qualquer dificuldade que possa ocorrer, pois são atividades adequadas e significativas às vivências das crianças. No desenvolvimento das atividades há a busca do letramento matemático, bem como, da alfabetização matemática, em que cada criança é sujeito ativo e construtivo de seu próprio saber. A aprendizagem é uma expressão intelectual, mas desenvolvida por meio das práticas sociais.

Portanto, podemos afirmar que a maneira trabalhada pela escola Tangerina, que tem em sua base de ensino os projetos, se diferencia pela forma que sensibiliza seus alunos, na busca pelo conhecimento, quando expõe conteúdos no ambiente da escola. Podemos afirmar ainda que as crianças constroem seus conhecimentos matemáticos imbuídas pelo espírito de colaboração. Além disso, a aprendizagem da matemática como linguagem, possibilita aos mesmos fazerem conexões significativas pelo partilhamento com os outros, pelo estímulo para aprender, pelo diálogo constante e pela prática social da leitura e da escrita dos conceitos matemáticos como algo que surge naturalmente.

Entendemos que todas as crianças são capazes de aprender matemática e de desenvolver suas capacidades para interpretar os conteúdos matemáticos de forma significativa. Ser matematicamente letrado e competente implica ter conhecimentos necessários, ter a capacidade de mobilizá-los em situação concreta da vida. Para garantir o sucesso dos alunos em matemática é necessário assegurar condições para maximizar a aprendizagem dos mesmos, ajudando-os a interpretar os seus próprios argumentos matemáticos, bem como, os argumentos dos colegas.

O ensino das crianças pequenas está relacionado às suas necessidades, fator essencial para não desviá-las de sua vivência imediata, espontânea e imaginativa. Portanto, o que aprende está relacionado ao interesse que é despertado nas atividades realizadas em sala de aula. Despertar o interesse, com proposição de atividades participativas, estimula sua atenção, sua criatividade e sua imaginação. Consequentemente, o ensino se transforma em um mundo com o qual a criança relaciona-se ativamente.

Referências Bibliográficas

Danyluk, O. S. (2002). *Alfabetização matemática: as primeiras manifestações da escrita infantil*. Porto Alegre: Sulina.

Danyluk, O. S. (1991). *Alfabetização matemática: o cotidiano da vida escolar*. 2.ed. Caxias do Sul: EDUCS.

Fonseca, M. C. F. R. (2004). A educação matemática e a ampliação das demandas de leitura escrita da população brasileira. In: Fonseca, M. C. F. R. (Org.). *Letramento no Brasil: habilidades matemáticas* (pp. 11-28). São Paulo: Global.

Freire, P. (1989). *A importância do ato de ler: em três artigos que se completam*. São Paulo: Autores Associados: Cortez. (Coleção Polêmicas do nosso tempo, 4).

Galvão, E. S. e Nacarato, A. M.. (2013). O letramento matemático e a resolução de problemas na provinha Brasil. *Revista eletrônica de Educação, 7*(3), 81-96. Disponível em < http://www.reveduc.ufscar.br >. Acesso 09/072014.

Gómez-Granell, C. (2002). Rumo a uma epistemologia do conhecimento escolar: o caso da educação matemática. In: Rodrigo, M.J. e Arnay, J. (orgs.). *Domínios do conhecimento, prática educativa e formação de professores*. Rio de Janeiro: Ática. (Coleção A construção do conhecimento escolar, 2).

Machado, A. P. (2003). *Do significado da escrita da matemática na prática de ensinar e no processo de aprendizagem a partir do discurso de professores*. 284f. Tese (Doutorado). Universidade Estadual Paulista - UNESP. Instituto de Geociências e ciências exatas. Disponível em <http://base.repositorio.unesp.br/handle/unesp/102169>. Acesso em 09/07/2014.

Mattos, S. M.N., Roldão, M. do Céu e Almeida, L. de R. (2014). Uma escola chamada Tangerina e o trabalho diferenciado no ensino da matemática. Artigo submetido à *Revista Educação Matemática Pesquisa*. PUC-SP. Encontra-se em avaliação.

Nogueira, C. M. I. (2011). Pesquisas atuais sobre a construção do conceito de número: para além de Piaget? *Educar em Revista. N. Especial 1*, Curitiba: Editora UFPR, 109-124.

Rangel, M. & C., B. (2012). *Matemática no dia-a-dia: projetos de matemática para desenvolver em casa e na sala de aula*. Porto: Porto. (Coleção Educadores em ação).

Senna, M. T. T.R. e Bedin, V. (2007). *A formação do conceito de número em crianças da educação infantil.* Trabalho apresentado e publicado nos anais da 30a Reunião Anual da ANPED. GT07: Educação de crianças de 0 a 6 anos. ANPED. Caxambu. Disponível em <http://www.anped.org.br/reunioes/30ra/trabalhos/GT07-3370--Int.pdf>. Acesso em 09/07/2014.

Skovsmose, O. (2001). *Educação Matemática Crítica: a questão da democracia*. São Paulo: Papirus. (Coleção Perspectiva em Educação Matemática).

Soares, M. (2004a). Letramento e alfabetização: as muitas facetas. *Revista Brasileira de Educação, Rio de Janeiro, 25*, 5-17. Disponível em <http://www.scielo.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1413-24782004000100002>. Acesso em 09/07/2014.

Soares, M. (2004b). Alfabetização e letramento: caminhos e descaminhos. *Revista Pátio. Porto Alegre, 8*(29), 18-22.

Práticas de professoras dos anos iniciais em aulas de Matemática

Reginaldo Fernando **Carneiro**
Universidade Federal de Juiz de Fora
Brasil
reginaldo.carneiro@ufjf.edu.br
Cármen Lúcia Brancaglion **Passos**
Universidade Federal de São Carlos
Brasil
carmen@ufscar.br

Resumo

Neste artigo, temos como objetivo discutir e refletir sobre algumas práticas em matemática de professoras dos anos iniciais que participaram de um curso a distância de formação de professores. Para tanto, realizamos uma pesquisa qualitativa em que investigamos duas disciplinas que tinham como foco a matemática – Linguagens Matemática 1 e Linguagens Matemática 2 – e utilizamos para a produção de dados as atividades virtuais desenvolvidas nelas. As práticas explicitadas pelas professoras abordavam diferentes conteúdos matemáticos, como números e operações, geometria e tratamento da informação por meio da resolução e da formulação de situações-problema, carimbo e medição de objetos e a elaboração de tabelas e gráficos. Essas práticas permitiram que os alunos se tornassem o centro do processo de ensino-aprendizagem e o professor o responsável pela mediação didática.

Palavras chave: práticas de sala de aula, ensino e aprendizagem, matemática, anos iniciais, ensino fundamental.

Introdução

Viñao Frago (1998, pp. 168-169) denomina de cultura escolar o "conjunto de teorias, princípios ou critérios, normas e práticas sedimentadas ao longo do tempo no interior das instituições educativas". São modos de pensar e atuar, de forma a integrar-se à vida cotidiana da escola.

Na perspectiva desse autor, a cultura escolar é institucional e institucionalizada, porque se produz dentro das instituições docentes e do sistema educativo e se oferece como um conjunto de ideias, pautas e práticas consolidadas. Assim, os "aspectos organizativos e institucionais contribuem a conformar um ou outro modo de pensar e atuar e, ao mesmo tempo, estes modos conformam as instituições de um ou outro sentido" (Viñao Frago, 1998, p. 174).

Assim, a cultura de aula de Matemática é o modelo que vem sendo construído historicamente, tem sido arraigado, impregnado à cultura escolar e está presente na formação escolar do professor que ensina Matemática (Cezari & Grando, 2008).

Nesse sentido, apresentamos nesse artigo, que é um recorte da pesquisa de doutorado do primeiro autor, algumas práticas docentes que evidenciam a cultura de aula de Matemática de

professoras dos anos iniciais que participaram de um curso a distância de formação de professores. Para tanto, temos como objetivo discutir e refletir sobre algumas práticas em matemática de professoras dos anos iniciais.

Compreendemos práticas de sala de aula como o conjunto de ações do professor e de condições oferecidas por este para orientar as atividades, visando à aprendizagem dos alunos. É importante destacar que essas práticas têm uma intencionalidade, pois são guiadas pelos objetivos e pelos conteúdos de ensino; pelas características específicas dos alunos; e pelos métodos de ensino, dentre outros.

A partir do exposto, apresentamos, inicialmente, o referencial teórico que deu embasamento a nosso estudo, em seguida, explicitamos a metodologia e os instrumentos para produção de dados. Depois, apresentamos e discutimos algumas práticas em matemática das professoras e, por fim, trazemos algumas considerações.

Quadro teórico

As práticas docentes nas aulas de matemática podem ser muito diferentes e são influenciadas por diversos fatores, como: as concepções dos professores sobre a disciplina, seu ensino e aprendizagem, as estratégias que podem ser utilizadas para ensinar os conceitos, entre outros.

Nesse sentido, nos apropriamos, para refletir a prática docente, do conceito de *mediação didática* discutido por Libâneo (1994, p. 96) como sendo uma "atividade intencional, planejada conscientemente visando atingir objetivos de aprendizagem. Por isso, precisa ser estruturado e ordenado". Ou seja, o professor intervém de forma intencional nos processos mentais dos alunos com o objetivo de auxiliá-los a dar sentido ao objeto de conhecimento.

Assim, a atividade do aluno consiste no enfrentamento da matéria por suas próprias forças mentais e o trabalho docente, por meio da *mediação didática*, dirige e orienta essa atividade. Ou seja, os objetivos, os conteúdos, os métodos, as formas de organização do ensino medeiam a relação dos alunos com a matéria.

Para Libâneo (1994), o trabalho docente é a atividade que une o binômio ensino-aprendizagem, sendo facetas de um mesmo processo e, portanto, não sendo possível pensá-los separadamente, dissociados. Dessa forma, "o professor planeja, dirige e controla o processo de ensino, tendo em vista estimular e suscitar a atividade própria dos alunos para a aprendizagem" (p. 81).

Porém, essa perspectiva fica comprometida quando o ensino está focado na memorização, porque o professor concentra em si mesmo a exposição da matéria e não envolve ativamente os estudantes. "Essa atitude não faz parte do sentido que temos dado ao papel dirigente do professor, pois não leva a empenhar as atividades mentais dos alunos" (Libâneo, 1994, p. 91). Ainda, compromete essa perspectiva quando os alunos são deixados sozinhos com o pretexto de que o docente precisa facilitar a aprendizagem e não ensinar.

A cultura de aula que, via de regra, ainda faz parte da sala de aula de Matemática está pautada no tecnicismo que, de acordo com (Fiorentini, 1995), baseia-se em decorar a tabuada, fórmulas, algoritmos e procedimentos para serem reproduzidos nos exercícios e também nas avaliações. Essa perspectiva reduz a matemática a um conjunto de técnicas, regras, algoritmos e procedimentos sem a preocupação de justificá-los ou fundamentá-los. Enfatiza o fazer em detrimento da compreensão, da análise, da justificativa, da demonstração.

De acordo com Fiorentini (1995, p. 17), esse tipo de aprendizagem consiste "no desenvolvimento de habilidades e atitudes e na fixação de conceitos ou princípios" a partir de atividades que estimulem a memorização de fatos e o desenvolvimento dessas habilidades e atitudes.

Para atingir os objetivos estabelecidos, os alunos tinham que copiar muitas vezes a tabuada e reproduzir os exercícios da mesma forma que lhes foi ensinado. O ensino era expositivo e enfatizava os números e as operações aritméticas deixando em segundo plano outras áreas da matemática como a geometria, por exemplo.

A partir do exposto, e que também é indicado pelos documentos oficiais, consideramos que o ensino-aprendizagem da matemática é perpassado pela resolução de problemas.

De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais de Matemática (Brasil, 1997), a resolução de problema é uma orientação para a aprendizagem, pois existe um contexto a partir do qual o aluno irá aprender as ideias, as concepções e os procedimentos que fazem parte dos diversos conhecimentos da área de matemática. Esse documento assinala ainda que o foco da resolução de problemas não é o resultado, mas, sim, seu processo. Assim, o ponto de partida é o próprio problema que deve ser explorado pelos alunos, pois estes irão elaborar estratégias necessárias para sua solução. Afinal, "[...] o aluno não constrói um conceito em resposta a um problema, mas constrói um campo de conceitos que tomam sentido num campo de problemas. Um conceito matemático se constrói articulado com outros conceitos, por meio de uma série de retificações e generalizações" (Brasil, 1997, p. 31).

Sendo assim, esse documento preconiza a proposta de problemas que possibilitem a construção do conhecimento e de conceitos específicos. Podemos tecer uma crítica a essa perspectiva do documento, a partir do apontamento de Onuchic (1999) de que a resolução de problemas acaba sendo concretizada do seguinte forma: o "ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com uma situação-problema que expressa aspectos-chave desse tópico e são desenvolvidas técnicas matemáticas como respostas razoáveis para problemas razoáveis" (Onuchic, 1999, p. 207).

Contudo, para Onuchic e Allevato (2004), o foco do ensino de Matemática deve ser a compreensão. Segundo as autoras,

> [...] a compreensão de Matemática, por parte dos alunos, envolve a ideia de que compreender é essencialmente relacionar. Esta posição baseia-se na observação de que a compreensão aumenta quando o aluno é capaz de: relacionar uma determinada ideia matemática a um grande número ou a uma variedade de contextos, relacionar um dado problema a um grande número de ideias matemáticas implícitas nele, construir relações entre as várias ideias matemáticas contidas num problema. (Onuchic & Allevato, 2004, p. 222).

Essa perspectiva revela que a matemática não se limita a ser uma simples ferramenta para resolver problemas, mas é um caminho para desenvolver o pensamento e um organizador de experiências (Onuchic, 1999).

Com o foco na compreensão, a resolução de problemas se torna uma atividade para aquisição de um novo conhecimento e um processo que possibilita aplicar algo anteriormente construído. Afinal, para essa autora (1999, p. 208), "quando os professores ensinam matemática através da resolução de problemas, eles estão dando a seus alunos um meio poderoso e muito importante de desenvolver sua própria compreensão".

De acordo com Onuchic e Allevato (2004), trabalhar com resolução de problemas possibilita que o aluno atente para as ideias inerentes ao problema, ou que se conecte a ele, reflita sobre elas e busque *dar sentido* à situação. Assim como proporciona que o aluno se envolva nos seguintes procedimentos: raciocínio e prova, comunicação, conexão e representação. Outro apontamento das autoras refere-se ao fato de que os problemas podem oferecer dados importantes para avaliar a aprendizagem dos alunos e, a partir disso, o professor pode reorganizar as situações de ensino-aprendizagem.

Contudo, a maioria dos problemas presentes nos livros didáticos, principal fonte utilizada pelo professor, tem as seguintes características: contêm frases e parágrafos curtos; oferecem *pistas* para a(s) operação(s) a ser efetuada(s); indicam, no enunciado do problema, todos os dados necessários para sua resolução; apresentam uma única solução; a solução é numérica e é encontrada a partir da aplicação direta de algoritmos, consideramos como convencionais por Smole e Diniz (2001).

Nesse contexto, considerando a perspectiva de resolução de problemas proposta acima, de acordo com Smole et al. (2004, p. 7) é importante que o professor não se limite a propor aos alunos problemas do tipo convencional e aborde situações que, sem solução aparente, requerem a busca e a seleção de estratégias e conhecimentos. Um problema que não seja do tipo convencional é aquele que instiga o aluno, permitindo que ele crie, reflita e teste diversas hipóteses de solução, "[...] sob esse enfoque, resolver problemas é um espaço para fazer colocações, comunicar ideias, investigar relações, é um momento para desenvolver noções e habilidades matemáticas.".

A partir dessas discussões, passamos a apresentar algumas considerações sobre o desenvolvimento da pesquisa.

Metodologia da pesquisa

Segundo Fiorentini e Lorenzato (2006, p. 60), a pesquisa é "um processo de estudo que consiste na busca disciplinada/metódica de saberes ou compreensões acerca de um fenômeno, problema ou questão da realidade ou presente na literatura o qual inquieta/instiga o pesquisador perante o que se sabe ou diz a respeito". Para tanto, com o objetivo de discutir e refletir sobre algumas práticas em matemática de professoras dos anos iniciais, optamos pela abordagem qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994).

Nesse contexto, investigamos duas disciplinas relacionadas à matemática – Linguagens Matemática 1 (LM1) e Linguagens Matemática 2 (LM2) – de um curso a distância de formação de professores de uma universidade brasileira. Nessas disciplinas foram abordados: a natureza do conhecimento matemático; a função da matemática no Ensino Fundamental; os conteúdos matemáticos ensinados nos Anos Iniciais, como o sistema de numeração decimal e as operações fundamentais, espaço e forma, grandezas e medidas, frações, pensamento estocástico e; algumas considerações sobre a matemática na Educação Infantil.

Selecionamos, para participação na investigação, apenas professoras que ensinavam conteúdos matemáticos em sala de aula e estavam participando desse curso. Elas escolheram o nome pelo qual seriam identificadas na pesquisa – algumas preferiram um nome fictício e outras optaram pelo seu próprio nome: Alice, Ana, Andréia, Branca, Kerusca, Lusmarina, Maria Clara, Renata e Su.

Para produção de dados, utilizamos excertos das atividades virtuais elaboradas pelas professoras nas disciplinas mencionadas em que foram apresentadas práticas matemáticas que elas propunham a seus alunos. Assim, neste texto, trazemos atividades das professoras Alice, Ana, Lusmarina e Renata. Para identificar os excertos, colocamos o tipo de atividade (Texto individual, fórum de discussão, etc.) e a disciplina (LM1 ou LM2). Por exemplo, para um trecho de um fórum de discussão que ocorreu em LM1: (Fórum de discussão, LM1).

Assim, passamos a apresentar e discutir algumas práticas de sala de aula em matemática nos anos iniciais dessas professoras.

Práticas de sala de aula em matemática

As professoras mencionaram atividades sobre conteúdos matemáticos que realizaram com seus estudantes em sala de aula nas atividades virtuais do curso a distância. Alice e Ana apresentaram, nas discussões práticas de sala de aula, atividades envolvendo os números e as operações. Alice relatou, durante a disciplina LM1, que gosta de propor situações-problema a seus alunos,

> Principalmente aquelas que trazem certa dificuldade, tem que realmente entender que operação utilizar, como resolver, das citadas a minha preferida é a número 3, a promoção das camisas, as demais também não trazem a resposta pronta, por exemplo: Fui a feira e comprei doze bananas e dez mexericas? Este tipo de atividade não desenvolve habilidades nos alunos, devemos criar conflitos, provocar hipóteses, discussões, para realmente promover aprendizagens (Texto individual, LM1).

Ela exemplificou os tipos de problemas que costuma utilizar com seus estudantes:

1) Patrícia nasceu em 1943. Quantos anos terá no ano de 2003?

2) A tabela mostra o número de alunos matriculados em uma escola:

	1º ano	*2º ano*	*3º ano*	*4º ano*
Meninos	*109*	*123*	*110*	*95*
Meninas	*128*	*137*	*102*	*87*

a) Qual o número total de meninos? E de meninas?
b) Quantas meninas há a mais que meninos?
c) Quantos alunos há no 4º ano?
d) Qual a diferença entre o número de alunos do 1º ano e do 4° ano?

3) Observe a promoção destas duas lojas:
Loja A – 4 camisas por R$ 124,00
Loja B – 6 camisas por R$ 174,00

Em qual loja cada camisa sai mais barato?

4) Para fazer um bolo, Marta e mais 5 amigas fizeram as seguintes compras:

Produto	*Preço em centavos*
Chocolate	*65*
Ovos	*96*
Fermento	*32*
Açúcar	*50*
Farinha	*33*
Manteiga	*24*

Quanto deverá gastar cada uma se a despesa total for repartida igualmente entre elas?

5) O quociente de uma divisão é 142, o divisor é 5, e o resto é o maior possível. Qual é o dividendo? (Texto individual, LM1).

Alice ressaltou que busca propor situações-problema que desafiem os estudantes, que tragam alguma dificuldade, que os levem a levantar hipóteses, discussões, pois acredita que apenas dessa forma haverá aprendizagens.

Para tanto, colocou algumas situações-problema envolvendo as operações e destacou a *das camisas* como sendo interessante. Nessa situação, além de realizar a operação de divisão, os estudantes precisam comparar os resultados para saber em qual loja a camisa é mais barata.

Outro problema sugerido refere-se à comparação de quantidades. O número de alunos matriculados na escola é apresentado em uma tabela a partir da qual os estudantes precisam identificar as informações nas linhas e colunas para responder às questões. Trata-se de um problema que envolve a organização e a análise de dados em tabela, e que vem sendo recorrentemente apresentado em avaliações externas no Brasil. Essa proposta dá indícios de que a professora procura ampliar os conhecimentos matemáticos dos seus alunos.

No problema da compra dos ingredientes para fazer um bolo, é preciso calcular os gastos a partir de uma tabela e depois encontrar quanto cada uma das amigas gastará. Notamos que o valor está em centavos, portanto, haverá provavelmente o cálculo com números racionais na forma decimal. Por fim, no último problema embora não seja solicitado que eles realizem a operação de divisão, possibilita abordar outros aspectos como o maior resto possível e encontrar o dividendo.

Observamos que todos esses problemas não são resolvidos de forma mecânica pela simples aplicação do algoritmo, mas exige que os estudantes pensem sobre ele e também sobre as perguntas que estão sendo colocadas. Ainda, alguns problemas não trazem no seu enunciado as *pistas* que os alunos procuram para identificar qual a operação a ser realizada. Essas características enfatizam que as situações-problema podem mesmo promover discussões, levantamento de hipóteses e a busca por estratégias para resolvê-las. Nesse sentido, é interessante que os alunos trabalhem em grupos e que as estratégias utilizadas sejam socializadas com toda a sala mostrando os caminhos, as incompreensões, os erros, os diferentes resultados etc.

Ana descreveu uma situação acontecida ao elaborar um texto para a disciplina LM1 que abordava para que servem os números e como seria um mundo sem eles, quando tentou mostrar para seus alunos a importância dos números, e a inviabilidade de resolver um problema se não houvesse dados numéricos.

> Outro dia, propus aos meus alunos que produzissem uma situação-problema sobre diferença. Um deles descreveu a situação, mas não citou nenhum número para que pudesse resolver a questão. Então, logo [o aluno] me procurou, pois não conseguia realizar a atividade. Expliquei se não havia nenhum dado (número) que pudesse utilizar para fazer a operação e chegar ao resultado. Outros escreveram situações que não continham todos os dados necessários para se chegar à resposta. Dessa forma, ficou claro a eles que sem os números não poderíamos selecionar, refletir, resolver o problema (Texto individual, LM1).

Ana propôs que seus alunos elaborassem uma situação-problema que envolvesse a operação de subtração e, a partir daí ela, segundo a professora, conseguiu evidenciar a

importância dos números, pois nas situações formuladas faltavam dados numéricos para sua resolução, evidenciando que, se não há número, não é possível encontrar o resultado.

Em algumas situações-problema, envolvendo a subtração, não são necessários dados numéricos para que seja possível a solução. Para ilustrar, destacamos a comparação, que é uma das ideias dessa operação. Segundo Van de Walle (2009, p. 170), essas situações-problema comparam duas quantidades em que resulta uma terceira, entretanto, essa não existe realmente, pois ela é a diferença entre as duas quantidades. "Existem três tipos de problemas de comparação, correspondendo a que quantidade é desconhecida (a menor, a maior ou a diferença)".

Podemos ter, então, situações com a subtração sem a presença de números quando os estudantes comparam quantidades, medidas de comprimento, medida de volume, por exemplo, e apenas observando os tamanhos, conseguem dizer quem é maior, onde tem mais ou menos.

Por exemplo: Onde pode ter mais pessoas: em uma sala de aula ou em um campo de futebol em dia de jogo de final de campeonato? Ou ainda: João e Pedro têm suas coleções de bonés. Quem tem mais bonés?

João:

Pedro:

Para resolver essa última situação, os estudantes podem fazer a correspondência um a um entre os elementos das duas coleções e aqueles que ficarem sem correspondente é o que tem mais, ou seja, pertence à coleção com mais elementos. Portanto, não são necessários números para resolver esses problemas.

Além disso, outro aspecto importante é a proposta de formulação de problemas pelos estudantes de Ana que, segundo Smole e Diniz (2001), faz com que os alunos tenham controle sobre o fazer matemática e percebam, nesse processo, os aspectos que são importantes, ou seja, a relação entre os dados, a pergunta e a resposta, a articulação do texto, os dados e os procedimentos para resolvê-lo. Esse processo possibilita que eles pensem no problema como um todo, pois são os responsáveis por sua elaboração, desviando a atenção da busca por identificarem as palavras que indicam qual a operação deve ser realizada.

Notamos que, apesar da iniciativa de Ana ser interessante, ela pode causar efeito contrário ao desejado. Smole e Diniz (2001) sugerem que, no início, o trabalho com a formulação de problemas deve ser simples e para estimular o processo proposto pode ser criada uma pergunta que deve ser respondida a partir de um problema dado; fazer uma pergunta baseada em uma figura dada; elaborar a continuação de problema com o início dado; relacionar um problema parecido a outro dado; entre outros. Assim, quando forem vencidos os desafios e as dificuldades iniciais, é possível ofertar questões mais elaboradas, propor a formulação de um problema a partir de uma pergunta, de uma resposta dada, de uma operação, de um tema etc.

As professoras também destacaram algumas atividades sobre geometria que ministraram em sua prática de sala de aula e, para ilustrar, trazemos uma prática de Lusmarina e outra de Renata. Lusmarina propôs uma atividade em que as crianças carimbaram a face de um sólido no caderno, possibilitando perceberem qual figura geométrica compõe a face desse sólido.

> Para que as crianças possam observar as figuras planas a partir dos sólidos geométricos é pedir a eles que tragam embalagens diferenciadas e após explorá-las em sala de aula, pedir aos alunos que as use como carimbos, molhando-as em um recipiente com tinta e carimbando uma folha para que possam perceber as figuras planas encontradas e quais as suas características (Fórum de discussão, LM2).

Renata, para a compreensão da diferença entre um quadrado e um retângulo, trabalhou com seus alunos da Educação Infantil a atividade explicitada a seguir, na qual notamos que ela destacou a possibilidade de esses conceitos intrínsecos às figuras serem sistematizados em outros momentos da escolarização:

> [...] dei um grande pedaço de barbante a cada um deles e saímos pela escola medindo um dos lados daquilo que poderia ter a forma de um quadrado e de um retângulo, cortando o barbante nessa medida e comparando-o aos outros lados. Caso fossem os quatro iguais seria o quadrado e se apenas dois lados fossem iguais seria o retângulo a figura que o objeto possuía em sua construção. Ao levar como atividade para casa e se depararem com objetos que utilizavam em seu dia-a-dia como os livros e brinquedos tiveram uma compreensão real das figuras geométricas, que futuramente será aprimorada (Texto individual, LM2).

A primeira atividade, em que as crianças carimbaram as faces das embalagens, propiciou-lhes observar as figuras planas que compõem as faces dos sólidos. O professor precisa tomar cuidado em atividades como a que os alunos mediram com barbante os objetos para verificar se os lados representavam quadrados ou retângulos, porque eles poderiam medir um losango que também tem todos os lados de mesma medida e concluírem que se refere a um quadrado. O mesmo pode acontecer ao medir um paralelogramo e indicarem ser um retângulo. Isso acontece, pois além da medida dos lados é preciso verificar a medida dos ângulos para saber a que figuras referem-se.

Tanto a atividade de carimbo quanto a de medida dos lados de objetos com barbante permitem trabalhar com o aspecto figural das figuras, pois ao carimbar as faces do sólido, os alunos podem não carimbar as figuras conforme normalmente elas são apresentadas nos livros didáticos: com os lados paralelos à margem. O mesmo acontece com os objetos que foram medidos com barbante.

Essas experiências nos remetem a refletir a respeito da ideia apresentada por Nacarato e Passos (2003, p. 61), apoiadas em Fischbein, sobre o aspecto figural, o qual corresponde à imagem mental, ou seja, "a representação sensorial de um objeto ou fenômeno" e está associado ao aspecto conceitual e que, no caso das figuras, podem ser manipuladas por meio das transformações geométricas (rotação, translação etc.).

Ana também comentou sobre uma atividade que realizara com seus alunos a partir do texto *Governar* de Carlos Drummond de Andrade quando propôs a eles fazer a escolha do representante de sala, organizar os votos em tabela e depois construir um gráfico.

> Estou trabalhando nesta semana que antecede as eleições um texto de Carlos Drummond de Andrade, intitulado Governar. Ele é uma narrativa bem legal sobre o tema governo autocrático. Para finalizar as questões que propus sobre o texto, pedi aos alunos que fizéssemos uma eleição na sala para decidir o aluno representante da turma. Mesmo que simbolicamente, pois não temos o hábito de escolher nenhum aluno representante no 4º ano, ainda mais no final do ano! Bom, pedi que entre os candidatos, fossem escolhidos aqueles que melhor representariam seus interesses na sala de aula e na escola, como levar recados, conversar sobre problemas com a professora e com a direção da escola, enfim, um cargo de

> responsabilidade que não deve ser direcionado a qualquer um! Então, feita a eleição do representante e do vice, os dados foram coletados na aula de matemática e organizados numa tabela. Depois, junto com o auxílio da professora, fizemos o gráfico dos resultados da eleição em papel quadriculado, para que os quadrinhos ajudem a ter melhor visualização dos resultados obtidos (Fórum de discussão, LM2).

Como estava próximo do período das eleições, Ana utilizou, nessa atividade, um texto que se relacionava com os acontecimentos vivenciados naquele momento pelos estudantes. Após as atividades com o texto, ela propôs a eleição do representante de sala e, relacionando aos conteúdos de tratamento da informação, sugeriu a elaboração de uma tabela e a construção de um gráfico de colunas.

Para auxiliar na execução da construção do gráfico, ela utilizou o papel quadriculado e comentou que ele, além de auxiliar na visualização dos resultados, permite ressaltar outros aspectos importantes como o espaço entre as colunas e a medida da largura que devem ser iguais.

Essa atividade foi desenvolvida aproveitando-se de uma situação que era vivenciada pelos estudantes e que possibilitou discussões sobre a responsabilidade de se escolher um representante que de fato irá atuar em favor da turma, e que se compara a eleição dos nossos políticos.

Consideramos essencial a prática de Ana e a forma como desenvolveu os conteúdos. Contudo, temos que ter clareza que o ensino de estatística em sala de aula, segundo Lopes (2008), não pode se reduzir à construção de tabelas e gráficos, mas é importante que sejam abordados também conteúdos de probabilidade, por isso, a autora refere-se à estocástica quando trata dessa área da Matemática. Conceitos como de chance, de incerteza e de aleatoriedade são conteúdos de probabilidade, que estão presentes em nossas vidas, precisam fazer parte também dessas aulas. Nesse sentido, Lopes (2008) defende que esses conceitos devem ser abordados pelo professor desde o início da escolarização, o que inclui a Educação Infantil, nível de ensino em que a pesquisadora também tem realizado diversas investigações.

Algumas Considerações

Neste artigo, tivemos como objetivo discutir e refletir sobre algumas práticas em matemática de professoras dos anos iniciais que participaram de um curso a distância de formação de professores.

Para tanto, apresentamos algumas dessas práticas que foram explicitadas nas disciplinas referentes à Matemática desse curso em que abordaram diferentes áreas, como os números e as operações, a geometria e o tratamento da informação. Esse aspecto, por si só, já é importante porque essas professoras indicaram em uma atividade inicial da disciplina LM1 que tiveram um contato com o ensino-aprendizagem da matemática enquanto estudantes que enfatizava os números e as operações.

Além disso, elas utilizaram de diferentes estratégias para abordar esses conteúdos como a resolução e a formulação de situações-problema, atividades práticas de geometria com o carimbo e a medição dos lados de objetos e a elaboração de tabelas e gráficos.

Os problemas apresentados por Alice apresentam algumas características diferentes dos problemas convencionais, como por exemplo, não trazem palavras que dão pistas de qual operação deve ser realizada. A proposta de elaboração de problemas explicitada por Ana também é um aspecto importante nas aulas de Matemática, pois as crianças não tem o hábito de criarem seus próprios problemas, mas apenas de resolver.

As práticas de geometria possibilitaram que fossem tratadas questões importantes nas aulas, como os aspectos figural e conceitual das figuras e suas propriedades a partir da medição dos lados de objetos que podem levar os alunos a concluírem que todo quadrado é um losango e também um retângulo, mas que o contrário nem sempre é verdadeiro.

O mesmo acontece com o jogo *Avançando com o resto*, pois o resto da divisão nem sempre é abordado nas aulas de matemática e esse jogo permite questionamentos interessantes: Qual o maior resto possível? Por quê? O que acontece com o jogador que a ficha cair na casa com o número zero? Da mesma forma, a atividade proposta por Ana, a partir do texto de Carlos Drummond de Andrade, que possibilitou discussões mais amplas e também abordar os conteúdos de tratamento da informação.

Dessa forma, consideramos que essas estratégias deslocaram o ensino-aprendizagem da matemática da memorização, colocando os alunos como atores principais desse processo e o professor como responsável pela *mediação didática*. Nesse sentido, a cultura de aula de Matemática presente nas práticas dessas professoras buscam romper com o tecnicismo.

Agradecemos ao apoio financeiro da CAPES e da FAPEMIG.

Referências

Cezari, V. G. F. & Grando, R. C. (2008). Cultura de aula de matemática presente nas narrativas de formação por professores do ensino fundamental. *Horizontes, 26*(1), 89-96.

Bogdan, R. C. & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Brasil. (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática*. Brasília: MEC/SEF.

Fiorentini, D. (1995). Alguns modos de ver e conceber o ensino da matemática no Brasil. *Zetetiké, 3*(4), 1-37.

Fiorentini, D. & Lorenzato, S. (2006). *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos*. Campinas: Autores associados.

Libâneo, J. C. (1994). *Didática.* São Paulo: Cortez.

Lopes, C. E. (2008). O ensino da estatística e da probabilidade na Educação Básica e a formação dos professores. *Cadernos Cedes, 28*(74), 57-73. Recuperado em 15 novembro, 2012, de http://www.scielo.br/pdf/ccedes/v28n74/v28n74a05.pdf.

Nacarato, A. M. & Passos, C. L. B. (2003). *A geometria nas séries iniciais: uma análise sob a perspectiva da prática pedagógica e da formação de professores*. São Carlos: EDUFSCar.

Onuchic, L. R. (1999). Ensino-aprendizagem de Matemática através da resolução de problemas. In M. A. V. Bicudo (Org.). *Pesquisa em educação matemática: concepções e perspectivas*. São Paulo: Editora UNESP.

Onuchic, L. R. & Allevato, N. S. G. (2004). Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In M. A. Bicudo & M. C. Borba (Org.). *Educação matemática: pesquisa em movimento*. São Paulo: Cortez.

Smole, K. C. & Diniz, M. I. (2001). *Ler, escrever e resolver problemas: habilidades básicas para aprender matemática*. Porto Alegre: Artmed.

Smole, K. C. S., Rocha, G. H. R., Candido, P. T. & Stancanelli, R. (2004). *Era uma vez na matemática: uma conexão com a literatura infantil*. São Paulo: IME-USP.

Van de Walle, J. A. (2009). *Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula*. Porto alegre: Artmed.

Viñao Frago, A. (1998). Por una historia de la cultura escolar: enfoques, cuestiones, fuentes. *Actas del Congreso de la Asociación de Historia Contemporánea*, Valladolid, España. Recuperado em 11 agosto, 2012, de http://www.ahistcon.org/docs/Valladolid.pdf.

Recursos didácticos para la enseñanza del pensamiento métrico y espacial con estudiantes de grado primero.

Francy **Castañeda** Torres
Universidad Nacional Abierta y a Distancia
Colombia
francymariac1985@gmail.com
Lina Fernanda **Torres**
Universidad Distrital
Colombia
lina.torresr250413@gmail.com
Luisa Fernanda **Amaya**
Universidad Distrital
Colombia
lisa_a_17@hotmail.com

Resumen

En este documento presentamos un proyecto de aula que sirvió como apoyo en el aprendizaje de nuevos conocimientos en el educando con relación a los pensamientos métrico (vinculado con el acto de medir) y el espacial (vinculado con los objetos físicos vistos como el cuerpo propio y el de otros), y guiadas por diferentes materiales didácticos dando a entender la importancia de llevar estos pensamientos en paralelo y ayudados por el material didácticos puesto que estos son parte fundamental para el aprendizaje de las matemáticas, logrando interiorizar los conceptos de medición y figura geométricas por medio de un aprendizaje significativo dentro del aula de clase de los estudiantes del primer ciclo de la básica primaria, y además sirvió como herramienta en el proceso de enseñanza aprendizaje del estudiante en formación docente, teniendo en cuenta los referentes teóricos pertinentes y guiadas por la estructura planeada por grupo DECA.

Palabras clave: Enseñanza, aprendizaje, saber, recursos, manipulativo, tangibles, profesor, estudiante.

Introducción

Este Proyecto de Aula "La finca" está enfocado en el estudio de los sistemas métrico y espacial en el grado primero, en el cual se abordaran diferentes actividades a través, de las cuales identificaremos las fortalezas y debilidades de los estudiantes con respecto a los conocimientos que se trabajaran en el aula de clase. Llevándose a cabo una investigación bibliográfica en algunos libros de síntesis, unidades didácticas elaboradas en el proyecto de la licenciatura que nos sirvieron de referencia para poder abordar el tema con los niños y enfocarlo en las necesidades que se presentan desde la primera fase escolar.

Observando que en esta etapa del niño el estudio de la geometría es limitado y se trabaja por aparte del sistema métrico o de medida. Con ello queremos dar a entender que son dos sistemas que se trabajan en paralelo y que son importantes para el desarrollo intelectual en la primera fase de la formación escolar.

Esta experiencia se implementó en el Colegio Instituto Técnico Juan Del Corral I.E.D de Bogotá, Colombia, en el grado primero, mediante un proyecto de aula llamado "Mi Finca", siendo este un dispositivo didáctico que buscó estimular a lo largo de las diferentes actividades planteadas la construcción del conocimiento matemático, de acuerdo a las cuatro dimensiones de este dispositivo:

- Dimensión matemática: Esta comprende el vínculo entre actitudes y situaciones que podrían ser explorados en los diseños didácticos relacionando al juego como un dispositivo para el aprendizaje de las matemáticas.
- Dimensión cognitiva: Comprende la relación entre los procesos que el sujeto (estudiante) realiza para desarrollar acciones o resolver problemas.
- Dimensión comunicativa: Se entiende como el desarrollo de tramas discursivas asociadas a géneros discursivos como el pedagógico y a subgéneros como el didáctico.
- Dimensión socio-matemática: Concibe las relaciones entre todos los elementos constitutivos del contexto didáctico, en donde se considera el sujeto en un contexto social con necesidades de interacción.

Todas estas dimensiones ayudado de los recursos didácticos manipulativos tangibles –que pone en juego la percepción táctil- y manipulativos grafico–textuales-verbales –en los que participan la percepción visual y/o auditiva-, guiado de acuerdo al modelo del grupo DECA (1992) el cual maneja cuatro fases donde las actividades de iniciación o introducción, sirven para que el alumnado explicite y exteriorice sus ideas previas sobre los contenidos que se van a tratar, compruebe la necesidad de trabajar esos contenidos, compruebe que sus conocimientos y estructuras conceptuales anteriores no son las más adecuadas para tratar esas situaciones y que, por tanto, deben ser transformados o ampliados, y caiga en un conflicto interno cognitivo que le fuerce a un cambio en sus esquemas de conocimiento. Se encuentran las actividades de desarrollo o reestructuración, que sirven para tomar contacto, practicar y asimilar los nuevos contenidos, reflexionar sobre su utilidad a la hora de enfrentarse a nuevas situaciones, comparar con los conocimientos anteriores, comprobar sus ventajas e incorporarlos a su experiencia personal, y producir el cambio deseado en sus esquemas mentales, como consecuencia de la superación del conflicto cognitivo aparecido con las actividades de iniciación. Continua con las actividades de aplicación o profundización que son útiles para aplicar a otras situaciones los nuevos conocimientos adquiridos, reflexionar sobre las características esenciales de esos contenidos, ampliar el conocimiento conseguido, para trabajar nuevas situaciones y contextos, proponer situaciones de carácter opcional, dependiendo del nivel de dificultad y de la situación personal de cada alumno/a. Y finalmente se encuentran las actividades de evaluación que pretenden revisar el proceso en su conjunto. Todas las actividades sirven para conocer los progresos de los alumnos, pero éstas de modo específico pretenden conocer el grado de los aprendizajes que los alumnos han adquirido.

Para dar inicio a este proceso de enseñanza-aprendizaje es importante realizar una actividad de reconocimiento y diagnóstico para identificar los diferentes conocimientos que se

presentan al interior del aula con relación a los pensamientos métrico y espacial; posteriormente lo evidenciado en la actividad de diagnóstico se utilizó para comenzar a crear los planos que brindo las bases para ubicar espacialmente los elementos que componen la finca, a través de las nociones de espacialidad y la dimensionalidad. Lappan y Winter 1984 Afirman: A pesar de que vivimos en un mundo tridimensional, la mayor parte de las experiencias matemáticas que proporcionamos a nuestros niños son bidimensionales (Dickson, 1991).

Metodología

En este proyecto se tuvo en cuenta la relación existente entre el pensamiento métrico y espacial en el desarrollo del aprendizaje del estudiante, en donde los educandos del grado primero del colegio instituto técnico Juan del Corral I.E.D. crearon una finca en la cual se relacionaron estos pensamientos, a través de la construcción de las casas, animales, personas y el espacio para los cultivos, por medio de los diferentes recursos manipulativos dando cuenta de la relevancia de los mismos para afianzar los conocimientos previos (métrico y espacial).

Para el desarrollo del proyecto de aula se utilizaron las nociones de espacialidad y la dimensionalidad, para trabajar esto se establecieron grupos de trabajo en la construcción de la finca con una medida arbitraria que los estudiantes escogieron colectivamente, más adelante se utilizaron estos planos y las siluetas para la creación de los animales, las casas y el espacio para los cultivos donde los estudiantes de forma implícita comprenden el paso de las figuras geométricas bidimensionales a lo tridimensional, donde el tipo de material didáctico fue reciclable el cual ayudó al estudiante a facilitar el aprendizaje sobre el cuidado y la problemática que presenta el planeta con la contaminación.

Este proyecto de aula se implementó ayudado de la metodología de grupo DECA que da inicio a partir de las actividades de reconocimiento, diagnóstico, introducción, reestructuración y finaliza con una evaluación de los conocimientos adquiridos. En la Tabla 1 se mostrará la secuencia de actividades que se ejecutó en el proyecto.

Tabla 1
Secuencia de Actividades

FASE	INTENCIÓN	DESCRIPCIÓN	RECURSOS	REFERENCIA
RECONOCIMIENTO	Reconocer los gustos e intereses de los estudiantes.	Las actividades se plantearon de manera individual y grupal en forma de juego.	Una pelota que ayudó a reconocer (gustos, intereses y aficiones) a los estudiantes a través del juego.	Godino, J. 1998 Uso de material tangible y gráfico-textual en el estudio de las matemáticas: superando algunas posiciones ingenuas.
DIAGNÓSTICO	Identificar los conocimientos previos que tienen los estudiantes sobre cada uno de los pensamientos a trabajar en nuestro proyecto.	Las actividades se plantearon individual y grupalmente en forma de juego ya que los niños aun no saben leer y escribir.	Salón de clase, que ayudó a las practicantes a identificar los conocimientos previos de los estudiantes.	
INTRODUCCIÓN	Diseñar la finca a construir.	La actividad se realizó de forma grupal.	Papel periódico, colores, regla. Lápiz, que ayudaron al estudiante a la comprensión de las	Chamorro, C. 1994. El Problema de la Medida:

			nociones topológicas y el patrón de medida.	Didáctica de las Magnitudes Lineales. Editorial Síntesis. España.
	Creando la unidad de medida.	La actividad se realizó de forma grupal.	Un cordón, tira de papel o la mano donde ellos reconocieron la unidad de medida necesaria para crear algo.	Dickson, L. 1991. El aprendizaje de las Matemáticas. Editorial Labor. Madrid. España.
	Diseño de planos.	La actividad se realizó de forma grupal.	Cartón paja donde se quería que los estudiantes comprendieran las nociones de situación y nociones geométricas.	Martínez, A. 1989 Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la geometría. Editorial síntesis. España.
REESTRUCTURACIÓN	Creación de las casas.	La actividad se realizó de forma grupal.	Cajas de fósforos, temperas que ayudó al uso de materiales reciclables y la dimensionalidad.	http://normalista.ilce.edu.mx/normalista/r_n_plan_prog/preescolar/4_semestrepreescolar/program/prog_pens_mat.pdf,
	Creación de los cultivos y la cerca.	La actividad se realizó de forma grupal.	Cascarás de huevo, papel de colores, palos de paleta con los cuales construyeron las nociones de región, figura, cuerpo geométrico, superficie y volumen.	
	Creación de los animales.	La actividad se realizó de forma grupal.	Filigrana, plastilina en donde construyeron nociones de figura y cuerpo geométrico.	
EVALUACIÓN	Cerramiento de la finca	La actividad se realizó de forma grupal.	Palitos de paleta, con estos los estudiantes aprendieron la noción de área y superficie	
	Presentación de su finca.	Fincas construidas por los estudiantes, esta socialización ayudo a los estudiantes a tener respeto por los demás compañeros.		

Resultados y discusión

Teniendo en cuenta la Tabla 1 se hará una descripción de cada una de las actividades que se aplicaron para el proceso de enseñanza-aprendizaje de los pensamientos espacial y métrico. Las actividades (reconocimiento – diagnostico) se desarrollaron en dos momentos, en el primer momento se realizó la actividad de reconocimiento y se efectuó de la siguiente manera:

Para esta primera actividad se verificó el espacio físico en el cual se trabajaría, uno de ellos el aula de clases, observar Figura 1 la cual fue asignada a las practicantes, los estudiantes estaban distribuidos (niña-niño) en filas de (3-2-3) (Figura 1) y allí evidenciamos que los niños que se encontraban en la fila del medio eran los que más presentaban dificultades en cuanto a la concentración y a la escritura, seguido identificamos los recursos didácticos con los que se desarrollarían cada una de las actividades.

Seguidamente se dio inicio al juego llamado las cualidades de mi compañero, en la que los estudiantes se formaron en círculo, el juego consistía en pasar una pelota pequeña por cada estudiante para enunciar el nombre de algún compañero del salón e indicar que le gusta de su personalidad y que no le gusta, el juego continuó hasta que todos los estudiantes se presentaron.

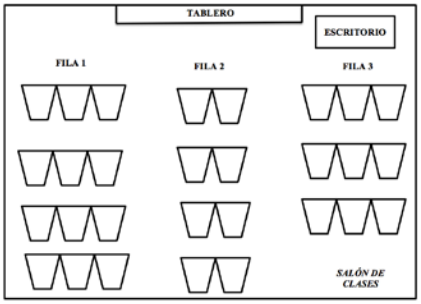


Figura 1. Salón de clases

Y para el segundo momento se realizó la actividad de diagnóstico en donde se quería identificar los diferentes conocimientos que tenían los estudiante se implementaron diferentes actividades en donde reconocieran las figuras geométricas básicas (cuadrado, rectángulo, círculo, triángulo), de igual manera se trabajaran las nociones de orientación en donde a los estudiantes se les presentan un punto de referencia del yo corporal y de los objetos exteriores respecto del yo, cada estudiante que realizó las actividades de las nociones de situación presentó características del yo corporal, del yo con referencia a los objetos exteriores en su etapa inicial, ya que la noción de orientación derecha e izquierda es más difícil por la simetría del cuerpo.

Diseño de la finca.

De acuerdo a lo trabajado en las actividades anteriores se llevó al estudiante a la comprensión del desarrollo de algunos elementos como la conservación, las nociones topológicas, transitividad y figuras geométricas iniciando de esta manera el proyecto de aula. Para esta sesión de clase se quería iniciar con el diseño de la finca en donde se les pidió a los estudiantes formar grupos de tres personas con los que "discutirán" los elementos que iba a tener esta, para tener una evidencia de esto cada grupo de trabajo "registro con dibujos" lo que iba a tener su finca, de acuerdo a las nociones que estaban en el papel derecha, izquierda, arriba y abajo, observar Figura 2 en donde se presenta uno de los planos que realizaron los grupos de trabajo.

Teniendo en cuenta las nociones de situación según Martínez (1989), los niños no tienen una referencia con respecto al yo corporal, lo cual hace más difícil la noción de direccionalidad (derecha e izquierda); pero al trabajar el yo externo en la actividad anterior los estudiantes identificaron la orientación (derecha-izquierda) mucho más fácil; además que se presenta un punto de referencia que ellos comprenden y ayudan a la orientación del niño; según las nociones básicas relacionadas con la orientación espacial los estudiantes situaban los objetos en el espacio pero no reconocían la posición que esta ocupaba, ya que para ubicar algunos dibujos los estudiantes realizaron la ubicación en otra parte a la indicada por las practicantes, y por esto se llegó a la conclusión que los estudiantes tienen una referencia con respecto al yo externo.

En cuanto a las figuras geométricas Dickson (1991), nos muestra los niveles de Van Hiele Nivel 1: La Visualización, en donde los estudiantes logran dibujar las figuras geométricas básicas (cuadrado, triángulo, rectángulo, círculo); sin tener en cuenta la proporción, ni las características de ellas y aún sin utilizar términos matemáticos los identifican con representaciones de su entorno asociadas a objetos donde se observan las figuras (parece una rueda, es como una ventana, etc.).

Con relación a los recursos trabajados en el aula de clase se debe tener en cuenta las funciones que cumplen estos en ella, en la cual se implementaron los siguientes materiales:

- 1/2 pliego de papel periódico por grupo de trabajo, con este material se encontraron algunas de las funciones: Función ostensiva e intensiva; en la cual los estudiantes y el mismo material dieron cuenta de las partes y los nombres correctos de las figuras geométricas que tenía el plano al momento de dibujarlas, a su vez se presentaron las nociones de situación al tener en cuenta las indicaciones dadas por las practicantes para dibujar cada una de las figuras. **Función actuativa**: Los estudiantes describían los dibujos realizados y a su vez mostraban las diferentes figuras geométricas (cuadrado, triángulo, rectángulo, círculo). **Función extensiva**: Se presenta una situación problema para los estudiantes ya que deben utilizar las nociones de situación para dibujar las figuras indicadas por las practicantes.
- 1 caja de colores, 3 reglas y 3 lápices por grupo. **Función Extensiva:** Los niños trabajaron las representaciones visuales que sirven como medio de expresión; estos materiales son manipulativos grafico-textuales-verbales (ostensivos).

Figura 2. Plano de la creación de la finca.

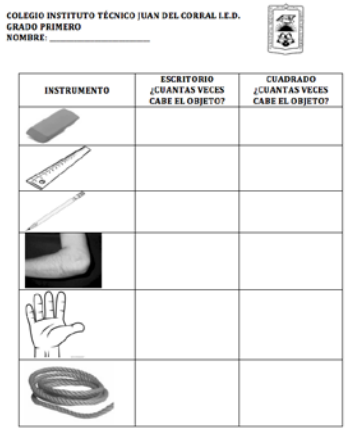
Creando la unidad de medida.

En el pensamiento cognitivo según Vygotsky (1988) una de las herramientas importantes es el lenguaje con el cual se puede medir o examinar el desarrollo de conocimientos en el estudiante, y el aprendizaje se produce más fácilmente en situaciones colectivas. Para esta segunda clase se quiso trabajar la creación de la unidad de medida ya que a partir de esta se construía la finca, en ese momento se les iba indicando a los estudiantes que fueran midiendo su escritorio y cuatro cuadrados (Figura 4) dibujados en el piso del gimnasio con los siguientes instrumentos: regla, lápiz, borrador, codo, mano, cuerda; cada uno de estos resultados los fueron anotando en la guía de trabajo que se les proporcionó (Figura 3). Para Dickson (1991) es típico que los niños en las fases iniciales se apoyen en estimaciones, en donde la acción de medir supone la repetición de una unidad de medida, esta repetición ha de ser tal que el intervalo que hay que medir este cubierto o lleno por la unidad, de manera que no hay huecos ni superposiciones, es por eso que los niños no realizaron una medición adecuada si no por el contrario presentan una estimación y aproximación de las veces que abarca el instrumento en el objeto medido, esto demostró que los estudiantes aun teniendo una unidad de medida, dejaban espacios ya que no tenían en cuenta el final y comienzo del objeto medido, cubriendo solo una parte de la dimensión a medir para realizar la aproximación. Teniendo en cuenta la medición las cantidades de magnitud continua, longitud, superficie.

En dicha actividad se trabajaron con recursos manipulativos – tangibles (lana, lápiz, regla, mano, codo, borrador), como los manipulativos grafico-textuales-verbales (guía), presentando las diferentes funciones: ostensiva en donde se evidenció a través de las respuestas brindadas para

cada instrumento de medida escritos en la guía, intensiva se presentó cuando el estudiante realizó la medición al objeto indicado y escribía la respuesta que había obtenido en la guía, actuativa cuando el estudiantes midió los objetos indicados por las practicantes (escritorio y cuadrado) con los recursos y extensiva que se presentó una situación problema, ya que el estudiante realizó distintas mediciones con los objetos dados y enunciaron los hallazgos en la guía.

Como dice Bright (1976) la estimación de magnitudes es "el proceso de llegar a una medida sin la ayuda de instrumentos de medición. Es un proceso mental, aunque frecuentemente hay aspectos visuales y manipulativos en él", esto nos da cuenta que los estudiantes solo realizaron la estimación a partir de un proceso mental ayudado de aspectos manipulativos (lana, lápiz, borrador, codo, mano) sin tener en cuenta la función del instrumento de medida, aunque ellos tengan presente que es más fácil medir con la regla, por que esta tiene números que les ayudan a identificar cuantas veces cabe el instrumento.


COLEGIO INSTITUTO TÉCNICO JUAN DEL CORRAL I.E.D.
GRADO PRIMERO
NOMBRE: _____

INSTRUMENTO	ESCRITORIO ¿CUANTAS VECES CABE EL OBJETO?	CUADRADO ¿CUANTAS VECES CABE EL OBJETO?

Figura 3. Guía del estudiante.

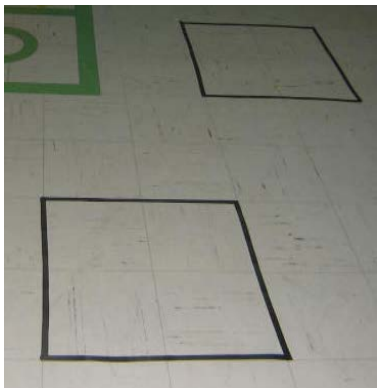


Figura 4. Cuadrados

Diseño de los planos

Continuando con la clase se obtuvo evidencias en donde los estudiantes no tienen claridad de las partes (lados) y perímetro que conforman las figuras geométricas; y la relación de lateralidad y verticalidad (arriba, abajo, derecha, izquierda), por lo que fue necesario afianzar estos conocimientos para poder pasar de lo bidimensional a lo tridimensional en el proyecto de aula; se les expuso un plano general como se muestra en la Figura 5 en donde se recopilo todas las ideas de los grupos de trabajo y se les indicó que las figuras geométricas son la vista desde arriba de la finca (como si viajaran en un avión) y de esta misma manera ellos realizaron la creación de esta con los materiales que ya se les había brindado, a medida que ellos iban realizando los planos se les brindaba indicaciones de las partes que conforman cada figura geométrica, y de esta forma ir ubicando cada una dentro del plano.

El reconocer y nombrar características de objetos, figuras y cuerpos geométricos da inicio con la construcción de objetos y figuras productos de la creación del niño, en nuestro caso con la construcción de la finca fue necesario la creación de los cultivos y las casas de los animales y las personas. De esta manera se utilizaron materiales diversos con la finalidad de describir semejanzas y diferencias observadas entre objetos, figuras y cuerpos geométricos empleando su lenguaje convencional, interiorizándolo al momento en que los niños realizaban la descripción de las figuras geométricas que construyeron, lo cual fue la base para reconocer y representar las figuras bidimensionales desde diferentes perspectivas.

En esta actividad los recursos manipulativos tangibles (lápiz, borrador, tijeras regla y pegante), como los manipulativos grafico-textuales-verbales (plano guía), con unas respectivas funciones: ostensiva: los estudiantes iban mencionando cada una de las figuras geométricas con su respectivo nombre a medida que ellos recortaban los pitillos y al momento de rellenar la misma, extensiva: los recursos presentaban a los estudiantes una situación problema ya que debían rellenar el perímetro de la figura con los palillos que tenían de diferentes tamaños y hacerlos encajar correctamente en la figura que habían dibujado, actuativa: el recurso didáctico dio evidencia de la forma como los estudiantes en la etapa pre-operacional solucionan las situaciones que se plantean en cada actividad, puesto que ellos solo compartían las ideas con los integrantes del mismo grupo sin dar a conocer sus ideas con los integrantes de los demás grupos.

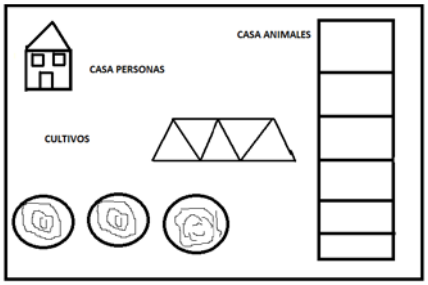


Figura 5. Plano de la finca.

Creación de las casas

Para esta sesión se le entregó a cada grupo 6 cajas de fósforos, pinceles y temperas para la realización de las casas, de las personas y de los animales, estas se hicieron con respecto al plano que ellos ya habían realizado en clases anteriores, cada grupo midió el área de las figuras geométricas para de este modo saber ¿cuántas cajas de fósforos caben dentro del área de cada figura?, haciendo el paso de lo bidimensional a lo tridimensional. En la etapa pre-operacional el niño debe tener un material manipulativo, ya que es a través de este que realiza su proceso de aprendizaje, mediante el recurso manipulativo queremos enseñar al estudiante a reconocer las diferentes figuras solidas geométricas, ayudado del proceso de medición para las mismas, es aquí cuando en nuestro proyecto de aula unimos el pensamiento métrico y el espacial como uno solo para que el estudiante lleve un aprendizaje paralelo de los mismos.

El trabajo con objetos bidimensionales y tridimensionales, sus movimientos y transformaciones permite integrar nociones sobre volumen, área y perímetro, lo cual a su vez posibilita conexiones con los sistemas métricos o de medida y con las nociones de simetría, semejanza y congruencia, entre otras. Teniendo en cuenta según Dickson (1991) es típico que los niños en las fases iniciales se apoyen en estimaciones, a causa de esto los niños realizaron una estimación adecuada ayudados con el material didáctico tangible, esto da cuenta que el material es indispensable para que ellos realicen una medición con un patrón dado que ayuda al estudiante a crear el concepto de área y la construcción del pensamiento métrico.

En cuanto a los recursos podemos decir que como función extensiva al estudiante se le generó una situación problema al tener el material tangible (cajas de fósforos, Figura 6) ya que este recubrió el cuadrado para la casa y al mismo tiempo relacionarlo con el área de la figura y ubicarlas de una manera que estuviera recubierta toda esta sin dejar espacios y como función actuativa el material didáctico presenta al niño una acción al momento en que colocaron las cajas de fósforos de manera que recubrieran toda el área del cuadrado verificando a través del error si estas caben de forma vertical u horizontal.

Figura 6. Creación de las casas.

Creación de los cultivos y la cerca

En un primer momento se les entregó a los estudiantes los planos que realizaron en clases anteriores para empezar con la construcción de las cercas y cultivos; en el momento en que los niños manipularon el material dieron cuenta que el área es todo el recubrimiento que realizaron con las cáscaras de huevo, a partir de la representación de la línea cerrada se introdujo la noción de región cuando los estudiantes colocaron los palillos de colores que encerrarían los cultivos, en la Figura 7 se puede evidenciar como trabajaban con los palillos para realizar el cerramiento de algunos cultivos, adicional se trabajó el recubrimiento con la plastilina sobre el perímetro de la figura. Allí se dio importancia en la construcción del perímetro y su diferencia con respecto al área de una región limitada por una línea; las relaciones espaciales que determinan la proximidad o acercamiento, la separación o alejamiento entre puntos y/o regiones, la condición de cierre de un contorno, la secuencia, continuidad o discontinuidad de líneas, superficies o volúmenes constituyen propiedades geométricas que se conservan en una transformación de carácter topológico.

La medición comporta la reiteración de una unidad de medida en particular sobre la totalidad de la extensión que está siendo medida. En un sentido concreto esto significa que ninguna unidad a de solaparse con otra y que no deben quedar huecos. En el caso del área, la unidad patrón de medida es el cuadrado que para nosotras es la cascará de huevo, cualquier figura resultante puede proporcionar una forma de medición.

Con respecto a los materiales utilizados en esta sesión de clase se puede decir que los recursos manipulativos – tangibles (plastilina, palillos, cascaras de huevo, cartón paja), como los manipulativos grafico-textuales-verbales (plano), nos dejaron observar el uso que los estudiantes le dan a estos instrumentos y evidenciar los conceptos matemáticos que presentan con respecto al pensamiento espacial y las magnitudes (longitud, y superficie), adicional el recurso manipulativo-tangible (plastilina) nos ayudó a dar cuenta de la noción de conservación que tienen los estudiantes; como función actuativa los educandos generan la acción a través del recubrimiento de toda el área de los cultivos.

Figura 7. Cerramiento de los cultivos.

Creación de los animales

En esta sesión de clase se trabajó con los estudiantes la creación de los animales, para esto es necesario dar cuenta a los estudiantes de la relación figura geométrica: conjunto de figuras geométricas como líneas (unidimensional), polígonos (bidimensional) y cuerpos (tridimensional), siendo estos formas tridimensionales, es decir: que tienen largo, ancho y profundidad, limitados por una o varias superficies y a su vez se clasifican en poliedros y cuerpos redondos, puesto que para realizar cada cuerpo que conformaba el animal creado se debía tener en cuenta el tamaño que tendría, se profundizó en estas características y al momento de realizar cada figura ellos fueron adquiriendo implícitamente el concepto de (cubo y cilindro), como se puede ver en la Figura 8 con la vaca y el cerdo; a pesar de tener una unidad continua (plastilina) no dan cuenta que esta unidad no varía en su volumen es decir no presentan captación de lo que permanece invariable ya que según Martínez (1989) haciendo referencia a Piaget (1974) afirma que los estudiantes entre las edades de 7 a 11 años se encuentran en la etapa pre-operacional concreta y este es el inicio de la construcción de la conservación de las diferentes magnitudes, para la magnitud trabajada (volumen). De acuerdo a esto los educandos lograron ver que los animales ocupaban un espacio dentro de la finca y que no iba a ser el mismo que ocuparía otro de los animales.

En esta actividad se presentó el recurso manipulativo-tangible (plastilina), con este material pudimos evidenciar la noción de conservación que pueda llegar a tener los estudiantes, algunas de las funciones que se presentaron fueron: Extensiva en donde al alumno se le genera una situación problema al tener el material tangible (plastilina) ya que debe transformar la plastilina, ostensiva en el momento de realizar los animales reconocieron los nombres de los cuerpos geométricos, actuativa a través de la manipulación del material didáctico el estudiante generó unas acciones (moldear) para las transformaciones de la plastilina mediante la conservación de la magnitud e intensiva el material ayudó al concepto del objeto matemático (cuerpo geométrico), esto se evidenció al momento de comenzar a crear los animales a través de cuerpos geométricos que ellos mismos iban construyendo y se les explicaba el nombre de cada cuerpo o figura que estaban creando.

Figura 8. Figuras tridimensionales o cuerpos geométricos: las cuales tienen largo, ancho y profundidad. (Cerdo, Vaca)

Cerramiento de la finca

En esta actividad los estudiantes trabajaron sobre los planos ya realizados en clases anteriores para empezar a realizar el cerramiento de la finca (Figura 10) y la elaboración de los árboles (naturaleza), a cada grupo se le entregó el material (pitillos, hojas de colores, plastilina) para que se pudiera visualizar la región y el espacio que ocupa un cuerpo geométrico (volumen), esto se llevó a cabo mediante el relleno de todo el perímetro de la finca con plastilina para que se lograra sostener cada pitillo y la construcción de cada árbol.

En esta actividad se presentó el recurso manipulativo-tangible (pitillos, plastilina), con este material pudimos reforzar los conocimientos sobre región y perímetro que tenían los educandos hasta ese momento, algunas de las funciones que se presentaron fueron: como función actuativa el estudiante hace una acción a través de la manipulación de los papeles de colores cuando trataban de hacer correctamente la figura para la construcción de los árboles de tal manera que les quedara bien al pegarlas (tronco y hojas), observar Figura 9.

Como función intensiva, el material didáctico ayuda a los estudiantes a crear el concepto matemático (cuerpo geométrico), esto se evidenció al momento de empezar a crear los arboles a través de los cuerpos geométricos que ellos mismos iban construyendo (troncos y hojas).

En conclusión podemos decir que el material utilizado en la actividad pudo dar cuenta a las practicantes de los procesos de enseñanza- aprendizaje con respecto al concepto de cuerpo geométrico.

Para finalizar el proyecto de aula se hizo una presentación de la finca con sus elementos, a los demás cursos en donde daban cuenta de lo trabajado en cada una de las sesiones de clase.

Figura 9. Diseño de los árboles

Figura 10. Cerramiento de la finca.

Conclusiones

La capacidad de razonamiento se debe estimular con un ambiente de interés por parte del estudiante como del profesor para poder solucionar las situaciones-problemas propuestas en las actividades mediante el proyecto de aula, de igual forma tener la capacidad de hacer conclusiones sobre el objeto matemático; cabe resaltar cómo estos procesos de razonamiento, hacen que el estudiante a través de la experimentación con su entorno puedan llegar a un concepto; este eje es importante en nuestro proyecto de aula ya que logramos que los estudiantes crearán todo lo necesario para la construcción de la finca (área, perímetro, volumen, cuerpos geométricos), y a su vez los llevará a la construcción de los conceptos matemáticos.

Durante las sesiones de clase los estudiantes lograron obtener algunos conocimientos básicos que son importantes en cuanto a la representación bidimensional del espacio tridimensional, de igual manera la exploración activa del espacio tridimensional en la realidad externa y en la imaginación, y la representación de objetos sólidos ubicados en el espacio.

Los instrumentos (material didáctico) son importantes ya que permite formar a los estudiantes con diferentes tipos de lenguajes bien sean gráficos, simbólicos, orales o escritos con los cuales se formen situaciones-problemas, que los llevara a investigar más allá de lo que se plantee dentro de una sesión de clase, logrando ver el interés y el aprendizaje autónomo por parte de los mismos.

Referencias y bibliografía

Bright, G. W. 1976. *Estimation as part of learning to measure in Nelson, D. and Reys, R. (eds) measurement in school mathematics. School Yearbook,* Reston VA: NCTM.

Chamorro, C. (1994). *El Problema de la Medida: Didáctica de las Magnitudes Lineales.* Madrid: Síntesis.

Dickson, L. (1991). *El aprendizaje de las Matemáticas.* Madrid: Labor.

Godino, J. (1998). *Uso de material tangible y gráfico textual en el estudiode las matemáticas: superando algunas posiciones ingenuas.* En A. M. Machado y cols. (Ed.), *Actas do ProfMat 98* (pp. 117-124). Associaçao de Professores de Matemática: Guimaraes, Portugal.

GRUPO DECA. (1992).Orientaciones para el diseño y elaboración de actividades de aprendizaje y de evaluación. *Revista aula,* (6), 33-39.

Lappan, G. & Winter, M. (1984). *Spatial visualization, Matematics teacher,* n´m. 77.

Martínez, A. (1989). *Una metodología activa y lúdica de la enseñanza de la geometría.* Madrid: Síntesis.

Piaget, J. (1974). *La psychologie de l 'enfant.* France: Presses Universitaires.

Vygotsky, L. (1988). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores.* México: Grijalbo.

Representaciones numéricas en niños de primer grado de primaria[1]

Linda Mónica **Gómez** Ortiz
Universidad Pedagógica Nacional-Ajusco
México
mogo233@hotmail.com
Cristianne María **Butto** Zarzar
Universidad Pedagógica Nacional-Ajusco
México
cristianne_butto@hotmail.com

Resumen

Se reportan resultados de un proyecto de investigación sobre escritura numérica. El estudio se realizó con niños de primer grado de primaria, con edades entre 6-7 años. de edad. Etapas del estudio: 1ª etapa: aplicación del cuestionario inicial y entrevista clínica individual; 2ª etapa: aplicación del plan de actividades; 3ª etapa: aplicación de dos cuestionarios finales. El marco teórico se fundamenta en la noción de *Trayectorias hipotéticas de aprendizaje* de Simon (1995). Los resultados revelan que los niños elaboran ideas intuitivas para escribir e interpretar números y ponen en juego lo que saben para acceder a niveles de desarrollo más avanzados con el apoyo de actividades, recursos y materiales de apoyo.

Palabras clave: Escritura numérica, sistema de numeración decimal indo-arábigo, plan de actividades, aprendizaje.

Introducción

El sistema de numeración decimal indo-arábigo (SND) es parte de los contenidos que son enseñados en educación primaria y éste constituye una etapa importante en el desarrollo del pensamiento matemático temprano de los niños. Frecuentemente esta etapa representa un proceso difícil para los niños, pues se enfrentan a obstáculos inherentes al proceso de aprendizaje.

Estudios realizados revelan que los niños elaboran ideas intuitivas, mucho antes de enfrentarse formalmente a la enseñanza del sistema de numeración decimal. Autores como Lerner y Sadovsky (1994) comentan que los niños elaboran sus propias reglas para entender la funcionalidad del sistema. Estos autores realizaron un estudio sobre cómo los niños interpretan y desarrollan las primeras nociones del sistema de numeración decimal antes y después de ingresar a la escuela y concluyen que poco a poco, los niños van consolidando sus hipótesis sobre el sistema.

[1] Este estudio forma parte de la Tesis Doctoral de la Maestra Linda Mónica Gómez Ortiz del Programa de Doctorado en Educación en la Línea de Educación Matemática de la Universidad Pedagógica Nacional Ajusco, bajo la dirección de la Dr. Cristianne María Butto Zarzar.

Scheuer, Sinclair, Merlo de Rivas, Tiéche (2000) exploraron las reglas intuitivas que siguen los niños para expresar los conceptos numéricos que han adquirido y que se manifiestan en sus escrituras numéricas. Estos autores encuentran diversas escrituras no convencionales que se van consolidando al tiempo que los niños ponen en práctica sus hipótesis sobre el sistema, hasta llegar a la convencionalidad.

Brizuela (2004) presenta el caso de George, un pequeño de 5 años que sabe que la escritura para 9 y 19 debe ser diferenciada; la información que le ofrece la numeración hablada le permite identificar en *nineteen* el número *nine*, pero al no saber cuál es el elemento faltante para representar la segunda parte del número recurre a la escritura del cero y su producción final resulta [90] para representar el número 19. La autora reconoce que los niños elaboran ideas intuitivas y se apropian de las reglas del sistema al enfrentarse a las contradicciones entre la numeración hablada y escritura numérica.

Brizuela y Cayton (2010) reconocen que los niños están inmersos en contextos matemáticos diversos y estas experiencias les permiten ir construyendo hipótesis sobre los números, así como, la estructura y el funcionamiento de las reglas del sistema de numeración decimal.

Brizuela y Gravel (2013) utilizan el término *representación* tanto para referirse al producto observable y tangible como puede ser una escritura o un gráfico, como al proceso de construcción de una idea que ocurre en la mente de los individuos. Los autores exploran como las representaciones permiten expresar ideas y hacer que éstas tengan sentido, al mismo tiempo que el uso de estas representaciones ayuda al individuo a organizar y refinar sus ideas.

El sistema de numeración decimal indo-arábigo es un sistema de representación y la escritura numérica como producto tangible, permite evidenciar lo que los niños han aprendido sobre los números y las reglas que los gobiernan, además de que propicia que los niños confronten sus ideas para que su escritura adquiera sentido dentro del contexto escolar

Por su parte, Díaz y Butto (2011) afirman que un sistema de numeración consiste en darle a cada número un nombre y una representación escrita utilizando un reducido repertorio de signos que, siguiendo reglas, permitan la representación de cualquier cantidad, cada sistema cuenta con reglas particulares que hacen válida o no una representación, por ejemplo en el SND la representación de “2” es válida, mientras que la representación en el sistema binario resultaría ser {*10*}.

Desde el punto de vista del conocimiento matemático el sistema de numeración decimal se constituye sobre propiedades que hacen posible la representación de cualquier cantidad, como son:

1. La propiedad posicional se refiere a que el valor de un dígito depende del símbolo utilizado y de la posición que ocupa en el número.
2. La base diez es cuando cada cifra en el número, es un coeficiente de la base 10, los valores de cada cifra se incrementan por la posición que ocupan en el número en potencias de diez.
3. La propiedad multiplicativa es el valor de valor absoluto del dígito por el valor asignado por su posición.
4. La propiedad aditiva se refiere a que la cantidad que representa el numeral es la suma de cada uno de los valores de los dígitos que la constituyen..

Otros estudios de corte didáctico, por ejemplo, Block y Álvarez (1999) y Block (2006) analizan la puesta en práctica de situaciones didácticas para favorecer aspectos relacionados con la noción de número. Estos estudios reconocen la importancia de la planeación de situaciones didácticas en donde se defina claramente el conocimiento que se desea enseñar.

Para Terigi y Wolman (2007) el sistema de numeración decimal es un sistema de representación que involucra aquellos elementos que son representados como los números, las cantidades y la cuantificación, además de las relaciones que existen entre los números para representar cualquier cantidad y éstos se manifiestan en las reglas que gobiernan el sistema. Por ello es importante cambiar la noción que tenemos como adultos, en donde el SND implica sólo una técnica de traducción de cantidades a una forma gráfica.

El presente estudio investiga las nociones que los niños elaboran en la construcción de las reglas del sistema de numeración decimal indo-arábico y cómo logran transitar de las nociones intuitivas hacia las reglas formales. Para ello, se describen los niveles de desarrollo progresivo de dichas ideas mediante un plan de actividades.

A continuación se presentan los objetivos del estudio

Objetivos del estudio

- Analizar y describir las ideas intuitivas sobre escritura numérica de los niños para la construcción de los niveles de desarrollo progresivo.
- Verificar la viabilidad de un plan de actividades para la adquisición de las reglas del sistema de numeración decimal indo-arábico.
- Describir los niveles de desarrollo progresivo y sus implicaciones en la enseñanza de dicho contenido escolar.

Marco teórico

Simon (1995) plantea las trayectorias hipotéticas de aprendizaje (THA) como parte de su modelo del ciclo de enseñanza de las matemáticas, en éste modelo además de describir los procesos de aprendizaje y los alumnos, también ofrece una visión de cómo se debe enseñar. Su propuesta se enfoca en la relación que debe existir entre el conocimiento sobre los procesos de aprendizaje de los alumnos y el diseño de actividades que promuevan el aprendizaje.

En la literatura se identifican diversas interpretaciones y usos de la noción de trayectorias hipotéticas de aprendizaje, por ejemplo, Gómez y Lupiañez (2007) proponen una adaptación de esta noción para apoyar la formación inicial de profesores de secundaria en el diseño de unidades didácticas.

Por su parte, Clements y Sarama (2004) utilizaron las trayectorias hipotéticas de aprendizaje, como un instrumento para constatar los niveles de aprendizaje en la composición de figuras geométricas describiendo niveles de progresión, es decir, los resultados de sus estudios fueron el soporte para validar niveles de desarrollo progresivo y sugieren que los niños se mueven a través de estos niveles de pensamiento en el desarrollo de habilidades para la composición de figuras de dos dimensiones.

En este estudio recuperamos la noción de Clements y Sarama sobre trayectorias hipotéticas de aprendizaje para describir el aprendizaje de los niños, diseñar un plan de actividades y elaborar niveles de desarrollo progresivo para explicar cómo los niños transitan entre los

diferentes niveles de desarrollo al trabajar con actividades de favorecen la adquisición de las reglas del sistema de numeración decimal indo-arábigo.

Metodología

El estudio es de tipo descriptivo y explicativo, de corte cualitativo. Consiste en describir un fenómeno mediante el análisis de sus manifestaciones en un contexto específico. En el estudio, se describe y explica cómo los niños van desarrollando nociones sobre las reglas del sistema de numeración decimal indo-arábigo, se analizan las representaciones numéricas que los niños construyen en tareas de escritura e interpretación de números.

Participante

En el estudio participaron seis niños de primer grado de primaria con edades entre 6-7 años, en una escuela pública de la Ciudad de México. El nivel socioeconómico de la población es medio y bajo, en promedio el nivel educativo de los padres de familia es de secundaria o primaria incompleta.

Etapas del estudio

El estudio consta tres etapas. 1ª etapa: aplicación de un cuestionario inicial, seguidos de la entrevista clínica individual; 2ª etapa: diseño y aplicación de un plan de actividades, 3ª etapa: aplicación del cuestionario final para identificar el trayecto de los niños descrito en los niveles de desarrollo progresivo.

Descripción de las etapas del estudio

A continuación se describen las etapas del estudio:

Primera etapa del estudio: Diseño y aplicación de cuestionarios iniciales. Esta etapa consistió en el diseño de un cuestionario inicial con la finalidad de indagar sobre las ideas que los niños han desarrollado sobre las reglas de numeración decimal indo-arábico antes de iniciar la enseñanza de la matemática formal, seguido de una entrevista clínica individual.

Tabla 1
Descripción del cuestionario inicial

Tarea matemática	Pregunta	Aspecto matemático	Solicitud de la pregunta
Escritura de números	1	Escritura numérica	Se le dictan al niño números con una, dos, tres y cuatro cifras, mismos que llevan ceros intermedios en alguna de las posiciones de las unidades, decenas y centenas.
	2	Antecesor y sucesor	Se le pide al niño que escriba el número antecesor y sucesor del número presentado con dos, tres y cuatro cifras.
	3	Segmento de secuencia numérica	Se le solicita al niño que complete la serie numérica a partir del número presentado en el rango de las decenas y centenas.
	4	Representación de cantidad	Se le solicita al niño que cuente conjuntos con cantidades del 1 al 9 y escriban el número que representa a la cantidad.
	5	Representación de cantidad	Se le solicita al niño que cuente los elementos que hay en conjuntos que van en el rango de los 15 a los 60 elementos y escriban el número que representa a la cantidad.
Interpretación de números	6	Serie numérica oral	Se le solicita al niño decir la serie numérica oral del 1 al 100 al mismo tiempo que señala los números mostrados en un cuadro de diez por diez.
	7	Escritura alfabética	Se le solicita al niño que escribe con palabras el nombre de los números presentados de una, dos, tres y cuatro cifras, de los cuales hay números con ceros intermedios en la posición de las unidades, decenas y centenas.

Aplicación de la entrevista clínica. De acuerdo con Delval (2001), la entrevista clínica es un método para investigar cómo piensan, perciben, actúan y sienten los niños, se trata de descubrir aquello que no resulta evidente de lo que los sujetos hacen o dicen. La entrevista clínica tuvo como objetivo indagar sobre las nociones que han construido los niños respecto al sistema de numeración decimal, de acuerdo con las ideas matemáticas abordadas en el cuestionario.

Fueron realizadas sesiones de entrevistas clínicas individuales de corte piagetiano. Cada entrevista duro aproximadamente entre 40 y 60 minutos. El objetivo es indagar cómo los alumnos resolvieron las tareas planteadas. En la entrevista se pone al niño frente a una situación y se le interroga con el fin de ver cómo justifica y/o argumenta sus ideas. El objetivo es estudiar cómo el sujeto construye sus interpretaciones de la realidad.

Segunda etapa del estudio: Desarrollo y aplicación de un plan de actividades. El plan de actividades consiste en el diseño de situaciones con base a un objetivo de aprendizaje, para ello se toman en cuenta las habilidades y conocimientos desde donde parten los niños y su desarrollo trazan una posible ruta de progresión en el aprendizaje.

En el diseño del plan de actividades se consideraron los resultados obtenidos en la primera etapa del estudio, atendiendo a las manifestaciones de los niños a partir de la presentación de las tareas de escritura y lectura de números, para ello se toma en cuenta las ideas que los niños han construido sobre los números y lo que saben de las reglas del sistema de numeración decimal indo-arábigo.

La aplicación del plan constó de siete actividades. Las tres primeras actividades exploran ideas previas sobre cómo se comportan los números y se recupera la idea de la escritura del número como representación de cantidad. En las siguientes dos actividades se trabajan propiedades del sistema de numeración decimal indo-arábigo.

Finalmente en las dos últimas actividades del plan de trabajo se recuperan las propiedades del sistema de numeración decimal indo-arábigo, apoyando la actividad de los niños con el uso de materiales como las monedas y los billetes del sistema monetario, partiendo de que los niños han tenido experiencias concretas de intercambio y uso de estos materiales que les permiten elaborar ideas sobre cómo se comportan los números y que corresponde a las reglas que rigen al sistema de numeración decimal.

Tercera etapa del estudio: aplicación de los cuestionarios finales. La tercera etapa consistió en la aplicación de dos cuestionarios finales. El primero corresponde a una versión del cuestionario inicial y en el segundo se gradúan y ajusta el plan de actividades. La finalidad era identificar el proceso de adquisición a partir de los niveles de desarrollo progresivo que siguieron los niños en la conceptualización matemática sobre el sistema de numeración decimal.

En este trabajo se describen los resultados de la primera y segunda etapa del estudio que corresponden a la aplicación del cuestionario inicial, entrevista clínica individual y aplicación del plan de actividades.

Análisis de la primera etapa del estudio

Fueron realizados tres tipos de análisis: niveles de logro, categorías sobre la notación numérica y los niveles de desarrollo progresivo.

Por niveles de logro se entiende que son los conocimientos y habilidades que demuestran los niños en las actividades presentadas para la exploración de las ideas matemáticas.

Las Categorías de la notación numérica describen las respuestas de los niños en las ideas exploradas de escritura e interpretación de números. Y con esta información se definieron los niveles de desarrollo progresivo como las posibles rutas que los niños recorren a través de la adquisición de las reglas del sistema de numeración decimal indo-arábigo.

Niveles de logro

Los niveles de logro son los conocimientos y las habilidades que demuestran los niños durante su desempeño en las actividades matemáticas presentadas a partir de los conocimientos que se esperan que los niños deban aprenden en el curso escolar (SIMCE, 2008). En el Cuadro 1 se describe los niveles de logro identificados para cada una de las tareas.

Tabla 2
Niveles de logro: tareas de escritura e interpretación de números

Nivel de logro		Tarea	Descripción
Nivel inicial	Utilizan el rango de los primeros números y aplicar este conocimiento a todas los números presentados.	Interpretación	Los niños identifican alguno de los números en las cifras y los nombran dentro del rango de los primeros números del 1 al 9.
		Escritura	Los niños utilizan la escritura de grafías inventadas o la escritura de un dígito de los primeros números, para escribir cualquier cantidad aun cuando se trata de números de más de dos cifras.
Nivel medio	Recurren al conocimiento que tienen de los números en un rango mayor, elaboran ideas intuitivas para aplicar los que saben a cifras que salen de su rango de dominio	Interpretación	Separan en cifras de uno o dos dígitos para nombrar los números presentados y utilizan un rango de dominio entre el 1 y el 29 aproximadamente para interpretar las cantidades
		Escritura	Escriben de manera convencional números en el rango del 1 al 29, en números de dos dígitos realizan variaciones con su prefijo de los 20's y algunos de los números que identifican. Con números de 3 ó 4 dígitos escriben variaciones de dos números.
Nivel alto	Realizan variaciones con el conocimiento que tienen de los números y reconocen características particulares de números de 3 y 4 cifras.	Interpretación	Identifican cifras en el número a partir de los nudos conocidos y adecúan la interpretación del número haciendo coincidir la emisión sonora con cada parte del número presentado.
		Escritura	Utilizan la propiedad multiplicativa del sistema conservando características de los nudos y la propiedad aditiva del sistema escribiendo la cantidad de dígitos de cada una de las cifras que reconocen en el número

Categorías de la notación numérica

Las categorías de la notación numérica se refiera a las características en la escritura e interpretación de número que realizan los niños sobre las reglas del sistema de numeración decimal indo-arábigo y son:

1. Grafías para letras y números, 2. Rango de dominio, 3. Valor absoluto de los dígitos, 4. Omisión de dígitos, 5. Características de los nudos, 6. Escrituras diferenciadas y 7. Escritura extendida. Cabe señalar que se retomaron categorías como las escrituras extendidas de Lerner y Sadvosky (1994), las características de los nudos de Scheuer, Sinclair, Merlo de Rivas, Tiéche (2000) y la omisión de dígitos de Brizuela y Cayton (2010), para el análisis de las manifestaciones en las respuestas de los niños sobre la escritura numérica.

Nivel de desarrollo progresivo

Los niveles de desarrollo progresivo tienen dos ejes fundamentales, por un lado la parte teórica que sirve de soporte para comprender cómo adquieren el conocimiento y por el otro, la parte práctica que resulta particular a cada uno de los casos de estudio, lo que hace diferente cada construcción de niveles de desarrollo progresivo.

Para la elaboración de los niveles de desarrollo progresivo, se analizan las respuestas de los niños identificando las condiciones en la aplicación de las preguntas que les fueron presentadas, considerando si implicó la escritura o lectura de números y sin se contaba o no con un referente gráfico o con apoyo de la serie numérica oral. En la tabla 3 se presenta la descripción de niveles de desarrollo progresivo para las tareas de escritura

Tabla 3
Niveles de desarrollo progresivo: Dictado de números

Niveles de desarrollo progresivo
Tarea: dictado de números Características: De lo oral a lo escrito y sin apoyo gráfico
Numérico secuencial: Los niños de este nivel de desarrollo recurren a la serie numérica oral para identificar el número dictado y su representación gráfica. No realizan la lectura convencional de los números que rebasan el rango de los 20's, sin embargo identifican el número que ocupa el lugar de las unidades, pues en la oralidad estos números resultan legibles ya que conservan el nombre de su valor absoluto, es decir, en el dictado del número "cincuenta y tres" el niño sólo identifica el número 3, pues para él la palabra "cincuenta" no representa el número 5.
Escritor de nudos: En este nivel de desarrollo los niños identifican y escriben de manera convencional números de dos dígitos. Además son capaces de escribir los números que Scheuer, Sinclair, Merlo de Rivas, Tiéche (2000) identificaron como los nudos, es decir, los niños escriben cantidades como "cien" *100*, "ochocientos" *800* y "mil" *1000*.
Aditivos: Los niños de este nivel de desarrollo escriben cada una de las cifras que identifican en la oralidad del número dictado, reconocen la propiedad aditiva del sistema, pues ponen atención a que cada parte del número esté representado en la escritura, es decir, para "mil quinientos cincuenta" escriben *100050050.* Además son capaces de economizar la escritura de los números de dos dígitos que ya dominan y para "ciento veintiséis" escriben *10026*
Convencionales: En este nivel de desarrollo los niños se acercan a la convencionalidad y empiezan a omitir alguno o todos los ceros de los nudos para escribir los números, es decir, para seiscientos veinticinco escriben *6025* omitiendo un cero de la cifra de los 600, o bien, *625* como escritura convencional.

Análisis de la segunda etapa del estudio

Para el análisis de los datos de esta etapa se toman en cuenta las características de las actividades como el tipo de apoyo concreto, gráfico o simbólico que se les ofrece a los niños durante la aplicación. Además, se puntualiza en los aspectos matemáticos que los niños trabajan durante las actividades. Finalmente estos datos alimentan la elaboración de los niveles de desarrollo progresivo y la manera como los niños avanzan en la adquisición de las reglas del sistema de numeración decimal indo-arábigo

Resultados

A continuación se describen los resultados de la primera etapa del estudio que corresponde a la aplicación del cuestionario inicial y la entrevista clínica individual. Y los resultados de la segunda etapa que corresponde a la aplicación del plan de actividades y el seguimiento a los resultados, observando un nivel de desarrollo progresivo mayor a partir de las actividades planteadas.

Primera etapa del estudio

En este apartado se presentan los resultados de un solo niño (Axel), considerando su nivel de logro, las categorías de la escritura numérica y la descripción del nivel de desarrollo progresivo.

Nivel de logro

En la aplicación del cuestionario inicial, Axel muestra un nivel de logro alto. En las tareas de escritura reconoce características particulares de los números como la escritura de los nudos y utiliza este conocimiento para hacer corresponder la escritura con la emisión sonora de los números dictados. A continuación se muestra un fragmento de la entrevista clínica de Axel sobre su cuestionario inicial

Diálogo de Axel-investigadora. Cuestionario de escritura numérica.

Investigadora: "¿Qué número escribiste aquí?"

Axel: "mmm, el cien"

Investigadora: "El cien"

Axel: "Si, porque el cien es un uno, un cero y un cero".

Investigadora: "Y ¿qué número escribiste acá?"

Axel: "El mil"

Investigadora: ¿Cómo sabes cuál es el cien y cuál es el mil?

Axel: "Porque éste (señalando el 100) tiene dos ceros y éste (señalando el mil) tiene tres ceros. Este es el mil"

En el ejemplo Axel reconoce características particulares de la escritura del cien y del mil, haciendo referencia al número de ceros que se escriben para cada número. Estos números son especiales para los niños pues han estado en contacto con su escritura aún antes de comprender la cantidad que representan, los observan en billetes, letreros, o anuncios y es el propio contexto el que le da significado a la escritura.

Categorías de la escritura numérica

En el análisis de los datos del cuestionario inicial se elaboraron categorías de la escritura numérica como la categoría de escritura extendida que también ha sido reportada por Scheuer, Sinclair, Merlo de Rivas, Tiéche (2000), en donde los niños utilizan la información de la numeración hablada y escriben los nudos y cifras completas, tal y como las escuchan al nombrar los números. A continuación se muestra la Figura 1 como evidencia de la categoría de escritura extendida.

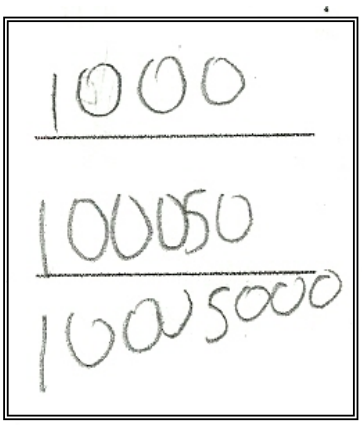


Figura 1. Idea matemática: escritura numérica,

En el ejemplo Axel escribe de manera convencional los números dictados como “cincuenta”, “quinientos” y “mil”, y utiliza este conocimiento para producir otros números ya que recurre a la información que le proporciona la numeración hablada para escribir “mil cincuenta” con una escritura extendida, es decir, después de la escritura de 1000 (mil) agrega la escritura completa de 50 (cincuenta) y para “mil quinientos” conserva la cantidad de ceros en cada uno de las cifras nombradas en el número.

Niveles de desarrollo progresivo

Con los ejemplos mencionados, el nivel de desarrollo progresivo de Axel corresponde al nivel *aditivo,* ya que no sólo identifica y escribe los nudos, sino que intenta representar cada una de las cifras que reconoce en la oralidad del número dictado y tanto en la escritura como en la interpretación de su registro aplica la propiedad aditiva del sistema leyendo el número como la adición de las cifras nombradas para nombrar el número completo

Segunda etapa de estudio

En este apartado se presentan los resultados de Axel durante la aplicación del plan de actividades que corresponde a la segunda etapa y su tránsito por los niveles de desarrollo progresivo.

A partir de los resultados se observa que Axel avanza en sus niveles de desarrollo en la medida en que se ponen a prueba sus hipótesis sobre la escritura de números. En el desarrollo de la actividad, se les presentan a los niños fichas y se les propone utilizar la agrupación como una forma económica para el conteo, finalmente se les pide que escriban la cantidad total de elementos. Axel hace uso del conocimiento que tiene de los nudos y en su registro se manifiestan diferentes escrituras. La Figura 2 es un ejemplo.

Cantidad registrada	Axel
189 fichas	.100.-80.-9.
	10809

Figura 2. Aspecto matemático: Agrupación y registro

En este ejemplo, Axel primero realiza una escritura extendida de la cantidad de elementos tal y como los agrupó, en el siguiente registro para comunicar la cantidad total, sólo ajusta la escritura de uno de los ceros de la primera cifra (100). Lo interpreta leyendo cada parte del número señalando un par de dígitos a la vez.

En el transcurso de las actividades se observa el niño al participar en tareas que implican comunicar cantidades a través del registro, continúa ajustando sus ideas intuitivas sobre la escritura de números. En tareas en donde se trabaja el agrupamiento y la base diez Axel descompone las cantidades en agrupaciones de cien, diez y unidad, representando de manera gráfica y numérica. La Figura 3 es un ejemplo de los ajustes que realiza el niño en su escritura.

Figura 3. Aspecto matemático: Agrupamiento, base 10

En este ejemplo, Axel representa la cifra 100 con un empaque de 100 elementos, al llegar a la siguiente cifra representa cada uno de los objetos acompañando su registro con el conteo verbal. En la escritura numérica de la cantidad total de elementos no duda en sustituir el cero en el lugar de las decenas para el registro de la siguiente cifra, y justifica su escritura explicando que 110 carritos se escribe con tres números, pues si escriben los ceros que corresponde a la escritura del 100 serían mil o más, al escribir más ceros el número se hace más grande.

Niveles de desarrollo progresivo

En los resultados de la primera etapa, Axel se encontraba en el nivel de desarrollo *aditivo* donde todavía utilizaba la escritura extendida de las cifras del número e intentaba que la escritura estuviera en correspondencia con la oralidad del número.

A partir del trabajo realizado en el plan de actividades, el niño empieza a ponen a prueba sus hipótesis sobre la escritura de los números y transita hacia un nivel de desarrollo *convencional*, primero omitiendo algunos de los ceros y aunque todavía conserva parte de la

escritura extendida de los cienes, adecúa el registro para que la cantidad de dígitos en el número no se contradiga con lo que el número representa. Y finalmente realiza una escritura convencional del número, considerando no solamente las características particulares de los números como las tres cifras para escribir los cienes, sino sustituyendo en el lugar de los ceros los números que representan a las decenas y unidades.

Conclusiones

A partir de los resultados encontrados, los niños demuestran capacidad de abstraer cantidades pequeñas sin necesidad de contarla y su rango de conteo llega al segmento del 1 al 20 aproximadamente, mientras que en el proceso de aprendizaje de las reglas del sistema toman en cuenta las ideas que han elaborado acerca de los números que conocen y la información que les proporciona la numeración hablada. Estos resultados muestran que, para trazar niveles de desarrollo progresivo y establecer un plan de actividades que favorezca la adquisición de las reglas del sistema de numeración decimal indo-arábigo, se deben establecer como objetivos las capacidades que los niños deben desarrollar considerando la descripción de los niveles de desarrollo progresivo.

En el diseño y aplicación del plan de actividades se tomaron en cuenta los conocimientos de los niños como punto de partida. La intención de las actividades fue favorecer en los niños el tránsito a niveles de desarrollo más avanzados, observando que el planteamiento de las actividades, el uso de recursos y materiales de apoyo propició que los niños pusieran en juego lo que saben de los números confrontaran sus ideas y gradualmente se acercaran a la convencionalidad de la escritura numérica.

Referencias bibliográficas

Brizuela, B. (2004). *Mathematical development in young children. Exploring notations.* New York: Teachers College Press.

Brizuela, B. y Cayton, G. (2010). Anotando números desde pre-escolar hasta segundo grado: el impacto del uso de dos sistemas de representación en la presentación. En: *Cultura y educación*, 22/2, 149-167. Medford.

Brizuela, B. y Gravel, B. (2013). *Show me what you know.* New York: Teachers College Press.

Delval, J. (2001). *Descubrir el pensamiento de los niños. Introducción a la práctica del método clínico.* Barcelona: Paidós.

Díaz, Y. y Butto, C. (2011). Adquisición del concepto de adición por niños de primer y segundo grados de primaria de una escuela Pública del Estado de Morelos. En: G. López, S. Roger y M.A. Reyes (Coords.). *Investigación en Comunicación Humana: Problemas, intervenciones y nuevas tecnologías.* (pp. 97-122). Míninas: Universidad Autónoma del Estado de Morelos.

Gómez, P. (2002). Análisis del diseño de actividades para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En M.C. Penalva y G. Torregosa (Eds.), *Aportaciones de la didáctica de la matemática a diferentes perfiles profesionales,* (pp. 341-356). Alicante: Universidad de Alicante

Gómez, P. y Lupiáñez, J. L. (2007). *Trayectorias hipotéticas de aprendizaje en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. *PNA*, *1*(2), 79-98.

Lerner, D. y Sadvosky, P. (1994). El sistema de numeración: Un problema didáctico. En C. Parra y I. Saiz (Comp.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones,* (pp. 95–184). Buenos Aires: Paidós.

Scheuer, N., Sinclair, A., Merlo de Rivas, S. y Tiéche Christinat, C. (2000). *Cuando cuento setenta y uno se escribe 10071: niños de 5 a 8 años produciendo numerales*. En: *Infancia y aprendizaje,* 90, 31-50.

Simon, M. (1995). Reconstructing mathematical pedagogy from a constructivist perspective. *In: Journal for Research in mathematics education,* 26/2, 114-145

SIMCE. (2008). *Niveles de Logro 4° Básico para Educación Matemática*. Chile: Ministerios de Educación

Teregi, F. y Wolman, S. (2007). Sistema de numeración: consideraciones acerca de su enseñanza. *En: Revista Iberoamericana de Educación,* enero-abril/43, 59-83. Madrid: OEI.

Un número “no decimál”

Francisco Alejandro **Sánchez**
Fundación Universitaria Konrad Lorenz
Colombia
franciscoa.sancheza@konradlorenz.edu.co

Resumen

A continuación presenta, en el contexto de las matemáticas escolares, una revisión de la conceptualización de lo que es un número decimal y de los procesos implicados en la conversión de expresiones fraccionarias a expresiones decimales y viceversa. La metodología de trabajo se basó en la realización de un análisis didáctico, en el que se consideró, entre otros asuntos: el estudio de la noción de número decimal, el análisis de una muestra de textos escolares y algunas de las posibilidades de representación gráfica de los números decimales. Entre las principales conclusiones que se obtuvieron como resultado del trabajo, se destaca la necesidad de que la enseñanza escolar de los decimales considere una conceptualización más profunda de estos números en la que los procedimientos de conversión de expresiones decimales a expresiones fraccionarias y viceversa, trascienda la comprensión de dichos procesos como un problema de cambio entre dos tipos de representación (la decimal y la fraccionaria), a un problema en el que es necesario distinguir el objeto matemático “número decimal” de sus posibilidades de representación.

Palabras clave: número decimal, fracción, decimal, expresión decimal, número racional, conversión de expresiones decimales a fracciones.

Fundamentación teórica

Para abordar la elaboración de una propuesta en la que esté implicada la conversión de expresiones decimales a fraccionarios y viceversa, es necesario revisar el conocimiento matemático implicado en la comprensión de la noción de número racional y de número decimal. Para ello, en este apartado se abordarán asuntos como:

- Una aproximación a la construcción de los números racionales a partir de la medida.
- Una aproximación a la construcción de los números racionales a partir de relaciones de equivalencia.
- Una construcción de los números decimales.

El propósito de esta sección es el de lograr una clarificación de la diferencia entre la comprensión de lo que es un número como objeto matemático con respecto a las diferentes representaciones que pueden tener los números, y en particular, en lo que se refiere a los llamados números decimales. Como resultado de la revisión anterior, se explicitaran diferencias

y aspectos en común entre lo que se va considerar como número decimal, fracción decimal, expresión decimal, fracción, número racional y otros conceptos relacionados con el tema.

Construcción de los racionales a partir de la medida

En tanto conocimiento para enseñar, Centeno (1988) explica cómo se pueden construir los números racionales a partir de la noción de medida y hace ver que este conjunto de números surge de la insuficiencia de los números enteros para medir magnitudes continuas; en lo que sigue tomaremos algunos de los planteamientos de esta autora.

En general, cualquiera que sea la naturaleza de una magnitud, se supone que puede medirse con instrumentos de medida adecuados, una vez que se haya fijado una unidad. Si bien es cierto que en el campo de la medición de magnitudes se observa que la medida de una cantidad respecto de la unidad de la misma especie puede darse por un número natural, también puede ocurrir, y ocurre con mucha frecuencia, que la medida esté comprendida entre dos números naturales.

Para iniciar la descripción de este tipo de construcción, primero se asume que se da una magnitud M cuya medida se denotará como [M] y una unidad de medida «*u*» de la misma especie que M; además, supongamos que no existe un número entero *p* tal que *p* veces «*u*» sea igual a [M]. Entonces, se tendrá que la medida de M, es decir [M], será igual a *p* veces «*u*» más un resto que es menor que *«u»*. Esto se escribirá de esta forma: ……. [M] = «*u*» · *p* + «*r*», donde «*r*» corresponde a la medida de la magnitud del resto *r* que hace falta para completar la medida de la magnitud M.

Ahora bien, si se considera la unidad «*u*» dividida en un número *n* de partes iguales, cada una de ellas será la enésima parte de «*u*» y se representará como «*u/n*». Por lo tanto, supongamos ahora que existe un número *q* tal que *q* veces «*u/n*» es igual a la medida de la magnitud del resto *r*.

La situación descrita anteriormente, se escribirá como [M] = $p \cdot n \cdot$ «*u/n*» + $q \cdot$ «*u/n*». Si ahora se observa que lo anterior es equivalente a [M] = $(p \cdot n + q) \cdot$ «*u/n*» y se hace que $(p \cdot n + q) = m$, diremos que la medida de M con respecto a la unidad «*u/n*» es el número $(p \cdot n + q)$. Por otro lado, si se supone que la unidad «*u*» se puede subdividir indefinidamente y que la medida de M contiene *m* de esas partes, entonces [M] = $(p \cdot n/n) \cdot$ «u» + $(q/n) \cdot$ «u» = $m/n \cdot$ «*u*». Así, la cantidad *m/n* sería la medida de M con la unidad «*u*» y se designa con el símbolo *m/n***.** A este símbolo que representa la medida de M se le llama razón o fracción y se le considera número. Desde el punto de vista algebraico sólo queda definir operaciones apropiadas para que se puedan realizar operaciones con estos números.

Es fácil verificar que se podría operar con estos números si las operaciones de adición y multiplicación se definen para todo *a*, *b*, *c* y *d* de la siguiente manera:

- $a/b + c/d = (ad + bc) / bd$ para *b* y *d* distintos de 0
- $a/b \cdot c/d = ac / bd$

Además, es conveniente definir que

- $a/a = 1$ para todo *a* distinto de 0
- $a/b = c/d$ si y solo si $ad = bc$

Igualmente, las operaciones de sustracción y división se obtienen como las operaciones inversas de la adición y multiplicación respectivamente.

Con esta forma de construir los números racionales se proporciona una definición que hace posible la existencia de números "obtenidos de medidas". No obstante, esta definición se apoya en la geometría y en la intuición geométrica de la posibilidad de hacer indefinidamente las subdivisiones de la unidad.

En realidad, desde el punto de vista estrictamente matemático, a este tipo de construcción se le puede criticar de no ser una verdadera construcción de número racional. Sin embargo, desde el punto de vista histórico vale la pena señalar que la noción de número racional de los griegos que prevaleció en la antigüedad procedía de la intuición geométrica que proporciona la medida.

Construcción de racionales a partir de relaciones de equivalencia

En la sección anterior se presentó una manera de generar números racionales desde una perspectiva geométrica basada en la medida de magnitudes. Ahora se presentará una construcción de tipo algebraico.

Para empezar, se debe observar que en los números naturales (N) la sustracción no siempre es posible. Para superar esta dificultad se construyen los números enteros (Z) como conjunto numérico que amplía a los naturales y en el que todas las ecuaciones que tengan la forma [$a + x = b$] con a y b como elementos de N, tengan solución.

Del mismo modo, en los números enteros (Z) la división no es siempre posible, basta observar que las ecuaciones de la forma [$b \cdot x = a$] con a y b elementos de (Z) y b distinto de 0, sólo tienen solución cuando a es múltiplo de b. Para eliminar este defecto se construye un conjunto más amplio que el de los enteros en el que la división sea siempre posible con la condición de que b sea siempre distinto de 0. De la misma forma que la sustracción se define en términos de la adición —la ecuación [$a + x = b$] es equivalente a [$x = b – a$] — también podemos definir la división en términos de multiplicación — la ecuación [$b \cdot x = a$] es equivalente a [$x = a \div b$]. Por ejemplo, en la ecuación [$2 \cdot x = 3$], x es el número que multiplicado por 2 da 3 y por tanto x es cociente de 3 por 2 y podemos representarla por el símbolo 3/2, que llamaremos fracción.

El cociente a/b es solución de la ecuación [$b \cdot x = a$] y cada fracción representa un número en el nuevo conjunto. Sin embargo, los números de este conjunto no son simples fracciones, sino familias de fracciones, puesto que muchas fracciones pueden representar el mismo número. De esta manera se puede asociar cada fracción con una familia de fracciones de acuerdo con la siguiente regla: las fracciones asociadas a la fracción a/b con b distinto de 0, están formadas por todas las fracciones de la forma v/u con u distinto de 0, tales que $a/b = v/u$ y será denotada como [a/b].

Así pues, [a/b] es una familia de fracciones a la que se le llama **número racional**; en otras palabras, la clase de las fracciones equivalentes a 5/3 denotada como [5/3] es la que define a un número racional**.** Entonces se debe entender que 5/3, no es en sí mismo un número racional sino un representante de la clase [5/3], la cual define propiamente al número racional. Por otra parte, cabe aclarar que como el par de números que conforman la fracción 5/3 son primos relativos, a este representante se le llama **fracción irreducible**. Generalmente la fracción irreducible es el representante más utilizado para referenciar a una clase, sin embargo es bueno enfatizar que éste no es el único representante de la misma.

Para hacer operativo a esta familia de clases de equivalencia, es decir, al conjunto de los racionales denominado con la letra **Q**, las operaciones de adición y multiplicación se pueden definir así:

- $[a/b] + [c/d] = [(ad + cb)/bd]$
- $[a/b] * [c/d] = [ac/bd]$

En resumen, al observar que los enteros eran insuficientes, para resolver cierto tipo de ecuaciones, mediante la construcción presentada, se ha obtenido un conjunto en el que la división es posible, y por tanto, todas las ecuaciones de la forma $[b\,x = a]$ tienen solución en Q porque el cociente a/b es un número.

Construcción de decimales como extensión de los naturales

Una forma de construir los números decimales consiste en encontrar las soluciones de la ecuación $[10^n \cdot x = a]$, siendo a un número entero y n un número natural. La clase del par (a, n) se escribe $[a/10^n]$, y es el conjunto de todas las fracciones equivalentes a la fracción $a/10^n$, a las que se le llamará número decimal. Por ejemplo, una solución para la ecuación "$100 \cdot x = 6$" es 6/100, que lleva a la clase del par (6, 2) que pertenece a la clase de equivalencia $[6/10^2]$.

Entonces, se tiene que el conjunto de los números decimales, que se denominará con la letra **D**, es el conjunto de las familias de clases de equivalencia determinada en el conjunto Z x N por los representantes de la forma $\frac{a}{10^n}$.

Centeno (1988, pág. 65), hace notar que bajo la clase de equivalencia R definida por: $(a, n)\ R\ (b, p)$ si sólo si $a \cdot 10^p = b \cdot 10^n$ donde a y b son enteros y n y p naturales, las operaciones definidas como $(a, n) + (b, p) = (a \cdot 10^n + b \cdot 10^p\ , n + p)$ para la adición y como $(a, \mathrm{n}) \cdot (b, m) = (a \cdot b, n \cdot m)$ para la multiplicación, junto con el orden definido como $(a, n) \leq (b, p)$ si sólo si $a \cdot 10^p \leq b \cdot 10^n$ prolongan las de el conjunto de los naturales, y hacen posible verificar que D tiene una estructura de anillo conmutativo, unitario, integro y totalmente ordenado.

Número decimal, fracción y otros conceptos relacionados

A partir de la construcción algebraica de los racionales hemos visto que la noción de fracción surge de la necesidad de darle solución a la ecuación $b \bullet x = a$ para todo a y b elementos de **Z**, y a distinto de 0. Como la ecuación anterior es equivalente a la ecuación $x = a \div b$, la solución la podemos representar, como ya se dijo en una sección anterior, con el símbolo $\frac{a}{b}$ que llamaremos **fracción**, donde a "a" se le llama numerador y a "b" denominador.

Por otra parte, se puede generar una clasificación de las fracciones la cual depende del valor de su denominador. Si el denominador es una potencia de 10, la llamaremos **fracción decimal**, sino, serán llamadas **fracciones no decimales**.

En realidad hay que advertir que la expresión "número decimal" es ambigua por que la palabra "número" exige un adjetivo que se refiera a su naturaleza intrínseca; por ejemplo, los adjetivos natural, racional, real, nos permiten identificar la naturaleza de los números de los que hablamos.

La palabra "decimal" que posee la palabra diez hace referencia a la base de numeración más extendida llamada también numeración decimal. Para resumir, tenemos que un **número**

decimal es un número racional que posee al menos una escritura en forma de fracción decimal es decir n es un número decimal si $n = \frac{a}{10^p}$, siendo a y p números enteros.

Es importante anotar que ninguna fracción irreducible cuyo denominador tenga factores distintos de 2 y de 5 puede venir representada por una fracción decimal y a éstos les llamaremos **números no decimales.**

Con algunos ejemplos adicionales se puede clarificar la situación. Por ejemplo, $\frac{1}{4}$ no es una **fracción decimal** por que su denominador no es una potencia de 10 pero si es un **número decimal** ya que $\frac{1}{4}$ es equivalente a $\frac{25}{100}$, y por tanto se posee una representación como fracción decimal. Por otra parte, para el caso de la fracción $\frac{4}{3}$ no existe una fracción decimal equivalente, por lo tanto $\frac{4}{3}$ es un **número no decimal.**

Obsérvese que la definición de fracción no decimal no liga inmediatamente a los números no decimales, ya que existen algunas fracciones no decimales que son números decimales como lo muestra el ejemplo anterior. Veamos otros ejemplos:

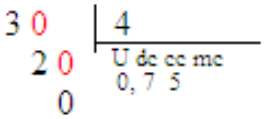
- $\frac{1}{3}$ es una fracción no decimal "su denominador no es potencia de 10"
- $\frac{1}{3}$ es una fracción irreducible y su denominador posee un factor diferente de 2 y de 5, por lo tanto es un número no decimal.
- $\frac{1}{2}$ es una fracción no decimal "su denominador no es potencia de 10"
- $\frac{1}{2}$ es una fracción equivalente a $\frac{5}{10}$ por lo tanto es un número decimal.

Nótese que la definición de número decimal no está relacionada con su escritura, ya que la escritura decimal puede extenderse para los números no decimales. Por ejemplo, en Luque y Mora (2001, 2006) se presentan algunos ejemplos de aproximaciones para trabajar con otras bases distintas a diez, denominadas por ellos como números *n-males*.

Para llegar a la escritura decimal de una fracción, que no es otra cosa que una extensión de la escritura en base 10, en el caso de los números decimales, existen dos formas. La primera consiste en ubicar el numerador de la fracción decimal en la posición que el denominador indica, por ejemplo $\frac{3}{4} = \frac{75}{100}$ donde se ubica 75 en la posición $\frac{1}{100}$ llamada centésimas. También se puede descomponer $\frac{75}{100}$ en $\frac{7}{10} + \frac{5}{100}$ es decir, 7 décimas más 5 centésimas, y ubicarlas respectivamente.

D	**U**	**,**	**dc**	**cc**
10	1	,	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$
	0	,	7	5

Por tanto $\frac{75}{100} = 0{,}75$ luego $\frac{3}{4} = 0{,}75$. La otra forma consiste en considerar el algoritmo de la división tomando el numerador como el dividendo y el denominador como el divisor, en el caso de la fracción $\frac{3}{4}$ se debe realizar la división de 3 entre 4. Este procedimiento está basado en el sistema de numeración en base 10, recordemos que cuando el divisor es mayor que el dividendo o residuo, al dividendo se le agrega un cero que indica una subdivisión de este en 10 partes y se agrega una coma al cociente indicando el paso a los submúltiplos del sistema posicional.



Al realizar este algoritmo en un número decimal se obtiene una escritura finita. Sin embargo, si intentamos el procedimiento anterior con $\frac{1}{3}$ nos encontramos con una división de residuo infinito cuyo cociente es 0,33333… Afortunadamente ya sabemos que $\frac{1}{3}$ es un número no decimal pero permanece la pregunta de ¿qué significa la escritura 0,33333…? Si tomamos 0,3 como el valor de $\frac{1}{3}$ nos quedaría faltando 0,033333… entonces le podríamos sumar a este número 0,03 y nos quedaría 0,33 que es un valor mas aproximado al que se quiere, y si repite este procedimiento con 0,00333 y con 0,000333 y así sucesivamente se obtendrá que: 0,3333333… = 0,3 +0,03 +0,003+ 0,0003+… donde esta expresión sería la suma de una sucesión infinita de números decimales los cuales los podemos expresar como:

$0{,}33333333\ldots = 3\left[\frac{1}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\ldots+\frac{1}{10^n}+\ldots\right]$ donde, aplicando la teoría del cálculo de suma de series infinitas, reconocemos en ésta a una serie geométrica que converge a $\frac{1}{9}$.

En suma, se llega a que $0{,}333333333\ldots = 3\left[\frac{1}{9}\right] = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ y entonces, se acepta que la representación simbólica 0,33333333… es la escritura decimal de $\frac{1}{3}$.

Como conclusión general, hemos visto que tanto un número decimal como un número no decimal lo podemos representar con una escritura decimal, a la cual llamaremos **expresión decimal**.

Para resumir todo lo anterior, primero se ha hecho notar que todos los números racionales tienen representaciones en forma de fracciones. Se ha mencionado que los números racionales se pueden clasificar en números decimales o no decimales por medio de las llamadas fracciones decimales. También se ha señalado que por medio del algoritmo de la división se puede llegar a una expresión decimal. Y finalmente, se ha observado que todo número decimal viene representado por una expresión decimal finita y un número no decimal por una expresión decimal periódica infinita. A manera de síntesis de la discusión presentada se resume la conceptualización de un número racional así:

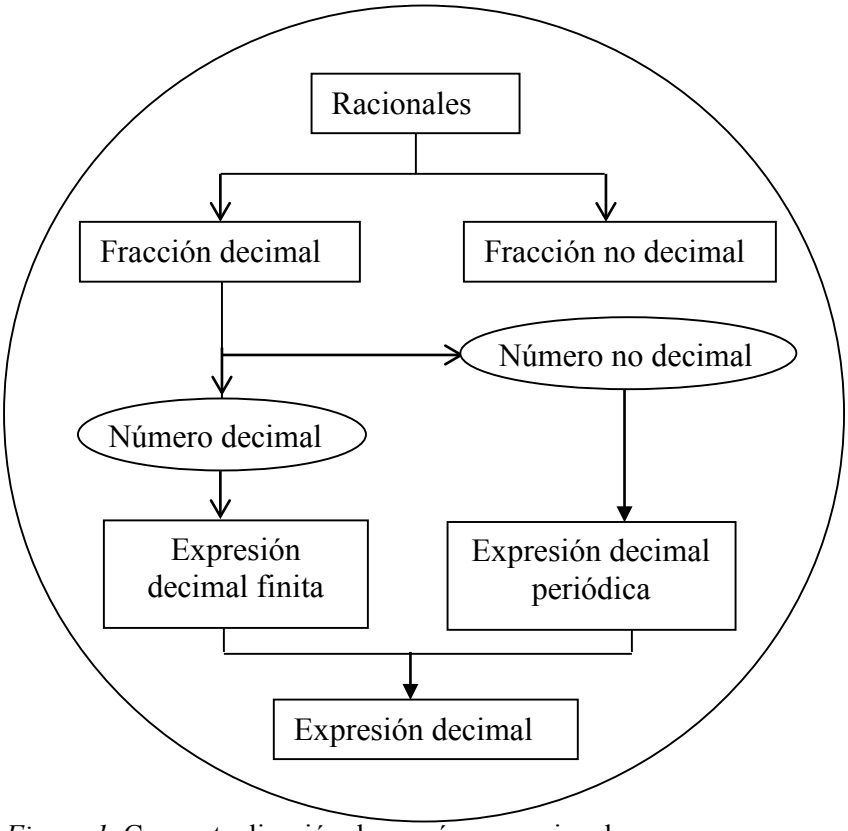


Figura 1. Conceptualización de un número racional

Representaciones

Representaciones de los números

En general, según Segovia y Rico (2002), las "representaciones" son las notaciones simbólicas o gráficas, específicas de cada noción, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos matemáticos así como sus características y propiedades más relevantes.

Las matemáticas, es quizás una de las áreas del conocimiento en donde de manera más indiscutible existe la necesidad de trabajar con representaciones en al menos dos sentidos. Por un lado, dado algún tipo de representación de un objeto matemático, por ejemplo, una escritura decimal, es necesario tener claridad conceptual y destreza procedimental para transformar esta representación en algún otro tipo de representación, como por ejemplo a una escritura en forma de fracción. Y por otro lado, dado un tipo de representación, por ejemplo de un número dado en una forma de escritura decimal, tener conocimiento para transformar o para reconocer que dicha escritura tiene otra escritura decimal equivalente.

Representaciones de números decimales

Los decimales como objetos matemáticos se pueden encontrar en distintas escrituras o representaciones; se denominan como "escrituras equivalentes" a aquellas que representan al mismo número. En ejemplos anteriores se ha visto que el número decimal 3/4 es equivalente a 0,75. Sin embargo, no sólo existe esta representación para este número decimal, también podemos encontrar las siguientes.

Fraccionario	Fracción decimal	Escritura distribuida	Tabla Sistema decimal						Expresión decimal
			100	10	1	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{1000}$	
$\frac{3}{4}$	$\frac{75}{100}$	$\frac{7}{10}+\frac{5}{100}$				7	5		0,75
¡Error! No se pueden crear objetos modificando códigos de campo.	$\frac{235}{100}$	$2+\frac{3}{10}+\frac{5}{100}$			2	3	5		2,35
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{10}$	$\frac{2}{10}$				2			0,2

Figura 2. Las representaciones de los racionales.

Un número decimal posee dos expresiones decimales infinitas e infinitas expresiones finitas. Por ejemplo, $\frac{3}{4}$ se puede indicar como 0,75000000… o 0,74999…, que serían las expresiones infinitas y como 0,750 o 0,7500 o 0,75000 o 0,750000… y así sucesivamente las cuales serían un sin fin de expresiones finitas.

Existe también representaciones gráficas de los números decimales las cuales hacen ver aspectos conceptuales particulares de una fracción, como en el caso de la relación "parte de un todo". Por ejemplo si se tiene la fracción $\frac{3}{4}$, el 4 (denominador) indica las partes en que se divide la "unidad"[1] y el 3 (numerador) las partes que se toman. Su representación sería como se indica en la gráfica, donde la parte que se colorea en rojo indica la fracción $\frac{3}{4}$.

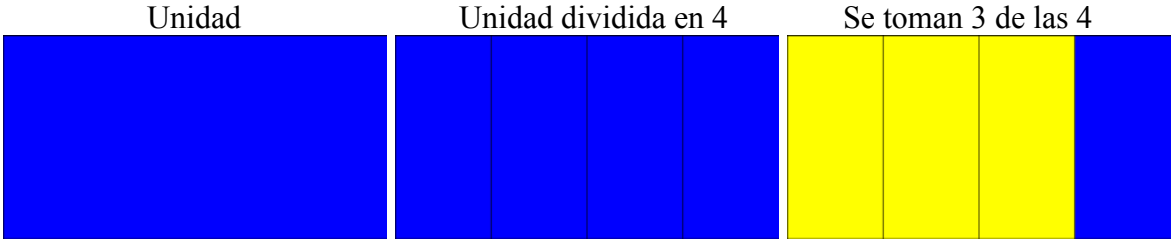


Figura 3. Representación gráfica de ¾.

[1]. Se le llama unidad a la parte total del gráfico.

Si utilizamos la expresión decimal 0,75 o la fracción decimal $\frac{75}{100}$ obtenemos una representación gráfica en la que podemos observar que el área amarilla es la misma, teniendo en cuenta que las unidades seleccionadas son iguales:

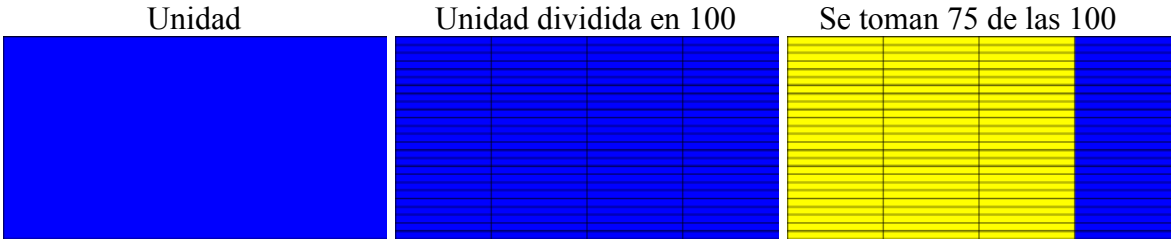


Figura 4. Representación gráfica de 75/100.

Representaciones de números no decimales

Para esta clase de números la expresión decimal se realiza por medio del algoritmo de la división donde existe sólo una representación la cual es infinita y periódica. Para ésta representación se realizan dos convenios acerca de su notación, en el primero se repite el periodo un par de veces y se utilizan tres puntos sucesivos que indican que este se repite infinitamente. Por ejemplo, si se toma 0,33333… el segundo convenio consiste en colocar una línea sobre el periodo $1,\overline{3}$ en este caso cada notación indica que se repite el 3.

En el caso de las representaciones gráficas existe un mayor grado de dificultad con la expresión decimal de un número no decimal, debido a su notación infinita. Sin embargo, existen algunos procesos matemáticos infinitos que aproximan a la concepción de número decimal e involucran representaciones gráficas asociadas a las series geométricas. Por ejemplo, observemos el siguiente fractal con el que se quiere representar la fracción $\frac{1}{3}$:

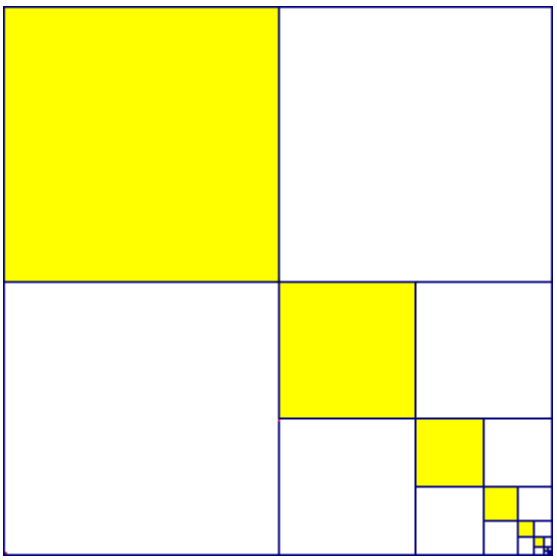


Figura 5. Representación gráfica de 1/3 con cuadrados.

El proceso consta en tomar un cuadrado de lado 1 dividirlo en cuatro y tomar $\frac{1}{4}$, luego dividimos $\frac{1}{4}$ en 4 y se toma un cuarto de un cuarto es decir un dieciseisavo, repitiendo este proceso infinitas veces. En términos numéricos se puede demostrar que ésta es una representación válida para $\frac{1}{3}$ ya que la suma de las áreas amarillas está dada por la serie

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots+\frac{1}{4^n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Para que ésta se vea como una serie geométrica se le suma 1 donde queda

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots+\frac{1}{4^n}+\ldots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

Como se sabe, $\sum_{n=0}^{\infty} r^n=\frac{1}{1-r}$, tomamos a r como $\frac{1}{4}$ donde se llega a:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{\frac{3}{4}}=\frac{4}{3}$$

Y entonces, como a la serie inicial se le sumó 1, ahora se le debe restar 1, para obtener la inicial

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\ldots+\frac{1}{4^n}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n=\frac{1}{3}$$

Ahora bien, si se observa el siguiente gráfico, puede decirse que la figura 1 representa $\frac{1}{3}$ del cuadrado inicial, al igual que la figura 2 y así sucesivamente, si se unen la figura 1 y la figura 2, la región amarilla sigue representando $\frac{1}{3}$ de la nueva área. Si se repite este proceso, finitas o infinitas veces, la región amarilla siempre representará $\frac{1}{3}$.

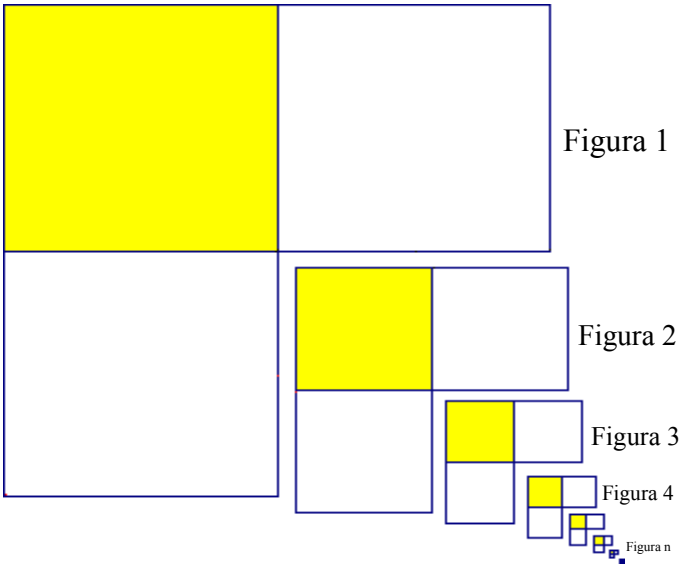


Figura 6. Representación gráfica de 1/3 con cuadrados representando sumatoria.

También se pueden encontrar otras representaciones como la que se presenta a continuación.

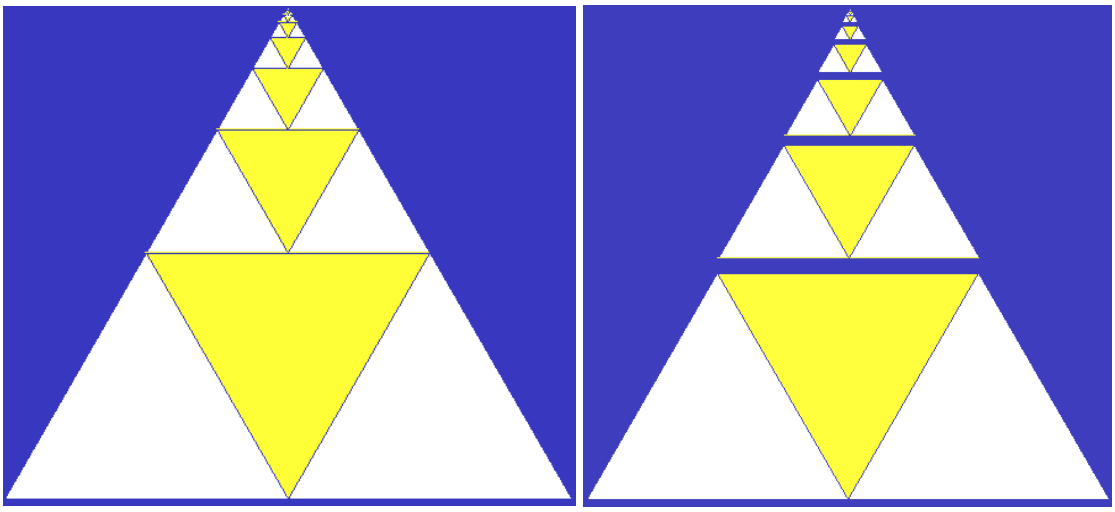


Figura 7. Representación gráfica de otros números no decimales.

Sin embargo, esta representación gráfica no muestra una conexión explícita con la expresión decimal 0,333… para esto se ha diseñado otra forma de representación en la cual se muestre la relación entre 0,333… y $\frac{1}{3}$ gráficamente.

Tomemos la siguiente unidad

Figura 8. Unidad

Se divide en 10 partes y se toman 3, luego tomamos $\frac{1}{10}$ y repetimos el proceso sucesivamente.

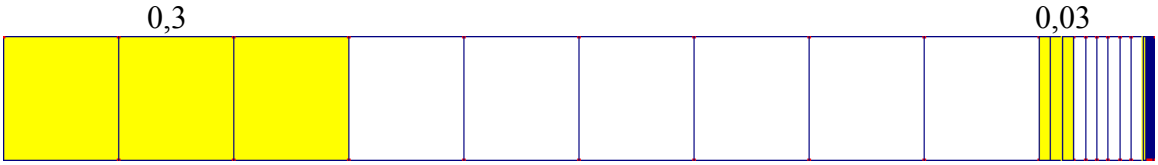


Figura 9. Construcción de 1/3 en representación decimal.

Al realizar la suma de 0,3 + 0,03 +… + 0,00…3+… se obtiene la siguiente representación:

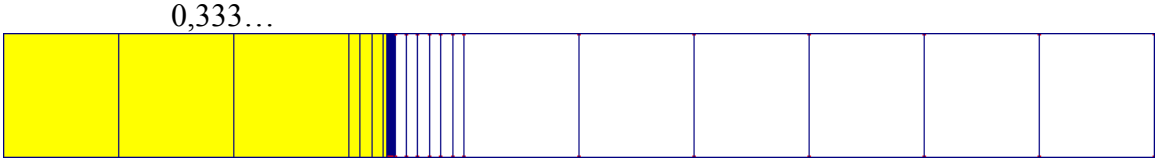


Figura 10. Construcción de 1/3 en representación decimal como sumatoria.

Dando una aproximación gráfica a la expresión decimal del número no decimal $\frac{1}{3}$, al igual esta se puede representar tomando la unidad y dividiendo esta en 3 partes iguales, queriendo representar la fracción no decimal $\frac{1}{3}$.

Conclusiones

Para resumir todo lo anterior, primero se ha hecho notar una clasificación de los números racionales desde las fracciones.

Las fracciones decimales clasifican los números decimales y no decimales.

También se ha señalado que por medio del algoritmo de la división se puede llegar a una expresión decimal.

Se ha observado que todo número decimal viene representado por una expresión decimal finita y un número no decimal por una expresión decimal periódica infinita.

A manera de síntesis de la ponencia presentada se propone la conceptualización de un número racional así:

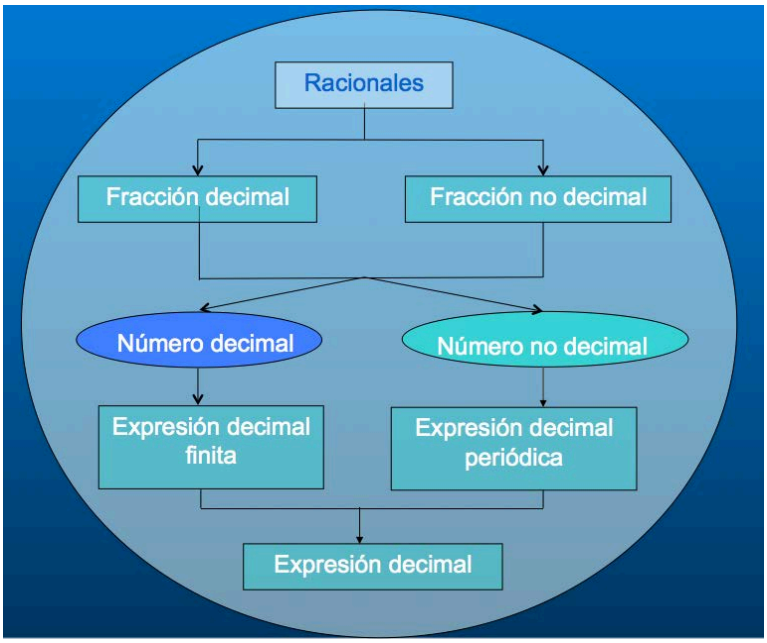


Figura 11. Conceptualización de numero no decimal.

Referencias y bibliografía

Centeno, J. (1988). *Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?* Madrid: Editorial Síntesis.

Galvis, A. (1992). *Ingeniería de Software Educativo*. Santa fe de Bogotá: Ediciones Uniandes.

Luque, I. & Mora, L. (2001). *Una Aproximación a Los Números Racionales Positivos*. Bogotá DC: U. Pedagógica Nacional.

Segovia, I. & Rico, L. (2001). Unidades Didácticas .Organizadores. En E.Castro (Ed.) *Didáctica de las matemáticas en la educación primaria* (pp. 83-104). Madrid: Editorial Síntesis.

Sánchez, F. (2012). *Los números racionales y sus representaciones*. Ed Universidad Nacional de Colombia, Bogotá.

Utilidad de los recursos didácticos, para desarrollar el pensamiento espacial y los sistemas geométricos, desde la situación "Recorrido por el mundo geométrico"

Oscar Javier **González** Pinilla
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
oscarmateud@gmail.com
Camilo **Arévalo** Vanegas
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
kmilo741a@gmail.com

Resumen

Se pretende dar a conocer una experiencia de aula realizada en un colegio de Bogotá durante las clases de geometría, con miras a fortalecer el pensamiento espacial en estudiantes de segundo de primaria. Para ello se establece una propuesta que está fundamentada desde los aportes teóricos de Linda Dickson (1991), al hablar del estudio de los objetos tridimensionales, analizando sus propiedades y características físico-visuales para proporcionar experiencias tangibles del mundo; desarrollando así la habilidad espacial en los estudiantes, que reconocerán la representación bidimensional del mundo físico que nos rodea a través de material manipulativo-tangible y grafico-textual (Godino, 2006), proporcionando experiencias de aprendizaje efectivas. Ésta metodología de enseñanza se enmarcada en una situación problema fundamental (Brousseau, 1986), en la que el grupo de estudiantes deberá viajar por cinco países, para reconocer cinco sólidos relacionados con las obras y maravillas de cada país, para finalizar con una obra de arte que relaciona los sólidos.

Palabras clave: Enseñanza de la geometría, Pensamiento espacial, Materiales manipulativos, Niveles de Van Hiele, Habilidades.

Planteamiento del problema

Ésta experiencia tiene como principal objetivo reivindicar al aula de matemáticas como un espacio de experiencias reales gracias al uso de recursos didácticos que faciliten la enseñanza y aprendizaje de la geometría en estudiantes de educación inicial[1] desde la propuesta de Godino (2006) y su clasificación de los materiales didácticos en manipulativos tangibles, grafico textuales y ayudas al estudio; por lo que se pretende un análisis exhaustivo sobre las funciones y las ayudas que brindan en pro del desarrollo de nuevos conocimientos geométricos en los estudiantes. Esto a partir de la implementación de una situación fundamental desde lo planteado por Brousseau (1986) ensu teoría de las situaciones didácticas, donde el profesor debe imaginar y proponer a los alumnos situaciones que ellos puedan vivir y en las cuales los conocimientos

[1] Estudiantes de grado segundo del colegio San Juan de los Pastos, Bogotá, Colombia (2014).

aparecerán como la solución óptima a los problemas propuestos, solución que el alumno debe descubrir.El reto estaba en planear, diseñar y ejecutar una propuesta de enseñanza de la geometría, enfocada a desarrollar el pensamiento espacial, la enseñanza de los sólidos geométricos y las figuras planas en estudiantes de segundo desde los aportes de Linda Dickson (1991) para conllevar la enseñanza de la geometría espacial, empezando desde el estudio de los objetos tridimensionales, analizando sus propiedades y características físicas-visuales para proporcionar el camino hacia el aprendizaje de las representaciones bidimensionales de estos objetos tridimensionales, desarrollando así el pensamiento espacial al reconocer en el contexto del estudiante, el mundo geométrico que lo compone.

Ahora bien, cabe mencionar que el pensamiento espacial, se toma como el proceso mediante el cual, se construyen y manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, sus relaciones, transformaciones y diversas representaciones. Por otro lado los sistemas geométricos se encargan de hacer énfasis en el desarrollo del pensamiento espacial, a través de la exploración activa.

Los lineamientos curriculares de matemáticas, particularmente los que aluden a las representaciones geométricas mentales, deben promover la exploración por parte del estudiante, donde la comunicación oral y escrita de ideas matemáticas y la verificación, negociación y validación de sus afirmaciones sea puesta en juego dentro de procesos de socialización (MEN, 1998). Sin embargo, su aprendizaje se ve cada vez más afectada porque se centra en representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales que se usan ocasionalmente para resolver algunos problemas, además de que no se toman en cuenta los procesos de argumentación que se ponen en juego dentro de procesos de socialización en el aula de clases.

Fundamentación teórica

En la enseñanza de la geometría, los sólidos y sus propiedades se manejan sin mayor profundidad, de este modo se privilegia lo bidimensional sin llegar a comprender y establecer el paso de lo bidimensional a lo tridimensional y viceversa. En los estándares de matemáticas se reconoce esta problemática y la importancia de desarrollar una “geometría activa”, en la que se privilegie

> la exploración de figuras mediante el movimiento, empezando por el propio cuerpo, como cuando el niño recorre la frontera de una figura y pasando por el que se aplica a los objetos físicos, para estudiar los efectos que se producen en la figura que comportan y las relaciones entre productos de estos movimientos y de manera muy parcial, entre los mismos movimientos (MEN, 1998).

Las propuestas de varios autores frente al aprendizaje de la geometría espacial en niños preescolares, dicen que debe hacerse partiendo de las figuras tridimensionales y su comparación con los objetos físicos de la realidad, hacia la geometría bidimensional trabajada como atributos de la geometría tridimensional o a lo que Linda Dickson (1991) se refiere cuando habla de la representación bidimensional del espacio tridimensional. Es así como se hace alusión a autores como Lappan y Wibter (1979), quienes afirman que:

> A pesar de que vivimos en un mundo tridimensional, la mayor parte de las experiencias matemáticas que se proporcionan a los estudiantes son bidimensionales, además nos valemos de libros matemáticos que contienen figuras bidimensionales de objetos tridimensionales , tal uso de dibujos de objetos le supone al niño una dificultad adicional en el proceso de

> comprensión. Es empero, necesario que los niños aprendan a habérselas con las representaciones bidimensionales de su mundo. (Citado en L. Dickson p. 48)

Para que los estudiantes vayan identificando las características bidimensionales que tienen los objetos tridimensionales, debe empezarse por la interacción y la percepción del mundo físico que nos rodea, donde *"la percepción es el conocimiento de objetos resultante del contacto directo con ellos y la representación es una evocación de los objetos en ausenta de ellos"*. (Piaget, 1964, p.28); se pretende así que ellos construyan esquemas mentales del objeto cuando a este se le hacen transformaciones, es decir, acciones como rotar, trasladar, girar, ordenar, moldear, cortar, pegar etc. es aquí donde se hace imprescindible el uso de recursos didácticos para el estudiante.

Recursos didácticos

En la enseñanza de las matemáticas y en lo que a nosotros concierne en el desarrollo del pensamiento geométrico y espacial, es muy importante tener en cuenta los métodos que utilizan los maestros para lograr los propósitos educativos, así como los medios a los que acuden y que otorgan a los estudiantes para facilitar el proceso de aprendizaje en ellos. A continuación presentamos la clasificación que hace Godino (2006), a los recursos didácticos (Ver tabla 1):

Tabla 1
Clasificación de los recursos didácticos Godino (2006, pp. 117-124)

Instrumentos semióticos: Son los medios por los cuales se logra mediatizar entre la acción de los sujetos ante el intento de resolver una situación-problema y el contexto en el cual se desarrolla.	
Manipulativos tangibles	**Gráfico-textuales-verbales**
Objetos físicos que sirvieron para identificar características propias de los sólidos y que ponen en juego la percepción táctil. El estudiante tiene un acercamiento al objeto siendo esta acción o momento reflexivo, en el que se pueden construir conocimiento, ya que se identifican características del objeto y se ve la conservación de sus propiedades. • *Sólidos construidos por los mismos estudiantes* • *Materiales para caracterizar propiedades del sólido*	Aquellos recursos en los que se hace presente la percepción visual y/o auditiva, que básicamente en nuestra secuencia de actividades tenían por propósito generar y despertar el interés y la motivación por parte del estudiante hacia la búsqueda de nuevos conocimientos; además también ayudaban a que el estudiante se involucrara de forma activa y dinámica a la situación didáctica propuesta: • *Videos e imágenes de los frecuentes viajes alrededor del mundo geométrico* • *Guías e instrumentos*

Diseño y metodología de investigación

Diseñar actividades que despierten el interés y la motivación de adquirir nuevos y útiles conocimientos no es tarea fácil. De este modo "Recorrido por el mundo geométrico" es la excusa perfecta para cautivar la atención de los estudiantes y proporcionarles experiencias fascinantes e innovadoras en el estudio de las matemáticas, que desde la propuesta de Guy Brousseau (1986), quien propone que

> ...el profesor debe imaginar y proponer a los alumnos situaciones que ellos puedan vivir y en las cuales los conocimientos aparecerán como la solución óptima a los problemas propuestos, solución que el alumno debe descubrir...

El diseño de la situación y la evaluación del impacto y pertinencia del uso de recursos didácticos se evidenciará a partir de las categorías de análisis del modelo Van Hiele (1984) y Hoffer (1981), que pretenden establecer que la geometría es aprendida por una secuencia de niveles del pensamiento, el cual se caracteriza por ser progresivo y ordenado, donde solo al dominar o alcanzar un nivel se puede pasar al siguiente. Van Hiele (1984), plantea cinco niveles para la enseñanza de la geometría; *Nivel 0,* visualización o reconocimiento, *Nivel 1,* análisis, *Nivel 2,* Ordenación o clasificación, *Nivel 3,* Deducción formal y *Nivel 4,* Rigor.

Atendiendo al intervalo de edad en el que se encuentran los estudiantes (6-8 años), podemos ubicarlos, según el modelo Van hiele en el nivel de reconocimiento, con las cinco habilidades que plantea Hoffer (1981), y que deberían ser desarrollados por los niños de esta edad (Ver tabla 2):

Tabla 2:
Modelo Van Hiele (1984) con aportes de Hoffer (1981) para la enseñanza de geometría.

VAN HIELE	HABILIDADES	LO QUE SE LOGRÓ DESDE LA SITUACIÓN PRESENTADA
Visualización o Reconocimiento	***Visual:*** La capacidad de crearse representaciones mentales a través de la visualización de objetos.	• Reconocer diferentes figuras de un dibujo • Reconocer información contenida en una figura
	Verbal:la habilidad de comunicación donde el estudiante da a conocer la información contenida en los objetos geométricos que ha logrado interiorizar.	• Asociar el nombre correcto con una figura dada • Interpretar frases que describen figuras
	Dibujo: Tras crear las imágenes mentales a partir de la visualización de objetos debe traducirlas a representaciones externas y a partir de ellas crear representaciones internas de conceptos matemáticos	• Hacer dibujos de figuras interpretando las partes
	Lógica: pretende desarrollar en el estudiante el poder de argumentación lógica, sus propias justificaciones y formulaciones.	• Darse cuenta que hay diferencias y similitudes entre figuras • Comprender la conservación de las figuras en diferentes situaciones
	Aplicada: Pretende que al enfrentarse a una situación problema, el estudiante utilice sus propias estrategias de solución utilizando las demás habilidades	• Identificar formas geométricas bidimensionales en objetos físicos

Resultados

Descripción de la experiencia

En cada uno de los países a los que se viajó (Ver figura 1) debería aprenderse algo nuevo referente a la geometría, pues la idea primordial era mostrarles construcciones en diferentes países asociadas a algunos sólidos geométricos, para que finalmente desarrollarán la capacidad de descomponer los sólidos trabajados en su sus propiedades bidimensionales, y desde allí envolverlos y trabajar sobre sus propiedades y características a través del material proporcionado.

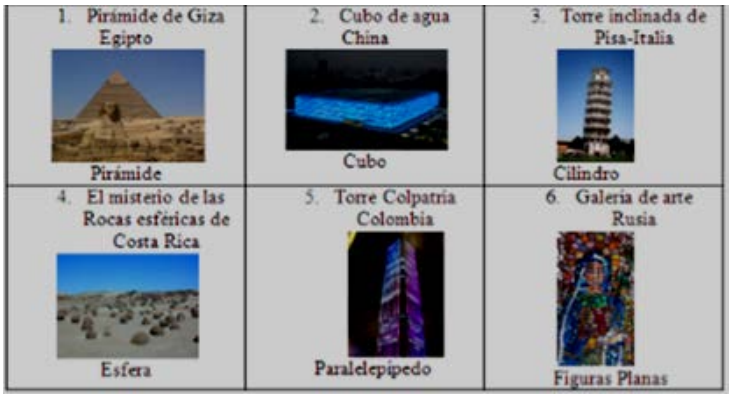


Figura 1. Países visitados en el recorrido geométrico

Para simular el viaje se hacía uso de material gráfico-textual (Godino, 2006) como lo son Videos e imágenes de los países y construcciones de cada lugar (Ver figura 2). Estos recursos grafico-textuales ayudaban a involucrar al estudiante en la situación propuesta, los constantes viajes que hacíamos a países lejanos para mirar las imágenes de construcciones arquitectónicas en forma de sólidos, generaban entusiasmo para el trabajo activo con los recursos tangibles.

Figura 2. Estudiantes observando el video del viaje a Egipto donde conocieron un poco de su cultura y las maravillosas pirámides de Guiza

Se recurría a recursos tangibles y manipulativos durante todas las sesiones, los cuales correspondían a sólidos construidos, realizados por los mismos estudiantes (imagen 2) y el objetivo principal era el motivar al estudiante a la exploración táctil y visual de los mismos para que proporcionaran las primeras informaciones sobre las características y algunas de sus propiedades, siguiendo la idea de Jean Piaget (1964) quien hace distinguir este proceso y dice: *"la percepción es el conocimiento de objetos resultante del contacto directo con ellos, para que posteriormente la representación sea una evocación de los objetos en ausenta de ellos"* (Ver figura 3).

Figura 3. Estudiantes interactuando con el material tangible, construyendo sólidos y caracterizando sus propiedades físicas, vértices, aristas y caras

Figura 4. Estudiantes caracterizando las propiedades físicas, vértices, aristas y caras de los solidos

El objetivo después del reconocimiento de sólidos y su caracterización, se pretendía que los estudiantes estuvieran en la capacidad de descomponer los sólidos en sus propiedades bidimensionales (Ver figura 5), logrando así evidenciar las formas planas que componían a un sólido.

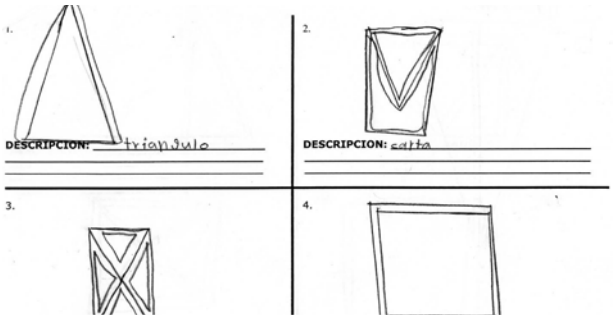


Figura 5. Representaciones bidimensionales de objetos tridimensionales realizadas por los estudiantes "la pirámide desde sus diferentes perspectivas"

Esta actividad que corresponde a la última sesión, se desarrolló durante el viaje a Rusia, donde el aula de clase se convirtió en una galería de arte geométrico, simulando el arte abstracto geométrico del siglo XVIII donde se usaban configuración de figuras planas para crear valiosas y bonitas obras. En ésta sesión el estudiante debía crear su propia obra pero sin el uso de pincel, sino con los mismos sólidos anteriormente trabajados durante los viajes a los demás países, pues debían usar cada una de las caras planas de los sólidos para simular un sello y plasmarlas sobre una cartulina evidenciando las propiedades bidimensionales de los sólidos que ya habían trabajado (Ver figura 6).

Figura 6. Estudiantes usando los sólidos geométricos como sellos para crear obras de arte. Reconocen la composición bidimensional de los objetos tridimensionales

Así creaban sus obras con figuras planas y a la par comprendían la composición bidimensional de objetos tridimensionales.

Análisis de los resultados

La manipulación y visualización de los sólidos como lo plantea el modelo Van Hiele ayudó a reconocer algunas de sus características físicas; pues los estudiantes hacían alusión a sus bordes y sus puntas, realizaban conteos para saber cuántas puntas poseía cada sólido, cuantas caras la constituían, etc.

En cuanto a las características físicas de un sólido como las aristas, ellos empezaban a asociar esas propiedades según lo que percibían; por ejemplo al mostrarles los vértices de la pirámide decían que ese nombre "vértice" era muy raro que preferían llamarle *"puntas",* lo que ayudo a su mejor reconocimiento y posterior conteo para saber cuántas poseía cada sólido.

En cuanto a las aristas, que también lo consideraban un nombre muy raro y no lo relacionaban con nada, reemplazaban este nombre como los "bordes" que se podían sentir con los dedos y finalmente las caras las reconocían como aquello sobre lo cual la pirámide podía quedar de pie, pues si intentas ponerlo de pie sobre una punta se caía, igualmente si intentas pararla sobre el borde, el único lugar sobre queda de pie es sobre sus caras planas. En este caso, es evidente que los estudiantes logran un desarrollo de la habilidad verbal y de comunicación, donde crean sus propias reglas para nombrar las propiedades del sólido y lograr una comprensión conjunta sobre los objetos de estudio, como cuando aludían a la esfera que no tiene caras planas ya que por donde quieras que lo colocas sobre una superficie plana nunca se pone de pie fijamente.

Finalmente gracias a estas características que ellos mismos de manera curiosa les atribuían a los sólidos, lograban realizar los conteos de cada uno de los vértices, caras y aristas lo que no se dificultó en ningún sentido. Reconocían igualmente la representación bidimensional de los sólidos, pues identificaban figuras como triángulos, cuadrados y círculos en las pirámides, cilindros y paralelepípedos, dibujándolas de acuerdo a la cantidad.

Conclusiones y reflexiones finales

Los materiales manipulativos tangibles ayudan a la compresión de conceptos gracias a que hacen una conexión con el estudiante, permitiéndole a partir de situaciones nuevas para él, adquirir nuevos conocimientos, donde el material por sí mismo no es nada, lo es cuando se le da un enfoque por parte del maestro para tratar conceptos y llegar a la concepción en este caso de la geometría espacial, así la enseñanza y el aprendizaje se dota de un carácter dinámico y comprensible para el estudiante.

Uno de los aspectos que se consideran valiosos en la práctica, es hacer que los estudiantes comprendieran la importancia de las matemáticas en la vida cotidiana. Llevarlos a un proceso en el cual generan un pensamiento crítico y flexible, gracias a las situaciones en las que se veían involucrados y a las decisiones que tomaron para poder solucionarlas.

Es importante hacer mención a la importancia que tienen los recursos gráfico-textuales como lo son los videos y las imágenes interactivas, haciendo uso de nuevas tecnologías, ya que en la educación matemática actual no se tienen muy en cuenta y por lo que se logró en esta experiencia de aula, se puede concluir que son recursos agradables e interesantes a la vista del estudiante, gracias a éste, el estudiante crea nuevos interés por los procesos de aprendizaje,

motiva el trabajo activo y lo involucran en una situación donde debe acceder a nuevos conocimientos gracias a la propia acción.

Uno de los aspectos que llama la atención, es que la conceptualización planteada por los estudiantes, está acompañadas por gestos y palabras, del lenguaje cotidiano del estudiante, hasta que los conceptos sean validados o institucionalizados por los estudiantes, para una futura valoración de definiciones y simbolismos formales.

Referencias bibliográficas

Brousseau, G. (1997). *Teoría de las situaciones didácticas de las matemáticas*. Kluwer Academic Publisher. Francia.

Brousseau, G. (1986). *Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas*. Francia. Universidad de Burdeos.

Dickson, L., Brown, M. & Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: M.E.C. & Labor

Gutiérrez, A. (1990). *Una propuesta de Fundamentación para la Enseñanza de la Geometría: El modelo de van Hiele*. Práctica en Educación Matemática. Ediciones Alfar, Sevilla.

Godino, J. (2009). *Uso de material tangible y gráfico textual en el estudio de las matemáticas; superando algunas posiciones ingenuas.* Machado y Cois. Guimarães, Portugal.

Hoffer, A. (1981). La geometría es más que demostración. *Notas de matemática 29, Abril de 1990*, 10-24

MEN. (1998). *Lineamientos curriculares para el área matemáticas. Áreas obligatorias y fundamentales.* Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Piaget, J. (2005). *La representación del espacio. México: Reseña del libro Reflexiones sobre la geometría y su enseñanza*. Correo del maestro y ediciones la vasija.

Van Hiele, P.M. (1984). *Estructuras y visiones. Una teoría de la educación matemática.* Londres, Academic Press