

Educación Matemática en las Américas 2015

Volumen 10: Álgebra y Cálculo



© 2015
Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM)
Paseo de la Reforma 383., 7° Piso,
Colonia Cuauhtémoc, Delegación Cuauhtémoc,
México D.F. CP 06500, MÉXICO

www.ciaem-iacme.org
ciaem.iacme@gmail.com

Educación Matemática en las Américas 2015
Volumen 10: Álgebra y Cálculo
Editado por Patrick (Rick) Scott y Ángel Ruiz
Colaboradora: Sarah González.

ISBN Volumen: 978-9945-603-07-1
ISBN Obra Completa: 978-9945-415-97-1

El Comité Interamericano de Educación Matemática (CIAEM) es una organización fundada en 1961 asociada a la International Commission on Mathematical Instruction. Busca potenciar la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en las Américas.

Se permite la reproducción de cualquier parte de este libro para fines no lucrativos siempre que se consignent los créditos a los autores y al Comité Interamericano de Educación Matemática.

Para citar este libro y este volumen:

Comité Interamericano de Educación Matemática (2015). *Educación Matemática en las Américas: 2015. Volumen 10: Álgebra y Cálculo*. Editores: Patrick (Rick) Scott y Ángel Ruiz. República Dominicana.

Tabla de Contenidos

Presentación	i-iii
Abordagem contextualizada e compreensão relacional: em busca de uma identidade para o curso inicial de Cálculo Gabriel Loureiro de Lima-BR	1-12
Álgebra na educação básica brasileira e a transição entre as diferentes etapas escolares Valdir Bezerra-BR, Renato Ignácio-BR, Marlene Alves Dias-BR	13-24
Aprendizagem de Cálculo: dificuldades e sugestões para a superação Lilian Nasser-BR, Geneci Sousa-BR, Marcelo Abrantes Torraca-BR	25-35
Cálculo Diferencial e Integral em livros texto: uma análise sob a perspectiva da tecnologias digitais Adriana Richit-BR, Andriceli Richit-BR, Maria Margarete Farias-BR	36-45
Concepções de função de estudantes do ensino médio e superior Rogério Pires-BR, Benedito da Silva-BR	46-57
Concepções de licenciandos sobre o conceito de combinação linear Mariany Souza-BR, Angela Savioli-BR, Marcelo Jesus-BR	58-66
Contextualização e formalismo matemático no ensino de limites e continuidade: um estudo de caso Fabio Orfali-BR, Tadeu Aparecido Pereira de Ponte-BR	67-78
El esquema del concepto Transformación Lineal. Una mirada a tres interpretaciones desde la Teoría APOE Isabel Maturana Peña-CL, Marcela Parraguez González-CL, Maria Trigueros-CL	79-88
Equações de 1º grau: análise de um material de estudo sob o olhar do enfoque ontosemiótico Andrielly Lemos-BR, Carmen Kaiber-BR	89-99
Equações do primeiro grau: organizações matemática e didática entre duas coleções didáticas Edelweis Barbosa-BR, Anna Paula Brito Lima-BR	100-112
Evidencias de pensamiento variacional en estudiantes que inician ingeniería Marvin Mendoza Valencia-HN, Carlos Cabezas Manríquez-CL	113-125
Generalización de patrones numéricos en la educación básica primaria: una vía al desarrollo del pensamiento variacional. Elizabeth Rivera Muñoz-CO, Luisa Fernanda Sánchez Chaverra-CO	126-140

Ingeniería didáctica y aprendizaje lúdico Lorenza Illanes Díaz Rivera-MX, Elvira Rincón Flores-MX	141-148
Las letras en el álgebra como número general en estudiantes colombianos de grado 7° de educación formal Ronald Cabrera Montealegre-CO, Erika Viviana Pinzón-CO	149-159
Las propiedades de los números reales y el "misterio" de las estructuras algebraicas Laura Bonilla-MX, Canek Portillo-MX, Diego Cárdenas-MX, Rocío Ruíz-MX	160-171
O que os programas de ensino brasileiro preconizam sobre equações do primeiro? Uma análise à luz da Teoria Antropológica do Didático Edelweis Barbosa-BR, Anna Paula Brito Lima-BR	172-183
Pensamento algébrico e o currículo enculturador evidenciado por professores Francisco de Moura e Silva Junior-BR, Barbara Bianchini-BR	184-195
Produção de material para o ensino de Cálculo Sonia Barbosa Camargo Iglioni-BR, Marcio Almeida-BR	196-204
¿Qué clase de signo es $f'(x)$ y cuál es su significado? Vicenç Font Moll-ES	205-213
Reflexiones del profesor en torno al concepto de pendiente David Páez-MX, José Guzmán-MX, José Zambrano-MX	214-223
Significados para la derivada en un curso universitario de Matemáticas Walter Castro Gordillo-CO, German Cadavid Arango-CO, Luis Pino Fan-CL	224-231
Uma produção de significados para a noção de anel Marcelo Jesus-BR, Angela Pereira das Dores Savioli-BR, Mariany Souza-BR	232-240
Un esquema de transformación lineal asociado al concepto base Doris Evila González Rojas-CO, Solange Roa Fuentes-CO	241-250
Una propuesta didáctica para el estudio del tema de Espacios Vectoriales en un curso de Álgebra Lineal. Bolívar Ramírez Santamaría-CR	251-261

Presentación

La **XIV Conferencia Interamericana de Educación Matemática** realizada en Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, México, del 3 al 7 de mayo del 2015, contó con la participación de cerca de 1000 personas de 23 países y la presentación de más de 500 trabajos (conferencias plenarias y paralelas, mesa redonda, minicurso, diálogos, comunicaciones, talleres y posters) Esta fue una reunión regional de la *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI). El CIAEM es la organización afiliada al ICMI con mayor antigüedad. Su creación se remonta al año 1961 cuando se realizó la primera conferencia en Bogotá, Colombia.

Un gran nivel científico dominó los trabajos, en un ambiente cultural muy especial, con una gran hospitalidad por parte de los colegas de Chiapas.

Los conferencistas plenarios fueron Michèle Artigue (Francia), Carlos Vasco (Colombia), Diane Briars (USA), Abraham Arcavi (Israel-Argentina), Celia Hoyles (Reino Unido), María Teresa Tatto (USA) y Alicia Ávila (México). Ellos también desarrollaron *Diálogos* especiales, espacios adicionales de conversación e intercambio.

Una mesa plenaria organizada por la *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe* contó con la participación de Carlos Sánchez (Cuba), Nelly León (Venezuela), Edison de Faría (Costa Rica), Luis Carlos Arboleda y Jhony Villa (Colombia).

El evento tuvo conferencias paralelas y minicursos impartidos por académicos invitados, entre ellos: Gabriele Kaiser (Alemania), Richard Noss (Reino Unido), Manuel Santos (México), Gert Schubring (Alemania), José Chamoso (España), José Luis Lupiáñez (España), Arthur Powell (USA), Alessandro Ribeiro (Brasil), Roberto Araya (Chile), Gilberto Obando (Colombia), Uldarico Malaspina (Perú).

Los dos temas principales fueron la *Preparación de docentes que enseñan matemáticas* y el *Uso de tecnologías en la Educación Matemática*.

El congreso tuvo el valioso patrocinio de varias instituciones internacionales y nacionales: International Commission on Mathematical Instruction; Universidade Luterana do Brasil; Centro de Investigaciones Matemáticas y Metamatemáticas, y Centro de Investigación y Formación en Educación Matemática de la Universidad de Costa Rica; Secretaría de Educación del Estado de Chiapas; Universidad del Valle de México; Sindicato de Trabajadores de la Educación de México; Centro Regional de Formación Docente e Investigación Educativa (CRESUR); Oficina de Convenciones y Visitantes de Chiapas; Asociación Nacional de Profesores de Matemáticas de México; Escuela Normal Superior de Chiapas; Universidad de Costa Rica; HP; CASIO; y EduSystems.

Desde el 2007 el CIAEM ha logrado, entre otras cosas:

- Potenciar la calidad académica en los trabajos, la organización eficiente y la proyección de las conferencias interamericanas
- Consolidar la publicación de trabajos seleccionados de la Conferencias en la revista *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* (editada en Costa Rica)

- Fortalecer la relación del CIAEM con la comunidad internacional de Educación Matemática, especialmente con el ICMI y la *International Mathematical Union*.
- Crear y consolidar la Medalla *Luis Santaló*
- Apoyar el desarrollo del *Capacity and Networking Project* del ICMI en América Latina (Costa Rica 2012, Perú 2016)
- Auspiciar la creación y las actividades de la *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe*
- Apoyar la organización del *I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe*, celebrado en Santo Domingo, República Dominicana, en noviembre del 2013
- Consolidar el uso intenso de tecnologías de la comunicación en todas las actividades del CIAEM
- Crear una comunidad virtual del CIAEM de gran proyección tanto a través de su sitio web principal como de su página en Facebook
- Fundar en México el *Comité Interamericano de Educación Matemática* con personalidad jurídica para atender los múltiples compromisos formales que posee
- Traducir al español y publicar algunos textos del NCTM relacionados con la temática *Principles to actions* y continuar una línea importante de colaboración con el *National Council of Teachers of Mathematics* de los USA

En la XIV CIAEM fue confirmada la decisión de tener la XV CIAEM en Medellín, Colombia, en el 2019. Será desde hará 58 años la segunda ocasión en que se realizará una CIAEM en tierra colombiana.

CIAEM es el evento internacional más importante en Educación Matemática en América Latina. Constituye un punto de referencia para investigadores, docentes y estudiantes en todo el continente.

La mayoría de los textos de base para las presentaciones plenarias o paralelas ha sido incluidas en el número 15 de los *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática* que se edita en Costa Rica: <http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem>.

Las comunicaciones, talleres, minicursos y posters han sido incluidas en esta colección digital de volúmenes que titulamos *La Educación Matemática en las Américas: 2015*. Los trabajos se han organizado de la siguiente manera:

- Volumen 1 *Educación Matemática en las Américas 2015: Formación Inicial para Primaria*
- Volumen 2 *Educación Matemática en las Américas 2015: Formación Inicial para Secundaria*
- Volumen 3 *Educación Matemática en las Américas 2015: Formación Continua*
- Volumen 4 *Educación Matemática en las Américas 2015: Uso de Tecnología*
- Volumen 5 *Educación Matemática en las Américas 2015: Etnomatemática y Sociología*
- Volumen 6 *Educación Matemática en las Américas 2015: Currículum, Evaluación y Competencias*
- Volumen 7 *Educación Matemática en las Américas 2015: Investigación*
- Volumen 8 *Educación Matemática en las Américas 2015: Estadística y Probabilidad*
- Volumen 9 *Educación Matemática en las Américas 2015: Geometría*
- Volumen 10 *Educación Matemática en las Américas 2015: Álgebra y Cálculo*

- Volumen 11 *Educación Matemática en las Américas 2015: Educación Primaria*
- Volumen 12 *Educación Matemática en las Américas 2015: Historia y Epistemología*
- Volumen 13 *Educación Matemática en las Américas 2015: Nuevos Enfoques y Relación con Otras Áreas*
- Volumen 14 *Educación Matemática en las Américas 2015: Necesidades Especiales*
- Volumen 15 *Educación Matemática en las Américas 2015: Resolución de Problemas*
- Volumen 16 *Educación Matemática en las Américas 2015: Modelación*
- Volumen 17 *Educación Matemática en las Américas 2015: Talleres y Minicursos*
- Volumen 18 *Educación Matemática en las Américas 2015: Posters*

El CIAEM desea agradecer a todos los autores que presentaron sus trabajos en la XIV CIAEM y que incluimos en esta colección de volúmenes. Y a todos los revisores, directores de tema, y colaboradores que participaron en la revisión científica de las ponencias de este magno evento.

La organización detallada y la edición en sus diversas dimensiones fue realizada por nuestro segundo vicepresidente Patrick Scott (Estados Unidos) quien dedicó un esfuerzo extraordinario para tener estas *Memorias* disponibles. Quiero expresar en nombre de nuestra organización nuestro agradecimiento a Rick. Nuestra compañera Sarah González (Vocal para El Caribe) se encargó de tramitar su registro en República Dominicana que contó con el apoyo de la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra de ese país, a las que también expresamos nuestra gratitud.

Los enlaces de estos volúmenes se han colocado en las páginas web oficiales del CIAEM.

Esperamos que la publicación de todos estos trabajos contribuya al progreso de la investigación y la acción de aula en la Educación Matemática de las Américas.



Angel Ruiz
Presidente
Comité Interamericano de Educación Matemática

Abordagem contextualizada e compreensão relacional: em busca de uma identidade para o curso inicial de Cálculo

Gabriel Loureiro de **Lima**
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Brasil
gllima@pucsp.br

Resumo

A investigação de doutorado realizada pelo autor por meio de entrevistas orientadas pela metodologia da História Oral Temática e envolvendo também a análise de livros didáticos adotados como referência em diferentes épocas revelou ser urgente a constituição de uma identidade para o curso inicial de Cálculo a ser ministrado nas graduações da área de Ciências Exatas. Para isto, devem-se levar em consideração os problemas construtores e os conceitos-chaves desse campo de conhecimento. Propõe-se, neste trabalho, uma reflexão a respeito de dois aspectos: a necessidade de favorecer aos estudantes não somente uma compreensão instrumental, mas também uma compreensão relacional dos conceitos e a importância de se abordar determinado ente matemático por meio de uma contextualização adequada. Recorre-se a alguns elementos referentes à noção de limite de uma função para exemplificar, por meio de preocupações didáticas detectadas em alguns dos livros analisados, o tipo de abordagem que está sendo proposta.

Palavras-chave: ensino superior, cálculo, contextualização, compreensão instrumental, compreensão relacional.

Introdução

Com o objetivo de analisar como havia sido implantada e se desenvolvido, no primeiro curso superior de Matemática a funcionar no Brasil, a disciplina introdutória de Cálculo Diferencial e Integral, realizamos entre os anos de 2008 e 2012, no Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC/SP), a investigação de doutorado intitulada *A Disciplina de Cálculo I do Curso de Matemática da Universidade de São Paulo: um estudo de seu desenvolvimento, de 1934 a 1994*. Nesta, com base na análise de documentos oficiais da universidade, de livros adotados como referências nos cursos ministrados na mesma e, principalmente, com base na análise de entrevistas realizadas com pessoas envolvidas nos processos de ensino e de aprendizagem de Cálculo na instituição em diferentes épocas, estudamos de que maneira a referida disciplina havia sido implantada e de que forma havia se modificado, ao longo dos anos, em termos do nível de rigor e das preocupações didáticas. As entrevistas foram planejadas e realizadas segundo os preceitos da História Oral Temática (Garnica (2007)) e os dados obtidos foram analisados de acordo com aquilo que Bolívar (2002) denomina de Análise Paradigmática.

A pesquisa realizada, de abordagem qualitativa, não foi embasada em um único referencial teórico. Durante o desenvolvimento do estudo, percebemos que não seria necessário recorrer a uma teoria que fundamentasse todo o estudo realizado, mas sim a considerações teóricas específicas a respeito dos eixos de análise adotados, como, por exemplo, reflexões a respeito da constituição do Cálculo e da Análise Matemática como campos de conhecimentos e como disciplinas acadêmicas universitárias, além de discussões teóricas referentes às diferentes concepções de rigor, suas relações com a intuição e o surgimento de preocupações didáticas na universidade, em especial no ensino da Matemática e, especificamente, no trabalho com as disciplinas de Cálculo e de Análise.

Os dados obtidos referentes ao que se passou na Universidade de São Paulo não refletem apenas a realidade daquela instituição, já que a estrutura implantada na mesma durante muito tempo serviu de modelo aos demais cursos universitários de Ciências Exatas que passaram a funcionar no país. “o curso da USP não é somente característico daquela instituição; é um curso de uma universidade que, em certa época, foi referência e parâmetro para outras” (Lima, 2012, p. 18).

Na época em que a Universidade de São Paulo foi criada e estruturou-se o primeiro curso superior de Matemática do país, introduziu-se, de acordo com Mattos (2011), o ensino desta ciência baseado nas ideias do formalismo, movimento matemático bastante difundido na Europa nas primeiras décadas do século XX. Quando a USP foi fundada, o Cálculo já era ensinado no país, mas houve uma total reorientação na abordagem dada a este campo de conhecimento a partir de então. Ao invés de estudarem inicialmente Cálculo Diferencial e Integral, de uma maneira mais intuitiva e menos voltada ao rigor simbólico formal, os alunos do primeiro ano dos cursos de graduação na área de Ciências Exatas, passaram a estudar diretamente Análise Matemática, com ênfase na formalização, ainda que precoce, dos conteúdos tratados. Esta organização seguia o modelo europeu e sua implantação foi

Consequência direta daquilo que estava se passando em contextos mais amplos, relacionados ao próprio processo histórico de desenvolvimento da Matemática, à constituição do Cálculo e da Análise como campos de conhecimento, ao nível de rigor considerado como ideal pelos matemáticos para o ensino do Cálculo na época em que a USP foi fundada e à influência exercida pelo movimento formalista (Lima, 2014, p. 134).

A partir desta nova orientação, por meio dos dados coletados em Lima (2012, p.10-11), percebemos que as preocupações didáticas manifestadas pelos professores em diferentes épocas, bem como cuidados deste tipo presentes nos livros utilizados por eles como referência, estiveram, na maioria das vezes, intimamente relacionados ao desejo de se fornecer aos estudantes condições para que estes pudessem, de fato, compreender abordagens bastante rigorosas e formais do Cálculo, o que culminou, na década de 1960, em uma nova reorientação da disciplina, agora influenciada pelo modelo norte-americano, que passou a ser difundido no Brasil por meio de livros didáticos que começaram a ser cada vez mais adotados pelas universidades. De acordo com Lima (2014, p. 136), no modelo norte-americano,

Em um primeiro momento, o estudante, em um curso denominado Cálculo, trabalhava de maneira mais manipulativa com os conceitos, com ênfase em seus significados, nos procedimentos algorítmicos envolvendo tais conceitos e na maneira como os mesmos poderiam ser utilizados na resolução de alguns problemas matemáticos. Já em um segundo momento, em um curso denominado Cálculo Avançado, os conteúdos estudados no Cálculo eram retomados de maneira analítica, com um nível mais elevado de rigor simbólico-formal,

em uma abordagem semelhante àquela presente na disciplina Análise Matemática do modelo europeu.

Conforme destacamos em Lima (2012), o que se passou na USP e nas demais instituições brasileiras que adotaram seu modelo de organização vai na contramão da história da constituição do Cálculo Diferencial e Integral e da Análise Matemática como campos de conhecimentos. Se no processo histórico de desenvolvimento de ambos, na tentativa de justificar de maneira rigorosa os processos adotados naquele ramo da Matemática que hoje conhecemos como Cálculo, estabeleceu-se a Análise, no ensino superior brasileiro, a partir da fundação da Universidade de São Paulo, ao invés de, em um curso introdutório, tentar-se apresentar, sem tanto formalismo e com um nível menos elevado de rigor, os significados e idéias básicas do Cálculo, tentou-se diretamente uma abordagem bastante crítica, analítica, rigorosa e formal. Foi sempre a dificuldade dos estudantes em acompanhar aquele curso que se convencionou chamar de Análise, quem estabeleceu as diretrizes para o ensino do Cálculo.

Os dados apresentados e discutidos em Lima (2012) explicitam que durante o processo de implantação e de desenvolvimento da disciplina inicial de Cálculo no Brasil segundo o modelo difundido pela USP, não houve uma preocupação em refletir a respeito de quais são os objetivos específicos de tal disciplina nos cursos de graduação na área de Ciências Exatas. Em momento algum se discutiu o Cálculo pelo próprio Cálculo, levando-se em consideração seus conceitos basilares e suas aplicações. Consequentemente, no ensino superior brasileiro, não se constituiu ainda uma identidade para a disciplina introdutória de Cálculo. A importância de se refletir a respeito da necessidade da constituição de tal identidade é discutida em Lima & Silva (2012) e, da mesma forma que Rezende (2003), acreditamos que para o seu estabelecimento, “é necessário voltar o ensino do Cálculo para o próprio Cálculo, seus problemas construtores, suas potencialidades e seus significados, procurando nele mesmo o nível de rigor possível e as metas de seu ensino” (Lima & Silva, 2012, p. 16).

É preciso que haja uma reflexão a respeito do que acrescenta à formação matemática do estudante cursos de Cálculo, como muitos presentes em instituições brasileiras, que se resumem a um grande receituário de como calcular derivadas e integrais ou ainda qual a vantagem de, como usualmente se tem feito, ministrar cursos extremamente rigorosos e formais se todo esse formalismo parecer, ao estudante, sem serventia alguma, uma vez que dele só será cobrado o domínio de técnicas de cálculo (Lima, 2013, p. 8).

Neste trabalho, discutiremos dois aspectos a serem levados em consideração durante esse processo de construção de uma identidade para a disciplina inicial de Cálculo a ser ministrado aos ingressantes nos cursos superiores de Exatas. São eles: a necessidade de favorecer aos estudantes também uma compreensão relacional dos conceitos e não somente uma compreensão instrumental dos mesmos, no sentido destacado por Skemp (1976); e a necessidade de se abordar determinado ente matemático por meio de uma contextualização adequada que, ao contrário do que têm afirmado muitos educadores atualmente, não precisa ser somente por meio de problemas do cotidiano ou por meio de questões aplicadas de outras áreas de conhecimento, mas também no âmbito da própria Matemática. Conforme discutiremos, a nosso ver, estas duas questões – a necessidade de possibilitar ao estudante uma compreensão relacional de Matemática e a busca por maneiras adequadas de se contextualizar os conceitos matemáticos a serem trabalhados – estão intimamente interligadas. Após apresentar algumas considerações teóricas a respeito das ideias de compreensão instrumental ou relacional da Matemática e também sobre a contextualização de conceitos matemáticos, daremos, com base em preocupações didáticas

observadas em manuais analisados em Lima (2012), um exemplo de abordagem contextualizada do conceito de limite que, em nossa visão, pode favorecer a compreensão relacional de tal ente matemático.

Compreensão Relacional e Compreensão Instrumental da Matemática

O professor inglês Richard R. Skemp, que ao buscar uma integração entre a Matemática, a Educação e Psicologia se tornou um dos pioneiros na área de Educação Matemática, em artigo publicado originalmente em 1976, diferencia dois tipos de compreensão que um estudante pode ter dos conceitos matemáticos: a *relacional* (saber tanto o que fazer quanto o porquê) e a *instrumental* (saber fazer, mas sem necessariamente ter clareza a respeito do porquê e do que está envolvido naquilo que se está fazendo). Embora, a primeira vista, tais tipos de compreensão possam parecer excludentes, de acordo com o autor, a maioria dos assuntos matemáticos requer uma combinação de ambos.

A compreensão relacional, que o autor associa ao ato de aprender por meio do uso da inteligência, apoia-se não em uma infinidade de regras a serem memorizadas, cada uma para ser empregada em um caso particular, em uma situação específica, mas sim em um edifício solidamente erguido por meio de estruturas de conhecimento, com base nas quais o estudante, quando solicitado, poderá desenvolver uma grande variedade de planos de ações frente à determinada situação. Já a compreensão instrumental, associada por Skemp ao ato de aprender por hábito, caracteriza-se pela memorização de fórmulas e regras e muitas vezes um estudante que tem apenas uma compreensão instrumental da Matemática, ao se deparar com uma situação problema, pode até ser capaz de resolvê-la, mas não necessariamente o fato de chegar a esta solução implica que o mesmo tenha efetivamente compreendido todos os aspectos nela envolvidos (Skemp, 1989).

O aprendizado por meio do hábito, associado à compreensão instrumental, segundo Skemp (1989, p. 43-44) contribui para que o estudante se torne cada vez mais dependente de um professor que continue provendo-o com regras e estratégias específicas para cada novo modelo de situação a ser trabalhada nas aulas de Matemática, uma vez que ele envolve uma multiplicidade de procedimentos ao invés de princípios gerais. Por outro lado, de acordo com o mesmo autor, a aprendizagem inteligente, associada à compreensão relacional, desenvolve a confiança do estudante em suas próprias habilidades para enfrentar as dificuldades que surgirão no momento em que este se deparar com situações matemáticas novas e, neste caso, o professor será visto por ele como alguém que poderá lhe auxiliar a ampliar a sua própria compreensão a respeito de determinado assunto.

Outro aspecto destacado por Skemp (1989, p. 37-39) é que a compreensão relacional é mais adaptável e, conseqüentemente, mais efetiva, uma vez, de posse da mesma, os estudantes poderão buscar construir diferentes planos de ação para trabalhar com circunstâncias nas quais as regras já conhecidas por eles não podem ser aplicadas. Para Skemp (1976), a compreensão relacional, por possibilitar ao estudante compreender não somente que determinado método funciona, mas também o porquê dele funcionar, permite, além de relacionar cada uma das situações-problema aos seus métodos de resolução, adaptar para os novos problemas o método já conhecido, não sendo necessário aprender (ou memorizar) regras novas para cada novo tipo de situação. Desta forma, a compreensão relacional exige mais raciocínio e menos memorização, sendo, portanto, paradoxalmente, mais difícil de aprender (uma vez que exige, além do aprendizado de algumas regras, a compreensão das conexões existentes entre as mesmas) do que

aquilo que é trabalhado por meio de uma abordagem instrumental, mas também mais fácil de lembrar (favorecendo, portanto, que haja menos a reaprender quando for necessário mobilizar algum conceito já estudado).

Para muitos professores talvez possa parecer que enfatizar regras e procedimentos forneça resultados positivos mais rapidamente (além de exigir com que uma quantidade menor de conteúdo seja trabalhada), uma vez que os estudantes, mesmo sem ter necessariamente compreensão do porquê de tais regras, do que há por trás das mesmas, são, em geral, capazes de resolver os exercícios propostos e o aprendizado parece estar garantido. Mas a este respeito, Skemp (1989) destaca que, embora pareça mais fácil em curto prazo, a compreensão instrumental da Matemática se torna bastante difícil em longo prazo em razão de sua falta de consistência interna. É preciso que os professores tenham consciência de que o aluno ser capaz de utilizar regras não quer dizer que ele possua compreensão a respeito dos conceitos envolvidos na situação em questão. E conforme pontua o autor supracitado, para que o aluno possa querer compreender de forma relacional, o professor também precisa ensinar segundo esta mesma orientação. Deve proporcionar ao estudante que ele entre em contato com situações por meio das quais ele, por si só, perceba que dominar regras não é o bastante para que tenha sucesso na aprendizagem da Matemática. Além disso, o professor deve ficar atento para não adotar um livro que traga somente uma abordagem instrumental da Matemática. Se em sala de aula os conceitos são apresentados de forma relacional, o livro adotado também deve ter este aspecto incorporado.

Conceitos matemáticos intimamente interligados são, em muitas ocasiões, especialmente na educação básica, trabalhados como se fossem independentes, aspecto este acentuado quando o professor faz a opção por apresentar a Matemática apenas de forma instrumental. Uma abordagem relacional desta ciência pode favorecer com que os estudantes comecem a perceber que muitas ideias necessárias para a compreensão de determinado objeto matemático são também fundamentais para o entendimento de muitos outros e que há conceitos fundamentais que inter-relacionam áreas inteiras da Matemática (Skemp, 1976).

Diversas causas contribuem para que, não raramente, os professores optem por uma abordagem instrumental da Matemática. Uma das principais diz respeito aos currículos estarem muito sobrecarregados. Muitas vezes os professores, por falta de tempo, acabam passando muito rápido por conceitos que demandariam maior reflexão por parte do estudante. Conforme destaca Skemp, seria mais produtivo enxugar os currículos em termos da quantidade de conteúdo para que houvesse mais tempo de realmente ensinar aquilo que fosse de fato trabalhado.

Assim como no ensino da Matemática na educação básica, nos cursos universitários esta ciência também deve ser trabalhada em sala de aula visando proporcionar aos estudantes uma compreensão relacional de seus objetos. E, desta forma, o processo de construção de uma identidade para uma primeira disciplina de Cálculo Diferencial e Integral a ser ministrada aos ingressantes nos cursos superiores das áreas de Ciências Exatas também passa, obrigatoriamente, por reflexões a este respeito. O professor de Cálculo deve organizar suas aulas de forma a tratar relacionalmente cada um dos conceitos fundamentais deste campo de conhecimento, bem como deve escolher como referência para seu trabalho e para complementar suas aulas livros que também manifestem esse tipo de preocupação e não somente abordem os conteúdos de forma instrumental. Da mesma forma, deve sempre se preocupar com a maneira de contextualizar os conceitos a serem trabalhados. É exatamente a respeito de contextualização que trataremos em seguida.

A contextualização, em sala de aula, de um conceito matemático

Muito tem se falado a respeito da importância do professor contextualizar aquilo com que irá trabalhar em sala de aula, mas, especialmente no caso da Matemática, a ideia de contextualização mais difundida é muito restritiva e refere-se, quase sempre, a buscar em situações ditas ‘do cotidiano do estudante’ aplicações daquele conceito que está sendo abordado. Mas será que contextualizar de fato é apenas isso? Aplicar os resultados aprendidos em problemas que envolvam situações próximas do dia-a-dia dos estudantes? A contextualização está necessariamente relacionada com aplicação? Não pode ser feita no âmbito da própria Matemática? Que benefício pode trazer, efetivamente, para os processos de ensino e de aprendizagem de Matemática? Na busca por elementos que nos permitissem iniciar algum tipo de reflexão a este respeito, chegamos ao trabalho de Maioli (2012), desenvolvido com o objetivo de investigar a contextualização como princípio pedagógico e construir conhecimentos que permitam a compreensão de seus propósitos e usos.

Um dos significados para o termo *contextualizar* encontrados por Maioli na versão digital do dicionário Caldas Aulete¹ e que vem ao encontro da ideia que levaremos em consideração neste trabalho é o seguinte: “contextualizar é entender, analisar ou interpretar o significado de algo levando em conta o contexto, as circunstâncias de ocorrência”. Percebe-se, portanto, que a contextualização de um conceito matemático pode ser relacionada ao processo de construção de significados para o mesmo, uma vez que, conforme salienta Maioli (2012, p. 52), o contexto “é o conjunto dos elementos, comportamentos ou fatos que interferem ou colaboram na atribuição de sentidos de uma ação comunicativa”.

Para Silva (2009), o processo de contextualizar pode ser entendido como um entrelaçar de assuntos ou categorias, o que é explicitado pela própria origem do termo contextualização, que provém da palavra latina *contextus*, do verbo *contexere*, que significa entrelaçar, reunir tecendo. A própria palavra *contextus* também dá origem ao termo *textura*, que é o entrelaçamento dos fios de um tecido ou ainda a maneira como as partes de um todo se dispõem e se conectam. (Maioli, 2012, 18).

Assim como Maioli (2012), entendemos que um conceito estar descontextualizado “não significa que não esteja associado a alguma experiência do cotidiano. Significa que o conceito não foi compreendido no ambiente de ocorrência, no caso, no ambiente matemático” (p. 51), que não foram exploradas situações por meio das quais tenha sido possível favorecer a construção do conhecimento por meio de articulações realizadas no âmbito da própria Matemática. Assim como afirma Nascimento (2009), em trabalho citado por Maioli (2012, p.91), a contextualização do conhecimento matemático pode ser concebida como “uma abordagem onde este é tratado de forma vinculada a outros conhecimentos, o que faz com que o conteúdo a ser aprendido mostre-se necessário e não uma imensidão de algoritmos isolados e dispensáveis”.

A contextualização nas aulas de Matemática deve caracterizar-se, portanto, pela preocupação do professor em possibilitar que seus alunos explorem o máximo possível as relações existentes entre os conceitos que estão sendo trabalhados. Como estabelecem as Orientações Curriculares para o Ensino Médio, a contextualização deve aparecer “não como uma forma de “ilustrar” o enunciado de um problema, mas como uma maneira de dar sentido ao conhecimento matemático” (Brasil, 2008, p. 83). Além disso, no mesmo documento, destaca-se

¹<http://www.aulete.com.br> – último acesso no dia 25 de agosto de 2014.

que “o professor precisa ter consciência de que a contextualização pode, e deve ser efetivada em qualquer que seja o modelo de aula (...) tanto em aulas mais tradicionais, expositivas, quanto em aulas de estudo do meio, experimentação ou desenvolvimento de projeto” (p. 35).

Nota-se, portanto, de acordo com o que foi discutido, que conforme revela o próprio significado do termo contextualização, se o professor souber contextualizar de maneira adequada um determinado conceito matemático ao trabalhar com ele em sala de aula, estará, conseqüentemente, explorando as diversas relações entre o mesmo e outros entes matemáticos que fazem parte do mesmo contexto, o que possibilitará com que o estudante tenha condições de compreender os significados daquilo que está sendo apresentado e perceba que tal conceito engloba muito mais aspectos além dos procedimentos algorítmicos normalmente associados a ele. E isto possivelmente contribuirá para o desenvolvimento de uma compreensão relacional do conceito em questão por parte do estudante. Desta forma, tanto a busca por uma contextualização adequada para aquilo com que se está trabalhando quanto à preocupação por possibilitar ao aluno uma compreensão relacional desta ciência podem ser percebidos como aspectos interligados nos processos de ensino e de aprendizagem. É preciso, portanto, que, na busca por uma identidade para uma disciplina inicial de Cálculo, se reflita simultaneamente, como propomos neste artigo, a respeito de tais elementos.

Visando ilustrar uma possível abordagem contextualizada e que favoreça a compreensão relacional do Cálculo por parte do estudante, vamos considerar o conceito de limite de uma função e, com base em preocupações didáticas detectadas em livros utilizados como referências em alguns dos cursos de Cálculo analisados em Lima (2012), propor uma forma de trabalhar com alguns aspectos referentes a este conteúdo que parece atender a estes propósitos.

Um exemplo de abordagem contextualizada e relacional de alguns aspectos ligados à noção de limite de uma função

Um primeiro aspecto que, a nosso ver, deve ser levado em consideração ao se trabalhar com determinado conceito matemático é a maneira como este trabalho será iniciado, isto é, a forma como tal conceito aparecerá pela primeira vez em sala de aula. No caso da noção de limite de uma função isto se torna ainda mais relevante e a esse respeito Moise (1972) traz, em seu prefácio, algumas considerações. Segundo o autor, realmente o problema de motivar a ideia de limite de uma função envolve uma dificuldade particular, já que os únicos casos em que é fácil de calcular $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ são aqueles nos quais a função f é “contínua, dada por uma fórmula simples (...) [que] funciona para $x = a$ tão bem como para os outros valores de x ; na prática acontece que o limite é $f(a)$ ” (prefácio). Conforme salienta Moise, se a noção de limite de uma função for introduzida por meio da análise de casos como estes, o estudante será, “provavelmente, levado à ideia de que a expressão $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ é simplesmente uma descrição desonesta e pretenciosa de $f(a)$ ” (prefácio). Por outro lado, ainda segundo o autor, se o professor partir da análise de casos realmente significativos, como, por exemplo, a expressão $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$, irá se deparar com grandes dificuldades técnicas e será bastante complicado conseguir material tratando de problemas acessíveis. Também não é uma solução interessante, de acordo com Moise, partir da ideia de limites de sequências, uma vez que, no Cálculo Diferencial, o que se necessita, de fato, é calcular limites de funções. A sugestão trazida pelo manual é que a noção de limite seja introduzida não como um tópico específico, mas sim como um artifício para resolver um problema. Em seu texto, a ideia de limite é inicialmente apresentada na seção que trata do

Problema das Tangentes, quando o leitor se depara, pela primeira vez, com o cálculo do limite de uma função linear. Segundo destaca Moise, a ideia utilizada neste caso consiste simplesmente em “fechar o buraco de uma reta perfurada. Este processo não tem nenhum significado intrínseco. Mas no contexto [considerado], tem um significado extrínseco, porque é usado para resolver um problema não trivial, a saber, (...) achar a inclinação da [reta] tangente a uma parábola” (prefácio). Para o autor, essa é uma forma simples de se introduzir a ideia em questão e que, além disso, coloca-a em conexão com a discussão de outros conceitos, de outros problemas matemáticos (no caso a determinação da reta tangente a uma curva em um ponto dado e a própria definição de reta tangente).

Considerando o gráfico da função y , cuja expressão algébrica é $y(x) = x^2$, o autor parte do ponto $(1,1)$

No qual queremos achar a inclinação da tangente. Para todo outro ponto (x, x^2) da curva, consideramos a secante L_x por $(1,1)$ e (x, x^2) . (Note que L_x é determinada por x .) Então a inclinação de L_x é

$$m_x = \frac{x^2 - 1}{x - 1} (x \neq 1).$$

Aqui, a restrição algébrica $x \neq 1$ reflete o fato geométrico que é preciso dois pontos distintos para determinar uma reta. Refere-se, também, evidentemente, ao fato que frações com denominador 0 não tem sentido.

Traçaremos agora o gráfico de $y = m_x (x \neq 1)$. Temos

$$y = m_x = x + 1 (x \neq 1).$$

O gráfico é uma reta da qual um ponto foi suprimido. Para $x = 1$, não existe nada parecido com a reta secante por $(1,1)$ e $(1, 1^2)$; para $x = 1$, não existe a fração $m_1 = 0/0$. Mas isto não causa nenhuma dúvida porque é fácil ver que m_x está próximo de 2 quando x está próximo de 1. Expressamos isto escrevendo

$$\lim_{x \rightarrow 1} m_x = 2.$$

Leia-se: “o limite de m_x , quando x se aproxima de 1, é igual a 2”. Ao explicar o que isto significa, usamos o termo *próximo*, bastante não matemático, cujo significado parece um pouco vago. Você pode ser capaz de pensar num modo mais exato de expressar esta ideia (Moise, 1972, p. 44 – 46).

E esse “ser capaz de pensar num modo mais exato de expressar esta ideia” nos leva a discutir outro aspecto a ser considerado numa abordagem contextualizada da Matemática que vise também à compreensão relacional por parte do estudante: os significados dos simbolismos envolvidos nas definições matemáticas e, conseqüentemente, os significados das próprias definições. Spivak (1975) traz em seu manual um encaminhamento da noção de limite que leva em consideração este aspecto e que nos parece bastante adequado do ponto de vista didático. O autor apresenta, inicialmente, aquilo que chama de “definição provisória” de limite: “a função f tende ao limite l para valores de x próximos de a , se pudermos tomar $f(x)$ tão próxima quanto quisermos de l tornando x suficientemente próximo de a , mas sendo diferente de a ” (p. 99). Salienta ainda que não interessa o valor da função no ponto a e nem mesmo se a função está definida em tal ponto. Destaca também que uma maneira conveniente de representar a afirmação de que f tende a l para valores de x próximos de a é desenharmos duas retas, cada uma delas representando $\mathbb{R}$, e flechas que vão desde um ponto x de uma até $f(x)$ da outra. Esta

representação, se explorada pelo professor, possivelmente poderá contribuir para uma compreensão relacional, por parte do estudante, da definição de limite e dos elementos simbólicos nela presentes, uma vez que ilustram de maneira bastante intuitiva, ideias fundamentais envolvidas em tal definição, como, por exemplo, as noções de intervalo e de vizinhança.

Considere agora a função cuja representação tenha o aspecto da figura 3. Suponhamos que se exija que $f(x)$ esteja próximo de l , que está no interior do intervalo aberto B desenhado na figura 3. Esta exigência é automaticamente satisfeita se considerarmos somente os números x do intervalo A da figura 3. (Neste diagrama elegemos o maior intervalo entre todos aqueles que cumprem a exigência; qualquer intervalo menor contendo a seria válido). Se elegermos um intervalo B' menor (figura 4), precisamos eleger um A' menor e por menor que seja o intervalo escolhido B , terá sempre que haver algum intervalo aberto A correspondente”.

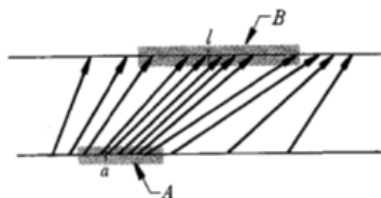


FIGURE 3

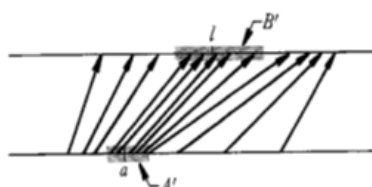


FIGURE 4

(Spivak, 1975, p. 100-101).

E Spivak torna a discussão ainda mais rica afirmando que “é possível uma interpretação gráfica parecida em termos do gráfico de f , porém, neste caso, o intervalo B deve ser desenhado sobre o eixo vertical e o conjunto A sobre o eixo horizontal” (p. 101). E, neste caso, “o fato de $f(x)$ estar em B quando x está em A significa que a parte do gráfico que está por cima de A está contida na região limitada pelas retas horizontais que passam pelos extremos de B ” (p. 101).

Após explorar estas representações por meio de diversos exemplos, Spivak passa a destacar os problemas presentes na definição provisória de limite apresentada anteriormente, encadeando as ideias de forma a inter-relacionar o que foi trabalhado até então com os elementos que estarão presentes na definição de limite, dando maiores condições aos estudantes para que estes, de fato, possam compreender os significados deste objeto matemático em seu ambiente de ocorrência (o que caracteriza um tratamento contextualizado do mesmo) e possam compreendê-lo não somente como um conjunto de técnicas, mas sim como um conceito fundamental em Matemática (o que caracteriza uma compreensão relacional). O autor afirma que, na definição provisória, “não está claro como se pode “fazer” $f(x)$ próximo a l (qualquer que seja o significado da palavra próximo) “fazendo com que” x esteja suficientemente próximo de a (por mais próximo que tenha que ser o “suficientemente próximo)”” (p. 109). A este respeito, Protter & Morrey (1962) também apresentam considerações em seu manual que podem ser utilizadas pelos professores de Cálculo para que estes evidenciem aos estudantes o porquê da linguagem simbólica-formal utilizada nas definições matemáticas. Os autores afirmam que, ao se apresentar, no manual, a noção intuitiva de limite, fez-se referências à intervalos se tornando “pequenos”, números “se aproximando”, quantias “aproximadamente nulas”, e assim por diante, mas que, no entanto, os sentidos dessas expressões “não-matemáticas” podem variar enormemente de pessoa para pessoa e, por essa razão, não podem servir de base para a definição de uma estrutura matemática, sendo necessário formular as definições recorrendo-se para isso a um rigor simbólico-formal específico da linguagem matemática.

É exatamente essa ‘tradução’ de uma linguagem imprecisa para outra adequada segundo os princípios do rigor matemático que Spivak (1975) propõe ao destacar em seu manual que é possível chegar por etapas à definição precisa de limite de uma função, esclarecendo, em cada uma destas etapas, aquilo que ainda estiver obscuro:

Voltemos, mais uma vez, para nossa definição provisória: A função f tende para o limite l para valores de x próximos de a , se pudermos fazer $f(x)$ tão próximo de l quanto desejarmos fazendo com que x esteja suficientemente próximo de a , mas seja diferente de a . A primeira mudança que precisamos fazer nesta definição consiste em esclarecer que fazer $f(x)$ próximo a l significa fazer $|f(x) - l|$ pequeno, e o mesmo para x e a . A função f tende para o limite l para valores de x próximos de a , se pudermos fazer $|f(x) - l|$ tão pequeno quanto desejarmos fazendo $|x - a|$ suficientemente pequeno, porém $x \neq a$. A segunda alteração é ainda mais crucial, consiste em esclarecer que fazer $|f(x) - l|$ “tão pequeno quanto desejarmos” significa fazer $|f(x) - l| < \varepsilon$ para qualquer $\varepsilon > 0$ que nos for dado. A função f tende para o limite l para valores de x próximos de a , se para todo $\varepsilon > 0$ pudermos fazer $|f(x) - l| < \varepsilon$ fazendo com que $|x - a|$ seja suficientemente pequeno e $x \neq a$. (...) Para cada número $\varepsilon > 0$ encontramos algum outro número positivo, que chamamos δ , com a propriedade de que se $x \neq a$ e $|x - a| < \delta$, então $|f(x) - l| < \varepsilon$. (...) A condição $|x - a| < \delta$ é a que nos expressa a pequenez do “suficientemente” pequeno: A função f tende ao limite l para valores de x próximos de a , se para todo $\varepsilon > 0$ existe algum $\delta > 0$ tal que, para todo x , se $|x - a| < \delta$ e $x \neq a$, então $|f(x) - l| < \varepsilon$. Esta é praticamente a definição que iremos adotar. Faremos somente uma alteração trivial, destacando que $|x - a| < \delta$ e $x \neq a$ pode ser igualmente expresso por $0 < |x - a| < \delta$. (Spivak, 1975, p. 109-110).

Salienta-se que essa abordagem que está sendo proposta é totalmente distinta daquelas presentes em cursos de Cálculo que priorizam os procedimentos algorítmicos para o cálculo de limites e/ou que apresentam diretamente a definição de tal ente matemático, sem relacioná-la a outros conceitos, sem sequer discutir os elementos nela envolvidos ou refletir a respeito do significado da mesma. O encaminhamento proposto neste trabalho, além de dar condições para que o estudante perceba de fato o significado da definição de limite de uma função e de todo o simbolismo nela presente, também a relaciona explicitamente a outros conceitos matemáticos, como, por exemplo, as ideias de reta tangente ao gráfico de uma função, intervalos, vizinhanças e distâncias.

É claro que a abordagem da noção de limite de uma função envolve diversos outros aspectos além destes considerados neste artigo. O objetivo de apresentar, neste trabalho algumas das preocupações didáticas manifestadas por autores de livros de Cálculo como Spivak, Protter&Morrey e Moise foi apenas ilustrar, recorrendo-se para isso às reflexões a respeito de como introduzir a noção de limite e sobre como construir de maneira significativa a definição de tal objeto matemático de forma a permitir que os estudantes possam perceber o papel desempenhado por cada um dos elementos presentes em tal definição, como trabalhar com este conceito de forma contextualizada e visando possibilitar ao aluno uma compreensão relacional do mesmo.

Considerações Finais

Frente à necessidade de se construir uma identidade para a disciplina inicial de Cálculo a ser ministrado nas graduações da área de Ciências Exatas, é urgente que o professor busque por uma abordagem contextualizada, que procure trabalhar cada um dos conceitos fundamentais da disciplina de forma a relacioná-los com outros entes matemáticos, possibilitando com que os

alunos se apropriem dos significados daquilo que está sendo estudado. Neste processo, deve ser também objetivo do docente proporcionar ao estudante não somente uma compreensão instrumental dos objetos que estão sendo estudados, mas também uma abordagem relacional dos mesmos; o foco não devem ser as técnicas, mas sim os conceitos, suas inter-relações e os diferentes elementos presentes em cada um deles.

Ressalta-se que preocupações deste tipo são importantes não somente no (ou para) o Cálculo, mas sim em todas (ou para todas) as disciplinas a serem ministradas em qualquer nível de ensino. Especificamente em relação à busca por uma identidade para o curso inicial de Cálculo, tema central deste trabalho, tais reflexões são apenas algumas das que devem ser realizadas. Esta pesquisa deve prosseguir iluminando outros aspectos ainda não contemplados, dentre os quais, os níveis de rigor com que os conceitos devem ser tratados e o papel das demonstrações em um primeiro curso de Cálculo.

Bibliografia e referências

- Bolívar, A. (2002). “De nobis ipsis silemus?”: Epistemologia de alinvestigación biográfico-narrativa em educación. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 4(1), 01-26. Consultado em 16 de novembro de 2011 em <http://redie.ens.uabc.mx/vol4no1/contenido-bolivar.html>
- Brasil (2008). *Secretaria de Educação de Educação Básica. Orientações curriculares para o Ensino Médio: linguagens, códigos e suas tecnologias*. Secretaria de Educação Básica. Brasília: Ministério da Educação.
- Garnica, A. V. M. (2007). *História oral em educação matemática: outros usos, outros abusos*. Guarapuava: SBHMat (Coleção História da Matemática para Professores).
- Lima, G. L. (2012). *A disciplina de Cálculo I do curso de Matemática da Universidade de São Paulo: um estudo de seu desenvolvimento, de 1934 a 1994*. (Tese inédita de Doutorado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- _____. (2013). A Implantação e o Desenvolvimento da Disciplina de Cálculo no Brasil: o modelo difundido pela USP. *Anais do VII Congresso Iberoamericano de Educação Matemática (CIBEM)*. Montevideu, Uruguai.
- _____. (2014). Contextualizando momentos da trajetória do ensino de Cálculo na graduação em Matemática da USP. *Educação Matemática Pesquisa*. São Paulo, 16(1), 125-149.
- Lima, G. L. & Silva, B. A. (2012). O Ensino do Cálculo na Graduação em Matemática: considerações baseadas no caso da USP. *Anais do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM)*. Petrópolis-RJ.
- Maioli, M. (2012). *A contextualização na matemática do Ensino Médio*. (Tese inédita de Doutorado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.
- Mattos, A. C. (2011). A Matemática no Contexto da Criação da Universidade de São Paulo em 1934. *Anais do IX Seminário Nacional de História da Matemática*. Consultado em 25 de setembro de 2013 em http://www.each.usp.br/ixsnhm/Anaisixsnhm/Comunicacoes/1_Mattos_A_C_Matem%C3%A1tica_no_Contexto_da_Cria%C3%A7%C3%A3o_da_Universidade_de_S%C3%A3o_Paulo.pdf
- Moise, E. E. (1972). *Cálculo: um curso universitário – volume I* – tradução de Dorival A. Mello e Renate G. Watanabe sob coordenação de Elza Furtado Gomide. Editora Edgar Blucher Ltda. São Paulo.
- Nascimento, M. J. A. (2009). *A contextualização no livro texto da 1ª série do Ensino Médio*. Consultado em 10 de novembro de 2011 em www.sbem.com.br/files/ix_enem/Poster/.../PO58706356400T.doc

Protter, M. H. & Morrey JR, C. B. (1962). *Calculus with Analytic Geometry: a first course*. Reading, Mass: Addison-Wesley.

Rezende, W. M. (2003). *O Ensino de Cálculo: dificuldades de natureza epistemológica*. (Tese inédita de Doutorado). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo.

Silva, M. A. (2009). *Currículos de matemática no Ensino Médio: estabelecendo critérios a para escolha e organização de conteúdos*. (Tese inédita de Doutorado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.

_____. (1989). *Mathematics in the primary school*. Londres: Routledge.

Spivak, M. (1975). *Cálculo Infinitesimal*. Barcelona: Reverte.

Álgebra na Educação Básica Brasileira e a transição entre as diferentes etapas escolares

Valdir **Bezerra**

Universidade Federal de Pernambuco

Brasil

valdir.bezerra@gmail.com

Renato **Ignácio**

Universidade Federal de Campina Grande

Brasil

renatosignacio@gmail.com

Marlene Alves **Dias**

Universidade Anhanguera

Brasil

alvesdias@ig.com.br

Resumo

Neste trabalho, apresentamos parte da pesquisa sobre o ensino e aprendizagem da Álgebra na educação básica no Brasil considerando a transição entre as três etapas que compõem o ensino obrigatório, ou seja, do início da alfabetização até o final do ensino médio. O objetivo é identificar as relações institucionais existentes e as relações pessoais esperadas dos estudantes para compreender as dificuldades apresentadas pelos estudantes, em particular, aqueles que terminam o ensino secundário. Para tal, utilizamos a TAD de Chevallard e as noções de quadro e mudança de quadros de Douady e níveis de conhecimento esperado dos estudantes segundo definição de Robert. O estudo realizado segue a metodologia das pesquisas qualitativa, documental e estudo de múltiplos casos, esse último analisado por meio de um teste diagnóstico. Os resultados mostram que a tendência em tratar a álgebra como aritmética generalizada conduz os estudantes a um confinamento no quadro da aritmética.

Palabras chave: álgebra, ensino, aprendizagem, relações institucionais, relações pessoais, ostensivos, não ostensivos.

Introdução

Questões referentes às dificuldades, potencialidades e desafios do ensino e aprendizagem da álgebra originam um grande número de publicações em eventos e revistas científicas. Cremos que há ainda muito para se explorar, principalmente, devido às inúmeras mudanças que ocorrem na sociedade, fazendo com que repensemos continuamente a abordagem dos conteúdos matemáticos no processo de ensino aprendizagem.

Partimos de uma situação vivenciada e relatada por um dos autores desse artigo, a saber: para uma turma uma turma do 4º ano do Ensino Fundamental anos iniciais, o então professor propôs uma tarefa como desafio para que os alunos resolvessem. O desafio era baseado em um problema muito comum no ensino de sistemas de equações, que ocorre com frequência, no 8º

ano do Ensino Fundamental anos finais. O desafio versava sobre uma fazenda que entre os animais que lá habitavam, tinham coelhos e galinhas. Informou-se aos alunos que haviam 35 animais, entre galinhas e coelhos, e que, além disso, haviam 94 pés. Logo, perguntou-se quantos coelhos e galinhas haviam na fazenda.

A hipótese do professor é que tal problema não seria resolvido com facilidade pelos alunos do 4o ano, pois não tinham os conhecimentos algébricos necessários para desenvolver a solução com facilidade, mas o mesmo foi surpreendido com as respostas dos alunos e também com a técnica de resolução dos mesmos. Os alunos mostraram que era possível resolver o desafio proposto apenas com contagens e ideias aritméticas e utilizando representações gráficas (desenhos dos animais). Uma das soluções que podemos citar é o desenho de 35 animais, para os quais foram colocados dois pés em todos e após isso foram distribuídos os restantes podendo então verificar quais eram coelhos e quais eram galinhas.

No entanto, fomos surpreendidos com outros tipos de resoluções, as quais não estamos habituados, pois, em geral, não trabalhamos com os alunos do ensino fundamental anos iniciais e raramente são proporcionalizados espaços de discussão entre os professores das diferentes etapas escolares.

Nosso interesse por estudar a álgebra na educação básica, em particular, na transição entre os ensinos fundamental anos iniciais (6 – 10 anos), fundamental anos finais (11 – 14 anos) e médio (15- 17 anos), é de compreender as dificuldades dos estudantes ao aprender álgebra básica.

Uma das possibilidades para a compreensão das dificuldades, potencialidades e desafios no processo de ensino aprendizagem da álgebra é entender a evolução histórica deste domínio, em particular, como se deu o desenvolvimento da linguagem algébrica desde seu início até a forma como a mesma é utilizada atualmente.

A álgebra antes e pós Viète

Descrever a evolução histórica da álgebra demandaria grande estudo, o que não seria possível concluir neste trabalho, por isso optamos por fazer uma exposição breve da história do desenvolvimento do conhecimento algébrico dividindo em dois momentos: antes e após Viète.

Essa breve descrição da evolução histórica da álgebra segundo texto de Robinet (1989) e o estudo do artigo de Radford (1991) sobre a álgebra pré simbólica nos conduziu a uma reflexão sobre as dificuldades que encontramos atualmente quando no ensino superior precisamos utilizar elementos da álgebra elementar que não são disponíveis e que levam nossos estudantes a um grande desinteresse pelos cursos superiores em que a matemática se apresenta como uma ferramenta importante para o seu desenvolvimento.

Baseado na divisão citada acima, iniciamos com a exposição da situação da álgebra antes de Viète, que corresponde a vários séculos da antiga Babilônia e Egito, nos quais foram encontrados problemas de resolução algébrica. Um exemplo de problema algébrico no Egito (por volta de 1700 antes de Cristo) seria “Pães de 10, 1000 trocados por pães de 20 e 30. Quantos?” (Problema 76 do Papiro de Rhind), que na linguagem algébrica atual podemos escrever: $1000/10 = x/20 + x/30$. É interessante observar que neste período o discurso era utilizado na resolução de problemas, logo existia pouca formalização. Essa formalização aparecerá nos trabalhos de Diophante 300 anos depois de Cristo conforme Robinet (1989).

O que podemos destacar nos trabalhos de Diophante é que ele utilizava o simbolismo para abreviar a escrita, mas não operava sobre o simbolismo para resolver problemas. Além disso, para a demonstração ele utilizava exemplos numéricos e ainda o discurso. Aproximadamente três séculos mais tarde os indianos incluíram suas contribuições ao formalismo, quando elaboram o sistema de numeração decimal. São encontrados, ainda, em alguns documentos a inserção de mais símbolos para representar incógnitas e suas variações, mas não muda muito em relação à utilização destes símbolos para resolver problemas, quando comparado ao período anterior, pois o apoio sobre o discurso ainda está presente na resolução de pequenos problemas.

Na continuidade do estudo sobre as contribuições dos indianos, Robinet (1989) afirma que é possível reconhecer premissas do cálculo algébrico e teoria das equações, uma vez que os mesmos utilizam os números irracionais e negativos. Mas, segundo a autora são os árabes que farão avançar o cálculo algébrico, com a resolução de problemas “teóricos” de álgebra. Alguns árabes se destacaram neste avanço como Al Kwarizmi, Abu Kamil, Al Karagi e Al kayyam, todos trabalhando com teoria das equações, transpondo os cálculos aritméticos para os cálculos com as incógnitas.

Assim, podemos considerar o período de atuação dos árabes como o período transitório para o segundo momento de nosso comentário sobre a evolução histórica da álgebra, que foi indicado por Robinet (1989) como o período após Viète. É oportuno afirmar, que as descobertas de Viète não surgiram do nada, mas foram preparadas por matemáticos antigos e pelos árabes. Ainda segundo Robinet (1989) Viète também foi influenciado por alguns trabalhos de matemáticos europeus do século XV, que de um lado redescobrem os matemáticos gregos e por outro se iniciam nas matemáticas árabes e cujos trabalhos foram desenvolvidos em duas direções, a saber: sobre o simbolismo e sobre a teoria das equações.

Assim sendo, Viète trouxe ganhos ao desenvolvimento da álgebra, pois com ele simbolizar indica identificar coisas indeterminadas e operar sobre as equações algébricas. Inicialmente, a idéia de Viète parece pouco favorável, pois os símbolos não ajudavam em equações de grau muito elevado, mas a simbologia foi evoluindo de forma a possibilitar que o cálculo algébrico atingisse seu pleno desenvolvimento.

Observamos nesse breve trecho, que a gênese da álgebra ocorre por meio do estudo de problemas que eram resolvidos de forma aritmética, mesmo utilizando uma simbologia, que servia apenas de ferramenta para facilitar a escrita do problema. Após vários séculos chegou-se a resolução de problemas utilizando plenamente a simbologia e introduzindo também as operações.

Assim, com base na experiência relatada acima e no recorte histórico que fizemos da evolução da álgebra consideramos que é importante verificar o que acontece atualmente nos livros didáticos em relação aos problemas associados à introdução da álgebra na educação básica.

Dessa forma, nosso objetivo é analisar as praxeologias existentes em livros e materiais didáticos do 7º ao 9º ano do Ensino Fundamental, verificando a necessidade ou não da resolução algébrica dos problemas propostos. Certamente, nesse artigo apresentamos apenas parte desse trabalho uma vez que explicitaremos na metodologia da pesquisa qual o material analisado que fundamenta os resultados e considerações que já somos capazes de avançar.

Assim, para alcançar o objetivo proposto nos baseamos na Teoria Antropológica do Didático Chevallard (1992, 1994, 1999), mais especificamente, nas noções de relações institucionais e pessoais, praxeologia e objetos ostensivos e não ostensivos, que explicitaremos na seção a seguir e nas noções de quadro e mudança de quadros definidas por Douady (1984, 1992) e de níveis de conhecimento esperados dos estudantes segundo definição de Robert (1998).

Referencial Teórico

A Teoria Antropológica do Didático de Chevallard é central na pesquisa e para esse trabalho utilizamos as noções de relações institucional e pessoal que são definidas em Chevallard (1992, 1994, 1998, 1999) e Bosch e Chevallard (1999) ao considerarem que a organização do estudo supõe uma modelagem mínima da estática e sobretudo da dinâmica cognitiva, assim, na perspectiva antropológica a primeira noção fundamental é a de objeto, que corresponde a toda entidade, material ou imaterial, que existe para pelo menos um indivíduo. Segundo o autor, a noção de objeto é a mais geral, pois tudo é objeto, inclusive as pessoas. Após explicitar o que significa objeto, Chevallard (1998) introduz a segunda noção fundamental que é a de relação pessoal de um indivíduo x com um objeto o , que segundo o autor corresponde a todas as interações, sem exceção, que o indivíduo x pode ter com o objeto o , isto é, x pode manipulá-lo, utilizá-lo, falar sobre ele, sonhar com ele, etc. Assim, dizemos que o existe para x se ele tem uma relação pessoal com o , ou ainda se sua relação pessoal com este objeto é não vazia, o que se indica por $R(x, o) \neq \emptyset$.

Após definir universo cognitivo como o conjunto das relações pessoais não vazias Chevallard (1992, 1998) introduz a noção de instituição I , isto é, um dispositivo social que permite e impõe às pessoas que vêm a ocupar diferentes posições oferecidas na mesma, envolvendo maneiras próprias de fazer, e mais amplamente, adotar praxeologias determinadas. Isso conduz o autor a definir relação institucional a o em posição p , a relação com o objeto o , que deveria ser, idealmente, aquela dos sujeitos de I em posição p . Dizer que x é um bom sujeito de I em posição p , é o mesmo que afirmar que a relação pessoal do indivíduo x está em conformidade ou é adequada à relação institucional em posição p .

Sendo a noção de praxeologia, que indica a conformidade ou adequação do indivíduo x em relação ao objeto o para uma posição p em uma instituição, passamos aqui a sua definição, ou seja, segundo Chevallard (1999) uma praxeologia corresponde aos tipos de tarefas (T) que para serem executadas necessitam de uma maneira de fazer que o autor denomina técnica (τ). A associação tarefa-técnica é definida como um saber fazer que não sobrevive isoladamente, solicitando um ambiente tecnológico-teórico, que corresponde a um saber formado por uma tecnologia (θ), ou seja, um discurso racional que justifica e torna a técnica compreensível, e de uma teoria (Θ) que justifica e esclarece a tecnologia utilizada. O sistema composto por tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria $[T, \tau, \theta, \Theta]$ constitui o que Chevallard denomina praxeologia, sendo ela que articula uma parte prática técnica, que corresponde ao saber fazer, a uma parte tecnológica teórica, que corresponde ao saber. A base de toda praxeologia é constituída por um sistema de tarefas em torno das quais se desenvolvem e se organizam técnicas, tecnologias e teorias.

Assim, Chevallard (1994), após observar que toda a atividade humana pode ser decomposta em certo número de tarefas e que para cada tipo de tarefa existe uma técnica, questiona sobre de que ingredientes é composta essa técnica e em que consiste sua execução, o

que o conduz a estabelecer uma distinção fundamental entre dois tipos de objetos: os objetos ostensivos e os objetos não ostensivos. Dessa forma, Chevallard (1994) define os objetos ostensivos como aqueles que têm para nós uma forma material, e os objetos não-ostensivos, denominados usualmente de noções, conceitos, ideias, etc., como aqueles que não podem ser manipulados, mas só podem ser evocados por meio da manipulação dos ostensivos associados. Chevallard (1994) observa ainda que existe uma dialética necessária entre ostensivos e não ostensivos, pois os ostensivos são manipulados por meio de regras, cuja distinção é feita pelos não ostensivos, enquanto que os não ostensivos são evocados por meio da manipulação dos ostensivos.

Além dos noções acima descrita da TAD utilizamos como referencial teórico de apoio as noções de quadro e mudança de quadro conforme definição de Douady (1992), segundo a autora um quadro é constituído de objetos de um ramo das matemáticas, das relações entre os objetos, de suas formulações eventualmente diversas e das imagens mentais associadas a esses objetos e essas relações. Essas imagens têm um papel essencial e funcionam como ferramentas dos objetos do quadro. As mudanças de quadro, segundo a autora, correspondem a um meio de obter formulações diferentes de um problema que sem ser, necessariamente, equivalentes, permitem um novo acesso às dificuldades encontradas para fazer funcionar as ferramentas e técnicas que não se impunham na primeira formulação.

Finalmente, consideramos a noção de níveis de conhecimento esperados dos estudantes segundo definição de Robert (1998), a saber: nível técnico que corresponde às ferramentas e definições utilizadas para resolver uma determinada tarefa; nível mobilizável que corresponde a um início de justaposição de saberes de certo quadro, podendo até corresponder a uma organização. Vários métodos podem ser mobilizados. O caráter ferramenta e objeto do conceito estão em jogo, mas o que se questiona é explicitamente pedido; nível disponível que corresponde, a saber, responder corretamente o que é proposto sem indicações. Nesse nível, existe a possibilidade de dar contra exemplos (encontrar ou criar), mudar de quadro, aplicar métodos não previstos.

Robert (1998) ressalta que esse nível está associado à familiaridade, ao conhecimento de situações de referência variadas que o estudante sabe que as conhece e que para ele servem de terreno de experimentação, o que conduz a ser capaz de fazer questionamentos. Como essas situações de referência dependem da forma como os conhecimentos são organizados, esses podem funcionar para uma única tarefa ou possibilitam a realização de resumos que por sua vez auxiliam na execução de diversas tarefas em que esses conhecimentos estão em jogo. A grande diferença entre os conhecimentos mobilizáveis e disponíveis está na organização dos mesmos para os estudantes e, principalmente, na forma como são encontrados nos enunciados, pois os mobilizáveis são pedidos explicitamente nos enunciados enquanto que os disponíveis devem ser reconhecidos pelos estudantes.

Metodologia da Pesquisa

Esse estudo está centrado na análise de documentos oficiais para determinar as relações institucionais existentes e as relações pessoais esperadas dos estudantes, seguindo assim as técnicas da pesquisa documental que segundo Lüdke e André (1986) está associada à pesquisa qualitativa, pois permite complementar informações obtidas por outras técnicas e/ou desvendar aspectos de um tema ou problema.

Dessa forma, os documentos analisados são o caderno do professor para o 7º e 8º anos do ensino fundamental anos finais, que corresponde ao material distribuído pela Secretaria estadual da educação como elemento que compõe a implementação do currículo do estado de São Paulo iniciada em 2008 e nos quais são introduzidas as primeiras noções de álgebra e os relatórios pedagógicos da mesma secretaria publicados anualmente após a avaliação anual do Sistema de Avaliação do Rendimento Escolar do Estado de São Paulo – SARESP para a qual a Matemática é aplicada para todos os alunos do 3º e 5º anos do ensino fundamental anos iniciais (6 – 10 anos), 7º e 9º anos do ensino fundamental anos finais (11 – 14 anos) e no 3º ano do ensino médio (15 – 17 anos).

Analizamos, ainda, um dos livros didáticos de matemática dos 7º e 8º anos do ensino fundamental, anos finais, indicado para o pelo Programa Nacional do Livro Didático – PNLD, que distribui os livros avaliados após escolha dos professores para todas as escolas do país. O livro analisado é o de Dante (2012) e a opção por essa obra se deve ao fato que a mesma tem sido indicada desde o início da avaliação dos livros didáticos pelo Ministério da Educação e Cultura.

Na análise dos documentos foram estudados os problemas propostos aos estudantes e se verificou quais as técnicas propostas e aquelas que poderiam ser utilizadas em função dos conhecimentos retrospectivos dos estudantes, ou seja, verificamos se a álgebra era necessária ou se correspondia a uma ferramenta para facilitar a escrita, como ocorre no seu desenvolvimento histórico.

A partir dos dados encontrados e em função da experiência de um dos autores desse trabalho, foi proposto um teste diagnóstico junto a um grupo de estudantes do 5º ano do ensino fundamental anos iniciais para identificar quais as técnicas por eles utilizadas para o desenvolvimento das tarefas propostas e compará-las com os outros grupos, ou seja, com os resultados apresentados pelos estudantes do 1º e 2º anos do ensino médio, que segundo nossas expectativas deveriam apresentar técnicas algébricas após os quatro anos que passaram no ensino fundamental anos finais.

Os grupos de estudantes foram escolhidos aleatoriamente, pois consideramos que os estudantes do 5º ano utilizariam apenas conhecimentos aritméticos e que os estudantes do ensino médio seriam capazes de utilizar ferramentas algébricas para facilitar a solução das questões propostas.

Isso justifica a escolha do teste diagnóstico que segundo Yin (2005) corresponde a um estudo caso, pois o autor define este método de pesquisa como sendo uma investigação empírica, que abrange planejamento, técnica de coleta de dados e análise dos mesmos. Nesse estudo, o teste diagnóstico foi planejado para ser aplicado em diferentes grupos com o objetivo de comparar as técnicas utilizadas pelos estudantes em função das relações institucionais existentes quando se introduz a álgebra no ensino fundamental. Esse teste era composto de duas questões que possibilitavam tanto a solução aritmética quanto a algébrica, permitindo assim comparar as relações pessoais dos grupos de estudantes analisados e as marcas das relações institucionais sobre essas relações pessoais.

Apresentamos a seguir os resultados da análise dos documentos indicados acima e do teste diagnóstico.

Resultados da análise das relações institucionais

Análise das relações institucionais existentes

Iniciamos pela análise do livro didático de Dante (2012) por se tratar de uma obra usada em escolas brasileiras em âmbito nacional uma vez que está entre as dez (10) indicadas e distribuídas pelo Ministério da Educação.

As obras de Dante (2012) – “Projeto Teláris – Matemática”

Analizamos os livros do 7º e 8º anos do ensino fundamental anos finais, pois as expressões algébricas, as equações do primeiro grau e os sistemas de equações lineares são introduzidas no 7º ano e revisitadas no 8º ano, que corresponde ao momento em que se introduz ainda as noções de polinômios.

Os tipos de tarefas e técnicas privilegiados com suas respectivas tecnologias e teorias, isto é, as praxeologias $\wp$ desenvolvidas na obra são apresentadas na figura 1:

- $\wp_1$ - Tipo de tarefa *T1*: Dada uma expressão algébrica, calcular seu valor numérico para um valor dado. *Técnica, tecnologia*: substituir o valor dado na expressão e efetuar as operações indicadas. *Teoria*: regras e leis das operações aritméticas e introdução da noção de incógnita.
- $\wp_2$ - Tipo de tarefa *T2*: Resolver equações do primeiro grau. *Técnica, tecnologia*: utilizar as propriedades da adição e multiplicação, as operações inversas e as propriedades da igualdade (relação de equivalência e princípios aditivo e multiplicativo da igualdade). *Teoria*: teoria das equações.
- $\wp_3$ - Tipo de tarefa *T3*: Representar expressões por meio de letras, por exemplo, a metade de um número mais seus dobro. *Técnica-tecnologia*: passagem do ostensivo da língua materna para o ostensivo algébrico. *Teoria*: álgebra e propriedades dos números.
- $\wp_4$ - Tipo de tarefa *T4*: Situação intramatemática, em geral, utilizando conhecimentos de geometria. *Técnica-tecnologia*: passagem do ostensivo da língua materna e numérico para o ostensivo equação e resolução de uma equação do primeiro grau. *Teoria*: teoria das equações.
- $\wp_5$ - Tipo de tarefa *T5*: Situação extramatemática, em geral, associadas ao cotidiano. *Técnica, tecnologia*: passagem dos ostensivos da língua materna e numérico para o ostensivo equação e resolução de uma equação do primeiro grau. *Teoria*: teoria das equações.
- $\wp_6$ - Tipo de tarefa *T6*: Determinar a geratriz de uma dízima periódica *Técnica-tecnologia*: passagem dos ostensivos dízima periódica (0,33333...) para o ostensivo algébrico fracionário ($1/3$) por meio de uma equação e resolução de equação. *Teoria*: teoria das equações.
- $\wp_7$ - Tipo de tarefa *T7*: Resolver uma equação do primeiro grau com duas incógnitas. *Técnica, tecnologia*: Escolher um valor para uma das incógnitas e determinar a outra, ou seja, determinar um dos pares ordenados solução da equação. *Teoria*: teoria das equações.
- $\wp_8$ - Tipo de tarefa *T8*: Situação extramatemática, em geral, associadas ao cotidiano. *Técnica, tecnologia*: passagem dos ostensivos da língua materna e numérico para o ostensivo sistema de equações e resolução do sistema pelos métodos da substituição, adição e gráfico. *Teoria*: teoria das equações e representação de pontos no sistema cartesiano ortogonal.
- $\wp_9$ - Tipo de tarefa *T9*: Situação intramatemática, em geral, utilizando conhecimentos de geometria. *Técnica, tecnologia*: passagem do ostensivo da língua materna e numérico para o ostensivo sistema de equações e resolução do sistema pelos métodos da substituição, adição e gráfico. *Teoria*: teoria das equações e representação de pontos no sistema cartesiano ortogonal.

$\wp_{10}$ - Tipo de tarefa *T10*: Discussão de um sistema de duas equações do primeiro grau e duas incógnitas. *Técnica, tecnologia*: passagem do ostensivo de algébrico de equação para o ostensivo gráfico. Escolher valores para uma das incógnitas, determinar a outra e representar os pares ordenados no sistema cartesiano ortogonal. *Teoria*: teoria das equações e representação de pontos no sistema cartesiano ortogonal.

Figura 1. Praxeologias desenvolvidas nas obras de Dante (2012).

A análise das praxeologias matemáticas desenvolvidas na obra de Dante (2012) nos permitiu observar que:

As tarefas de tipos *T1* e *T6* são enunciadas nos quadros algébrico e numérico respectivamente e a solução das mesmas exige conhecimento da técnica de determinação do valor numérico para *T1* e das regras e leis para solução de uma equação do primeiro grau para *T6*, ou seja, para ambas o nível esperado do trabalho dos estudantes é o técnico.

As tarefas de tipos *T2*, *T7* e *T10* são enunciadas no quadro algébrico e para resolvê-las é preciso mobilizar conhecimentos sobre as regras e leis do cálculo algébrico para *T2* e *T7* e da representação gráfica de equações para *T10*. Assim, o nível esperado dos estudantes para as solução dessas tarefas é o mobilizável.

A tarefa de tipo *T3* é enunciada no quadro da aritmética e exige a passagem para o quadro algébrico, sendo este pedido explicitamente o que corresponde à mobilização do conhecimento esperado pelos estudantes.

As tarefas de tipos *T4*, *T5*, *T8* e *T9* são enunciadas, em geral, no quadro geométrico e de situações contextualizadas e espera-se que os estudantes utilizem o quadro algébrico para a sua solução. Mas, muitas vezes essas tarefas podem ser resolvidas no quadro aritmético, dependendo dos conhecimentos disponíveis dos estudantes e da interpretação que os mesmos são capazes de efetuar em relação ao enunciado da tarefa.

Observamos que nas obras de Dante (2012) os tipos de tarefas utilizados para a introdução às noções de equações e sistemas de equações lineares é adequado, mas é preciso ficar atento ao fato que as tarefas de tipos *T4*, *T5*, *T8* e *T9* para as quais o nível esperado dos estudantes é o disponível, muitas delas podem ser resolvidas no quadro aritmético o que pode ser uma dificuldade para a introdução da álgebra uma vez que os estudantes não percebem o interesse de trabalhar no quadro algébrico.

O caderno do professor

O caderno do professor (São Paulo, 2014) é um dos documentos que compõe o currículo do estado de São Paulo. Neste material a álgebra é introduzida no 7º ano por meio da identificação de padrões em diversos tipos de sequências até aquelas em que é possível utilizar letras para representá-las e, conseqüentemente, generalizá-las seguidas da determinação do valor numérico de fórmulas e equações para valores dados. A partir deste estudo é indicada a apresentação da resolução de equações por meio da analogia entre equilíbrio na balança e igualdade na equação, técnica que será aplicada para o estudo das razões e proporções. No 8º ano a noção de equação é revisitada e propõe-se novamente os trabalho com sequências e generalização das mesmas. Após o desenvolvimento de fatoração e produtos notáveis são propostos problemas aritméticos para serem resolvidos utilizando conhecimentos de álgebra e geometria, a ênfase é dada aos problemas que envolvem sequências e generalização das mesmas.

Na sequência são propostos problemas para serem resolvidos por meio de equações e sistemas de equações, para estes últimos são indicados os métodos da adição, substituição e gráfico. Para o método gráfico é apontado o estudo das possíveis soluções de um sistema de duas equações lineares e duas incógnitas.

Assim, os tipos de tarefas e técnicas privilegiados com suas respectivas tecnologias e teorias são *T2* e a técnica, tecnologia proposta é o cálculo aritmético, seguido de um exemplo em que se utilizam as regras e leis do cálculo algébrico sem explicitação das propriedades que os sustentam. *T4*, *T5*, *T8*, *T9* e *T10* são introduzidas utilizando a aritmética e suas propriedades para na sequência indicar a possibilidade de trabalho com o cálculo algébrico que é explicitado por meio das de suas regras e leis sem associá-las às propriedades que as justificam.

É importante ressaltar que existe o caderno do aluno, no qual as atividades propostas no caderno do professor são praticamente as mesmas e que, além disso, supõe-se que os professores complementem o estudo proposto com elementos do livro didático indicado pela escola e distribuído pelo Ministério da Educação.

Resultados da análise das relações pessoais esperadas e das dificuldades apresentadas pelos estudantes

Para a análise das relações pessoais esperadas dos estudantes discutimos neste artigo apenas o resultado apresentado no relatório pedagógico da avaliação institucional SARESP do ano de 2012 para tarefas associadas às noções de equação e sistemas de equações lineares.

O material apresenta uma tarefa em que se pede a solução de uma equação do tipo $ax+b=c$, a saber: $2x+5=5$. Trata-se de uma tarefa de tipo *T2* e da forma como é proposta o valor de x poderia ser determinado mentalmente. Observamos aqui que apenas 34,8% dos estudantes do 7º ano indicaram a alternativa correta, mesmo tendo sido considerada a possibilidade de determinar x sem cálculo quando da proposta institucional (caderno do professor) das escolas públicas do estado de São Paulo.

Neste mesmo material é indicada ainda uma tarefa do 9º ano sobre sistemas de equações lineares, ou seja, é dado o sistema $\begin{cases} x = 3y \\ y + x = 40 \end{cases}$ e se pede para resolver o sistema pelos métodos da adição ou substituição. Essas técnicas são introduzidas e utilizadas em diversas tarefas do tipo *T8* e *T9* no 8º ano.

O resultado é que apenas 21,5% dos estudantes indicam uma resposta correta, o que parece mostrar que os estudantes utilizam os métodos de resolução de sistemas de equações lineares e trabalham também com as tentativas quando em aulas, mas não são capazes de utilizar nem mesmo as técnicas quando são avaliados, pois ao desenvolver tarefas dos tipos *T8* e *T9* e não exercitar as técnicas, os estudantes acabam não sendo capazes nem mesmo de aplicar essas técnicas.

Os resultados da análise das relações pessoais esperadas dos estudantes colocam em evidência que no ensino fundamental anos finais esperava-se que os estudantes fossem pelo menos capazes de utilizar as técnicas desenvolvidas nesta etapa escolar, o que os resultados da avaliação SARESP mostram não corresponder a realidade.

Para compreender como os estudantes reagem quando são confrontados com tarefas que podem ser resolvidas tanto por meio da aritmética como da álgebra propusemos um teste

diagnóstico com duas questões que correspondem à tarefas sobre sistemas de equações, a primeira podendo ser descrita algebricamente por meio de duas equações lineares a duas incógnitas, mas que também supõe soluções por meio de contagem ou tentativas e a segunda que corresponde a um sistema com duas equações sendo uma linear e a outra não linear.

Resultados do teste diagnóstico e análise das relações pessoais dos estudantes que participaram da pesquisa

Análise *a priori* e *a posteriori* do teste diagnóstico e resultados apresentados pelos estudantes que participaram da pesquisa

Foram propostas para vinte e seis estudantes do 5º ano do ensino fundamental dos anos iniciais, vinte e cinco estudantes do 1º ano do ensino e médio e cinco estudantes do 2º ano do ensino médio as mesmas tarefas, pois elas poderiam ser resolvidas utilizando diferentes técnicas. Observamos aqui que os estudantes foram convidados para participar da pesquisa e a escolha das turmas foi aleatória.

Análise da tarefa 1

Tarefa 1: Uma fábrica produz carrinhos de bebê e triciclos. Hoje, os operários produziram 11 unidades e, para montá-las, usaram 40 rodas. Quantos triciclos foram produzidos?

Técnica 1: Contagem – desenhar a quantidade total de carrinhos de bebê e triciclos e distribuir três rodas para todos eles, na sequência distribuir as rodas que sobram, o que permite determinar a quantidade de carrinhos de bebê e triciclos.

Técnica 2: Tentativa – utilizar os valores possíveis para a quantidade total de carrinhos de bebê e triciclos e considerando que um tem três rodas e o outro 4 rodas, fazer as multiplicações e somar os resultados até encontrar o par de números que satisfaz o enunciado da tarefa.

Técnica 3: Representar a tarefa por meio de um sistema de duas equações e duas incógnitas e utilizar um método de resolução de sistemas lineares.

Figura 2. Técnicas associadas às relações institucionais existentes para a tarefa 1.

Em relação à análise dos resultados das respostas encontradas na tarefa 1, podemos verificar que os estudantes que acertaram a tarefa 1 são: nove alunos do 5º ano, no 1º ano do ensino médio 19 estudantes acertaram e no 2º ano do ensino médio todos os cinco acertaram.

Na tabela 1 a seguir podemos ver a porcentagem de alunos que acertaram as questões distribuídos pela utilização das técnicas.

Tabela 1

Tipos de técnicas utilizadas pelos estudantes

<i>Tarefa 1</i>	<i>Técnica 1</i>	<i>Técnica 2</i>
5º ano do Ens. Fund.	15,4%	19,2%
1º ano do Ens. Méd.	4%	72%
2º ano do Ens. Méd.	20%	80%

Fonte: pesquisa privada. 2014.

Esses resultados mostram que os estudantes que acertaram a tarefa 1 utilizaram prioritariamente as técnicas 1 e 2. Algo, que faz sentido quando analisamos as turmas do 5º ano do ensino fundamental, pois não foram iniciados as ideias da álgebra, da utilização de sistemas de duas equações. No entanto, as turmas de 1º e 2º anos do ensino médio já tiveram contato com o método de resolução da técnica 3, e mesmo assim, priorizam a utilização das técnicas 1 e 2.

Análise da tarefa 2

Tarefa 2: Encontrar dois números cuja soma é 20 e o produto entre eles é 96.

Técnica 1: Tentativa – fazer as multiplicações e somar os resultados até encontrar o par de números que satisfaz o enunciado da tarefa.

Técnica 2: Representar a tarefa por meio de um sistema de duas equações e duas incógnitas e utilizar um método de resolução de sistemas lineares.

Figura 3. Técnicas associadas às relações institucionais existentes para a tarefa 2.

Da mesma forma que fizemos na tarefa 1, analisamos os acertos dos alunos envolvidos na pesquisa. Como resultado obtivemos que dois alunos do 5º ano responderam corretamente a tarefa 2. Em relação ao 1º ano do ensino médio tivemos como resultado que dezanove alunos responderam corretamente e por fim o 2º ano do ensino médio teve todos os alunos respondendo corretamente.

Vejamos na tabela 2 a seguir como ficou distribuído os acertos dos alunos relacionados as técnicas utilizadas para a solução da tarefa 2.

Tabela 2

Tipos de técnicas utilizadas pelos estudantes

<i>Tarefa 1</i>	<i>Técnica 1</i>
5º ano do Ens. Fund.	7,6%
1º ano do Ens. Méd.	76%
2º ano do Ens. Méd.	100%

Fonte: pesquisa privada. 2014.

Esses resultados mostram que na mesma perspectiva do resultado da tarefa 1, os estudantes que acertaram a tarefa 2 não utilizaram a álgebra como ferramenta para solucionar a atividade proposta.

Conclusão e perspectivas futuras

Para as relações institucionais existentes analisadas, aqui, por meio de um livro didático e do caderno do professor observamos, que entre as praxeologias encontradas as que se referem aos tipos de tarefas *T1* e *T6* correspondem a exercitar as técnicas de determinação do valor numérico de passagem de um ostensivo de representação para outro. Já as praxeologias que correspondem aos tipos de tarefas *T2*, *T3*, *T7* e *T10* estão associadas à mobilização das regras e leis do cálculo algébrico e/ou das propriedades de resolução de equações para *T2*, da mobilização da passagem do ostensivo da língua natural para o ostensivo algébrico para *T3*, da mobilização da técnica de resolução de equações com duas incógnitas para *T7* e da mobilização da passagem da representação do ostensivo de equações para o ostensivo gráfico para *T10*. As praxeologias associadas aos tipos de tarefas *T4*, *T5*, *T6* e *T9* que correspondem a aplicação dos conhecimentos sobre equações e sistemas de equações nem sempre exigem que os estudantes disponham de conhecimentos sobre o trabalho algébrico associado uma vez que muitas delas podem ser resolvidas por meio das regras e leis do cálculo aritmético, não exigindo assim conhecimentos associados à álgebra, isto é, várias tarefas propostas aos estudantes são tratadas como aritmética generalizada.

Para as relações pessoais esperadas dos estudantes sobre as noções de equações e sistemas lineares, analisadas via SARESP - 2012, observamos que os estudantes não dominam as técnicas

do cálculo algébrico mesmo tendo trabalhado com tipos tarefas para as quais a solução esperada consistia na aplicação da álgebra, mesmo quando seu enunciado permite considerá-las como tipos de tarefas aritméticas.

Observamos que tanto os estudantes do 5º ano do ensino fundamental como os do 1º e 2º ano do ensino médio não recorrem à álgebra para resolver as tarefas e ambos utilizam aritmética e as técnicas de contagem e tentativa, sem explicitar o trabalho realizado, pois apresentam apenas uma série de desenhos ou cálculos. Certamente, essa forma de funcionar é adequada para os estudantes do 5º ano, mas coloca em evidência a dificuldade dos estudantes do ensino médio para utilizar a álgebra enquanto ferramenta para o desenvolvimento de outros conceitos e noções que é o objetivo do trabalho com a álgebra nessa nova etapa escolar.

Ressaltamos ainda que as relações pessoais dos estudantes do ensino médio que participaram da pesquisa não correspondem às relações institucionais existentes. Assim, nossa proposta é de trabalhar com um grupo de estudantes e seguir os mesmos desde o 5º ano até o final do 1º ano do ensino médio para verificar como um trabalho que mostre explicitamente a função da álgebra a princípio como ferramenta facilitadora para a solução dos problemas propostos na educação básica.

Referências e bibliografia

- Bosch, M., & Chevallard Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 19(1), 77-124.
- Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en didactique des mathématiques* 12(1), 73-112.
- Chevallard, Y. (1994). *Ostensifs et non-ostensifs dans l'activité mathématique*. Recuperado em 17 de setembro de 2014 de <http://yves.chevallard.free.fr/>
- Chevallard, Y. (1998). *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: L'approche anthropologique*. Recuperado em 17 de setembro de 2014 de <http://yves.chevallard.free.fr/>
- Chevallard, Y. (1999). *La recherche en didactique et la formation des professeurs: problématiques, concepts, problèmes*. Recuperado em 17 de setembro de 2014 de <http://yves.chevallard.free.fr/>
- Dante, L. R. (2012). *Projeto Teláris Matemática*. São Paulo: Ática.
- Douady, R. (1992). *Ingénierie didactique et évolution du rapport au savoir*. Recuperado em 12 de setembro de 2014 de http://www.cndp.fr/entrepot/fileadmin/docs/education_prioritaire/Maths_et_ZEP/reperes15rd.pdf
- Lüdke, M., & André, M.E.D.A. (1986). *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.
- Radford, L. (1991). Diophante et l'algèbre pré-symbolique. *Bulletin AMQ*, 63(4).
- Robert, A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée à l'université. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 18(2), 139-190.
- Robinet, J. (1989). *La genèse du calcul algébrique (une esquisse)*. Paris : IREM Paris 7.
- São Paulo. (2009). *Caderno do Professor: Matemática, Ensino fundamental*. São Paulo: Secretaria de Educação.
- Yin, R. K. (2005). *Estudo de caso: planejamento e métodos*. Porto Alegre: Bookman.

Aprendizagem de Cálculo: dificuldades e sugestões para a superação

Lilian Nasser

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Brasil

liliannasser@uol.com.br

Geneci Alves de Sousa

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Brasil

prof.geneci@yahoo.com.br

Marcelo André Abrantes Torraca

Universidade Federal do Rio de Janeiro
Brasil

torraca@gmail.com

Resumo

Os altos índices de reprovação e de evasão nos cursos de Cálculo remetem a diversas investigações sobre suas causas, buscando sugestões para tentar reverter esse quadro. O baixo desempenho de alunos calouros em Cálculo é atribuído, em geral, a lacunas na aprendizagem de Matemática na Escola Básica. Este trabalho é parte de uma pesquisa, desenvolvida no âmbito do Projeto Fundão (IM/UFRJ), com os objetivos de investigar como se dá a transição do Ensino Médio para o Superior e empreender ações para diminuir esses índices. Neste trabalho são apresentados exemplos de erros relacionados a obstáculos à aprendizagem de Cálculo e são sugeridas algumas estratégias que podem ajudar a superar essas dificuldades.

Palavras chave: Cálculo, obstáculos à aprendizagem, análise de erros.

Transição do Ensino Médio e seu impacto na aprendizagem de Cálculo

As dificuldades em Cálculo têm sido tema de estudos nacionais e internacionais, que investigam suas causas. Para amenizar tal situação, várias estratégias têm sido empreendidas, tal como a inclusão de disciplinas de Matemática Básica (também chamadas de pré-Cálculo ou Cálculo 0). Em alguns casos, são oferecidas atividades concomitantes de monitoria ou mesmo cursos de Fundamentos ou Complementos de Cálculo. Entretanto, a solução para minimizar esse problema ainda está por ser encontrada.

Rezende (2003) afirma que as dificuldades em Cálculo são de natureza epistemológica, requerendo uma preparação anterior ao início dos estudos de Cálculo. Ele sugere que um trabalho no Ensino Médio sobre a variabilidade de funções pode facilitar a aprendizagem nessa disciplina. Outra pesquisa sobre o tema foi desenvolvida por Palis (2010), com enfoque nos cursos de pré-Cálculo da PUC-Rio, indicando a tecnologia como ferramenta que pode auxiliar no domínio de funções e seus gráficos. Nasser (2009) investigou o desempenho de alunos de

Cálculo no traçado de gráficos, constatando que as dificuldades se devem, principalmente, à falta de preparação prévia em relação ao conteúdo de funções e sugere ações que podem ajudar a superá-las, como “desenvolver estratégias de ensino apropriadas, de acordo com os estilos de aprendizagem dos alunos, em particular, enfatizando exercícios sobre transformações de gráficos” (p. 54).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCN/EM, 1999) destacam a dissociação existente entre vários conteúdos nesse nível de ensino, o que enfatiza a necessidade de uma proposta curricular diferente da praticada atualmente.

Um primeiro exemplo disso pode ser observado com relação às funções. O ensino isolado desse tema não permite a exploração do caráter integrador que ele possui. Devemos observar que uma parte importante da Trigonometria diz respeito às funções trigonométricas e seus gráficos. As sequências, em especial progressões aritméticas e geométricas, nada mais são que particulares funções. As propriedades de retas e parábolas estudadas em Geometria Analítica são propriedades dos gráficos das funções correspondentes. Aspectos do estudo de polinômios e equações algébricas podem ser incluídos no estudo de funções polinomiais, enriquecendo o enfoque algébrico que é feito tradicionalmente. (PCN/EM, 1999, p. 225)

Analizando os desafios enfrentados por alunos ao iniciar os estudos em Matemática avançada, Robert e Schwarzenberger (1991) apontam mudanças quantitativas:

mais conceitos, menos tempo, necessidade de mais reflexão, mais abstração, menos problemas significativos, mais ênfase em demonstrações, maior necessidade de aprendizagem versátil, maior necessidade de controle pessoal sobre a aprendizagem. A confusão causada pelas novas definições coincide com a necessidade de mais pensamento dedutivo abstrato. A junção dessas mudanças quantitativas gera uma mudança qualitativa que caracteriza a transição para o pensamento matemático avançado. (Robert e Schwarzenberger, 1991, p. 133)

Tall (1991) também aponta a falta de domínio do pensamento matemático avançado como uma das causas para um resultado insatisfatório dos alunos nas disciplinas de Cálculo, ao afirmar que “[...] a mudança do pensamento matemático elementar para o avançado envolve uma transição significativa: da descrição para a definição, do convencimento para a demonstração de uma maneira lógica, baseada naquelas definições.” (Tall, 1991, p.20)

De acordo com Caraça (1984), o conceito de função está ligado à ideia de correspondência entre dois conjuntos. A função é vista como uma busca da compreensão da ‘Realidade’, com suas características fundamentais: a interdependência e a fluência (p. 109). Isto é, a função surge da necessidade de interpretar fenômenos da natureza, observar a interdependência entre duas grandezas e descrever regularidades. Como exemplo, Caraça apresenta a variação quantitativa de espaço e tempo no fenômeno da queda livre de um corpo no vácuo (Caraça, 1984, p. 126).

As orientações do PCN/EM (2006) seguem na mesma direção, sugerindo que

o estudo de funções pode ser iniciado com uma exploração qualitativa das relações entre duas grandezas em diferentes situações: idade e altura; área do círculo e raio; tempo e distância percorrida; tempo e crescimento populacional; tempo e amplitude de movimento de um pêndulo, entre outras. (PCN/EM, 2006, p.72)

Por sua vez, Tinoco (1989) defende que é possível conseguir bons resultados com o estudo das funções a partir do segundo segmento do Ensino Fundamental, por meio da observação de exemplos práticos e sua representação gráfica. Mesmo sem exibir uma expressão analítica para

representar a função, os alunos podem, por exemplo, relacionar as variações das distâncias de reação e frenagem, em função da velocidade do veículo (Tinoco, 1989, p. 13).

Even (1990) também observou dificuldades no domínio de funções em sua pesquisa. Ela relata a dificuldade de futuros professores em decidir se $g(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x \text{ é um número racional} \\ 0, & \text{se } x \text{ é um número irracional} \end{cases}$ é ou não uma função. Checando com a definição de função, um sujeito da pesquisa afirmou que é uma função, já que “há uma imagem única para cada número” (p. 528). No entanto, na tentativa de traçar o gráfico dessa função, esse futuro professor marcou alguns números irracionais no eixo dos x : π , $\sqrt{3}$, $\frac{7}{4}$ (considerando uma fração imprópria como um número irracional) e esboçou uma parte da reta $y = x$ com buracos, conforme ilustrado a seguir na figura 1.

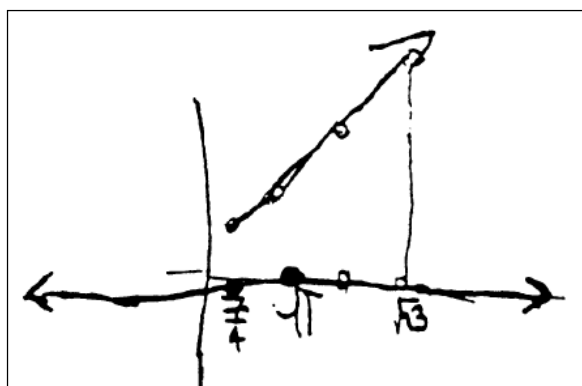


Figura 1. Gráfico de um futuro professor para a função $g(x)$.

Even (1990) afirma ainda que

essa situação é compreensível – quase todas as funções encontradas por alunos do Ensino Médio e mesmo de faculdades são do tipo que têm um gráfico “simples” e podem ser descritas por uma fórmula, de modo que o seu conceito imagem de uma função é determinado pelas funções que eles vivenciam, e não pela definição moderna de uma função, que enfatiza a sua natureza arbitrária. (p. 529)

Obstáculos à aprendizagem em Cálculo

Em relação à aprendizagem, diversos pesquisadores apontam a existência de obstáculos, cuja noção está relacionada a algum entrave como causa das dificuldades. Os obstáculos epistemológicos foram estudados inicialmente por Bachelard e explorados por vários matemáticos como Brousseau (1983) e Artigue (1989). Citando Iglioni (2002, p. 101), Nasser (2009) destaca que

Brousseau distingue três tipos de obstáculos à aprendizagem: os de origem *ontogênica*, que se referem a limitações do próprio sujeito, os de natureza *didática*, que dependem das experiências de aprendizagem vivenciadas; e os de ordem *epistemológica*, inerentes ao conhecimento. (Nasser, 2009, p. 44)

Especificamente em relação à aquisição do conceito de função, Sierpinska (1992) destaca 16 obstáculos e 19 atos fundamentais, que são estratégias para transpor esses obstáculos.

Em nossas pesquisas com alunos do Ensino Médio e calouros universitários na disciplina de Cálculo, observamos algumas respostas que exemplificam a presença de algum obstáculo à aprendizagem, que destacamos a seguir.

- a concepção ingênua de que “o gráfico de uma função não precisa ser exato”. Essa concepção explica alguns dos problemas observados nas tentativas de alunos de Cálculo I ao

traçar gráficos de funções simples como $f(x) = \begin{cases} -(x+3)^2 + 4, & \text{s } x < -1 \\ 0, & \text{s } -1 \leq x \leq 3 \\ (x-5)^2 - 4, & \text{s } x > 3 \end{cases}$. A figura 2

mostra o descuido de um aluno de Cálculo I, em marcar os pontos críticos na representação gráfica dessa função.

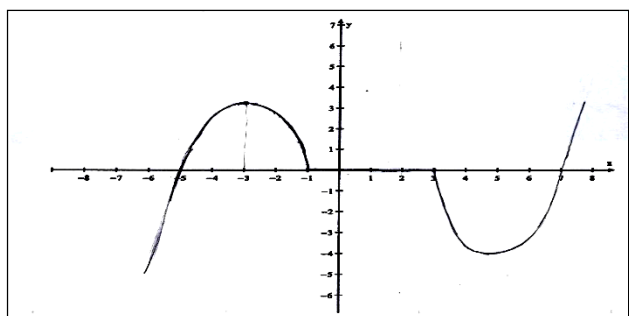


Figura 2. Gráfico sem exatidão nos pontos críticos

- a concepção de que “apenas relações representáveis por fórmulas analíticas são dignas de serem chamadas funções”. De fato, muitos alunos só reconhecem como funções as relações que são representadas por uma expressão algébrica, e apresentam dificuldades, por exemplo, ao lidar com funções definidas por várias sentenças.

A Figura 3 mostra o gráfico apresentado por um aluno de Cálculo para a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} -4, & \text{p } x \leq -3 \\ -x^2 + 5, & \text{p } -3 < x \leq 2 \\ x - 2, & \text{p } x > 2 \end{cases}.$$

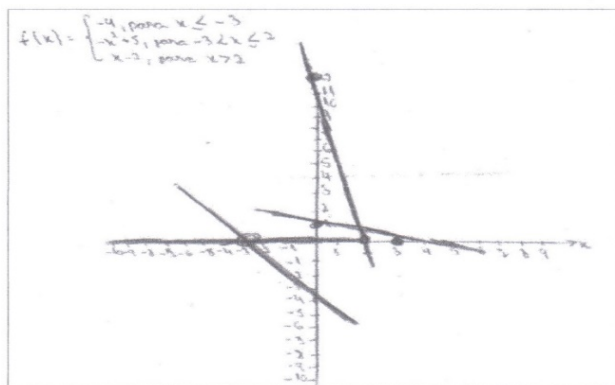


Figura 3. Gráfico incorreto de função definida por várias

- a crença de que o gráfico de uma função é obtido marcando alguns pontos no plano cartesiano e unindo-os por segmentos de reta, deixando de considerar a lei de formação da função. Na figura 4 é apresentado o gráfico traçado por uma aluna de Cálculo I com bom desempenho. Ela foi capaz de perceber a translação horizontal aplicada à função $y = \text{sen}(x)$

para obter o gráfico da função $y = \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ marcando os pares ordenados, mas ligou-os por segmentos de reta.

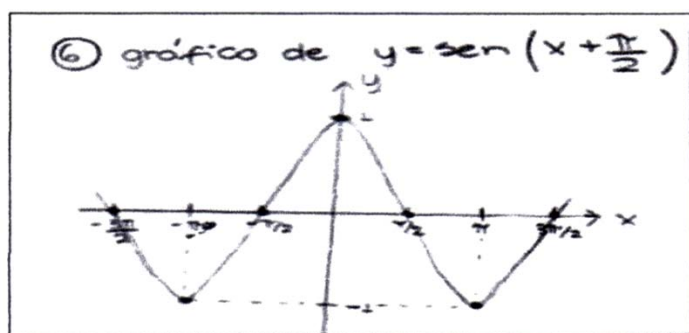


Figura 4. Exemplo de gráfico utilizando segmentos de reta para a ligação dos pontos.

Em sua pesquisa, Even (1990) ressalta que a primeira abordagem de funções, marcando pontos, não é difícil de aprender, mas

uma abordagem com marcação de pontos para o traçado de gráficos de funções é, em muitos casos, menos poderosa que um método que enfatiza uma análise mais global do comportamento da função. Por exemplo, fazer o gráfico de uma função quadrática que tem $(-100, 78)$ como vértice pela marcação de vários pontos próximos de $(0, 0)$ não vai produzir um gráfico informativo. Também, traçar o gráfico de uma função que é descontínua em $x = 0,3$ pela marcação de pontos com coordenadas inteiras e ligá-los vai produzir um gráfico errado. (Even, 1990, p. 534)

- as dificuldades na transposição da representação verbal (descrição da situação problema) para uma representação analítica, isto é, escrever uma sentença matemática que relacione as grandezas envolvidas no problema.

De acordo com Duval,

Há uma pluralidade de registros de representação de um mesmo objeto, e a articulação desses diferentes registros é a condição para a compreensão em matemática, embora várias abordagens didáticas não levem em conta esse fato. (Duval, 2003, p. 31).

Em geral, a interpretação do enunciado de uma situação problema e sua transposição para uma expressão analítica da função que envolve não são tarefas fáceis para alunos do Ensino Médio, e mesmo no início da graduação. O seguinte problema foi proposto a alunos de Cálculo I:

A taxa de inscrição num clube de natação é de R\$450,00 para o curso de 12 semanas. Se uma pessoa se inscreve após o início do curso, a taxa é reduzida linearmente. Exprese a taxa de inscrição em função do número de semanas transcorridas desde o início do curso.

Figura 5. Questão aplicada na pesquisa

O problema demandava uma análise dos dados apresentados e a representação dessa leitura de forma analítica, onde a taxa de inscrição fosse escrita em função do número de semanas passadas após o início do curso. Os alunos deveriam interpretar o enunciado, percebendo que se tratava de uma função afim, e que o gráfico de uma função que decresce linearmente é uma reta. Pelos resultados observados na nossa pesquisa, os alunos do curso de engenharia apresentaram um bom desempenho nessa questão, com cerca de 80% de acertos. O mesmo não foi verificado no desempenho dos alunos de uma turma de licenciatura em Matemática, onde menos de 30% conseguiram apresentar a expressão analítica da função corretamente. Alguns alunos chegaram à expressão analítica da função por meio do seu gráfico, demonstrando domínio da transposição entre as representações verbal, gráfica e analítica, como mostra a figura 6.

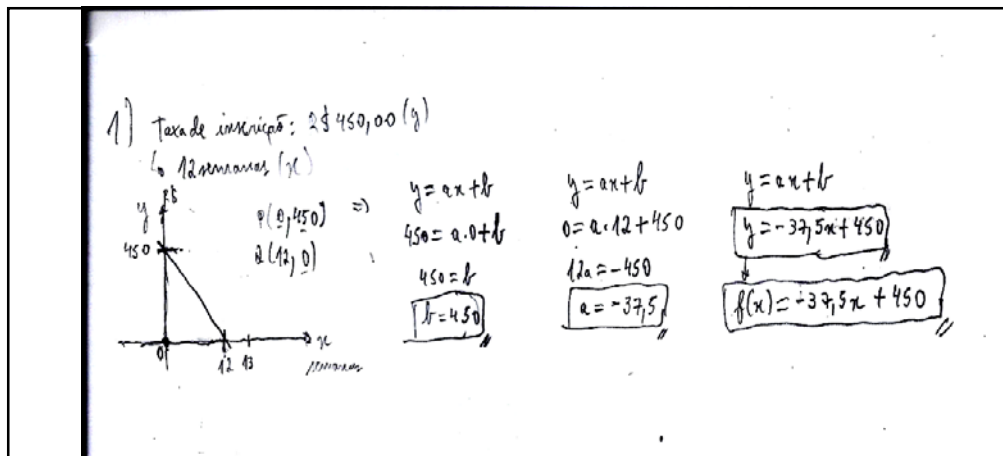


Figura 6. Resolução que denota a transposição entre as representações da situação problema.

- dificuldades na transposição da representação verbal para uma representação gráfica

Em sua pesquisa, Balomenos, Ferrini-Mundy e Dick (1994) apresentam diversos exemplos de problemas do Cálculo que poderiam ser facilitados, por uma abordagem adequada da geometria ensinada no Ensino Médio, desenvolvendo a prontidão para o Cálculo. Os autores afirmam que

o verdadeiro desafio está na habilidade de desenvolver uma representação geométrica de situações físicas a partir de uma descrição verbal complicada. Muitas vezes, a chave da solução consiste em resolver um problema geométrico em que o tempo é “congelado. (p. 247)

Essa dificuldade foi observada em nossa pesquisa, na resolução do seguinte problema de taxas relacionadas:

Um tanque tem a forma de um cone invertido, com 36 m de altura e uma base com 9 m de raio. A água flui no tanque a uma taxa de $4 \text{ m}^3/\text{min}$. Com que velocidade o nível da água estará se elevando no instante em que sua profundidade for de 15 m? Dado: $V_{\text{cone}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

Figura 7. Questão de taxas relacionadas

A Figura 8 mostra a solução de um aluno que aplicou corretamente a razão de semelhança para encontrar o raio correspondente à profundidade de 15 m, mas substituiu a altura por 15 antes de derivar.

Handwritten student work for a related rates problem involving a cone. The student starts with a cone of height 36m and radius 15m. They calculate the volume $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$. Then they find the radius $r = 15$ and calculate the area of the base $A = 225\pi$. They then differentiate the volume formula with respect to time, getting $\frac{dV}{dt} = \pi r^2 \frac{dh}{dt}$. They substitute $r = 15$ and $\frac{dV}{dt} = 4 \text{ m}^3/\text{min}$, getting $4 = \pi \cdot 15^2 \cdot \frac{dh}{dt}$. They solve for $\frac{dh}{dt}$, getting $\frac{dh}{dt} = \frac{4}{225\pi}$. They then differentiate the area formula with respect to time, getting $\frac{dA}{dt} = 2 \pi r \frac{dr}{dt}$. They substitute $r = 15$ and $\frac{dA}{dt} = 150\pi \text{ m}^2/\text{min}$, getting $150\pi = 2 \pi \cdot 15 \cdot \frac{dr}{dt}$. They solve for $\frac{dr}{dt}$, getting $\frac{dr}{dt} = 5$. They then use the Pythagorean theorem to find the final radius $r = 37.5$. Finally, they calculate the final volume $V = \frac{1}{3} \pi \cdot 37.5^2 \cdot 36 = 1575\pi$.

Figura 8. Erro típico em questões de taxas

- dificuldades em questões de máximos e mínimos

Na resolução de problemas de máximos e mínimos observamos grande número de erros no trato algébrico, na sentença matemática que equaciona o problema e no cálculo de derivadas. A figura 9 a solução de um aluno, que cometeu erro ao equacionar o problema.

Uma caixa sem tampa deve ser construída de um pedaço retangular de papelão com dimensões 8 dm por 5 dm. Para isso, deve se retirar quadrados de lado x de cada canto e depois dobrar, conforme mostra a figura. **Expresse o volume V da caixa como uma função de x .**

Handwritten student work for a problem about maximizing the volume of a box made from a rectangular piece of cardboard. The student starts with a rectangle of dimensions 8 dm by 5 dm. They show a diagram of the rectangle with squares of side x removed from each corner. They then calculate the volume $V = x \cdot (8 - x) \cdot (5 - x)$. They expand this to $V = 40x - 13x^2 + x^3$. They then differentiate V with respect to x , getting $\frac{dV}{dx} = 40 - 26x + 3x^2$. They set $\frac{dV}{dx} = 0$ and solve for x , getting $x = 1.3$. They then calculate the volume $V = 1.3 \cdot (8 - 1.3) \cdot (5 - 1.3) = 28 \text{ dm}^3$. They also calculate the volume $V = 8 \cdot 5 \cdot 6 = 36 \text{ dm}^3$.

Figura 9. Erro ao equacionar um problema de máximos e mínimos

Recomendações para minimizar as dificuldades:

Com base nas pesquisas citadas e na experiência dos membros do grupo, algumas ações podem ser destacadas como favoráveis à superação de obstáculos, à construção do conceito de função e ao domínio do traçado de gráficos, minimizando as dificuldades.

- ✓ **o reconhecimento de padrões em sequências de figuras constitui uma boa prontidão para o conceito de função**, que pode ser explorado desde os primeiros anos do Ensino Fundamental. Cândido (2000) relata uma experiência propondo um caráter dinâmico para o ensino de funções. Inicialmente, a ênfase é na familiarização com a variação de grandezas, observando a dependência entre as variáveis. A seguir, numa segunda etapa, as atividades abordam a análise e comparação de variações, em que as grandezas são diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou nem direta nem inversamente proporcionais. A partir daí, passa-se à familiarização com as idéias que dão suporte ao conceito de função do 1º grau, com suas características algébricas e geométricas. A seguir é apresentada uma atividade proposta nesse trabalho.

- ✓ **as progressões devem ser tratadas como funções, cujo domínio é o conjunto dos números naturais.**

Está é uma recomendação destacada anteriormente na citação do Pcn/EM (1999, p.225), e reforça a idéia de relacionar o tópico de funções com outros conteúdos da Matemática e de outras Ciências.

- ✓ **é recomendável o uso de transformações no plano para chegar ao gráfico pretendido por meio de translações e reflexões nos gráficos básicos.**

Os alunos devem ser incentivados a traçar gráficos de funções afim e quadráticas usando transformações a partir dos gráficos básicos de $y = x$ e $y = x^2$, respectivamente. A Figura 10 mostra as transformações aplicadas à parábola $y = x^2$ para obtenção da parábola $y = x^2 - 4x + 3$. É preciso completar o quadrado e expressar essa função por $y = (x - 2)^2 - 1$.

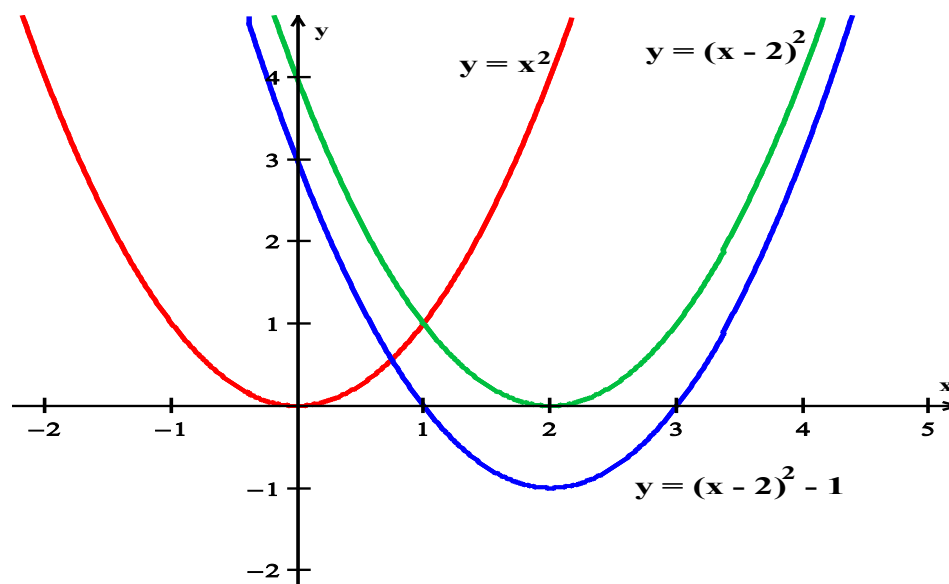


Figura 10. Gráfico obtido a partir de translações

Esse método também pode ser usado, em Cálculo I, para traçar gráficos de funções envolvendo $y = \ln(x)$ e $y = e^x$. Mais adiante, em Cálculo III, o mesmo procedimento pode ser usado com funções de duas variáveis, para facilitar a identificação de parabolóides, cones, cilindros e esferas por meio de transformações de superfícies centrais básicas (Nasser, 2009, p.52). Numa turma habituada com essa estratégia em Cálculo I, foi constatado o raciocínio de um aluno de Cálculo II, que utilizou a translação de gráficos para resolver a seguinte questão:

Determine todos os pontos de interseção das cardioides:

$$R = 1 + \cos \theta \quad \text{e} \quad R = 1 - \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

O objetivo era que os alunos igualassem as duas equações polares, percebendo que os pontos de interseção se referem ao ângulo θ que satisfaz à igualdade $\cos \theta = -\sin \theta$, ou seja, $\theta = \frac{3\pi}{4}$ ou $\theta = \frac{7\pi}{4}$. No entanto, um aluno apresentou a solução mostrada na figura 11, aplicando a translação de gráficos, enfatizada em outro contexto.

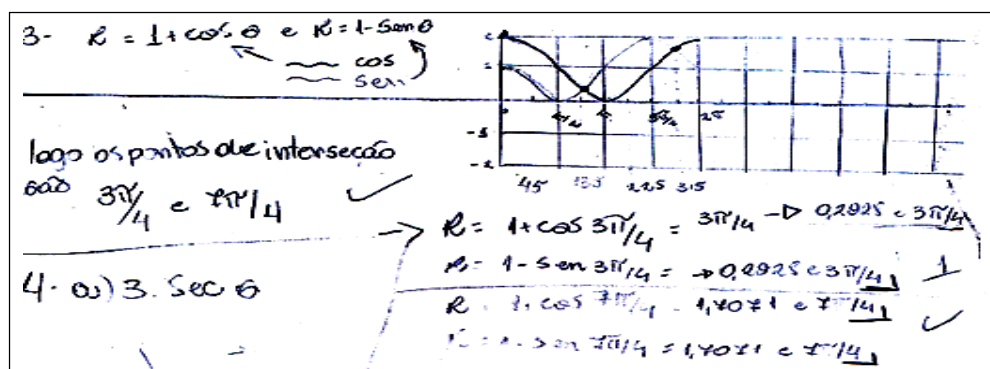


Figura 11. Solução de um aluno de Cálculo II usando transformações.

- ✓ a tecnologia pode ser utilizada para a observação de modificações no traçado de gráficos.

Perspectivas de melhoria do ensino-aprendizagem podem ser criadas com o uso de softwares para visualizar gráficos de funções (Torraca, 2005), tais como Excel, Derive, Maple e Winplot. Além desses, podem ser usados o Geogebra e o Régua e Compasso, de fácil aplicação. Por exemplo, os alunos podem ser desafiados a investigar o que ocorre com o gráfico da função quadrática $f(x) = x^2 + b$ quando são feitas alterações nos coeficientes a , b e c , separadamente. Em particular, utilizando o Winplot, é possível traçar uma família de funções da forma $f(x) = x^2 + b$ quando o coeficiente de b varia no intervalo $-4 \leq b \leq 4$. O lugar geométrico dos vértices dessa função quadrática quando b varia é uma função quadrática da forma $f(x) = -x^2 + 1$, que pode ser observada na figura 12.

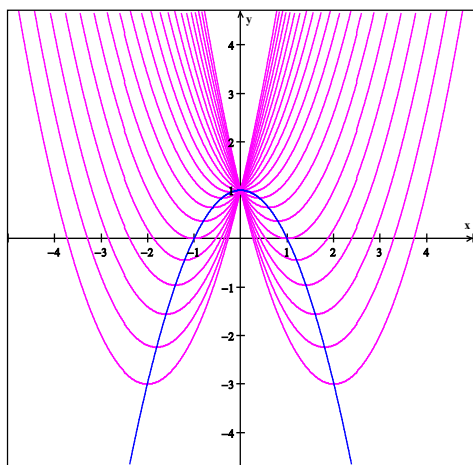


Figura 12. Lugar geométrico dos vértices do gráfico de $f(x) = x^2 + b$ quando o coeficiente b varia.

Considerações finais

As dificuldades na aprendizagem de Cálculo e em particular na aquisição do conceito de funções tem sido motivo de preocupação, gerando vários trabalhos de pesquisa. O objetivo deste trabalho é empreender mobilizações didáticas para a aprendizagem significativa do conceito de funções e das estratégias para a resolução de problemas em Cálculo. Resultados de pesquisas indicam a existência de alguns obstáculos epistemológicos para a aquisição desse conceito, como a concepção ingênua de que o gráfico de uma função não precisa ser exato, a concepção de que apenas relações representáveis por fórmulas analíticas são dignas de serem chamadas funções, a

crença de que o gráfico de uma função é obtido marcando alguns pontos no plano cartesiano e unindo-os por segmentos de reta. Destacam-se ainda as dificuldades na transposição entre as representações verbal (descrição da situação problema), analítica (expressão por meio de uma função ou equação) e gráfica.

Foram aplicadas atividades investigativas a alunos do Ensino Médio e de cursos de Cálculo, que comprovaram a existência desses obstáculos. A análise das soluções e dos erros desses alunos a questões propostas sobre diversos aspectos do conceito de funções, sobre taxas relacionadas e sobre máximos e mínimos mostrou que a maioria dos erros se deve a lacunas na aprendizagem de Matemática da Escola Básica. Isso indica a necessidade de uma abordagem significativa dessa disciplina, visando ultrapassar possíveis obstáculos. Considerando a evolução histórica do conceito de função e as sugestões de Caraça, é possível desenvolver uma abordagem moderna para esse tópico, baseada na observação de fenômenos. A tecnologia pode ser usada para facilitar a visualização e a construção desse conceito pelos alunos. Desse modo, os resultados indicam que uma abordagem adequada de alguns tópicos da Educação Básica, como o de funções, pode minimizar as dificuldades e a reprovação na disciplina de Cálculo I.

Referências

- Balomenos, R., Ferrini-Mundy, J. e Dick, T. (1994). Geometria: prontidão para o Cálculo. In: M. Lindquist e A. Shulte (org.). *Aprendendo e Ensinando Geometria*. Atual Editora, São Paulo.
- Bergeron, J. e Hercovics, N. (1982). Levels in the understanding of functions concept. *Proceedings of the Workshop of Functions*. Enschede, The Netherlands.
- Brasil (1999). *Ministério da Educação e Cultura. Orientações Curriculares para o Ensino Médio*. Brasília.
- _____. (2006). *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio*. Brasília.
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165-198.
- Caraça, B. de J. (1984). *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Livraria Sá da Costa Editora. Lisboa, Portugal.
- Duval, R. (2003). Registros de Representações Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In: Machado, Silvia D. A. (org.). *Aprendizagem em Matemática: Registros de Representação Semiótica* (pp. 11-33). Campinas: Papirus.
- Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational Studies in Mathematics* 21, 521-544.
- Nasser, L. (2009). Uma pesquisa sobre o desempenho de alunos de Cálculo no traçado de gráficos. In: Frota, M.C.R. e Nasser, L (org.). *Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates* (pp. 43-58). SBEM.
- Nasser, L., Sousa, G. & Torracca, M. (2012). Transição do Ensino Médio para o Superior: como minimizar as dificuldades em cálculo? *Atas do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* (em CD). SBEM: Petrópolis, RJ, Brasil.
- Palis, G. (2010). A transição do Ensino Médio para o Ensino Superior. *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática* (em CD). Salvador, BA.
- Rezende, W. (2003). O ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica. In: Machado, N.J. e Cunha, M.O, *Linguagem, Conhecimento, Ação – Ensaios de Epistemologia e Didática* (pp. 313-336). Escrituras Editora, São Paulo.

- Robert, A. e Schwarzenberger, R. (1981). Research in teaching and learning Mathematics at an advanced level. In: David Tall (Ed.): *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers, The Netherlands.
- Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In: Dubinsky, E; Harel, G (Ed.) *The Concept of Function: aspects of epistemology and Pedagogy* (pp. 25-58). MAA Notes.
- Tall, D. (Ed.) (1991). *Advanced Mathematical Thinking*. Dordrecht, Kluwer Academic Publ.
- Tinoco, L. A. A.(coord.) (1989). *Construindo o Conceito de Função*. ProjetoFundão. IM- UFRJ.
- Torraca, M. A. A. (2005). *Um estudo sobre álgebra em sistemas computacionais formativos*. Dissertação (Mestrado em Informática), NCE – UFRJ.

Cálculo Diferencial e Integral, e Tecnologias Digitais: o que propõem os livros didáticos de Cálculo?

Andriceli **Richit**

Instituto Federal Catarinense, Campus Concórdia.

Brasil

andricelirichit@gmail.com

Adriana **Richit**

Universidade Federal da Fronteira Sul, Campus Erechim.

Brasil

adrianarichit@gmail.com

Maria Margarete do Rosário **Farias**

Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus, Bahia.

Brasil

margarete333@hotmail.com

Resumo

Considerando o modo como conceitos de Cálculo são apresentados nos livros didáticos, e a preocupação de educadores matemáticos, que principiou com o movimento da Reforma do Cálculo – na qual propõe-se a integração das tecnologias digitais como uma maneira de tornar os conceitos significativos para os estudantes –, realizamos um exercício de compreender o modo como a componente tecnológica tem sido privilegiada em livros de Cálculo, possibilitando abordagens que ultrapassem a abordagem algébrica dos conceitos. Assim, tomamos livros didáticos adotados em Cursos de Matemática (na modalidade licenciatura e bacharelado) em seis unidades universitárias estaduais paulistas fazendo uma análise comparativa entre as obras, buscando evidências de como a abordagem visual, pautada no uso de tecnologias, é privilegiada. Da análise desenvolvida, evidenciamos fragmentações na apresentação de alguns tópicos em algumas obras e um brusco movimento de mudança em obras atuais ao trazer algumas abordagens considerando a utilização das tecnologias.

Palavras chave: cálculo diferencial e integral, tecnologias digitais, livros didáticos, educação matemática, geogebra.

Considerações Iniciais

Mundialmente, cursos de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) têm como subsídio básico a utilização de livros didáticos. Estes constituem-se em um importante suporte para o Curso, quer seja para a leitura primeira dos alunos, quer seja como complemento das aulas ministradas, quer seja como motor da realização de pesquisas por parte dos discentes ou, até mesmo, para a resolução de exercícios (Weinberg, 2010).

Assim, a abordagem dos conceitos presentes em um livro de Cálculo revela indícios de como os conceitos podem ser construídos. Considerando o modo como os conceitos de Cálculo se apresentam nos livros didáticos, e a preocupação da comunidade de Educação Matemática que principiou com o movimento da Reforma do Cálculo a partir do século XX, enfatizando a qualidade dos processos de ensino aprendizagem e propondo a integração da tecnologia como uma maneira de tornar os conceitos mais significativos para um maior número de estudantes (Tall, Smith & Piez, 2008), nos dedicamos a analisar o modo como a abordagem visual, pautada no uso de tecnologias, tem disso privilegiada em livros didáticos de Cálculo Diferencial e Integral.

Conforme Richit (2010), as mudanças referentes ao ensino de CDI ancoradas no movimento da Reforma do Cálculo sugerem: a) mudança no foco do ensino de Cálculo, atentando para ideias fundamentais ao invés de enfatizar regras, técnicas e procedimentos; b) mostrar a importância e aplicação do Curso de Cálculo em diversas áreas do conhecimento bem como no campo de Educação Matemática e c) introdução das tecnologias da informação e comunicação no currículo de Cálculo (Frid, 1994).

Porém, ao sugerirmos que o processo de ensino e aprendizagem de Cálculo necessita ser modificado de acordo com o que propõe a Reforma do Cálculo, não estamos sugerindo que tais cursos devam simplesmente ser modernizados no sentido de utilizar calculadoras gráficas, computadores, softwares ou quaisquer recursos das tecnologias informáticas de representação gráfica. Entendemos, sim, que em um curso de cálculo, os CAS (Computer Algebra System) ou demais recursos tecnológicos não transformarão estudantes com grandes dificuldades em Matemática em grandes matemáticos, mas estes podem proporcionar melhores entendimentos acerca dos conceitos estudados (Richit, 2010).

Nessa perspectiva, Miskulin, Escher e Silva (2007) destacam que a implementação de atividades que levem em conta a utilização de recursos tecnológicos, resgata a exploração de conceitos matemáticos por meio de uma abordagem metodológica diferenciada que auxilia no processo de exploração, visualização e representação do conceito matemático.

Considerando a natureza dinâmica do Cálculo, acreditamos que esta característica dificilmente seja trabalhada em um ambiente tradicional de ensino, no qual priorizam-se estudos de natureza algébrica, onde o foco das atividades centra-se na busca de soluções para os problemas apresentados, expressas por fórmulas fechadas e técnicas específicas para resolução de determinados problemas. A respeito da utilização de recursos tecnológicos no contexto do ensino e aprendizagem da Matemática, Villarreal (1999, p.362) diz que

[...] o computador pode ser tanto um reorganizador quanto um suplemento nas atividades dos estudantes para aprender Matemática, dependendo da abordagem que eles desenvolvam nesse ambiente computacional. Do tipo de atividades propostas, das relações que for estabelecida com o computador, da frequência no uso e da familiaridade que se tenha com ele.

Observa-se, nessa perspectiva, que a literatura de um modo geral e os pesquisadores da área, cujo interesse centra-se na articulação das tecnologias da informação e comunicação (TIC) aos processos de ensinar e aprender CDI, têm argumentado que as TIC são extremamente importantes na discussão de atividades que podem ser trabalhadas de modo algébrico e também as que não podem, trazendo consigo a possibilidade de remover um pouco do “fardo” algébrico inerente a esta disciplina.

Além disso, as TIC caracterizam-se como recursos que favorecem a constituição de ambientes investigativos de aprendizagem na medida em que propiciam o fortalecimento das relações entre os sujeitos do processo, bem como por propiciar questionamentos, reflexões, análises e fazem com que a sala de aula se torne espaço de diálogo, possibilitando ao estudante propor e verificar conjecturas, construindo, assim, conhecimentos sobre CDI.

Embora visualizemos no cenário acadêmico um movimento de articulação das TIC aos processos de ensinar e aprender CDI, tal movimento decorre de iniciativas individuais. Nesse sentido, alguns livros didáticos têm sido permeados, de maneira incipiente, por abordagens pedagógicas que fazem alusão a utilização de alguns softwares matemáticos no estudo de conceitos de CDI. É a este ponto que nos debruçaremos neste artigo.

Considerando todo o movimento de articulação das TIC aos processos de aprender e ensinar CDI, realizamos um exercício de compreender de que modo a componente tecnológica tem sido privilegiada em livros de Cálculo, possibilitando abordagens que ultrapassem a abordagem algébrica dos conceitos. Deste modo, o presente artigo está assim estruturado: inicialmente traz uma breve revisão da literatura que discute as potencialidades das TIC nos processos de ensinar e aprender CDI; na sequência apresenta uma descrição da processualidade metodológica relativa ao uso de TIC no estudo de Cálculo; por conseguinte traz uma análise dos livros didáticos de Cálculo, focando a presença das TIC na abordagem dos conceitos; por último expõe algumas considerações finais relativas à análise empreendida.

Cálculo Diferencial e Integral e Tecnologias Digitais: Possibilidades para a abordagem de conceitos

Miskulin, Escher e Silva (2007) ressaltam que a utilização das atividades que tomam a utilização de recursos tecnológicos como complemento à abordagem de conceitos de CDI, propicia um enfoque diferenciado, o qual possibilita a exploração e a visualização, bem como a coordenação de diferentes representações dos conceitos matemáticos. A título de exemplo, a coordenação e mobilidade das representações em uma perspectiva semiótica, foco da dissertação de Farias (2007), foram evidenciadas em uma atividade envolvendo o conceito de continuidade que contava com o Winplot. Esta atividade consistia em avaliar a continuidade da função

$$f(x) = \begin{cases} kx^2 + 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 3 & \text{se } x > 1 \end{cases}.$$

No despontar das discussões sobre a referida atividade os estudantes afirmaram, intuitivamente, que tratava-se de uma função contínua. Na sequência, lançam mão do recurso “animação” do software Winplot para verificar, a partir da visualização da representação da função, o que haviam conjecturado inicialmente. Entretanto, somente ao animarem a função, fazendo variar o parâmetro k , é que puderam visualizar que para $k = -2$ a função tornava-se contínua. Também pautaram-se na abordagem algébrica para comprovar a conjectura inicial.

Observemos, assim, que em face dos processos de investigação e exploração matemática realizados pelos estudantes com o software Winplot, as dúvidas foram se esclarecendo. Ademais, puderam confrontar as conclusões produzidas a partir das investigações realizadas com o software àquela obtida pela manipulação algébrica da função. Ou seja, por meio da coordenação de representações matemáticas puderam repensar sobre o “equivoco” cometido sobre a afirmação inicialmente feita.

Menk (2005) desenvolve uma investigação sobre Máximos e Mínimos de Funções, principalmente àqueles que estão relacionados a conceitos e propriedades geométricas, tomando como apoio o software Cabri-Géomètre II. Dentre as atividades propostas, uma delas consistia em encontrar a forma mais econômica de instalar um cabo de eletricidade, que ligava uma usina hidrelétrica situada à margem de um rio de 900 metros de largura a uma fábrica situada na outra margem do rio, 3000 metros a jusante da usina. Nesse problema considerava-se que o custo de instalação do cabo submerso era de R\$ 25,00 por metro, enquanto que em terra era de R\$ 20,00 por metro.

Após a construção desta situação no Cabri-Géomètre II, depois de um amplo processo de experimentação matemática e intensa discussão, os estudantes apresentam uma proposta sobre a forma como o cabo deveria ser ligado de modo a minimizar o custo de instalação.

Assinalamos que tais conjecturas só foram possíveis quando os estudantes compararam as duas situações representativas do custo mínimo e máximo para instalação do cabo, articulando as representações gráficas produzidas no software Cabri e, também, a representação algébrica esboçada em papel.

Ao final da investigação Menk (2005) destaca que esses procedimentos podem criar condições, que possibilitam facilitar a interpretação, a observação, a análise e a resolução dos problemas considerados. A forma como foram desenvolvidas as atividades, privilegiando a simulação e a visualização, permitiram criar situações nas quais se pôde “ver” o processo de como se desenvolveu o raciocínio dos alunos em várias situações.

Em seu doutoramento, Javaroni (2007) analisou possibilidades de ensino e aprendizagem de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) com estudantes do Curso de Matemática, trabalhando em uma perspectiva de abordagem qualitativa com alguns modelos matemáticos (modelos de objeto em queda, de crescimento populacional de Malthus, de crescimento populacional de Verhulst e da lei de resfriamento), auxiliada por planilhas do Excel, dos softwares Winplot e Maple e alguns applets. A partir do estudo a autora destaca que ao trabalhar seguindo esta abordagem fica evidente que a interação dos alunos com as TIC propiciou novas possibilidades para a abordagem qualitativa dos modelos estudados. Ademais, sugere a necessidade de repensar o ensino das EDO, enfatizando o aspecto geométrico de modelos matemáticos, além do aspecto algébrico.

Sumarizando, os estudos mencionados nessa seção, embora sejam sustentados por vieses teóricos distintos, evidenciam o importante papel do aspecto visual da abordagem dos conceitos matemáticos, cuja representação gráfica possibilita uma perspectiva mais ampla desses conceitos e a noção de totalidade do conhecimento matemático. Dando continuidade a nossa discussão trazemos, na próxima seção do artigo, a perspectiva teórica subjacente à análise empreendida em nosso estudo.

Perspectiva Teórica do Estudo

Tomamos por pressuposto teórico o entendimento de que o aspecto visual, que é privilegiado na abordagem de conceitos de CDI por meio de representações gráficas de funções, as quais permitem analisar características importantes da situação em estudo, permite uma análise ampla de um conceito matemático. Sobre isso Dugdale (1993) e Schwartz et al. (1993) reconhecem a necessidade de um melhor entendimento do aluno no que diz respeito ao gráfico de funções, os quais possibilitam compreensões que partem de um aspecto visual.

Sobre a questão do aspecto visual, materializado por representações gráficas, estas muitas vezes seguem uma abordagem apenas de observação, ou seja, os alunos fazem a construção e apenas a observam, sem conseguir pensar ou vislumbrar outras possibilidades a partir daquele gráfico. Este é também um procedimento bastante frequente nos livros didáticos de CDI, onde os alunos não sabem por que fazem o que fazem e a atividade acaba tornando-se mecânica. Além disso, nos cursos de CDI aborda-se famílias de funções, cujo tratamento gráfico apresenta-se de modo falho, entre tantos outros conceitos que possuem natureza dinâmica, mas a representação segue uma natureza estática.

Aspectos Metodológicos da Análise

Este estudo foi guiado pela seguinte questão: O que os livros didáticos usados em cursos de matemática sugerem quanto à construção de conceitos e estratégias de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral a partir das TIC? Em outras palavras, preocupamo-nos sobre o modo como livros didáticos de CDI abordam qualitativamente conceitos da disciplina supracitada considerando a componente tecnológica, analisando-se o tipo de abordagem pedagógica proposta, entre outras coisas.

Para tanto, tomamos as ementas da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral de seis unidades universitárias paulistas (UNESP), a saber: Bauru, Guaratinguetá, Ilha Solteira, Presidente Prudente, Rio Claro e São José do Rio Preto. Nestas ementas, encontramos um total de vinte e cinco livros textos indicados como referência para o Curso de CDI.

Dos livros encontrados, tomamos para análise aqueles que propunham alguma abordagem de conceito matemático considerando a utilização de softwares gráficos, de calculadoras gráficas ou planilhas eletrônicas.

Dentre os livros clássicos de Cálculo Diferencial e Integral citados nas seis unidades universitárias consultadas, constatamos que a coleção de Hamilton Luís Guidorizzi é adotada em todas elas. As coleções de Diva Fleming & Mirian Gonçalves, Earl Swokowski e Louis Leithold são adotadas em cinco unidades universitárias pesquisadas. A obra de James Stewart é referenciada em quatro unidades universitárias, a obra de George Thomas em três e as obras de Mustafá Munen & David Foulis e Howard Anton são referenciadas em duas unidades universitárias. Por fim, as obras de Geraldo Ávila, Alberto Flávio Aguiar et al, Howard Anton et al, Ron Larson et al, Henry Edwards & David Penney, Robert Hostetler, Paulo Boulous, Al Shenk, Richard Courant e Fritz John, Plácido Táboas, Martin Braun, Valéria Medeiros & Fred Safier são mencionadas nos programas curriculares de Cálculo de apenas uma unidade universitária.

A análise empreendida sobre os vinte e cinco livros didáticos indicados nas ementas dos cursos de CDI nas seis unidades universitárias, revela que destes apenas um faz menção a utilização de alguma tecnologia na abordagem dos conceitos: James Stewart. Nessa obra identificamos algumas proposições de atividades matemáticas que tomam as TIC na abordagem de conceitos de CDI. O autor enfatiza que a disponibilidade das tecnologias como calculadoras gráficas e computadores constituem-se em ferramentas valiosas na descoberta e compreensão dos conceitos. Sob esse entendimento, em alguns exercícios há referência à utilização de algum recurso não sendo este recurso especificado e em outros momentos, é sugerida a utilização de CAS, tais como o software Derive e o Mathematica ou a calculadora TI-82. Entretanto, o autor deixa claro que o uso desses recursos não exclui o uso de lápis e papel e das técnicas algébricas comumente empregadas em aulas de CDI.

Analizando as atividades que sugerem a utilização de CAS no estudo de conceitos de CDI, evidenciamos que as mesmas, do modo como estão propostas, não exploram satisfatoriamente as potencialidades das TIC, recursos esses que possibilitam conjecturar e testar ideias, além de propiciar a experimentação matemática (Villarreal, 1999). Nessa perspectiva consideramos que a componente informática nas atividades propostas nesse livro didático serve apenas como ambiente para a “observação” ao estudante, sem que ele experimente e observe o que acontece com a situação em estudo. Ou seja, a proposição de uso das TIC nessas atividades consiste na ilustração de alguma ideia ou conceito matemático.

A análise evidencia, também, que as TIC ainda não são tomadas na abordagem dos conceitos na maioria dos livros didáticos. Além disso, observamos que edições mais antigas de livros não fazem menção as TIC, aspecto esse que pode estar associado ao fato de que este movimento iniciou por volta dos anos oitenta, com o movimento da Reforma do Cálculo, já que o Cálculo foi a área da Matemática que recebeu os primeiros investimentos neste sentido. Com relação aos livros que trazem alguma investigação que tome a utilização das tecnologias, notadamente livros mais atuais, são os que seguem esta linha metodológica. Entretanto, os livros didáticos de modo geral, ainda não trazem a investigação de conceitos como Limites, Derivadas e Integrais que ultrapasse apenas a observação. Tomemos a definição de Limite, por exemplo, conforme expressa Guidorizzi (2001, p. 72):

Sejam f uma função e p um ponto do domínio de f ou extremidade de um dos intervalos que compõem o domínio de f . Dizemos que f tem limite L , em p , se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existir um $\delta > 0$ tal que, para todo $x \in D_f$, $0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$. Tal número L , que quando existe é único, será indicado por $\lim_{x \rightarrow p} f(x)$. Assim,

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tal que, para todo } x \in D_f \\ 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \end{cases}.$$

A compreensão inerente ao conceito de Limite apresenta-se de modo caótico aos estudantes. Ademais, a definição épsilon-delta muitas vezes é motivo de caos, pois o estudante muitas vezes não entende que “para qualquer epsilon > 0 deve existir um delta > 0 , tal que $|f(x) - L| < \text{epsilon}$ sempre que $0 < |x - a| < \text{delta}$.” Entretanto, por meio das tecnologias, tomando, por exemplo, o Software GeoGebra, o estudante pode através da simulação, experimentar, e visualmente observar: será que para cada delta, tão pequeno que seja, encontrará um épsilon correspondente?

Para ilustrar, tomemos o seguinte exemplo: Seja a função dada por $f(x) = x + 1$. Avalie o que acontece com os valores de y quando x se aproxima de 2 (pela direita e pela esquerda). Seguindo a natureza algébrica, o estudante pode utilizar-se da definição e encontrar o limite da função dada, sendo este limite igual a 3. Entretanto, muitos estudantes apenas calculam o valor do limite pela definição, sem compreender o que de fato este conceito representa. Por outro lado, a abordagem gráfica, conforme apresentamos a seguir, oportuniza ao estudante que ele reflita sobre a definição e compreenda o que o limite geometricamente significa. O aspecto ao qual nos referimos é expresso na figura a seguir:

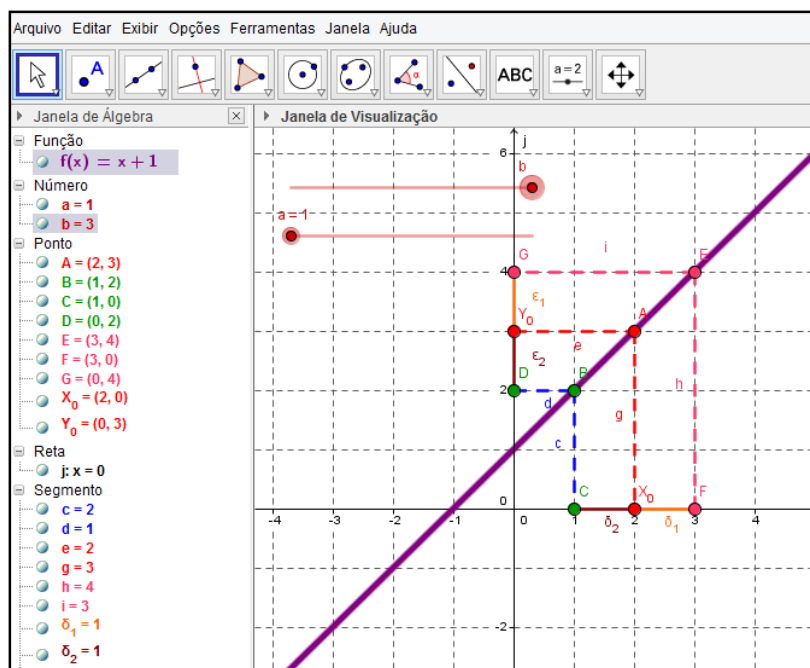


Figura 1. Representação do Limite da Função $f(x) = x + 1$ na vizinhança de 2.

Lançando mão do recurso animar do GeoGebra, o estudante pode ensaiar: o que acontece visualmente com o Limite da função quando x se aproxima de 2 pela direita e esquerda? A figura que segue ilustra a situação:

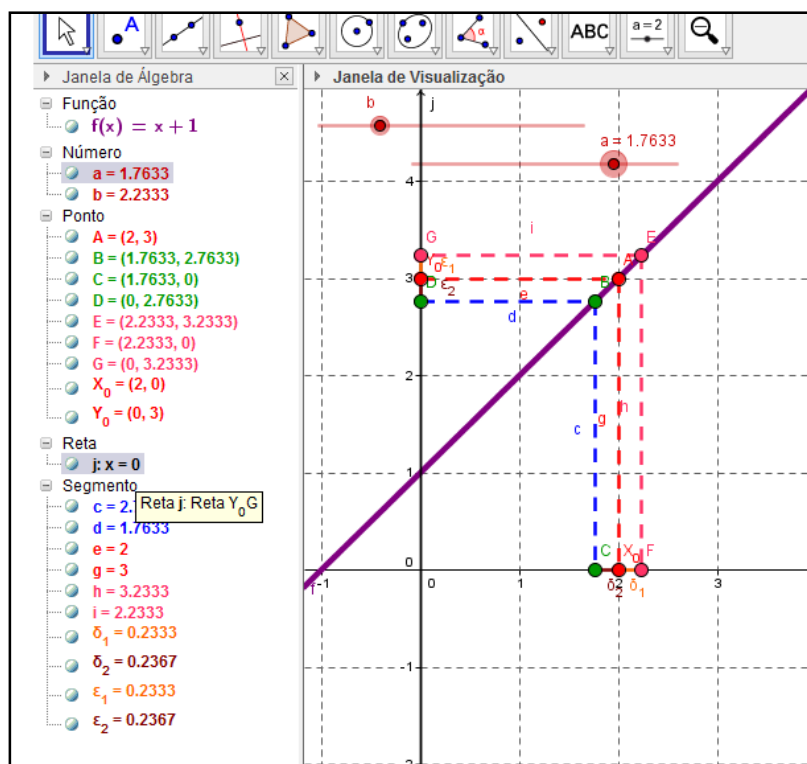


Figura 2. Representação do Limite da Função $f(x) = x + 1$ na vizinhança de 2, quando ϵ e δ estão próximos de zero.

Por fim, por acreditarmos nas possibilidades de uma abordagem de “construção” de conceitos, na qual o estudante possa ter uma compreensão abrangente dos conteúdos, e não apenas observacional, como se as TIC viessem apenas para aperfeiçoar a construção dos gráficos que podem ser feitos em lápis e papel, argumentamos em favor da incorporação desses recursos nas práticas pedagógicas em CDI e da necessidade de uma revisão nos livros didáticos adotados nesses cursos, como uma forma de fomentar novos modos de ensinar e aprender Cálculo.

Considerações Finais

Este artigo aponta para uma linha metodológica na qual o algebrismo não seja a única maneira de representação dos problemas do CDI e tal proposta pressupõe que a abordagem de conceitos de CDI propicie uma compreensão mais integral considerando o aspecto visual bem como a coordenação das múltiplas representações, na qual quando possível os problemas devem ser abordados em contextos algébricos, gráficos e numéricos. A possibilidade de estratégias multirepresentadas possibilita uma leitura mais completa dos problemas, a qual, por sua vez, pode ser privilegiada por meio da inserção de softwares como ambientes de investigação matemática.

Conforme já assinalamos, buscamos evidenciar dentre livros didáticos utilizados em Cursos de CDI em universidades estaduais paulistas, aqueles que faziam menção a utilização das TIC na abordagem de seus conceitos. Dos vinte e cinco livros, apenas três deles fazem menção a utilização da TIC, sendo que apenas um propõe atividades pautadas no uso desses recursos.

Diante desse cenário e considerando que as TIC possibilitam mudanças qualitativas em termos das abordagens matemáticas, argumentamos em favor da incorporação desses recursos nas práticas pedagógicas em CDI e a necessidade de uma revisão nos livros didáticos adotados nesses cursos, como uma forma de fomentar novos modos de ensinar e aprender Cálculo Diferencial e Integral.

Referências

- Aguiar, A. F. A., Xavier, A. F. S. & Rodrigues, J. E. M. (1988). *Cálculo para ciências médicas e biológicas*. Harbra: São Paulo.
- Anton, H. (2000). *Cálculo – Um novo horizonte*. Bookman: Porto Alegre.
- Ávila, G. S. de S. (1986). *Cálculo – vol. 1*. Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda.: Rio de Janeiro.
- Anton, H., Bivens, I. & Davis, S. P. (2007). *Cálculo*. 8. ed., vol.1. Bookman: Porto Alegre.
- Shenk, A. (1991). *Cálculo e Geometria Analítica*. vol. 1. Editora Campos Ltda.
- Boulos, P. (1999). *Cálculo Diferencial e Integral*. vol. 1. Makron: São Paulo.
- Braun, M. (1979). *Equações Diferenciais e suas aplicações*. Editora Campus, São Paulo.
- Courant, R. & John, F. (1965). *Introduction to Calculus and Analysis*, vol 1, John Wiley & Sons (Wiley-Interscience), New York.
- Dugdale, S. (1993). *Functions and Graphs. Perspectives on Student Thinking in Integrating Research on the Graphical Representation of functions* – Lawrence Erlbaum Associates, Publishers, Hillsdale, New Jersey.
- Edwards, C. H. & Penney, D. (1997). *Cálculo com Geometria Analítica*. vol. 1. 4ª ed. Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda.: Rio de Janeiro.

- Farias, M. M. do R. (2007). *As representações matemáticas mediadas por softwares educativos em uma perspectiva semiótica: uma contribuição para o conhecimento do futuro professor de matemática*. Master's Dissertation, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP.
- Flemming, D. M. & Gonçalves, M. B. (2006). *Cálculo A e Cálculo B*, 6ª ed. Pearson, Prentice Hall: Rio de Janeiro.
- Frid, S. (1994). Three approaches to undergraduate calculus instruction: Their nature and potential impact on students' language use and sources of conviction. In *Research in Collegiate Mathematics Education*. Vol. 1. Eds.
- Guidorizzi, H. L. (2006). *Um Curso de Cálculo*, vol. 1. Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda.: Rio de Janeiro.
- Hostetler, R. (1998). *Cálculo com aplicações*. 4ª ed Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda.: Rio de Janeiro.
- Javaroni, S. L. (2007). *Abordagem geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagem de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias*. Dissertação (Mestrado de Mestrado). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP.
- Larson, R. & Hostetler, R. & Edwards, B. (2006). *Cálculo*. vol. 1. McGraw-Hill: São Paulo.
- Leithold, L. (1994). *O Cálculo com Geometria Analítica*, 3ª Ed, vol. 1 e 2. Harbra: São Paulo.
- Medeiros, V. Z.. (coord.). (2009). *Pré-cálculo*. 2ª ed. Cengage Learning: São Paulo.
- Menk, L. F. F. (2005). *Contribuições de um software de geometria dinâmica na exploração de problemas de máximos e mínimos*. Dissertação (Mestrado de Mestrado). Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR.
- Miskulin, R. G. S., Escher, M. A. & Silva, C. R. M. (2007). A Prática Docente do Professor de Matemática no Contexto das TICs: uma Experiência com a Utilização do Maple em Cálculo Diferencial. *Revista de Educação Matemática*, 10, 29- 37.
- Munen, M. & David, F. (1982). *Cálculo*. vol. 1 e 2. Guanabara Dois: Rio de Janeiro.
- Richit, A. (2010). *Aspectos Conceituais e Instrumentais do Conhecimento da Prática do Professor de Cálculo Diferencial e Integral no Contexto das Tecnologias Digitais*. Master's Dissertation, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP.
- Safier, F. (2003). *Teorias e problemas de pré-cálculo*. Bookman: Porto Alegre.
- Schwartz, J. L. & Yerushalmy, M. E. (1993). *Seizing the opportunity to Make Algebra Mathematically and Pedagogically Interesting in Integrating Research on the Graphical Representation of functions*. Lawrence Erlbaum Associates, Plublishers, Hillsdale, New Jersey.
- Stewart, J. (2008). *Cálculo*. vol. 1 e 2. 5ª edição. Pioneira (Thompson Learning): São Paulo.
- Swokowski, E. (1995). *Cálculo com Geometria Analítica*, vol. 1, Makron Books do Brasil Editora Ltda: São Paulo.
- Táboas, P. Z. (2008). *Cálculo em uma variável real*. EDUSP, São Paulo.
- Tall, D., Smith, D. & Piez, C. (2008). Technology and calculus. In M. Kathleen Heid & G. M. Blume (Eds.). *Research on technology and the teaching and learning of mathematics Vol. I*, (pp. 207–258). New York: Information Age
- Thomas, G. (2009). *Cálculo*. vol. 1 e 2, 11ª ed. Pearson, Addison Wesley.

Villarreal, M. E. (1999). *O Pensamento Matemático de Estudantes Universitários de Cálculo e Tecnologias Informáticas*. Thesis's Dissertation, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP.

Weinberg, A. (2010). The implied reader in calculus textbooks. In P. Brosnan, D. Erchick, & L. Flevares (Eds.), *Proc. 32th Annual Meeting of the North American Chapter of the Int. Group for the Psychology of Mathematics Education Vol. 6* (pp. 105-113). Columbus, USA: PME.

Concepções de função de estudantes do ensino médio e superior

Rogério Fernando **Pires**

Universidade Estadual de Santa Cruz

Brasil

rfpires25@hotmail.com

Benedito Antonio da **Silva**

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

Brasil

benedito@pucsp.br

Resumo

O presente artigo é resultado de um estudo mais amplo que teve por objetivo identificar as concepções de função manifestadas por estudantes do Ensino Médio e Superior, e a partir delas desvelar algumas peculiaridades envolvidas no processo de aprendizagem desse conceito; tendo como fundamentação teórica as ideias de Sfard e Sierpinska. A pesquisa de caráter qualitativo, contou com a participação de 128 estudantes de duas escolas públicas de Ensino Médio e uma universidade pública localizadas no interior do estado de São Paulo. Os dados foram coletados por meio de duas listas de atividades que foram realizadas por todos os participantes em dois momentos distintos. Os resultados mostraram que no Ensino Médio as concepções transitavam entre a operacional e a estrutural, sendo muito presente a concepção pseudoestrutural, e no Ensino Superior as concepções eram bem próximas da estrutural, porém, não foi possível identificar a reificação do conceito.

Palavras chave: função, concepções de função, aprendizagem, obstáculos epistemológicos, ensino médio e superior.

Introdução

O conceito de função é um tema amplamente debatido no âmbito da Educação Matemática, as questões relacionadas ao ensino e a aprendizagem dessa noção frequentemente motivam a realização de pesquisas na área.

Uma das explicações para o grande volume de produções a respeito da temática pode residir no fato de que mesmo sendo um assunto bastante discutido, os fenômenos inerentes ao ensino e a aprendizagem da noção de função apresentam características intrínsecas que contribuem para a constituição de um vasto campo de exploração, do qual vários aspectos já foram desvelados, porém ainda existe muita coisa a ser investigada.

Nessa perspectiva, o presente estudo procurou trazer à tona algumas particularidades relacionadas a aprendizagem da noção de função que são reveladas por meio das concepções desse conceito que são apresentadas por estudantes dos ensinos Médio (alunos de 15 a 17 anos) e Superior, considerando que a concepção que o indivíduo apresenta sobre um objeto matemático tem relação estreita com o nível e profundidade do conhecimento que o sujeito carrega consigo sobre o assunto em questão.

No Brasil, documentos que orientam a atuação do professor como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, 1998), sugerem que o trabalho com as noções preeliminares de função tenha seu início nos anos finais do Ensino Fundamental e as orientações complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (PCN+, 2000) enfatizam que nesse nível de escolaridade, tal assunto deve ser explorado com mais intensidade e profundidade, devido a importância e a riqueza do tema no próprio Ensino Médio e para o prosseguimento dos estudos em nível Superior. Entretanto, apesar de toda a atenção dada ao assunto na Educação Básica brasileira, relatórios de macroavaliações como a do Sistema de Avaliação de Rendimento escolar do Estado de São Paulo (SARESP, 2010) e da Avaliação Nacional da Educação Básica (ANEB, 2009) mostram que os estudantes concluintes do Ensino Médio apresentam déficits no aprendizado quando o assunto em questão são as noções de função.

Diante desse panorama, a intenção dessa pesquisa foi trazer a tona alguns elementos que possam auxiliar no entendimento de como certas concepções apresentadas por estudantes estão relacionadas com o seu fazer Matemática e com o nível de entendimento apresentado por esses sujeitos no que se refere ao objeto função.

Fundamentação teórica

As dificuldades apresentadas pelos estudantes com a noção de função, tem sido foco de diversos estudos relacionados ao ensino e a aprendizagem de Matemática. Estudiosos como Sierpinska (1992) e Sfard (1992) ressaltam isso e enfatizam que na maioria das vezes eles não conseguem fazer ligações entre as diferentes representações: gráfica, algébrica, diagramas, sentenças que descrevem inter-relações, como também a interpretação de gráficos e a manipulação de símbolos que descrevem e representam funções, tais como: $f(x)$, $x \mapsto y$, $\sin(x + t)$, etc. Contudo, fazer tais relações e manipular tais símbolos não é tarefa simples, pois o que gerencia essas ações é o processo de compreensão que se trata de algo um tanto quanto complexo.

De acordo com Sfard (1992), os objetos matemáticos são vistos como algo inquestionável, pronto e acabado e é dessa maneira que as noções de um objeto matemático são apresentadas aos estudantes. Contudo, logo após essa introdução, espera-se que eles manipulem o novo objeto com a naturalidade de alguém que olha para ele como algo real que faça parte de sua vida. No entanto, muitos estudantes não são capazes de desenvolver essa habilidade, e não conseguem olhar e manipular os objetos matemáticos com tanta naturalidade. Basta olhar para o longo e difícil processo de nascimento de um objeto matemático para entender que o processo de compreensão é permeado de caminhos sinuosos e cheio de obstáculos. Então, a gênese do objeto pode ajudar a desvelar algumas das origens das dificuldades apresentada pelos estudantes.

Nessa direção, Sierpinska evidenciou dezesseis obstáculos epistemológicos relacionados ao conceito de função e dezenove ações importantes para a compreensão da noção desse mesmo objeto. Porém, para efeito desse trabalho, foram selecionados apenas quatro obstáculos e cinco ações. Quanto aos obstáculos epistemológicos, foram considerados os seguintes:

- 1) Identificação dos sujeitos da mudança ao identificar a mudança. Trata-se de um obstáculo relacionado ao fenômeno de transformação, que apresenta estreita relação com a noção de função, uma vez que transformação pode ser considerada pelo estudante como sendo um dos significados de função.

- 2) Uma heterogenia concepção de número. Outro fato que está relacionado à noção de função é o uso de letras na álgebra, assumindo o papel de número ou grandeza abstrata. Essa abstração não evidencia a distinção entre números discretos e grandezas contínuas. Na resolução de um problema, por exemplo, usamos algumas letras para denotar números ou grandezas contínuas, e essa distinção desaparece no momento em que manipulamos as equações. Durante essa manipulação, a letra assume papel de variável, a equação traduz uma relação quantitativa e, em algumas situações, a variável passa a ter domínio numérico.
- 3) Forte crença no poder das operações formais em expressões algébricas.
- 4) Apenas relações descritas por fórmulas analíticas (registros algébricos) são dignas de receber o nome de função.

Segundo a autora, nos séculos XVII e XVIII os matemáticos, na procura de meios para descrever relações, já haviam acumulado uma larga experiência com a diversidade dos resultados encontrados até aquele momento, e os mais bem-sucedidos eram aqueles obtidos por meio da relação de expressões analíticas. Assim, as ferramentas algébricas para descrever relações se tornam mais importantes do que as próprias relações.

Com relação as ações, as cinco que foram consideradas neste estudo são as seguintes:

- 1) Discriminação entre dois modos de pensamento matemático: Um em termos de quantidades conhecidas e desconhecidas, outro em termos de quantidades variáveis e constantes. Os papéis desempenhados pelas variáveis x e y no contexto funcional não são simétricos, por isso a importância de saber identificar a variável dependente e a independente, pois elas não desempenham o mesmo papel e uma não pode assumir o lugar da outra em uma relação funcional. Essa assimetria entre as variáveis, segundo Sierpinski, leva a segunda ação de compreensão.
- 2) Discriminação entre a variável independente e a variável dependente.
- 3) Discriminação entre uma função e as ferramentas analíticas (algébricas) usadas para descrever essas leis. Essa ação de compreensão tem um papel fundamental no entendimento do conceito de função, uma vez que uma relação funcional não está diretamente ligada a uma representação algébrica de tal relação.
- 4) Discriminação entre definições matemáticas e descrição de objetos.

A discriminação entre definição de um objeto e a descrição dele é fundamental para o processo de compreensão, pois isso ajuda a entender o verdadeiro sentido das definições, que não é descrever objetos, e sim determinar o objeto por ela definido. Isso faz com que o indivíduo desenvolva um poder de síntese, levando-o a uma concepção geral do objeto.

- 5) Discriminação entre os diferentes meios de representação de funções e as próprias funções.

Isso remete a uma discussão feita por Duval (2011) sobre a importância de não se confundir o objeto de conhecimento com a sua representação. A não distinção entre a representação e o objeto impede a compreensão do conceito.

Além das ações importantes para a compreensão da noção de função e dos obstáculos epistemológicos relacionados a esse conceito, também está em jogo o que Sfard (1992) chama de dualidade ontológica das concepções matemáticas. Ela destaca que normalmente um novo conceito é introduzido a partir de outro já conhecido pelos estudantes e cita como exemplo a

introdução dos números complexos que comumente é apresentado como um par ordenado (x, y) de números reais.

Essa abordagem que utiliza um conceito já conhecido como ponto de partida para chegar em outro, a autora chama de abordagem estrutural, na qual os conceitos que são familiares aos estudantes são tidos como os tijolos da construção de uma casa que vão se encaixando visando o produto final que é a casa. Na Matemática esses conceitos vão sendo utilizados visando o surgimento de um novo conceito, todavia, esse tipo de abordagem não possibilita um posicionamento crítico do aprendiz, uma vez que o ponto de partida normalmente é um conceito já conhecido e é tido como algo pronto e acabado, e o objetivo dessa abordagem é a combinação de estruturas visando um produto final, como na construção de uma casa que muitas vezes não há preocupação com o processo de edificação.

A autora ainda destaca que esse tipo de concepção estrutural parece prevalecer entre os matemáticos modernos, não sendo aceitas definições que admitam abordagens bastante diferentes, como a operacional, em que uma noção é concebida como um processo operacional e não como uma construção estática. Esse tipo de dualidade é muito frequente no tratamento de função, que em alguns casos descreve processos computacionais e em outros, relações estáticas.

Ao se referir a concepção operacional e estrutural, a autora está se reportando às crenças implícitas dos alunos sobre a natureza das construções matemáticas, e não à suas habilidades e competências, e ainda afirma que há a existência de uma concepção inferior a estrutural, a pseudoestrutural, que se manifesta quando o indivíduo descreve função como uma fórmula computacional, ao associar tal objeto a uma expressão algébrica.

Diante desse fato, pode-se questionar se não é natural associar função a uma expressão algébrica, haja vista que historicamente isso também aconteceu com Euler. No entanto, há uma grande diferença entre o conceito pseudoestrutural e o que aconteceu historicamente. Euler associava função a duas entidades distintas, as expressões analíticas e as curvas e sempre que possível procurava estabelecer uma relação entre elas. Já os estudantes têm uma forte tendência em associar função a uma expressão algébrica, mas o mesmo não acontece com mesma intensidade com os gráficos, e muitas vezes não vêem relação entre as duas representações.

Assim, as ideias aqui apresentadas procuraram evidenciar alguns aspectos envolvidos no processo de compreensão da noção de função que vão desde as concepções do sujeito até obstáculos relacionados a gênese do conhecimento (obstáculos epistemológicos).

Metodologia

O estudo de cunho qualitativo contou com a participação de 128 estudantes, sendo 73 alunos da primeira e terceira série do Ensino Médio de duas escolas públicas (instituição A e B) localizadas no interior do estado de São Paulo e 55 estudantes do Ensino Superior que cursavam o primeiro semestre dos cursos de licenciatura em Matemática, Física, Química e Biologia em uma universidade pública (instituição S) também localizada no interior de São Paulo.

Esses estudantes compuseram oito grupos, o GEM1A e o GEM3A – (Grupo de Estudantes da 1ª e 3ª série respectivamente do Ensino Médio da instituição A), o GEM1B e GEM3B – (formado por estudantes da 1ª e 3ª série do Ensino Médio da instituição B), o GESM, GESF, GESQ e GESB – (constituídos por alunos dos cursos em licenciatura em Matemática, Física, Química e Biologia da instituição S).

Os dados da pesquisa foram coletados por meio de duas listas de atividades contendo treze tarefas cada uma, relacionadas as noções de função que foram realizada pelos alunos em momentos distintos. A primeira lista denominada teste I foi apresentada aos estudantes do Ensino Médio de ambas as instituições no início do ano letivo, momento em que eles ainda não tinham estudado tal assunto na escola aquele ano. Já os estudantes do Ensino Superior tiveram contato com o teste I na primeira semana de aula do curso, pois durante o semestre cursaram uma disciplina chamada Fundamentos de Matemática Elementar 1, na qual tiveram contato com a noção de função.

A segunda lista que recebeu o nome de teste II continha as mesmas tarefas do teste I, porém organizadas em disposição diferente daquela apresentada no primeiro teste. Os alunos dos cursos de licenciatura realizaram o teste II no final do primeiro semestre, ou seja, por volta de quatro meses após a realização do teste I, já os do Ensino Médio desenvolveram a mesma lista de atividades oito meses após terem realizado o teste I, o que assegurava que todos os sujeitos já tivessem contato com a noção de função em suas respectivas instituições naquele período de tempo.

Quanto as atividades que compuseram os testes, para efeito de formatação desse relato, algumas serão apresentadas no momento discussão dos resultados. Contudo, vale frisar que as doze primeiras versavam sobre as funções afim e quadrática e envolviam no enunciado ou na realização as representações algébrica, gráfica, tabular ou em língua natural desses dois tipos de função. E a décima terceira era um questionamento, no qual foi perguntado para o estudante “qual é o significado de função?”; com essa pergunta o intuito era trazer a tona algumas concepções de função que eles explicitavam.

Análise e discussão dos resultados

Os resultados aqui apresentados e discutidos tratam de uma síntese da análise realizada na pesquisa, na tentativa de evidenciar os principais resultados obtidos. Nesse sentido, para efeito desse relatório foram destacadas algumas atividades que trouxeram resultados considerados mais significativos. Os dados aqui presentes ilustram os principais achados que foram recorrentes em todos os grupos.

Inicialmente destaca-se que foi possível notar que no testes I nas atividades realizadas pelos estudantes da 1ª série do Ensino Médio de ambas as instituições (A e B) que prevaleceu o que Sfard chama de aspectos computacionais, fato que permitiu que muitos alunos tivessem sucesso na realização de atividades como a representada pela figura a seguir.

Atividade 09: Um técnico em informática cobra R\$ 26,00 por hora de serviço mais um valor fixo de R\$ 14,60 de taxa de visita. Nessas condições, qual será o valor cobrado pela manutenção da rede de computadores de uma empresa que demorou 12 horas e 15 minutos para ser concluída?

(ESPAÇO PARA OS CÁLCULOS)

Resposta: R\$ 341,20

Figura 1. Atividade realizada no teste I por um estudante do GEM1A.

Essa predominância de procedimentos puramente computacionais foi observada em grande parte dos estudantes tanto do GEM1A, quanto do GEM1B no teste I (momento em que eles

ainda não haviam tido contato com a noção de função na escola) o que lhes garantiu sucesso na realização da tarefa. Contudo, no teste II para desenvolver a mesma atividade começam a fazer uso de procedimentos algébricos, conforme é possível observar na seguinte ilustração.

Atividade 10: Um técnico em informática cobra R\$ 26,00 por hora de serviço mais um valor fixo de R\$ 14,60 de taxa de visita. Nessas condições, qual será o valor cobrado pela manutenção da rede de computadores de uma empresa que demorou 12 horas e 15 minutos para ser concluída?

(ESPAÇO PARA OS CÁLCULOS)

$26 + 14,60 \times$
 $26 + 14,60 \cdot 12,15$
 $26 + 177,39$
 $R\$ 203,39$

Resposta: R\$ 203,39

Figura 2. Atividade realizada no teste II por um estudante do GEM1B.

A figura ilustra um fato que foi bastante recorrente nos dois grupos da 1ª série. No teste II momento em que os alunos já haviam estudando função, eles passaram a utilizar artifícios algébricos para realizar a mesma atividade que no teste I utilizavam procedimentos puramente aritméticos, e surpreendentemente eles passaram a apresentar erros no tratamento algébrico no teste II.

Uma explicação para esse fenômeno possa estar em um dos obstáculos epistemológicos elencados por Sierpinska, que é a crença no poder das operações formais em expressões algébricas, pois antes de terem um contato formal com a noção de função de função, os estudantes realizavam a atividade em questão sem muitos problemas fazendo uso de procedimentos aritméticos. Porém, no teste II após o contato com a noção de função, eles começaram a usar expressões algébricas na excussão da tarefa, o que leva a entender que para eles, o emprego de tais elementos algébricos seria agarrantia de sucesso na execução da tarefa, no entanto, o desempenho apresentado mostra o contrário, revelando resultados incorretos.

Ainda no GEM1A e GEM1B, no teste I quando foi perguntado qual o significado de função poucos alunos tentaram responder algo, a grande maioria dizia não saber. Já no teste II, foi possível observar a predominância da concepção pseudoestrutural, associando o objeto matemático a uma expressão algébrica, cálculos, etc., conforme mostra a figura.

Atividade 13: Explique com suas palavras qual é o significado matemático de função.

Bem não sei o que é, mas sei que tem alguma coisa com $F(x) = x^2$.

Atividade 13: Explique com suas palavras qual é o significado matemático de função.

Função significa, certos, expressões numéricas.

Figura 3. Atividade realizada no teste II por um estudante do GEM1A e outro do GEM1B

Pela figura, é possível notar que na segunda etapa da pesquisa, momento em que os estudantes tinham trabalhado com a noção de função em suas instituições, eles passaram a associar ao objeto Matemático uma de suas representações, o que segundo Sfard é indicio de

uma concepção pseudoestrutural, que é inferior a concepção estrutural e pode trazer consequências não tão boas para o aprendizado, uma vez que se corre o risco do estudante não associar o objeto à suas diferentes representações.

Ainda quanto ao entendimento de função explicitado pelos estudantes na décima terceira atividade, os alunos da terceira série no teste I mostraram um entendimento diferente daquele observado nos estudantes da primeira série o que é ilustrado na figura.

Atividade 13: Explique com suas palavras qual é o significado matemático de função.

Estabelecer relações de interdependência entre os dados analisados e dispor os resultados em gráficos e tabelas.

Figura 4. Atividade realizada no teste I por um estudante do GEM3A.

Nessas turmas foi possível observar a predominância do entendimento de função como sendo uma relação, ficando mais próximo de uma concepção estrutural, porém suas respostas ainda apresentavam aspectos da concepção pseudoestrutural. Assim, foi possível inferir que as concepções apresentadas por esses sujeitos estavam em uma fase de transição da pseudoestrutural para a estrutural. Contudo, no teste II não foi possível notar uma evolução nas concepções apresentada por eles, pois suas respostas para essa atividade permaneceram quase que as mesmas.

No ensino superior, com as mesmas atividades foi possível evidenciar outros aspectos que não sobressaíram nas respostas dadas pelos estudantes do Ensino Médio. Um exemplo disso pôde ser observado na atividade 03 ilustrada pela seguinte figura.

Atividade 03: Seu Juca pretende construir um campo de futebol para seus netos, para tanto, dispõe de 100 metros lineares de tela para fechar o campo. Para ter um melhor aproveitamento da tela, ele decidiu fazer o cercado encostado na parede de sua casa, como mostra a figura a seguir.

parede

x $100-2x$ x

Nessas condições, preencha a tabela abaixo.

Largura do cercado	5 m	7,8 m	12 m	25 m	30 m	x m
Comprimento do cercado	90	84,4	76	50	40	$100-2x$
Área do cercado	450	658,32	912	1250	1200	$x(100-2x)$

(ESPAÇO PARA OS CÁLCULOS)

5m) $2x=5$ comprimento $\Rightarrow 100-2x=90$ m
 Área $\Rightarrow 90 \times 5 = 450$

7,8m) $x=7,8$ comp $\Rightarrow 100-2 \times 7,8 = 84,4$ m
 área $\Rightarrow 84,4 \times 7,8 = 658,32$

12m) $x=12$ comprimento $\Rightarrow 100-2 \times 12 = 76$ m
 área $\Rightarrow 12 \times 76 = 912$ m

25m) $x=25$ comp $\Rightarrow 100-2 \times 25 = 50$
 área $\Rightarrow 50 \times 25 = 1250$

30m) $x=30$ comp $\Rightarrow 100-2 \times 30 = 40$
 área $\Rightarrow 40 \times 30 = 1200$

x m) comp $\Rightarrow 100-2x = P(x)$
 área $\Rightarrow x \times P(x) = A$

Análise a tabela que acabou de preencher e, escreva algebricamente a relação existente entre a área, largura e o comprimento do cercado e, explique com suas palavras como é essa relação.

Área $A(x) = P(x) \times x$ onde $P(x) = 100-2x$ sendo o comprimento e x sendo a largura. A relação é de dependência entre a área e a largura e é independente e o resto depende dela.

Atividade 03: Seu Juca pretende construir um campo de futebol para seus netos, para tanto, dispõe de 100 metros lineares de tela para fechar o campo. Para ter um melhor aproveitamento da tela, ele decidiu fazer o cercado encostado na parede de sua casa, como mostra a figura a seguir.

parede

x $100-2x$ x

Nessas condições, preencha a tabela abaixo.

Largura do cercado	5 m	7,8 m	12 m	25 m	30 m	x m
Comprimento do cercado	90	84,4	76	50	40	$100-2x$
Área do cercado	450	658,32	912	1250	1200	$x(100-2x)$

(ESPAÇO PARA OS CÁLCULOS)

90
84,4
76
50
40
 $100-2x=4x$ $100x-2x^2$

Análise a tabela que acabou de preencher e, escreva algebricamente a relação existente entre a área, a largura e o comprimento do cercado e, explique com suas palavras como é essa relação.

o comprimento é constante enquanto a largura é em função de x .

Figura 5. Atividade realizada no teste I por um estudante do GESM e outro do GESF respectivamente.

O primeiro protocolo é um exemplo do que mais se repetiu nos dois grupos nessa atividade, e o outro ocorreu com menos frequência. Observando o que foi apresentado na primeira situação presente na figura, é possível perceber que ao explicar como acontece a relação

entre o comprimento, a largura e a área do cercado, o estudante reconhece que o comprimento depende da largura e a área está em função dessas duas dimensões, e, além disso, ele demonstra entender que a largura assume o papel de variável independente e o comprimento e a área o de variáveis dependentes, pois ao alterar a largura, o comprimento e a área também se alteram. Isso mostra que grande parte dos estudantes desses dois grupos fizeram uso de uma das ações necessárias para a compreensão da noção de função que segundo Sierpinska é a discriminação entre a variável dependente e a independente. Saber identificar e discriminar esse dois elementos da relação funcional é fundamental, principalmente quando se olha função como uma transformação, pois somente essa discriminação é que dará ao indivíduo condições de saber qual foi a transformação e o que causou essa transformação.

Com relação ao segundo protocolo, o que chamou a atenção foi o fato de o estudante ao explicar como era a relação entre a largura, o comprimento e a área do cercado, ter dito que o comprimento era constante e a largura estava em função de x . Diante disso, é possível notar que ele não percebe que o comprimento varia em função da largura e consequentemente a área também varia. Isso, segundo Sierpinska, se constitui em um dos obstáculos para a compreensão da noção de função, reconhecer a transformação, mas não reconhecer o que e quem realiza tal transformação.

Do grupo dos estudantes do curso de Licenciatura em Física, foi possível extrair um protocolo que representa um erro bastante recorrente com os estudantes do Ensino Superior, que está ilustrado pelo protocolo da figura a seguir.

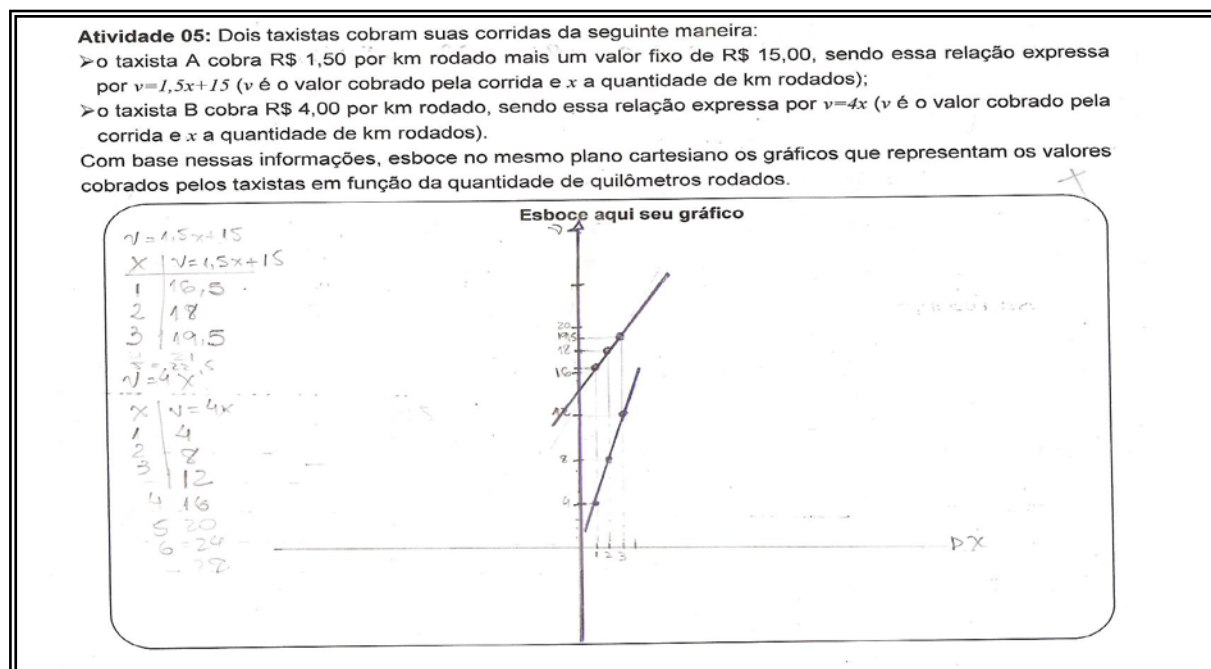


Figura 6. Atividade realizada no teste I por um estudante do GESF.

No teste I, os estudantes do Ensino Superior, e principalmente aqueles dos cursos de Química e Biologia responderam que a partir do sétimo quilômetro seria mais vantajoso viajar com o taxista A. Uma possível explicação para isso pode estar no fato de que para a construção dos gráficos, eles utilizaram apenas valores inteiros no eixo das abscissas, isso pode ter feito com que eles não atentassem para o fato de que o domínio das funções é $R > 0$, o que acarreta que entre dois valores inteiros do domínio há infinitos outros valores, ou seja, para qualquer valor

maior que 6 no domínio, não sendo necessariamente 7, a quantidade de quilômetros que está associada ao valor cobrado pelo taxista A será menor que o valor praticado pelo taxista B, quando percorridas distâncias iguais. Esse fato possivelmente esteja ligado a outro obstáculo epistemológico elencado por Sierpinska que está relacionado com a noção de número, pois muitas vezes o uso da letra na álgebra assumindo o papel de número ou grandeza abstrata faz com que a abstração não deixe evidente a distinção entre números discretos e grandezas contínuas.

Quanto ao entendimento de função explicitado pelos alunos do Ensino Superior, a princípio o que chamou a atenção foram as respostas dadas pelos alunos do GESM e do GESF no teste I, cujas respostas mais recorrentes podem ser observadas na figura a seguir.

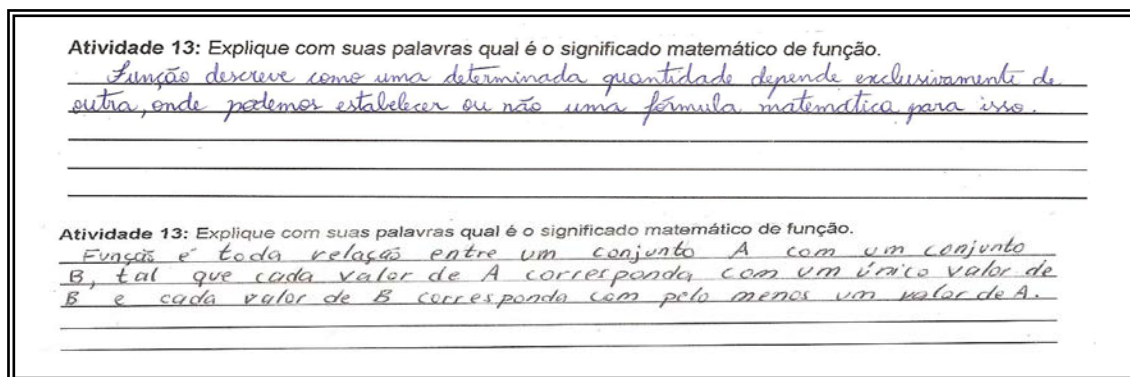


Figura 7. Atividade realizada no teste I por um estudante do GESM e outro do GESF respectivamente.

O entendimento expressado pelo primeiro estudante foi o que mais se repetiu em ambos os grupos. Observando o protocolo é possível notar que o aluno entende que função é uma relação de dependência entre quantidades. Apesar de restringir essa relação a apenas quantidades, ressalta que essa relação pode ser ou não expressa por uma fórmula matemática, que indica que tal relação pode ter uma regularidade ou não. Assim, deixa explícito que reconhece função como uma relação, mesmo não sendo possível observar uma regularidade, o que caracteriza, de acordo com Sfard, um entendimento que aponta para uma concepção estrutural.

Já o que expôs o segundo estudante aconteceu com menos intensidade nos dois grupos. Apesar de conceber função como uma relação, ele explicita essa relação entre elementos de dois conjuntos, o que também aponta para uma concepção estrutural como a que foi evidenciada no entendimento expresso no primeiro protocolo. Vale ressaltar que ambos os entendimentos comentados indicam semelhanças com a definição apresentada por Dirichlet no sentido de não levar em consideração a presença de uma expressão analítica, e ainda, a última parte explicitada no protocolo do segundo estudante somente é verdadeira no caso de a função ser sobrejetora.

No GESQ e no GESB foram encontradas concepções diferentes daquelas explicitadas no GESM e GESF. Um exemplo pode ser observado na seguinte figura.

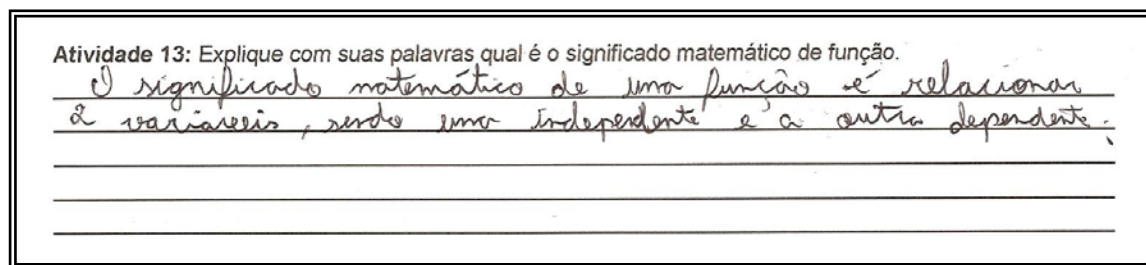


Figura 8. Atividade realizada no teste I por um estudante do GESQ.

Esse tipo de entendimento expressado por um estudante do GESQ, também foi bastante recorrente no GESB. Pelo exposto pelo aluno, é possível perceber que ele e outros pertencentes aos dois grupos entendiam função como uma relação, seja ela entre grandezas, como mostra a figura, bem como entre números ou elementos de dois conjuntos, enfatizando a dependência entre as variáveis como também foi evidenciado em outras respostas. Essa maneira expressa pelos alunos de entender função aponta para uma concepção estrutural.

Destaca-se que no teste II em todos os grupos do Ensino Superior não foram observadas alterações nas concepções apresentadas pelos estudantes.

Ao concluir a análise das estratégias empregadas pelos estudantes na realização das atividades e examinar o que eles disseram na décima terceira em ambos os testes, em suma, é relevante destacar que nos grupos do Ensino Médio foi evidenciada uma predominância das concepções operacional e pseudoestrutural, sendo possível observar em alguns momentos a transição de uma concepção para outra e o aparecimento de alguns aspectos relacionados a concepção estrutural comparando os dois testes. Já no Ensino Superior a situação foi um pouco diferente; houve uma predominância de uma concepção que aponta para a estrutural nos dois testes, porém não foi possível observar se esses sujeitos chegaram à reificação do conceito, uma vez que sem ela, segundo Sfard, o processo é puramente operacional, e que isso é algo demorado que não acontece em um curto espaço de tempo, podendo levar anos e às vezes, dependendo do conceito, não acontece.

Ainda segundo Sfard, a predominância da concepção operacional sobre a estrutural normalmente acontece com os estudantes, porque eles vêem função como um processo, e não como um objeto permanente.

Considerações finais

A realização dessa pesquisa permitiu que ao final da análise do material coletado fosse feita uma reflexão a respeito dos aspectos desvelados que estão envolvidos no processo de compreensão da noção de função. Isso permitiu entender que a aprendizagem de um conceito matemático envolve além das noções relacionadas a tal conceito, muitas vezes elementos que remetem a gênese do conhecimento em questão (obstáculos epistemológicos) e também, sofre interferência da maneira como o indivíduo concebe o objeto matemático.

Identificar as concepções de um sujeito a respeito de um objeto matemático, permite entender um pouco do dinamismo envolvido na aprendizagem, como também pode ajudar a explicar a recorrência de alguns erros. Contudo, identificar uma concepção e classificá-la não foi tarefa simples, pois muitos indivíduos, e principalmente aqueles em que a compreensão de função estava em processo de construção, mostraram estar passando por uma fase de transição da operacional para a estrutural, e, como toda transição cognitiva, o encadeamento não segue uma

única direção. Isso dificultou determinar com certeza se a concepção de função que o indivíduo apresentava era operacional ou estrutural.

Partindo dessa perspectiva, a concepção operacional foi facilmente identificada e mais frequente em boa parte dos estudantes, e principalmente naqueles provenientes do Ensino Médio, no teste I. No entanto, a evolução apresentada por eles no teste II, em especial daqueles do Ensino Superior, culminou em um tipo de concepção que trazia em seu bojo aspectos da concepção estrutural. Todavia, para se chegar à tal concepção, a evolução do conceito no indivíduo deve passar por três estágios: a interiorização, a condensação e a reificação, sendo este último indispensável para uma concepção estrutural, pois, se não existir a reificação, todo processo é puramente operacional. Assim, nos estudantes do Ensino Médio foi possível notar no teste II um tipo de concepção intermediária que estava entre a operacional e a estrutural, a pseudoestrutural. Já nos estudantes do Ensino Superior a classificação do tipo de concepção não foi tão simples, pois a consistência de algumas respostas apontava para a concepção estrutural, porém, em virtude de certas limitações dos instrumentos de coleta, não foi possível identificar se esses sujeitos atingiram ou não a reificação.

Quanto às concepções operacional e pseudoestrutural, vale ressaltar que, enquanto a primeira é saudável no processo de ensino e aprendizagem, sendo indispensável para dar respostas a questões matemáticas, a segunda, não, pois ela limita a compreensão, podendo ser prejudicial para o processo, porém de certa forma ela é quase inevitável quando se faz uma abordagem estrutural.

Diante dos resultados, foi possível vislumbrar que ainda existem muitos aspectos a serem explorados a respeito das concepções de estudantes no que se refere ao conceito de função. No que tange à essa investigação, a abrangência do estudo merece destaque, no sentido de contemplar tanto o Ensino Médio quanto o Superior, todavia a quantidade de informações coletadas fez com que algumas dificuldades surgissem no momento da interpretação delas. Assim, uma adequação dos instrumentos de coleta, diminuindo o número de atividades realizadas pelos estudantes, propondo questões mais abertas e permitindo que eles expressem seu raciocínio de maneira mais espontânea, poderia fornecer dados mais esclarecedores acerca dos estágios das concepções apresentadas. Entrevistas com alguns alunos poderiam ajudar a desvelar outros aspectos, como a reificação.

No que se refere a pesquisas futuras, um trabalho no Ensino Médio e Superior a longo prazo, como por exemplo, o acompanhamento de uma mesma turma ao longo de todo o Ensino Médio poderia fornecer dados bastante significativos a respeito do processo de aprendizagem e da forma como vão se manifestando as concepções dos estudantes, visando a construção do conceito.

Por fim, vale salientar que as análises e as reflexões realizadas ao longo deste estudo, bem como os apontamentos feitos no decorrer das considerações finais, se constituem em interpretações possíveis nos limites desta pesquisa. Assim, mesmo acreditando nos argumentos e achados que foram explicitados aqui, existe a necessidade de vislumbrar os resultados alcançados com certa criticidade, devido ao caráter desta pesquisa, uma vez que outros estudos podem ser realizados e trazer elementos que ampliem ou até mesmo consolidem as ideias aqui defendidas.

Referências e bibliografia

- Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Tradução de Maria João Alves, Sara Bahia dos Santos e Talmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora.
- Brasil. (1998). Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEF.
- Brasil. (2000). Secretaria de Educação Média e Tecnologia. *PCN+ Ensino Médio: Orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília: MEC/SEMTEC.
- Brasil. (2009). Ministério da Educação. *Plano de Desenvolvimento da Educação: SAEB: Matrizes de referencia, tópicos descritores*. Brasília: MEC/SAEB/Inep.
- Duval, R. (2011). Ver e ensinar matemática de outra forma: entrar no mundo matemático de pensar os registros de representação semiótica. In: Campos, T. M. M. (Org). Tradução de Marlene Alves Dias. São Paulo: Proem.
- São Paulo. (2010). *Relatório pedagógico 2009 SARESP: Matemática*. São Paulo: SEE.
- Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification – The case of function. In: Dubinsky, E. & Harel, G. (Ed.). *The concept of function – Aspects of epistemology and pedagogy*. MMA notes 25, 59-84.
- Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In: Dubinsky, E. & Harel, G. (Ed.). *The concept of function – Aspects of epistemology and pedagogy*. MMA notes 25, 25-58.

Concepções de licenciandos sobre o conceito de combinação linear

Mariany Layne de **Souza**

Universidade Estadual de Londrina

Brasil

marianylayne@gmail.com

Angela Marta Pereira das Dores **Savioli**

Universidade Estadual de Londrina

Brasil

angelamarta@uel.br

Marcelo Silva de **Jesus**

Universidade Estadual de Londrina

Brasil

marcelosilvadejesus@hotmail.com

Resumo

Este artigo se propõe a identificar e discutir por meio da teoria APOS de Ed Dubinsky as concepções ação, processo e objeto evidenciadas por graduandos de um curso de Licenciatura em Matemática a respeito do conceito de Combinação Linear, conceito esse estudado na disciplina de Álgebra Linear. Para isso, foram realizadas entrevistas semiestruturadas com dois licenciandos de uma universidade pública paranaense. Percebe-se por meio da análise das entrevistas que dentre as concepções evidenciadas por esses graduandos estão as concepções ação e objeto.

Palavras-chave: Álgebra Linear, Concepções de Combinação Linear, Teoria APOS, Licenciandos, Entrevistas.

Introdução

A Álgebra Linear é extremamente importante para a Matemática como também para outros campos do conhecimento que fazem uso dela, como a Ciência da Computação. A ideia da relevância da Álgebra Linear pode ser confirmada em Dorier (1998), citado em Celestino (2000, p. 9-10) que diz:

É fato que a Álgebra Linear constitui uma parte importante no conteúdo matemático que é ensinado no início da universidade, sendo vista como uma disciplina fundamental por quase todos os matemáticos e por muitos cientistas que a utilizam como ferramenta. Além disso, as dificuldades dos estudantes em Álgebra Linear parecem, tão importantes e visíveis quanto em análise.

Mediante os dizeres de Dorier (1998) vê-se que, além da sua importância como conteúdo matemático, as dificuldades apresentadas nessa disciplina também são importantes, e assim perceber que concepções são evidenciadas pelos estudantes é relevante, uma vez que revelam como estes construíram o seu conhecimento matemático e que de certa forma transparece as dificuldades encontradas pelos mesmos.

A disciplina de Álgebra Linear é uma disciplina obrigatória em todos os cursos de licenciatura do Brasil (Bianchini & Machado, 2013), devido a sua importância já comentada. Sendo assim, este artigo busca responder à seguinte pergunta: que concepções são evidenciadas por licenciandos em Matemática a respeito do conceito de Combinação Linear? Já que o conceito de Combinação Linear é um conceito considerado elementar no estudo de Álgebra Linear, uma vez que auxilia na compreensão de outros, como Dependência Linear e Base.

Para atender ao objetivo desse trabalho, identificar e discutir as concepções ações, processo e objeto evidenciadas pela teoria APOS, buscou-se realizar entrevistas semiestruturadas com dois licenciandos em Matemática a respeito do conceito de Combinação Linear.

Abstração Reflexionante

Piaget diferencia três tipos de abstração: empírica, pseudo-empírica e reflexionante. Na abstração empírica o indivíduo tira propriedades dos objetos por meio da observação. Na pseudo-empírica, que é um tipo de abstração intermediária entre a empírica e a reflexionante, é constatado que as propriedades observadas nos objetos são introduzidas pelo indivíduo aos objetos (Elias, 2013; Becker, 1990).

A abstração reflexionante proposta por Piaget consiste em estruturas que permitem ao sujeito captar um determinado conteúdo por meio de suas atividades cognitivas a fim de extrair novos caracteres e utilizá-los para outras finalidades. Essa abstração possui dois sentidos que se complementam: reflexionamento e reflexão (Nogueira & Pavanello, 2008).

O reflexionamento corresponde à projeção do que foi retirado de um patamar inferior para um superior, como, por exemplo, a representação de uma ação. Já a reflexão é o “ato de reconstrução e reorganização sobre o patamar superior daquilo que foi transferido do interior” (Nogueira & Pavanello, 2008, p. 119).

De acordo com Prado (2010, p. 28), Piaget apresenta alguns tipos de abstração reflexionante, entretanto Dubinsky admite quatro, por considerá-las “[...] importantes no desenvolvimento do pensamento matemático avançado” e acrescenta uma quinta, que não foi considerada por Piaget. Esses tipos de abstração reflexionante são:

- Interiorização que ocorre quando o indivíduo usando símbolos consegue construir processos internos a fim de dar sentido aos fenômenos observados (Dubinsky, 2001).
- Encapsulação, que de acordo com Dubinsky (2001, p. 101), é a “[...] conversão de um processo (dinâmico) em um objeto (estático)”.
- Generalização, que segundo Dubinsky (1991, p. 101), acontece quando o indivíduo “[...] aplica um esquema existente para uma ou para uma vasta coleção de fenômenos”.
- Coordenação, que de acordo com Dubinsky (1991, p. 101) é “a composição ou coordenação de dois ou mais processos para construir um novo”.
- Reversibilidade, que para Dubinsky (1991) é um novo processo que consiste em reverter o processo original.

Esses tipos de abstrações propostos por Piaget possibilitam a construção de objetos mentais, e desse modo Dubinsky os considerou no contexto do pensamento matemático avançado, mostrando que novos objetos podem ser construídos a partir de objetos já existentes.

Em relação à construção do conhecimento matemático, Asiala *et al.* (1996, p. 6) considera que passa primeiro pela manipulação de objetos mentais ou físicos para formar a ação; as ações são interiorizadas formando processos que são encapsulados para formar objetos. Os objetos por sua vez podem ser desencapsulados para voltar aos processos que os formaram inicialmente. Por fim, ação, processo e objetos podem ser organizados em esquemas. A figura a seguir retrata essa situação:

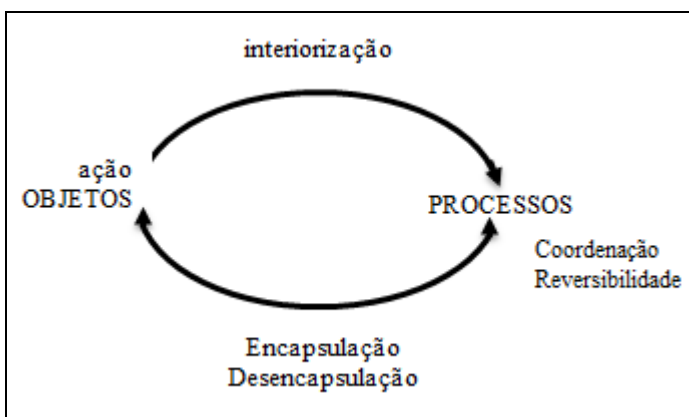


Figura 1. Construção do conhecimento matemático.

Fonte: Asiala, *et al.*, 1996, p. 6.

Mediante a figura 1, é possível perceber a construção do conhecimento matemático por meio da teoria APOS (Action, Process, Object, Schema) passando pelas etapas: ação, processo, objeto e esquema, não necessariamente nessa ordem. E nessa teoria, para se passar de uma etapa para outra usa-se a abstração reflexionante. A seguir será abordada brevemente a Teoria APOS.

A Teoria APOS

A Teoria APOS foi desenvolvida pelo grupo de pesquisa *Research in Undergraduate Mathematics Education Community* (RUMEC) com o intuito de “compreender o mecanismo da *abstração reflexionante* proposto por Piaget para descrever o desenvolvimento do pensamento lógico nas crianças, estendendo a ideia para conceitos da matemática avançada” (Dubinsky & McDonald, 2001, p. 4).

Essa teoria se baseia na hipótese de que o conhecimento matemático “consiste em uma tendência individual para lidar com percepções matemáticas de situações-problema por meio da construção mental ação, processo, e objeto organizando-os em um esquema para dar sentido às situações e resolver problemas” (Dubinsky & McDonald, 2001, p. 2).

A Teoria APOS, como visto no tópico anterior, compreende as etapas ação, processo, objeto e esquema para explicar a construção de um conhecimento matemático. A seguir, será descrito cada uma das etapas dessa Teoria, baseando-se em Dubinsky e McDonald (2001) e Asiala *et al.* (1996). Essas etapas serão utilizadas na análise das entrevistas com os licenciandos.

A ação na APOS corresponde a uma transformação que o indivíduo realiza sobre um objeto matemático, sendo essa transformação externa ao indivíduo, ou seja, acontece mediante a reação a indicações que fornece os passos a serem seguidos. Para obter essas indicações, às vezes, o indivíduo recorre a sua memória sem ter controle consciente do que está fazendo.

Um exemplo de ação é quando o estudante tenta verificar se um conjunto de vetores é linearmente dependente pela possibilidade de escrever um vetor como combinação linear dos

outros, assim este executa a ação de verificar se é possível escrever ou não como combinação linear (Prado, 2010).

Quando o estudante se limita a apenas “[...] operar com *ações*, sem outras etapas do processo de construção do conhecimento, tratando os conceitos de forma algorítmica, apenas reproduzindo os passos para verificar [...], consideraremos que está na *concepção ação*” (Elias, 2013, p. 54).

O processo ocorre quando o indivíduo reflete sobre o que está realizando, quando interioriza a ação transformando-a em um processo. É uma construção interna ao indivíduo, em que o mesmo realiza uma ação, sem ser necessariamente conduzida por estímulos externos, isto é, ele passa a realizar uma transformação consciente no objeto, conseguindo descrever os passos envolvidos sem explicitá-los, além de poder inverter os passos quando for necessário.

Como exemplo de processo, é possível pensar no estudante que consegue refletir que um vetor do R^3 pode ser combinação linear de mais de três vetores (Bianchini & Machado, 2013)

Se ao resolver problemas o estudante der indícios de utilizar transformações do tipo processo, diz-se que possui uma *concepção processo* do conceito matemático em estudo.

O objeto refere-se a uma reflexão sobre o processo, realizando transformações sobre o mesmo por meio de ações ou de outros processos. Quando o indivíduo consegue realizar essas transformações de forma consciente é dito que o indivíduo “[...] encapsulou os processos envolvidos em um objeto” (Prado, 2010, p. 36).

Para exemplificar a concepção objeto imagina-se um estudante que encapsulou, por exemplo, a noção de base, “[...] como sendo um conjunto gerador de vetores linearmente independentes” (Prado, 2010, p. 113).

Um esquema de um conceito matemático é um conjunto estruturado de ações, processos e objetos que um indivíduo possui em sua mente.

Procedimentos metodológicos

Para identificar e interpretar as concepções apresentadas por licenciandos a respeito do conceito de Combinação Linear optou-se por realizar uma pesquisa de natureza qualitativa.

A pesquisa contou com a participação de dois licenciandos em Matemática de uma universidade pública paranaense. Para selecioná-los foi realizado um convite em uma turma que já havia cursado a disciplina de Álgebra Linear no ano de 2013 e consequentemente já haviam estudado o conceito de Combinação Linear. Dois dos estudantes da turma se prontificaram a participar da pesquisa e em seguida foi marcado o dia, o horário e o local para realizar a mesma.

Como instrumento de coleta de informações optou-se pela entrevista semiestruturada, uma vez que ela “[...] se desenrola a partir de um esquema básico, porém não aplicado rigidamente, permitindo que o entrevistador faça as necessárias adaptações” (Lüdke & André, 2012, p. 34). Dessa forma, esse tipo de entrevista apresenta certa maleabilidade permitindo inserir ou alterar a ordem das questões presentes no roteiro elaborado para realizar a entrevista, de acordo com as respostas dadas pelos participantes da pesquisa a fim de contribuir com a identificação das concepções a respeito do conceito de Combinação Linear.

No decorrer das entrevistas, que foram áudio-gravadas, foram fornecidas folhas em branco para que os licenciandos registrassem tudo o que achassem necessário. Assim, apresenta-se nas análises trechos transcritos e escritos.

O roteiro elaborado é composto por três questões, sendo uma retirada e adaptada de um questionário apresentado na pesquisa de Elias (2013) e as outras duas elaboradas pela primeira autora deste artigo.

A análise das entrevistas foi realizada mediante a leitura dos protocolos obtidos, bem como da leitura das transcrições das entrevistas, com a finalidade de encontrar indícios que permitissem identificar as concepções evidenciadas por meio da Teoria APOS, como a concepção ação, processo e objeto, dos licenciandos participantes da pesquisa.

A seguir serão apresentadas as análises das entrevistas realizadas.

Análise das entrevistas

Para preservar a identidade dos participantes da pesquisa foram adotados códigos para identificá-los. O código escolhido foi a letra E precedida de um número, o primeiro estudante entrevistado foi denominado de E1 e o segundo de E2.

No momento da entrevista foi explicado novamente o objetivo da mesma, uma vez que esse foi exposto no momento do convite, e da autorização entregue aos participantes, sendo solicitada também autorização para áudio-gravar as entrevistas. Após isso, eles assinaram o termo de consentimento e assim iniciou-se a entrevista que teve uma duração de aproximadamente vinte minutos.

A seguir serão apresentadas as análises e as discussões de cada questão que fez parte do roteiro de entrevista.

Questão 1: O que você entende por combinação linear? (Adaptada de Elias, 2013)

Nessa primeira questão o estudante E1 comenta que uma Combinação Linear “*É a combinação de dois vetores com um terceiro, por meio da adição desses vetores igualando com o terceiro, contendo variáveis diferentes de zero que multiplica os vetores combinados*”. Por meio dessa resposta vê-se que o estudante está acostumado a trabalhar com tarefas do tipo escreva o vetor w como combinação linear dos vetores u e v .

Todavia, quando questionado a respeito das “variáveis”, que correspondem aos escalares, se essas não podem ser iguais à zero, o estudante comenta que “*... pode ter um zero, mas para ter combinação linear...*” Para por um momento e após “*... porque anula o vetor*”. Com isso, pode-se perceber que ele compreende que se todos os escalares forem nulos não é possível escrever uma Combinação Linear.

Mediante as falas de E1, mesmo essas não apresentando uma linguagem adequada, é possível inferir que este licenciando possui concepção objeto sobre Combinação Linear, já que compreende a Combinação Linear como sendo um objeto matemático com características próprias.

Ao realizar essa mesma questão ao E2, este comenta “*... lembro que tem assim... no caso tem um vetor... né? E alguma coisa que combine assim... tem o valor do vetor v e o valor de outro vetor, há uma combinação de dois vetores para dá um terceiro...*” Nesse momento, o E2

faz uma representação do que está falando em uma folha que foi dada pela primeira autora, conforme a figura abaixo:

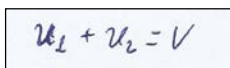


Figura 2. Representação Combinação Linear E2.

Ao terminar a representação, a primeira autora o questiona sobre essa representação e E2 comenta “*tem alguma coisa errada aí...*” Mesmo sabendo que faltava algo E2 não consegue se lembrar do que falta.

Mediante as falas de E2 é possível inferir que o mesmo possui concepção ação sobre Combinação Linear, já que tenta recorrer à memória para lembrar o que é esse objeto matemático, além de que possui ainda um entendimento equivocado da Combinação Linear.

Questão 2: Em cada caso escreva, se possível, o vetor w como combinação linear dos vetores u e v . Explique por que pode ou não ser uma combinação linear.

Para essa questão foram apresentados os seguintes vetores:

- | |
|--|
| a) $w = (2, 2)$, $u = (1, 3)$ e $v = (0, -2)$
b) $w = (3, -1, -2)$, $u = (1, 1, 1)$ e $v = (0, -4, -1)$ |
|--|

O E1 pegou a folha fornecida pela primeira autora e começou a fazer as verificações dizendo que o primeiro era possível escrever w como combinação linear de u e v . Quando questionado sobre o porquê de sua afirmação comenta “*Porque quando tenho dois vetores aqui (aponta para o papel) u e v e tendo as incógnitas a_1 e a_2 , quando colocadas num sistema você tem uma resposta real e quando multiplicada por esses vetores como resposta dá o w* ”.

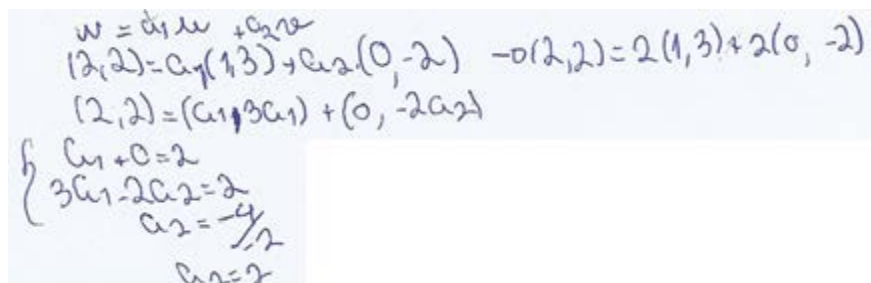


Figura 3. Resolução Questão 2 item a) E1.

Pode-se inferir que E1 reconhece e sabe valer-se do que é uma combinação linear para mostrar a possibilidade de se escrever um vetor dado como combinação linear de outros. Um fato interessante é que após encontrar os valores dos escalares e escrever a combinação linear E1 realizou a verificação, para ter certeza de que com esses valores era realmente possível escrever o vetor w como combinação de u e v .

No próximo item dessa questão E1 começa a fazer a verificação e chega a conclusão que não é uma combinação linear. Quando questionado sobre o porquê disso, responde: “... porque,..., por exemplo, quando você coloca aqui o x (referindo-se a primeira equação do sistema) é igual é a 3...” Mostra para a folha e volta a comentar os valores obtidos “...o 3 e o - 2, as incógnitas, dão a combinação linear, mas quando você compara com o y (referindo-se a segunda equação do sistema) ele não dá, ele dá respostas diferentes, então não é combinação linear”

$$\begin{aligned}
 W &= C_1 \cdot u + C_2 \cdot v \\
 (3, -1, 2) &= C_1(1, 1, 1) + C_2(0, -4, -1) \\
 (3, -1, 2) &= (C_1, C_1, C_1) + (0, -4C_2, -C_2) \\
 \begin{cases} C_1 = 3 \\ C_1 - 4C_2 = -1 \rightarrow 3 - 4C_2 = -1 \\ C_1 - C_2 = -2 \\ 3 - C_2 = -2 \\ -C_2 = -5 \\ C_2 = 5 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Figura 4. Resolução Questão 2 item b) E1.

Novamente, é possível perceber a preocupação em realizar a verificação, uma vez que E1 retorna em uma das equações não utilizadas no sistema para ver se os resultados encontrados satisfariam essa equação, e ao perceber que isso não era possível constata que não se pode escrever a combinação linear solicitada.

Esses itens apresentados mostram que o estudante reconhece o processo de resolução e a necessidade de utilizá-lo para escrever um vetor como Combinação Linear de outros, reforçando a inferência que E1 possui uma concepção objeto sobre o conceito, foco de estudo deste artigo.

Em relação ao entrevistado E2, esse tenta fazer a verificação na folha cedida pela primeira autora, entretanto E2 equivoca-se e não representa a Combinação Linear solicitada, como é possível ver em seu registro escrito:

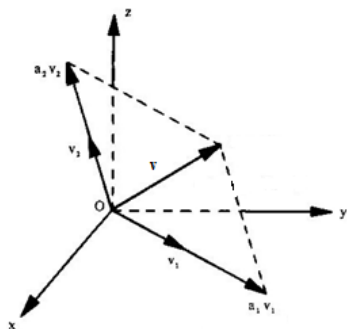
$$\begin{aligned}
 \begin{cases} 4x + 3y = 2 \\ 0x - 2y = 2 \end{cases} \\
 y = -1 \\
 x = -1
 \end{aligned}$$

Figura 5. Resolução Questão 2 item a) E2.

Depois de um tempo, E2 fala “... há outro jeito de fazer isso”. O estudante E2 tenta recordar, mas só lembra que pode utilizar sistema para chegar à resolução, tanto que comenta: “... eu usava sistema para resolver...”.

Como E2 não conseguiu recordar o que tem que fazer para poder escrever uma Combinação Linear, não resolveu o outro item da questão. Entretanto, a afirmação de E2 revela que o mesmo decorou o que tinha que fazer para se encontrar escalares que fossem possíveis para escrever uma Combinação Linear, nesse caso esse estudante mostra ter uma concepção ação desse conceito matemático, uma vez que tenta fazer manipulações sobre objetos matemáticos recorrendo a fatos que estão na memória, sem refletir sobre a razão de fazer isso.

Questão 3: A seguinte interpretação geométrica corresponde a uma combinação linear? Se sim, escreva a combinação linear que o gráfico representa.



Fonte: Steinbruch & Winterle, 2009, p. 43

A respeito dessa questão E1 comenta “*acho que sim... porque o v tem que ser a soma desses dois* (apontando para a figura, mostrando a_1v_1 e a_2v_2), *eu acho que é, porque quando você representa aqui, esse é igual a esse* (mostrando novamente para a figura)”. Conclui dizendo “... *é uma combinação linear*”. Por meio do gráfico E1 diz que a interpretação corresponde a “ $v = a_1v_1 + a_2v_2$ ”

Com essa sua última resposta à entrevista fez com que se reforçasse ainda mais a inferência que o estudante E1 possui a concepção objeto sobre o conceito de Combinação Linear, visto que o mesmo possui a percepção de reconhecer uma Combinação Linear pelo seu gráfico, conseguindo descrevê-la em linguagem algébrica.

Em relação a essa última questão da entrevista o E2 diz “*eu lembro do gráfico, mas se é ou não é, não lembro*”. Por meio de seus dizeres vê-se que E2 teve contato com representações gráficas, entretanto como faz um tempo que viu tal conteúdo não afirma se tal interpretação geométrica é ou não uma Combinação Linear.

Discussão dos resultados

Por meio da análise dos protocolos e das transcrições das entrevistas foi possível responder à questão “que concepções são evidenciadas por licenciandos em Matemática a respeito do conceito de Combinação Linear?” delimitada no início deste trabalho.

Como resultado observou-se que um estudante, E1, apresentava concepção objeto do conceito de Combinação Linear, no sentido da teoria APOS, pois o mesmo consegue perceber tal conceito como um objeto matemático que possui propriedades que o caracterizam.

Já o estudante E2 apresentou a concepção ação a respeito da Combinação Linear, segundo a Teoria APOS, uma vez que se recorda dos procedimentos que utilizava, restringindo a sua compreensão a realizar ações.

Considerações finais

Neste artigo foi apresentado o resultado de uma pesquisa, cujo objetivo era identificar e discutir as concepções a respeito de Combinação Linear de graduandos que já cursaram a disciplina de Álgebra Linear no curso de licenciatura em Matemática.

Para atingir o objetivo proposto no artigo realizou-se uma entrevista semiestruturada com dois licenciandos que concluíram a disciplina de Álgebra Linear, a fim de verificar como eles construíram o seu conhecimento sobre Combinação Linear, utilizando para tanto a Teoria APOS.

Como resultado obteve-se que o estudante E1 apresentou ter concepção objeto a respeito da Combinação Linear, enquanto o E2 apresentou concepção ação sobre esse conceito.

Mediante a análise realizada foi possível perceber que os dois licenciandos possuem certa dificuldade com a notação e nomenclatura algébrica, o que corrobora com pesquisas, como a de Dorier (2002), que mostram que uma das dificuldades dos estudantes é de se apropriarem da linguagem utilizada em Álgebra Linear.

De modo geral, espera-se que esse artigo possibilite uma reflexão por partes dos docentes a respeito de como os estudantes entendem e constroem seus conhecimentos acerca de algum conceito matemático, bem como, a realização de pesquisas futuras a fim de identificar concepções, segundo a teoria APOS, a respeito de outros conceitos matemáticos.

Referências e bibliografia

- Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In J. Kaput, A. H. Shoenfeld, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education II, cbms issues in mathematics education* (pp. 1-23). Estados Unidos: American Mathematical Society.
- Becker, F. (1990). Saber ou ignorância: Piaget e a questão do conhecimento na escola pública. *Psicol. USP*, São Paulo, 1(1), 77-87. Recuperado em 12 julho, 2014, de http://pepsic.bvsalud.org/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1678-51771990000100009&lng=pt&nrm=iso.
- Bianchini, B. L., & Machado, S. D. A. (2013). Concepção de base de um espaço vetorial rela propiciada por um curso de Álgebra Linear em EAD. In M. C. R. Frota, B. L. Bianchini, & A. M. F. T. Carvalho (Orgs.), *Marcas da Educação Matemática no Ensino Superior* (pp. 143-163). Campinas: PAPIRUS.
- Celestino, M. R. (2010). *Ensino-Aprendizagem da Álgebra Linear: as pesquisas brasileiras na década de 90*. (Dissertação de mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, SP, Brasil.
- Dorier, J. L. (2002). Teaching Linear Algebra at University. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, 3, 875-884, Pekim.
- Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-123). Holanda: Kluwer Academic Publishers.
- Dubinsky, E. & McDonald, M. A. (2001). APOS: a constructivist theory of learning in undergrad mathematics education research. In D. Holton et al. (Eds.), *The teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers. Recuperado em 08 junho 2014, de <http://www.math.kent.edu/~edd/publications.html>.
- Elias, H. R., & Savioli, A. M. P. D. (2013). Dificuldades de graduandos em matemática na compreensão de conceitos que envolvem o estudo da estrutura algébrica grupo. *Educação Matemática Pesquisa*, São Paulo, 15(1), 51-82.
- Lüdke, M., & André, M. E. D. A. (2012). *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: Editora Pedagógica e Universitária.
- Nogueira, C. M. I. & Pavanello, R. M. (2008). A Abstração Reflexionante e a Produção de Conhecimento Matemático. *Bolema*, 21(50), 111-130. Rio Claro.
- Prado, E. A. (2010). *Alunos que contemplaram um curso de extensão em álgebra linear e suas concepções sobre base de um espaço vetorial* (Dissertação de mestrado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, SP, Brasil.
- Steinbruch, A., & Winterle, P. (2009). *Álgebra Linear*. São Paulo: Pearson Makron Books.

Contextualização e formalismo matemático no ensino de limites e continuidade: um estudo de caso

Fabio **Orfali**

Instituto de Ensino e Pesquisa

Brasil

fabioo1@insper.edu.br

Tadeu Aparecido Pereira **daPonte**

Instituto de Ensino e Pesquisa

Brasil

tadeuap@insper.edu.br

Resumo

O uso da linguagem matemática formal em cursos introdutórios de Cálculo, ministrados no ensino superior, pode representar, para uma parte significativa dos alunos, uma barreira intransponível para a construção de significado. No Brasil, a barreira torna-se ainda maior, dado que os alunos não têm qualquer contato com os conceitos básicos de Cálculo no Ensino Médio. Propõe-se neste trabalho a contextualização como uma estratégia para diminuir essa barreira, especificamente no entendimento do conceito de limite. O estudo de caso apresentado exemplifica como a contextualização envolvendo o cálculo do imposto de renda pode contribuir para a criação de significado em relação aos conceitos de continuidade e limite, iniciando a sua construção em uma etapa anterior à introdução da linguagem formal.

Palavras chave: Cálculo Diferencial, limite, continuidade, linguagem matemática, contextualização, imposto de renda.

Como apontado por Costa (2011, p.167), o estudo do Cálculo Diferencial não faz parte do currículo do Ensino Médio brasileiro, nem mesmo em caráter introdutório, diferentemente do que ocorre em países como Portugal, Espanha, França e Estados Unidos (DGE – Portugal; BOE 147 – Espanha; Boletim 2011 – França; NCTM – Estados Unidos). Tal particularidade não pode ser ignorada quando se planeja o ensino dessa disciplina nos cursos universitários brasileiros. Pelo contrário, devem-se buscar alternativas que diminuam o impacto causado pela apresentação, com todo formalismo matemático, de um conteúdo cujas ideias fundamentais não foram trabalhadas em um nível mais básico.

Porém, diversos trabalhos (Barufi, 1999; Rezende, 2003; Lima, 2014) revelam um quadro desalentador para o ensino de Cálculo na maioria das universidades brasileiras, com médias de aproveitamento sofríveis e elevados índices de reprovação nessa disciplina. Esses indicadores mostram que, na maioria das vezes, o degrau existente entre a experiência dos alunos no Ensino Médio e a apresentação formal do Cálculo Diferencial em nível superior tem sido extremamente alto.

Neste texto, apresentamos um estudo de caso que leva em conta a importância da contextualização como estratégia facilitadora do processo de criação de significado, pelos alunos, diante da exposição a um novo conceito matemático. O estudo de caso, aplicado ao 1º semestre de um curso de Economia e Administração de Empresas, objetiva introduzir os conceitos de limite e continuidade invertendo a ordem tradicionalmente adotada nos livros didáticos de Cálculo. Partindo da investigação do mecanismo de cálculo do Imposto de Renda no Brasil, assunto que potencialmente desperta o interesse dos estudantes das áreas envolvidas, surge naturalmente o conceito de continuidade de uma função. Em seguida, a resolução de um conflito motiva a formalização matemática das ideias até então trabalhadas, permitindo que o conceito de limite seja introduzido de maneira mais significativa para os alunos.

O contexto do ensino de Cálculo no Brasil

Um curso de Cálculo oferecido na universidade costuma introduzir os alunos a um formalismo matemático com o qual eles não estão acostumados, o que já representa um potencial obstáculo ao aprendizado da disciplina. No contexto brasileiro, em que o Cálculo não é apresentado no Ensino Médio de maneira introdutória, o risco é ainda maior. Não tendo tido contato prévio com os conceitos mais fundamentais do Cálculo, os alunos tendem a encontrar maior dificuldade para identificá-los e compreendê-los em uma apresentação com todo o formalismo requerido em um curso de nível superior. Em relação ao ensino de Cálculo nas universidades brasileiras, Barufi (1999) destaca que:

Para a maioria dos alunos, o conhecimento matemático, desenvolvido anteriormente na escola secundária, pouco ou nada tem a ver com o que lhe é apresentado no curso de Cálculo, e o caráter de análise com o qual passa a se defrontar parece constituir uma grande dificuldade. Isto ocorre principalmente quando as questões do Cálculo são apresentadas dentro de um contexto formal, logicamente bem estruturado, no qual o conceito de número real é preponderante e o estudo das funções de variável real aparece como um fim em si mesmo (...).

Dessa forma, qualquer proposta relacionada ao ensino de Cálculo no contexto brasileiro deve ser muito cuidadosa em relação à forma de apresentação dos conceitos mais fundamentais dessa disciplina, de modo que os principais objetivos de aprendizagem não sejam eclipsados pela necessidade do uso de argumentações matemáticas mais formais. Para tanto, é preciso ter clareza sobre tais objetivos.

Sofronas et al. (2011) apresentam um mapeamento dos principais aspectos que caracterizam o entendimento de um aluno que cursa a disciplina de Cálculo no início de um curso superior, considerando a perspectiva de 24 especialistas. Como resultado, enumeram os seguintes objetivos gerais de aprendizagem: (a) domínio dos principais conceitos do Cálculo (sendo derivadas, integrais e limites, nesta ordem, os principais), (b) construção de conexões e inter-relações entre esses conceitos, (c) habilidade de aplicar os conceitos do Cálculo (resolução de problemas e modelagem), e (d) conhecimento do contexto e da finalidade do Cálculo.

Considerando tal perspectiva e o conhecimento prévio dos alunos brasileiros, suas primeiras experiências em um curso de Cálculo devem: (I) contemplar os objetivos (c) e (d), de modo a favorecer que os alunos enxerguem sentido no estudo do Cálculo, (II) ter como ponto de partida situações em que os conceitos fundamentais do Cálculo apareçam de modo informal, aproximando essas experiências do conhecimento desenvolvido na escola secundária, e (III) mostrar a necessidade de que os conceitos, posteriormente, sejam formalizados levando em conta o rigor do pensamento matemático.

Linguagem matemática e a criação de significado

Desde a educação básica, a linguagem com a qual a matemática se expressa apresenta-se como uma barreira à aprendizagem, antes de funcionar como algo que a promova, como conclui Pimm (1987). Há uma diferença significativa entre a maneira como a matemática é apresentada nos livros e por muitos professores e as linguagens e os códigos de uso cotidiano dos alunos. Alguns autores propõem uma comparação entre o aprendizado da linguagem matemática e o aprendizado de uma língua estrangeira, como sintetiza Eryvynck (1992).

A existência dessa barreira provocada pela linguagem torna inviável, para a maioria dos alunos, a criação de significado em relação a um conceito matemático a partir do domínio da linguagem formal. Apesar disso, muitas disciplinas de matemática ministradas em cursos superiores ainda se organizam segundo essa lógica, expressa no esquema da figura 1.

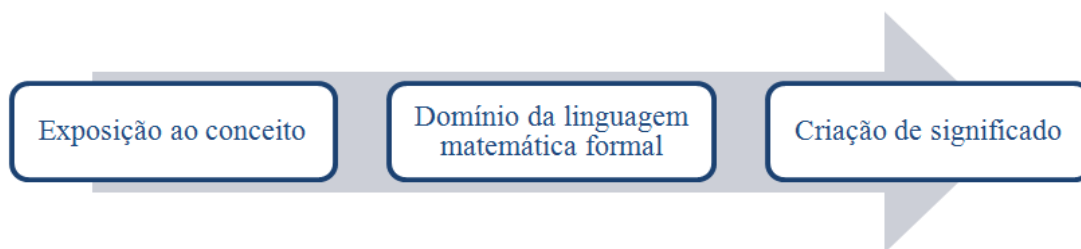


Figura 1. Esquema para domínio da linguagem matemática formal antes da criação de significado.

Diferentes estratégias são usadas com o intuito de facilitar a superação dessas barreiras durante o processo de aprendizagem.

A despeito de quase sempre conduzir a uma aprendizagem mecânica, a repetição no uso de um novo conceito é uma dessas estratégias. Espera-se que o aluno, reproduzindo a aplicação do mesmo conceito diversas vezes, vá evoluindo gradativamente no seu entendimento conjuntamente com o domínio da linguagem. Ao aprender a desenvolver $(a + b)^2$ em produtos notáveis, o aluno pode não ter clareza do significado de a e b na expressão, assim como pode não entender bem o que é o quadrado de algo que não é um número específico. É difícil esperar que, ao reproduzir esse desenvolvimento para expressões similares tais como $(x + 3)^2$ ou $(3m + 2n)^2$, o aluno possa construir progressivamente esses significados, ajudando-o a dominar a linguagem.

Machado (2012) destaca o uso de metáforas como uma possibilidade para diminuir o impacto nesse processo, na medida em que elas estabelecem pontes entre diferentes contextos, a despeito da diversidade de campos semânticos existentes entre eles. Naturalmente, deve-se estar atento às limitações existentes nessa utilização, uma vez que as metáforas caracterizam-se por relações de analogia, e não de equivalência.

O uso combinado de múltiplas representações da linguagem matemática também pode levar o aluno a construir o significado de algo que ele não conhece, com base em algo que lhe seja mais familiar. Para a função $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada pela lei $f(x) = 2x + 3$, por exemplo, pode-se construir um gráfico no plano cartesiano, uma tabela ou apresentar um texto como “o valor da grandeza y é igual a duas vezes o valor da grandeza x acrescido de 3 unidades”.

Tais estratégias têm por objetivo levar o aluno a criar o significado dos conceitos matemáticos a que está sendo exposto, a partir de um entendimento parcial da linguagem e, portanto, antes do desenvolvimento da linguagem necessária para operá-los, como ilustra o esquema da Figura 2.

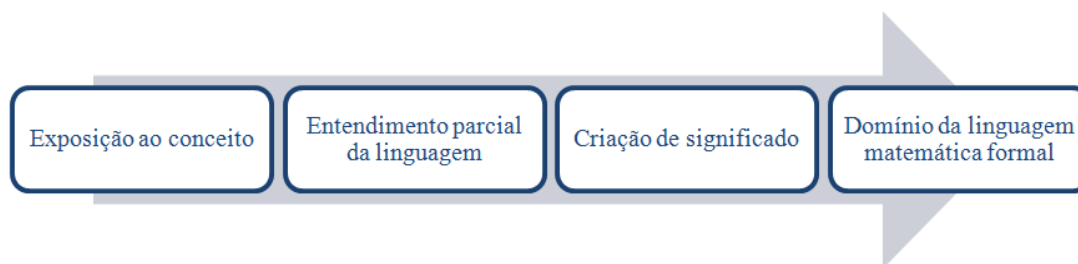


Figura 2. Esquema para criação de significado antes do domínio da linguagem matemática formal.

Entre as estratégias que facilitam a criação de significado, a contextualização se destaca por possibilitar que o aluno opere com um conceito antes mesmo do entendimento parcial da linguagem. Por exemplo, a função $f(x) = 2x + 3$, poderia ser apresentado por meio da contextualização:

Um álbum de figurinhas custa \$3 e cada pacote de figurinhas custa \$2. Gustavo gostaria de saber quanto irá gastar se comprar o álbum e as figurinhas, dependendo do total de pacotes que precisar comprar. Como Gustavo pode fazer esse cálculo?

Sobre a importância da contextualização no processo de criação de significados, Machado (2002) defende que:

(...) sempre conhecemos, sobre qualquer tema, muito mais do que conseguimos expressar, linguística ou conscientemente, e esse conhecimento tácito é absolutamente fundamental para a sustentação daquele que se consegue explicitar. Como as avaliações levam em consideração essencialmente a dimensão explícita, é necessário desenvolver-se estratégias de enraizamento de tais formas de manifestação nas componentes da dimensão tácita do conhecimento, continuamente alimentadas por elementos culturais de natureza diversa.

Esse enraizamento na construção dos significados constitui-se por meio do aproveitamento e da incorporação de relações vivenciadas e valorizadas no contexto em que se originam, na trama de relações em que a realidade é tecida; em outras palavras, trata-se de uma contextualização. (...) Na medida em que incorpora relações tacitamente percebidas, a contextualização enriquece os canais de comunicação entre a bagagem cultural, quase sempre essencialmente tácita, e as formas explícitas ou explicitáveis de manifestação do conhecimento.

Nesse texto, assumimos que, por meio da contextualização, pode-se promover a criação de significado pelo aluno antes mesmo do entendimento parcial da linguagem, conforme sugere o esquema da Figura 3.

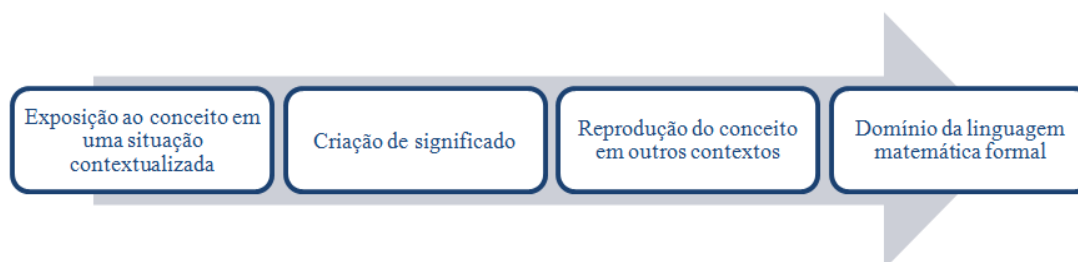


Figura 3. Esquema para criação de significado antes do domínio da linguagem matemática formal.

Limites e continuidade

Do ponto de vista de uma construção logicamente bem estruturada, o conceito de limite é fundamental para a teoria do Cálculo Diferencial e Integral, pois está na base tanto do conceito de derivada (taxa de variação instantânea) quanto de integral (somas de Riemann). Tal característica integradora é evidenciada no mapeamento realizado por Sofronas et al. (2011), onde os limites, além de comporem o conjunto dos principais conceitos do Cálculo, aparecem no grupo de conexões e inter-relações entre os conceitos fundamentais da disciplina.

O argumento acima pode ser usado para justificar a sequência didática escolhida pela grande maioria dos autores de livros de Cálculo, que iniciam o estudo da disciplina pelos limites. No entanto, a construção histórica do Cálculo aponta para um caminho diferente: foram os conceitos de derivada e integral, mais diretamente ligados aos fenômenos naturais e cotidianos, que motivaram o desenvolvimento inicial da disciplina. Essa diferença mostra a necessidade de que se busquem estratégias para que o conceito de limite seja apresentado de forma mais significativa aos alunos, ainda mais quando se pensa no contexto brasileiro.

Ao longo do Ensino Médio, a experiência dos alunos brasileiros com o estudo de funções restringe-se, quase que inteiramente, às funções contínuas. Porém, para introduzir o conceito de limite, as funções contínuas não são as mais apropriadas, uma vez que, em qualquer ponto de seu domínio, o limite é igual ao próprio valor da função. Por isso, na maioria dos livros didáticos, o conceito de limite é introduzido a partir de uma função que apresente uma descontinuidade em um ponto, que pode ou não pertencer ao seu domínio.

Por exemplo, em um livro didático de Cálculo (Stewart, 2011), a ideia de limite é introduzida a partir do problema da obtenção da reta tangente ao gráfico de uma função. Aproximando a reta tangente por sucessivas retas secantes, o autor constrói a função de $\mathbb{R} - \{1\}$ em $\mathbb{R}$ dada por $y = \frac{x^2-1}{x-1}$, analisando seu comportamento para valores de x próximos de 1. Neste caso, o ponto $x = 1$, que não pertence ao domínio da função, representa a descontinuidade referida anteriormente.

Apesar do uso de uma descontinuidade para a introdução da ideia de limite, mostrada pelo exemplo, a continuidade de uma função é abordada apenas depois da definição formal de limite, quando o nível de formalização matemática requerido dos alunos já é bastante sofisticado se comparado às suas experiências no Ensino Médio. Dessa forma, perde-se a oportunidade de explorar um conceito mais intuitivo, a continuidade, antes de serem introduzidos todos os formalismos que caracterizam o conceito de limite.

Neste trabalho, propomos que seja feita uma inversão na apresentação dos conceitos de limite e continuidade, pelo menos antes de sua formalização matemática. Como mostrado, a ideia de descontinuidade já é usada como ponto de partida para introduzir os limites. Reforçar a oposição entre continuidade e descontinuidade em situações cotidianas, que despertem o interesse dos alunos, permite construir o conceito de limite de maneira mais significativa.

Método

Um contexto em que naturalmente surge a oposição entre continuidade e descontinuidade, potencialmente motivador para alunos das áreas de Administração de Empresas e Economia, é o cálculo do imposto de renda. Neste trabalho, descrevemos a aplicação de um estudo de caso relacionado a esse tema aos alunos da disciplina Cálculo 1, ministrada no 1º. semestre dos cursos

de Administração de Empresas e Economia do Insper. Na sua maioria, são alunos que nunca tiveram contato com o Cálculo Diferencial.

O estudo de caso foi dividido em três partes, todas relacionadas ao cálculo do imposto de renda no Brasil. As partes 1, 2 e 3 foram realizadas na segunda, terceira e quinta aulas do curso, respectivamente.

Como em vários outros países do mundo, a cobrança de imposto de renda no Brasil contempla diferentes alíquotas, dependendo da faixa de renda do contribuinte. A tabela 1 mostra as alíquotas praticadas no Brasil no ano de 2015, com as faixas de renda arredondadas para finalidades didáticas.

Tabela 1

Alíquotas do imposto de renda no Brasil

Faixa de renda mensal (R\$)	até 1.800,00	mais de 1.800,00, até 2.700,00	mais de 2.700,00, até 3.600,00	mais de 3.600,00, até 4.500,00	mais de 4.500,00
Alíquota	0,0%	7,5%	15,0%	22,5%	27,5%

Fonte: Site da Receita Federal (<http://www.receita.fazenda.gov.br/aliquotas>). 2014.

As diferentes alíquotas praticadas, aliadas a um desconhecimento geral da população sobre o sistema de cálculo do imposto, podem gerar a crença de que, em determinados casos, um aumento da renda de um contribuinte leve a uma diminuição de seus ganhos líquidos, uma vez que, ao cair em outra faixa, ele deverá pagar um percentual significativamente maior de imposto.

Estudo de caso – Parte 1

A motivação do estudo de caso é a situação de uma pessoa que tinha uma renda mensal de R\$ 1.780,00 e, após receber um aumento salarial, passou a ter renda de R\$ 1.900,00. De acordo com a tabela 1, essa pessoa não pagava Imposto de Renda, mas, depois do aumento, passou a ser tributada. Equivocadamente, acreditou que passaria a ter um desconto de 7,5% em seu salário, recebendo R\$ 1.757,50 – quantia inferior ao que recebia antes do aumento.

O conflito gera a oportunidade de uma investigação mais profunda. Os alunos receberam a tarefa de construir o gráfico da função I, que relaciona o imposto pago por uma pessoa em função de sua renda mensal (x), considerando o raciocínio realizado pela pessoa que recebeu o aumento (figura 4). Após a construção do gráfico, duas perguntas foram lançadas a eles:

(Q1) Qual característica da função I explica a queda do ganho líquido da pessoa, mesmo tendo recebido um aumento de salário?

(Q2) Como tal característica pode ser descrita matematicamente?

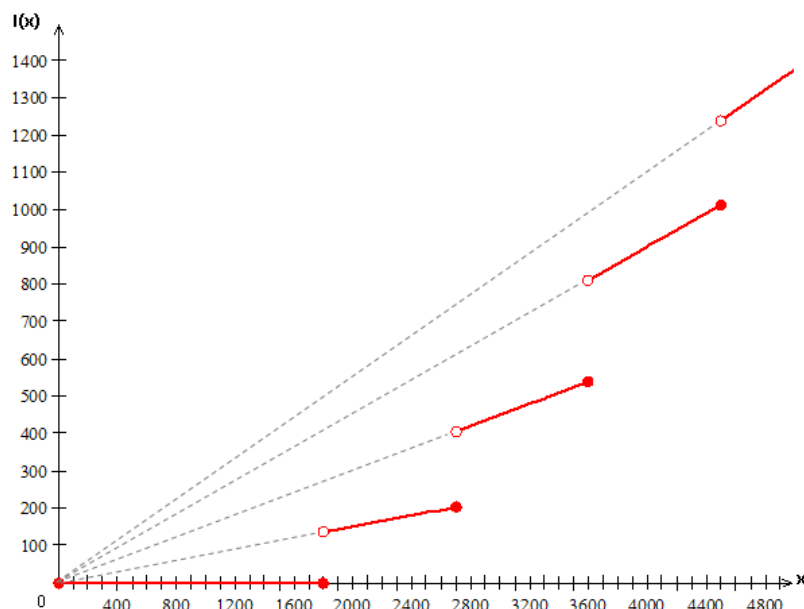


Figura 4. Gráfico do imposto devido $I(x)$ em função da renda x conforme interpretação inicial do cálculo do imposto.

Trabalhando em duplas, os alunos construíram suas interpretações para as duas perguntas, que foram posteriormente socializadas com a classe.

Estudo de caso – Parte 2

A tarefa proposta na parte 2 do estudo de caso consistiu em propor uma interpretação da tabela de alíquotas do imposto de renda (tabela 1) para a qual não seja possível que um aumento de renda leve a uma diminuição dos ganhos líquidos de um contribuinte, independentemente da sua faixa de renda. Para guiar a discussão dos alunos, organizados em duplas, foram propostas as duas perguntas a seguir.

(Q3) Qual característica deve ter a função I para que o ganho líquido de uma pessoa nunca diminua quando sua renda aumentar?

(Q4) O gráfico construído na parte 1 é constituído de vários segmentos de reta. Qual característica desses segmentos pode ser identificada com a alíquota em cada faixa de renda?

Inicialmente, os alunos tentaram resolver o problema graficamente, buscando traçar o gráfico da função I a partir de suas reflexões sobre as duas perguntas. Considerando as respostas às perguntas (Q3) – a função não deve apresentar descontinuidades, e (Q4) – cada alíquota é caracterizada pela inclinação do segmento de reta correspondente, é possível construir o gráfico mostrado na figura 5.

Em seguida, foi pedido aos alunos que determinassem a lei da função I .

As partes 1 e 2 do estudo de caso foram realizadas na segunda e terceira aulas do curso, respectivamente. A partir das discussões feitas nessas aulas, o conceito de continuidade de uma função em um ponto foi apresentado. Na quarta aula, foi feita a formalização do conceito de continuidade, o que gerou a oportunidade da introdução do conceito de limite. Com isso, a turma estava preparada para a parte 3 do estudo de caso, que foi aplicada na quinta aula do curso.

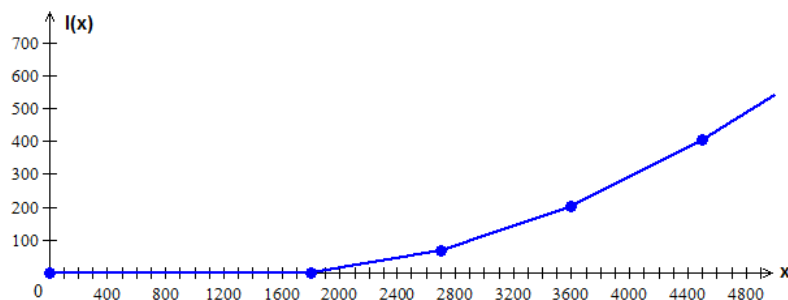


Figura 5. Gráfico do imposto devido $I(x)$ em função da renda x conforme interpretação correta do cálculo do imposto.

Estudo de caso – Parte 3

A parte 3 do estudo de caso teve como objetivo tratar do limite de uma função no infinito. Para isso, analisou-se o comportamento da alíquota efetiva do imposto de renda, que consiste no percentual efetivo pago de imposto por um contribuinte, em relação ao total de sua renda. Chamando a alíquota efetiva de $A(x)$, tem-se que $A(x) = 100 \cdot I(x)/x$. Considerando a interpretação correta do cálculo do imposto de renda (parte 2 do caso), a alíquota efetiva é sempre menor do que 27,5%, mas tende a esse valor à medida que a receita x cresce muito.

Para observar o comportamento da função A , os alunos construíram uma tabela com os valores da alíquota efetiva para valores crescentes de x . Para facilitar a construção da tabela, foi usado um programa da Receita Federal brasileira¹ que simula o cálculo do imposto de renda. A partir da tabela, os alunos construíram o gráfico de $A(x)$ em função de x (figura 6) e procuraram responder as duas perguntas a seguir.

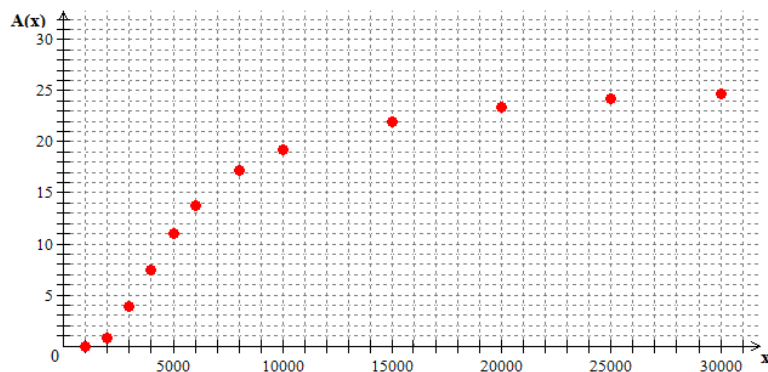


Figura 6. Gráfico da alíquota efetiva do imposto de renda $A(x)$ em função da renda x .

(Q5) Qual o comportamento da função A para valores muito grandes de x ?

(Q6) Apresente um argumento algébrico para justificar sua resposta à pergunta (Q5).

Resultados

Durante o planejamento do estudo de caso, admitiu-se que o cálculo do imposto de renda seria um assunto potencialmente motivador para alunos do 1º. semestre de cursos de Economia e Administração de Empresas. Dessa forma, procurou-se coletar, durante a aplicação do caso, evidências que confirmassem ou não tal hipótese. Um dos instrumentos usados para isso foi a

¹Disponível em <https://www.receita.fazenda.gov.br/Aplicacoes/ATRJO/Simulador/TelaOptMenAnu.htm>.

adesão dos alunos às leituras prévias. Tais leituras eram disponibilizadas dois dias antes da aula e tratavam de aspectos não matemáticos do imposto de renda, com o objetivo de que os alunos compreendessem o contexto em que tal imposto era cobrado (finalidade da cobrança, aspectos históricos, políticos e econômicos, sistema de cobrança em outros países).

Os alunos não foram cobrados em relação às leituras prévias, que eram discutidas nos dez primeiros minutos de cada aula. Mesmo assim, nas três aulas, mais de 90% dos alunos realizaram a leitura e trouxeram outras questões, como o cálculo do imposto de renda para empresas e aplicações financeiras. Observou-se ainda que o engajamento dos alunos nas discussões iniciais se mantinha durante a realização do estudo de caso, sendo maior do que em atividades realizadas em outras aulas, que não exploravam a contextualização.

Elaboração intuitiva do conceito de continuidade

Na parte 1 do estudo de caso, os alunos rapidamente chegaram à lei matemática da função I considerando a interpretação errada sugerida pelo raciocínio da personagem. No entanto, encontraram dificuldade na construção do gráfico dessa função, principalmente nos pontos de mudança da alíquota. Foi feita, então, uma intervenção pelo professor, que sugeriu que fossem desenhadas, em linha tracejada, as diferentes retas cujas equações compunham a lei da função I ($y = 0$; $y = 0,075x$; $y = 0,15x$; $y = 0,225x$; $y = 0,275x$) e destacados os trechos das retas correspondentes ao intervalo de cada alíquota, como mostrado na figura 4.

Durante a discussão que se seguiu à construção do gráfico, motivada pelas perguntas Q1 e Q2, emergiu o conceito de continuidade de uma função, enunciado ainda de maneira intuitiva. A discussão concentrou-se no comportamento da função no intervalo de 1.780 a 1.900, valores inicial e final da renda da personagem. Por isso, as respostas referem-se ao ponto $x = 1.800$. A tabela 2 mostra as explicações mais frequentes elaboradas pelos alunos após a socialização das ideias individuais com toda a classe.

Tabela 2

Respostas típicas para as perguntas Q1 e Q2

Q1	Q2
“Depois de $x = 1.800$, a função I dá um salto.”	“ $I(1800) = 0$ e $I(x) > 135$ para $x > 1800$ ”
“O imposto pago por uma pessoa que ganha 1.801 é muito maior do que o de uma pessoa que ganha 1.800.”	“ $I(1800) = 0$, mas $I(1801) = 135,075$ ”

No modelo analisado pelos alunos na parte 1, destacavam-se os pontos de descontinuidade da função I. Para contrapor-se a esse modelo, a situação proposta na parte 2 levava à construção de uma função contínua.

A maioria dos alunos respondeu com facilidade a pergunta Q3, identificando que a nova função I não poderia apresentar “saltos”. Isso pode ser justificado pelo enfoque dado à descontinuidade da função I na discussão feita ao final da parte 1. Na pergunta Q4, alguns alunos encontraram dificuldade para relacionar a alíquota ao coeficiente angular da reta. Podemos identificar que muitos desses alunos não estavam habituados, no Ensino Médio, a trabalhar com o coeficiente angular de uma reta.

A principal dificuldade dos alunos consistiu em combinar as respostas das perguntas Q3 e Q4 para construir uma solução gráfica para o problema, como mostrado na figura 5. Também foi difícil para muitos deles encontrar uma interpretação da tabela de alíquotas condizente com o novo gráfico construído – cada alíquota só incide sobre a parte da renda que excede a faixa da alíquota anterior. A dificuldade apresentada evidencia a pouca desenvoltura dos alunos com a resolução de problemas e modelagem que, como apontado por Sofronas et al. (2011), deve ser um dos quatro grandes objetivos de um curso de Cálculo. Esse fato reforça a importância de que o curso de Cálculo exponha os alunos a situações desse tipo com frequência.

Ao final das partes 1 e 2 do estudo de caso, a descrição matemática da descontinuidade da função I no ponto $x = 1.800$ na pergunta Q2 e a facilidade encontrada pelos alunos na pergunta Q3 mostrou que a ideia intuitiva desse conceito começava a ser formada. Com isso, já era possível passar para a formalização do conceito de continuidade, o que foi feito na quarta aula do curso.

Formalização do conceito de continuidade

Durante a discussão da parte 1 do estudo de caso, muitos alunos, ao exemplificarem uma renda “um pouco maior do que R\$ 1.800,00”, citaram a quantia R\$ 1.800,01. É natural que esse raciocínio apareça no sistema monetário, em que as quantias variam de 1 em 1 centavo. Porém, para formalizar o conceito de continuidade, desejava-se trabalhar com o conjunto dos números reais. Dessa forma, no início da quarta aula do curso, foi preciso abstrair o contexto do imposto de renda, considerando que a renda x de uma pessoa poderia assumir qualquer valor real não negativo.

Trabalhando no conjunto dos reais, a pergunta “o que é um número próximo de 1.800?” traz muitas dúvidas aos alunos. Assim, fica evidente a necessidade de formalizar a ideia inicial de continuidade traduzida pelas respostas da tabela 2 – x está próximo de 1.800, então $I(x)$ deve estar próximo de $I(1.800)$.

Tal argumentação acrescenta um elemento a mais ao esquema da figura 3. A exposição ao conceito em uma situação contextualizada permite ao aluno criar significado para aquele conceito e reproduzi-lo em outros contextos, o que subsidia a sua apresentação na linguagem matemática formal. É importante, porém, que o aluno perceba a necessidade e os benefícios da representação desse conceito em uma linguagem formal, para que se engaje na tarefa de superar o obstáculo representado pelo formalismo.

O conceito de limite

A partir da formalização do conceito de continuidade, tornou-se bastante natural passar à ideia de limite. Para isso, foi explorada a função I dada pelo gráfico da figura 4, focando-se a discussão no comportamento dessa função em torno do ponto $x = 1.800$, o que permitiu abordar o conceito de limites laterais (nessa função, tem-se $I(1.800) = 0$, mas $\lim_{x \rightarrow 1.800^+} I(x) = 135$). Depois de analisar outros exemplos, foi apresentado, ainda na quarta aula, o conceito de limite de uma função, de maneira formal.

Na quinta aula do curso, o conceito de limite foi ampliado para o caso em que x tende ao infinito, por meio da realização da parte 3 do estudo de caso. A utilização do programa de cálculo do imposto de renda disponibilizado pela receita federal tornou a atividade bastante dinâmica e favoreceu o engajamento dos alunos. Além disso, permitiu aos alunos que ainda tinham alguma dúvida no mecanismo de cálculo do imposto esclarecê-las.

Na pergunta Q5, a maioria dos alunos percebeu que a função A tendia a se estabilizar à medida que x crescia muito. O plano cartesiano fornecido para desenhar o gráfico de A trazia valores de x no intervalo de 0 a 30.000. Como $A(30.000) = 24,7$, muitos alunos tiveram a iniciativa de calcular a alíquota efetiva para valores bem maiores do que 30.000, verificando que ela tendia a 27,5. No entanto, o programa fornecia a alíquota efetiva com apenas duas casas decimais, arredondando os valores calculados. Com isso, para valores de x superiores a 17.000.000, ele apontava que a alíquota efetiva era 27,50%. Com base na descoberta dos alunos, foi lançada a seguinte pergunta: “existe algum valor de x para o qual a alíquota efetiva é exatamente 27,5?”. Como não houve consenso, foi solicitado que passassem à questão Q6.

Para $x > 4.500$, a função I é dada por $I(x) = 0,275x - 832,5$. No mesmo intervalo, a alíquota efetiva é dada por $A(x) = 27,5 - 83.250/x$. A partir da análise dessa expressão, os alunos foram capazes de justificar a resposta da pergunta Q5 e compreender que, para a função A em particular, o valor 27,5 nunca é atingido, embora ele apareça no programa de cálculo do imposto. A partir desse momento, foi formalizado o conceito de limite de uma função no infinito.

Conclusões

Desde o trabalho de Tall e Vinner (1981), muitos autores têm desenvolvido pesquisas nas quais se identifica grande concordância de que os alunos, de modo geral, apresentam dificuldade com o conceito de limite. Contribuições importantes para a busca de estratégias que permitam superar essas dificuldades têm sido feitas desde então (veja, por exemplo, Cottrill et al., 1996; Szydlik, 2000; Cappetta e Zollman, 2013).

A questão do formalismo matemático com o qual os estudantes se deparam em seus cursos iniciais de Cálculo é, sem dúvida, um elemento que contribui para essa dificuldade. No Brasil, essa situação é ainda mais crítica, uma vez que os alunos não trazem conhecimentos básicos de Cálculo Diferencial do Ensino Médio onde possam ancorar os novos conceitos apresentados, muitas vezes, com excessos de formalismo.

O estudo de caso apresentado neste trabalho exemplificou como a contextualização pode ser uma estratégia valiosa para diminuir a barreira ao aprendizado de limites, observada na maioria dos cursos iniciais de Cálculo. Durante a aplicação do caso, já emergiram as principais ideias envolvidas nos conceitos de continuidade e limite, facilitando muito a compreensão dos alunos da posterior formalização matemática.

Não se trata, portanto, de diminuir o rigor matemático com que os conceitos são apresentados. Esta é uma prerrogativa do professor, que deve levar em consideração os objetivos de aprendizagem que deseja alcançar, o conhecimento prévio dos alunos, as características do curso, entre outros aspectos. Pelo contrário, trata-se de uma estratégia que objetiva preparar melhor os alunos para o formalismo que é introduzido nos cursos iniciais de Cálculo.

Em termos de aprofundamento do estudo, uma questão emerge com base nessas conclusões: existe alguma relação entre a criação de significado no conceito de limites e a motivação dos alunos para aprender Cálculo? Com base no comportamento dos alunos, há sinais de que possa existir alguma relação, mas é necessária uma investigação mais profunda para coletar evidências que possam refutar ou não essa hipótese.

Referências e bibliografia

- Barufi, M. C. B. (1999). *A construção/negociação de significados no curso universitário inicial de Cálculo Diferencial e Integral*. Tesede Doutorado não publicada, Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, Brasil.
- BO (2011). Bulletin officielspécial n° 3 du 17 mars 2011. *Mathématiques - classe de lèredes séries STD2A*. Disponível em: <<http://www.education.gouv.fr/>>. Acesso em 18.12.14.
- BOE num. 147 (2008). *ORDEN ESD/1729/2008*, de 11 de junho, pela qual se regula a ordenação e se estabelece o currículo do bachillerato na Espanha. Disponível em: <<http://www.boe.es/boe/dias/2008/06/18/pdfs/A27492-27608.pdf>>. Acessoem 18.12.14.
- Cappetta, R. W., & Zollman, A. (2013). Agents of Change in Promoting Reflective Abstraction: a Quasi-Experimental Study on Limits in College Calculus. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(3), 343-357.
- Costa, J. C. O. (2011). *O Currículo de Matemática no Ensino Médio do Brasil e a Diversidade de Percursos Formativos*. Tesede Doutorado não publicada, Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, Brasil.
- Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Scheme. *Journal of Mathematical Behavior*, 15, 167-192.
- DGE. Direção Geralda Educação. Ministério da Educação (Portugal). *Metas Curriculares – Ensino Secundário*. Disponível em: <<http://dge.mec.pt/>>. Acesso em 18.12.14.
- Ervynck, G. (1992). Mathematics as a Foreign Language. *Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)* (16th, Durham, NH, August 6-11, 1992). Volumes I-III.
- Lima, G. L. (2014). Contextualizando momentos da trajetória do ensino de cálculo na graduação em matemática da USP. *Educ. Matem. Pesq.*, 16, 125-149.
- Machado, N. J. (2002). Sobre a ideia de competência. In: Perrenoud, P. et alii – *Competências para ensinar no século XXI*. Porto Alegre: ArtMed.
- _____. (2012). *Matemática e educação*. 6ª edição. São Paulo: Cortez Editora.
- NCTM (2000). National Council of Teachers of Mathematics. *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston.
- Pimm, D. (1987). *Speaking Mathematically*. London: Routledge & Kegan Paul.
- Rezende, W. M. (2003). *O ensino de Cálculo: dificuldades de naturezaepistemológica*. Tese de Doutorado não publicada, Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, Brasil.
- Sofronas, K. S., DeFranco T. C., Vinsonhaler, C., Gorgievski, N., Schroeder, L., & Hamelin, C. (2011). What does it mean for a student to understand the first-year calculus? Perspectives of 24 experts. *Journal of Mathematical Behavior*, 30, 131-148.
- Stewart, J. (2011). *Cálculo* (tradução da 6ª edição americana). Cengage Learning.
- Szydlik, J. E. (2000). Mathematical Beliefs and Conceptual Understanding of the Limit of a Function. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(3), 258-276.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.

El esquema del concepto Transformación Lineal. Una mirada a tres interpretaciones desde la Teoría APOE

Isabel **Maturana** Peña

Instituto de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Chile

isamatup@hotmail.com

Marcela **Parraguez** González

Instituto de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Chile

marcela.parraguez@ucv.cl

Maria **Trigueros** Gaisman

Instituto Tecnológico Autónomo de México

México

trigue@itam.mx

Resumen

Basándonos en la teoría APOE (Acciones, Procesos y Esquemas) (Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros y Weller, 2014) investigamos los niveles de coherencia en el esquema del concepto Transformación Lineal, entendiendo este como una articulación entre diferentes interpretaciones, las que hemos denominado interpretación funcional, matricial y geométrica; todas ellas entrelazadas por la combinación lineal. En este reporte de investigación, damos cuenta de una segunda etapa en la investigación, referida específicamente al proceso de validación del modelo multinterpretativo para el concepto transformación lineal, a partir de entrevistas semiestructuradas, desde donde se concluye, por ejemplo que el concepto de kernel es determinante en la evolución del esquema del concepto transformación lineal.

Palabras clave: Esquema, Transformación Lineal, APOE.

Introducción

Analizamos el concepto transformación lineal considerando tres formas en que este se presenta, donde cada una de ellas fue descompuesta en sus elementos fundamentales y articulados básicamente por el concepto combinación lineal; es así que nuestro estudio propuso, y basándose en la metodología propia de la teoría APOE, una descomposición genética, por cada interpretación del concepto transformación lineal que permitió una descripción detallada del esquema para el concepto, estas descomposiciones genéticas aparecen en forma detallada en Alme 27, bajo el título “Construcciones y Mecanismos Mentales para el Aprendizaje de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal” (Maturana, Parraguez ,2014) y en acta CIBEM VII, bajo el título “Una Mirada Cognitiva a las Transformaciones Lineales. Articulación entre sus Tres Interpretaciones: Funcional-Matricial-Geométrica” (Maturana, Parraguez ,2013), en esta última se muestran las primeras evidencias obtenidas donde se incorporan las tres interpretaciones, desde donde emerge un modelo multinterpretativo para el estudio del concepto transformación lineal.

Sobre el concepto de transformación lineal, la documentación hasta ahora obtenida, da cuenta que su aprendizaje presenta una dificultad mayor, y son diversas las investigaciones en didáctica de la matemática que han abordado su problemática. Algunas de ellas en la última década, corresponden a los aportes de Uicab y Oktaç (2006), Molina y Oktaç (2007) ambas investigaciones abordan la problemática de aprendizaje en un contexto geométrico del concepto, identificando aquellos modelos que pueden tener los estudiantes en relación al concepto transformación lineal y el grado de interferencia de estos. Por otra parte, Roa y Oktaç (2010), dan cuenta de su investigación sobre la construcción de una Descomposición Genética del concepto transformación lineal, la cual se sustenta en la teoría APOE, proporcionando como resultado de investigación dos formas de construcción para concepto, ambas basadas en lo que llamaos interpretación funcional del concepto. Por su parte, Bagley, Rasmussen y Zandieh (2012) centran su investigación en la relación conceptual que los estudiantes establecen entre las matrices y las funciones lineales. Son algunos de los antecedentes que constituyeron la base para el diseño del modelo de investigación, entendido este como una propuesta desde APOE, que describe en detalle las construcciones y mecanismos mentales necesarios para la construcción y evolución del esquema concepto transformación lineal, es así que nuestros hallazgos, dan cuenta de los niveles de coherencia en el esquema del concepto transformación lineal, esto es la triada: Nivel Intra- Transformación Lineal, Nivel Inter-Transformación Lineal y Nivel Trans-Transformación Lineal.

La Teoría APOE

Dubinsky (Arnon et al., 2014) basado en el concepto de abstracción reflexiva, de Piaget, para describir la construcción de objetos mentales, distingue los siguientes mecanismos: interiorización, coordinación, encapsulación, y reversión. Estos, a su vez, originan diferentes construcciones mentales: acciones, procesos, objetos, esquemas (APOE).

Consideremos F un concepto matemático. Un individuo posee una concepción acción de F si las transformaciones que hace sobre él se realizan paso a paso, obedeciendo a estímulos que son y percibe como externos. Él interioriza la acción en una concepción proceso de F si puede realizar una operación interna que hace esencialmente la misma transformación enteramente en su mente, sin necesariamente recorrer todos los pasos específicos. Si piensa en un proceso como un todo, y realiza y construye transformaciones sobre su totalidad ha encapsulado el proceso en una concepción objeto de F . Un esquema de aquel trozo es una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están relacionados consciente o inconscientemente en la mente del individuo en una estructura cognitiva coherente. Una descomposición genética, describe en detalle los aspectos constructivos de F para explicitar un camino factible de su aprendizaje en términos de construcciones y mecanismos mentales.

Diseño metodológico de la investigación

Incorporamos a la metodología propia de la teoría APOE el estudio de caso (Stake, 2010). La unidad de estudio que constituyo el “caso”, son 20 alumnos chilenos de una universidad del país, estudiantes de la carrera de pedagogía en matemática. La selección de dichos estudiantes se vinculó con las siguientes categorías: estudiantes exitosos académicamente, avance curricular, ejercitan ampliamente en matemática, voluntarios, heterogeneidad en los procesos de formación de los estudiantes, accesibilidad de los investigadores. Es preciso dejar en clara que al caso de estudio se aplicó el ciclo de investigación previsto en la teoría APOE, el cual establece: un análisis teórico, conocido como descomposición genética; un diseño, basado en la

descomposición genética teórica, y aplicación de instrumentos; seguido de un análisis y verificación de datos (Asiala et al., 1996).

En este reporte damos cuenta de la etapa final en la investigación relacionada con la búsqueda de los indicadores para la construcción del esquema para el concepto transformación lineal, esto es mostraremos las evidencias obtenidas desde las entrevistas realizadas a los estudiantes del caso que mostraron construcciones próximas a la objeto para el concepto transformación lineal. Establecimos la articulación entre las interpretaciones del concepto como criterio de selección para establecer el nivel de la coherencia en el esquema para el concepto de transformación lineal. Para ello trabajamos en un resumen tabular de la información sobre las construcciones mentales mostradas en un cuestionario previo, para algunos tramos de las descomposiciones genéticas propuestas.

Denominaremos por las siglas M, F y G a las interpretaciones Matricial, Funcional y Geométrica del concepto transformación lineal.

Tabla 1

Estudiantes del caso que mostraron construcciones metales próximas a la de objeto en la interpretación funcional. Fuente propia año 2013

ESTUDIANTE	ORDEN ELEGIDO PARA DAR RESPUESTA AL CUESTIONARIO	CONSTRUCCION MENTAL MOSTRADA EN LA INTERPRETACION FUNCIONAL
E3	MFG	PROCESO
E6	FMG	PROCESO
E9	GMF	OBJETO
E15	FMG	PROCESO
E16	FMG	PROCESO
E17	FGM	PROCESO
E18	MFG	PROCESO

Tabla 2

Estudiantes del caso que mostraron construcciones metales próximas a la de objeto en la interpretación matricial. Fuente propia año 2013

ESTUDIANTE	ORDEN ELEGIDO PARA DAR RESPUESTA AL CUESTIONARIO	CONSTRUCCION MENTAL MOSTRADA EN LA INTERPRETACION MATRICIAL
E3	MFG	PROCESO
E9	GMF	PROCESO
E13	MFG	PROCESO
E18	MFG	PROCESO

Tabla 3

Estudiantes del caso que mostraron construcciones metales próximas a la de objeto en la interpretación geométrica. Fuente propia año 2013

ESTUDIANTE	ORDEN ELEGIDO PARA DAR RESPUESTA AL CUESTIONARIO	CONSTRUCCION MENTAL MOSTRADA EN LA INTERPRETACION GEOMÉTRICA
E3	MFG	PROCESO
E5	MGF	PROCESO
E7	GFM	PROCESO
E9	GMF	OBJETO
E18	MFG	PROCESO
E19	FGM	PROCESO

Se realizó un proceso de triangulación de los datos y la información de las tablas anteriores (tablas 1, 2 y 3), el propósito es encontrar quienes son los estudiantes del caso que mostraron construcciones mentales próximas a la de objeto para el concepto de TL; es así que: E3, E9 y E18 fueron los candidatos para ser entrevistados. En tabla 4 se muestra el resumen de este procedimiento.

Tabla 4

Triangulación de los datos de la investigación. Fuente propia año 2013

ESTUDIANTE	ORDEN ELEGIDO PARA DAR RESPUESTA AL CUESTIONARIO	CONSTRUCCION MENTAL MOSTRADA EN LA INTERPRETACION FUNCIONAL	CONSTRUCCION MENTAL MOSTRADA EN LA INTERPRETACION MATRICIAL	CONSTRUCCION MENTAL MOSTRADA EN LA INTERPRETACION GEOMÉTRICA
E3	MFG	PROCESO	PROCESO	PROCESO
E9	GMF	OBJETO	PROCESO	OBJETO
E18	MFG	PROCESO	OBJETO	PROCESO

La información mostrada por los estudiantes seleccionados, E3, E9 y E18, sobre la articulación de las interpretaciones, permitió planificar el guion de sus entrevistas.

- E3, muestra una construcción mental proceso en todas las interpretaciones, sobre la articulación, entre la interpretación funcional y geométrica, está basada en el teorema fundamental del álgebra lineal, no presenta evidencias claras de articulación con la interpretación matricial, lo que es contradictorio con: primeramente el orden en que selecciono responder al cuestionario fue MFG, y que mostró una construcción mental proceso en las respuestas a las preguntas de la interpretación matricial del concepto. Para la entrevista de E3, se debió considerar que no mostró algún tipo de preferencia por interpretación.
- E9 muestra una construcción mental objeto en dos interpretaciones, la funcional y a geométrica, sobre esta articulación evocando el teorema fundamental del álgebra lineal, sin dar evidencias sobre coordinación con otras interpretaciones. Para su entrevista consideraremos que ha mostrado una articulación, y su tratamiento al concepto emerge desde lo geométrico, lo que queda confirmado en su selección para escoger el orden en el cuestionario (GMF).
- E18 muestra una construcción mental objeto en la interpretación matricial, sobre la articulación, da evidencias de coordinaciones entre lo funcional y lo geométrico, no muestra articulaciones con lo matricial. E18 responde al cuestionario es MFG, por lo que en su entrevista profundizaremos en sus articulaciones desde lo matricial.

El esquema y el modelo multinterpretativo

Nuestra propuesta para analizar los esquemas de los estudiantes seleccionados del caso se basa en el modelo multinterpretativo para el concepto de transformación lineal. El concepto de transformación lineal es un concepto unificador para el álgebra lineal, por esta razón para la caracterización de su esquema como construcción mental, proponemos considerar las interpretaciones como esquemas mentales que nos permitirán determinar los niveles de coherencia en el esquema global del concepto. Entonces, para obtener evidencias sobre estos niveles de coherencia en el esquema del concepto, consideramos el “exterior” de nuestras interpretaciones, que forman parte del concepto, pero que no fueron consideradas como

elementos fundamentales en la construcción del concepto transformación lineal, es decir no aparecen como construcciones o mecanismos mentales en ninguna de las descomposiciones genéticas de cada interpretación, el propósito es poner a prueba cada descomposición genética como modelo descriptivo para el aprendizaje, y al mismo tiempo obtener evidencia de los elementos emergentes que construyen al concepto transformación lineal.

En la figura 1 damos cuenta de esta idea, sobre la estructura para el concepto transformación lineal, donde posee componentes de origen funcional, matricial y geométrico, pero no desconocemos que es más que esto. Un ejemplo importante de un concepto en este “exterior”, es el de isomorfismo de espacios vectoriales, el que puede servir para examinar los elementos emergentes, pues posee características transversales para el álgebra en general.

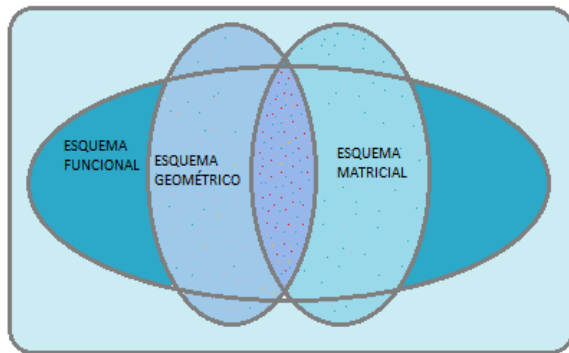


Figura 1. Las componentes propuestas para el Estudio del esquema del concepto transformación lineal.

Para analizar la coherencia en el esquema del concepto transformación lineal y determinar sus componentes, proponemos que un estudiante muestra un nivel de esquema *Intra* para el concepto transformación lineal, si en alguna de sus interpretaciones da cuenta de poseer una construcción mental objeto, la que le permite realizar ciertas acciones sobre algunas estructuras fundamentales, pero no ha articulado las tres interpretaciones, por lo que responde a las preguntas que dan cuenta de la construcción del objeto del concepto transformación lineal en alguna de sus interpretaciones, sin establecer correspondencia con las otras interpretaciones del concepto. Es así que al enfrentarlo a situaciones referidas al concepto transformación lineal, de un nivel superior, por ejemplo en relación al teorema del isomorfismo de espacios no podría responder en forma adecuada.

Un estudiante muestra un nivel de esquema *Inter* del concepto transformación lineal, es aquel que por lo menos ha articulado dos de las interpretaciones de este esquema, es de esta forma que responde a las preguntas que dan cuenta de la construcción del objeto del concepto transformación lineal, lo que le permite establecer las primeras correspondencias o concordancias con los teoremas propios de las transformaciones lineales. Para finalizar un estudiante muestra un nivel de esquema *Trans* del concepto transformación lineal, si responde a las preguntas que dan cuenta de la construcción del objeto del concepto transformación lineal, y es capaz de establecer correspondencia con todas las otras interpretaciones del concepto. Por lo que establecería conexiones con los teoremas propios de las transformaciones lineales, como por ejemplo el teorema del isomorfismo de espacios vectoriales. Es así que incorporamos en algunas de las preguntas seleccionadas para la entrevista la noción de isomorfismo de espacios vectoriales; a modo de poner a prueba todas las componentes del esquema del concepto transformación lineal. Pensamos que las nociones desde la perspectiva funcional como las de inyectividad y epiyectividad debieran emerger, junto con la de linealidad, estas deben coordinarse

con el concepto kernel y de dimensión, para en lo posible dar una respuesta que construya una función que respete la estructura de espacio vectorial. Los conceptos de grupo cociente y clase estarían en el límite del concepto transformación lineal, por lo que este tipo de construcción obedecería a un nivel Trans siempre que dé muestras de su coherencia.

Hemos dado cuenta de la forma en que fueron seleccionados los estudiantes del caso para las entrevistas, además se mostró el criterio para analizar los esquemas lo que constituye la directriz de análisis de nuestros datos.

Algunas evidencias obtenidas en las entrevistas

A continuación presentaremos un extracto de los relatos de los tres entrevistados para dar respuesta a la siguiente pregunta desde donde se pudo obtener algunas de las evidencias que sostenemos. Las entrevistas se realizaron por separado y se video gravaron.

Dada la transformación lineal $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definida por $[F]_D^{D'} = \begin{pmatrix} -1/2 & 5/2 & 0 \\ 1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$, donde $D = \langle (1, 0, 1), (1, 1, 0), (2, 1, 2) \rangle$ y $D' = \langle (1, 1), (1, -1) \rangle$, determine si la transformación lineal F es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Extracto de la respuesta de E3:

Realiza algunos cálculos que aparecen en la figura 2, los que corresponden a la búsqueda del kernel de la transformación lineal.

Handwritten work showing the calculation of the kernel of a linear transformation. The work includes the definition of a vector in the domain D , the application of the transformation matrix, and the resulting system of linear equations in three variables. The equations are then simplified to find the kernel.

Figura 2. Los cálculos realizados por E3.

[Ent-267] ¿Es un isomorfismo de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$?

[E3--267] No. No, no, no. Porque quizás no es inyectivo. Hay que hacerlo.

Realizó los cálculos mostrados en la figura 2, donde el kernel le permite dar respuesta a la pregunta, y por otra parte, reconstruir la función preservando la estructura algebraica de espacio vectorial.

[E3--281] Claro, pero por el Kernel no era 0.

[Ent-282] ¿Cómo calculaste el Kernel?

[E3--282] Las tres imágenes dan cero.

[E3--284] ...Es que me huele que si uno de estos me da 0... No me va a dar 0

[E3--287] Sí, es un conjunto de preimágenes del 0.

[E3--288] También es un subespacio. Además los puntos de $\mathbb{R}^3$ que van a dar al 0 de la transformación.

Responde que no es un isomorfismo, pero frente a la situación de reformular la función para que si lo sea E3 muestra que el esquema de la interpretación matricial le permite reconstruir la transformación en su interpretación funcional y responder a esta pregunta sobre el isomorfismo.

Extracto de la respuesta de E9:

[E9--36] Nuevamente la dimensión de los espacios es distinta, así que no puede haber un isomorfismo.

[Ent-37] ¿Estás seguro? Entonces tú dices que no hay un isomorfismo.

[E9--37] Sí.

$$N_0 \quad \dim \mathbb{R}^3 > \dim \mathbb{R}^2 < (1, 0, 1), (1, 1, \rho) >$$

Figura 3. Muestra los argumentos de E9.

[Ent-39] ¿Y, no es posible redefinir?

[E9--39] No, no es posible, porque si... Porque el espacio en el conjunto es de dimensión 3, así que nosotros, aquí abajo no puede generar todo...

Tenemos una base aquí de dimensión 2.

[E9--41] Y en la imagen. Y conjunto de dimensión 2 no puede generar que tiene que aparecer aquí. Así que no puede haber un isomorfismo aunque sean iguales.

E9 para dar respuesta a la pregunta 5 coordina las construcciones mentales proceso del concepto de dimensión con el concepto de función, mediante el teorema fundamental del álgebra lineal. Lo que no alcanza para construir el teorema del isomorfismo de espacios vectoriales, pues falta coordinar con el concepto de núcleo de la TL que le permitiría construir el grupo cociente lo que permitiría construir un isomorfismo.

Extracto de la respuesta de E18:

Lee la pregunta y reflexiona sobre las dimensiones de los espacios de partida y de llegada:

[E18-126] Pero si vamos al teorema, este tiene tres, y si se confirma que tiene que ser cero, más dos... No nos daría la igualdad.

[Ent-127] A ver, cómo. Explicame. Qué es ese juego de números.

[E18-127] Ya. Es que la dimensión de los espacios de partida... La dimensión...

[E18-128] Es 3. Si fuera un isomorfismo, el Kernel, o sea la dimensión del Kernel, tendría que ser cero. Sí, porque para que nos podamos devolver y esa sea invertida. Y la dimensión del espacio de llegada tendría que llegar a todo el espacio, pero ese es dos. Entonces no nos va a dar dos.

[Ent-129] Ya. Entonces, ¿cuál es tu respuesta?

En figura 4 se aprecia el trabajo de E18, donde se muestra que coordina los conceptos de función, dimensión, kernel e imagen, mediante el teorema de las dimensiones, Este corresponde a establecer que una TL entre espacios vectoriales finito dimensionales cumplen con la siguiente relación $\dim(\ker T) + \dim(\text{Im } T) = \dim(V)$ donde V es el espacio vectorial de partida.

Dim Partida 3.
 Asegura Kernel 0 $\rightarrow$ 1
 Dim imagen 2.

Figura 4. Trabajo de E18.

Comienza su explicación a su conclusión de que la transformación lineal de la pregunta es un isomorfismo.

[E18-129]- Que no. ...Y esos de ahí son LI. Quiero ver eso. (1, 0, 1), (1, 1, 0) y (2, 1, 2). [Piensa en voz alta, trabaja.] (...) Entonces...

[Ent-130] ¿Son LD?

[E18-130] Estoy viendo si es LD. Y si es una contradicción, entonces es LI.

[Ent-131] ¿Y llegan a dónde?

[E18-131] Ese proceso tiene que ser dos. El 1 tiene que ser igual a B y ahí me tendría que dar C igual a dos, pero si beta es uno, entonces tendría que ser uno, entonces sí es LI.

[E18-134] Si es isomorfismo.

$(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(2, 1, 2)$
 $(2, 1, 2) = 2(1, 0, 1) + 1(1, 1, 0)$
 $\alpha + \beta = 2$
 $\alpha = 1$
 $\beta = 1$
 L.I. Si es base.

Figura 5. Cálculos realizados por E18.

Su argumentación según transcripción de audio y escrito consiste en primeramente verificar que el espacio de partida dado como un generado sea un conjunto linealmente independiente, esto es verificación de que es una base, por lo que está mostrando una construcción proceso del concepto base de un espacio vectorial, posteriormente al concluir que son linealmente independiente asegura que la transformación lineal es un isomorfismo de espacios vectoriales. Lo que muestra que no ha coordinado el concepto de función con el de espacio vectorial mediante la combinación lineal.

Por esta razón se invita a comparar esta respuesta con la dada anteriormente.

[Ent-135] ¿Es un isomorfismo? Te recuerdo que antes tú dijiste algo.

[E18-135] Ah, sí.

[E18-136] Por el determinante. El teorema es el que determina...

[Ent-137] ¿Y se puede calcular ese determinante?

[E18-137] Entonces no podemos.

[Ent-143] ¿Por qué?

[E18-143] Porque... Es que... No quiero, no sé, no quiero como usar... Ya, porque no cumple eso. Y no puedo calcular el determinante.

Se da cuenta que no puede calcular el determinante y comienza a trabajar con el concepto del kernel de la transformación lineal. Esto muestra que la construcción mental asociada al concepto de kernel es proceso, pues recurre a ella desde el concepto de determinante de la matriz asociada a la transformación lineal.

Algunas conclusiones

Desde el estudio de las entrevistas sobre el concepto de transformación lineal, nos fue posible establecer que al analizar el proceso de articulación de las interpretaciones del concepto se pone a prueba su esquema, es así que los tres entrevistados mostraron en términos generales, las siguientes construcciones mentales: espacio vectorial, vector, base, conjuntos linealmente independientes y linealmente dependientes, combinación lineal, función lineal, inyectividad, matriz, coordenada, Matriz asociada a una transformación lineal, dimensión, kernel, isomorfismo, teorema fundamental del algebra de espacios vectoriales.

Cada una de ellas como construcciones mentales proceso u objeto sobre las cuales efectuaban acciones o coordinaciones; las que estuvieron dispuestas en nuestras descomposiciones genéticas, pero la diferencia en la coherencia de sus esquemas se pudo establecer mediante la introducción del concepto de isomorfismo de espacios vectoriales, donde dos de los tres estudiantes entrevistados, mostraron que las construcciones mentales de los conceptos de dimensión y kernel eran fundamentales, ambos lo relacionaron a la interpretación funcional del concepto transformación lineal, donde la estructura algebraica de espacio vectorial era fundamental. Por otra parte, en ambos emerge el concepto de grupo cociente, vinculado a la estructura de espacio vectorial, pensamos que estos estudiantes lograron relacionar el álgebra abstracta con el álgebra lineal mostrando así uno de ellos un esquema para el concepto de transformación lineal de nivel Trans, el que logró articular las tres interpretaciones y construir el isomorfismo ente espacios vectoriales. Las diferencias con los otros entrevistados radicaron, por una parte, en: las interpretaciones no construidas como construcción mental objeto, lo que impidieron levantar respuestas claras, por otra el uso mecanizado de algunos teoremas sobre la dimensión de espacios vectoriales y su relación con el isomorfismo de espacios vectoriales. La inyectividad resulto ser otro indicador, pues no siempre se coordina con el concepto de kernel lo que limita la construcción del esquema para el concepto de transformación lineal.

Referencias y bibliografía

- Asiala, M., Brown, A., DeVries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. En J. Kaput, A.H. Schoenfeld, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education*, 6, 1-32. Providence: American Mathematical Society.
- Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS Theory*. New York: Springer.

- Bagley, S., Rasmussen, C., & Zandieh, M. (2012). Inverse, composition, and identity: The case of function and linear transformation. In S. Brown, S. Larsen, K. Marrongelle, & M. Oehrtman (Eds.), *Proceedings of the 15th Annual Conference on Research in Undergraduate Mathematics*.
- Maturana, I., & Parraguez, M. (2014). Construcciones y Mecanismos Mentales para el Aprendizaje de la Matriz Asociada a una Transformación Lineal. En P. Lestón (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 7, pp. 771-778). México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Maturana, I., & Parraguez, M. (2013). Una Mirada Cognitiva a las Transformaciones Lineales. Articulación entre sus Tres Interpretaciones: Funcional-Matricial-Geométrica. En SEMUR (Ed), *Acta VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática, 1993-2000*. Uruguay.
- Molina, G., y Oktaç, A. (2007). Concepciones de la transformación lineal en contexto geométrico. En *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa* 10(1), 241-273.
- Roa, S., & Oktaç, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto transformación lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(1), 89-112.
- Stake, R.E. (2010). *Investigación com estudio de casos*. Barcelona: Labor.
- Ubicab, R., & Oktaç, A. (2006). *Transformaciones Lineales en un ambiente de geometría dinámica* (Tesis de doctorado). CICATA-IPN, D.F., México.

Equações de 1º grau: análise de um material de estudo sob o olhar do Enfoque Ontosemiótico

Andrielly Viana **Lemos**
 Universidade Luterana do Brasil
 Brasil
andriellyemos@gmail.com
 Carmen Teresa **Kaiber**
 Universidade Luterana do Brasil
 Brasil
carmen_kaiber@hotmail.com

Resumo

Este artigo apresenta uma análise de um material de estudo sobre o conteúdo Equações de 1º grau, produzido no âmbito de uma pesquisa em nível de mestrado, que buscou investigar em que medida uma Sequência Didática Eletrônica, com o tema Equações de 1º grau, disponível no Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem (SIENA), favorece a recuperação de conteúdos para alunos do 7º ano do Ensino Fundamental. A análise produzida tem como aporte teórico o Enfoque Ontosemiótico do Conhecimento e a Instrução Matemática (EOS) desenvolvido por Godino e colaboradores (2002, 2008, 2010, 2011, 2012). Especificamente neste artigo será destacada a ferramenta de análise epistêmica (FAE) que trata da representatividade dos significados institucionais implementados ou pretendidos em torno de um objeto matemático, neste caso, as Equações de 1º grau. A análise realizada aponta que as situações propostas podem ser melhoradas no sentido de possibilitar estabelecer mais relações entre os objetos matemáticos envolvidos, assim como explorar mais os aspectos de generalização e particularização a partir das situações dadas.

Palavras chave: equações de 1º grau, enfoque ontosemiótico, ferramenta de análise epistêmica (FAE), situações problemas, sequência didática.

Introdução

As equações desempenham um papel importante na Matemática e em muitas de suas aplicações, de maneira que o aprendizado da resolução de equações se constitui em elemento essencial no estudo da Álgebra (Melara & Souza, 2008). Os autores ponderam, ainda, que as Equações de 1º grau se constituem em um conteúdo abrangente, que se apresenta em vários momentos da vida estudantil, não só na Matemática, mas em outras áreas.

Outro aspecto a ser ressaltado sobre este conteúdo é que o mesmo se constitui em conteúdo no qual os alunos apresentam dificuldades de aprendizagem. Estas dificuldades, não se restringem somente ao processo de resolução das equações, encontrando-se, também, na compreensão do conceito de igualdade, assim como, na ambientação dos estudantes em trabalharem com letras, no caso, incógnitas, característica esta da transição do pensamento aritmético para o algébrico (Lins & Gimenez, 1997; Silva & Costa, 2010; Freitas, 2002).

Neste contexto, Lins e Gimenez (1997) ressaltam que deve-se propor, aos alunos, sequências didáticas, nas quais devem ser tratados todos os aspectos relevantes sobre um determinado tema. Particularmente, no caso das equações, devem ser considerados os conceitos de equação e de incógnita, o significado do sinal de igualdade (=), a “homogeneidade” da equação e os aspectos ligados a problemas contextualizados.

Diante da pertinência de se discutir aspectos e estratégias para o ensino Equações de 1º grau, buscou-se investigar questões didáticas e epistemológicas referentes ao seu processo de ensino e aprendizagem, com a intenção de produzir uma Sequência Didática Eletrônica sobre o tema que possibilitasse aos alunos uma retomada de conceitos e procedimentos. A Sequência Didática Eletrônica desenvolvida fez parte de uma pesquisa de mestrado (Lemos, 2013), realizada no âmbito do Observatório da Educação do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática – PPGEICM/ULBRA, que objetivou investigar em que medida uma Sequência Didática Eletrônica, com o tema equações de 1º grau, favorece a recuperação de conteúdos para alunos do 7º ano do Ensino Fundamental. A Sequência Didática Eletrônica é constituída por materiais de estudo, atividades no *software* JClíc e Scratch, atividades *online*, objetos de aprendizagem, vídeos, entre outros recursos, em torno de seis conceitos principais, sendo eles: expressões algébricas, igualdade e equivalência, conceito e resolução de Equação e Situações Problemas.

Para a constituição e construção da Sequência Didática Eletrônica, buscou-se apoio no Design Instrucional o qual, segundo Filatro (2009), consiste em uma ação intencional e sistemática de ensino que envolve o planejamento, o desenvolvimento e a aplicação de métodos, técnicas, atividades, materiais, eventos e produtos educacionais em situações didáticas com a finalidade de promover a aprendizagem, destacando que o Design Instrucional “[...] é um processo (conjunto de atividades) de identificar um problema (uma necessidade) de aprendizagem e desenhar, implementar e avaliar uma solução para esse problema.” (Filatro, 2009, p.3). Ainda, de acordo com a autora, um projeto de design instrucional deve estar sempre em um processo de avaliação, realizando revisões do mesmo, para refletir sobre a eficácia e eficiência das estratégias adotadas e implementas.

Na investigação realizada por Lemos (2013) em que a Sequência Didática Eletrônica Equações de 1º grau, foi desenvolvida e aplicada junto a estudantes do 7º ano de uma escola pública, o objetivo de promover uma recuperação de conteúdos para alunos que apresentassem dificuldades no tema foi alcançado e os resultados obtidos foram considerados satisfatórios uma vez que o trabalho desenvolvido possibilitou aos estudantes superar dificuldades referentes a conceitos e procedimentos em torno das Equações de 1º grau.

Por se considerar pertinente disponibilizar o material produzido para ser utilizado por outros professores e estudantes, sentiu-se a necessidade de proceder uma avaliação do mesmo. Para essa avaliação, encontrou-se nos construtos teóricos propostos pelo Enfoque Ontosemiótico do Conhecimento e a Instrução Matemática (EOS), desenvolvido por Godino e colaboradores¹, um aporte que se julgou adequado, tendo em vista que este enfoque abrange dimensões de análise tanto para a constituição como para a avaliação de um processo de ensino e aprendizagem.

¹ Godino e Batanero, 1994; Godino, Contreras e Font, 2006; D’amore, Font e Godino, 2007; Godino e Font, 2007; Godino, Font e Wilhelmi, 2007; Godino, Batanero e Font, 2008; Godino, 2002, 2012.

Assim, considerando a pertinência e o interesse em avaliar a Sequência Didática Eletrônica Equações de 1º grau desenvolvida, apresenta-se, neste artigo, uma análise de um dos materiais de estudo produzidos para a Sequência Didática Eletrônica.

O Enfoque Ontosemiótico do Conhecimento e a Instrução Matemática (EOS): aspectos teóricos e ferramentas de análise

O Enfoque Ontosemiótico do Conhecimento e a Instrução Matemática (EOS) visa integrar marcos teóricos já utilizados em investigações na Educação Matemática, com a intenção de construir um enfoque que articule o conhecimento matemático e a instrução matemática, com pressupostos antropológicos e socioculturais, um modelo cognitivo, embasado na semiótica, e um modelo instrucional com bases sócio-construtivistas para o estudo do processo de ensino e aprendizagem (Godino, Batanero & Font, 2008).

Ainda, segundo os autores, o EOS tem como foco a formulação de uma ontologia de objetos matemáticos que contemple o triplo aspecto da Matemática: como atividade socialmente compartilhada de resolução de problemas, como linguagem simbólica e sistema conceitual logicamente organizado. De acordo com os autores, tomando como noção primitiva a de situação-problemática, definem-se os conceitos teóricos de prática, objeto (pessoal e institucional) e significado, com a finalidade de tornar evidente e operativo, por um lado, o triplo caráter da Matemática mencionado, e, por outro, a gênese pessoal e institucional do conhecimento matemático, assim como sua interdependência.

Assim, segundo Godino (2012) o conjunto de noções teóricas que compõem atualmente o EOS é classificado em cinco grupos, sendo eles: **Sistema de Práticas, Configuração de Objetos e Processos Matemáticos, Configuração Didática, Dimensão Normativa e Idoneidade Didática**. O autor destaca que cada um destes grupos, permite um nível de análise do processo de ensino e aprendizagem de tópicos específicos de Matemática. No quadro da Figura 1, apresenta-se uma síntese destes cinco níveis de análises tomada de Andrade (2014).

Níveis de Análise Didática	Características
Sistemas de Práticas	Planificação e implementação de um processo de estudo de uma noção, conceito ou conteúdo matemático, bem como as práticas relacionadas a esse processo.
Configurações de Objetos e Processos	Centrado nos objetos matemáticos e nos processos que intervêm na realização das práticas e o que emerge delas. Tem a finalidade de descrever a complexidade das práticas como fator explicativo dos conflitos semióticos produzidos em sua realização.
Configurações Didáticas	Considera as interações entre professor e estudantes. Objetiva a identificação e descrição das interações, relacionando-as com a aprendizagem dos estudantes (trajetória cognitiva).
Dimensões Normativas	Referem-se ao sistema de normas referentes a convenções, hábitos, costumes, leis, diretrizes curriculares que regulam o processo de ensino e aprendizagem e que condicionam as configurações e trajetórias didáticas.
Idoneidade Didática	Necessita da reconstrução de um significado de referência para os objetos matemáticos e didáticos pretendidos. Essa noção é desdobrada em seis dimensões, devendo ser tomados como referência, resultados de investigações didáticas relativas às diferentes dimensões que compõem esse nível.

Figura 1. Quadro síntese dos níveis de análises.

Fonte: Andrade (2014, p.28).

Godino, Batanero e Font (2008, p. 26) destacam que os quatro primeiros níveis de análise, são ferramentas para uma didática descritiva-explicativa, ou seja, servem para compreender e responder à pergunta “o que está acontecendo aqui e por quê?” Ponderam, porém, que a Didática da Matemática não deveria limitar-se a uma mera descrição que deixa tudo como estava, mas aspirar à melhora do funcionamento dos processos de estudo. Assim, são necessários critérios de adequação que permitam avaliar os processos de ensino efetivamente realizados, a fim de orientar sua melhora, sendo o objetivo do último nível.

Godino (2011, p. 05) considera que “A noção pode servir como um ponto de partida para uma teoria do design instrucional que leve em consideração, de forma sistêmica, as dimensões epistêmica-ecológica, cognitiva-afetiva, interacional-mediacional envolvidas em processos de estudo de áreas curriculares específicas”.

No que segue serão discutidos aspectos em torno da Idoneidade Didática, mas especificamente a Idoneidade Epistêmica, tendo em vista, que a análise produzida está focada nesta dimensão.

Idoneidade Didática

Godino (2012) aponta que a Idoneidade Didática pode ser utilizada como um critério geral de pertinência e relevância das ações dos educadores, do conhecimento posto em jogo, dos recursos utilizados em um processo de estudo matemático, servindo como uma ferramenta para a análise e reflexão sistemática que fornece critérios para a melhoria progressiva do processo de ensino e aprendizagem.

Para Godino, Contreras e Font (2006), a Idoneidade Didática de um processo de instrução se define como a articulação coerente e sistêmica de seis dimensões relacionadas entre si e destacados no que segue:

- **idoneidade epistêmica:** se refere ao grau de representatividade dos significados institucionais implementados ou pretendidos, com relação a um significado de referência. Por exemplo, o ensino da adição nos anos iniciais pode ser limitado à aprendizagem de rotinas e exercícios de aplicação de algoritmos (baixa adequação), ou considerar os diferentes tipos de situações aditivas e incluir a justificação dos algoritmos (alta adequação);
- **idoneidade cognitiva:** expressa o grau em que os significados pretendidos ou implementados estão na área de desenvolvimento potencial dos alunos, assim como o grau de proximidade entre os significados pessoais atingidos e os significados pretendidos/implementados. No caso do ensino da adição, um processo de ensino e aprendizagem com um alto grau de idoneidade cognitiva seria alcançado através do estudo das operações aritméticas com números de três ou mais algarismos, de forma que o professor realizasse uma avaliação inicial para saber se a maioria dos alunos dominam as operações com números de um e dois algarismos e, caso contrário, iniciasse o processo de instrução trabalhando com estes números;
- **idoneidade interacional:** ocorre quando as configurações e trajetórias didáticas permitem, por um lado, identificar conflitos semióticos potenciais e, por outro lado, resolver os conflitos que são produzidos durante o processo de ensino;
- **idoneidade mediacional:** refere-se ao grau de disponibilidade e adequação dos recursos necessários para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem;

- **idoneidade emocional:** refere-se ao grau de envolvimento dos alunos no processo de ensino. Está relacionada com fatores de dependem da instituição como com fatores que dependem do aluno e da sua história escolar prévia;
- **idoneidade ecológica:** refere-se ao grau em que o processo de estudo se ajusta ao projeto educacional, a escola, a sociedade e ao ambiente em que se desenvolve.

Os autores ressaltam que a idoneidade de uma dimensão não garante a idoneidade global do processo de ensino e aprendizagem, e que essas dimensões são úteis para análise de projetos e experiências de ensino, onde os distintos elementos podem interagir entre si, evidenciando assim, a complexidade do processo de ensino e aprendizagem.

Neste artigo será apresentada a análise realizada em um material de estudo da Sequência Didática Eletrônica Equações de 1º grau tomando como referência a dimensão epistêmica, sendo utilizados os componentes e indicadores propostos por Godino (2011), Godino, Rivas e Arteaga (2012), situações-problema, linguagem, regras, argumentos, relações, e denominados por Andrade (2014) como “Ferramenta de Análise Epistêmica (FAE)”, conforme apresentado no quadro da Figura 2.

Componentes	Indicadores
Situações-problema	a) apresenta-se uma mostra representativa e articulada de situações de contextualização, exercícios e aplicações; b) propõem-se situações de generalização de problemas (problematização).
Linguagem	a) uso de diferentes modos de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica), tradução e conversão entre as mesmas; b) nível de linguagem adequado aos estudantes; c) propor situações de expressão matemática e interpretação.
Regras (definições, proposições, procedimentos)	a) as definições e procedimentos são claros e corretos e estão adaptados ao nível educativo a que se dirigem; b) apresentam-se enunciados e procedimentos fundamentais do tema para o nível educativo dado; c) propõem-se situações onde os estudantes tenham que generalizar ou negociar definições, proposições ou procedimentos.
Argumentos	a) as explicações, comprovações e demonstrações são adequadas ao nível educativo a que se dirigem; b) promovem-se situações onde os estudantes tenham que argumentar.
Relações	a) os objetos matemáticos (problemas, definições, proposições) se relacionam e se conectam entre si.

Figura 2. Ferramenta de Análise Epistêmica (FAE).

Fonte: Godino (2011, p.8); Andrade (2014, p.103).

Aspectos metodológicos da análise produzida

O material de estudo que será apresentado neste artigo faz parte de uma Sequência Didática Eletrônica constituída, pelas autoras, com o objetivo de retomar conceitos e procedimentos relativos a Equações de 1º grau para alunos que apresentem dificuldades no tema. A análise aqui realizada visa identificar as potencialidades e limitações deste material de estudo, frente aos componentes e indicadores propostos pelo EOS para a idoneidade didática, buscando realizar uma avaliação do material produzido (Filatro, 2009), a fim de possibilitar uma reflexão sistemática para a adequação e melhoria deste material de estudo. Como já apontado, neste artigo, serão destacados os aspectos referentes à dimensão epistêmica da idoneidade didática (Godino, 2011), utilizando a Ferramenta de Análise Epistêmica (FAE) (Andrade, 2014), destacada na Figura 2.

Considera-se pertinente utilizar esta ferramenta de análise, pois conforme destaca Godino (2011), a noção de idoneidade didática pode ser utilizada na análise de um processo de estudo pontual implementado, no planejamento e desenvolvimento de uma unidade didática, ou ainda de maneira mais global, no desenvolvimento de um curso ou currículo. Também, pode ser útil, para analisar aspectos parciais de um processo de estudo, como materiais didáticos, respostas de estudantes para uma tarefa específica e incidentes didáticos pontuais.

Neste contexto, selecionou-se um material de estudo da Sequência Didática Eletrônica Equações de 1º grau que se refere aos processos de resolução das Equações de 1º grau, no qual são apresentadas duas situações e, a partir destas, são discutidos os conceitos e procedimentos envolvidos, a fim de resolver as situações propostas. A análise deste material será realizada a partir da apresentação das telas do material de estudo e, posteriormente, serão discutidos os componentes e indicadores da idoneidade epistêmica, através da Ferramenta de Análise (FAE).

Apresentação e discussão da análise produzida

A construção do material de estudo baseou-se nas indicações de Alcalá (2002), o qual pondera que se deve trabalhar com problemas no estudo de equações de 1º grau e que o grau de complexidade destes seja crescente. No que segue, apresentam-se, na Figura 3, as telas da primeira situação apresentada no referido material.

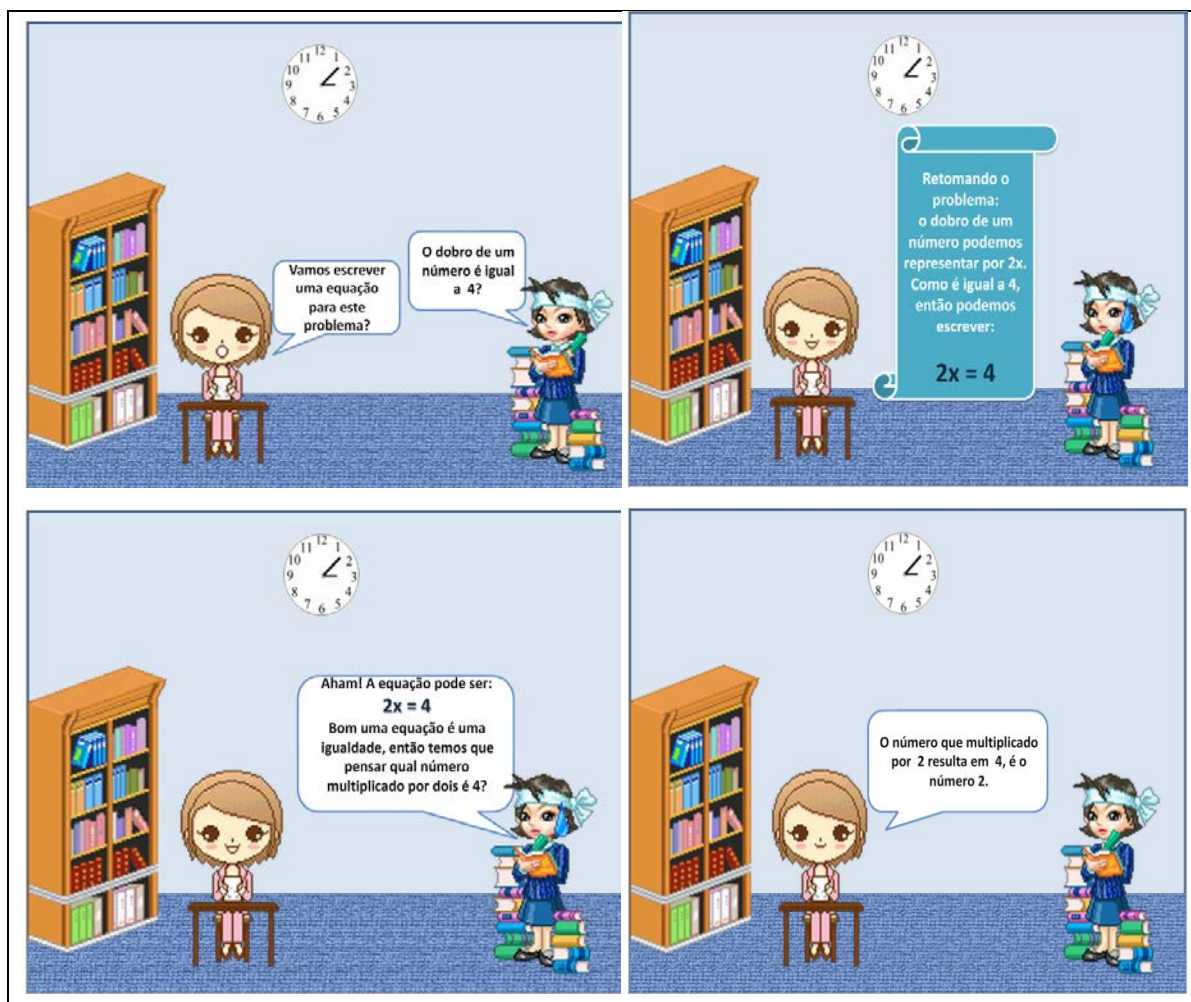




Figura 3. Situação 1 do material de estudo.

Fonte: Lemos (2013).

No material, inicialmente, é apresentada a situação “o dobro de um número é igual a 4” sendo realizada a representação algébrica da expressão que estava em língua natural e, em seguida, é discutida a resolução da questão. A seguir apresenta-se no quadro da Figura 4, a análise da situação 1 (figura 3), a partir dos componentes e indicadores propostos pela FAE.

Componentes	Análise
Situações-problema	Considera-se que a situação proposta tem um caráter procedimental, não configurando uma situação de contextualização ou aplicação. As discussões realizadas possibilitam uma particularização, quando é realizado o questionamento “qual é o número que multiplicado por 2 resulta em 4”.
Linguagem	A situação apresenta dois modos de expressão matemática, uma na linguagem natural e a outra algébrica, é realizada uma conversão entre elas, embora considera-se que esta, seja uma simples codificação.
Regras	As definições, enunciados e procedimentos são apresentados de forma clara e adequada ao nível de educativo dos estudantes, no caso 7º ano do Ensino Fundamental.
Argumentações	Considera-se que ao longo da situação são apresentadas explicações, comprovações e justificativas das resoluções.
Relações	Entende-se que a situação proposta apresenta poucas relações entre os objetos matemáticos. Percebe-se a presença de relações no final do processo de resolução, onde é retomado o método utilizado e a solução encontrada.

Figura 4. Análise da situação 1 através da FAE

Fonte: Autoras.

A partir da análise dos componentes e indicadores considerando a FAE, observa-se que a situação proposta não contempla satisfatoriamente todos os indicadores. Considera-se que, para uma maior adequação desta situação, fossem explorados outros tipos de representações, assim como, a situação poderia ser melhor contextualizada, porém trabalhando no mesmo nível de complexidade, uma vez que, neste momento do estudo, a proposta é iniciar com situações simples, onde as resoluções fossem realizadas de maneira mais intuitiva e através de relações já estabelecidas.

Na Figura 5, destacam-se as telas da segunda situação apresentada no material de estudo.

Leonardo economizou sua mesada por um ano, pois queria comprar uma bicicleta e um par de roller. O preço dos produtos é dado da seguinte forma: a soma do dobro do preço do roller com o preço da bicicleta é de R\$ 734,00. Sabendo que a bicicleta custou R\$ 426,00, qual o preço do par de roller?

Vamos usar a letra x para representar o preço do par de roller.
 x $\Rightarrow$ preço do par de roller
 $2x$ $\Rightarrow$ dobro do preço do par de roller
 R\$ 426,00 $\Rightarrow$ preço da bicicleta

Retomando o problema:

dobro do preço do par de roller	mais	preço da bicicleta	é igual a	R\$ 734,00
$2x$	+	426	=	734

Assim temos a equação:
 $2x + 426 = 734$

A equação para descobrir o valor do roller é:
 $2x + 426 = 734$

Onde x é a incógnita que representa o valor que queremos descobrir.
 Retomando a ideia da balança de dois pratos temos:

Utilizando o princípio aditivo da igualdade temos:

$$2x + 426 - 426 = 734 - 426$$

$$2x + 0 = 308$$

Utilizando o princípio multiplicativo da igualdade temos:

$$2x : 2 = 308 : 2$$

$$x = 154$$

Veja Ana! Encontramos o valor de x , que é 154! Respondendo o problema o roller custa R\$ 154,00

Figura 5. Situação 2 do material de estudo.

Fonte: Lemos (2013).

A segunda situação proposta está centrada na descoberta do valor (preço) do *roller* que Leonardo quer comprar. A partir da situação, expressa em língua natural, é destacada a equação correspondente sendo a mesma resolvida considerando a utilização do princípio da igualdade por meio da analogia à balança de dois pratos. O quadro da Figura 6 apresenta a análise da situação 2 (figura 5), a partir dos componentes e indicadores propostos pela FAE.

Componentes	Análise x indicadores
Situações-problema	Considera-se que a situação proposta tem um caráter de contextualização ou aplicação do objeto matemático em estudo. As discussões em torno da utilização dos princípios de igualdade para a resolução da equação correspondente ao problema, encaminham para uma generalização sobre a possibilidade de utilizar estes para a resolução de qualquer equação.
Linguagem	A situação apresenta diferentes modos de expressão matemática (língua natural, algébrica e gráfica). Para a resolução da situação são realizadas conversões, tanto da língua natural para algébrica, como para a simbólica através da analogia a balança de dois pratos. Considera-se que a situação possibilita a interpretação de expressão matemática para o encaminhamento da solução.
Regras	As definições, enunciados e procedimentos são apresentados de forma clara e adequada ao nível de educativo dos estudantes, no caso 7º ano do Ensino Fundamental.
Argumentações	Considera-se que ao longo da situação são apresentadas as explicações, comprovações e justificativas pertinentes para a solução do problema proposto.
Relações	Entende-se que a situação proposta apresenta relações entre os objetos matemáticos, principalmente na analogia a balança de dois pratos e os princípios de igualdade.

Figura 6. Análise da situação 2 através da FAE.

Fonte: Autoras.

Observa-se a partir da análise dos componentes e indicadores da FAE, que a situação dois está em consonância com a maioria dos indicadores, já que é proposto um problema onde, para sua solução, são apresentados diferentes tipos de representações e os conceitos, procedimentos e definições estão articulados com estas representações, a fim de possibilitar que sejam estabelecidas relações entre a compreensão do objeto matemático envolvido, no caso as equações de 1º grau, e os procedimentos e conceitos envolvidos no seu processo de resolução.

A partir da análise das duas situações propostas no material de estudo considera-se que estas devem se completar, no sentido de compor um conjunto de situações que contemplem os conceitos, definições e procedimentos pertinentes de serem discutidos no âmbito do estudo da resolução de equações de 1º grau, conforme indicado por Alcalá (2002) quando refere-se a trabalhar com problemas de complexidade distintas. As situações propostas podem ser melhoradas no sentido de possibilitar estabelecer mais relações entre os objetos matemáticos envolvidos, assim como explorar mais os aspectos de generalização e particularização a partir das situações dadas.

Considerações Finais

Conforme destacado, na investigação realizada por Lemos (2013), foi desenvolvida a Sequência Didática Eletrônica Equações de 1º grau, com o objetivo de promover uma recuperação de conteúdos para alunos que apresentassem dificuldades no tema. Os resultados

obtidos nessa investigação, junto a estudantes do 7º ano de uma escola pública, foram considerados satisfatórios e atingiram os objetivos propostos, particularmente o principal deles, de possibilitar aos estudantes superação das dificuldades referentes a conceitos e procedimentos em torno das Equações de 1º grau.

Por se considerar pertinente disponibilizar o material produzido sentiu-se a necessidade de proceder uma avaliação do mesmo. Para essa avaliação, encontrou-se nos construtos teóricos e nos níveis de análises didáticas propostas pelo Enfoque Ontosemiótico do Conhecimento e a Instrução Matemática (EOS) um aporte que julgou-se adequado, uma vez que este enfoque abrange ferramentas teóricas tanto para a constituição como para a análise de um processo de ensino e aprendizagem. Além disso, o EOS discute e aproxima questões referentes ao próprio conhecimento matemático, como também, a instrução matemática, ampliando a visão e o conceito do objeto matemático, atribuindo significados pessoais e institucionais, assim como, a pertinência e relevância das ações realizadas, dos conhecimentos apresentados e dos recursos utilizados em um processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

Neste artigo foi apresentada uma análise referente à dimensão epistêmica de um dos materiais de estudos produzidos no âmbito do desenvolvimento de uma Sequência Didática Eletrônica sobre Equações do 1º grau. Destaca-se que está em andamento uma análise completa do material sob todas as dimensões da idoneidade didática. A análise produzida considerando a Ferramenta de Análise Epistêmica (FAE) permitiu perceber que as situações propostas no material, atendem as indicações apontadas no referencial teórico utilizado, porém sob a perspectiva do EOS, as situações poderiam ser aprimoradas no sentido de explorar mais as relações entre os objetos matemáticos envolvidos, assim como propor situações que oportunizem a generalização e particularização.

Destaca-se, também, que os resultados da investigação conduzida por Lemos (2013), aliadas a análise dos materiais de estudos da Sequência Didática sob a perspectiva do EOS originaram uma investigação em torno do desenvolvimento de uma proposta de recuperação conteúdos constituída a partir de um grupo colaborativo de professores considerando os aportes do enfoque. Nessa investigação as ferramentas de análise estão sendo utilizadas com o objetivo de discutir, analisar e construir de forma conjunta estratégias para a viabilização de uma proposta de recuperação no âmbito da Matemática, o que destaca o potencial do enfoque como aporte teórico e metodológico para o trabalho com a Matemática.

Referências e bibliografia

- Alcalá, M. (2002). *La construcción del lenguaje matemático* (1ª ed.). Barcelona: Biblioteca Uno.
- Andrade, L. (2014). *Currículos de Matemática no Ensino Médio: um olhar sob s perspectiva do Enfoque Ontosemiótico do Conhecimento e a Instrução Matemática* (Tese de Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Luterana do Brasil, Canoas.
- Filatro, A. (2009). *Design Instrucional na prática*. São Paulo: Pearson Education do Brasil.
- Freitas, M. A. (2002). *Equação do 1º grau: métodos de resolução e análise de erros no ensino médio* (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.
- Godino, J. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches em Didactiques des Mathematiques*, 22(2/3), 237-284. Grenoble, França.
- Godino, J. (2006). *Origen y aportaciones de la perspectiva Ontosemiótica de investigación em didáctica de la Matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

- Disponível em: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/origen_EOS_Baeza_2012.pdf Acesso em: 15/9/2013.
- Godino, J. (2011). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. In *XIII CIAEM – IACME, 2011, Recife, Brasil. Anais*. Disponível em: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf. Acesso em: 10/03/2014.
- Godino, J. (2012). Origen y aportaciones de La perspectiva ontosemiótica de investigación em Didáctica de la Matemática. In A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García, & L. Ordóñez (Orgs.), *Investigación em Educación Matemática* (pp. 49-68). XVI. Jaén: SEIEM. Disponível em: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/origen_EOS_Baeza_2012.pdf. Acesso em: 23/09/2014.
- Godino, J., Font, V., & Wilhelmi, M. R. (2006). *Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponível <http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/niveles%20analisis%20didactico%204Julio08.pdf>. Acesso em 17/9/2014.
- Godino, J., Contreras, Á., & Font, V. (2006). *Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática*. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponível em: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/analisis_procesos_instruccion.pdf. Acesso em 17/9/2013.
- Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2008). Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática. *Acta Scientiae - Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 10(2), 7- 37.
- Godino, J., Rivas, H., & Arteaga, P. (2012). Inferencia de indicadores de idoneidad didáctica a partir de orientaciones curriculares. *Práxis Educativa*, 7(2), 331-354. Disponível em: <http://www.revistas2.uepg.br/index.php/praxiseducativa>. Acesso em: 30/09/2014.
- Lemos, A. (2013). *Recuperação de Conteúdos: desenvolvendo uma sequência didática sobre equações de 1º grau disponível no sistema integrado de ensino e aprendizagem (SIENA)* (Dissertação de Mestrado Acadêmico). Universidade Luterana do Brasil, Canoas.
- Lins, R., & Gimenez, J. (1997). *Perspectivas em Artimética e Álgebra para o Século XXI*. Campinas: Papirus.
- Melara, R., & Souza, O. (2008). *O Ensino de Equações do 1º Grau com significação: uma experiência prática no ensino fundamental*. Paraná.
- Silva, T., & Costa, B. (2010). Dificuldades de aprendizagem no ensino da matemática do 6º ano em relação à equação do primeiro grau. In *Anais 62ª Reunião Anual da SBPC*. Natal: UFRN.

Equações do primeiro grau: organizações matemática e didática entre duas coleções didáticas

Edelweis Jose Tavares **Barbosa**
Universidade Federal de Pernambuco
Brasil

edelweisb@yahoo.com.br

Anna Paula Avelar **Brito Lima**
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Brasil
apbrito@gmail.com

Resumo

Este artigo teve como objetivo analisar a introdução do conceito de equação do primeiro grau em duas coleções de livros didáticos brasileiros do Ensino Fundamental, sendo uma escrita anteriormente à criação do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e outra aprovada no PNLD de 2014, ambas das mesmas autoras. A Teoria Antropológica do Didático (TAD), proposta por Yves Chevallard e colaboradores, norteou teórica e metodologicamente nossa pesquisa. No presente trabalho discutimos tal referencial bem como o delineamento metodológico proposto para a análise dos dados. Os resultados indicam que as organizações existentes nessas coleções nem sempre são feitas de forma a esclarecer as diferenças existentes entre os subtipos de tarefas trabalhadas, como as potencialidades das técnicas organizadas ou sistematizadas. Além destes, as coleções não alteraram as praxeologias matemáticas, mas sim as praxeologias didáticas.

Palavras chave: Análise de Livro Didático de Matemática; Equação do Primeiro Grau; TAD; Instituições; Praxeologias.

Introdução

Em nossa experiência em sala de aula um dos aspectos que caracteriza o início do estudo da introdução formal da Álgebra é o estudo das equações e, conseqüentemente, a utilização de letras para representar valores desconhecidos. Quando as letras representam valores desconhecidos, elas são usualmente denominadas de incógnitas. Entretanto, no decorrer das séries subsequentes, as letras têm outros atributos. Assim, com o objetivo de investigar como essas noções são introduzidas no livro didático, analisamos duas coleções de livros didáticos brasileiros do Ensino Fundamental, um aprovado no Programa Nacional do Livro Didático (PNLD) e a outra anterior à instituição do PNLD. Para isso, tomamos como referencial a Teoria Antropológica do Didático de Yves Chevallard, a qual parece atender mais adequadamente nossa questão de pesquisa, isto é, introdução do conceito de equação do primeiro grau presente nas duas coleções.

No ambiente escolar existe a ideia de que a Aritmética trata de números e a Álgebra de letras. Tenta-se também estabelecer limites entre conteúdos, sendo que no currículo da escola a

Aritmética é trabalhada desde a educação infantil até o 6º ano do Ensino Fundamental e os conteúdos tradicionais da Álgebra, tais como equações, cálculo com letras, expressões algébricas, são abordados a partir do 7º ano do Ensino Fundamental, além de considerar que os conteúdos aritméticos são conhecimentos prévios para a introdução da Álgebra.

Partimos do princípio de que, segundo considera Chevallard (1998), não existe um mundo institucional ideal no qual as atividades humanas sejam geridas por praxeologias bem apropriadas que permitam realizar todas as tarefas desejadas de uma maneira eficaz, segura e inteligente. As praxeologias envelhecem na medida em que seus elementos (tipos de tarefas, técnicas, tecnologias ou teorias) perdem seus créditos ou tornam-se opacos, dando origem à constituição de novas praxeologias, necessárias ao melhor funcionamento de uma determinada instituição, em consequência dos novos tipos de tarefas (tipos de problemas) que se apresentam a essa instituição.

Sendo assim, apresentamos o artigo em duas seções. A primeira com relação à fundamentação teórica, modelização a priori, seleção e caracterização das obras analisadas. A segunda seção discute os principais resultados e algumas considerações.

Álgebra escolar: aspectos históricos e concepções

Traduzindo de forma literal o título do livro de Al-Khowarizmi encontramos a ciência da restauração (ou reunião) e redução. Matematicamente seria melhor ciência da transposição e do cancelamento, ou ainda “a transposição de termos subtraídos para o outro membro da equação e o cancelamento de termos semelhantes (iguais) em membros opostos da equação” (Boyer, 1996, p.156).

No Brasil, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) fizeram uma abordagem histórica e evidenciam três concepções de educação algébrica que vêm exercendo maior influência no Ensino de Matemática elementar.

A primeira, chamada de linguístico-pragmática, baseia-se no papel do Ensino da Álgebra buscando fornecer um instrumental técnico (superior ao da Aritmética) para a resolução de equações ou de problemas equacionáveis. Para o aluno adquirir essa capacidade considera-se necessário e suficiente primeiro dominar, ainda que de forma mecânica, as técnicas requeridas pelo transformismo algébrico (sintaxe).

O currículo de Ensino da Álgebra tem, portanto, como ponto de partida, o cálculo literal (operações de adição, subtração, multiplicação/fatoração e divisão de expressões algébricas), o qual é desenvolvido por meio de muitos exercícios visando capacitar os alunos no manejo preciso dessas expressões algébricas. Só depois disso é que são introduzidos problemas do tipo aplicação algébrica.

Os mesmos autores apresentam a segunda concepção, Fundamentalista-estrutural, que surge aproximadamente, na segunda metade do século XX, predominantemente nas décadas de 1970 e 1980, e vem contrapor à ideia anterior com um cunho fundamentalista. O papel do Ensino da Álgebra seria o de fornecer os fundamentos lógico-matemáticos para toda a Matemática escolar, inclusive aqueles tradicionalmente considerados algébricos, como o cálculo algébrico e o estudo das equações. Isto é realizado por meio da introdução dos campos numéricos, da Teoria dos Conjuntos, das estruturas e das propriedades (fechamento, comutativa, elemento neutro,...), das relações e funções. Assim, o emprego das propriedades estruturais das operações serve para justificar logicamente cada passagem presente no transformismo algébrico.

A terceira concepção, Fundamentalista-analógica, é uma síntese das duas anteriores, pois tenta recuperar o valor instrumental da Álgebra e preserva a preocupação fundamentalista, não mais com base nas propriedades estruturais, por meio do uso de modelos analógicos geométricos (blocos de madeira ou mesmo figuras geométricas) ou físicos (como a balança) que visualizam ou justificam as passagens do transformismo algébrico. A Álgebra geométrica era didaticamente superior a qualquer outra abordagem lógico-simbólica, pois tornam visíveis certas identidades algébricas.

O ponto problemático e comum entre essas três concepções, segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), é que elas praticamente reduzem o Ensino da Álgebra aos seus aspectos linguísticos e transformistas, dando mais ênfase à sintaxe da linguagem algébrica que ao pensamento algébrico e seu processo de significação (a semântica).

As três concepções enfatizam o Ensino de uma linguagem algébrica já constituída, priorizando o domínio, por parte do aluno, de habilidades manipulativas das expressões algébricas. Além disso, a Álgebra não se reduz a um instrumento técnico-formal que facilita a resolução de certos problemas.

De acordo com Miguel, Fiorentini e Miorim (1992), desde 1799, momento em que a Álgebra passa a fazer parte do currículo no Brasil, até o início da década de 1960 prevaleceu um Ensino de caráter reprodutivo, sem clareza, no qual tudo era essencial. A matemática escolar apresentava-se dividida em compartimentos estanques. Primeiro estudava-se a Aritmética, depois a Álgebra e, em seguida, a Geometria. Neste período, segundo os autores, a Álgebra apresentava um caráter mais instrumental, útil apenas para resolver equações e problemas.

Álgebra no currículo da educação básica

Educadores demonstram preocupação com a compreensão da Álgebra no ensino da Matemática, e especialmente as noções que devem ser trabalhadas para a compreensão do que venha a ser uma equação (Brito Menezes, 2006). De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1998), o estudo da Álgebra constitui um espaço bastante significativo, propiciando ao aluno o desenvolvimento e o exercício de sua capacidade de abstração e generalização.

Lee (1996) propõe que a Álgebra é uma minicultura na cultura da Matemática. Nesse sentido, existem concepções e perspectivas específicas acerca desse saber que se faz necessário de serem compreendidas para que possamos ter uma noção da dimensão e do potencial da Álgebra, sobretudo focalizando o seu ensino (Brito Menezes, 2006).

Lins e Gimenez (1997) caracterizam a Álgebra como sendo um conjunto de afirmações para as quais é possível produzir significado em termos de números e operações aritméticas, possivelmente envolvendo igualdade ou desigualdade.

Segundo Souza e Diniz (1996), a Álgebra é a linguagem da Matemática utilizada para expressar fatos genéricos. Como toda linguagem, a Álgebra possui seus símbolos e suas regras. Para Garcia (1997) a Álgebra revoluciona por ser uma ferramenta a serviço da resolução de problemas e ser um objeto matemático em si, um ramo autônomo das Matemáticas de que todas as disciplinas científicas se nutrem para estabelecer melhores e mais cômodas vias de comunicação entre elas e com o exterior.

Equações do Primeiro Grau: elementos

O estudo de equações do 1º grau com uma incógnita baseia-se na estrutura algébrica denominada anel dos polinômios a uma indeterminada. Este anel é simbolizado usualmente por $R[x]$, representando o corpo dos números reais e consiste das expressões formais

$p(x) = a_0 + \dots + a_n x^n$, n um número natural, no qual se definem as operações de adição de dois polinômios e de multiplicação de um polinômio por um número real, as quais se supõem, satisfazem as propriedades expressas nas regras usuais da Álgebra, (Araújo, 2009, p. 35):

A operação de adição de dois polinômios $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ com um polinômio

$q(x) = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n$ é definida por: $p(x) + q(x) =$

$p(x) + q(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \dots + (a_n + b_n)x^n$ e

satisfaz as seguintes propriedades:

Para todo $p(x), q(x) \in R[x]$, $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ pertencem a $R[x]$,

a) $p(x) + q(x) = q(x) + p(x)$

b) $[p(x) + q(x)] + r(x) = q(x) + [p(x) + r(x)]$

c) $p(x) + 0(x) = 0(x) + p(x)$, em que $0(x)$ representa um polinômio nulo $0_0 + 0x + \dots + 0x^n$, $n \in \mathbb{N}$.

d) Para todo $p(x) + q(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ existe o polinômio $p'(x)$ tal que $p(x) + p'(x) = 0(x)$.

Sabe-se que $p'(x) = (-a_0) + (-a_1)x + \dots + (-a_n)x^n$

A operação de multiplicação de um número real K por um polinômio

$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$ é definida por:

$$Kp(x) = (Ka_0) + (Ka_1)x + \dots + (Ka_n)x^n$$

e satisfaz as seguintes propriedades:

Para todo $K, K_1, K_2 \in R$ e $p(x) \in R[x]$,

$$K[p(x) + q(x)] = Kp(x) + Kq(x)$$

a) $K_1[K_2 p(x)] = (K_1 K_2) p(x)$

b) $1p(x) = p(x)$

O polinômio, assim definido, tem grau n se $a_n \neq 0$. No caso em $n = 1$, dizemos que $p(x) = a_0 + a_1 x$ tem grau 1. Nesse caso, $p(x)$ é denominado polinômio do 1º grau na indeterminada x .

Por outro lado, para cada polinômio $p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n \in R[x]$ é possível definir uma função polinomial $f: R \rightarrow R$, indicada por $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$. A função assim definida, associada cada número $k \in R$ em $f(k) \in R$.

Se existe um número $k \in R$ tal que $f(k) = 0$, dizemos que k é raiz (zero) de $f(x)$. Nesse caso, para determinar as raízes do polinômio é necessário determinar os valores de $x \in R$ tal que $f(x) = 0$, ou seja, $a_n x^n + \dots + a_0 = 0$. Essa última igualdade é denominada de equação polinomial de grau n . No caso em que $n = 1$, temos uma equação polinomial do 1º grau ($a_0 + a_1 x = 0$), que é o nosso objeto de estudo. Os números reais tais que $f(x) = 0$ são denominados soluções da equação $f(x) = 0$ (Araújo, 2009).

Com base nas definições anteriores, denomina-se equação do 1º grau toda equação na forma $ax + b = 0$, onde a incógnita possui expoente 1. A equação do 1º grau é chamada linear, pois sua representação gráfica é uma linha reta.

As operações e propriedades dos polinômios, enunciadas anteriormente, nos permitem ainda elaborar os princípios que fundamentam a resolução de equações (Araújo, 2009, p. 45):

- Princípio aditivo: se adicionarmos a ambos os membros (por exemplo: $3x + 5 = x - 1$ antes da igualdade chamamos de 1º membro e após a igualdade de segundo membro) de uma equação um mesmo número ou uma mesma expressão algébrica, obteremos uma equação equivalente à primeira; e,
- Princípio multiplicativo: se multiplicarmos ambos os membros de uma equação pelo mesmo número (diferente de zero) ou uma mesma expressão algébrica (não nula), obteremos uma equação equivalente à primeira.

Estes dois princípios acima são usados na elaboração de técnicas para resolver, por exemplo, equações do 1º grau.

Em relação ao ensino de resoluções de equações, Bernard e Cohen (1995) recomendam um conjunto gradativo de ensino para encontrar as raízes de uma equação, sendo descrito em quatro métodos, assim denominados: (1) gerar e avaliar; (2) esconder; (3) desfazer e (4) equações equivalentes. Para estes autores, cada novo método é subsequente de resolução deriva de seu anterior, beneficiando a passagem de procedimentos aritméticos para o algébrico.

O método de *gerar e avaliar* incide em levar o aluno a pensar no conceito de número e a provocar diferentes valores para serem testados por tentativa e erros. Bernard e Cohen (1995) analisam que nesse de gerar e avaliar, o aluno não se limita a ficar fazendo tentativas e erros, aleatoriamente. Para estes autores, intuitivamente, o aluno segue um esquema de cálculo de valores que se realimenta no processo de geração de valores.

O método de *esconder* consiste em levar o aluno a resolver a equação pensando sobre o ela pede. Por exemplo, a equação $10 - x = 6$ esconde-se o x e pergunta-se que número devemos subtrair de 10 para 6? Os autores consideram que este método permite chegar a uma conceituação mais ampla de incógnita, levando o aluno a perceber que uma expressão pode ser uma incógnita.

O método de *desfazer* fundamenta-se na noção de operações inversas e na reversibilidade de um processo, envolvendo um ou mais passos invertíveis. Desse modo, o aluno deve ser orientado a raciocinar sobre o que esta acontecendo operacionalmente com uma incógnita e criar uma sequência de perguntas dirigidas sobre como voltar ao ponto de partida, isto é, a incógnita.

Assim por exemplo, no caso da equação $\frac{7(2x - 3) - 5}{10} = 5$



Figura 1. Modelo gerado pelo método de desfazer.

Fonte: Bernard e Cohen (1995, p.117).

Esse procedimento de voltar ao ponto de partida, utilizando apenas cálculo aritmético, estimula o aluno a desenvolver a reversibilidade, a análise e a resolução de problema.

O método de *equações equivalentes* fundamenta-se em efetuar operações de equilíbrio nos dois membros da igualdade (somando um número ou expressão aos dois membros da igualdade) até que um lado esteja a incógnita e do outro, um número. As novas equações obtidas por esse processo preservam o mesmo conjunto de soluções e por isso são denominadas equações equivalentes.

Teoria Antropológica do Didático

Segundo Chevallard (1999, p.1), “essa teoria estuda o homem perante o saber matemático, e mais especificamente, perante situações Matemáticas. Um motivo para utilização do termo *antropológica* é que a TAD situa a atividade Matemática e, em consequência, o estudo da Matemática dentro do conjunto de atividades humanas e de instituições sociais”. Assim, a Teoria Antropológica do Didático (TAD) considera como elementos primitivos INSTITUIÇÕES (I), INDIVIDUOS (X) e OBJETO (O).

Chevallard (1999, p.1) considera que uma instituição (I) é um dispositivo social total que pode ter apenas uma extensão muito reduzida no espaço social, mas que permite e impõe a seus sujeitos (...) maneiras próprias de fazer e de pensar. Sob a ótica da TAD cada saber é saber de pelo menos uma instituição; um mesmo objeto do saber pode *viver* em instituições diferentes e para viver em uma instituição; um saber necessita submeter-se a certas imposições, o que o conduz a ser transformado.

A TAD consiste no desenvolvimento da noção de organização praxeológica que, de acordo com Chevallard, acrescenta às noções acima descritas, as noções de (tipo de) tarefa, técnica, tecnologia e teoria. Para ele, tais noções vão permitir modelizar às práticas sociais em geral as atividades Matemáticas, como descritas a seguir.

Organização Praxeológica

Podemos entender uma organização praxeológica como a realização de certo tipo de tarefa t que se exprime por um verbo, pertencente a um conjunto de tarefas do mesmo tipo t , através de uma técnica τ , justificada por uma tecnologia θ , que por sua vez, é justificada por uma teoria Θ . Parte do postulado que qualquer atividade humana põe em prática uma organização, denominada por Chevallard (1998) de praxeologia, simbolizada pela notação $[t, \tau, \theta, \Theta]$.

Chevallard (1998) considera ainda que o par $[t, \tau]$ está relacionado à prática, e pode ser compreendido como um saber-fazer, e o par $[\theta, \Theta]$ relacionado a razão, é compreendido como o saber. O autor define assim a Organização Praxeológica $[t, \tau, \theta, \Theta]$, em que temos um bloco prático $[t, \tau]$, composto das tarefas e técnicas, o chamado saber fazer, e um bloco teórico $[\theta, \Theta]$, composto pelas tecnologias e teorias, o bloco do saber. Considera ainda que a existência de um tipo de tarefa matemática em um sistema de ensino está condicionada à existência de, no

mínimo, uma técnica de estudo desse tipo de tarefa e uma tecnologia relativa a esta técnica, mesmo que a teoria que justifique essa tecnologia seja negligenciada.

Os tipos de *tarefas* (t) que se situam em acordo com o princípio antropológico supõem a existência de objetos bem precisos e que não são obtidos diretamente da natureza. Eles são artefatos, obras, construtos institucionais, como por exemplo, uma sala de aula, cuja reconstrução é inteiramente um problema, que é o objeto da didática (Chevallard, 1998). Por exemplo, resolva a equação $3x + 6 = 30$. A noção de tarefa, ou especificamente do tipo de tarefa, tendo como um objetivo bem definido, por exemplo, encontrar o valor de x é um tipo de tarefa, mas calcular não explicita o que é calcular. Assim, calcular o valor de uma equação é um tipo de tarefa, mas somente calcular não seria um tipo de tarefa. Para esse exemplo, calcular é gênero de tarefa.

Uma *técnica* (τ) é uma maneira de fazer ou realizar as tarefas $\tau \in t$. Segundo Chevallard (1998), uma praxeologia relativa a um tipo de tarefa t necessita, em princípio, de uma técnica τ relativa. No entanto, ele afirma que uma determinada técnica τ pode não ser suficiente para realizar todas as tarefas $\tau \in t$. Ela pode funcionar para uma parte $p(\tau)$ das tarefas t e fracassar para $t/p(\tau)$. Isso significa que em uma praxeologia pode existir uma técnica superior a outras técnicas, ao menos no que concerne à realização de certo número de tarefas de t (Chevallard, 1998). Por exemplo, a multiplicação no conjunto dos números naturais sempre aumenta, mas que pode fracassar em outro conjunto numérico.

A *tecnologia* (θ) é definida inicialmente como um discurso racional sobre uma técnica τ , cujo primeiro objetivo consiste em justificá-la racionalmente, isto é, em assegurar que a técnica permita que se cumpra bem a tarefa do tipo t . Na Matemática, tradicionalmente, a justificação de uma técnica é realizada por meio de demonstração. O segundo objetivo da tecnologia consiste em explicar, tornar inteligível e esclarecer uma técnica τ , isto é, em expor por que ela funciona bem. Além disso, a tecnologia tem também a função de reproduzir novas técnicas, mais eficientes e adaptadas à realização de uma determinada tarefa (Chevallard, 1998).

A *teoria* (Θ) tem como objetivos justificar e esclarecer a tecnologia, bem como tornar inteligível o discurso tecnológico. Passa-se então a um nível superior de justificação-explicação-produção, [...] retomando com relação à tecnologia o papel que esta tem em relação à técnica. O autor adverte, no entanto, que geralmente essa capacidade de justificar e de explicar a teoria é quase sempre obscurecida pela forma abstrata como os enunciados teóricos são apresentados frequentemente (Chevallard, 1998).

Uma organização matemática é elaborada em torno de uma noção, ou conceito, inerente à própria Matemática. As Praxeologias Matemáticas (OM) são as respostas (a rigor) a questões do tipo como realizar o estudo de determinado assunto. Refere-se ao modo que possibilita a realização do estudo de um determinado tema, o conjunto de tarefas, de técnicas, de tecnologias, entre outras, mobilizadas para o estudo de um tema. Por exemplo, encontrar o valor de uma incógnita de uma equação.

Quaisquer que sejam as escolhas adotadas nos cursos dos trabalhos de estudo de dada OM algumas situações estão necessariamente presentes, mesmo que estas se apresentem de formas variadas, tanto de forma quantitativa como qualitativamente falando. Estas situações serão denominadas de momentos de estudos, ou momentos didáticos, porque podemos dizer que qualquer que seja o caminho escolhido ele conduzirá inevitavelmente a um momento de fixação,

ou de institucionalização, ou a um momento que demandará o questionamento do que é válido acerca do que foi construído, que caracteriza o momento de avaliação, dentre outros.

O primeiro momento é o primeiro encontro com a organização que está sendo estudada. O segundo é o da exploração do tipo de tarefas t e de elaboração de uma técnica τ relativa a este tipo de tarefas. O terceiro momento é o da constituição do ambiente tecnológico-teórico relativo à técnica. O quarto é o do trabalho da técnica que visa melhorá-la, torná-la mais confiável, o que geralmente exige aprimorar a tecnologia até então elaborada e aumentar o controle que se tem sobre a técnica. O quinto momento é o da institucionalização que mostra o que realmente é a OM constituída, apontando os elementos que permanecerão definitivamente na OM e os que serão dispensados.

Finalmente, o sexto momento, o da avaliação, que se articula com o momento da institucionalização e permite relançar o estudo, demanda a retomada de alguns dos momentos, e eventualmente do conjunto do trajeto didático.

Analisando as Coleções

A metodologia seguida para a caracterização, análise e comparação das organizações matemáticas e didáticas existentes sobre o ensino de equações do 1º grau nessas duas coleções para Aprender Matemática (não avaliada no PNLD) e Ideias e Desafios ambas de Iracema e Dulce (aprovada no PNLD 2014) constitui-se em duas etapas de trabalho. A primeira trata-se da modelização a priori, das praxeologias matemáticas pontuais existentes em torno da resolução de equações do 1º grau, ao menos em termos de subtipos de tarefas, técnicas e tecnologias, a partir de estudos teóricos e didáticos. A segunda etapa constitui-se da caracterização das obras analisadas, apresentando sua identificação, os motivos da escolha, descrição da estrutura e da forma de organização dos conteúdos.

Modelização a priori

Tomando como base estudos teóricos, encontramos basicamente dois tipos de definições para equações. A primeira, mais geral, define equação como uma igualdade que envolve uma ou mais quantidades desconhecidas (incógnitas) (Cunha, 1887; Calado, 1952; Costa e Dos Anjos, 1970); a segunda, mais específica, sobre equações do 1º grau, como toda equação que se pode reduzir à forma $ax = b$, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$ (Calado, 1952).

Chevallard (1994) classifica os procedimentos de resoluções de equações do primeiro grau em duas categorias: (1) equações do tipo $ax + b = c$, que podem ser resolvidas por procedimentos aritméticos e (2) equações do tipo $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$, que não podem ser resolvidas por procedimentos que se apoiem especificamente em operações aritméticas. Nessa definição, x é a incógnita e $a_1, b_1 \in \mathbb{R}$ com $a_1 \neq 0$.

No entanto, nem sempre as equações do 1º grau apresentam-se escritas nas formas simplificadas. Frequentemente, numa atividade, elas aparecem sob diferentes formas, dentre as quais destacamos outras duas categorias: equações dos tipos $A(x) = c$ e $A_1(x) = A_2(x)$, em que $A(x)$, $A_1(x)$ e $A_2(x)$ são expressões polinomiais, na variável x , que ainda não foram reduzidas à forma canônica $ax + b$, e $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$, mas que podem ser reduzidas a esta forma por processo de desenvolvimento e redução.

Portanto, para este estudo, classificamos e caracterizamos a priori os seguintes subtipos de tarefas relativos à resolução de equações do 1º grau com uma incógnita, no campo do $\mathbb{R}$, em quatro categorias: (1) resolver equação uma equação do tipo $ax + b = c$ (t_1), como por exemplo, $2x + 5 = 15$; (2) resolver uma equação do tipo $A(x) = c$, sendo $A(x)$ uma expressão polinomial não reduzida à forma (t_2), por exemplo, $3(x + 2) + x = 20$; (3) resolver uma equação do tipo $a_1x + b_1 = a_2x + b_2$ (t_3), por exemplo, $2x - 4 = x + 5$; (4) resolver uma equação do tipo $A_1(x) = A_2(x)$, sendo $A_1(x)$ ou $A_2(x)$, expressões polinomiais não reduzidas à forma canônica (t_4), por exemplo, $2(x - 3) + x = x - 8$.

Para resolver tais subtipos de tarefas foram identificadas e categorizadas a priori as seguintes técnicas (τ): a) *Testar a igualdade* (τ_{TI}), por tentativas e erros; b) *Transpor termos ou coeficientes* (τ_{TTC}), invertendo as operações; c) *Neutralizar termos ou coeficientes* (τ_{NTC}), efetuando a mesma operação nos dois membros da igualdade; d) *Reagrupar os termos semelhantes* (τ_{RTS}), invertendo o sinal dos termos transpostos.

Além dessas técnicas próprias de resoluções de equações, para os casos dos subtipos de tarefas t_2 e t_4 , temos também a seguinte técnica: e) *Desenvolver ou reduzir expressões* (τ_{DRE}), eliminando parênteses e/ou agrupando termos semelhantes. Enfim, dependendo das variáveis mobilizadas na construção das equações, podemos mobilizar uma ou mais técnicas, dando origem às técnicas mistas.

Para justificar as técnicas caracterizadas acima para resolver equações do 1º grau com uma incógnita, foram identificadas e caracterizadas a priori as seguintes tecnologias: a) *Princípios de equivalência entre equações*: equações com as mesmas soluções ou raízes (θ_{PPE}); b) *Princípio aditivo*: quando aos dois membros de uma equação se adiciona (ou deles se subtrai) a mesma quantidade, obtém-se uma nova equação equivalente à primeira; c) *Princípio multiplicativo*: quando aos dois membros de uma equação se multiplica (ou deles se divide) a mesma quantidade (diferente de zero), obtém-se uma nova equação equivalente à primeira; d) *Propriedades das operações inversas em $\mathbb{R}$* (conjunto dos números reais) ou leis da transposição de termos (θ_{POI}): 1) Se a, b, c são números reais tais que $a + b = c$, então $a = c - b$; 2) Se a, b e c são números reais tais que $a \cdot b = c$, então $a = c \div b$, $b \neq 0$; 3) Propriedades gerais da igualdade (θ_{PGI}) ou lei do cancelamento: 1) Se $a + b = a + c \Leftrightarrow b = c$; 2) Se $a \cdot b = a \cdot c \Leftrightarrow b = c$ com $a \neq 0$; 3) Propriedades distributivas (θ_{PDM}): Se k, a, b, c e d são números reais, então $k(a + b) = ka + kb$ e $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.

Após apresentação e categorização das tarefas, bem como de suas tecnologias, analisamos duas coleções didáticas do 7º ano do Ensino Fundamental, sendo elas *Para Aprender Matemática e Ideias e Desafios*, ambas de Iracema e Dulce, apresentamos os principais resultados desse estudo comparativo das organizações existentes nessas coleções.

Principais resultados

Aqui analisamos os principais resultados do estudo das organizações didáticas e das praxeologias matemáticas nessas duas coleções didáticas do 7º ano, especificamente o capítulo de equações do 1º grau. Desse modo, utilizamos as categorias modelizadas a priori relativas às praxeologias matemáticas relativas ao subtipo de tarefa resolver equações do primeiro grau, em termos de subtipos de tarefas, técnicas e tecnologias:

Na coleção *Para Aprender Matemática* as relações da transposição das Praxeologias Matemáticas pontuais existentes em torno dos subtipos de tarefas referentes às resoluções de equações do 1º grau ocorrem em três momentos: *primeiro momento*- introdução de um problema ou situação realizada para formar ou sistematizar a técnica eletiva para resolver a equação (subtipo de tarefa) procurada na situação, por meio da explicação do procedimento de resolução. Além disso, nesse momento se enunciam as propriedades ou afirmações que integram os elementos tecnológicos que explicam ou justificam a técnica sistematizada.

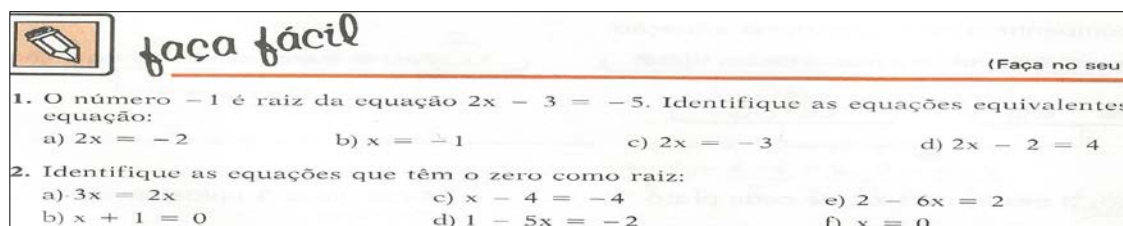
• utilizando uma tabela:

Horas	1	2	3	4	...
Número de pacotes	60	120	180	240	...

Figura 2. Exercício para introduzir a noção de expressões algébricas.

Fonte: Iracema; Dulce (1998, p.112).

O *segundo momento* é destinado à avaliação dos elementos técnico-tecnológicos, ocorrendo de forma implícita nos enunciados.



(Faça no seu ...)

1. O número -1 é raiz da equação $2x - 3 = -5$. Identifique as equações equivalentes a equação:
 a) $2x = -2$ b) $x = -1$ c) $2x = -3$ d) $2x - 2 = 4$

2. Identifique as equações que têm o zero como raiz:
 a) $3x = 2x$ c) $x - 4 = -4$ e) $2 - 6x = 2$
 b) $x + 1 = 0$ d) $1 - 5x = -2$ f) $x = 0$

Figura 3. Extrato com reflexos sobre equações

Fonte: Iracema; Dulce (1998, p.124).

O *terceiro momento* é dedicado ao *trabalho da técnica*, indicado nas seções intituladas *faça fácil e faça exercícios complementares*. Concluimos que nessa coleção a passagem de procedimentos aritméticos para procedimentos algébricos não é realizada de forma explícita, posto que as autoras afirmam que há as regras práticas(técnicas) principais que podem ser agrupados para resolver equações. As autoras não deixam claro quais tipos de equações podem ser resolvidos utilizando-se das operações inversas e quais tipos só podem ser resolvidos efetuando a mesma operação nos dois membros da equação.

Na coleção *Ideias e Desafios* a transposição das praxeologias matemáticas existentes em volta dos subtipos de tarefas referentes à resolução de equações do 1º grau se dão por meio de três momentos: o *primeiro momento* introdução de um problema ou uma situação realizada para formar ou sistematizar a técnica eletiva para resolver a equação (subtipo de tarefa) procurada na situação, por meio de uma explicação do procedimento de resolução. No entanto, é nesse momento que se enunciam as propriedades ou afirmações que integram os elementos tecnológicos que explicam ou justificam a técnica sistematizada.



Tempo (horas)	Quantidade (nº de calças)
1	20
2	40
4	80
...	...

Figura 4. Exercício para introduzir a noção de expressões algébricas

Fonte: Iracema; Dulce (2012, p.147).

O *segundo momento* é destinado a *avaliação* dos elementos técnico-tecnológicos que surgem na situação e ocorrem nas seções denominadas *troque ideias e resolva*. Assim, nesse momento o aluno tem chance de participar de maneira significativa de sua aprendizagem, pois é nele que as autoras apresentam questionamentos que permitem ao aluno fazer indagações sobre os conceitos e procedimentos explorados no momento anterior.

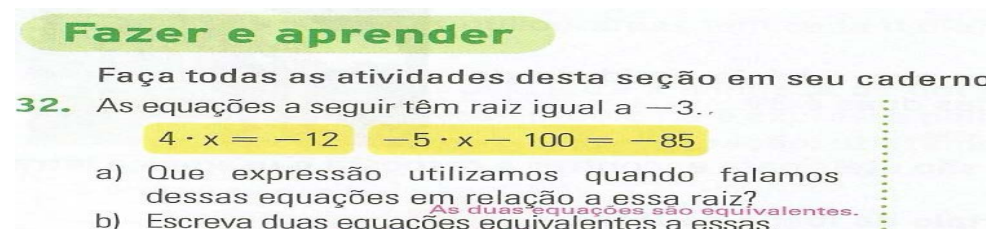


Figura 6. Extrato com reflexos sobre equações

Fonte: Iracema; Dulce (2012, p.164).

O *terceiro momento* é dedicado ao trabalho da técnica, indicado nas seções *exercícios; exercícios complementares e problemas*.

Concluimos que a transposição dos procedimentos aritméticos para os procedimentos algébricos não são realizados de forma explícita nessa coleção. As autoras indicam dois processos (técnicas): o processo geral para resolução de equações em que adota procedimentos para encontrar a raiz da equação e o outro processo em que a regra prática resumiria as etapas, isto é, isolar o x para o 1º membro invertendo os sinais dos coeficientes ou incógnitas.

No que concerne à *organização didática*, o mesmo se dá em dois momentos didáticos. O *primeiro*, denominado de *elaboração e sistematização* das técnicas eleitas para resolver equações (subtipos de tarefas) exploradas nas situações introdutórias que se realizam por meio da explicação do processo de resolução. É nesse momento que se enunciam as propriedades ou afirmações que constituem os elementos tecnológicos que explicam ou justificam as técnicas sistematizadas. O *segundo*, denominado momento do *trabalho das técnicas*, ocorre através da realização de exercícios apresentados logo em seguida ao processo de sistematização:

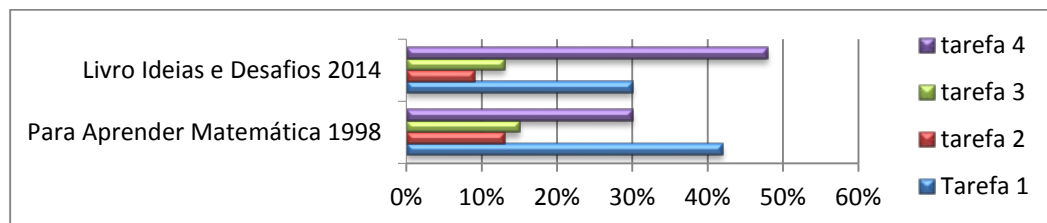


Gráfico 1. Comparativos Subtipos de Tarefas Coleção Para Aprender Matemática e Ideias e Desafios.

Na coleção *Para Aprender Matemática* a técnica priorizada foi t_1 com 42%, ou seja, equações do tipo $ax + b = c$. Por exemplo $x + 8 = 26$. A coleção *Ideias e Desafios* de 2014 sofreu alteração em relação a de 1998. A técnica priorizada foi t_4 , com 48% equações do tipo

$$A_1(x) = A_2(x). \text{ Por exemplo: } 3(x - 2) + x = \frac{x + 5}{2}.$$

Em relação ao uso das tecnologias, a coleção *Para aprender Matemática* concentrava-se na tecnologia da propriedade *Princípios de equivalência entre equações*, com 32%. Em 2014, a coleção *Ideias e Desafios* alterou as prioridades das tecnologias, priorizando as propriedades distributivas da multiplicação/propriedades gerais inversa com 61%.

Alçamos ainda que a coleção de 2014 faz uso de capítulo intitulado de equações, geometria e medidas, como preconiza os Parâmetros Curriculares Nacionais a ligação entre os blocos de conteúdos.

Podemos enfatizar que na coleção *Ideias e Desafios* houve uma redução significativa em relação ao número de equações prontas para serem resolvidas que em 1998 foi na ordem de 47% e em 2014 esse percentual foi de 35%, como mostra o Gráfico 2:

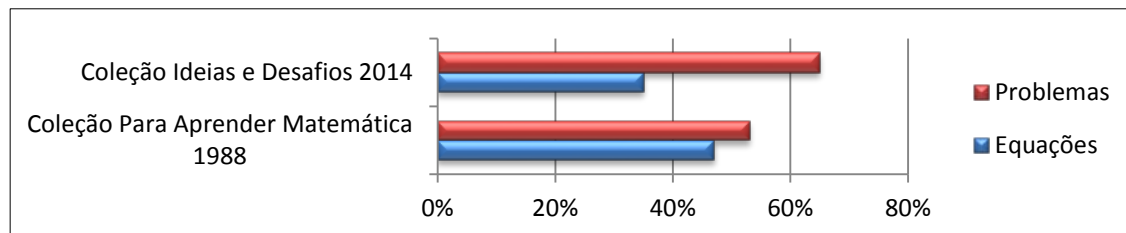


Gráfico 2. Comparativo de equações nas coleções Para Aprender Matemática e Ideias e Desafios.

Ainda inferimos que as coleções passaram por mudanças no tocante ao quantitativo de exercícios. Assim, percebemos como positivo a mudança de enfoque na medida em que os alunos não recebem as equações prontas apenas para encontrarem o valor desconhecido (incógnita).

Considerações finais

Tomando como referência uma coleção aprovada no PNLD de 2014 e outra coleção anterior a avaliação do PNLD, ambas das mesmas autoras, nos permitiu concluir que ao longo desses 15 anos a coleção sofreu modificações significativas em sua estrutura, bem como o avanço da parte da diagramação.

As coleções analisadas desenvolvem trabalhos de elaboração e sistematização de diferentes técnicas para realizar os diferentes subtipos de tarefas relativos à resolução de equações do 1º grau. Todavia, tais coleções não justificam a existência dessas diferentes técnicas, assim, não deixam claro os limites ou potencialidades de cada técnica, além de não esclarecerem a distinção entre procedimentos aritméticos e algébricos (Chevallard, 1984).

As transposições didáticas realizadas nessas coleções relativas ao conceito de equação do 1º grau falham em não deixar claro a transição dos métodos de resolução aritméticos para os métodos de resolução algébricos, assim como não realizaram adequadamente a passagem da Aritmética para Álgebra, como também apontou Araujo (2009). As coleções *Para Aprender Matemática* e *Ideias e Desafios* definem equação do primeiro grau como sendo igualdades que contêm letras representando números desconhecidos, denominadas incógnitas, isto é, igualdades entre expressões algébricas. Em ambas as coleções o uso da metáfora da balança de dois pratos é utilizado nas demonstrações das técnicas, de modo que é constante o uso desse recurso.

Por fim, verificamos que as coleções não modificaram as *praxeologias matemáticas* ao longo dos anos. Contudo, percebemos que as autoras modificaram suas coleções em relação às *praxeologias didáticas*.

Referências e bibliografia

Araujo, A. J. de. (2009). *O ensino de Álgebra no Brasil e na França: um estudo sobre o ensino de equações do 1º grau à luz da teoria antropológica do didático* (Tese de doutorado). UFPE. Brasil.

- Barbosa E. J. T., & Lins A. F. (2011). Equação do Primeiro Grau: um estudo das organizações matemática e didática. In *Anais do XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática*. Recife, PE, junho de 2011.
- Bednarcz, N., Kieran, C., & LEE, L. (1996). *Approaches to Algebra: Perspectives for Research and Teaching*. London: Mathematics Education Library. Kluwer Academic Publishers.
- Bernard, J.E., & Cohen, M. P. (1995). Uma integração dos Métodos de Resolução de Equações numa Sequência evolutiva de Aprendizagem. In A. F. Coxford, & A. P. Shulte, *As Ideias da Álgebra* (pp. 11-126). Parte 3: Álgebra: Ideias e Questões, Cap. 10. São Paulo: Atual.
- Boyer, C. B. (1996). *História da Matemática* (2ª edição, Tradução Elza F. Gomide). São Paulo: Editora Edgard Blücher.
- Boujaddi, M. (1996). *Algèbre et généralisation en classe de seconde: 'à chacun sa vérité'* (Mémoire professionnel). Grenoble: I.U.F.M.
- Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Infantil e Ensino Fundamental. (2010). *Guia de Livros Didáticos*. v.3, 6º a 9º séries. 96 p. Brasília, DF.
- Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª Séries) Matemática*. 142 p. Brasília, DF.
- Brito Menezes, A. P. A. (2006). *Contrato Didático e Transposição Didática: Inter- Relações entre os Fenômenos Didáticos na Iniciação à Álgebra na 6º Série do Ensino Fundamental* (Tese de Doutorado). UFPE. Brasil.
- Calado, J. J. G. (1952). *Compêndio de Álgebra*. Lisboa: Livraria Popular de Francisco Franco.
- Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (2001). *Estudar matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem* (Tradução: Daisy Vaz de Moraes). Porto Alegre: Artmed Editora.
- Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (1984). *Le passage de l'arithmétique à l'algébrique dans l'enseignement des mathématiques au collège: l'évolution de la transposition didactique*. In Petit X n° 5, IREM, Grenoble.
- Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. (1998). *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques: L'approche anthropologique*. Actes de l'U.E. de la Rochelle.
- Costa, A. A., & Dos Anjos, A. O. (1970). *Compêndio de matemática*. Porto: Porto Editora.
- Fiorentini D., Miorim, M. A., & Miguel, A. (1993). *As concepções de educação algébrica. Pro-Posições*, 19(1), 39-54.
- Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. Em N. Bednarcz, C. Kieran, C., & L. Lee (Eds.), *Approaches to Algebra: Perspectives of Research and Teaching* (pp. 87-106). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Lins, R. C., & Gimenez, J. (1997). *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI* (4ª ed.). Campinas: Papirus Editora.
- Miguel, A., Fiorentini, D., & Miorim, M. A. (1992). Álgebra ou Geometria: para onde Pende o Pêndulo?, *Pró-posições*, 3(1), 39-54.
- Mori, I. (1998). *Matemática: idéias e desafios*. Iracema & Dulce. Obra em 4 v. para alunos de 5ª a 8ª séries (6ª ed.). São Paulo: Saraiva.
- Mori, I. (2012). *Matemática: ideias e desafios*. Iracema & Dulce. Obra em 4 v. para alunos de 5ª a 8ª séries (17ª ed). São Paulo: Saraiva, Reformulada.

Evidencias de pensamiento variacional en estudiantes que inician ingeniería

Marvin **Mendoza** Valencia
 Universidad Autónoma de Honduras
 Honduras
vinmar28@hotmail.com
 Carlos **Cabezas** Manríquez
 Universidad Católica del Maule
 Chile
ccabezas@ucm.cl

Resumen

Presentamos algunas conclusiones sobre habilidades de pensamiento variacional que poseen estudiantes de primer año de ingeniería en una universidad chilena. Objetivo del estudio es comprender cómo se manifiesta la presencia de pensamiento variacional en sus razonamientos y las representaciones utilizadas para manifestarlo. Para conseguir tal objetivo, se analizó material escrito, fotográfico y filmico recopilado en las clases, talleres y sesiones de estudio de los grupos de estudiantes en que se organizó un curso inicial de cálculo. Material básico para los talleres y sesiones de estudio, fueron guías de estudio especialmente confeccionadas para el efecto. Este trabajo forma parte de una investigación más amplia, cuyo objetivo es estudiar las relaciones que los estudiantes producen cuando analizan situaciones dinámicas buscando covariaciones de magnitudes, que permitan la formulación de modelos matemáticos de las situaciones en estudio, entendiendo que el pensamiento variacional se desarrolla y se justifica en la formulación de modelos. Los resultados reflejaron algunas aproximaciones al Pensamiento Variacional, lo que refleja la necesidad de su desarrollo en los distintos niveles de escolaridad.

Palabras clave: pensamiento variacional, covariaciones, modelos, habilidades.

Introducción

El pensamiento variacional ha tomado un lugar central en la investigación de los procesos de aprendizaje de la matemática y desarrollo de habilidades para representar y comprender la realidad. De acuerdo con Vasco (Vasco, 2010) “El objeto del pensamiento variacional es la captación y modelación de la covariación entre cantidades de magnitud, principalmente –pero no exclusivamente– las variaciones en el tiempo. Una manera equivalente de formular su propósito rector es pues tratar de modelar los patrones que se repiten en la covariación entre cantidades de magnitud en subprocesos de la realidad”. Si, en coherencia con esta concepción del pensamiento variacional, nos situamos en contextos cercanos a los estudiantes, en los cuales puedan investigar sobre los procesos de cambio que viven a diario, éstos podrán poner en evidencia sus concepciones pre matemáticas y, a través de un currículum adecuado, conducirlos a un

aprendizaje más significativo de los conceptos matemáticos que el sistema educativo busca entregar, sistematizar y formalizar.

En este punto y, desde una perspectiva más allá del pensamiento variacional, afirmamos que la matemática no se comienza a aprender en la sala de clases. Esta afirmación es coherente con la descripción que Cantoral (Cantoral, 2000) hace del pensamiento matemático:

Por un lado se le entiende como una reflexión espontánea que los matemáticos realizan sobre la naturaleza de su conocimiento y sobre la naturaleza del proceso de descubrimiento e invención en matemáticas. Por otra, se entiende al pensamiento matemático como una parte de un ambiente científico en el cual los conceptos y las técnicas matemáticas surgen y se desarrollan en la resolución de tareas; finalmente, una tercera visión considera que el pensamiento matemático se desarrolla en todos los seres humanos en el enfrentamiento cotidiano a múltiples tareas.

Desde ésta perspectiva, se convierte en una necesidad didáctica, conocer las pre concepciones y experiencias pre matemáticas que los estudiantes traen cuando llegan a la sala de clases. Conocer estas preconcepciones, forma, entonces, parte del quehacer docente, pero también del quehacer del investigador en didáctica de la matemática. Godino (Godino, 2011), comentando la posición de ciertos autores (Wittman, 1995; Hjalmarson y Lesh, 2008; Lesh y Sriramn, 2005), acerca del enfoque de la Didáctica de las Matemáticas como una “ciencia de diseño” comenta sus reflexiones sobre la naturaleza del campo de investigación de la educación matemática:

¿Deberían los educadores matemáticos pensar sobre sí mismos como siendo psicólogos educativos aplicados, psicólogos cognitivos aplicados, o científicos sociales aplicados? ¿Se deberían considerar como los científicos en el campo de la física, o de otras ciencias puras?

¿O más bien se deberían considerar como ingenieros u otros científicos orientados al diseño, cuya investigación se apoya sobre múltiples perspectivas prácticas y disciplinares y cuyo trabajo está guiado por la necesidad de resolver problemas reales como también por la necesidad de elaborar teorías relevantes? La posición defendida por estos autores es considerar la educación matemática en este último sentido, o sea, como una ciencia orientada al diseño de procesos y recursos para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Nuestra visión del diseño en la investigación educativa se basa, en parte, en las semejanzas y paralelismos entre la educación y la ingeniería como campos que simultáneamente buscan avanzar el conocimiento, resolver problemas humanos, y desarrollar productos para su uso en la práctica (Hjalmarson y Lesh, 2008, p. 526, en Godino, 2011).

Adhiriendo a esta última posición y considerando la falta de propuestas explícitas para enfrentar el problema del aprendizaje y enseñanza del fenómeno del cambio y la variación, particularmente con el fin de aportar al surgimiento de una propuesta de enseñanza del cálculo en el nivel inicial de la educación superior, nos interesa poner en evidencia las manifestaciones que, a pesar de un sistema educativo que no ha puesto atención en el particular, hayan podido desarrollar los estudiantes que llegan a este estadio en su proceso educativo.

Marco Teórico

Como ya fue dicho en la introducción y en coherencia con Vasco (Vasco, 2010), entendemos por pensamiento variacional aquel tipo de pensamiento matemático que se preocupa de estudiar la variación y el cambio, característicos de los procesos dinámicos presentes en la

naturaleza en los que ocurren covariaciones que representan generalmente relaciones de causalidad. En relación a las manifestaciones mediante las cuales los estudiantes expresan la presencia de pensamiento variacional, consideramos como referente la Teoría de Representaciones de Raymond Duval y asociamos las manifestaciones de los estudiantes, a diferentes registros de representación desde una interpretación pre matemática de sus manifestaciones. Entendemos como pre matemática una manifestación que desde el lenguaje verbal y puramente cotidiano y no matemático en la concepción del alumno, encierra potencialmente un concepto matemático expresable en algún registro de representación, ya sea geométrico, algebraico, numérico, tabular u otro.

Ejemplos de expresiones pre matemáticas aparecen en el diálogo de los estudiantes cuando hablan, por ejemplo, de distancias sin interpretar la distancia como un concepto matemático, no se sitúan en un contexto métrico sino que hablan de la distancia entre dos objetos de manera aislada. En la enseñanza parvularia los niños juegan a relacionar objetos, animales con sus expresiones fónicas, los niños no perciben que estén haciendo matemática, sin embargo ubicados en contextos funcionales ellos están construyendo relaciones susceptibles de formalización matemática. A estos últimos se les conoce como conceptos pre-numéricos por su proyección hacia los conceptos de ordinal y cardinal. En nuestra interpretación son, de manera genérica, manifestaciones pre matemáticas.

Un tercer referente teórico en este trabajo corresponde a la visualización matemática.

De acuerdo con Torregrosa y Quesada, (Torregrosa y Quesada, 2007), la definición y caracterización de los procesos de visualización y razonamiento, es un avance en la línea de conocimiento del fenómeno cognitivo, ya que separa la acción cognitiva (proceso) de las distintas representaciones e imágenes mentales.

Según Arcavi (1999), la visualización no está solamente relacionada con la ilustración, sino también es reconocida como una componente clave del razonamiento (profundamente unida a lo conceptual y no meramente a lo perceptivo), a la resolución de problemas e incluso a la prueba. Por esta razón, concordamos con Torregrosa y Quesada que afirman: “vemos a los procesos de visualización y de razonamiento, junto con su coordinación, como elementos esenciales de un modelo conceptual que nos permite conocer la actividad de los alumnos; en la línea abierta por Bishop (1983), para conocer en la medida de lo posible el interfaz de la actividad matemática cuando se enfrentan a la resolución de problemas en geometría.” En nuestro caso, cuando se enfrentan al análisis de situaciones dinámicas en las que intervienen correlaciones de variables.

Metodología

El presente trabajo se enmarca en un enfoque cualitativo de corte interpretativo pues busca conocer el núcleo de las significaciones que grupos de estudiantes manifiestan en las respectivas sesiones de estudio y actividades de taller. Es cualitativo por la naturaleza de sus datos.

La investigación se desarrolló con un curso de cálculo de primer año de ingeniería de una universidad chilena. Los estudiantes, 40 en total, se constituyeron en grupos de estudio por afinidad lo que significó que no todos los grupos tenían el mismo número de alumnos, sin embargo ninguno llegó a tener más de 7 integrantes ni menos de 4. Los grupos se constituyeron para la realización de trabajos en la modalidad de talleres los que eran evaluados con nota y, sesiones de estudio sin nota pero, de acuerdo a la participación activa de los alumnos, influirían

conceptualmente si las notas logradas en las pruebas llegaran a estar ligeramente bajo los niveles de aprobación.

Los talleres se realizaron de manera presencial en la sala de clases, estudiantes ayudantes de cursos avanzados filmaron el trabajo de los distintos grupos.

Las sesiones de estudio de los diferentes grupos se realizaron en los lugares que los estudiantes estimaron convenientes, generalmente lo hicieron en la casa de alguno de los alumnos del grupo y, en horarios que todos los integrantes de los respectivos grupos tuvieran disponibles. Los grupos entregaron filmaciones que ellos mismos realizaron de sus sesiones de estudio.

Para la recolección de la información se usaron las filmaciones y fotografías de los talleres y de las sesiones de estudio. También fueron considerados los trabajos escritos producto de los talleres y de las pruebas escritas.

El método utilizado, se describe a continuación:

1. Se tomó una prueba de diagnóstico.
2. En base a las respuestas de la prueba de diagnóstico y las consideraciones teóricas de Vasco (2006, 2010) y Duval (1999), se establecieron categorías de análisis.
3. Se construyeron situaciones de estudio para los grupos, en base a procesos dinámicos, que permitieran observar en sus procesos de razonamiento, la presencia de pensamiento variacional de acuerdo a las categorías de análisis.
4. Se construyeron situaciones problemáticas para la realización de los talleres.
5. Se filmaron las actividades de los talleres y las sesiones de estudio.
6. Se analizaron los videos y las pruebas
7. Se hicieron las conclusiones.

Con el empleo de esta metodología se pretendía que los estudiantes se potenciaron entre ellos, tuvieran espacios de libertad en los cuales pudieran expresar, sin la presencia de una figura institucional sus ideas, sus aportes, sin temor al error y así, generaran razonamientos discursivos o inferencias a partir de los datos registrados, en cualquier tipo de lenguaje que manifestara una comunicación ya fuese verbal, gráfica, algebraica o de otro tipo y que pudiera ser interpretada como una manifestación de pensamiento matemático o pre matemático, en particular como pensamiento variacional o pre variacional.

Descripción de la prueba de diagnóstico

De acuerdo a los objetivos planteados, en la prueba de diagnóstico se consideraron situaciones que los alumnos pudieran interpretar como dinámicas e intentaran establecer relaciones entre variables, que les permitieran conjeturar comportamientos covariacionales a la vez que pudieran describirlos o representarlos mediante diversos tipos de expresiones. Este objetivo no fue declarado a los estudiantes para no influenciar sus reacciones.

Las situaciones planteadas en esta prueba, se detallan en el Apéndice A.

Seguidamente presentamos un reactivo de la prueba de diagnóstico y algunas consideraciones de las producciones estudiantiles.

Reactivos de la Prueba de Diagnóstico

Presentamos en este apartado, el reactivo uno de la prueba de diagnóstico, las respuestas de los estudiantes y su respectivo análisis.

Reactivo 1.

La figura que se muestra a continuación, está construida mediante una sucesión de hexágonos regulares construidos, cada uno, en el interior del precedente tomando como vértices los puntos medios de sus lados.

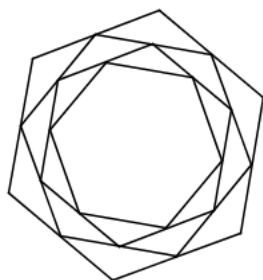


Figura 1. Hexágonos inscritos

- Haga todos los comentarios que considere pertinentes si el proceso de construcción de la figura continúa indefinidamente.
- Agregue otros comentarios que estime pertinentes, si supone que el lado del primer hexágono de la figura mide 1 metro.

Este reactivo fue de gran motivación para los estudiantes ya que la mayoría de ellos presentó planteamientos respecto de las cuestiones planteadas.

Utilizaremos la codificación E1, E2, E3,... En, para referirnos a cada estudiante en particular.

Los estudiantes expresaron en este reactivo que la variación más frecuente en la construcción de los hexágonos era la de dos magnitudes. En ese proceso de construcción de hexágonos, el cambio de tamaño de las figuras con la longitud de los lados del hexágono fueron observaciones que emergieron en sus producciones, por ejemplo:

E2: Siempre el hexágono interior va a ser más pequeño que el exterior y sus lados sean la mitad del hexágono del hexágono antes definido

E5: El proceso de tomar un pentágono de un tamaño, este se irá achicando, es decir, la medida de sus lados irá disminuyendo hasta llegar a un punto que no se puede sacar más distancias. Ambas citas expresan la variación de tamaño de la figura y la longitud.

Los estudiantes además relacionaron longitud, perímetro y área de la figura señalando que varían conjuntamente en el proceso de construcción de los hexágonos. En el siguiente enunciado se aprecia:

E8: A medida que existan más hexágonos dentro del inicial, el área de estos irá decreciendo a medida que avanza. Lo mismo ocurre con sus perímetros y la longitud de sus lados.

Algunos estudiantes no explicitaron la variación de magnitudes ya que expresaron que esta dependerá de las variables seleccionadas. La siguiente expresión da cuenta de esa afirmación.

E7: Considero que para que el proceso de construcción continúe indefinidamente, todo depende de sus variables (como pueden ser sus medidas).

Con respecto a la variación que observaron los estudiantes, la expresaron mediante lenguaje coloquial utilizando palabras tales como: “achicando”, “decreciendo” para referirse a la disminución del tamaño de la figura en relación al hexágono inicial. Otras expresiones como “el proceso de seguir construyendo hexágonos inscritos continúa hasta llegar a tamaños microscópicos y a dimensiones que no se puede medir” emergen en este primer reactivo de la prueba.

Un estudiante (E8) expresó que “si el proceso de construcción continuara llegaría un momento que la figura deberá ser microscópica ya que el hexágono se construye con los puntos medios del anterior como estos son medidas numéricas siempre existirá la mitad de un número por más pequeño que sea”.

Por su parte E5, expresó que “si el primer lado mide 1m, el segundo lado medirá la mitad y así sucesivamente, y como lo explicado anteriormente el hexágono tendrá infinitos hexágonos más dentro de él”. Lo expresado por el estudiante induce a pensar en cierta madurez en el proceso de construcción que se le planteó, a su vez proporciona evidencias de conocimientos y desarrollo de pensamiento variacional, además se observa desarrollo habilidades de pensamiento superior e indicios de una mirada de cálculo infinitesimal.

En términos porcentuales, un 10% de los estudiantes expresaron que el proceso de construcción de hexágonos finaliza, es decir que es finito. Otro 10% manifestó que el proceso puede continuar indefinidamente, pero sujeto a ciertas condiciones.

En las siguientes citas se recopilan evidencias de la categoría antes señalada. E6, expresa que el proceso de tomar un pentágono de un tamaño, este se irá achicando, es decir, la medida de sus lados irá disminuyendo hasta llegar a un punto que no se puede sacar más distancias. Por su parte E3 considera que para que el proceso de construcción continúe indefinidamente, todo depende de sus variables (como pueden ser sus medidas).

En la primera cita anterior, se observa que el estudiante reconoció con claridad de lo que sucede con el tamaño de la figura; sin embargo el estudiante argumenta que a partir de un momento no se puede continuar obteniendo otra distancia. Esta afirmación está ligada a una posible creencia de que las magnitudes se obtienen únicamente de la medición mediante un instrumento.

La segunda cita da cuenta que el estudiante visualiza el proceso de construcción de hexágonos es dependiente y está condicionado por sus medidas (longitud del hexágono).

Las dos argumentaciones anteriores reflejan que los estudiantes poseen mayor desarrollo de pensamiento numérico que algebraico.

La mayoría de los estudiantes realizaron sus desarrollos escritos presentando sus argumentaciones en lenguaje natural escrito, sin realizar ningún tipo de cálculo.

El 80% de los estudiantes comprendió la situación problema, a pesar de que cometieron errores al relacionar el punto medio del hexágono, con la longitud de los lados.

E6 expresa lo anterior, ya que para él tomando al principio un hexágono regular, la construcción de estos hexágonos tomando como puntos medios de los lados y así formar otro hexágono, en mi opinión se seguirán construyendo hexágonos cada vez más pequeño. Por lo que

puedo observar que la figura disminuye sus lados (dependiendo del valor de la primera) (suponiendo que es 5), la figura tiende a disminuir cada vez más su medida en una fracción. Si el primer hexágono mide 1m, a medida que se van construyendo más hexágonos, su medida de los vértices de los otros hexágonos será menor, sus lados también lo serán, si el lado del hexágono mide 1, tomando los puntos medios se pueden formar triángulos con 2 lados iguales con medidas $\frac{1}{2}$, pudiendo así sacar la medida de sus lados.

Lo anteriormente expresado por el estudiante hace referencia al proceso de construcción de hexágonos, donde se considera un hexágono inicial, y en base a este, se construyen otros más de manera indefinida. La argumentación que plasmó el estudiante, evidencia cierto desarrollo de pensamiento variacional y habilidades de orden superior, y visualización del proceso.

Respecto a la manera de objetivar sus registros de representación en el reactivo propuesto, el 10% de estudiantes mezclaron diferentes registros de representación, puesto que expresaron sus argumentaciones combinando lenguaje natural escrito y gráficas (hexágonos, circunferencias). Mientras que otro 10% de los estudiantes desarrollaron argumentos mediante lo numérico y lo escrito. E8 da cuenta de la utilización de estos registros. Para él, si el proceso de construir indefinidamente, la cantidad de hexágonos irá creciendo con hexágonos cada vez más pequeños, la cantidad de hexágonos crece indefinidamente. Si el hexágono grande mide 1 metro de lado(a)...entonces el lado del hexágono inmediatamente menor será $(\frac{\sqrt{3}}{2})$ y el que vendrá será $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{4}$ y el otro $\frac{3}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{8}\sqrt{3}$, y el otro $\frac{3}{8}\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{16}$ y así sucesivamente.

Análisis del reactivo 1 de la prueba diagnóstica

Los estudiantes en su mayoría reconocieron que el proceso de construcción de hexágonos se realiza de manera infinita. Esto fue expresado mediante diferentes argumentaciones discursivas de los estudiantes. En este particular se hizo referencia a la construcción de hexágonos inscritos fue realizada mediante la unión de los puntos medios del hexágono circunscrito anterior. En este orden de ideas, los estudiantes sostuvieron que siempre existirá otro hexágono inscrito, construido en los puntos medios del hexágono circunscrito anterior.

En este proceso de construcción de hexágono se reportan varias visiones al respecto. Algunos estudiantes, expresaron que este proceso se podrá continuar hasta que un lado del hexágono llegue a cero y siga manteniendo la forma de hexágono. Por su parte, otros estudiantes sostuvieron la longitud del lado que será próxima a cero pero no llegará a serlo. Uno de ellos, mencionó que las dimensiones de “algunos hexágonos” serán microscópicas. Otro estudiante, se refirió que el tamaño de los hexágonos se irá achicando, es decir la medidas de su lado se hará tan pequeña hasta un punto que “no se puedan sacar más distancia”. Otro, mencionó que el proceso de construcción de hexágonos es “infinito hacia dentro”, con la posibilidad que el proceso de construcción podría generar una sucesión de hexágonos hacia “afuera del primero”

Respecto la variación de magnitudes en la construcción del hexágono fueron recurrentes ciertas expresiones en las producciones estudiantiles tales como: “al interior va disminuyendo su lado”, “se va achicando el lado”, “la figura se hace más pequeña”. En algunos casos, variación de dos magnitudes como “el perímetro y el área” y en otros, variación conjunta de tres magnitudes: longitud del lado, perímetro y área.

Otros aspectos de análisis de la prueba diagnóstica responden al análisis de cómo los estudiantes expresaron sus argumentos y qué procedimientos realizaron. En el primer aspecto,

los estudiantes utilizaron con mayor frecuencia el lenguaje natural escrito, con excepción de algunos estudiantes que combinaron dos registros. En el segundo aspecto algunas producciones estudiantiles reportan la descomposición del hexágono en triángulos congruentes. En este sentido, algunos estudiantes mencionaron que se originaron “pequeños triángulos” al ir construyendo un hexágono dentro del otro. Para ilustrar este proceso, deconstruyeron la figura y le calcularon la longitud de los lados de los triángulos, iniciando por el hexágono más grande y luego por cada uno de los inscritos hasta encontrar un patrón en la construcción.

Sesiones de Estudio

Con base en los objetivos propuestos tanto para la clase, como para la investigación y, en los resultados del diagnóstico se diseñaron diferentes situaciones en distintos contextos con el propósito de organizar el estudio de los estudiantes de tal manera que en el estudio de éstas, sus argumentaciones nos revelaran la presencia de elementos del pensamiento variacional emergente. A manera ilustrativa, presentamos la descripción de una de las actividades de las secuencias de aprendizaje elaborada con los propósitos declarados.

Descripción de la primera situación de estudio

Situación de estudio 1.



Figura 2. Situación problema relacionada con funciones trigonométricas

Se describe la sesión de estudio mediante episodios. En ella participa un grupo de cuatro estudiantes que designamos como E1, E2, E2, E3, y E4 en la transcripción de esta.

En la primera parte solicitada, uno de los estudiantes presenta una situación particular,

E1 expresa que una persona que iba pasando por una plaza y frente a él había un poste a 12 metros de distancia, detrás del poste había un árbol y arriba del árbol había un gato. El hombre sabía que desde él hacia el árbol había 15 metros de distancia y él quería saber a qué distancia se encontraba el gato.

Ahora para hacer el cálculo se debe hacer con la altura de la persona, ésta debe ser 1,80 aproximadamente. Pero mirando el ángulo para calcular desde la perspectiva del ojo de la persona, 1,70 aprox. El ángulo de visión de la persona hacia el poste habían 20° , ahora la altura del poste. Primero hay que calcular la medida del poste.

E2: Muestra el dibujo y expresan: Ahí está el dibujito, el ángulo alfa por teorema de Thales mide 70° ya que aquí hay una proporción (mostrando los elementos de los triángulos). Hacen más cuentas y deducen la altura del árbol.

Respecto a la variación los estudiantes discuten y expresan algunas ideas, E3 menciona Analizando las situaciones de variación planteadas comentan: Cuando c disminuye el ángulo b

aumenta para que se mantenga la igualdad de estos triángulos y se mantenga la igualdad de todos los lados interiores de (murmullo)...

E4: Si el ángulo c disminuye, el ángulo C también disminuye,

Todos: murmullos...

E1: Es que estoy diciendo ángulo y ángulo, ahí hay un error...

Todos: murmullos...

E2: Si pregunta por c esta es una distancia del ángulo A al ángulo B ...

E3: Ah! está preguntando por este c , c lado ya, si c , este c aumenta, el ángulo C también aumenta, para mantener la igualdad de los ángulos interiores que deben sumar 180. Porque si el ángulo B está aumentando el ángulo C debe estar disminuyendo.

E2: Si b y c varían simultáneamente, por ejemplo si c crece y b disminuye, a2) deberían hacerlo en la misma proporción.

E3: claro para que no se alterara el triángulo dentro deberían aumentar y disminuir juntos, si lo hacen por separado varían las medidas del triángulo.

E2: para que se mantenga la propiedad de ser un triángulo rectángulo a1) hummmm cuatro.

4. seno (pausa)...aaah aquí la craneamos toda la... (No se entiende) seno (murmullos) seno...seno del ángulo c e igual aaa opuesto partido por a , murmullos

E2: seno de éste llega...silencio...eeehhh, con los catetos opuestos la adyacente y la hipotenusa dependiendo de cada ángulo se pueden calcular todas las demás funciones trigonométricas que hay en el triángulo.

E3: el seno de C sería 3, no, sería, cuatro quintos y, a ver la tangente dee,

E4: espérate, de B , la tangente de B es cuatro tercios...murmullos...

Análisis de la actividad

Los estudiantes describen una situación problema que involucran en su solución las funciones trigonométricas, sin embargo la situación no representa variaciones. Se trata de una situación estática y sin pretensiones de representar alguna dinámica o proceso variacional, en efecto las distancias involucradas en el problema son fijas y, aunque la persona que “pasa” por la plaza permanece aparentemente en movimiento, se tiene como referente un punto fijo de su trayectoria. En relación a una actividad de visualización matemática, esta se revela en la aplicación del teorema de Thales, donde consideran un dibujo a partir del cual atribuyen propiedades matemáticas a la situación, justificando la presencia de proporciones que permiten movilizar el cálculo. En el proceso de confección de la situación problema van descubriendo la necesidad de nuevas hipótesis pero en ningún caso descubren motivaciones para integrar a la situación elementos dinámicos.

Las siguientes situaciones que se plantean, movilizan en los estudiantes habilidades para una lectura variacional de la situación, pero debemos considerar que las situaciones son explícitamente variacionales y solicitan a los estudiantes directamente estudio de las variaciones, pero sus aproximaciones a una respuesta que analice y explique las variaciones, responden solo y de manera explícita a las solicitudes hechas. Los estudiantes no analizan las diversas posibilidades de variación, excepto cuando se plantea la variación simultánea de dos lados del

triángulo, esto lo entendemos producto de la insinuación de esta posibilidad en la naturaleza de la variación presentada.

Los estudiantes conjeturan acerca de las variaciones de las funciones trigonométricas sin establecer relaciones formales que les permitan estudiar la dependencia entre las variables que intervienen en las respectivas situaciones presentadas.

Algunas Conclusiones

Las actividades propuestas tanto en la fase diagnóstico, como en la etapa de intervención didáctica pusieron en evidencia la necesidad de desarrollo de habilidades cognitivas así como también de pensamiento matemático en diferentes niveles de escolaridad. Si bien es cierto en las producciones desarrolladas por los estudiantes se observaron diferentes estrategias de resolución, se observó además la debilidad para detectar covariaciones en procesos dinámicos y establecer modelos matemáticos. Lo anterior pone en evidencia la necesidad de trabajar con el desarrollo de Pensamiento Matemático desde los primeros niveles de escolaridad utilizando diferentes recursos y situaciones problemas que permitan que la comprensión de variación se desarrolle como un aspecto natural en la vida del individuo.

Referencias y bibliografía

- Arcavi, A. (1999). ... Y en Matemáticas, los que instruimos, ¿qué construimos? *Números*, 38, 39-56.
- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52 (3), 215-24.
- Bishop, A. J. (1983). Space and geometry. In Lesh & Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 125–203). New York, USA: Academic Press.
- Cantoral Uriza, R. (2000). *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. Ciudad de México: Editorial Trillas.
- Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano*. Traducción al español a cargo de M. Vega, realizada en la Universidad del Valle, Colombia, del original francés del mismo título publicado por P. Lang, Suiza en 1995.
- Godino, J. D., (2011) Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Actas de la XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM-IACME)*, Recife (Brasil).
- Hjalmarson, M. A. & Lesh, R. (2008). Design research. Engineering, systems, products, and processes for innovation. En L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 520- 534). London: Routledge.
- Lesh, R. & Sriraman, B. (2005). Mathematics Education as a design science. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, (International Reviews on Mathematical Education)*, 137 (6), 490-505.
- Torregrosa, G. y Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *Revista Latinoamericana de investigación en Matemática Educativa*, 10(2), 275-300
- Vasco Uribe, C. E. (2006). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. En C. Vasco, *Didáctica de las matemáticas: artículos selectos* (págs. 134 - 148).
- Vasco Uribe, C. E. (2010). *El pensamiento variacional y la modelación matemática*. Recuperado de http://pibid.mat.ufrgs.br/2009-2010/arquivos_publicacoes1/indicacoes_01/pensamento_variacional_VASCO.pdf

Apéndice A

Prueba Diagnóstico

Le agradecemos resolver los problemas planteados, con el máximo de acuciosidad y poniendo en juego, si es posible, diferentes estrategias dentro del marco de sus conocimientos y originalidades.

Por favor lea las siguientes solicitudes especiales:

Realice todos los cálculos que estime necesarios.

Deje plasmado en la hoja de respuestas todo lo que realice.

No borre lo realizado aunque le parezca incorrecto.

Si considera que algo es erróneo y no debe ser considerado en la revisión, sólo enmárquelo y advierta que lo es.

Garantizamos la confidencialidad de la prueba y el uso de la misma para el propósito que la investigación persigue.

SU APOORTE SERÁ MUY VALIOSO Y AGRADECEMOS DE MANERA MUY ESPECIAL SU PARTICIPACIÓN

Problema 1 La figura que se muestra a continuación, está construida mediante una sucesión de hexágonos regulares contruidos, cada uno, en el interior del precedente tomando como vértices los puntos medios de sus lados.

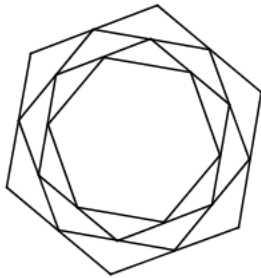


Figura 1. Hexágonos inscritos

- Haga todos los comentarios que considere pertinentes si el proceso de construcción de la figura continúa indefinidamente.
- Agregue otros comentarios que estime pertinentes, si supone que el lado del primer hexágono de la figura mide 1 metro.

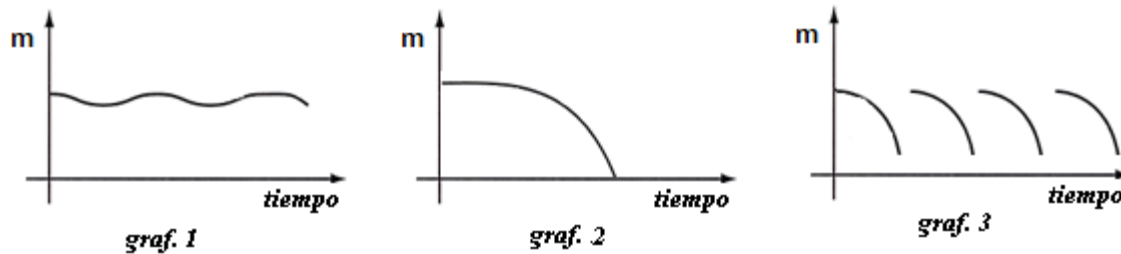
Problema 2 La población de cierta especie evoluciona en el tiempo de acuerdo al modelo representado por la fórmula:

$$E(t) = 5 + 3^{-t}$$

Haga un análisis de la evolución de la población.

Problema 3 Un cierto estanque tiene capacidad para contener 6.000 litros de agua. Si inicialmente el estanque está vacío y se vierte agua en él a razón de $A(t) = \frac{6t}{t+9}$ litros por hora ¿Cuánto tiempo deberá esperar para que el agua vertida en el estanque supere los 5.000 litros? ¿Cuándo llegará a llenarse el estanque?

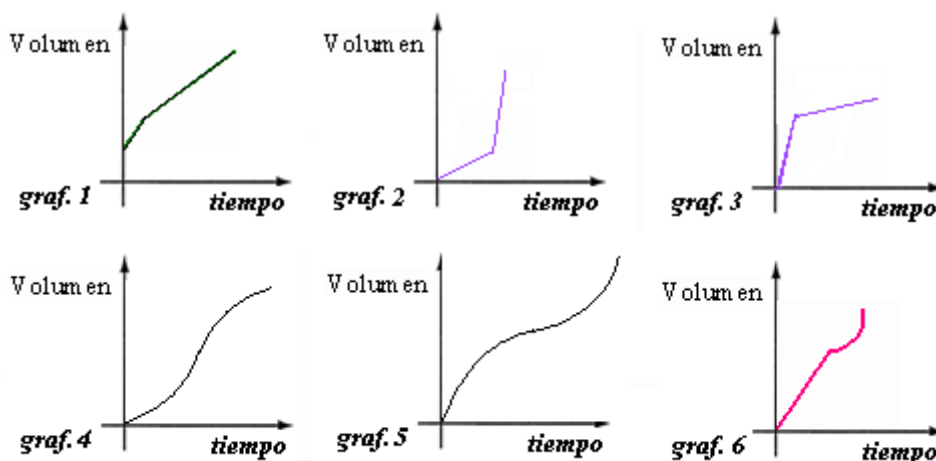
Problema 4 Relacione cada una de las siguientes gráficas con el texto que mejor describe la información proporcionada por ésta. Si alguna de las situaciones planteadas no se refleja en alguna de las gráficas que se le presentan, haga una gráfica que a su criterio represente la situación. Además explique la razón del por qué considera cada caso.



- La permanencia de una medicina en el cuerpo de un paciente, la cual es administrada por medio de una inyección.
- La permanencia de una medicina en el cuerpo de un paciente, la cual es administrada por medio de píldoras cada cierto tiempo.
- La permanencia de una medicina en el cuerpo de un paciente, la cual es administrada por medio de una mezcla del medicamento con suero y vía intravenosa.

Problema 5 Se presentan 7 frascos y 6 gráficas. Asocie una gráfica con cada frasco y explique el criterio utilizado para ello.

Si considera que, de acuerdo al criterio utilizado, alguna (s) de las gráficas no puede (n) asociarse a frasco alguno, o vice versa, puede diseñar un frasco o proponer una gráfica para completar las asociaciones. En estos casos, escriba las justificaciones pertinentes.

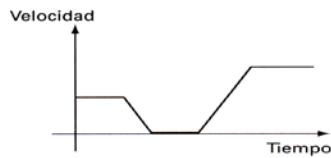


Problema 6 Bosqueje una gráfica que represente cada una de las siguientes situaciones:

- La altura de los rebotes de una pelota que cae desde la azotea de una casa con respecto al tiempo.

- b) La altura con respecto al tiempo de izar manualmente una bandera en un asta.

Problema 7 Seleccione el texto que mejor describe la siguiente gráfica. Presente argumentos para justificar su selección o rechazo de cada texto.



- a) Ricardo salió a caminar cerca de una pendiente y le tomó menos tiempo bajar por el lado más bajo que por el más alto.
- b) Maribel manejaba su coche a cierta velocidad, un policía le dijo que se detuviera y después de recibir una infracción y de que el policía se retiró, ella manejó más rápido, llegó a una velocidad mayor a la que venía circulando y mantuvo esa velocidad durante cierto tiempo para recuperar el tiempo perdido por la infracción.
- c) En un tanque había cierta cantidad de agua que quedó de la noche anterior. Pedro se empezó a bañar e hizo que la velocidad del flujo de salida de agua se redujera a cero. Tiempo después llegó el agua al tanque hasta que quedó lleno.
- d) Beatriz vive en una casa con desniveles. Se encuentra sentada en la cocina de su casa durante cierto tiempo. Sube las escaleras hacia la sala de su casa y se queda viendo la televisión durante algún tiempo, finalmente sube las escaleras hacia su recámara y se queda dormida.

Generalización de patrones: una vía al desarrollo del pensamiento variacional

Elizabeth **Rivera** Muñoz

Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia

elirimu@hotmail.com

Luisa Fernanda **Sánchez** Chaverra

Instituto de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
Colombia

luisa.sanchez@correounivalle.edu.co

Resumen

Esta comunicación es una síntesis de los resultados de un trabajo de investigación¹ que se centra en el diseño, implementación y análisis de una secuencia didáctica para desarrollar el pensamiento variacional en la Educación Básica Primaria (grado tercero) a partir de la generalización de patrones, con el fin evitar el corte didáctico en el paso de la aritmética al álgebra. La secuencia didáctica se desarrolló con base en la adaptación de un cuento infantil y se hizo énfasis en la identificación de diferentes tipos de patrones y su expresión, tanto en lengua natural como simbólica. Entre los resultados sobresale la facilidad para reconocer qué es un patrón e identificar y expresar en lengua natural patrones en secuencias numéricas y geométricas diferenciando claramente su núcleo, la identificación de la variación y el cambio, la relación entre variables y la posibilidad de expresión simbólica.

Palabras clave: Generalización, patrones numéricos, pensamiento variacional, secuencias numéricas, variación, aritmética, álgebra.

Antecedentes, problemática y diseño de la propuesta

Este trabajo de investigación, nace de las diversas dificultades que se han observado en la transición del pensamiento aritmético al pensamiento algebraico y que han sido investigadas años atrás desde diferentes perspectivas (Fillooy, E., & Rojano, T. (1989), Kieran, C., & Chalouh, L. (1993), Lins & Kaput (2004), Carraher & Schliemann (2007)). Estas dificultades se presentan vinculadas al estudio del álgebra desde la comprensión y tratamiento de las expresiones: el grado de abstracción, la utilización de símbolos para representarla, sus características sintácticas, signos de operación, uso de paréntesis, sentido de las letras, sus reglas de utilización y sus diferencias con el lenguaje aritmético; y a los conceptos enfocados en sus diversas formas de presentación: manipulación de expresiones algebraicas, resolución de problemas y tratamiento de conceptos fundamentales como el de variable.

¹ El trabajo de investigación se titula: Desarrollo del pensamiento variacional en la Educación Básica Primaria: Generalización de patrones numéricos. Dirigido por la Licenciada y Magister Ligia Amparo Torres, docente del Instituto de Educación y Pedagogía de la Universidad del Valle, en el marco de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas.

Desde una perspectiva didáctica, diferentes estudios muestran que estas dificultades en el aprendizaje del álgebra se visualizan en gran medida porque a pesar de los intentos que se han direccionado desde las propuestas curriculares nacionales (MEN, 1998) y las investigaciones sobre perspectivas del trabajo algebraico en la escuela (Bednarz, Carolyn, Lesley, & Lee, 1996) para que la transición de la aritmética al álgebra sea más sencilla de afrontar por los estudiantes, continúa existiendo un corte didáctico² entre los dos tipos de pensamiento, el aritmético y el algebraico. Se piensa que el álgebra debe iniciar después de haber terminado la lista de contenidos aritméticos dejando de lado la relación entre ellas. No se establecen conexiones explícitas entre estas dos áreas del conocimiento, de modo que las experiencias de los estudiantes con la aritmética constituyen obstáculos para el aprendizaje del álgebra. No se tiene presente que en gran parte, el éxito de los estudiantes con el álgebra es muy dependiente de su experiencia con la aritmética (Warren, 2003). Otra dificultad relacionada con el aprendizaje del álgebra como lo mencionan Blanton & Kaput (2011), radica en que es vista como una herramienta para la manipulación de símbolos y para resolver problemas, totalmente desprovista de significado. Se debe notar que el hecho de que existan letras no quiere decir que se esté desarrollando el pensamiento algebraico, ni la falta de ellas indica incapacidad de razonar algebraicamente.

Teniendo en cuenta lo anterior, se propuso abordar los aspectos mencionados a través del diseño e implementación de una secuencia didáctica para el grado tercero de Educación Básica Primaria, que involucre actividades que permiten a los estudiantes adquirir herramientas conceptuales y procedimentales, para la búsqueda de regularidades, generalizaciones, justificaciones, reconocimiento de variaciones y formalización de relaciones estructurales; lo que a su vez posibilita desarrollar la capacidad para razonar algebraicamente.

Para el diseño, implementación y análisis de resultados se trabajó con las cuatro etapas planteadas por Mason (1985) relacionadas con la generalización desde el estudio de patrones, dada su importancia para preparar el aprendizaje significativo de los sistemas algebraicos y su manejo simbólico mucho antes de llegar a la educación secundaria. Las etapas mencionadas se resumen así:

“Ver”, hace relación a la identificación mental de un patrón o una relación, y con frecuencia esto sucede cuando se logra la identificación de un algo común. “Decir” ya sea a uno mismo o a alguien en particular, es un intento de articular en palabras, esto que se ha reconocido. “Registrar”, es hacer visible el lenguaje, lo cual requiere un movimiento hacia los símbolos y la comunicación escrita (incluyendo los dibujos). “Probar la validez de las fórmulas”, para que una fórmula tenga validez debe probarse de diferentes formas. Pero también es importante que la regla sea correcta y, para eso, se necesita tener una noción de lo general, lo cual involucra la idea de cómo un ejemplo particular puede mostrar lo general. Para mostrar lo general es necesario reestructurar el ejemplo particular y señalar características generales, lo que se logra observando características específicas en cada caso y haciendo notar que, a pesar de que cambien, lo hacen de manera regular (Mason, 1985, p. 17).

² Tal como lo muestran Gallardo & Rojano (1998) citando a G. Brousseau; se refiere al tipo de obstáculo que no puede, ni debe escapar al hecho mismo de su papel constitutivo del conocimiento al que se apunta y que es frecuente encontrar en la historia de los conceptos mismos. La palabra corte o ruptura se emplea para enfatizar el hecho de que el obstáculo en cuestión (el operar lo representado) se localiza en la frontera entre dos tipos de pensamiento, el aritmético y el algebraico.

Un patrón es una sucesión de signos (orales, gestuales, gráficos, geométricos, numéricos, etc.) que se construye siguiendo una regla o algoritmo, ya sea de repetición o de recurrencia (Secretaría Técnica de Gestión Curricular, 1996). Los patrones se presentan en diferentes contextos y dominios de las matemáticas, tales como, lo numérico, lo geométrico, lo aleatorio y lo variacional; permiten la interpretación de regularidades presentes en diversas situaciones de la vida diaria por ejemplo en la música, en el movimiento, la economía, la geografía y la variación en general.

A continuación se presentan algunos tipos de patrones:

De reproducción (copia de un patrón dado).

De identificación (detección de la regularidad).

De extensión (dado un tramo de la sucesión el alumno debe extenderla de acuerdo al núcleo que la rige).

De extrapolación (completamiento de partes vacías).

De traslación (utilización del mismo patrón sobre propiedades diferentes, Por ejemplo: cambiar formas por colores; cambiar una representación visual por una auditiva, etc.).

Con relación a todo lo anterior, la secuencia fue diseñada con base en una adaptación del cuento Hansel y Gretel y está dividida en cuatro situaciones, que a su vez están conformadas por varias actividades relacionadas entre sí. Cada una de las situaciones se desprende de un aspecto mencionado en el cuento, con el fin de presentar una propuesta distinta, atractiva, motivadora y que les signifique a los estudiantes, pues la idea es integrar diferentes procesos matemáticos a través de un contexto literario infantil.

A continuación, se describen los objetivos principales de cada una de las situaciones que componen la secuencia.

Tabla 1

Situación 1

Situación 1	Acerquémonos a los patrones			
Cantidad de actividades	3	Número de preguntas por actividad		
		4	3	3
Objetivo y/o propósito				

Esta situación empieza con la lectura de la adaptación del cuento Hansel y Gretel, a partir del cual se desprenden todas las actividades.

Está enfocada hacia el reconocimiento visual de patrones geométricos desde diseños artísticos, aspecto propuesto desde la primera fase que plantea Mason (1985), es decir, el ver. Inicialmente, a través de unas preguntas, se hace énfasis en dos aspectos: el primero relacionado con la organización de las figuras que componen el patrón, con el fin de que se empiece a reconocer su estructura (en este caso son patrones de extrapolación que permiten completar las partes vacías); y el segundo concerniente a la cantidad de figuras y la relación entre ellas (proceso que permite el trabajo con patrones de extensión, en el cual dadas unas figuras del diseño, el estudiante debe continuar la secuencia de acuerdo al núcleo presentado).

Finalizando la situación uno, se propone una actividad de diseño, utilizando material concreto (masmelos y palillos de dientes), para la creación personal de una secuencia, con el propósito de corroborar los conocimientos sobre patrones adquiridos por los estudiantes al terminar la situación.

Tabla 2

Situación 2

Situación 2	Hansel y Gretel y los patrones numéricos		
Cantidad de actividades	2	Número de preguntas por actividad	
		6	5
Objetivo y/o propósito			

Tiene como objetivo realizar la transición desde el reconocimiento de los patrones geométricos hacia los patrones numéricos. Para esto, la primera actividad involucra imágenes, que permiten la identificación del patrón (patrón de identificación), pero al mismo tiempo, intenta que el estudiante reconozca la regularidad y continúe la sucesión, sin necesidad de apoyarse en tales imágenes. Posteriormente se les propone que expresen de forma general cómo podrían encontrar un término cualquiera de la sucesión. Esto con el fin de potencializar, además del *ver*, la segunda fase planteada por Mason (1985), el *decir*. De esta forma, los estudiantes además de identificar el patrón, logran expresarlo verbalmente. Finalmente, al igual que con la primera situación, se propone al estudiante la creación de una secuencia que tenga un patrón, pero esta vez, dada desde lo numérico y sin el uso de material concreto.

Tabla 3

Situación 3

Situación 3	Patrones y productos con piedritas		
Cantidad de actividades	2	Número de preguntas por actividad	
		7	4
Objetivo y/o propósito			

El propósito va enfocado al trabajo con los múltiplos y divisores de un mismo número y de números distintos; esto con la finalidad de que los estudiantes puedan reconocer que existe una forma general para expresar el resultado, y que además, identifiquen las relaciones funcionales existentes entre las dos variables, tomando la multiplicación como una operación cuaternaria, en la que se hace énfasis desde el análisis escalar. La situación se desarrolla mediante la utilización del registro en tablas que permiten establecer relaciones estructurales.

Tabla 4

Situación 4

Situación 4	Estrategias multiplicativas			
Cantidad de actividades	3	Número de preguntas por actividad		
		3	4	4
Objetivo y/o propósito				

El objetivo es continuar con el trabajo de la multiplicación como operación cuaternaria que viene desarrollándose desde la situación anterior, en la que se identifican unas relaciones de variación entre los dos espacios de medida; además se potencia el trabajo con las propiedades multiplicativas (asociativa y conmutativa), las cuales permiten la construcción de generalidades y de argumentaciones para justificarlas, a través de formas estructuradas. De este mismo modo, se pretende que a través de dos variables dadas como el número de triángulos y el número de barquillos, se encuentre una relación y se pueda expresar de forma general de tal manera que se verifique para cualquier número que cumpla esa condición.

Metodología de investigación

La secuencia se diseñó conservando el orden de las situaciones que se presentan, esto debido a que en cada situación aumenta el nivel de complejidad y se va desarrollando cada una de las fases que llevan a la escritura de la expresión general; es decir, se inicia la primera situación con el ver, la segunda se enfoca en el decir y la tercera y la cuarta en el registrar.

Para la aplicación de la secuencia propuesta, se contó con 8 secciones de clase las cuales tenían una duración aproximada de 45 y 50 minutos cada una. En algunas de las actividades los estudiantes trabajaron en parejas y en la actividad en la cual se utilizó material concreto, trabajaron en grupos de cuatro.

Las personas encargadas de dirigir las actividades fueron las dos autoras de este trabajo y en dos sesiones intervinieron otras dos profesoras del colegio, cada una en sesiones distintas con el propósito de conocer de cerca la investigación, que posteriormente haría parte del currículo de la institución.

Para tener un registro de toda la aplicación, se contó con dos cámaras digitales; una para grabar las secciones de aplicación de la secuencia y la otra para realizar el registro fotográfico, también se utilizó la toma de notas como estrategia metodológica de recuperación de información; esto con el fin de tener acceso a las expresiones de los estudiantes y analizar de forma más detallada los procedimientos registrados.

Para el análisis y la interpretación de resultados se utilizaron unas tablas en las que se observan las siguientes convenciones:

C.E.: Cantidad de Estudiantes

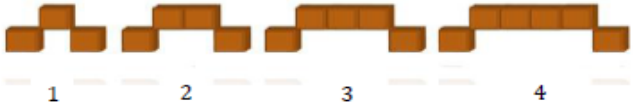
T(n): T significa tipo de respuesta y n el número de respuesta, por ejemplo: T1, T2, etc.

S(n): S Significa situación y n el número de la situación.

A(n): A significa actividad y n el número de la actividad.

L: Literal.

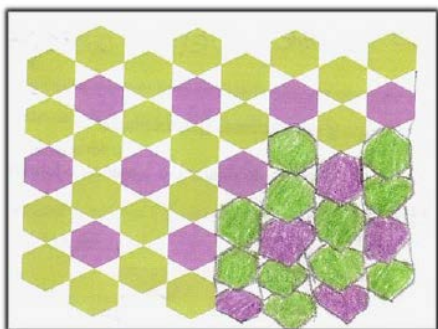
Ejemplo:

Actividad 2					
Gretel al entrar a la casa observa varios asientos de diferentes tamaños y formas los cuales están elaborados a base de cubos de chocolate.					
					
1. Observa los anteriores asientos de chocolate. a. Describe cómo cambia cada uno de ellos respecto al anterior, teniendo en cuenta la forma.					
Tipo de respuesta		C.E	Porcentaje	Justificación	C. E. Porcentaje
T1	Estudiantes que describen cómo cambia cada uno de los asientos en relación con el anterior.	17	89%	Tienen en cuenta que se aumenta un cubo en la parte superior de la figura.	3 19%
				Reconocen que la parte superior (horizontal) aumenta, sin identificar la cantidad.	7 41 %
				Observan el total de cubos de cada figura y su variación.	6 35 %
				Ve los asientos de derecha a izquierda, y va restando uno a cada figura.	1 5%
T2	Estudiantes que no identifican cómo cambia cada uno de los asientos en relación con el anterior.	2	11%	Describe que aumenta la parte de abajo.	1 50%
				Aumentan de dos en dos.	1 50%

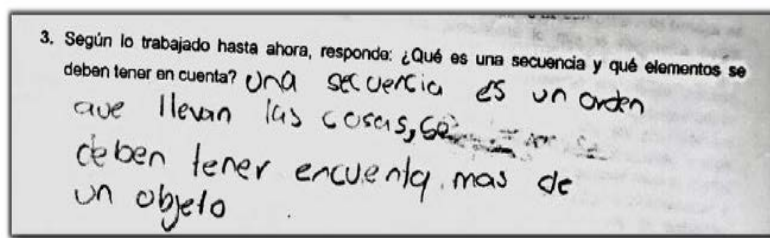
Resultados generales de cada situación

Resultados situación 1: Acerquémonos a los patrones

Según los análisis realizados de la primera situación, se puede concluir que cerca la mitad de los estudiantes, logran identificar de qué manera cambia la forma en una sucesión de figuras, esto a través del proceso de visualización, que corresponde a la primera etapa que plantea Mason (1985), en el cuál se observan las características comunes (mediante la detección de un patrón o relación) que se presentan en el diseño, e intentan establecer justificaciones cortas, directamente desde la relación que se pretendía identificar o valiéndose de otros aspectos reconocidas (otro tipo de figuras que aunque no son las más eficientes, también se reconocen en el diseño).



Pregunta 3, actividad 1 Situación 1.

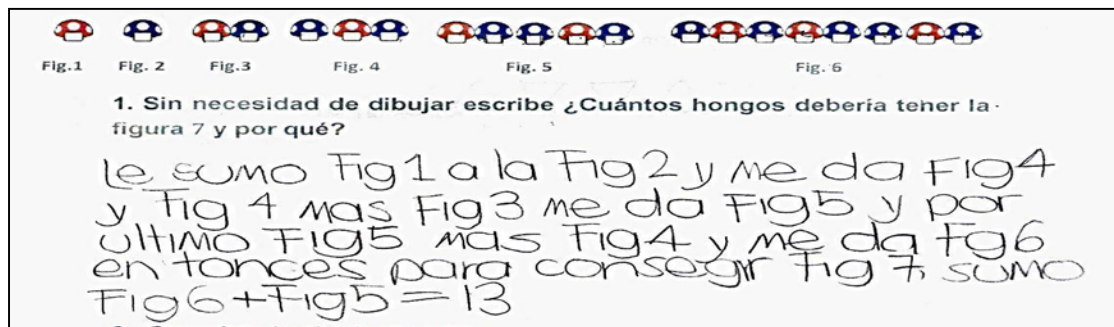


Pregunta 3, actividad 3, situación 1.

Los estudiantes también logran identificar las variaciones que presenta una secuencia de dibujos, y aproximadamente la mitad lo hacen identificando un patrón de comportamiento ya sea global o particular, pueden hacer inferencias correctas sobre las relaciones propuestas en una secuencia y se inician en el proceso de decir con sus propias palabras lo que observan (segunda fase que propone Mason (1985), de manera mucho más concreta.

Resultados situación 2: Hansel y Gretel y los patrones numéricos

Tal como lo muestran los análisis de los resultados de esta situación, los estudiantes lograron identificar el patrón de comportamiento y expresarlo, basándose en justificaciones muy parecidas entre ellas.



Pregunta 1, actividad 1, situación 2.

El hecho de que los estudiantes digan que siguieron la secuencia que tenían las anteriores figuras deja apreciar que observaron bien la cantidad de hongos que componía cada figura e identificaron cual era el posible patrón de comportamiento que la regía; por ejemplo, la suma de las cantidades de hongos de las figuras anteriores a la que se desea hallar es una respuesta que deja ver que los estudiantes están reconociendo que la secuencia de hongos no es al azar y que por el contrario van más allá del *ver*, ya lo pueden *decir* con sus palabras.

En general, para los estudiantes fue sencillo reconocer el patrón y las características de la serie presentada en esta primera parte de la situación y esto se puede ver en los registros, en los que la mayoría explica en lengua natural, la forma en la que identifican como se está dando la regularidad del patrón de recurrencia, aquí tal como lo dice Mason (1985) al identificar algo común e intentar expresarlo, se está tratando articular en palabras lo que se ha reconocido.

Resultados situación 3: Patrones y productos con piedritas

En coherencia con los resultados que se evidenciaron a lo largo de esta situación, se puede indicar que en esta etapa los estudiantes ya están en condiciones de ver el patrón, sea en forma general o particular, decirlo y empezar a registrar expresiones, ya sea a través de números o utilizando algunas letras que los representan. Tal como dice Mason (1985) uno de los aspectos de “ver”, lo general en lo particular es que una vez que se ha logrado, cualquier ejemplo particular puede ser estructurado de tal forma que la generalidad inherente en éste puede ser identificada. De acuerdo a esto, cuando los estudiantes se arriesgan a dar en voz alta sus apreciaciones y se animan a comentarlo con los compañeros, están dando el primer paso para llegar al registrar (decir y registrar). Esto permite evidenciar en esta situación, el desarrollo del ver, el decir y los inicios del registrar, además, conlleva a un acercamiento al razonamiento algebraico, a través de actividades que desarrollan el pensamiento variacional desde las estructuras multiplicativas, permitiendo la identificación de aspectos generales y particulares que dan lugar a un patrón.

Actividad 2: Estrategias multiplicativas

Hansel partió su pan en varios pedacitos los cuales rego por el camino, 1 cada 7 pasos. Con tanto trabajo solo registro algunos datos, como se muestra en la siguiente tabla. Con tu experiencia multiplicativa:

1. Reconstruye la siguiente tabla:

Pedacos de pan	Pesos
1	7
2	14
3	21
4	28
5	35
6	42
7	49
8	56
9	63
10	70
11	77
12	84
13	91
14	98
15	105
16	112

a. Explica como hiciste para completarla.

trabajando con la tabla del 7

b. Indica las técnicas multiplicativas que usaste para completar la tabla anterior. Explica tu respuesta.

en las primeras hasta el 8 por doblando y después sume.

Ejemplo: el 8 + el 2 me da el 10.

2. En relación con la tabla del literal número 1 (pregunta anterior):

a. Escribe cuántos pedazos de pan rego Hansel cuando dio el paso 25. Explica como encontraste la solución.

son 5 pedazos de pan y los haye sumando el 28 + el 7

Preguntas 1 y 2, actividad 2, situación 3.

Resultados situación 4: Estrategias multiplicativas

Como resultados principales de esta situación, se puede decir que menos de la mitad de los estudiantes logran ver, decir y registrar una secuencia que involucra dos patrones relacionados, pero la mayoría logran hacerlo por lo menos con uno de los patrones; lo que deja evidenciar que es sencillo para los estudiantes trabajar con un patrón; además, los estudiantes aunque observan el patrón y lo expresan con palabras, aún no se encuentran en completa capacidad para registrarlo, quedándose en la segunda etapa que plantea Mason (1985): el “decir”.

Actividad 2: El techo de barquillos

El techo de la casa de dulce estaba formado por filas de triángulos construidos por barquillos como se muestra a continuación:

Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

a. ¿Cuántos triángulos y cuántos barquillos deben tener las figuras 4, 5 y 6 que siguen en la secuencia? ¿por qué?

Figura	Triángulos	Barquillos
4	4	9
5	5	11
6	6	13

Completa la siguiente tabla y establece una relación entre los triángulos y el número de barquillos.

Número de triángulos	1	2	3	4	5	6	7
Número de barquillos	3	5	7	9	11	13	15

Pregunta 1, actividad 2, situación 4.

Discusión de resultados

Según los resultados encontrados en la aplicación de la prueba los estudiantes presentan muchas dificultades cuando se hace necesario expresar la forma general de un patrón, ellos identifican las regularidades a partir de casos particulares, pero al momento de explicar o de expresar en palabras como se conforma el patrón se confunden tratando de buscar la mejor forma de decirlo. Para esto, es importante que se presenten en repetidas situaciones a los estudiantes actividades en las que ellos puedan encontrar respuestas mediante la formulación de hipótesis, de conjeturas y predicciones, encontrar contraejemplos, usar hechos conocidos, propiedades y relaciones para posteriormente lograr construir, interpretar y explicar los hechos.

Es importante destacar que el trabajo deja abierto un campo amplio de investigación y que más adelante se espera poder ahondar en él desde la perspectiva funcional y proporcional, con el fin de profundizar en esas formas de desarrollo del pensamiento algebraico, y que nos permiten avanzar progresiva y sistemáticamente con la investigación desde edades tempranas.

Actualmente una de las autoras está desarrollando su tesis de maestría, dándole continuación a esta investigación, con la variante de que se está abordando el uso de las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC), especialmente el programa Geogebra, y se amplía el marco teórico y metodológico desde la teoría de la Actividad.

Conclusiones

A continuación, se exponen algunas conclusiones generales a partir de los resultados, producto de la aplicación de la secuencia, tanto en el trabajo de grado como en la experiencia de aula.

- El uso de tablas como registro de representación, permite a los estudiantes identificar y establecer relaciones entre cantidades de una manera más eficaz, lo que favorece que a través de esas relaciones se encuentren patrones y lleguen a expresar una generalidad. De esta forma, al momento de trabajar con letras los estudiantes lo hacen fácilmente asociando cada variable a los campos de la tabla, relacionando las reglas con las operaciones realizadas al completarla.
- Los estudiantes desarrollan sin mayores dificultades las dos primeras etapas planteadas por Mason (1985) “el ver” y “el decir”, iniciando con la identificación del patrón a través de la visualización, para luego expresarlo ya sea mediante palabras o escrito en lengua natural, y finalmente varios se aproximan al registrar usando símbolos y letras como variables, lo que les permite ir acercándose más al concepto de generalidad que se maneja en secundaria.
- Los estudiantes logran llegar a un nivel de generalización elemental a través del contexto empleado en las actividades, identificando la variación y el cambio que se genera durante el trabajo con patrones geométricos y numéricos y relacionando cantidades de acuerdo a lo planteado en cada actividad.
- La presentación de la secuencia didáctica enmarcada en el contexto literario, y las modificaciones que dan origen a procesos matemáticos, es una buena alternativa que debe de ser explorada por maestros, pues ayuda a mejorar la comprensión de las situaciones y tareas, ya que se tornan significativas para los estudiantes y los incentiva a usar distintas estrategias y técnicas que les permiten llegar de diferentes formas a la respuesta.
- El trabajo con las estructuras multiplicativas es una buena vía para trabajar con patrones dado que sus operaciones permiten la construcción y la argumentación de generalidades, que se dan desde los casos más particulares a los generales, mediante la organización y justificación de las formas estructurales dadas. Este el caso de las actividades propuestas con las tablas multiplicativas, las propiedades y los problemas que involucran ambas operaciones (multiplicación y división).

Referencias y bibliografía

Butto, C., & Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: *El papel del entorno Logo Educación Matemática* (pp. 55-86). Distrito Federal, México: Investigar y Enseñar.

- Castro, W., Godino, J., & Rivas, M. (2011). Razonamiento algebraico en educación primaria: Un reto para la formación inicial de profesores. *Revista iberoamericana de educación matemáticas*, 73-83.
- Gallardo, A., & Rojano, T. (1998). Áreas de dificultades en la adquisición del lenguaje aritmético-algebraico. *Recherches en Didactique des Mathematiques*, 9(2), 155-188.
- Godino, J. (2003). *Razonamiento algebraico para maestros*.
<http://www.ugr.es/local/jgodino/edumatmaestros/>. Consultado 7/09/2011
- Grimm, J. & W. (2000). *Hansel y Gretel*. Editado por elaleph. <http://www.elaleph.com>. Consultado 02/04/2012.
- Kieran, C. (1992). Investigar y Enseñar. En *The Learning and Teaching of School Algebra* (pp. 1-24, Cap. 17). Traducción resumida hecha por Vilma María Mesa. (1995). Universidad de los Andes. Una empresa docente.
- Mason, J. (1985). *Rutas hacia el álgebra y Raíces del álgebra* (Trad. C. Agudelo). Tunja, Colombia: UPTC.
- MEN. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Santa Fe de Bogotá, Colombia.
- MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias*. Santa fe de Bogotá, Colombia.
- Molina, M. (2007). La integración de pensamiento algebraico en educación primaria. España: Universidad de Granada.
- Muñera, J., & Obando, G. (2002). Las situaciones problema como estrategia para la conceptualización matemática. Colombia: Universidad de Antioquia.

Apéndice A

Ejemplo de respuestas dadas por estudiantes

COLEGIO BENNETT

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS



Nombre del estudiante: Diana Maria Mateus Gutierrez

Grado: Tercero 3B

Situación 2: Hansel y Gretel y los patrones numéricos.

Actividad 1: Patrones numéricos con hongos de colores.

La bruja mala para poder tener agua en su casa de dulce, debía ir todos los días a un riachuelo que había en un lado oscuro del bosque. Con el paso de los años la vieja decidió construir un caminito delimitado por puros hongos agrupados por colores, los cuales le permitían identificar rápidamente la forma de llegar. Un día Gretel se vio obligada a acompañarla y se dio cuenta que la organización de los hongos era bastante especial:








Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4 Fig. 5 Fig. 6

1. Sin necesidad de dibujar escribe ¿Cuántos hongos debería tener la figura 7 y por qué?

le sumo Fig 1 a la Fig 2 y me da Fig 4
y Fig 4 mas Fig 3 me da Fig 5 y por
ultimo Fig 5 mas Fig 4 y me da Fig 6
en ttonces para conseguir Fig 7 sumo
Fig 6 + Fig 5 = 13

2. Completa la siguiente tabla:

Posición	1	2	3	4	5	6	7	8	9	12	15	18	20
Número de hongos	1	1	2	3	5	8	13	21	34	144	610	2816	75

3. Escribe como encuentras cualquier número de hongos según la posición dada.

Sumando los ultimos 2

Situación 2, actividad 1, preguntas 1, 2 y 3.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

COLEGIO BENNETT

Nombre del estudiante: Juan Sebastian G.

Grado: Tercero 3-B.

Situación 4: Estrategias multiplicativas.

Actividad 1: Los Muffins de limón del padre de Hansel y Gretel

Cuando los niños regresan de nuevo a su hogar, el padre les ofrece de comer todo lo que ellos quieran, Hansel y Gretel le dicen que quieren Muffins de limón ¡su preferido!, los ingredientes que el padre de los niños recuerda para preparar dos porciones de torta son:

- 12  de harina
- 1 
- 5  de 
- 7  de 
- 3  de 
- 2  (Ralladura de cascara de limón)

1. El padre de los niños quiere organizar una tabla con la cantidad de ingredientes que necesita para preparar varias porciones, ayúdale a llenarla:

INGREDIENTES						
PORCIONES	HARINA	HUEVOS	LECHE	AZUCAR	MANTEQUILLA	LIMON
2	12	1	5	7	3	2
4	24	2	10	14	6	4
8	48	4	20	28	12	8
6	36	3	15	21	9	6
12	72	6	30	42	18	12

2. Escribe cuántas cucharadas de harina serían necesarias para preparar 57 porciones de torta. Explica como lo harías.

$$\begin{array}{r} 57 \\ \times 6 \\ \hline 342 \end{array}$$

Multiplico 57×6 porque 6 es la mitad de 12.

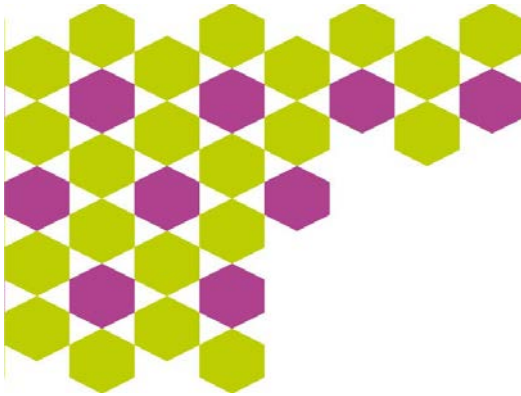
Situación 4, actividad 1, preguntas 1 y 2.

Apéndice B

Situación 1: Acerquémonos a los patrones

Actividad 1: Reconozcamos patrones artísticos en la casa de dulce.

1. Recuerda que la casa de dulce donde llegan Hansel y Gretel tiene las paredes decoradas con diferentes diseños, uno de ellos es el siguiente:



Completa el diseño y explica ¿Cómo lo completaste?

¿Cómo se organizan los hexágonos en cada columna según el color?

2. Hansel y Gretel se dan cuenta el siguiente diseño está incompleto:



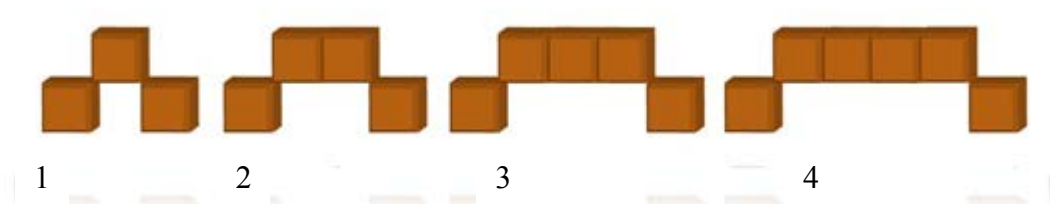
Dibuja las figuras que hacen falta para completar el diseño y para continuar la secuencia, e indica ¿cómo lo hiciste?

¿Qué figuras tridimensionales forman el diseño?

¿Cómo están organizados los cubos que componen el diseño?

Actividad 2: Los asientos de chocolate y los patrones geométricos.

Gretel al entrar a la casa observa varios asientos de diferentes tamaños y formas los cuales están elaborados a base de cubos de chocolate.

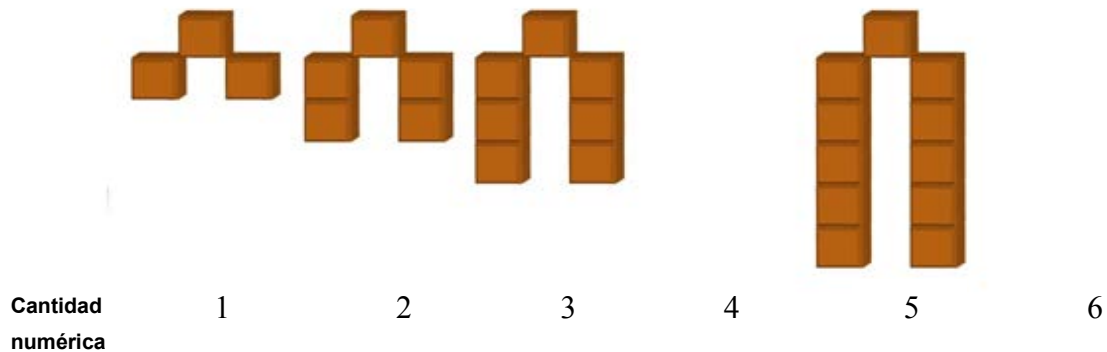


Observa los anteriores asientos de chocolate.

Describe cómo cambia cada uno de ellos respecto al anterior, teniendo en cuenta la forma.

¿Qué parte de los asientos varía? Y ¿Qué parte no cambia (permanece constante)?

Dibuja los asientos que faltan en la posición número 4 y 6 de la siguiente secuencia.



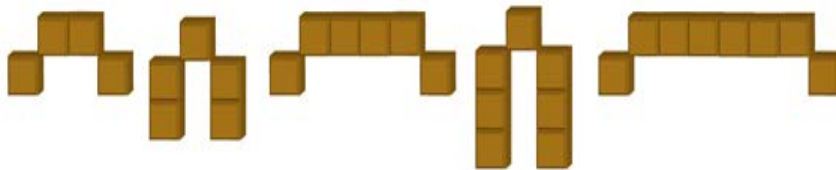
Justifica por qué lo hiciste de esa manera.

Asigna una cantidad numérica (sobre las líneas que hay debajo de la posición de la figura) que represente los cubos de chocolate de cada una de las posiciones, ten en cuenta los dos asientos que dibujaste.

¿Qué cantidad numérica representaría el número de cubos en el asiento de la posición 11?
¿Cómo lo hallaste?

¿Cómo varía el número de cubos de las patas de los asientos de chocolate anteriores?

Observa la siguiente secuencia de asientos de chocolate.



Dibuja los asientos de la posición 6, 7 y 8.

¿Qué relación encuentras entre los asientos de las posiciones 1, 3 y 5 en comparación con los asientos de las posiciones 2, 4 y 6. ¿Por qué crees que se da esta relación?

Dibuja los asientos de chocolate de las posiciones 10 y 13.

Actividad 3: Los asientos de masmelo diseñados con patrones.

Gretel pensó por un momento que los asientos de chocolate serían muy duros al sentarse y se imaginó como podrían ser de cómodos unos asientos hechos de masmelo.

Utiliza mínimo dos masmelos diferentes, para formar la serie de asientos que se pudo haber imaginado Gretel. No olvides que se debe conservar un patrón de comportamiento.

¿Qué tuviste en cuenta para formar la secuencia?

Dibuja la secuencia que diseñaste.

¿Por qué crees que tu diseño sigue un patrón? Justifica tu respuesta.

Dibuja dos secuencias de masmelos que cumplan un patrón de comportamiento.

Según lo trabajado hasta ahora, responde: ¿Qué es una secuencia y qué elementos se deben tener en cuenta?

Ingeniería didáctica y aprendizaje lúdico

Elvira Guadalupe **Rincón** Flores
Tecnológico de Monterrey
México

elvira.rincon@itesm.mx

Lorenza Illanes **Díaz** Rivera
Tecnológico de Monterrey
México

lillanes@itesm.mx

Resumen

Esta investigación describe cómo a través de la ingeniería didáctica propuesta por Artigue se ideó una actividad lúdica y que fue evaluada través de las etapas del ciclo de modelación de Borromeo. Se muestran los antecedentes de la ingeniería didáctica, la lúdica en las Matemáticas y de la Modelación Matemática. Se desarrolla una combinación de estas corrientes para el aprendizaje de cómo calcular los volúmenes de diversos objetos mediante el estudio de volúmenes de revolución. La investigación prueba mediante diversos resultados estadísticos, las ventajas de utilizar la modelación del aprendizaje lúdico en un problema de volúmenes de revolución. También se establece una metodología aplicable en la resolución de otro tipo de problemas del Cálculo.

Palabras clave: ingeniería didáctica, modelación, aprendizaje lúdico

Abstract

This research describes how through didactic engineering given by Artigue an recreational activity was constructed and was evaluated through the stages of the Borromeo modeling cycle. Background from didactic engineering, gamification in Mathematics and Mathematical Modeling was stated. A combination of these currents to learn how to calculate the volumes of different objects by studying solids of revolution was developed. Research proves by various statistical results, advantages of using modeling gamification learning, in a problem of solids of revolution. An applicable methodology is also established in solving others problems from Calculus.

Key words: didactic engineering, Mathematical modeling, learning games

Antecedentes

El juego ha estado presente en la historia de la humanidad y en muchos aspectos culturales, tales como el arte, el deporte y la ciencia, especialmente en las Matemáticas donde en disciplinas como la teoría de juegos, la teoría de probabilidades o la teoría combinatoria, por citar algunas, iniciaron por la mera recreación humana (Chamoso, Durán, García, Martín y Rodríguez, 2004). Etimológicamente, la palabra lúdica proviene del ludus que significa juego, Chamoso, et al, (2004) definen al juego como una actividad humana lúdica y competitiva, que puede ser aplicada en el aula. Lopez-Morteo y López (2007) comentan que el uso de la lúdica en la enseñanza de las

matemáticas está muy bien documentado, prueba de ello es el estudio de Kebritch, Hirumi y Bai (2010) quienes se dieron a la tarea de buscar estudios empíricos donde se utilizó el aprendizaje lúdico como estrategia de aprendizaje de las Matemáticas; encontraron al menos 16 investigaciones, del 2003 al 2007, de las cuales 11 tuvieron resultados positivos y 5 tuvieron tanto resultados positivos como negativos. Por ejemplo en el estudio de Lopez-Morteo y López (2007) encontraron que más del 70% de los estudiantes mostraron una actitud positiva hacia el aprendizaje de las matemáticas, una vez terminado el estudio sobre los errores en aspectos críticos dentro del proceso de aprendizaje de las Matemáticas. Otros estudios como los de Torres, Rincón y Domínguez (2012), Rosas, Illanes, y Domínguez, (2012) y Martínez, Rincón, y Domínguez, (2011) encontraron que el ambiente de competencia que se vive en el aula lleva a que los estudiantes se concentren en la actividad gracias al deseo de ganar y que en el juego se dan las condiciones propicias para desarrollar habilidades como la expresión oral matemática, el pensamiento crítico, la creatividad y se fomentan valores como la responsabilidad, la solidaridad y el respeto. Chamoso, et al. (2004) advierten algunas ventajas de utilizar la lúdica en el aula, de las cuales se pueden destacar: despiertan la curiosidad, favorecen el desarrollo social, es un medio para lograr un objetivo didáctico, estimulan la imaginación y pueden ser generadores de aprendizajes duraderos. Farías y Rojas (2011) clasifican los en: juegos de agrupamiento, juegos reglados, juegos de estrategia y juegos de estructura adaptable. Corbalán (citado en Chamoso, et al., 2004) agrupa los tipos de juegos en tres: juegos de conocimiento, de estrategia y de azar; los de conocimiento son los comúnmente utilizados en el aprendizaje de las Matemáticas. En el estudio de Torres, et al. (2012) se aplicaron actividades lúdicas de tipo regladas, de estrategia y de estructura adaptable, un resultado destacable fue que el grupo experimental (con actividades lúdicas) tuvieron un desempeño mejor en el post-test que el grupo de control (sin actividades lúdicas). Es importante subrayar que una actividad lúdica educativa debe tener un propósito y una estructura, como señala Chamoso, et al. (2004), el objetivo de las actividades lúdicas es utilizar el juego como una herramienta para alcanzar un objetivo didáctico, para la presente investigación se hizo una actividad lúdica que motivó el aprendizaje por descubrimiento.

Los antecedentes básicos que respaldan la visión sobre la modelación matemática están fundamentados en los trabajos de Blum y Niss (1991) y Niss, Blum y Galbraith (2007) quienes postulan en un primer momento a la modelación como la relación entre las matemáticas y la “realidad”. Por otro lado, autores como Henry (2001) dividen aún más esta primera acepción sobre modelación mostrando más etapas y particularmente enfatizan la importancia de las transiciones entre las etapas. Además, a diferencia de los estudios anglosajones que lo denomina “*real model*” (modelo real en español), Henry (2001) acuña el término “modelo pseudo-concreto” para referirse básicamente a la etapa intermedia entre la realidad o situación real y el modelo matemático. Finalmente y posterior a un estudio más detallado de otros autores que proponen visualizar la modelación matemática desde otro punto de vista, se decide continuar en este estudio adoptando la descripción de Borromeo y Blum, (2009) de este proceso en término de 7 etapas (véase Figura 1)

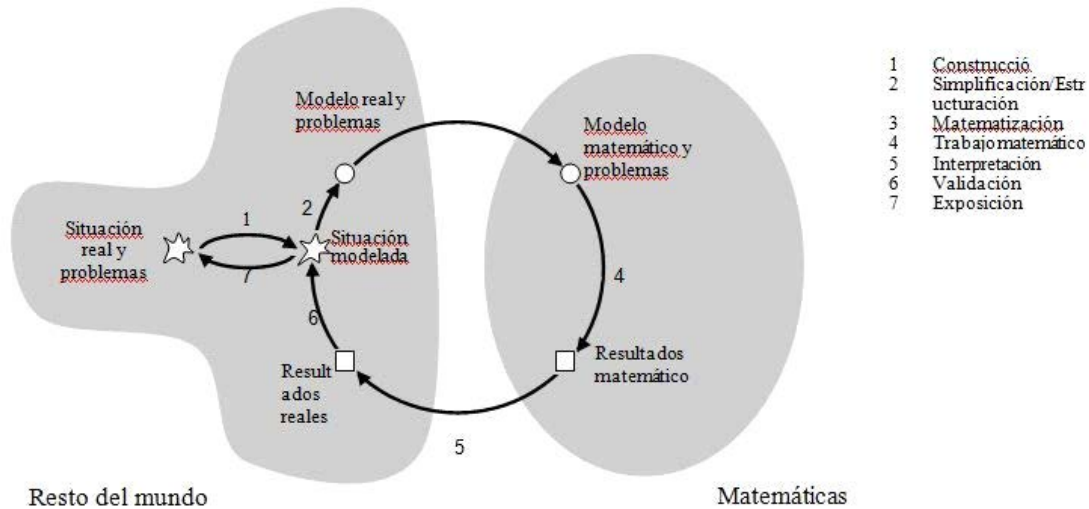


Figura 1. Etapas del ciclo de modelación de Borromeo y Blum (2009).

En estudios más recientes, se ha incorporado entre otros, el papel de la tecnología en el aprendizaje de las matemáticas (Beichner, Saul, Abbott, Morse, Deardorff, Allain, Bonham, Dancy, y Risley, 2007; Ferreira, 2009), la importancia del aprendizaje colaborativo (Beichner, et al., 2007; Collazos y Mendoza, 2009) y el desarrollo de competencias de modelación (Maab, 2006) de acuerdo a niveles específicos (Henning y Keune, 2007).

En este trabajo se presenta un estudio que se llevó a cabo en el curso de Cálculo Integral para el tema de Volúmenes de Revolución. El estudio se lleva a cabo en un grupo a nivel profesional de los estudiantes de Ingeniería en el curso de Cálculo I y en los cuales además de lo anterior, se promueve el aprendizaje colaborativo (Woods y Chen, 2010), la autonomía del estudiante (Schunk, 1996; Omrod, 2005; Pape y Smit, 2002; Dresel y Huagwitz, 2008) y como parte del proceso de la modelación es importante que el estudiante aplique lo aprendido en una temática de la vida real.

El diseño y la organización de situaciones didácticas (Brousseau, 1986) es el objeto de lo que se denomina Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995). Su nombre evoca la necesidad de controlar herramientas profesionales para producir secuencias de aprendizaje con ciertas garantías de éxito. La Ingeniería Didáctica (Artigue, 1995) permite construir el camino más rápido y seguro para que el alumno construya con sentido un concepto matemático, evitando los retrocesos y patrones que históricamente hayan podido producirse, y reordenando los procesos de construcción de ese saber de acuerdo con pautas didácticas, haciendo su transposición didáctica de la manera más rigurosa posible, desde un punto de vista epistemológico (Chamorro, 2006, pp. 50-52).

Según Douady (1986), una Ingeniería Didáctica es un conjunto de secuencias de clase diseñadas, organizadas y articuladas coherentemente por un “profesor-ingeniero”, para lograr el aprendizaje de cierto conocimiento en un grupo de estudiantes específico. Son cuatro las fases fundamentales que se distinguen en la elaboración de una Ingeniería Didáctica, estas son:

- Análisis preliminar.
- Diseño de la situación didáctica y su análisis a priori.
- Experimentación.
- Análisis a posteriori y validación.

En el análisis preliminar se analizan y determinan, desde una aproximación sistémica, todos y cada uno de los actores del sistema didáctico y de las relaciones entre los mismos: componente epistemológica, la componente cognitiva y la componente didáctica.

En el Análisis a priori se eligen las variables didácticas que se controlarán y se define la forma en que las mismas serán gestionadas. Se establecen las hipótesis de trabajo y expectativas del investigador. Es una fase tanto prescriptiva como predictiva.

En la experimentación se implementa en condiciones controladas estrictamente por el investigador.

El análisis a posteriori consiste en una exhaustiva revisión de los sucesos durante la puesta en escena de la situación diseñada.

Metodología de investigación

Es una investigación mixta, ya que se estudian la presencia de las 7 etapas (Borromeo y Blum, 2009) a lo largo de cada actividad y se estudian las frecuencias de logro utilizando la Estadística Descriptiva para expresar el análisis de resultados. La muestra está representada por un grupo de 30 estudiantes de Cálculo Integral de las carreras de Ingeniería, que se agruparon en equipos de 4 estudiantes. Esta investigación se llevó a cabo a lo largo del semestre de Enero a Mayo de 2014 en 4 etapas principales:

- 1ª Etapa: Se trabajó conjuntamente con los estudiantes una situación problema cuyo tema fue el de Sólidos de Revolución a través de la Modelación Lúdica en el salón de clases. El objetivo de la actividad consistió en usar plastilina para modelar la parte superior de una copa, cortar un diferencial de volumen y plantearlo para luego determinar la integral que proporcione el volumen de cualquier sólido generado cuando una gráfica rota en torno al eje x . (véase Figura 2)
- 2ª Etapa: El alumno trabajó una situación problema del tema Sólidos de Revolución para reafirmar el aprendizaje en el salón de clases.
- 3ª Etapa: Resolución individual de una situación problema del tema Sólidos de Revolución dentro de un Examen Parcial para confirmar el aprendizaje a mediano plazo.
- 4ª Etapa: Resolución individual de una situación problema del tema Sólidos de Revolución para confirmar el aprendizaje a largo plazo, dentro del Examen Final.



Figura 2. Imagen de alumnos trabajando en actividad lúdica. (Imagen recabada por las autoras).

Debido a que el objetivo fue investigar si la Modelación (Borromeo y Blum, 2009) y la Lúdica (Chamoso, et al., 2004) había contribuido a un aprendizaje significativo, es decir, que pudieron recuperar el conocimiento a mediano y largo plazo, se utilizaron las fases del ciclo de Modelación de Borromeo y Blum (2009): 1) Construcción, 2) Simplificación y estructuración, 3) Matematización, 4) Trabajo matemático 5) Interpretación, 6) Validación y 7) Exposición. En la

etapa 1 y 2 de la modelación se incluyó la Lúdica de una manera más explícita aunque sus efectos se pueden ver a lo largo de las etapas de modelación de una manera implícita.

Se describen cinco grandes secciones: a) Espacio Físico de la experimentación; b) Descripción de la muestra de estudiantes y tipo de estudio visualizado; c) Antecedentes del diseño experimental; d) El diseño e implementación de la actividad: justificación de las características de la actividad y su evolución mediante las 7 fases previamente descritas para profundizar en la modelación y e) Análisis cualitativo y cuantitativo de los resultados obtenidos.

En la investigación se diseñaron actividades basadas en la modelación matemática (Borromeo y Blum, 2009) sobre el problema de volúmenes de revolución que fueron trabajadas por 6 grupos de alumnos dentro de una clase de Cálculo II. Las actividades se analizaron cualitativamente, lo que permitió la identificación de categorías de análisis, que permitieron ver las diferencias en el aprendizaje entre los 6 grupos por cada etapa del ciclo de la modelación. Se establece una metodología de análisis que actualmente se está estudiando en otro tipo de problemas de Cálculo.

Análisis de resultados

El análisis de resultados se hizo de dos maneras, cuantitativamente y cualitativamente, utilizando las 7 fases del ciclo de Modelación de Borromeo y Blum (2009) detallada en la sección de Metodología. Para el análisis cuantitativo inicialmente se compararon los resultados de 30 estudiantes de Ingeniería. Se establecieron frecuencias para cada una de las etapas del ciclo de Modelación establecido inicialmente en una actividad colaborativa de una situación problema del volumen de revolución de una copa, y posteriormente en una situación problema de una chapa para fortalecer los aprendizajes. A mediano y largo plazo se analizó una situación problema en un examen parcial y un examen final respectivamente en donde se solucionó una situación problema que fue evaluada a la luz del ciclo de modelación de Borromeo y Blum (2009).

Tabla 1

Frecuencias, media, varianza y la desviación estándar de la primera y segunda situación problema

	Volumen de Revolución de la Copa				Volumen de Revolución de la Perilla			
	Suma	Media	Desviación Estándar	Varianza	Suma	Media	Desviación Estándar	Varianza
Construcción	28	1	0	0	28	1	0	0
Simplificación								
Estructuración	28	1	0	0	28	1	0	0
Matematización	24	0.86	0.36	0.13	28	1	0	0
Trabajo								
Matemático	28	1	0	0	23	0.82	0.39	0.15
Interpretación	28	1	0	0	22	0.79	0.42	0.17
Validación	24	0.86	0.36	0.13	23	0.82	0.39	0.15
Exposición	28	1	0	0	22	0.79	0.42	0.17

Se presentan (véase Tabla 1) las frecuencias, media, varianza y la desviación de respuestas correctas de actividades en cada una de las situaciones problema para obtener el volumen de revolución por cada una de las etapas de modelación y también se describen (véase Tabla 2) las mismas estadísticas de respuestas correctas sobre volumen de revolución también con modelación del examen parcial y el examen final.

Se observa en las estadísticas (véase Tabla 1) que en la actividad de la copa y de la perilla las soluciones correctas en cada etapa del ciclo de modelación tienen una media arriba del 70%, sin embargo en la situación problema del examen parcial (véase Tabla 2) las etapas del ciclo de modelación de trabajo matemático, interpretación, validación y exposición la media esta abajo del 63 %; y en las tres primeras etapas: construcción, simplificación-estructuración y matematización estuvieron arriba del 76%.

En el examen final la media de las primeras tres etapas, construcción, simplificación-estructuración y matematización, fueron del 65%; y en las últimas cuatro etapas, trabajo matemático, interpretación, validación y exposición, la media esta abajo del 55 %.

Tabla 2

Frecuencias, medias, varianzas y desviaciones estándares de totales de aciertos en cada situación problema para cada una de las etapas del ciclo de modelación.

	Volumen de Revolución				Estadística		
	Copa	Perilla	Examen Parcial	Examen Final	Suma	Media	Desviación Estándar
Construcción	28	28	24	19	99	24.75	4.27
Simplificación							
Estructuración	28	28	24	19	99	24.75	4.27
Matematización	24	28	23	19	94	23.5	3.69
Trabajo							
Matemático	28	23	17	16	84	21	5.59
Interpretación	28	22	19	15	84	21	5.47
Validación	24	23	17	14	78	19.5	4.79
Exposición	28	22	17	15	82	20.5	5.80

A pesar de que hay una disminución de las frecuencias en los exámenes en las últimas cuatro etapas de modelación, las medias indican que en el promedio semestral 20 de los 30 estudiantes contestan correctamente. Lo cual se puede observar en las gráficas de las frecuencias y medias (véase Figura 3) de cada una de las situaciones problema. Se puede ver también como la etapa de matematización y validación disminuyen en los exámenes parciales y finales y se recuperan un poco con la última etapa de Borromeo y Blum (2009) de exposición.

Conclusión

Se ve claramente en este estudio, que la combinación de la Lúdica con la Modelación Matemática favorece el aprendizaje, en este caso, al de los volúmenes de revolución, especialmente en las primeras etapas del ciclo de modelación de Borromeo y Blum (2009), construcción, simplificación y matematización; quizás habría que hacer igual de explícita la lúdica en las cuatro siguientes etapas del ciclo y medir su impacto.

Por otro lado, se comprueba que el aprendizaje colaborativo favorece la construcción del aprendizaje y fortalece actitudes y valores tales como el respeto, tolerancia, comunicación y liderazgo (Martínez, Rincón, y Domínguez, 2011), la actitud positiva hacia las matemáticas se fortalece y sin duda se pudo corroborar que la investigación colegiada ayuda a la mejora continua del trabajo docente.

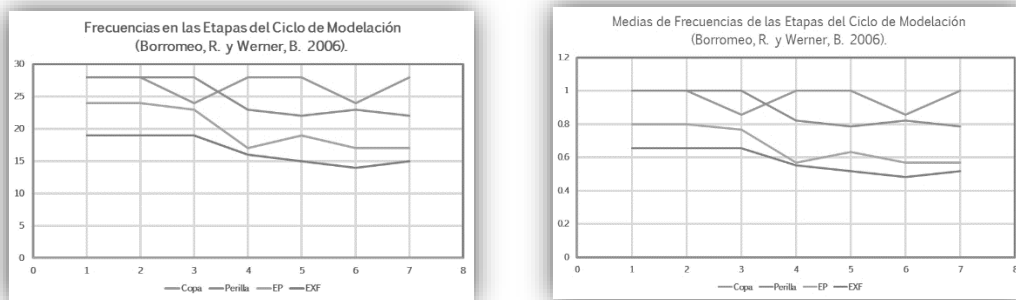


Figura 3. Frecuencias y medias de cada una de las situaciones problema.

Como área de oportunidad, se considera necesario incorporar una tarea entre la actividad y los exámenes para que se fortalezca el aprendizaje aún más. También se ve la necesidad de hacer un análisis de ganancia (Hake, 1998) en cada etapa para valorar con mayor claridad la ganancia en aprendizaje o bien, hacer un estudio con grupo de control y grupo experimental. Sería importante en las actividades, las tareas y los exámenes hacer más explícitas las etapas del ciclo de Borromeo y Blum (2009), pues estuvieron planteadas implícitamente.

Referencias

- Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Eds.) *Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas*. Bogotá: Iberoamérica, 33-59.
- Beichner, R., Saul, J., Abbott, D., Morse, J., Deardorff, D., Allain, R., Bonham, S. Dancy, M. and Risley, J. (2007). Student-Centered Activities for Large Enrollment Undergraduate Programs (SCALE-UP) project. In *Research-Based Reform of University Physics* (Vol. 1). Retrieved from <http://www.per-central.org/document/ServeFile.cfm?ID=4517>.
- Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modeling, applications, and links to other subjects – State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22 (1), 37-68.
- Borromeo, R. y Blum, W. (2009). Mathematical Modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1 (1), 45-58.
- Brousseau, G. (1986). *La théorie des situations didactiques*. Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage.
- Collazos, C. A. y Mendoza, J. (2006). Cómo aprovechar el "aprendizaje colaborativo" en el aula. *Educación y Educadores*, 9(2) 61-76.
- Chamoso, J., Durán, J., García, J., Martín, J. y Rodríguez, M. (2004). Análisis y experimentación de juegos como instrumentos para enseñar matemáticas, *SUMA*, (47), 47-58.
- Chamorro, M. (2006). *Didáctica de las matemáticas*. México: Prentice Hall.
- Dresel, M., y Haugwitz, M. (2008). A Computer-Based Approach to Fostering Motivation and Self-Regulated Learning. *The Journal of Experimental Education*, 77(1), 13-18.
- Douady, R. (1986). Jeux de cadres et dialectique outil–objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7 (2), 5–31.

- Farías, D. y Rojas, F. (2011). Estrategias lúdicas para la enseñanza de la Matemática para estudiantes que inician estudios superiores. *Revista Informe de Investigaciones Educativas*, 25, 51-64. ISSN: 1316-0648.
- Hake, R. (1998) Interactive-engagement versus traditional methods: A six-thousand-student survey of mechanics test data for introductory physics *Am. J. Phys.* 66 (1).
- Henning, H. y Keune, M. (2007). Levels of modelling competencies. In Blum, W., Galbraith, P. L., Henn, H. W. y Niss, M. (Eds.), *Modeling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study*, (pp. 225-232). New York: International Commission on Mathematical Instruction ICMI.
- Henry, M. (2001). Notion de modèle et modélisation dans l'enseignement. En Henry, M. (Ed.), *Autour de la modélisation en probabilités* (149-159). Besançon : Commission Inter-IREM Statistique et Probabilités.
- Lopez-morteo, G. and Lopez, G. (2007). Computer support for learning mathematics: A learning environment based on recreational learning objects. *Computers and Education*, 48(4), 618-641.
- Maab, K. (2006). What are modeling competencies?. *ZDM*, 38 (2). pp. 113-142. Niss, M., Blum, W. y Galbraith P. (2007). Introduction. *ICMI Study 14: Applications and Modelling in Mathematics Education*. New York: Springer, 3-32.
- Martínez, L., Rincón, E. y Domínguez, A. (2011). El juego y el aprendizaje cooperativo en la enseñanza de las ecuaciones de primer grado. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 24, 397-405.
- Niss, M., Blum, W., y Galbraith, P. (2007). Introduction. *Modelling and Applications in Mathematics Education, The 14th ICMI Study*, 10(1), 3-32.
- Omrod, J. (2005). *Aprendizaje Humano (4a ed.)*. Madrid: Pearson Educación, S.A.
- Pape, S. y Smith, C. (2002). Self-Regulating Mathematics Skills. *Theory into Practice*, 41(2), 93-101.
- Rosas, O. Illanes, L. y Domínguez, A. (2012). Uso de las Matemáticas Recreativas en la resolución de Ecuaciones Algebraicas. *Escuela de Invierno de Matemática Educativa EIME*. CINVESTAV. Distrito Federal, México.
- Schunk, D. (1996). *Self-evaluation and Self-Regulated Learning*. (ERIC, Technical Report No. 403233). New York: Graduate School and University Center.
- Woods, D. M. and Chen, K. (2010). Evaluation Techniques for Cooperative Learning. *International Journal of Management and Information Systems*, 14(1), 1-5.

Las letras en el Álgebra como número general en estudiantes colombianos de grado 7° de educación formal

Ronald Andres **Cabrera** Montealegre
 Universidad de Tolima
 Colombia
ronaldandres-10@hotmail.com

Erika Viviana **Pinzón**
 Universidad de Tolima
 Colombia
evpinzonm@ut.edu.co

Resumen

El enfoque de este estudio exploratorio en álgebra ha sido la dificultad de entender la letra como número generalizado. Se trabajó con un grupo de 35 estudiantes de grado 7° con el objetivo de identificar sus dificultades al inicio del trabajo algebraico escolar, así mismo se desarrolló una actividad didáctica que ayudara a solucionar dichas dificultades. Siguiendo las ideas de Mason (1999) sobre las destrezas que pueden desarrollar los profesores para el apoyo a la expresión de la generalidad, por parte de los estudiantes, y que se sustenta en tres etapas: Ver un patrón, Decir un patrón y Registrar un patrón. Se encontró, entre otros aspectos, que muchos de los niños identifican un patrón, pero presentan dificultades al realizar la generalización y al expresar simbólicamente un problema algebraico.

Palabras clave: patrón, álgebra, generalidad, didáctica, enseñanza e investigación acción.

Planteamiento del problema

El aprendizaje de las matemáticas es fundamental para la formación de los estudiantes tanto en el desarrollo analítico como en la destreza mental para afrontar distintos problemas de su vida diaria. Según el aprendizaje vivido en el colegio en la clase de matemáticas se puede afirmar que el uso que le dan los estudiantes a las letras en álgebra presenta una interpretación incorrecta.

Desde el punto de vista de estudiantes en licenciatura en matemáticas; se evidencia que en la niñez el álgebra que se utiliza son las letras, pero no se entiende el porqué de ellas, se desarrollaba una determinada cantidad de ejercicios prácticos en los que a través de un procedimiento se llegaba a la solución; por ejemplo se comienza a realizar ecuaciones lineales como $2x+4=12$ y aquí después de aplicar métodos de solución de ecuaciones de primer grado donde se encuentra que “X” era igual a 4.

Lo traumático de este tema de algebra era entender que esa letra en algunos ejercicios era igual a un 2, luego daba 3, 5 u otros números pero, la cuestión era ¿luego “X” en un principio no

era 4? Es decir cada uno de los ejercicios generaba un nuevo valor para la "X" llevaba a la respuesta de un número, pero no se contempla la idea de que las letras representaban un número general, es decir que X podía ser cualquier número, ni mucho menos que esto se podía aplicar a la vida diaria, ¿Qué pasaba en la escuela?, ¿Dónde quedaba el pensamiento lógico y la capacidad de generalizar una situación?

A partir de reflexiones realizadas acerca de las investigaciones e ideas de John Mason, quien hace referencia a la expresión de la generalidad y, según experiencias propias, se centra la situación problema a lo vivido por los niños en el inicio del trabajo algebraico escolar respecto a la **difficultad de entender la letra como número generalizado**; ahora bien, teniendo en cuenta que una de las raíces básicas del Álgebra es la Expresión de la generalidad que bien lo dice John Mason "la vida son las matemáticas y el Álgebra es el lenguaje con el que se expresa esta generalidad" (Mason, 1999).

Es precisamente en este aspecto, en el que los estudiantes presentan dificultades al concebir las letras como símbolos sin sentido, donde a partir de un ejercicio se llega a la respuesta a través de unas "reglas"; que son vistas desde el puesto del aula de clase y escritas en el tablero sin tener otra interacción más profunda.

Antecedentes y fundamentación teórica

A partir de aquí situaremos el problema dentro de un conjunto de aportes en conocimiento de algunos autores que van a sustentar y orientar la conceptualización que se va a utilizar en el ejercicio de exploración.

Pensamiento variacional

En el contexto colombiano se propone en los lineamientos curriculares que "El estudio de la variación puede ser iniciado pronto en el currículo de matemáticas." (MEN, 1998). A su vez plantea que para dar sentido y significado al álgebra es pertinente relacionarla en situaciones de cambio y variación de la vida cotidiana.

Se logra observar que en los primeros grados de la básica primaria se diseñan estándares curriculares relacionados tanto con el pensamiento aritmético como con el pensamiento algebraico; por ejemplo: Para los grados primero y segundo se plantean: "Observa y predice el cambio de ciertos atributos medibles de los objetos a través del tiempo" (MEN, 2002, p. 19) y "Reconoce, describe y extiende patrones geométricos y numéricos" (p. 21).

Para los grados tercero, cuarto y quinto, se propone una aproximación al álgebra centrada en los métodos para resolver ecuaciones aritméticas: "Encuentra el número que falta en una ecuación sencilla" (p. 23), "Resuelve ecuaciones sencillas mediante métodos tales como operaciones inversas, cálculo mental o ensayo y error." (p. 25) y "Encuentra soluciones de una cantidad desconocida en una ecuación lineal sencilla" (p. 27).

Teniendo presente las exigencias de los lineamientos y de los estándares curriculares de Colombia respecto a la educación de pensamiento variacional, es necesario apoyarlo desde niveles educativos tempranos para que el niño pueda ir interactuando en las diferentes aplicaciones donde vemos álgebra y sus variables, en aplicaciones con el contexto y demás, pero en la realidad encontramos que el pensamiento variacional como tal se establece desde los grados iniciales de la secundaria lo cual contradice los requerimientos de los lineamientos y estándares curriculares.

Pensamiento algebraico y la expresión de la generalidad

En este pensamiento nos basaremos en las ideas que aporta Mason et al, (1999). A partir de la visión de estos autores el álgebra es un lenguaje por medio del cual se dan a conocer las ideas matemáticas de forma simplificada y que su característica principal es que puede expresar afirmaciones generalizadas las cuales se presentan en todas las áreas de las matemáticas.

Para que el estudiante tenga una comprensión eficaz de ese pensamiento algebraico plantean que es necesario conocer las ideas básicas de lo de que proviene del álgebra y de las cuales representan la base de la comprensión de dicho contenido. En una frase se sustenta: “la generalidad es la vida de las matemáticas y el Álgebra es el lenguaje con el que se expresa esta generalidad” (Mason et al., 1985).

De acuerdo con John Mason, entre las destrezas que se pueden desarrollar para el apoyo a la expresión de la generalidad se sustenta en tres etapas:

- **Ver un patrón:** esta etapa hace referencia a la observación de una serie de figuras o números en secuencia con el fin de percibir o identificar una regularidad.
- **Decir un patrón:** es aquello que puede expresar en palabras a partir de la observación realizada en la secuencia de figuras o números e identificar si sus reflexiones son correctas o no.
- **Registrar un patrón:** aquí lo que se busca es expresar de forma sucinta lo que se logró decir, de tal manera que las ideas y pensamientos puedan ser plasmados de manera escrita, utilizando palabras o dibujos que mejorará hasta llegar a una expresión simbólica.

A través de estas etapas se llega a la expresión de una generalidad lo que conlleva a usar la letra como representación de cualquier número, finalmente, con este proceso, se logra formar el concepto de la letra en el álgebra como número general.

Algunas concepciones erradas conducen al error del algebra elemental

La investigación ha demostrado que la dificultad que los niños presentan en el aprendizaje del algebra, es su confusión con las letras, dando valores incorrectos a estas (Booth. Lesley, 1999).

Los niños no entienden que las letras pueden representar números, ellos piensan en que las letras son unidades de medida, objetos, apellidos, o hasta comida. Como lo presenta Lesley Booth en la entrevista a un niño de 14 años llamado Benedicto:

e: que significa " y " (en la adición de 3 a 3y).

B: puede significar cualquier cosa.

e: ¿Cómo qué?

B: como piñas, uvas,..... (Entrevista a Benedicto, 14 años. Booth, lesley).

Se evidencia el desconocimiento del verdadero significado de las letras en el ejercicio propuesto, el niño atribuye la " y " a una fruta la cual debe sumar con otra sin tener en cuenta nada más en el ejercicio.

El inicio de la educación matemática involucra a los niños en un proceso repetitivo donde una letra representa el número de lados de un cuadrado " L" o una letra es la inicial de un nombre "E" al dar operaciones en las cuales se involucren estas ellos siguen atados a estas formaciones

iniciales por ejemplo si se realiza la adición de $3 + 3e$, los estudiantes comprenden como 3 sumado con 3 elefantes, atribuyendo la “e” a la inicial del nombre del elefante.

Al realizar operaciones aritméticas que sean de tipo algebraico, algunos de los jóvenes muestran solución a diferentes ejercicios propuestos en clase; será que en verdad entienden esas operaciones, por lo general el procedimiento que ellos efectúan es el de sumar o el de restar los números y luego unir a esa operación las diferentes letras que estuvieran involucradas, pero este procedimiento se hace sin una verdadera razón lógica.

Diseño y metodología

El desarrollo de nuestro ejercicio de exploración está basado en el enfoque de investigación - acción, propuesto por Hopkins (2008); S. Kemmis y R. McTaggart (1988). Definen la investigación- acción como un enfoque de trabajo en el aula de clase para que el docente pueda generar un proceso continuo de autoevaluación y mejoramiento de la práctica-enseñanza, siendo los estudiantes la población en la investigación y el docente el administrador del proceso.

El método de investigación- acción es un modelo visto por diferentes autores pero en nuestro ejercicio de exploración va enfocado en el método de investigación acción propuesto por Ponte, P (1995). Es el siguiente:

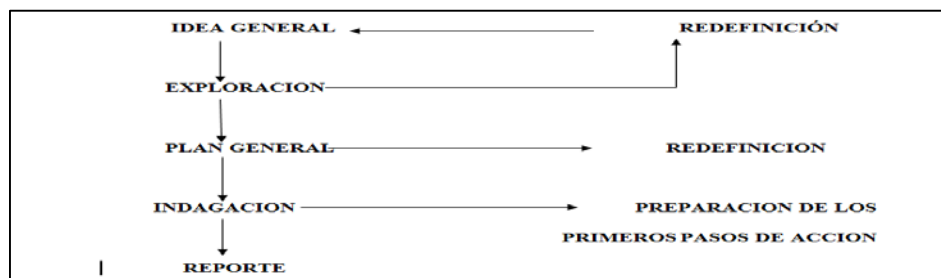


Figura 1. Método investigación-acción.

El siguiente diagrama ilustra el proceso de trabajo que seguimos en este proyecto.

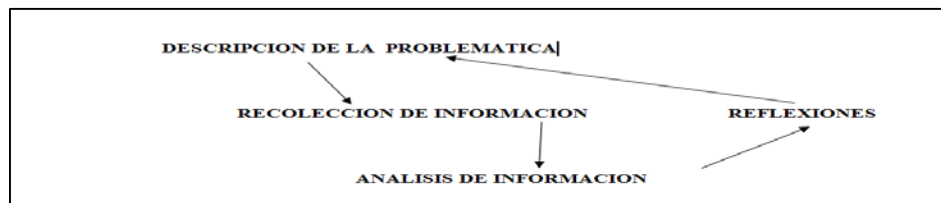


Figura 2. Proceso del trabajo.

El primer paso de la investigación fue identificar posibles problemáticas que se presentan en los estudiantes en el inicio del trabajo algebraico escolar, de las cuales se escogió: la dificultad de los niños al emplear las letras en el álgebra como un número general. Se diseñó un instrumento de recolección de información basado en preguntas estratégicas donde se involucra el concepto de la letra como número general, con el fin de explorar el pensamiento de los estudiantes respecto a esta problemática, para este proceso se escogió el grado séptimo de un colegio público de la ciudad, seleccionando una muestra de 35 estudiantes.

Se hace un respectivo análisis de las diferentes respuestas y procedimientos de los estudiantes las cuales fueron la base para la redefinición de la problemática.

Con base en lo anterior se diseñó y aplicó un plan de acción encaminado a corregir las diferentes dificultades evidenciadas en los estudiantes a través actividades didácticas que beneficien la comprensión de la letra en el álgebra como número general.

Finalmente se analizaron los resultados del plan de acción para reflexionar sobre el impacto de este en el pensamiento de los estudiantes respecto a la problemática de interés.

Resultados

Se realizó una primera actividad de exploración del pensamiento (pre-test) de los estudiantes con el objetivo de identificar las posibles falencias en la interpretación de la letra como número generalizado. La actividad consta de 2 preguntas cada una con 5 incisos, algunos de los resultados y análisis de las respuestas se muestran a continuación:

Observamos el diagrama

Figura No. 1



Figura No. 2

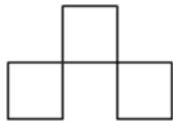
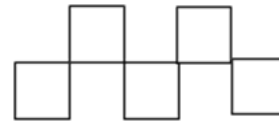


Figura No. 3



- Dibuje la Figura No. 4.
- ¿Cuántos cuadrados habrá en la Figura No. 7?
- ¿Cuántos cuadrados habrá en la Figura No. 13?
- ¿Cuántos cuadrados habrá en la Figura No. 100?
- Como hizo para saber el número de cuadrados que hay en la Figura No. 100.

1. observe la siguiente tabla:

X	Y
1	1
2	3
3	
4	10
5	15

- Cuando X tiene un valor de 3 ¿cuál es el valor de Y?
- Cuando X tiene un valor de 15 ¿cuál es el valor de Y?
- Cuando Y tiene un valor de 3 ¿cuál es el valor de X?
- Cuando Y tiene un valor de 20 ¿cuál es el valor de X?
- Como hallo el valor de X y de Y en cada ejercicio anterior (explique con sus propias palabras)

Pregunta 1

El 88.6% de los alumnos realizan la figura siguiente a la que se muestra en el enunciado, quedando un 11.4% de los cuales no identifican la secuencia.

¿Cuántos cuadrados habrá en la Figura No. 13?

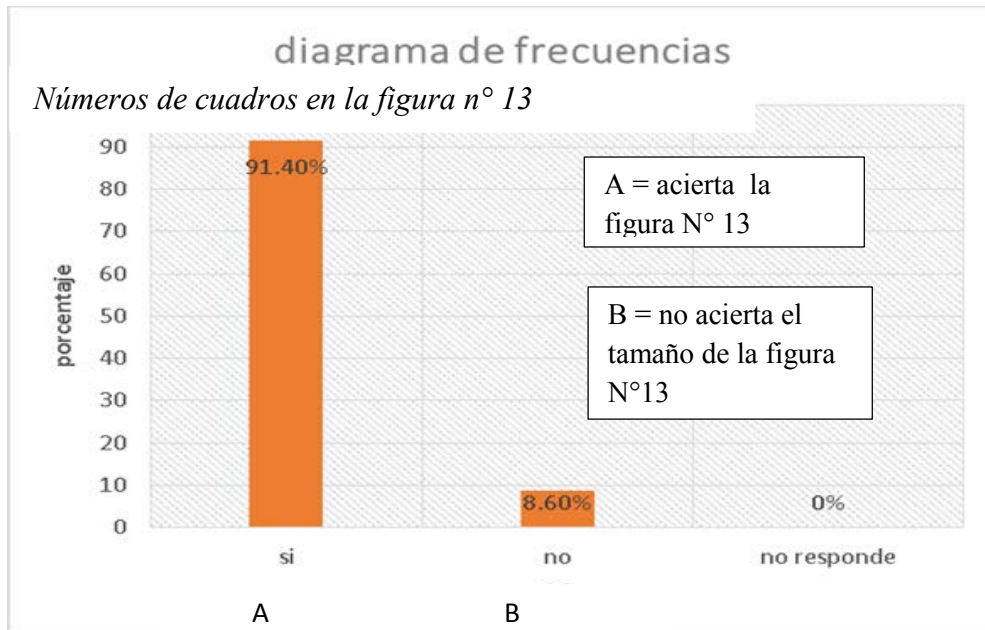


Figura 3. Resultados pregunta 1, inciso 3.

Se aumenta el número de la figura la cual deben hallar, el 91.4% de los alumnos reconocen el número de cuadros hasta la figura N° 13 y un 8.6% de jóvenes que no reconocen los cuadros correspondientes a la figura N°13.

¿Cuántos cuadrados habrá en la Figura No. 100?

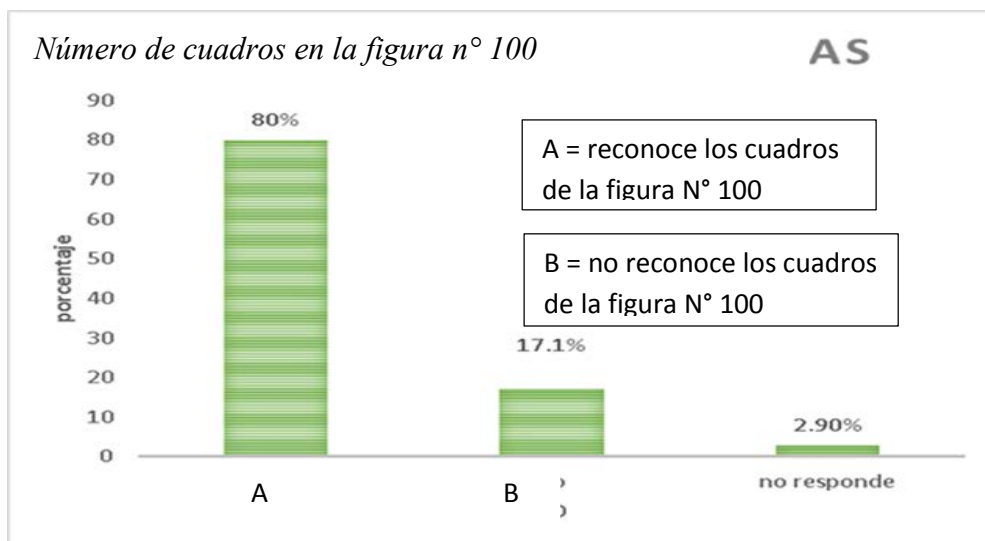


Figura 4. Resultados pregunta 1, inciso 4.

Aunque no es tan grande el cambio vemos que ya hay algunas novedades en los porcentajes, donde el 80% reconoce los cuadros correspondientes a la figura N° 100 y un 17.1% no lo reconoce. En esta figura vemos el porcentaje de los que no responden o dejan en blanco que fue de un 2.9%.

Como hizo para saber el número de cuadrados que hay en la Figura No. 100.

Multiplique por 2 y le reste 1	6
Aumento de cuadros por figura	10
Cantidad de cuadros de la parte de abajo es la misma de número de la figura y la de arriba es uno menos	9
Otras	9
TOTAL	34

Figura 5. Resultados pregunta 1, inciso 5

Nos damos cuenta que algunos de los estudiantes en el momento de ver las figuras de la secuencia y de seguir la prolongación con unas pocas graficas o datos que continuaban, encontraron sus respuestas adecuadamente, pero en verdad encontraron la generalización.

Cuando X tiene un valor de 15 ¿cuál es el valor de Y?

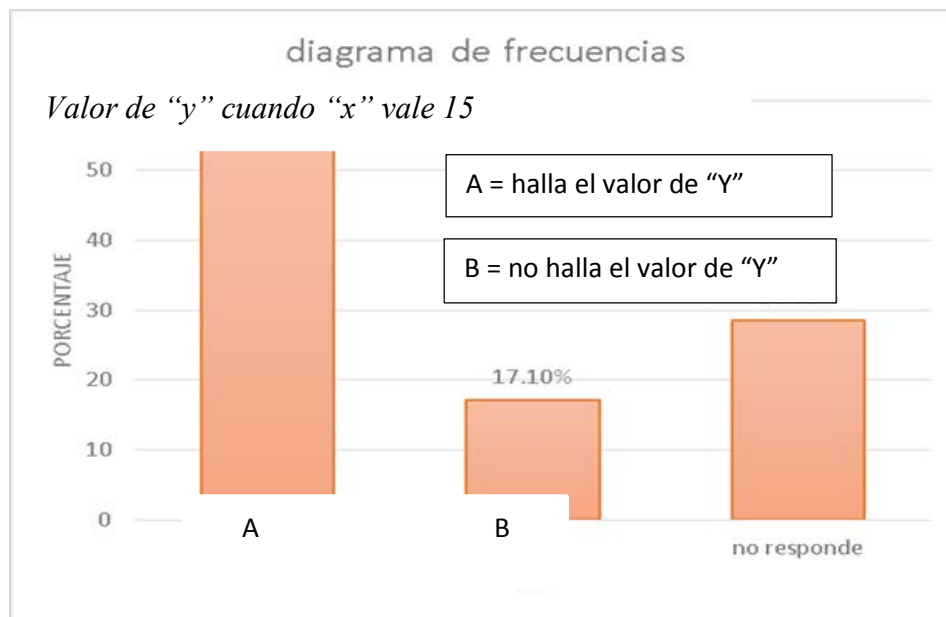


Figura 6. Resultados pregunta 2, inciso 2.

En esta pregunta ya se pide un valor que no se ve en la tabla de valores, por ende se presentan más dificultades en el momento de identificar la secuencia. El 54.3% de los alumnos hallan el valor de Y el 45.7% no halla el valor de Y, un 28.6% no responde dejando en blanco el espacio de respuesta.

Cuando Y tiene un valor de 20 ¿cuál es el valor de X?

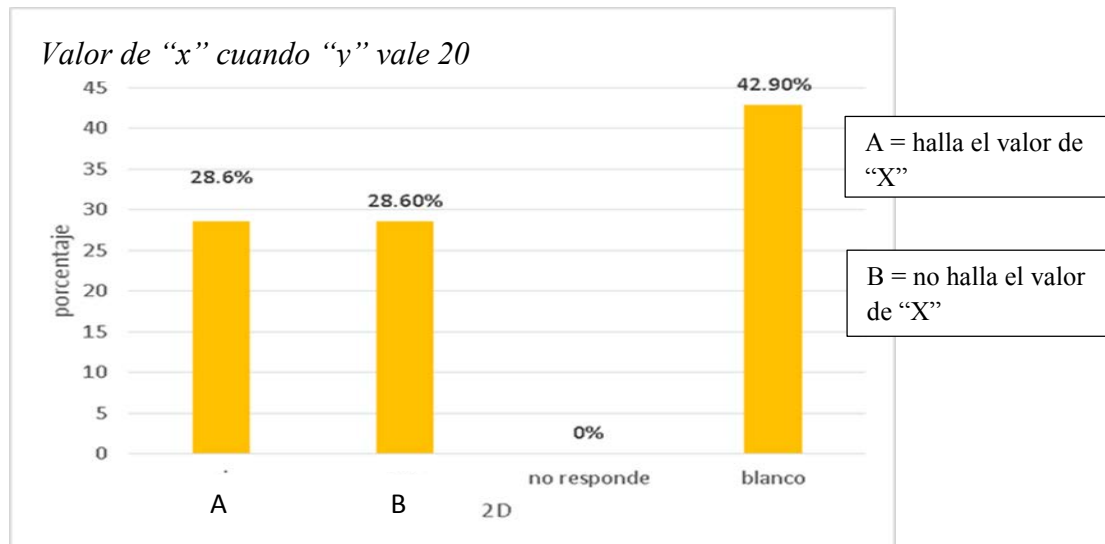


Figura 7. Resultados pregunta 2, inciso 4.

El 28.6% de los alumnos hallan el valor de la X y un porcentaje igual de 28.6% no halla el valor de X, además vemos que 42.9% deja en blanco la respuesta.

Tabla 1

Repuestas de los estudiantes

1	Sumando el valor de X con Y	7
2	Siguiendo una secuencia	9
3	Haciendo un plano cartesiano o tabulando todos los valores	4
4	otras	14
	TOTAL	34

Cómo halló el valor de X y de Y en cada ejercicio anterior

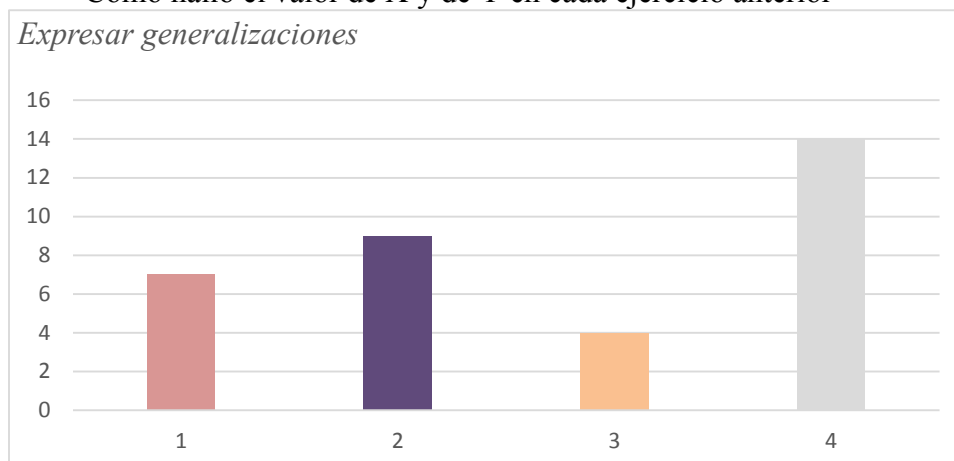


Figura 8. Resultados pregunta 2, inciso 5.

Los resultados obtenidos en esta pregunta son variados en los cuales vemos respuestas como "Pues suponiendo que al seguir la secuencia $6+5-1=20$ esta sería mi forma para sustentar

el resultado”, se parte del hecho que puede existir una secuencia por el ejercicio anterior pero no está claro cuál es, y por ello describen algo que no tiene coherencia con el ejercicio.

Como estrategia al mejoramiento de las dificultades que se encontraron en el trabajo de exploración se diseñó una unidad didáctica que consta de diferentes actividades como las tablas de Hanói con el fin de que los estudiantes pudieran Representar, analizar situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos, otra llamada elaboración de manillas con el objetivo de Generar un espacio de desarrollo del pensamiento variacional por medio de un contexto conocido donde los estudiantes se involucran en temas como la regularidad la identificación de un patrón y la expresión simbólica del mismo y, la actividad conocida como el juego de las palmas con el objetivo de encontrar los términos que conforman una secuencia numérica, donde se ven variables como números generalizados.

De esta manera podemos afirmar que aproximadamente un 95% de los estudiantes tienen facilidades para encontrar una regularidad. Un 90% ven las matemáticas en la situación planteada. El 61% de los estudiantes no utilizan un modelo matemático para justificar su respuesta. El 29% utiliza un modelo matemático pero no es el apropiado a los problemas planteados, el 5% responde con un modelo matemático apropiado al problema y solo el 5% no respondió.

Por último se aplicó un pos-test para identificar cuáles fueron los resultados de la unidad didáctica y comparar el pensamiento de los estudiantes antes y después de la aplicación, los resultados fueron los siguientes:

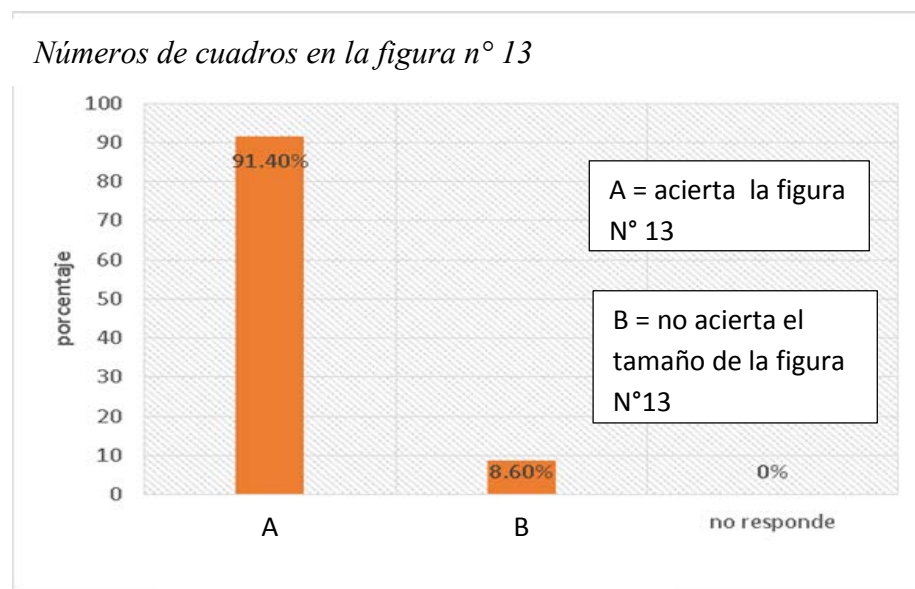


Figura 9. Comparación de resultados pre test y pos test.

Como las preguntas anteriores vemos un caso particular para seguir formando ese concepto de expresión generalizada, existe un gran porcentaje 94% de estudiantes que escriben la expresión matemáticamente esperada, aun vemos un 6% de los cuales no responden matemáticamente lo esperado.

Tabla 2

¿Cuántos cuadrados habrá en la Figura No. 100?

FRECUENCIA DEL TIPO DE RESPUESTA		
CATEGORIA	FRECUENCIA	PORCENTAJE
Correcta	32	91%
no correcta	1	6%
no responde	2	3%
	35	

Notas. Comparación de resultados pre test y pos test.

Para una valor mayor, el 91% de los estudiantes responden lo matemáticamente esperado, pero en esta pregunta ya vemos un 3% de los que no responden lo matemáticamente no esperado y el 6% no responde.

Discusión de resultados

Según los planteamientos del MEN el pensamiento algebraico se debe iniciar desde la educación básica primaria, pero basándonos en los resultados podemos observar que solo hasta el grado 7° se están iniciando en el trabajo algebraico como un corte drástico de la aritmética al álgebra, así que sería conveniente para los estudiantes aprender desde los primeros grados de escolaridad este tipo de temas a través de métodos lúdicos los cuales ayudaran a fortalecer las destrezas para el apoyo a la expresión de la generalidad.

Ahora bien a pesar de las dificultades que se presentan en el instrumento de exploración los resultados son satisfactorios y los estudiantes realizan la primera etapa (observar, decir) que propone Mason Mason (Mason et al., 1985) para lograr un expresión general. La dificultad que presentan es llegar al registro escrito (simbólico) de la generalidad encontrada, tanto así que en la mayoría de los casos los estudiantes preferían no escribir nada cuando se les pedía la expresión general de un problema.

Muchos de los estudiantes encuentran un sentido matemático al trabajo realizado pero en el momento de expresarlo en un dibujo no lograr hacerlo adecuadamente, vemos que el enfoque de conocimiento explícito II no se completa según Karmiloff Smitt, el estudiante no llega a un nivel completo de conocimiento solo queda en la fase básica, por ello las dificultades en el momento de hacer contextualizaciones y situaciones problema

Conclusiones

- Identificamos dificultades en los estudiantes no solo en expresar su pensamiento matemático, si no en sus concepciones de matemáticas.
- En el momento que los estudiantes realizan la expresión generalizada, logramos en pequeña parte pero significativa que logaran ver la letra como un numero generalizado
- Se logran evidenciar diferentes formas de pensamiento matemático, las cuales usan para llegar a una respuesta.
- Se ejecutó un plan de acción en el que se promovió la corrección de algunas las falencias que presentaban los estudiantes en el álgebra.

Limitaciones del estudio

La falta de tiempo fue un factor determinante a la hora de realizar nuestro ejercicio de exploración, debido a que no alcanzamos un mayor grado de indagación en el pensamiento de los niños que participaron en nuestro proyecto.

Prospectivas

Es adecuado tener una correcta profundización de todas estas ramas del álgebra que no se concebían en nuestro conocimiento hasta este punto donde con la ayuda de nuestra docente - asesora tenemos un poco más accesible nuestro pensamiento algebraico, pero vale aclarar que este proceso no termina aquí hay que seguir con pasos de investigador; indagando y llenado nuestro saber matemático con más descubrimientos inertes(ya que no son conocidos hasta el momento de nuestro estudio pregrado) para nosotros pero latentes en el mundo algebraico-matemático.

Bbibliografía

- Agudelo Valderrama, C. (2000). *Una innovación curricular que enfoca el proceso de transición entre el trabajo aritmético y el algebraico*. Tunja: universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia.
- Booth, L. (1999). Recurso 0. En *Raíces del álgebra/Rutas hacia el álgebra* (pp. 129-135). Tunja: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Disponible en: www.mineduacion.gov.co/7-305.
- Elliot, J. (1991). *La investigación- acción y el cambio educativo*. Madrid: Ediciones Morata.
- Hopkins, D. (2008). *Hacia una buena escuela. Experiencias y lecciones*. Chile: Área de educación fundación Chile.
- Mason, J., Graham, A., Pimm, D., & Gower, N. (1999). *Raíces del álgebra y rutas hacia el álgebra*. Tunja. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia (Traducción de Cecilia Agudelo Valderrama).
- Ministerio de Educacion Nacional. (2003). *Estándares básicos de matemáticas*. Bogotá.
- Ministerio de Educacion Nacional. (1998). *Lineamientos curriculares de matemáticas*. Bogotá. Disponible en: www.mineduacion.gov.co/7-305.
- Ponte, P. (1995). Action research as a further education strategy for school, counselling and guidance. *Educational action Research*. 3(3), 287-305.

Las propiedades de los Números Reales y el "misterio" de las Estructuras Algebraicas

Laura Alejandra **Bonilla** Ramos

Facultad de Ingeniería Culiacán, Universidad Autónoma de Sinaloa
México

laurabonilla@uas.edu.mx

Canek **Portillo** Jiménez

Facultad de Ingeniería Culiacán, Universidad Autónoma de Sinaloa
México

canekportillo@uas.edu.mx

Diego **Cárdenas** Sainz

Facultad de Ingeniería Culiacán, Universidad Autónoma de Sinaloa
México

diegocs@uas.edu.mx

Rocío Paola **Ruiz** Quiñonez

Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad Autónoma de Sinaloa
México

ro_ruiz77@hotmail.com

Resumen

La enseñanza del tema de Estructuras Algebraicas representa dificultades de comprensión y aprendizaje en los alumnos de nuevo ingreso de la licenciatura en Ingeniería en Procesos Industriales de la Universidad Autónoma de Sinaloa. Para investigar a qué se debe, se aplicó una serie de reactivos a manera de diagnóstico a un grupo de 40 estudiantes de ingeniería sobre conocimientos previos a Estructuras Algebraicas, principalmente ejercicios relacionados con las propiedades de los números reales. A pesar de que este tema se aborda por primera vez en secundaria y posteriormente se profundiza en el bachillerato, los alumnos llegan al nivel superior sin dominio y a veces sin conocimiento alguno del mismo. Será parte de este trabajo de investigación presentar y discutir los resultados que se encontraron en el diagnóstico.

Palabras clave: educación, propiedades de los números reales, estructuras algebraicas, aprendizaje, conocimientos previos.

Abstract

Teaching Algebraic Structures might represent some learning and understanding difficulties for the freshmen students of Industrial Processes Engineering at Universidad Autónoma de Sinaloa. In order to investigate the cause or causes of this situation, a test was applied as a diagnosis instrument to a 40 engineering students group, about algebraic structures previous knowledge, mostly related with the conception of the real numbers laws. Although the subject of the real numbers laws is addressed for the first time in junior high and then delves in high school, the

students reach the university without domain and sometimes without any knowledge of the subject. It will be part of this paper to present and discuss the results found in the diagnosis.

Key words: education, real numbers laws, algebraic structures, learning, previous knowledge.

Introducción

Los alumnos que ingresan a la licenciatura en Ingeniería en Procesos Industriales que oferta la Facultad de Ingeniería Culiacán de la Universidad Autónoma de Sinaloa, llegan con algunas deficiencias en el área de ciencias básicas. Esto se observa durante el desarrollo de las clases al abordar temas que requieren de todo un bagaje de conocimientos previamente adquiridos en niveles anteriores (desde la primaria hasta el bachillerato); al hacer la introducción del tema y tratar de reactivar dichos conocimientos, los alumnos comentan que no recuerdan haberlos estudiado o bien, los recuerdan vagamente y prácticamente es necesario dar clases extra para remediar esta situación.

En las secciones posteriores se presentará el objeto de estudio del presente trabajo, así como la forma en la que se realizó y la discusión de los resultados que se obtuvieron.

Planteamiento del problema

La asignatura de Álgebra y Geometría Analítica forma parte de la currícula de la licenciatura en Ingeniería en Procesos Industriales de la Facultad de Ingeniería Culiacán de la Universidad Autónoma de Sinaloa.

Se imparte durante el semestre impar del primer grado y junto con otras asignaturas forma parte del grupo disciplinar de Ciencias Básicas, particularmente, del área de matemáticas. Dentro de los contenidos de la primera unidad de la asignatura, se encuentra el tema de Estructuras Algebraicas, en el que se revisan de manera particular las estructuras de Grupos, Semigrupos, Monoides, Anillos y Campos, así como otros conceptos relacionados.

Este es el primer contacto que tienen los estudiantes de nuevo ingreso con el Álgebra Abstracta, y para muchos representa un momento de *shock* –sobre todo para estudiantes que consideran haber sido sobresalientes en los niveles anteriores- pues se enfrentan con algo que aparentemente no tiene relación alguna con los temas de álgebra que estudiaron en el bachillerato.

Un alto porcentaje de los alumnos de este curso lo reprueban, y en entrevistas de tutorías han manifestado que este tema “los paralizó”, es decir, entraron en un estado de “no entiendo, no puedo, no lo hago” que los llevó incluso a reprobar no solamente el examen parcial sino el curso completo.

Previo a este tema, se aborda el de la clasificación de los números reales, sus operaciones y sus propiedades. De primera instancia, algunos no ponen especial interés en estos temas, pues los consideran “sin chiste”; incluso, al revisar las propiedades de los números reales respecto a las operaciones de adición y multiplicación, no parecen encontrar mayor trascendencia en el tema, y se limitan a transcribir la tabla con dichas propiedades.

Cuando llega el momento de abordar el tema, se explica lo que es una operación binaria, y se establecen las condiciones y características para que una estructura sea un grupo, un semigrupo, un monoide, un anillo o un campo. Y aquí es donde empieza “el misterio”: de

repente, los estudiantes ya no entienden nada de lo que se les dice y al verse perdidos comentan “¿de qué nos va a servir esto?”; “es que nunca lo hemos visto”; “pero es que no entiendo nada, nada desde el principio”. Lo increíble es que antes del tema de Estructuras Algebraicas se ha abordado solamente el tema de los Números Reales (su clasificación, sus operaciones y sus propiedades), mismo que les pareció en su momento “sin chiste”, fácil y entendible.

Con base en esta experiencia que se repite año con año, y con el propósito de identificar las posibles causas de que el tema sea tan “difícil de entender”, se decidió elaborar un diagnóstico que contenga ejercicios relacionados con los conocimientos previos necesarios para entender el tema de Estructuras Algebraicas.

Antecedentes y fundamentación teórica

Uno de los temas fundamentales para la comprensión y el aprendizaje de las Estructuras Algebraicas, es el de las propiedades de los números reales.

De acuerdo con lo expuesto por la Secretaría de Educación Pública (SEP) en 2011, los alumnos de secundaria deben manejar operaciones con números reales, bajo el Eje de Sentido Numérico y Pensamiento Algebraico.

Asimismo, la SEP a través de la Secretaría de Educación Media Superior (SEMS), en su presentación de los programas de Matemáticas, plantea como objeto principal del estudio de la aritmética el cálculo numérico, las propiedades de los números y sus operaciones, desarrollando en el estudiante de bachillerato una visión más profunda de ella.

Por su parte, la Dirección General de Escuelas Preparatorias (DGEP) de la Universidad Autónoma de Sinaloa, establece en su Plan de Estudios 2009, que durante el primer semestre del primer grado del bachillerato universitario, el estudiante deberá comprender las operaciones y las propiedades de los números reales.

Dado lo anterior, es de suponer que cuando el alumno llega al nivel superior, conoce y domina los temas que eventualmente le permitirían aprender el de Estructuras Algebraicas.

Sin embargo esto no siempre ocurre así. Cuando el alumno se enfrenta a un problema pasa por dos etapas (Matz, citado por Díaz, 2009): la primera, en la que los conocimientos previos sobre el tema toman la forma de una regla o fórmula para aplicar, y la segunda, en la que se ponen en juego un conjunto de técnicas de extrapolación que actúan de nexo entre las reglas conocidas y los problemas que no son familiares.

El problema en la situación que se aborda en el presente trabajo, está en ambas etapas: los alumnos no son capaces de identificar las reglas y fórmulas para aplicar (características de los conjuntos de los Reales, generalización de sus propiedades, entre otras) y por ende, no pueden establecer un vínculo entre ellas y los nuevos conceptos.

Metodología

Se escogió un grupo al azar de los tres que existen en la licenciatura en Ingeniería en Procesos Industriales. Basándose en los resultados obtenidos en el examen de admisión, se consideró que los tres grupos eran equivalentes en cuanto al nivel académico de los estudiantes.

Los 40 estudiantes del grupo seleccionado resolvieron un instrumento de diagnóstico (ver apéndice B) bajo las mismas condiciones (sin consultar ningún material adicional), para así obtener una radiografía de sus conocimientos previos al tema de estructuras algebraicas.

El diagnóstico consta de 12 reactivos, todos ellos abiertos y relacionados con las propiedades de los números reales y con diferentes conjuntos dentro de los números reales.

Se revisaron los diagnósticos poniendo especial atención en el tipo de respuesta que dieron los alumnos. Se consideraron tres tipos de respuesta: correcta, incorrecta y en blanco. De igual manera, en los reactivos 2 y 4 se solicitaba argumentar la respuesta, así que también se consideró esta variable para el caso de los ítems antes mencionados (sí o no).

En el reactivo 3 se piden dos respuestas (una para el inverso aditivo de un número dado, y otra para el inverso multiplicativo); es por ello que se consideraron dos reactivos dentro de uno (3a y 3b).

Es importante mencionar que en el reactivo 1c se solicita que de manera simultánea se apliquen las propiedades conmutativa y asociativa de la adición para encontrar una expresión equivalente a la dada.

Finalmente, en caso de que la respuesta haya sido incorrecta o haya sido dejada en blanco, se consideró que la propiedad del reactivo es una debilidad para el alumno.

Con el propósito de atender de forma prioritaria aquellas propiedades en las que se encontró mayor incidencia de error, se partió del siguiente criterio: los reactivos que hayan tenido un porcentaje de respuesta correcta menor o igual al 60%, representan los temas en los que hay que focalizar la atención.

Resultados

En la tabla 1, se muestran los resultados obtenidos, considerando el número del reactivo, si la respuesta fue correcta o no y si se dio un argumento en caso de que fuera necesario.

Tabla 1

Resultados obtenidos del instrumento diagnóstico.

Número de reactivo	Respuesta			¿Argumentó?	Propiedad identificada como debilidad
	Correcta	Incorrecta	En blanco		
1a.	32	4	4	0	8
1b.	24	14	2	0	16
1c.	14	17	9	0	26
2	25	3	12	15	15
3a	22	10	8	0	18
3b	12	18	10	0	28
4	29	2	9	18	11
5a.	25	3	12	0	15
5b.	11	17	12	0	29
5c.	13	15	12	0	27
5d.	25	3	12	0	15
5e.	17	12	11	0	23

Fuente: instrumento diagnóstico. 2014.

Nótese que bajo la columna “¿Argumentó?” hay solamente dos filas en las que aparecen valores distintos de cero, esto es porque –como se señaló anteriormente– es únicamente en esos reactivos en los que se solicitaba argumentación.

Por otra parte, en la figura 1 se aprecia visualmente el porcentaje de reactivos correctos y por ende, aquellas propiedades que deben atenderse como una prioridad para el grupo.

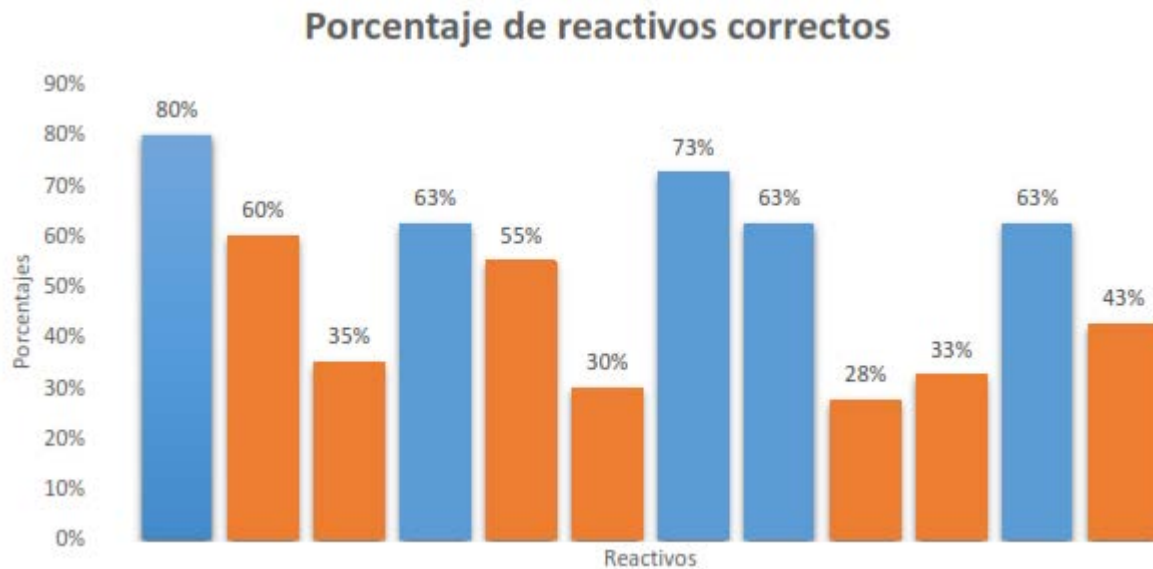


Figura 1. Porcentaje de reactivos correctos

Fuente: instrumento diagnóstico. 2014.

Aparecen en azul aquellos reactivos que de acuerdo a lo planteado en la metodología no se consideran en la generalidad del grupo como una debilidad, y en anaranjado aquellos que requieren una intervención inmediata para corregir errores en los conocimientos previos.

Las propiedades que de acuerdo a estos resultados son las que presentan una mayor incidencia de “debilidad” en el grupo son: propiedad asociativa de la multiplicación (1b), propiedades asociativa y conmutativa de la adición (1c, de forma simultánea), propiedades del elemento inverso de la adición y la multiplicación (3a y 3b) y la propiedad de cerradura bajo diversas operaciones y conjuntos de números (5b, 5c y 5e).

En lo que respecta al reactivo 1c –en el que se solicita se apliquen simultáneamente las propiedades conmutativa y asociativa de la adición–, se consideró como incorrecta la respuesta si una de las dos propiedades no fue aplicada correctamente, dado que lo que se pretendía era precisamente que el alumno pudiera aplicar de forma simultánea las dos propiedades. Sin embargo, en la clasificación y conteo de los datos, se consideraron también las dos respuestas por separado (ver apéndice C) en caso de que el lector desee más detalles sobre este ítem.

Conclusiones

Definitivamente, la aplicación de un instrumento diagnóstico es una fuente de información muy valiosa, de la que es posible obtener datos que permitan aclarar muchas concepciones erróneas que los alumnos vienen arrastrando desde niveles educativos anteriores.

En el caso particular que nos atañe, se detectaron algunas de las propiedades de los números reales en las que existe confusión, así como los errores que cometen al tratar de ponerlas en práctica. También se descubrió que cuando se combina el poner en práctica una propiedad dentro de un subconjunto de los números reales, el alumno es más susceptible de cometer errores o definitivamente de entrar en pánico y no contestar la pregunta.

Es importante mencionar que los resultados en este trabajo no son totalmente concluyentes, sino más bien lo que se ha tratado es de resaltar los beneficios del uso de un instrumento de diagnóstico sobre todo en aquellos temas en los que por experiencia se sepa que

los estudiantes presentan dificultades de aprendizaje. Si esta manera de proceder se hiciera de forma regular, tendríamos una base de datos bastante amplia sobre las respuestas erróneas y sobre los equívocos conocimientos previos con los que llegan los alumnos al nivel superior.

Si el docente conoce esta información, estará en sus manos diseñar estrategias que subsanen estas deficiencias y que les permitan a los estudiantes continuar con el proceso de aprendizaje (Del Puerto, Minnaard & Seminara, 2006). Cabe señalar que se realizará una nueva investigación a manera de continuación del presente trabajo, comparando los diagnósticos con los resultados de los exámenes parciales y semestrales de los mismos alumnos que participaron en el estudio, con la intención de descubrir si después de atender las debilidades descubiertas en el diagnóstico los alumnos pudieron superar los errores de concepción de los conocimientos previos y así avanzar en el tema de estructuras algebraicas.

Referencias y bibliografía

- Álvarez Villar, W., Czerwonogora, A., Isolabella, G., Lacués, E., Leymonié, J., & Pagano, M. (2007). La matemática al ingreso en la universidad. Un estudio comparativo de cuatro Facultades en el Uruguay. *Revista Iberoamericana de Educación*.
- American Psychological Association. (2009). *Publication Manual of the American Psychological Association*. Washington, DC: American Psychological Association.
- Del Puerto, S. M., Minnaard, C. L., & Seminara, S. A. (2006). Análisis de los errores: una valiosa fuente de información acerca del aprendizaje de las Matemáticas. *Revista Iberoamericana de Educación*.
- Díaz Gómez, J. L. (2009). Los estudiantes de Cálculo a través de los errores algebraicos. *El Cálculo y su Enseñanza*. Cinvestav del Instituto Politécnico Nacional.
- Dirección General de Escuelas Preparatorias de la Universidad Autónoma de Sinaloa (DGEP-UAS). (2009). *Programa de Estudio de Matemáticas I*. Culiacán: UAS.
- Kilpatrick, J., Gómez, P., & Rico, L. (1993). *Educación Matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Ruiz Socarras, J. M. (2008). Problemas actuales de la enseñanza aprendizaje de la matemática. *Revista Iberoamericana de Educación*.
- Secretaría de Educación Media Superior (2011). *Programas de estudio 2011. Educación Media Superior. Matemáticas. Edición Electrónica*. Recuperado en Septiembre 28, 2014, de http://www.sems.udg.mx/sites/default/files/BGC/Matematicas_I_II_III_y_IV.pdf
- Secretaría de Educación Pública. (2011). *Programas de estudio 2011 Guía para el maestro. Educación Básica Secundaria. Matemáticas. Edición Electrónica*. Recuperado en Septiembre 28, 2014, de <http://basica.sep.gob.mx/reformaintegral/sitio/pdf/secundaria/plan/MatematicasSec11.pdf>
- Vilanova, S., Rocerau, M., Valdez, G., Oliver, M., Vecino, S., Medina, P., & Alvarez, E. (2001). La Educación Matemática. El papel de la resolución de problemas en el aprendizaje. *Revista Iberoamericana de Educación*.

Apéndice A

Programa de Contenidos de la asignatura de Álgebra y Geometría Analítica



UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE SINALOA
FACULTAD DE INGENIERÍA CULIACÁN
LICENCIATURA EN INGENIERÍA EN PROCESOS INDUSTRIALES

ASIGNATURA
ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

INFORMACIÓN GENERAL

Tipo de asignatura:

Obligatoria: X

Selectiva:

Grupo disciplinar y su objetivo:

Ciencias Básicas. Proporcionar el conocimiento fundamental de los fenómenos de la naturaleza, incluyendo sus expresiones cuantitativas y el desarrollo de capacidad del uso del método científico, así como de las matemáticas que contribuyan a la formación del pensamiento lógico-deductivo a partir de utilizar lenguaje y herramientas que permitan modelar esos fenómenos.

Área académica:

Matemáticas

Objetivo general de la asignatura:

Comprender los elementos básicos del álgebra, vectores y de la geometría analítica en el espacio. Analizar y resolver problemas que se presenten en el curso, así como también en cursos paralelos y posteriores.

SEMESTRE:

1

Créditos: 10

Duración hora/sem/mes: 5 Teoría: 75 Práctica: 0

Conocimiento previo necesario:

Conocimientos básicos sobre álgebra elemental, trigonometría y geometría analítica plana.

Proporciona bases para:

Cálculo I, Cálculo II, Física, Álgebra lineal, Ecuaciones diferenciales

Fecha de última actualización:

Agosto del 2006

CONTENIDOS

Unidad	Temas	Horas
I	1. Números Reales 1.1. Sistemas numéricos 1.1.1. Números naturales 1.1.2. Números enteros 1.1.3. Números racionales 1.1.4. Números irracionales 1.2. Estructuras algebraicas	13

	1.3. Conversión de números racionales a su forma decimal y viceversa 1.4. Inducción matemática 1.5. Desigualdades	
II	2. Números Complejos 2.1. Definición y operaciones fundamentales 2.2. Igualdad de números complejos. 2.3. Representación geométrica y polar 2.4. Multiplicación y división de números complejos en forma polar 2.5. Teorema de De Moivre 2.6. Raíces de números complejos	12
III	3. Ecuaciones Polinomiales 3.1. Polinomios 3.2. Teorema del residuo 3.3. Teorema del factor y su recíproco 3.4. División sintética 3.5. Teorema fundamental del álgebra 3.6. Raíces de polinomios 3.6.1. Regla de los signos de Descartes 3.6.2. Teorema sobre raíces racionales 3.6.2. Regla para localizar raíces reales 3.6.3. Límites de las raíces reales 3.6.4. Procedimiento para obtener todas las raíces racionales 3.6.5. Raíces complejas 3.6.6. Raíces irracionales (método de Newton)	16
IV	4. Vectores 4.1 Vectores en el plano 4.1.1 Definiciones fundamentales (vector, igualdad, componentes y representación posicional) 4.1.2 Magnitud y dirección 4.1.3 Suma y resta (Ley del paralelogramo) 4.1.4 Multiplicación por un escalar 4.1.5 Vectores unitarios 4.1.6 Suma y resta de vectores por descomposición en coordenadas rectangulares 4.1.7 Producto escalar 4.1.8 Angulo entre vectores 4.1.9 Proyección ortogonal 4.2 Vectores en el espacio 4.2.1 Distancia entre dos puntos 4.2.2 Magnitud y dirección, suma y resta, multiplicación por un escalar, vectores unitarios, producto escalar, ángulo entre vectores, interpretación geométrica del producto escalar. 4.2.3 Producto vectorial 4.2.4 Interpretación geométrica de $ \vec{A} \times \vec{B} $ 4.2.5 Triple producto escalar 4.2.6 Interpretación geométrica de $ \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) $ 4.2.7 Triple producto vectorial	20
V	5. Geometría Analítica en el Espacio 5.1 Planos	14

	5.2 Rectas en el espacio	
	5.2.1 Distancia entre un punto y un plano	
	5.2.2 Distancia entre un punto y una recta	
	5.3. Superficies	

Apéndice B

Diagnóstico Aplicado

INSTRUCCIONES: Basándote en lo que has aprendido en grados anteriores, contesta lo que se te pide. En caso de que sea necesario, argumenta tus respuestas.

1. Utiliza la propiedad indicada para obtener una expresión equivalente.

a. Conmutativa de la adición; $9y + 72x$

b. Asociativa de la multiplicación; $9a \cdot (6b \cdot 12c)$

c. Asociativa y conmutativa de la adición; $(y/8 + 90) + 6x$

2. Supón que se define una nueva operación $@$ en el conjunto de los números reales como sigue: $a@b = 3a - b$. Así, $9@2 = 3(9) - 2 = 25$ ¿Es $@$ conmutativa? Es decir, ¿se cumple que $a@b = b@a$?

3. El inverso aditivo de $-3/4$ es _____ y su inverso multiplicativo es _____.

4. Supón que definimos una nueva operación $\oplus$ en el conjunto de los números reales como sigue: $a \oplus b = a^2 + b^2$. Así, $4 \oplus 2 = 4^2 + 2^2 = 20$ ¿Es $\oplus$ conmutativa?

5. Un conjunto es cerrado bajo una operación si siempre que la operación se realice con elementos del conjunto, el resultado también es un elemento del conjunto dado. Determina cuáles de los siguientes conjuntos son cerrados bajo la operación indicada:

a. El conjunto de enteros no negativos; adición.

b. El conjunto de enteros no negativos; sustracción. c. El conjunto de enteros impares; adición.

d. El conjunto de enteros pares; multiplicación.

e. El conjunto de enteros racionales; multiplicación.

Apéndice C

Compilación de los datos por reactivo

Reactivo 1a. Propiedad Conmutativa de la adición																														Total
Respuesta	Correcta	1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	32
	Incorrecta												1													1		1		4
	En blanco			1																					1	1				4
¿Argumentó?																														
Propiedad identificada como debilidad		0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	8

Reactivo 1b. Propiedad Asociativa de la Multiplicación																												Total								
Respuesta	Correcta	1	1	1			1	1	1	1	1		1	1		1	1	1	1	1			1	1	1	1	1	1	1	24						
	Incorrecta				1					1	1		1	1						1	1	1		1	1		1	1		14						
	En blanco			1																								1		2						
	¿Argumentó?																																			
Propiedad identificada como debilidad		0	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	0	1	0	0	1	0	1	0	16

Reactivo 1c. Propiedad Asociativa y Conmutativa de la Adición																												Total											
Respuesta	Correcta				1		1		1				1	1		1	1	1	1	1	1		1		1	1				1	14								
	Incorrecta	1	1	1		1	1		1	1	1		1	1		1						1	1	1		1		1			17								
	En blanco			1						1	1										1	1					1	1	1	1	9								
	¿Argumentó?																																						
Propiedad identificada como debilidad		1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	1	0	1	1	1	1	1	0	26

Reactivo 1c. Propiedad Asociativa de la Adición																												Total			
Respuesta	Correcta				1			1			1				1	1		1	1	1	1	1	1		1				1	14	
	Incorrecta	1	1	1			1	1		1	1	1			1				1	1	1		1				1			17	
	En blanco				1								1	1									1	1			1	1		9	
	¿Argumentó?																														
Propiedad identificada como debilidad		0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	0	1	18

Reactivo 1c. Propiedad Conmutativa de la Adición																												Total			
Respuesta	Correcta					1				1					1	1		1	1	1	1	1	1		1		1	14			
	Incorrecta	1	1	1			1	1		1	1	1			1								1	1	1		1		17		
	En blanco				1								1		1								1	1			1	1	9		
	¿Argumentó?																														
Propiedad identificada como debilidad		1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	1	1	1	0	21

Reactivo 2. Propiedad Conmutativa para una nueva operación "@"																												Total		
Respuesta	Correcta	1	1	1		1	1		1	1	1		1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	25	
	Incorrecta										1				1					1									3	
	En blanco			1		1	1	1	1		1		1				1		1				1		1	1	1	1	12	
¿Argumentó?		0	1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1	1	0	0	1	0	15
Propiedad identificada como debilidad		0	0	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	1	15

Reactivo 3a. Propiedad del Elemento Inverso de la Adición																												Total		
Respuesta	Correcta	1	1	1		1		1				1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		1			1		1	22	
	Incorrecta						1		1	1					1				1				1		1	1	1		10	
	En blanco			1		1	1		1			1	1		1													1	8	
¿Argumentó?																													0	
Propiedad identificada como debilidad		0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	18

O que os programas de ensino brasileiro preconizam sobre equações do primeiro? Uma análise à luz da Teoria Antropológica do Didático

Edelweis Jose Tavares **Barbosa**
Universidade Federal de Pernambuco
Brasil
edelweisb@yahoo.com.br

Anna Paula Avelar **Brito Lima**
Universidade Federal Rural de Pernambuco
Brasil
apbrito@gmail.com

Resumo

Este artigo apresenta os resultados de uma pesquisa doutorado em andamento, cujo objetivo consistiu em analisar e comparar as relações institucionais existentes nos programas de ensino a nível nacional e os documentos produzidos pelas secretarias estaduais de educação sobre o ensino de equações polinomial do primeiro grau a luz da Teoria Antropológica do Didático (Chevallard, 1999), como um processo de análise que admite reconstruir a organização matemática existente no cerne de uma determinada instituição de ensino. Os resultados indicam que equação do primeiro grau é justificada como uma ferramenta para resolver problemas e não tem sua organização matemática caracterizadas nos documentos oficiais.

Palavras chave: Equações do 1º grau. Teoria Antropológica do Didático. Organização Matemática; Documentos Oficiais; Instituições.

Introdução

Este trabalho é parte de uma tese de doutorado em andamento que discute a problemática do ensino da álgebra escolar cuja principal finalidade consistiu em caracterizar o ensino de álgebra sobre a resolução de equações polinomiais do primeiro grau em programas de ensino brasileiros à luz da Teoria Antropológica do Didático.

Nosso objeto de pesquisa baliza-se pela seleção das instituições e do objeto a ser focado, a partir dos quais trataremos da questão mais ampla estabelecida. A instituição em foco é o ensino fundamental brasileiro a nível nacional, bem como as instituições de ensino a nível estadual de educação e o objeto são as equações polinomiais do primeiro grau.

Para tanto, foram selecionados o Programa de ensino brasileiro, os Parâmetros Curriculares Nacionais PCN (Brasil, 1998). E os programas de ensino estaduais dos 26 estados brasileiros e o Distrito Federal (serão descritos em tópico específico).

Partimos do princípio de que, as praxeologias envelhecem na medida em que seus elementos (tipos de tarefas, técnicas, tecnologias ou teorias) perdem seus créditos ou tornam-se opacos, dando origem à constituição de novas praxeologias, necessárias ao melhor

funcionamento de uma determinada instituição, em consequência dos novos tipos de tarefas (tipos de problemas) que se apresentam a essa instituição (Chevallard, 1998).

Entendemos que os programas de ensino são o produto do trabalho de uma instituição transpositiva de saberes a ensinar, a noosfera, conforme sugere Chevallard (1991). Tomando como base esse trabalho propomos-nos a responder as seguintes questões: Quais organizações matemáticas existentes nos Parâmetros Curriculares Nacionais? Quais organizações matemáticas estão nos demais programas de ensino estaduais?

Sendo assim, apresentamos o artigo em duas seções. A primeira com relação à fundamentação teórica, seleção e caracterização instituições de ensino. A segunda seção discute os principais resultados e algumas considerações.

Teoria Antropológica do Didático

Esta teoria desenvolvida por Chevallard (1992) foi inscrita no prolongamento da teoria da transposição didática, também de sua autoria. Nessa abordagem os objetos matemáticos, não como existentes em si, mas como entidades que emergem de sistemas de práticas existem em dadas instituições.

Segundo Chevallard (1999, p.1), essa teoria estuda o homem perante o saber matemático, e mais especificamente, perante situações Matemáticas. Um motivo para utilização do termo *antropológica* é que a TAD situa a atividade Matemática e, em consequência, o estudo da Matemática dentro do conjunto de atividades humanas e de instituições sociais. Assim, a Teoria Antropológica do Didático (TAD) considera como elementos primitivos INSTITUIÇÕES (I), INDIVIDUOS (X) e OBJETO (O).

Considerando que uma instituição (I) é um dispositivo social total que pode ter apenas uma extensão muito reduzida no espaço social, mas que permite e impõe a seus sujeitos (...) maneiras próprias de fazer e de pensar. Sob a ótica da TAD cada saber é saber de pelo menos uma instituição; um mesmo objeto do saber pode viver em instituições diferentes e para viver em uma instituição; um saber necessita submeter-se a certas imposições, o que o conduz a ser transformado Chevallard (Ibidem).

A TAD consiste no desenvolvimento da noção de organização praxeológica que, acrescenta às noções acima descritas, as noções de (tipo de) tarefa, técnica, tecnologia e teoria. Para ele, tais noções vão permitir modelizar às práticas sociais em geral as atividades Matemáticas, como descritas a seguir.

Organização Praxeológica

Podemos entender uma organização praxeológica como a realização de certo tipo de tarefa t que se exprime por um verbo, pertencente a um conjunto de tarefas do mesmo tipo t , através de uma técnica τ , justificada por uma tecnologia θ , que por sua vez, é justificada por uma teoria Θ . Parte do postulado que qualquer atividade humana põe em prática uma organização, denominada por Chevallard (1998) de praxeologia, simbolizada pela notação $[t, \tau, \theta, \Theta]$.

Chevallard (1998) considera ainda que o par $[t, \tau]$ está relacionado à prática, e pode ser compreendido como um saber-fazer, e o par $[\theta, \Theta]$ relacionado a razão, é compreendido como o saber. O autor define assim a Organização Praxeológica $[t, \tau, \theta, \Theta]$, em que temos um bloco prático $[t, \tau]$, composto das tarefas e técnicas, o chamado saber fazer, e um bloco teórico $[\theta, \Theta]$, composto pelas tecnologias e teorias, o bloco do saber. Considera ainda que a existência de um

tipo de tarefa matemática em um sistema de ensino está condicionada à existência de, no mínimo, uma técnica de estudo desse tipo de tarefa e uma tecnologia relativa a esta técnica, mesmo que a teoria que justifique essa tecnologia seja negligenciada.

Os tipos de *tarefas* (t) que se situam em acordo com o princípio antropológico supõem a existência de objetos bem precisos e que não são obtidos diretamente da natureza. Eles são artefatos, obras, construtos institucionais, como por exemplo, uma sala de aula, cuja reconstrução é inteiramente um problema, que é o objeto da didática (Chevallard, 1998). Por exemplo, resolva a equação $3x + 6 = 30$. A noção de tarefa, ou especificamente do tipo de tarefa, tendo como um objetivo bem definido, por exemplo, encontrar o valor de x é um tipo de tarefa, mas calcular não explicita o que é calcular. Assim, calcular o valor de uma equação é um tipo de tarefa, mas somente calcular não seria um tipo de tarefa. Para esse exemplo, calcular é gênero de tarefa.

Uma *técnica* (τ) é uma maneira de fazer ou realizar as tarefas $\tau \in t$. Segundo Chevallard (1998), uma praxeologia relativa a um tipo de tarefa t necessita, em princípio, de uma técnica τ relativa. No entanto, ele afirma que uma determinada técnica τ pode não ser suficiente para realizar todas as tarefas $\tau \in t$. Ela pode funcionar para uma parte $p(\tau)$ das tarefas t e fracassar para $t/p(\tau)$. Isso significa que em uma praxeologia pode existir uma técnica superior a outras técnicas, ao menos no que concerne à realização de certo número de tarefas de t (Chevallard, 1998). Por exemplo, a multiplicação no conjunto dos números naturais sempre aumenta, mas que pode fracassar em outro conjunto numérico.

A *tecnologia* (θ) é definida inicialmente como um discurso racional sobre uma técnica τ , cujo primeiro objetivo consiste em justificá-la racionalmente, isto é, em assegurar que a técnica permita que se cumpra bem a tarefa do tipo t . Na Matemática, tradicionalmente, a justificação de uma técnica é realizada por meio de demonstração. O segundo objetivo da tecnologia consiste em explicar, tornar inteligível e esclarecer uma técnica τ , isto é, em expor por que ela funciona bem. Além disso, a tecnologia tem também a função de reproduzir novas técnicas, mais eficientes e adaptadas à realização de uma determinada tarefa (Chevallard, 1998).

A *teoria* (Θ) tem como objetivos justificar e esclarecer a tecnologia, bem como tornar inteligível o discurso tecnológico. Passa-se então a um nível superior de justificação-explicação-produção, [...] retomando com relação à tecnologia o papel que esta tem em relação à técnica. O autor adverte, no entanto, que geralmente essa capacidade de justificar e de explicar a teoria é quase sempre obscurecida pela forma abstrata como os enunciados teóricos são apresentados frequentemente (Chevallard, 1998).

Um complexo de técnicas, tecnologias e da teoria constituídas em volta de um tipo de tarefa configura-se em uma organização praxeológica pontual. O conjunto de várias praxeologias pontuais cunhará uma praxeologia local ou regional ou global, conforme o grau de expansão desses conjuntos sucessivos e simultaneamente, a tecnologia, a teoria ou a posição institucional apreciada. Tomando como base da matemática em nível fundamental, no Brasil, podemos pensar em uma organização praxeológica pontual em volta da resolução de tipos equações a que virá responder a questão: como resolver uma equação? De uma praxeologia local em torno da resolução de diferentes tipos de equações, de modo que, do tema equação do primeiro grau, até chegar a uma praxeologia regional.

Uma organização matemática é elaborada em torno de uma noção, ou conceito, inerente à própria Matemática. As Praxeologias Matemáticas (OM) são as respostas (a rigor) a questões do

tipo como realizar o estudo de determinado assunto. Refere-se ao modo que possibilita a realização do estudo de um determinado tema, o conjunto de tarefas, de técnicas, de tecnologias, entre outras, mobilizadas para o estudo de um tema. Por exemplo, encontrar o valor de uma incógnita de uma equação.

Quaisquer que sejam as escolhas adotadas nos cursos dos trabalhos de estudo de dada OM algumas situações estão necessariamente presentes, mesmo que estas se apresentem de formas variadas, tanto de forma quantitativa como qualitativamente falando. Estas situações serão denominadas de momentos de estudos, ou momentos didáticos, porque podemos dizer que qualquer que seja o caminho escolhido ele conduzirá inevitavelmente a um momento de fixação, ou de institucionalização, ou a um momento que demandará o questionamento do que é válido acerca do que foi construído, que caracteriza o momento de avaliação, dentre outros.

O primeiro momento é o primeiro encontro com a organização que está sendo estudada. O segundo é o da exploração do tipo de tarefas t e de elaboração de uma técnica τ relativa a este tipo de tarefas. O terceiro momento é o da constituição do ambiente tecnológico-teórico relativo à técnica. O quarto é o do trabalho da técnica que visa melhorá-la, torná-la mais confiável, o que geralmente exige aprimorar a tecnologia até então elaborada e aumentar o controle que se tem sobre a técnica. O quinto momento é o da institucionalização que mostra o que realmente é a OM constituída, apontando os elementos que permanecerão definitivamente na OM e os que serão dispensados.

Finalmente, o sexto momento, o da avaliação, que se articula com o momento da institucionalização e permite relançar o estudo, demanda a retomada de alguns dos momentos, e eventualmente do conjunto do trajeto didático.

Programas de Ensino

Com a finalidade de estudar o objeto de pesquisar as equações do primeiro grau, ateremos aos programas de ensino fundamental brasileiro e dos estados brasileiros são eles: os Parâmetros Curriculares Nacionais, PCN (Brasil, 1998), embora não tendo status de programa, é a ainda é a principal referência curricular brasileira.

Os documentos das cinco regiões brasileiras, a saber: - região nordeste: Pernambuco - Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio do Estado de Pernambuco; Paraíba - Referencial Curricular da rede Estadual; Alagoas - Referencial Curricular da educação básica para escolas públicas; Sergipe - Referencial Curricular da rede Estadual; Bahia - Orientações curriculares e subsídios didáticos para a organização do trabalho pedagógico no ensino fundamental de nove anos; Piauí - Matrizes disciplinares do ensino fundamental;

Região Sul: Rio Grande do Sul - Referencial Curricular; Paraná: Proposta Pedagógica Curricular.

Região Sudeste: São Paulo - Currículo do Estado; Rio de Janeiro - Currículo Mínimo de Matemática; Minas Gerais - Proposta Curricular de Matemática do Ensino Fundamental - 6º A 9º ano; Espírito Santo - Currículo básico escola estadual.

Região Norte: Rondônia - referencial curricular de Rondônia; Tocantins - referencial curricular para o ensino fundamental; Amapá - Plano curricular da educação básica,.

Região Centro Oeste: Distrito Federal - currículo em movimento da educação básica; Goiás - Currículo de referência da rede estadual; Mato Grosso do Sul - referencial curricular do

ensino fundamental; Mato Grosso: orientações curriculares da área de Ciências da natureza e matemática da educação básica.

Recorremos a tais Programas, pois neles são definidos os objetos a ensinar, as recomendações e exigências, bem como a finalidade do ensino. Os parâmetros curriculares nacionais – PCN (Brasil, 1998) são diretrizes formadas pelo Governo Federal que guiam a educação e são separados por disciplina. Além da rede pública, a rede privada de ensino também adota os parâmetros, porém sem caráter obrigatório.

Os PCN são documentos oficiais de referência que, representam um esforço na tentativa de promover um ensino de qualidade voltado para a educação básica. Na Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental propõe quatro blocos: Números e Operações; Espaço e Forma; Grandezas e Medidas; Tratamento da Informação. Sugere-se ainda que os conteúdos matemáticos sejam trabalhados e sejam revistos em outras unidades e não trabalho de forma fragmentada.

E os demais programas citados acima são elaborados de acordo com seus contextos regionais as respectivas secretarias tem autônomias também para criarem seus programas curriculares de ensino de acordo suas especificidades de cada estado.

Metodologia

Assumindo a tese de Chevallard (Ibidem), de que a TAD fornece os elementos necessários à caracterização do ensino de determinado saber matemático que se realiza no interior de determinada instituição de ensino, sendo nosso foco o ensino fundamental brasileiro especificamente o programa curricular nacional e os programas regionais de ensino fundamental e o objeto são as equações polinomiais do primeiro grau.

A metodologia seguida para a caracterização, análise e comparação das organizações matemáticas sobre o ensino de equações do primeiro grau constitui-se na modelização a priori, das praxeologias matemáticas pontuais existentes em torno da resolução de equações do primeiro grau, ao menos em termos de subtipos de tarefas, técnicas e tecnologias, a partir de estudos teóricos e didáticos.

O quadro a seguir mostra o resumo das informações identificadas, de forma mais ou menos explícita, da praxeologia regional explícita existente nos PCN para o ensino da álgebra no terceiro ciclo do Ensino Fundamental.

Quadro 1

Praxeologia matemática existente sobre equação polinomial do grau no PCN

Tipos de tarefas	Técnicas	Tecnologias
Calcular o valor numérico de expressões algébricas.	(não explícita)	Propriedade das operações numéricas.
Traduzir sentenças matemática da linguagem usual para a forma algébrica.	(não explícita)	(não explícita)

O estudo da álgebra é proposto para ser introduzido no bloco de “números e operações” por meio de atividades em que o estudante amplie os seguintes conceitos e procedimentos (Brasil, 1998, p.72):

- ✓ Utilização de representações algébricas para expressar generalizações sobre propriedades das operações aritméticas e regularidades observadas em algumas sequências numéricas.
- ✓ Compreensão da noção de variável pela interdependência da variação de grandezas.
- ✓ Construção de procedimentos para calcular o valor numérico de expressões algébricas simples.

Além de que, neste documento afirma-se que neste ciclo (6º e 7º ano) sejam desenvolvidos tarefas no sentido de permitir aos estudantes compreender a noção de variável e reconhecer a expressão algébrica como uma forma de demonstrar relações existentes entre variação de duas grandezas.

Ainda sobre o ensino de equações do 1º grau, foi verificado que o *ensino* quanto os PCN (Brasil, 1998) não fornecem elementos que favoreçam a caracterização das praxeologias matemáticas existentes.

Após as análises dos PCN que o documento de referência nacional faremos as análises dos documentos das 5 regiões brasileira (nordeste, sul, sudeste, norte e centro oeste): a nível regional nordeste: no estado de Pernambuco temos os Parâmetros Curriculares de Matemática para a Ensino Fundamental e Médio do Estado de Pernambuco

As equações de primeiro grau devem aparecer de forma natural, não como um objeto de estudo em si mesmo, mas como uma representação de um determinado problema a ser resolvido. Assim, cabe ao professor elaborar situações em que, cada vez mais, os procedimentos aritméticos sejam considerados pouco econômicos para resolvê-las, levando os estudantes à necessidade de estabelecer outros processos. É preciso, porém, levar em consideração que a passagem acima referida não se dá na forma de uma ruptura, pois há estudantes que sistematicamente buscam procedimentos aritméticos, sempre que é possível. (Pernambuco, 2012, p. 102).

Este documento acrescenta os seguintes exemplos: resolver problemas de partilha e de transformação (por exemplo: dentro de dois anos a minha idade será o dobro da idade que você tinha há dois anos atrás...), fazendo uso das representações simbólicas. Estabelecer a técnica da equivalência (metáfora da balança) para resolver equações de primeiro grau do tipo $A(x) = B(x)$, sendo $A(x)$ e $B(x)$ expressões polinomiais.

Quadro 2

Praxeologia matemática existente sobre equação polinomial do grau Pernambuco

Tipos de tarefas	Técnicas	Tecnologias
• Resolver problemas de partilha e de transformação	• Transpor termos ou coeficientes	• Propriedade das operações inversas
• Traduzir sentenças matemática da linguagem usual para a forma algébrica.	• Neutralizar termos e coeficientes	• Princípio de equivalência

O estado da Paraíba: Referencial Curricular da rede Estadual; suas diretrizes estão organizadas em Conteúdo: Equação de 1º grau com uma incógnita; capacidades específicas: identificar uma equação do primeiro grau que expressa um problema.

Nesta etapa, os estudantes devem ser levados a identificar as relações e a linguagem simbólica da Álgebra, expressando relações matemáticas através de igualdades e desigualdades.

Uma possibilidade para este estudo seria propor problemas usando balanças de dois pratos. (Paraíba, 2010, p. 146)

Quadro 3

Praxeologia matemática existente sobre equação polinomial do grau Paraíba

Tipos de tarefas	Técnicas	Tecnologias
• Relações matemáticas através de igualdades e desigualdades	(não explícita)	• Princípio de equivalência

Alagoas: Referencial Curricular da educação básica para escolas públicas neste documento as expectativas esperadas ao final do ensino fundamental. Aprendizagens básicas esperadas ao final do 9º ano do ensino fundamental Relacionar as diferentes escritas, operações e propriedades algébricas. Determinar raízes de equações e sistemas de equações do 1º e 2º grau em diferentes situações-problemas. (Alagoas, 2010, p. 76)

Quadro 4

Praxeologia matemática existente sobre equação polinomial do grau

Tipos de tarefas	Técnicas	Tecnologias
• Determinar raízes de uma equação	(não explícita)	• Propriedade das operações numéricas.

Sergipe: Referencial Curricular da rede Estadual; não faz menção a resolução de equações no 7º ano, apenas no 8º ano que esse documento faz menção as equações fracionárias; (Sergipe, 179)

Bahia: Orientações curriculares e subsídios didáticos para a organização do trabalho pedagógico no ensino fundamental de nove anos; foi organizado por eixos: o Eixo 2 - Da Álgebra à Construção das Funções e as COMPETÊNCIAS/HABILIDADES Analisar leis matemáticas que expressem a relação de dependência entre variáveis por meio da escrita algébrica; Resolver situações-problema por meio de equações (1º e 2º graus); Interpretar algumas situações-problema por equações ou inequações do primeiro grau, utilizando as propriedades da igualdade ou desigualdade, na construção de procedimentos para resolvê-las, Possibilidades Metodológicas do Eixo 2 a introdução à noção de incógnita (valor desconhecido) abre novas possibilidades de pensamento e aprendizagem neste eixo.

A partir da hipótese de que o conhecimento matemático liga-se, sempre, a algum contexto, abordar a balança em equilíbrio é significativo tanto na ideia da equação como nos procedimentos de resolução, como também sustentar os procedimentos nos princípios aditivo e multiplicativo, evitando a regra mecânica e inapropriada do “passar para o outro lado trocando o sinal”; e brincar de desenhar as balanças, construindo as equações, de forma que um grupo vai passando desafios para os demais – algo sempre válido. (Bahia, 2013, p. 128).

Quadro 5

Praxeologia matemática existente sobre equação polinomial do grau Bahia

Tipos de tarefas	Técnicas	Tecnologias
• Calcular o valor numérico de expressões algébricas	(não explícita)	• Propriedade das operações numéricas.
• Relações matemáticas através de igualdades e desigualdades	(não explícita)	• Princípio de equivalência

Piauí: matrizes disciplinares do ensino fundamental; ii. Área do conhecimento: matemática matriz da disciplina de matemática deverá ser ensinado: cálculo do valor numérico de expressões algébricas simples. (Piauí, 2013, p. 108)

Quadro 6

Praxeologia matemática existente sobre equação polinomial do grau Piauí

Tipos de tarefas	Técnicas	Tecnologias
Calcular o valor numérico de expressões algébricas	(não explícita)	Propriedade das operações numéricas.

Os estados da região nordeste que não foram encontrados os documentos das secretárias foram: Ceará; Rio Grande do Norte e Maranhão. Região Sudeste: Espírito Santo: Currículo básico escola estadual Conteúdo Básico Comum – Matemática- esta organizado assim: Álgebra as regularidades e generalizações; Cálculo literal: letra como variável e incógnita; Equação do 1 grau: conceito de igualdade e equivalência; HABILIDADES ;Procurar padrões e regularidades para formular generalizações em situações diversas, contextos numéricos e geométricos. Interpretar relações entre variáveis e fórmulas. Utilizar equações para traduzir para a linguagem algébrica uma situação-problema e ter capacidade de resolvê-la. COMPETÊNCIAS- Analisar as relações numéricas explicitá-las em linguagem materna e representá-las por meio de diferentes processos, incluindo os símbolos. Resolver problemas utilizando a aritmética e o raciocínio algébrico. (Espírito Santo, 2009, p. 95)

Quadro 7

Praxeologia matemática existente sobre equação polinomial do grau Espírito Santo

Tipos de tarefas	Técnicas	Tecnologias
Calcular o valor numérico de expressões algébricas	(não explícita)	Propriedade das operações numéricas.
Relações matemáticas através de igualdades e desigualdades	(não explícita)	Princípio de equivalência

Minas Gerais: proposta curricular de matemática do ensino fundamental - 6º a 9º ano; e dividido por Tema 2: Equações Algébricas TÓPICOS 10. Equações do Primeiro Grau HABILIDADES. Conceitos 1. Identificar a raiz de uma equação do primeiro grau. 2. Resolver uma equação do primeiro grau. 3. Resolver problemas que envolvam uma equação do primeiro grau. (Minas Gerais, 2010, p. 11);

Quadro 8

Praxeologia matemática existente sobre equação polinomial do grau

Tipos de tarefas	Técnicas	Tecnologias
Calcular o valor numérico de expressões algébricas	(não explícita)	Propriedade das operações numéricas.

Rio de Janeiro: currículo mínimo de matemática no terceiro bimestre campo algébrico simbólico equação do primeiro grau e as habilidades e competências são: - Compreender a diferença entre variável e incógnita. - Resolver equações do 1º grau por meio de estimativas mentais, balanceamento e operações inversas. - Resolver problemas significativos utilizando equações do 1º grau. (Rio de Janeiro, 2012, p. 9)

Quadro 9

Praxeologia matemática existente sobre equação polinomial do grau

Tipos de tarefas	Técnicas	Tecnologias
• Calcular o valor numérico de expressões algébricas	(não explícita)	• Propriedade das operações numéricas.
• Resolver equações do primeiro grau	(não explícita)	• Propriedade das operações inversas
• Resolver equações do primeiro grau	(não explícita)	• Princípio de equivalência

São Paulo: Currículo do estado de São Paulo: conteúdos Álgebra em o uso de letras para representar um valor desconhecido; Conceito de equação; Resolução de equações; Equações e problemas. Habilidades: Compreender o uso de letras para representar valores desconhecidos, em particular, no uso de fórmulas Saber fazer a transposição entre a linguagem corrente e a linguagem algébrica Compreender o conceito de equação a partir da ideia de equivalência, sabendo caracterizar cada equação como uma pergunta. Saber traduzir problemas expressos na linguagem corrente em equações; Conhecer alguns procedimentos para a resolução de uma equação: equivalência e operação inversa. (São Paulo, 2012, p. 60)

Quadro 10

Praxeologia matemática existente sobre equação polinomial do grau São Paulo

Tipos de tarefas	Técnicas	Tecnologias
• Calcular o valor numérico de expressões algébricas	(não explícita)	• Propriedade das operações numéricas.
• Resolver equações do primeiro grau	(não explícita)	• Princípio de equivalência
• Resolver equações do primeiro grau	(não explícita)	• Propriedade das operações inversas

REGIÃO Sul: Paraná: cadernos de expectativas de aprendizagem: conteúdos estruturantes: NÚMEROS E ÁLGEBRA; conteúdos básicos: equação e inequação do 1º grau; expectativas de aprendizagem: compreender o conceito de incógnita e o princípio de equivalência das equações. 49. Interprete e represente a linguagem algébrica no estudo das equações. (Paraná, 2012, p. 90).

Quadro 11

Praxeologia matemática existente sobre equação polinomial do grau Paraná

Tipos de tarefas	Técnicas	Tecnologias
• Calcular o valor numérico de expressões algébricas	(não explícita)	• Propriedade das operações numéricas.
• Relações matemáticas através de igualdades e desigualdades	(não explícita)	• Princípio de equivalência

Rio Grande do Sul: Referencial Curricular: Habilidades/ Competências- Reconhecer a equação do 1º grau como uma sentença matemática aberta que apresenta igualdade; Identificar os membros de uma equação com seus respectivos termos; Resolver situações problema que envolvam equação de 1º grau. Verificar a validade do resultado. Criar situações problema que possam ser resolvidas por uma equação de 1º grau. Situações de Aprendizagem- Discutir com os alunos qual o instrumento utilizado para pesar objetos. Perguntar que tipos de balanças eles conhecem e como eram as balanças antigamente. Verificar se eles conhecem o funcionamento

das balanças de dois pratos e, após a conversa, apresentar aos alunos uma balança de dois pratos com alguns pesos.

A resolução de uma equação só faz sentido se for necessária para solucionar uma situação-problema. São inúmeras as situações do dia a dia que podem ser equacionadas e solucionadas, utilizando uma equação do 1º grau. (Rio Grande do Sul, 2009, p. 128).

Quadro 12

Praxeologia matemática existente sobre equação polinomial do grau Rio Grande do Sul

Tipos de tarefas	Técnicas	Tecnologias
Calcular o valor numérico de expressões algébricas	(não explícita)	Propriedade das operações numéricas.
Relações matemáticas através de igualdades	(não explícita)	Princípio de equivalência

Apenas um estado não foi encontrado os documentos: Santa Catarina

Região Norte: Amapá: Plano curricular da Educação Básica do Estado esta disposto no terceiro bimestre como; Equação e Inequação do 1º Grau na seguinte: primeiro o conceito, segundo os elementos e o terceiro são as resoluções das equações. (Amapá, 2009, p. 39). Não sendo possível identificar os vestígios das tarefas, técnicas e tecnologias.

Rondônia: Referencial Curricular do ensino fundamental; Eixo temático números e operações Conteúdo Equações, Não sendo possível identificar os vestígios das tarefas, técnicas e tecnologias. (Rondônia, 2012, p. 209)

Tocantins: Referencial curricular para o ensino fundamental; as competências ser capaz de perceber a importância dos números, suas prioridades, suas inter-relações, seus significados e o modo como, historicamente foi construído, bem como sua eficácia na resolução de situações-problema no seu cotidiano. Habilidades resolver expressões algébricas. Resolver equações do 1º grau. Calcular o valor numérico de uma expressão algébrica. Resolver equações do 1º grau. Utilizar-se de representações algébricas para representar situações diversas. Resolver problemas utilizando-se de equações do 1º grau; conteúdos mínimos Expressões algébricas Equação do 1º grau. (Tocantins, 2009, p. 89)

Quadro 13

Praxeologia matemática existente sobre equação polinomial do grau Tocantins

Tipos de tarefas	Técnicas	Tecnologias
Calcular o valor numérico de expressões algébricas	(não explícita)	Propriedade das operações numéricas.

Os estados que não foram encontrados os documentos das secretárias foram: Amazonas; Roraima e Acre.

Considerações finais

Os resultados acima mostram no que diz respeito às relações institucionais, os resultados obtidos das análises dos documentos oficiais (nacional e regional) apontam que o ensino das equações polinomiais do primeiro grau é implicitamente demonstrado como uma ferramenta para resolver problemas de situações sociais. Além disso, esses documentos analisados não fornecem dados que favoreçam a caracterização das praxeologias matemáticas existentes em torno da

resolução de equações do primeiro grau. No entanto, podemos constatar uma evolução documentos regionais em relação aos Parâmetros Curriculares nacionais- PCN nos que concerne aos conteúdos.

As equações do primeiro grau são justificadas como uma ferramenta para resolver problemas e não tem sua organização matemática caracterizadas nos documentos oficiais.

A metáfora da balança presente em cinco documentos regionais como recurso didático e a preocupação de não utilizarem este artifício apenas como manipulação.

Referências e bibliografia

- Alagoas. (2010). Secretária de Educação. *Referencial Curricular da Educação Básica para as Escolas Públicas de Alagoas*. Política Educacional para o Estado de Alagoas. Secretaria de Estado da Educação e do Esporte. Maceió.
- Araujo, A. J. (2009). *O ensino de Álgebra no Brasil e na França: um estudo sobre o ensino de equações do 1º grau à luz da teoria antropológica do didático*. Tese de doutorado, UFPE.
- Amapá. (2009). *Secretária de Educação: Plano curricular da Educação Básica do Estado*.
- Bahia. (2013). Secretária de Educação. *Orientações Curriculares e Subsídios Didáticos para a Organização do Trabalho Pedagógico no Ensino Fundamental de Nove Anos 2013*.
- Barbosa E. J. T., & Lins A. F. (2011). *Equação do Primeiro Grau: um estudo das organizações matemática e didática*. In: Anais do XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife, PE, junho de 2011.
- Chevallard, Y. (1991). *Del Saber Sabio al Saber Enseñado*. AIQUE. Traducción: Claudia Gilman. Título original: Chevallard, Y. (1984), *La transposition didactique: Du savoir savant au savoir enseigné*, Grenoble.
- Chevallard, Y. (1999). *L'analyse des pratiques enseignantes en Théorie Anthropologie Didactique*. In : *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, pp. 221-266.
- Chevallard, Y., Bosch, M., & Gascón, J. *Estudar Matemáticas: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem*. Porto alegre: artmed, 2001.
- Brasil. (1998). Ministério da Educação. Secretaria de Educação Infantil e Ensino Fundamental. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais (5ª a 8ª Séries) Matemática*. Brasília, DF.
- Brito Menezes, A.P.A. (2006). *Contrato Didático e Transposição Didática: Inter-Relações entre os Fenômenos Didáticos na Iniciação à Álgebra na 6ª Série do Ensino Fundamental*. Tese de Doutorado, UFPE.
- D'Amore, B. (2007). *Elementos de Didática da Matemática*. Tradução: Maria Cristina Bonomi. São Paulo: Editora Livraria da Física.
- Espírito Santo. (2009). Secretária de Educação. *Currículo básico escola estadual 2009 Ensino Fundamental Anos Finais Volume 02 - Área de Ciências da Natureza*.
- Minas Gerais. (2010). *Secretária de Educação Proposta Curricular de Matemática do Ensino Fundamental - 6º a 9º ano 2010*.
- Paraíba. (2010). *Secretária de Educação Referencial. Curricular da rede Estadual 2010*.
- Paraná. (2012). Secretária de Educação. *Cadernos de expectativas de aprendizagem 2012*.

- Paraná. (2008). Secretaria de Estado da Educação. *Diretrizes Curriculares da Educação Básica*. Curitiba: Seed/DEB-PR.
- Pernambuco. (2012). Secretária de Educação *Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio do Estado de Pernambuco*.
- Piauí. (2013). Secretária de Educação. *Matrizes disciplinares do ensino fundamental 2013*.
- Rio Grande do Sul. (2009). *Secretária de Educação Referencial Curricular 2009*.
- Rio de Janeiro. (2012). Secretária de Educação. *Currículo Mínimo de Matemática 2012*.
- Rondônia. (2012). Secretária de Educação. *Referencial Curricular do ensino fundamental; 2012*.
- São Paulo. (2012). *Secretária de Educação Currículo do estado de São Paulo: 2012*.
- Sergipe. (2011). Secretária de Educação. *Referencial Curricular da rede Estadual 2011*.
- Tocantins. (2009). *Secretária de Educação Referencial curricular para o ensino fundamental 2009*.

Pensamento Algébrico e o currículo enculturador evidenciado por professores

Francisco de Moura e **Silva Junior**

E. E Prof. João Borges

Brasil

fmsj81@gmail.com

Barbara Lutaif **Bianchini**

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

Brasil

barbaralb@gmail.com

Resumo

Nosso objetivo neste artigo é apresentar os resultados de uma das etapas de uma pesquisa de doutorado, desenvolvida pelo primeiro autor e orientada pelo segundo, cuja questão de pesquisa é: Quais e como aspectos de um currículo enculturador são evidenciados por dois grupos de professores ao tratar-se do pensamento algébrico? A fundamentação teórica está composta da perspectiva cultural para o currículo de Matemática segundo descrito por Bishop (1999) e nos indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico descritos por Fiorentini, Miorim e Cristóvão (1993) e adaptados por Silva (2012). A pesquisa é de cunho qualitativo, na qual realizamos entrevistas semiestruturadas, segundo Manzini (2003), com três professores do Ensino Médio e três professores da licenciatura em Matemática, sendo escolhida uma das questões propostas na entrevista para apresentarmos neste artigo. Concluimos que a atividade intercultural de *contar*, o valor do *racionalismo* e o componente *simbólico*, foram os itens mais evidenciados pelos professores entrevistados.

Palavras chave: Educação algébrica, Pensamento Algébrico, Currículo Enculturador, Ensino Médio, Formação de Professores.

Introdução

Apresentamos neste artigo parte de uma pesquisa de doutorado que se encontra em andamento, sendo que nessa etapa investigamos quais e como aspectos de um currículo enculturador são evidenciados por dois grupos de professores ao tratar-se do pensamento algébrico, e temos resultados relativos a esta fase.

O interesse em realizarmos uma pesquisa relacionada ao pensamento algébrico ocorreu por considerarmos que o objetivo do ensino da Álgebra é desenvolver o pensamento algébrico e segundo Ponte (2005), desenvolver esse tipo de pensamento implica não só a capacidade de trabalhar com o cálculo algébrico e as funções, como a capacidade de lidar com estruturas matemáticas, relações de ordem e de equivalência aplicando-as a diferentes domínios (interpretando e resolvendo problemas). Este mesmo autor afirma também que é necessário tornar o pensamento algébrico uma orientação transversal do currículo.

Apesar da referida importância do desenvolvimento do pensamento algébrico segundo Kaput (2005), a visão tradicional da álgebra está relacionada com a aprendizagem de regras para a manipulação de símbolos, simplificações de expressões algébricas e resolução de equações. Assim, a álgebra escolar em geral tem servido para ensinar um conjunto de procedimentos que na visão dos alunos, não tem relação com outros conhecimentos matemáticos e nem com o seu mundo cotidiano.

Além disso, segundo Kaput (2005), a forma como vem sendo conduzido o ensino de álgebra tem capacitado os estudantes para produzir sequências de símbolos corretas e não tem focado na compreensão dos conceitos e do raciocínio matemático. As aplicações utilizadas são muitas das vezes artificiais, e os alunos não têm a oportunidade de refletir sobre suas próprias experiências, nem de articular os seus conhecimentos, memorizam procedimentos que são assumidos como operações sobre sequências de símbolos e resolvem problemas artificiais sem significado.

Essa discussão sobre o simbolismo algébrico no processo de ensino e aprendizagem, aliada a nossa concepção de que o pensamento e o simbolismo são indissociáveis, nos remeteu ao artigo de Bianchini e Machado (2010) intitulado “A dialética entre pensamento e simbolismo algébricos”. Nesse artigo as autoras levantam questões sobre a dialética necessária entre pensamento e simbolismo algébrico, apresentando exemplos dessa dialética pautados no modelo teórico sobre os três usos das variáveis, 3UV. Sobre esse modelo teórico, as autoras afirmam que:

- Na construção desse modelo houve preocupação em evidenciar a dependência entre a semântica e a sintaxe da concepção de variável. Cabe destacar que esta não é a única concepção importante no ensino da álgebra escolar, embora seja uma das fundamentais desse nível.
- O modelo 3UV explicita os processos que distinguem os usos das variáveis que são trabalhados nos cursos de Álgebra escolar e que auxiliam o professor a desenvolver diversas tarefas, tais como planejar o trabalho a ser realizado em sala de aula, conduzir a elaboração de atividades e produzir instrumentos diagnósticos.
- O modelo 3UV distingue três principais usos da variável: o de incógnita (ou termo desconhecido), o de número genérico e o de relação funcional (Bianchini; Machado, 2010, p. 360).

Pelo artigo mencionado observamos a importância do modelo teórico 3UV tanto na percepção dos diferentes usos das variáveis, como no planejamento e na condução das atividades a serem desenvolvidas em sala de aula, contribuindo assim no processo de ensino e aprendizagem da álgebra escolar.

Também relacionado ao processo de ensino de álgebra, encontramos o artigo de Machado e Maranhão (2013) intitulado “Capacidades algébricas fundamentais para professores”. Neste artigo as autoras afirmam que um dos maiores problemas que as instituições formadoras de professores enfrentam ao prepara-los para atuar na atual sociedade é o desenvolvimento das capacidades de discernir, organizar o pensamento e a ação em função da informação. Neste artigo as autoras apresentam a análise das respostas a um dos problemas propostos, sendo transcrito a seguir:

A soma de cem números inteiros ímpares é um número par.

1. $V() F()$

2. Justifique sua resposta. (Machado; Maranhão, 2013, p. 53)

Participaram da pesquisa dezoito professores advindos de cursos de licenciatura em Matemática de instituições distintas, sendo que após a análise das respostas destes professores foram organizadas nove categorias com a intenção de identificar informações relativas a três capacidades que as autoras consideram fundamentais do professor para o ensino de álgebra e da linguagem algébrica. As capacidades mencionadas são as seguintes:

- Justificar algebricamente as relações e conclusões.
- Discernir entre a informação válida e a inválida.
- Distinguir a informação pertinente da não pertinente. (Machado; Maranhão, 2013, p. 52)

As autoras concluíram pelas análises que há necessidade de trabalhos na formação de professores enfocando as três capacidades elencadas no artigo. Os resultados das análises realizadas levaram as autoras a pensar se e como os fundamentos da álgebra estão sendo tratados, tanto na formação inicial como na formação continuada, de professores de Matemática.

Pelos resultados apresentados no artigo, constatamos a necessidade de uma maior atenção na formação inicial de professores de Matemática, favorecendo o desenvolvimento de capacidades necessárias para atuarem com uma boa qualidade, proporcionando aos alunos uma melhor aprendizagem.

Com base nas reflexões proporcionadas pelas pesquisas mencionadas neste artigo, sentimos a necessidade de investigar como os professores, tanto do Ensino Médio como da licenciatura em Matemática, entendem o pensamento algébrico e quais as contribuições desse para o aluno.

Fundamentação teórica

Adotamos como fundamentação teórica os indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico descritos por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) em seu artigo intitulado “Contribuição para um Repensar... a Educação Algébrica Elementar” e o currículo de Matemática com enfoque cultural descrito por Bishop (1999).

Neste artigo, Fiorentini, Miorim e Miguel (1993), apresentam algumas considerações que permitem repensar a Educação Algébrica Elementar. Essas considerações são feitas a partir de uma análise comparativa entre as concepções de Educação Algébrica que se manifestaram ao longo da história do ensino de Matemática e as concepções de Álgebra subjacentes às leituras mais frequentes do desenvolvimento histórico desse campo do conhecimento matemático.

Segundo Fiorentini, Miorim e Miguel (1993):

A tendência da Educação Algébrica tem sido acreditar que o pensamento algébrico só se manifesta e desenvolve através da manipulação sintática da linguagem concisa e específica da Álgebra. Entretanto essa relação de subordinação do pensamento algébrico a linguagem desconsidera o fato de que, tanto no plano histórico quanto no pedagógico a linguagem é, pelo menos a princípio, a expressão de um pensamento. Acreditamos subsistir entre pensamento algébrico e linguagem não uma relação de subordinação, mas uma relação de natureza dialética, o que nos obriga, para melhor entendê-lo, colocar a questão de quais

seriam os caracterizadores de um tipo de pensamento que poderia ser qualificado como algébrico (Fiorentini, Miorim, Miguel, 1993, p. 85).

Os autores expõem então elementos considerados por eles como caracterizadores do pensamento algébrico, sendo eles:

Percepção de regularidades, percepção de aspectos invariantes em contraste com outros que variam, tentativa de expressar ou explicitar a estrutura de uma situação problema e a presença do processo de generalização” (Fiorentini, Miorim, Miguel, 1993, p. 85).

Nesse mesmo sentido o NCTM (2000) menciona que o objetivo do estudo da Álgebra é desenvolver o pensamento algébrico nos alunos.

Segundo o NCTM (2000), o pensamento algébrico diz respeito ao estudo das estruturas, à simbolização, à modelação e ao estudo da variação:

- Compreender padrões, relações e funções (Estudo das estruturas),
- Representar e analisar situações matemáticas e estruturas, usando símbolos algébricos (Simbolização),
- Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas (Modelação),
- Analisar mudança em diversas situações (Estudo da variação). (p. 37)

Silva (2012), membro do Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA), em sua pesquisa intitulada “Pensamento Algébrico e equações no Ensino Fundamental II: uma contribuição para o Caderno do professor de Matemática do oitavo ano”, teve por objetivo evidenciar indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico no tópico “Equações Algébricas de 1º grau” do Caderno do professor de Matemática adotado na docência do Ensino Fundamental da rede pública do Estado de São Paulo.

Para analisar as atividades selecionadas Silva (2012) adaptou os aspectos categorizadores do pensamento algébrico descritos por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) e os três usos da variável, segundo Usiskin et al. (2005), apresentando o seguinte quadro, utilizado também em nossa pesquisa:

Quadro 1

Indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico

Indicador	A atividade possibilita que o professor conduza os alunos a:
1	Estabelecer relações/comparações entre as expressões numéricas/algébricas em língua natural ou padrões geométricos.
2	Perceber e tentar expressar estruturas aritméticas/algébricas correspondentes a uma situação-problema.
3	Produzir mais de um modelo aritmético/algébrico para uma mesma situação-problema.
4	Produzir vários significados para uma mesma expressão numérica/algébrica.
5	Interpretar uma igualdade como equivalência entre duas grandezas ou entre duas expressões numéricas/algébricas.
6	Transformar uma expressão aritmética/algébrica em outra equivalente mais simples.
7	Desenvolver algum tipo de processo de generalização.

8	Perceber e tentar expressar regularidades ou invariâncias.
9	Perceber o uso da varável como incógnita.
10	Perceber o uso da variável como número genérico.
11	Perceber o uso da variável como relação funcional.
12	Desenvolver a linguagem simbólica ao expressar-se matematicamente.

Fonte: Silva, 2012, p.41.

A leitura da pesquisa de Silva (2012) proporcionou um maior redimensionamento dos indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico considerados em nossa pesquisa. Dessa forma quando fizermos referência ao pensamento algébrico estaremos adotando os aspectos categorizadores mencionados por Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) e reforçados no NCTM (2000) e adaptados por Silva (2012). Vale ressaltar também que estes categorizadores serão utilizados para analisar as entrevistas propostas aos professores participantes da pesquisa.

Acreditamos ser necessário relacionar as dimensões social e cultural no desenvolvimento do pensamento algébrico. Nesse mesmo sentido, Bishop (1999) afirma que currículos com um enfoque cultural ressaltam a necessidade de se explicitarem os valores da cultura matemática, priorizam o aspecto individualizador e personalizador do ensino e buscam relacionar significativamente as pessoas e sua cultura matemática.

A partir desse enfoque, a Educação Matemática, segundo Bishop (1999), deverá contemplar: a existência de personalidades individuais; o reconhecimento dos estudantes como aprendizes ativos; e o desenvolvimento do conhecimento cultural, por meio da interação social com elementos de seu grupo. Acreditamos ser esse ponto um aspecto importante para justificar a importância desse enfoque no ensino de Matemática.

Bishop (1999) atribui a esse processo criativo e interativo o nome de enculturação matemática. Assim, nesse artigo, quando fizermos menção ao enfoque cultural estaremos nos referindo ao descrito por Bishop (1999).

Nessa abordagem cultural, Bishop (1999) destaca seis atividades interculturais relacionadas com o entorno e cultura matemática: *contar, localizar, medir, desenhar, jogar e explicar*. O autor menciona também seis valores: *racionalismo, objetismo, controle, progresso, abertura e mistério*.

O primeiro par de valores é classificado por Bishop (1999) como ideologia do *racionalismo* e ideologia do *objetismo*. O *racionalismo* pode ser caracterizado, segundo o autor, pela ênfase no raciocínio dedutivo, além disso, está relacionado com os argumentos lógicos, com os processos de abstração, teorização e demonstração. Já o *objetismo*, está relacionado às imagens e objetos materiais, considerando que as ideias não se originam apenas das relações do indivíduo com seu meio.

O segundo par de valores é composto, segundo Bishop (1999) pelos sentimentos de *controle* e de *progresso*. Ele menciona que o entendimento e o domínio dos conhecimentos matemáticos provocam o sentimento de segurança e controle, não somente no interior da Matemática, mas também ao se perceber que determinados fenômenos obedecem a leis derivadas das matemáticas. Sobre o sentimento de *progresso*, Bishop (1999) afirma que este pode ser identificado quando ao mobilizar determinados conhecimentos para resolver um problema, o aluno faz novas descobertas, percebe novas propriedades e constrói um novo saber.

O terceiro par de valores é classificado por Bishop (1999) como sociologia da *abertura* e sociologia do *mistério*. Ele afirma que o valor referente à sociologia da *abertura* deixa claro que o conhecimento matemático é acessível, aberto e pertence a todos. Sobre a sociologia do *mistério*, Bishop (1999) ressalta que essa sensação não só é sentida pelos estudantes, mas também pelos matemáticos antes ou no decorrer de suas investigações. A sociologia do *mistério* pode contribuir para despertar no aluno o interesse pela busca do desconhecido, pela construção de novas ideias, além de favorecer a explicação e a socialização das descobertas.

Pela relação dos valores mencionados com as seis atividades interculturais emergem cinco princípios: *representatividade*, *formalismo*, *acessibilidade*, *poder explicativo* e *concepção ampla e elementar*, nos quais um currículo baseado nos processos de enculturação deve considerar.

O princípio da *representatividade* está relacionado com a representação da cultura matemática, ou seja, com as ideias simbólicas e teóricas, associadas aos seis valores já mencionados: *racionalismo*, *objetismo*, *controle*, *progresso*, *abertura* e *mistério*.

Com relação ao princípio do *formalismo*, o currículo enculturador, deve ter, segundo Bishop (1999), o nível formal como objetivo, porém também devem ser feitas conexões com o nível informal e promover a introdução ao nível técnico.

O princípio da *acessibilidade*, segundo Bishop (1999), tem como pressuposto que para ser enculturador, o currículo de Matemática deve ser acessível a todos os alunos. Nessa perspectiva é necessário iniciar os alunos na cultura formal por meio de situações de aprendizagem simples, as quais propiciem que o estudante estabeleça relações entre o novo e o vivenciado, partindo então em seguida para situações mais complexas.

O princípio do *poder explicativo* leva em consideração que o currículo enculturador deve promover a argumentação, que ocorre por meio da explicação de ideias já construídas. Ao explicar o estudante expõe suas ideias, estabelece relações entre a Matemática e suas experiências cotidianas, encontrando justificativas conceituais para seus argumentos e atribuindo assim significado aos conceitos matemáticos estudados.

Sobre o quinto princípio, denominado *concepção ampla e elementar*, Bishop (1999) afirma que o currículo de Matemática ao invés de ser exigente e limitado, deve ser relativamente amplo e elementar.

Para satisfazer todos os cinco princípios: da *representatividade*, do *formalismo*, da *acessibilidade*, do *poder explicativo* e da *concepção ampla e elementar*, Bishop (1999) estrutura um currículo de Enculturação Matemática em três componentes: *simbólico*, *social* e *cultural*.

O componente *simbólico* do currículo de enculturação, segundo Bishop (1999) está baseado nos conceitos organizadores do currículo como referência de conhecimento.

Já o componente *social*, na opinião de Bishop (1999), pode ser mais bem desenvolvido com a intenção de que os alunos participem de maneira adequada por meio do desenvolvimento de projetos. A participação em projetos favorece a atividade reflexiva, pois mediante a investigação e a documentação de uma situação social e com o apoio do professor o aluno pode iniciar o processo de análise crítica que é tão necessário no desenvolvimento do pensamento algébrico.

Por outro lado, segundo Bishop (1999), o componente *cultural*, exemplifica, o metaconceito da matemática como fenômeno existente em todas as culturas e introduz a ideia técnica de cultura Matemática com seus valores de *abertura e mistério*.

É necessário a um currículo de Enculturação Matemática, em sua *componente cultural*, segundo Bishop (1999), mostrar a natureza da Matemática como cultura, o tipo de relação com as abstrações que tem os matemáticos, o fato de que as ideias matemáticas são inventadas, indique como, ou talvez por que, se geraram estas ideias e que permita refletir acerca do que é a Matemática.

Para Bishop (1999), estes três componentes: *simbólico, social e cultural*, ainda que sobrepostos e em interação no currículo de enculturação são necessários e suficientes para criar um currículo que possa oferecer uma Enculturação Matemática para todos os estudantes. É necessário também para Bishop que esses três componentes sejam tratados de forma equilibrada.

Dessa forma ao analisarmos as entrevistas propostas a professores do Ensino Médio e a professores que ministram aulas na licenciatura em Matemática, procuramos identificar se e como os aspectos de um currículo enculturador são evidenciados, bem como, se os componentes de um currículo enculturador são tratados de forma equilibrada.

Procedimentos metodológicos

Nesta pesquisa realizamos entrevistas semiestruturadas com seis professores, sendo que três ministram aulas no Ensino Médio e três na licenciatura em Matemática.

Escolhemos entrevistar os professores do Ensino Médio para investigar quais aspectos de um currículo enculturador são evidenciados por eles ao fazerem menção do pensamento algébrico. Entrevistamos também professores que ministram aulas na licenciatura em Matemática, pois são eles que formam os futuros professores, buscamos então comparar as respostas dadas por esses dois grupos de professores.

A realização da pesquisa foi aprovada pelo comitê de ética da instituição em que a investigação foi desenvolvida e cada sujeito aceitou participar. Vale ressaltar também que utilizamos pseudônimos para apresentar as ideias de cada professor.

Analisando o perfil de cada professor constatamos que as professoras Monica e Andreia que ministram aulas para alunos do Ensino Médio, lecionam há vinte anos, enquanto que o professor Geraldo leciona há vinte e três anos no Ensino Médio. Com relação aos professores que ministram aulas no curso de licenciatura em Matemática constatamos que os professores Douglas e Rodrigo lecionam há quinze anos e o professor Guilherme leciona há cinco anos.

Segue então a questão, seguida das respostas dos professores e da respectiva análise:

O que você entende ao ler a expressão “Pensamento Algébrico”? Em sua opinião, qual a contribuição do desenvolvimento do Pensamento Algébrico para o aluno?

Geraldo: O aluno ganha quando desenvolve o pensamento algébrico, quando ele consegue manipular alguma coisa para chegar a um resultado esperado, acho interessante, pois pode contribuir no desenvolvimento do raciocínio lógico.

Monica: É a Linguagem da Matemática, o porquê das ideias matemáticas. Por exemplo, a importância dos casos de fatoração, o que significa a expressão $2x+1$ em diferentes contextos. Considero que não é dada a devida atenção ao pensamento algébrico. É a escrita

matemática. Não a decoreba!!! Deve ser dada mais ênfase nos porquês e na generalização de ideias matemáticas.

Andréia: É uma coisa mais abstrata, trabalha com valores desconhecidos. Dependendo da idade do aluno, maturação e série, pode se desenvolver um pensamento mais complexo. Um pensamento complexo em uma estrutura que deve ser familiar ao aluno. O pensamento algébrico contribui no desenvolvimento do raciocínio lógico, pois é necessário mobilizar conhecimentos algébricos para determinar os valores desconhecidos, o que contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico e dessa forma também desenvolve o pensamento algébrico no aluno.

Guilherme: Entendo como um tipo de pensamento em que é necessário mobilizar conhecimentos como generalização, obtenção de uma expressão geral de uma determinada situação, abstrair uma ideia pela observação de uma regularidade e então escrever uma lei matemática que representa um determinado fenômeno. Com base em casos particulares abstrair um caso geral. Generalizar padrões.

Douglas: Ao ler a expressão pensamento algébrico vem à mente aquelas expressões horrendas para simplificar, de forma maçante e chata, até ao prazer de um aluno entender que uma expressão algébrica tem a ver com uma figura, com um objeto concreto, um exemplo clássico disso são os produtos notáveis, quando o aluno consegue enxergar isso em termos de área, nesse sentido. A importância de que o aluno perceba as relações das expressões algébricas com figuras geométricas.

Rodrigo: Não existe uma devida exploração do pensamento algébrico na Educação Básica. Trabalha-se muito com o “x” e o “y”, mas deixa-se de explorar que com o pensamento algébrico, é possível transformar uma situação-problema na linguagem usual, numa linguagem corrente e trazendo ela para a linguagem algébrica, onde serão utilizadas nomenclaturas, símbolos, letras. Então eu acredito que uma falha no ensino de álgebra é falta do trabalho com essa transformação. Uma vantagem do desenvolvimento do pensamento algébrico é a associação com o mundo que rodeia o aluno, pois ele pode relacionar uma situação do dia-a-dia com uma expressão algébrica, por exemplo, eu vou à feira comprar dois quilos de tomate e um quilo de batata, então o aluno poderia transformar isso utilizando o pensamento algébrico para facilitar o dia-a-dia dele. Um ônibus que o aluno vai a algum lugar, um metrô que ele vai pegar, ou até mesmo a distância que ele vai percorrer, e tudo isso pode envolver o pensamento algébrico.

A respeito da segunda parte da questão A, “Qual a contribuição do desenvolvimento do pensamento algébrico para o aluno?” constatamos as seguintes respostas:

Geraldo: O pensamento algébrico pode contribuir no desenvolvimento do raciocínio lógico.

Monica: O pensamento algébrico abre horizontes nas ideias matemáticas. Tem início com o valor desconhecido, no começo com figuras, quadradinhos, estrelinhas e depois com o uso de letras. Deve ser dada mais ênfase nos porquês, na generalização de ideias matemáticas.

Andréia: O pensamento algébrico contribui no desenvolvimento do raciocínio lógico, pois é necessário mobilizar conhecimentos algébricos para determinar os valores desconhecidos.

Guilherme: O pensamento algébrico auxilia na observação de regularidades e generalização de padrões, bem como, escrever a expressão que representa um determinado fenômeno.

Douglas: Desenvolver estratégias para simplificação de expressões algébricas e estabelecer relações entre as expressões algébricas e as figuras geométricas.

Rodrigo: Auxilia no trabalho de situações em que o aluno precisa escrever a expressão algébrica que representa determinada situação-problema.

Analisando as respostas sobre a questão A dadas pelos professores, identificamos a presença dos seguintes indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico: 1, 2, 6, 7, 8, 9, 10, e 12.

O indicador 1 foi evidenciado pelo professor Douglas, que ministra aulas na licenciatura em Matemática. A presença desse indicador foi identificada quando o professor Douglas menciona a importância de que o aluno estabeleça relações entre expressões algébricas e as figuras geométricas, como exemplo, o professor cita o estudo dos produtos notáveis.

O indicador 2 foi destacado por dois professores que ministram aulas na licenciatura em Matemática, sendo eles os professores Guilherme e Rodrigo. A presença desse indicador foi identificada na resposta dos professores, ao afirmarem a necessidade de que o aluno seja colocado em situações em que necessite escrever a expressão matemática, que representa uma dada situação-problema.

O indicador 6 foi identificado na resposta do professor Douglas ao mencionar que uma das ideias que vem em mente ao ler a expressão pensamento algébrico é a simplificação de expressão algébricas.

Os indicadores 7 e 8 foram evidenciados na resposta dos professores Guilherme (que ministra aula na licenciatura em Matemática) e Monica (que leciona para o Ensino Médio) ao afirmarem a importância do pensamento algébrico na generalização de ideias matemáticas, necessitando para isso que se observe regularidades em um determinada situação.

O indicador 9 foi identificado na resposta dos professores Geraldo, Monica e Andréia (que lecionam no Ensino Médio) e dos professores Douglas e Rodrigo (que ministram aulas na licenciatura em Matemática). Esse indicador foi observado ao relatarem que o pensamento algébrico está relacionado à determinação do valor desconhecido em uma determinada equação.

O indicador 10 foi evidenciado na resposta dos professores Guilherme (que ministra aula na licenciatura em Matemática) e Monica (que leciona para o Ensino Médio) ao afirmarem a importância do pensamento algébrico na generalização de ideias matemáticas, o que nos remete à ideia do uso da variável como número genérico.

Por fim, o indicador 12 foi observado na resposta de todos os professores entrevistados, pois, todos mencionam a ideia de desenvolver a linguagem simbólica ao expressar-se matematicamente.

Foram identificadas duas das atividades interculturais descritas por Bishop (1999), sendo elas: *contar* e *desenhar*. A atividade intercultural de *contar* foi observada na resposta de todos os professores entrevistados, enquanto que, a atividade intercultural de *desenhar*, foi verificada pela resposta do professor Douglas, ao mencionar a importância de que o aluno perceba as relações do estudo dos produtos notáveis com as figuras geométricas, que está colocado por Bishop como um dos itens da atividade intercultural de *desenhar*.

Foram evidenciados dois dos valores descritos por Bishop (1999) sendo eles: *racionalismo* e *objetismo*. O valor do *racionalismo* foi identificado nas respostas dos professores Geraldo, Monica e Andréia (que ministram aula no Ensino Médio) e do professor Guilherme (que ministra

aula na licenciatura em Matemática). Já o valor do *objetismo* foi observado na resposta dos professores Douglas e Rodrigo (que ministram aulas na licenciatura em Matemática).

O valor do *racionalismo* foi identificado pela afirmação dos professores sobre a contribuição do pensamento algébrico no desenvolvimento do raciocínio lógico, seja ele indutivo ou dedutivo, bem como na ideia de abstrair regularidades para generalizar ideias matemáticas. O valor do *objetismo* foi observado pela preocupação com a visualização das expressões algébricas com a utilização de figuras geométricas, bem como, pela afirmação de que o desenvolvimento do pensamento algébrico é importante para o aluno, pois ajuda a expressar situações que ocorrem em sua vida cotidiana, mostrando assim uma preocupação em apresentar uma aplicação direta do assunto estudado.

Notamos a presença de dois princípios de um currículo enculturador, sendo eles: *acessibilidade* e *representatividade*. O princípio da *acessibilidade* foi identificado na resposta da professora Andréia, no momento em que ela menciona a preocupação com o nível de complexidade do desenvolvimento do pensamento algébrico, pois segundo a professora, diversos fatores devem ser levados em consideração nesse processo, como por exemplo: idade, série e maturação. Já o princípio da *representatividade* foi observado na resposta do professor Douglas, ao mencionar a relação dos produtos notáveis com as figuras geométricas.

Foram evidenciados dois componentes de um currículo enculturador, o componente *simbólico* e o componente *cultural*. O componente *simbólico* foi observado na resposta de todos os professores entrevistados, enquanto que o componente *cultural* foi identificado na resposta da professora Monica (que ministra aula no Ensino Médio), ao afirmar que o desenvolvimento do pensamento algébrico contribui no entendimento dos porquês das ideias matemáticas.

Constatamos também ao analisarmos as entrevistas dos professores, no que diz respeito ao pensamento algébrico, que o professor Geraldo entende esse tipo de pensamento como manipulação de símbolos e desenvolvimento do pensamento matemático por meio do uso de letras, e que este contribui no desenvolvimento do raciocínio lógico. Por sua vez a professora Monica associa expressões como linguagem e escrita matemática, fatoração e generalização. A resposta dada pela professora Andreia nos remete às ideias de abstrair, encontrar o valor desconhecido em uma equação e desenvolver o raciocínio lógico.

Com relação aos professores que ministram aulas no curso de licenciatura em Matemática, observamos que o professor Guilherme, ao mencionar o que entende ao ler a expressão “pensamento algébrico”, associa termos como generalização, abstração, observação de regularidades e representação de um determinado fenômeno por meio de uma lei matemática. O professor Douglas, por outro lado, associa expressões como simplificação de expressões algébricas, produtos notáveis e relações das expressões algébricas com figuras geométricas. O professor Rodrigo associa termos como linguagem algébrica, utilização de símbolos e a escrita de uma expressão algébrica que representa determinada situação problema.

Considerações Finais

Nesse artigo nosso objetivo foi apresentar os resultados de uma das etapas de uma pesquisa de doutorado em que realizamos entrevistas semiestruturadas com seis professores, investigando quais aspectos de um currículo enculturador seriam evidenciados pelos professores entrevistados ao explicitarem suas ideias sobre o pensamento algébrico.

Analizando então a questão “O que você entende ao ler a expressão “Pensamento Algébrico”? Em sua opinião, qual a contribuição do desenvolvimento do Pensamento Algébrico para o aluno?”, identificamos o predomínio de dois indicadores de desenvolvimento do pensamento algébrico, sendo eles: desenvolver a linguagem simbólica ao expressar-se matematicamente (indicador 12) e perceber o uso da variável como incógnita (indicador 9).

Constatamos pela análise também a presença de duas atividades interculturais, *contar* e *desenhar*. A atividade intercultural de *contar* foi a mais evidenciada, sendo explicitada por todos os professores entrevistados. Com isso, conjecturamos que ao trabalhar com o pensamento algébrico são valorizados itens como, representações algébricas, operações numéricas, equações e conjuntos numéricos.

Observamos a presença de dois valores de um currículo enculturador, o *racionalismo* e o *objetismo*, sendo que o valor do *racionalismo* foi o predominante, sendo observado na resposta dos professores Geraldo, Monica e Andréia, que ministram aulas no Ensino Médio, e na resposta do professor Guilherme, que ministra aula no curso de licenciatura em Matemática. O valor do *objetismo* foi detectado na resposta dos professores Douglas e Rodrigo, que ministram aulas no curso de licenciatura em Matemática. A presença desses dois valores permite afirmarmos que, ao tratar do pensamento algébrico, os professores evidenciam o par concreto/abstrato, com predomínio da capacidade de abstrair, fato esse também sugerido por Bishop (1999), quando menciona que o currículo de matemática deve destacar o *racionalismo* acima do *objetismo*.

Os princípios de um currículo enculturador foram pouco evidenciados nas respostas dadas pelos professores entrevistados, sendo observados apenas os princípios da *acessibilidade* (evidenciado pela professora Andreia) e o princípio da *representatividade* (evidenciado pelo professor Douglas). Esse fato nos permite inferir que se privilegia no tratamento do desenvolvimento do pensamento algébrico a preocupação em tornar esse estudo claro e acessível a todos, favorecendo um bom relacionamento entre professor e aluno, facilitando assim as intervenções necessárias no processo de ensino e aprendizagem. Também se privilegia ao tratar o pensamento algébrico que sejam feitas relações entre o conteúdo matemático estudado com outros conteúdos da própria Matemática.

O componente *simbólico* foi evidenciado na resposta de todos os professores entrevistados, sendo que o componente *cultural* foi destacado na resposta de apenas uma professora, a professora Monica, que ministra aula no Ensino Médio. Já o componente *social* não ficou explicitado na resposta dada pelos professores. Esse predomínio do componente *simbólico* nos permite afirmar que o tratamento com o pensamento algébrico é fortemente focado em apenas um componente, o *simbólico*, predominando a manipulação de símbolos e a resolução de equações. Lembrando que Bishop (1999) sugere um tratamento equilibrado entre os três componentes.

Concluimos então ao analisar as respostas dos professores entrevistados, que ao tratarem do pensamento algébrico, acreditam que esse pode contribuir no desenvolvimento da linguagem simbólica, por meio de manipulação de símbolos, resolução de equações e pelo tratamento dado às representações algébricas. Notamos também que pelo tratamento com esses itens o professor deverá levar o aluno a perceber o uso da variável como incógnita, estabelecer relações entre o conteúdo matemático estudado e outros conteúdos da própria Matemática e proporcionar um ambiente agradável em sala de aula, facilitando as interações entre professor e aluno, bem como, entre alunos, tratando também os conteúdos de forma clara e acessível a todos os estudantes.

Consideramos fundamental que ocorra uma tomada de consciência dos professores de que a álgebra é algo mais amplo e tem aplicações nos diferentes ramos da Matemática.

Referências

- Bianchini, B. L., & Machado, S. D. A. (2010). A Dialética entre pensamento e simbolismos algébricos. *Educação Matemática Pesquisa*, 12, 354-368.
- Bishop, A. J. (1999). *Enculturación Matemática: a Educação Matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: A & M Gràfic.
- Fiorentini, D., Miorim, M. A., & Miguel, A. (1993). Contribuição para um repensar a Educação Algébrica Elementar. *Pro-posições*, 4(1), 78-91. Campinas: Cortez Editora.
- Kaput, J. (2005). *Teaching and learning a new algebra with understanding*. Disponível em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DA-TEXTOS%5CKaput_99AlgUnd.pdf. Acesso em 15 dez. 2013.
- Machado, S. D. A., & Maranhão, M. C. S. A. (2013). Capacidades algébricas fundamentais para professores. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 8, 50-63.
- Manzini, E. J. (2003). Considerações sobre a elaboração de roteiro para entrevista semi-estruturada. In M. C. Marquenezine, M. A. Almeida, & S. Omote (Orgs.), *Colóquios sobre pesquisa em Educação Especial* (pp. 11-25). Londrina: eduel.
- NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.
- Ponte, J. P. (2005). Álgebra no currículo escolar. *Educação e Matemática*, 85, 36-42. Disponível em <http://pt.scribd.com/doc/201429534/Algebra-no-curriculo-escolar-2>. Acesso em 08 fev. 2013.
- Silva, A. Z. (2012). *Pensamento algébrico e equações no Ensino Fundamental: uma contribuição para o Caderno do Professor de Matemática do oitavo ano* (Dissertação de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). 105p. Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Produção de material para o ensino de Cálculo

Sonia Barbosa Camargo **Igliori**

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

Brasil

sigliori@pucsp.br

Marcio Vieira de **Almeida**

Pontifícia Universidade Católica de São Paulo

Brasil

marcioalmeidas@gmail.com

Resumo

Este artigo apresenta um material produzido, com o uso do computador, para o ensino de conceitos do Cálculo, no qual encontra-se, por exemplo, a construção com o GeoGebra do gráfico de uma função contínua não diferenciável em todos os pontos de seu domínio, com o intuito de explorar a relação diferenciabilidade/continuidade de funções reais. Esse material é embasado em referências teóricas propostas por David Tall e colaboradores, e na escolha de um *software* adequado a tais referências. A noção de retidão local, por exemplo, é evocada para tratar do conceito de derivada. Espera-se com este artigo contribuir com a ampliação necessária da produção de materiais para o ensino que levem em conta resultados de pesquisas da Educação Matemática.

Palavras chave: Ensino Superior, Conceitos de Cálculo, uso do GeoGebra, David Tall.

Introdução

Este artigo apresenta um resultado parcial de uma pesquisa de doutoramento realizada no âmbito do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática da PUC/SP. É problemática dessa pesquisa a necessidade de elaborar material que visem preparar a Matemática para os estudantes (Wilkelmann, 1994); existência de dificuldades relativas à aprendizagem de conceitos do Cálculo Diferencial e Integral, pois eles possuem uma “condição privilegiada na formação do pensamento matemático avançado” (Igliori, 2009, p. 13).

O alvo da pesquisa é o desenvolvimento de materiais para o ensino de conceitos de Cálculo com o *software* de Geometria Dinâmica, GeoGebra. A escolha desse *software* deve-se ao fato dele ser gratuito, possuir interface simples e intuitiva e possibilitar o trabalho em conjunto da Geometria, da Álgebra e do Cálculo. Esse *software* é munido das ferramentas necessárias para o desenvolvimento das atividades deste artigo e possibilita a replicação das mesmas, pois ele não requer computadores “poderosos” e possui uma versão *mobile* para dispositivos móveis (como, *smartphones* e *tablets*). Além disso, o *software* possibilita a elaboração e modificação de *applets*, tanto para uso em sala de aula quanto para disponibilizar em *websites* da *internet*.

A pesquisa se norteia por elementos teóricos desenvolvidos por Tall e colaboradores que auxiliam a fundamentar a maneira pela qual o computador pode ser utilizado para o desenvolvimento de abordagens de ensino com características específicas nomeadas de abordagens cognitivas, sendo essa uma abordagem para o currículo que considera o estado

cognitivo atual do aprendiz e as estruturas do domínio de conhecimento dele de uma maneira apropriadas à aprendizagem (Tall, 1986, p. 71).

Posteriormente, em Tall (2010), ele denominou outro tipo de abordagem para o ensino de conceitos do Cálculo indicada como uma

[...] abordagem sensível ao cálculo é construída na evidência de nossos sentidos humanos e utiliza esses *insights* como uma base significativa para vários desenvolvimentos posteriores, do cálculo prático para aplicações para o desenvolvimento teórico na análise matemática e até a abordagem lógica na utilização dos infinitesimais. (Tall, 2010, p. 1, tradução nossa).

O exemplo aqui apresentado foi explorado em Leyva e Padilha (2013) e está disponível, no sítio¹. Em Iglori e Almeida (2014) é apresentada, detalhadamente, a construção da função “manjar branco” com o *software* GeoGebra, e também é possível ver outra maneira de construir essa função no sítio². O que diferencia o material apresentado neste artigo é o embasamento teórico segundo Tall (1982) para o uso do computador no ensino do Cálculo.

O uso do computador no ensino segundo Tall

O computador pode contribuir para o desenvolvimento de abordagens sensíveis, visto que por meio de *softwares* adequados é possível desenvolver materiais significativos para um dado domínio de conhecimento levando em consideração os obstáculos conhecidos e procurando resolver eventuais conflitos cognitivos potenciais de forma adequada (Tall, 1986, p. 71).

A potencialidade da utilização dos computadores no ensino dos tópicos avançados da Matemática e no que se refere à aprendizagem é reforçada pelo pesquisador inglês, quando diz que é possível

[...] utilizar os computadores para visualizar conceitos matemáticos de maneira útil no Cálculo e em Análise. A utilização criativa dos softwares, que plotam gráficos, e das calculadoras gráficas tem permitido aos estudantes lidar de maneira significativa com conceitos como a diferenciação por meio da noção de “retidão local”, integração por meio da soma de áreas, e resolver equações diferenciais (de 1.^a ordem) por meio da visualização da construção das curvas solução com um gradiente dado. Durante esse tempo, me tornei cada vez mais consciente do conceito imagem limitado oferecido por gráficos plotadores de gráficos que só desenham gráficos razoavelmente suaves dados por fórmulas (Tall, 1993, p. 2, tradução nossa).

Nessa perspectiva, um computador, munido de um *software* adequado, pode ser utilizado “para propiciar imagens que auxiliarão no desenvolvimento de tópicos do Cálculo e da Análise” (Almeida, 2013, p. 114).

Em Tall (2000) foi apresentada outra característica que determinados ambientes computacionais possuem e que pode ser utilizada para promover o desenvolvimento cognitivo dos aprendizes. Tall diz que os computadores

[...] podem executar quaisquer algoritmos de forma rápida e eficiente, além de exibir o resultado final com uma gama de diferentes representações. Por exemplo, os resultados podem ser representados visualmente e manipulados fisicamente. Utilizando um mouse é

¹ Endereço eletrônico: <http://users.dickinson.edu/~richesod/math361/nowherediff.html>.

² Endereço eletrônico: <http://www.geogebraTube.org/student/m51030>.

possível ao estudante construir relações corporificadas que fazem parte de uma estrutura conceitual mais rica e ampla (Tall, 2000, p. 10, tradução nossa).

Softwares, que provêm um retorno imediato às alterações realizadas pelo usuário, são denominados pelo pesquisador como organizadores genéricos³, que é “um ambiente (ou micromundo⁴) que permite ao aprendiz manipular *exemplos* e (se possível) *contraexemplos* de um conceito matemático específico ou de um sistema de conceitos relacionados” (Tall, 2000, p. 10, tradução nossa, grifo do autor). O pesquisador considera parte do desenvolvimento de abordagens cognitivas a utilização de organizadores genéricos, pois elas “dão ao aprendiz experiências apropriadas de modo que ele está cognitivamente pronto para novos conceitos matemáticos quando eles são introduzidos” (Tall, 1986, p. 5, tradução nossa).

Para o desenvolvimento de um organizador genérico é necessário selecionar uma ideia importante e essencial, que será o foco da atenção do estudante. Num primeiro momento, essa ideia não é, necessariamente, fundamental para a teoria matemática, porém, ela auxilia o sujeito a desenvolver intuições apropriadas ao desenvolvimento teórico. Segundo essas características, Tall formulou a noção de raízes cognitivas como “uma unidade cognitiva que é (potencialmente) significativa ao estudante naquele momento, no entanto deve conter sementes de uma expansão cognitiva para definições formais e desenvolvimento teórico futuro” (Tall, 2000, p. 11, tradução nossa).

Tall (2001) destaca a importância dos aspectos sensório-motores e visuais, na composição do pensamento matemático, e que esses atuam numa interface que utiliza o computador. Por meio de ações simples, como, por exemplo, clicar em determinado local e a utilização do teclado para atribuir um valor a uma variável, “fornecem suporte para conceitos teóricos de alto nível” (Tall, 2001, p. 211, tradução nossa).

A manipulação simbólica, que foi ampliada na década de 80, é outra característica dos ambientes computacionais destacada pelo pesquisador. Essa aprimorou a realização de cálculo numérico dos computadores. Além disso, naquela época, Tall revela-nos a seguinte crença: “Havia a crença generalizada de que o computador poderia acabar com toda a desordem desnecessária de cálculos e manipulações, permitindo ao indivíduo se concentrar mais em ideias essenciais” (Tall, 2001, p. 212, tradução nossa). Apesar dessa crença, Tall revela um perigo, existente na utilização de determinados *softwares*, que realizam manipulações simbólicas: apesar deles reduzirem o “fardo” das manipulações simbólicas pelo sujeito, eles podem substituir um procedimento realizado com lápis e papel por uma sequência de teclas digitadas (Tall, 2001, p. 213).

Com o intuito de reduzir a tensão cognitiva do aprendiz em um currículo de Matemática que utiliza o computador, Tall formulou o Princípio da Construção Seletiva⁵. Com esse princípio, o educador deve elaborar um ambiente no qual o aprendiz possa focar em determinada parte da teoria, ao passo que determinados processos subjacentes, que não são o objetivo do educador naquele momento, são executados pelo computador (Tall, 2001, p. 213). Um exemplo de utilização desse princípio, relatado por Tall, aconteceu na pesquisa de Gray e Pitta (1997 *apud*

³ Tradução do termo original *generic organisers*.

⁴ Esse termo é utilizado pelo pesquisador no sentido que Papert (1980, p. 117 *apud* Tall, 1986) como “um mundo autossuficientes no qual certas questões são relevantes e outras não”.

⁵ Tradução para o termo original *The Principle of Selective Construction* (Tall, 1993 *apud* Tall, 2001, p. 222)

Tall, 2001). Nessa pesquisa, o *software* realizava os cálculos e o sujeito concentrava-se nas relações numéricas apresentadas e não nos processos de contagem que faziam parte de repertório de estratégias dele.

Outra característica valiosa dos ambientes computacionais é que eles possibilitam o desenvolvimento de atividades de experimentação. Por meio de atividades adequadas, o sujeito pode observar determinado fenômeno e atribuir sentido a ele. Esse pode auxiliá-lo no desenvolvimento das propriedades matemáticas envolvidas naquela atividade (Tall, 2001, p. 225).

Entretanto, Tall chama atenção para um importante aspecto que deve ser considerado quando a tecnologia é utilizada para o desenvolvimento da Matemática, pois as “experiências desenvolvem aspectos perspicazes que apoiam a teoria, mas também podem levar a uma variedade de outras imagens mentais que podem ser diferentes das ideias matemáticas atualmente detidas por especialistas” (Tall, 2001, p. 230, tradução nossa).

No que segue são apresentados elementos, desenvolvidos por David Tall e colaboradores, para o desenvolvimento de abordagens de ensino especificamente para o conceito de derivada. Esses elementos foram implementados pelo pesquisador inglês utilizando outras plataformas, como o *software Graphic Calculus*, desenvolvido pelo próprio pesquisador e outros. Neste artigo esses elementos são implementados no *software GeoGebra* e visam facilitar a utilização das ideias desenvolvidas por David Tall por pesquisadores e pessoas interessadas pela Educação Matemática no Ensino Superior.

Elementos teóricos para o desenvolvimento do conceito de derivada de uma função real

Nesta seção é apresentada a noção de retidão local definida pelo pesquisador inglês como uma raiz cognitiva apropriada para o conceito de derivada. Essa noção está baseada na percepção de quanto maior a ampliação menor será a curvatura (Tall, 1989). Tal noção seria apropriada ao conceito de derivada, pois ela permite que a inclinação da função seja vista no próprio gráfico (Tall, 2000, p. 11). Nesse sentido, a representação gráfica de função diferenciável, quando ampliada em determinada porção, assemelha-se localmente a um segmento de reta. Observe a Figura 1, nela é possível perceber que uma curva diferenciável, localmente, assemelha-se a um segmento de reta:



Figura 1. Uma pequena porção da curva assemelhasse a um segmento de reta (Tall, 2010, p. 11).

Em um ambiente computacional, Tall elaborou o organizador genérico *Magnify*, que faz algo similar ao feito na Figura 1, pois “permite ao usuário focar sua atenção no gráfico e traçar uma parte ampliada dele numa segunda janela” (Tall, 2000, p. 11, tradução nossa). Na Figura 2 apresenta a função real dada pela seguinte sentença $g(x) = \sin x$:

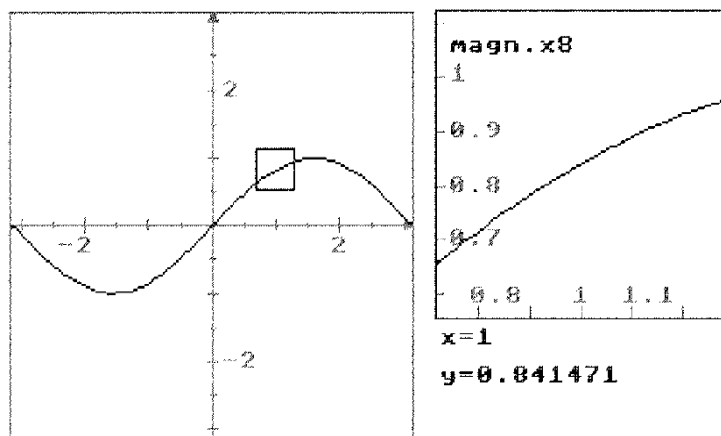


Figura 2. A utilização do organizador genérico *Magnify* (Tall, 2000, p. 12).

A relação entre os conceitos de continuidade e diferenciabilidade de uma função real, é dada pelo seguinte resultado: Seja $f: X \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in X$, se f é diferenciável em x_0 então f é contínua em x_0 . A recíproca desse resultado é falsa, pois existem funções contínuas em determinado ponto do domínio, que não é diferenciável nesse ponto. Em geral, o contraexemplo para a recíproca do teorema é a função modular, ou seja, a função real definida pela $h(x) = |x|$. Em $x = 0$, ela é uma função contínua, mas não é diferenciável em 0, pois o $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0}$ não existe. No entanto, essa é uma função em que a diferenciabilidade não é garantida apenas em um ponto, o ponto zero. Um exemplo de uma função contínua e não diferenciável em nenhum ponto de seu domínio pode causar desconforto e por isso não é comumente apresentado.

Pela retidão local, é possível inferir que uma função que é contínua num determinado ponto, e não diferenciável nele, localmente, possui uma representação gráfica, que não se assemelha a um segmento de reta. Por exemplo, considere a função real dada pela seguinte

sentença $m(x) = x^{\frac{2}{3}}$. A representação gráfica dessa função, numa vizinhança de 0, é a seguinte:

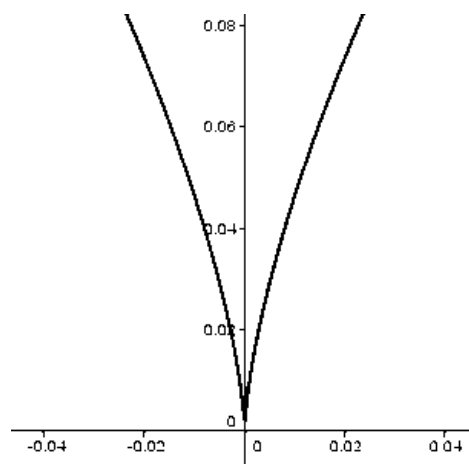


Figura 3. O gráfico da função m , dada pela sentença $m(x) = x^{\frac{2}{3}}$, numa vizinhança de 0.

Nessa vizinhança o gráfico da função não se assemelha a uma linha reta, então para concluir que a função m não é diferenciável em $x = 0$ é preciso verificar que não existe o seguinte limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{m(x) - m(x_0)}{x - x_0} \quad (1)$$

Fato que é comprovado, porque os limites laterais, pela direita e pela esquerda, não são finitos.

Vale destacar que casos como esses são explorados em livros de Cálculo, editados atualmente.

Por exemplo, em Boulos (1999, p. 73) foi exemplificado, na Figura 4, situações nas quais não existe a reta tangente a um gráfico.

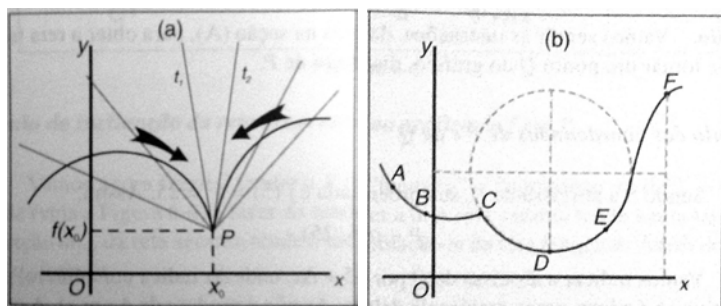


Figura 4. Exemplos de gráficos de funções que não possuíam derivadas em determinados pontos de Boulos (1999).

Em Stewart (2005) são apresentados outros exemplos nos quais é possível verificar quando o gráfico de função não é diferenciável. Segundo esse autor, “se o gráfico de uma função f tiver uma “quina” ou uma “dobra”, então o gráfico não terá tangente nesse ponto e f não será diferenciável ali” (p. 145).

Na Figura 5, são apresentadas três maneiras, nas quais é possível identificar quando o gráfico de uma função não é diferenciável num dado ponto.

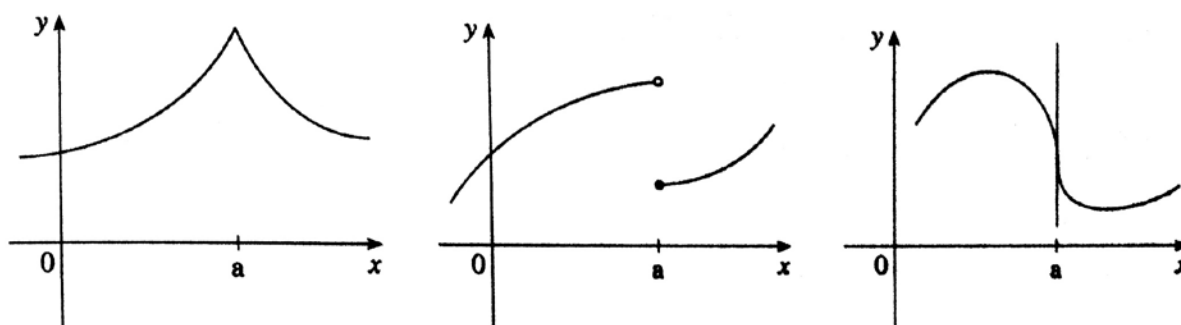


Figura 5. Três maneiras nas quais uma função f não é diferenciável em a (Stewart, 2013, p. 145).

Além dessa figura, na seção “Como uma Função Pode Não Ser Diferenciável?”, de Stewart (2013), é apresentado algo se assemelha com a noção de retidão local, pois o autor salienta que no caso de uma função diferenciável, “o gráfico vai se endireitando e se parecerá cada vez mais com uma reta” (p. 175) e no caso de uma função não diferenciável, o fenômeno descrito não ocorre.

Objetivando ampliar a compreensão do aprendiz sobre a noção de diferenciável, o pesquisador inglês promoveu um estudo de uma função contínua e não diferenciável em todos os pontos do domínio: a função “manjar branco”⁶. A partir desse exemplo, segundo David Tall, é possível formular “uma explicação conceitual da continuidade e da diferenciabilidade que são formalmente corretas e têm uma interpretação pictórica adequada” (Tall, 1982, p. 11).

Por meio da noção de retidão local seria possível estimular a imaginação do estudante a conceber como seria a representação gráfica tanto de uma função diferenciável quanto de uma função não diferenciável em determinado ponto do domínio. Para que isso ocorresse, a representação gráfica dessa função deveria permanecer “com bicos”, não importando o quanto essa função fosse ampliada.

A função “manjar branco”, denotada por b , é uma função cujo domínio é o intervalo fechado $[0,1]$ e o contradomínio é o conjunto dos números reais, e é definida em cada ponto de seu domínio como o limite da série de funções nesse ponto, isto é: $b(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f_i(x)$ (2)

O termo geral da sequência de funções $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ é $f_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} f(2^{n-1} \cdot x)$ sendo f , uma função real de uma variável real definida por $f(x) = |x - (x)|$ ⁷.

Na Figura 6, é apresentada a representação gráfica da soma parcial dos trinta primeiros termos da sequência de funções, cujo limite é a função “manjar branco”⁸.

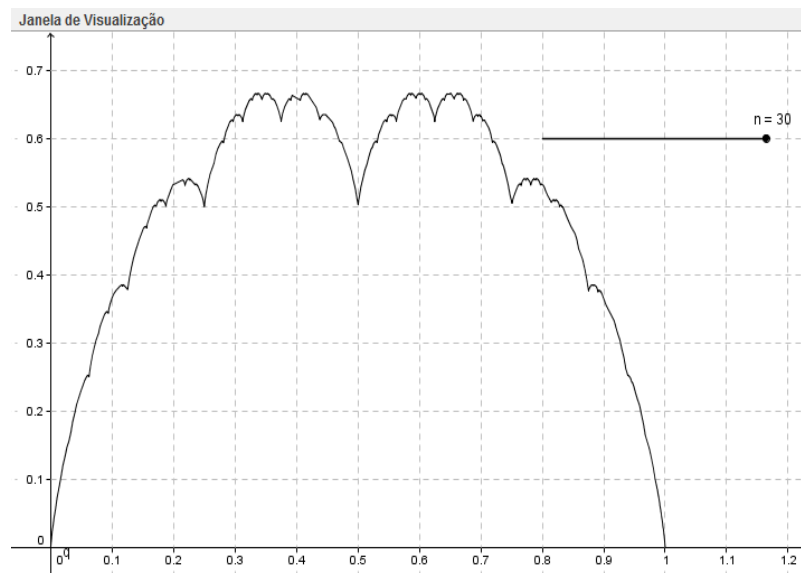


Figura 6. Representação da soma parcial $\sum_{i=1}^{30} f_i(x)$, sendo que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é a sequência de funções definida nos parágrafos anteriores.

⁶ Tradução do termo inglês *blancmange function*, que segundo Tall (1982) foi cunhado por John Mills.

⁷ Sendo que (x) denota a imagem da função real $(\cdot)$, que é definida do seguinte modo: sabe-se número real x pode ser escrito como $x = z + d$, com $z \in \mathbb{Z}$, um inteiro fixo, e $d \in [0,1)$. Com isso, essa função é definida pelas sentenças: $(x) = (z + d) = \begin{cases} z & \text{se } 0 \leq d < 0,5 \\ z+1 & \text{se } 0,5 \leq d < 1 \end{cases}$

⁸ Para mais detalhes sobre a construção dessa função no *software* GeoGebra, consulte Igliori e Almeida (2014).

No ponto de vista do pesquisador inglês, por meio do exemplo da função “manjar branco” seria possível formular “uma explicação conceitual da continuidade e da diferenciabilidade que são formalmente corretas e tem uma interpretação pictórica adequada” (Tall, 1982, p. 11, tradução nossa).

Considerações finais

Neste artigo foram apresentados materiais que auxiliam o desenvolvimento de uma abordagem de ensino baseada em elementos desenvolvidos por David Tall e colaboradores, para o conceito de diferenciabilidade. Essa abordagem é integrante da tarefa de organização de material que visa à “preparação da matemática para os estudantes” conforme Wilkelmann (1994). E os materiais para o ensino podem auxiliar o professor a desenvolver, no aprendiz, um conceito imagem rico para o conceito de derivada.

Para o conceito de derivada foi apresentada a noção de retidão local, na qual o aprendiz pode desenvolver elementos que o auxiliem a identificar quanto uma função é diferenciável, num dado ponto, a partir do gráfico da função. Além disso, pelas reflexões propostas pela noção é possível discutir como seria o gráfico de uma função contínua e não diferenciável em todos os pontos do domínio da função.

Outro ponto objetivado no artigo é mostrar que o *software* GeoGebra possui ferramentas, comandos e funções predefinidas que possibilita ao professor a elaboração de materiais didáticos significativos para o ensino e aprendizagem de conceitos abordados na Educação Superior, em especial do Cálculo Diferencial e Integral.

Por fim, espera-se que tanto com os exemplos expostos quanto as ferramentas exploradas possam ser utilizadas no desenvolvimento de novas abordagens que contribuam com o avanço da Educação Matemática no Ensino Superior.

Referências Bibliográficas

- Almeida, M. A. (2013). *Um Panorama de Artigos sobre a Aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral na Perspectiva de David Tall*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica. São Paulo, SP, Brasil.
- Boulos, P. (1999). *Cálculo Diferencial e Integral, volume 1*. São Paulo: Pearson Makron Books.
- Iglori, S. B. C. (2009). Considerações sobre o ensino do cálculo e um estudo sobre os números reais. In Frola, M. C. R. & Nasser, L. (Orgs.) *Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates* (pp. 11-26). Recife: SBEM.
- Iglori, S. B. & Almeida, M. V. (2014). A Utilização do GeoGebra para a Construção da Representação de um Exemplo de Função Contínua Não Diferenciável. *Anais da V Jornada Nacional de Educação Matemática: V JNEM. Passo Fundo: Universidade de Passo Fundo*, 1 -15.
- Leyva, Y. & Padilha, A. (2013). Monsters: Everywhere Continuous, Nowhere Differentiable Functions. *Proceedings of the Southwestern Undergraduate Mathematics Research Conference (SUNMaRC)*, New Mexico, Mexico, University of New Mexico. Disponível em: <<https://ejournals.unm.edu/index.php/nmskc/article/download/3036/2511>>. Acesso em: 17/10/14.
- Stewart, J. (2013). *Cálculo, volume 1*. 4 ed. São Paulo: Pioneira Thomson Learning.
- Tall, D. O. (1982). The Blancmange Function Continuous Everywhere but Differentiable Nowhere. *The Mathematical Gazette*, 66(435), 11-22. Disponível em: <<http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1982a-blancmange.pdf>>. Acesso em: 23 set. 2014.

- Tall, D. O. (1986). *Building and Testing a Cognitive Approach to the Calculus Using Interactive Computer Graphics*. Doctoral thesis. University of Warwick.
- Tall, D. O. (1989). Concept Images, Generic Organizers, Computers and Curriculum Change. *For the Learning of Mathematics*, 9(3), 37 – 42. Disponível em: <<http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.377.2004&rep=rep1&type=pdf>>. Acesso em: 23 set. 2014.
- Tall, D. O. (1993). Real Mathematics, Rational Computers and Complex People. *Proceedings of the Annual International Conference on Technology in College Mathematics Teaching*. Addison-Wesley, (pp. 243 – 258). Disponível em: <<http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1993h-real-rat-cmplx.pdf>>. Acesso em: 23 set. 2014
- Tall, D. O. (2000). Biological Brain, Mathematical Mind & Computational Computers (how the computer can support mathematical thinking and learning). *Proceedings of the Asian Technology Conference in Mathematics*, Chiang Mai, Thailand. ATCM Inc, Blackwood, 3 – 20. Disponível em: <<http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2000h-plenary-atcm2000.pdf>>. Acesso em: 23 set. 2014
- Tall, D. O. (2001). Cognitive development in advanced mathematics using technology. *Mathematics Education Research Journal*, 12(3), 210 – 230. Disponível em: <<http://homepages.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2001b-merj-amr.pdf>>. Acesso em: 23 set. 2014.
- Tall, D. O. (2010). A Sensible Approach to the Calculus. *The National and International Meeting on the Teaching of Calculus*, Setembro de 2010, Puebla, Mexico. Disponível em <<http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/themes/calculus.html>>. Acesso em: 23 set. 2014.
- Winkelmann, B. (1994). Preparing Mathematics for Students. En Biehler, R. *et al. Didactics of mathematics as a scientific discipline*. New York: Springer.

¿Qué clase de signo es $f'(x)$ y cuál es su significado?

Vicenç Font Moll

Departament de Didàctica de les CCEE i la Matemàtica, Universitat de Barcelona

España

vfont@ub.edu

Resumen

Nos formulamos las preguntas siguientes: ¿qué clase de signo es $f'(x)$? ¿Cuál es el significado de $f'(x)$? ¿Cuándo una persona ha comprendido el significado de $f'(x)$? Con relación a la primera pregunta concluimos que $f'(x)$ puede ser un símbolo o un índice dependiendo de las funciones semióticas en las que $f'(x)$ intervenga como expresión. Con relación a la segunda pregunta damos dos posibles respuestas: 1) si lo miramos desde una perspectiva elemental el significado de $f'(x)$ es la definición de función derivada, 2) si adoptamos una perspectiva sistémica, el significado es el uso que se hace de $f'(x)$, entendido como el conjunto de prácticas matemáticas en las que interviene $f'(x)$. Con relación a la tercera pregunta, nuestra respuesta es que la comprensión del texto de la definición de función derivada implica la activación de una trama de funciones semióticas.

Palabras clave: derivada, significado, función derivada, complejidad, articulación

Formulación de las preguntas

En muchos libros de texto del bachillerato español es habitual el uso de $f'(x)$ para representar a la función derivada. Por esta razón, en este artículo nos formulamos las preguntas siguientes: ¿Qué clase de signo es $f'(x)$? ¿Cuál es el significado de $f'(x)$? ¿Cuándo una persona ha comprendido el significado de $f'(x)$?

Respuesta a la pregunta ¿Qué clase de signo es $f'(x)$?

Símbolos, índices e iconos

Como punto de partida vamos a considerar la conocida clasificación de Peirce sobre los signos: iconos, índices y símbolos. Peirce (CP 3.360 y 61) considera que el signo está ligado al objeto en virtud de una asociación mental, y depende por tanto de un hábito. Estos signos son, con frecuencia, convencionales y arbitrarios (*símbolos*). Si el signo, en cambio, significa su objeto sólo sobre la base de una conexión real con él, como ocurre con los signos naturales y con los síntomas físicos, este signo es llamado *índice*. El tercer caso es aquél en el que la relación entre el signo y el objeto es de pura semejanza: entonces se tiene un *icono*.

La pregunta inicial se puede reformular de la manera siguiente: ¿qué clase de signo (índice, icono o símbolo) es $f'(x)$?

Para responder a esta pregunta es conveniente introducir un nuevo término teórico: función semiótica.

Funciones semióticas

Hjelmslev (1971) en su teoría del lenguaje usa las nociones de signo, expresión y contenido. La palabra signo la aplica a la entidad generada por la conexión entre una expresión y un contenido, que son los fúntivos entre los que la función de signo establece una dependencia. También establece la semiótica connotativa como aquella en la que el plano de la expresión está constituido por otra función.

Expresión	Contenido
Expresión	Contenido

Una función semiótica según Eco es:

Un signo está constituido siempre por uno (o más) elementos de un PLANO DE LA EXPRESIÓN colocados convencionalmente en correlación con uno(o más) elementos de un PLANO DEL CONTENIDO (...) Una función semiótica se realiza cuando dos fúntivos (expresión y contenido) entran en correlación mutua. (...) (Eco, 1991, 83-84).

En el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (Godino, Batanero y Font, 2007 y 2008) las funciones semióticas se conciben, de manera metafórica, como una correspondencia entre conjuntos que pone en juego tres componentes: un plano de expresión (objeto inicial); un plano de contenido (objeto final); un criterio o regla de correspondencia. Tanto el plano de la expresión como el del contenido pueden ser objetos materiales o mentales. Esta manera de entender las funciones semióticas se inspira en una larga tradición que va de las ideas de Peirce a las de Schütz, pasando por las de Husserl. La noción de signo, tal como la describe Peirce, es un aparejamiento individual entre dos fenómenos asociados que pueden ser físicos o mentales. En cambio, el signo de Saussure apareja dos fenómenos mentales "El signo lingüístico no une una cosa y un nombre, sino un concepto y una imagen acústica (...) Llamamos signo a la combinación del concepto y de la imagen acústica" (Saussure, 1990, pp. 110-111). Consideramos que la interpretación de las funciones semióticas que se propone en el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática generaliza la noción de representación usada en las investigaciones de tipo cognitivo que se han realizado en el campo de la educación matemática.

En el Enfoque Ontosemiótico de la Cognición e Instrucción Matemática (Font, 2001) se postula la hipótesis de trabajo siguiente: las funciones semióticas son un instrumento relacional que facilita el estudio conjunto de las representaciones ostensivas (dominio de lo público) y de las mentales (dominio de lo privado) activadas en las prácticas matemáticas, realizadas dentro de un determinado "juego de lenguaje" (Wittgenstein, 1953). En nuestra opinión, las funciones semióticas tienen un papel muy importante en el proceso relacional entre entidades, o grupos de ellas, que se realiza dentro de un determinado juego de lenguaje.

Respuesta a la primera pregunta

La respuesta a la primera pregunta es: depende de las funciones semióticas en las que $f'(x)$ intervenga como expresión.

Una de las funciones semióticas en las que $f'(x)$ es el plano de la expresión es la siguiente:

Expresión	Contenido
$f'(x)$	Derivada

Se trata de una función semiótica que suele ser establecida por cualquier persona con unos mínimos conocimientos de cálculo diferencial y se basa en la existencia de un criterio convencional mediante el cual se ha establecido que $f'(x)$ es una notación que representa a la función derivada. En este caso, la respuesta a nuestra pregunta sería que $f'(x)$ es un signo que, según la clasificación de Peirce, se ha de considerar un símbolo.

Por otra parte, se puede considerar que $f'(x)$ está relacionada (señala, o es un síntoma) con la función $f(x)$ de la cual es su derivada. Para hacer esta relación es necesaria una cadena de funciones semióticas como la siguiente:

Expresión		Contenido
		$f(x)$
Expresión	Contenido	
$f'(x)$	Derivada	

En este caso, la respuesta a nuestra pregunta sería que $f'(x)$ es un signo que, según la clasificación de Peirce, se ha de considerar un índice ya que dirige la atención hacia $f(x)$. También se puede decir, utilizando los términos “connotación” y “denotación”, que $f'(x)$ denota al concepto “derivada” y connota a “ $f(x)$ ”.

El uso de $f'(x)$ como un índice está implícito, por ejemplo, en la metáfora o la analogía de la “sombra”, utilizada por muchos profesores cuando explican en sus clases que la función derivada es (como) la “sombra” de la función $f(x)$. O bien cuando explican que $f'(x)$ se llama “función derivada” precisamente porque “deriva” de $f(x)$, o cuando explican que $f'(x)$ se construye a partir de $f(x)$, etc.

Respuesta a la pregunta ¿Cuál es el significado de $f'(x)$?

Cuando se ha dicho que $f'(x)$ es un símbolo, la razón que se ha dado es que, cualquier persona con unos mínimos conocimientos de cálculo diferencial, conoce la definición de derivada de una función y la existencia de un criterio convencional mediante el cual se ha establecido que $f'(x)$ es una notación que representa a la función derivada. Por tanto, es razonable concluir que el significado de $f'(x)$ es la definición de función derivada. Esta concepción, se puede considerar como una manera “elemental” de plantear el problema. Desde este punto de vista, para especificar el significado de $f'(x)$ basta dar una definición.

Otra posible manera de afrontar el problema es hacerlo en términos de comportamiento. Desde este nuevo punto de vista, conocer las cualidades de un objeto equivale a conocer su comportamiento posible, o sea, el conjunto de relaciones predicables de él. Desde esta perspectiva el significado de un objeto matemático se debe entender en términos de lo que se puede hacer con él. Esta concepción, que se puede considerar pragmatista, nos da una perspectiva “sistémica” ya que se considera que el significado de $f'(x)$ es el conjunto de prácticas matemáticas en las que el uso de esta expresión (u otras que se consideran equivalentes) es determinante para su realización.

En el marco del EOS se ha profundizado sobre la mirada sistémica de los objetos matemáticos y su significado, introduciendo la idea de significados parciales y su descripción en términos de prácticas y configuraciones de objetos primarios activados en dichas prácticas. Esta

mirada compleja se ha aplicado a diferentes objetos matemáticos, en particular en Pino, Godino y Font (2011) para la derivada.

En el EOS se considera que para la realización de una práctica matemática se necesita poner en funcionamiento determinados conocimientos. Si consideramos, por ejemplo, los componentes del conocimiento para la realización y evaluación de la práctica que permite resolver una situación-problema (e. g., plantear y resolver un problema de derivadas) vemos el uso de lenguajes, verbales y simbólicos. Estos lenguajes son la parte ostensiva de una serie de conceptos, proposiciones y procedimientos que intervienen en la elaboración de argumentos para decidir si las acciones que componen la práctica son satisfactorias. En consecuencia, cuando una institución matemática realiza y evalúa una práctica matemática activa un conglomerado articulado de situaciones – problemas, lenguajes, conceptos, proposiciones, procedimientos y argumentos, llamado en el EOS configuración epistémica de objetos primarios.

Lo que en los planteamientos filosóficos de tipo platonista se considera un objeto matemático con existencia independiente de las personas (por ejemplo, la derivada), en el EOS (Font, Godino y Gallardo, 2013) se explica como un objeto que emerge de las distintas maneras de ver, hablar, operar, etc. globalmente (holísticamente) sobre los objetos primarios de diferentes configuraciones epistémicas. Dicho en otros términos, este objeto sería el contenido al que se refiere o indica globalmente, explícita o implícitamente, el par (prácticas matemáticas, configuración epistémica de objetos primarios activada en dichas prácticas).

Para el objeto matemático derivada, Pino, Godino y Font (2011) caracterizan su complejidad mediante nueve configuraciones epistémicas : 1) tangente en la matemática griega; 2) variación en la edad media; 3) métodos algebraicos para hallar tangentes; 4) concepciones cinemáticas para el trazado de tangentes; 5) ideas intuitivas de límite para el cálculo de máximos y mínimos; 6) métodos infinitesimales en el cálculo de tangentes; 7) cálculo de fluxiones; 8) cálculo de diferencias y, 9) derivada como límite.

Respuesta a la pregunta ¿Cuándo una persona ha comprendido el significado de $f'(x)$?

Si entendemos el significado como uso, diremos que una persona comprende, entiende, sabe, etc. el significado de $f'(x)$ cuando lo usa de manera competente en diferentes prácticas matemáticas, lo cual implica concebir la comprensión también como “conocimiento y aplicación de las normas” que regulan la práctica. Se trata, pues, de un punto de vista que procura dilucidar la inteligibilidad de las acciones humanas clarificando el pensamiento que las informa y situándolo en el contexto de las normas sociales y de las formas de vida dentro de las cuales aquéllas ocurren. Desde esta perspectiva, un sujeto comprende el significado de $f'(x)$ cuando realiza prácticas correctas en las que ha de poner en funcionamiento diferentes significados parciales de la derivada (como límite del cociente incremental, como pendiente de la recta tangente a la gráfica de f , como velocidad instantánea, etc.).

Si entendemos el significado como una definición, nos podemos preguntar en qué consiste la comprensión de una definición. Nuestra respuesta es que para comprender la definición, un alumno tiene que poner en funcionamiento una trama de funciones semióticas

La definición de derivada como contexto de reflexión

Como contexto de reflexión vamos a utilizar el análisis semiótico realizado en Font y Contreras (2008) de la siguiente definición de derivada que se halla en un libro dirigido a estudiantes españoles de bachillerato (16-17 años):

« 1. Función derivada de una función.

Consideremos ahora, dada una función $y = f(x)$, otra función nueva que asocia a cada punto a del dominio de f su derivada $f'(a)$ cuando exista. Esta función es la función derivada de $y = f(x)$ y se representa con $f'(x)$ o y' .

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} »$$

En el libro de texto, antes de esta definición se ha definido la derivada de la función en un punto.

Trama de funciones semióticas

En Font y Contreras (2008) se argumenta que para comprender la definición anterior, un alumno hipotético tiene que poner en funcionamiento (plausiblemente) una trama de funciones semióticas como la que se describe en la figura 3. Para ello interpretan, de entrada, la comprensión de la definición de función derivada por un sujeto en términos de las funciones semióticas que éste debe establecer y consideran como expresión o contenido de dichas funciones semióticas la faceta extensiva-intensiva (particular-general) de los objetos matemáticos.

En concreto, se considerarán la siguiente tipología de funciones semióticas:

Tabla 1

Tipos de Funciones Semióticas

	Extensional	Intensional
Extensional	FS1	FS2
Intensional	FS3	FS4

1) FS1: Esta función semiótica relaciona una entidad extensional con otra entidad extensional

FS1.1 Relaciona un objeto con otro de la misma clase.

FS1.2 Relaciona un objeto con otro que no es de la misma clase.

2) FS2: Esta función semiótica relaciona una entidad extensional con una entidad intensional

FS2.1 Relaciona un objeto con la clase a la que pertenece.

FS2.2 Relaciona un objeto con una clase a la cual no pertenece.

3) FS3: Esta función semiótica relaciona una entidad intensional con una entidad extensional.

FS3.1 Esta función semiótica relaciona una clase con un ejemplo de la clase.

FS3.2 Esta función semiótica relaciona una clase con un objeto que no es de la clase.

4) FS4: Esta función semiótica relaciona una entidad intensional con otra entidad intensional.

FS4.1 Esta función semiótica define una clase de objetos de manera diferente.

FS4.2 Esta función semiótica relaciona una entidad intensional con otra entidad intensional diferente.

Esta tipología de 8 funciones semióticas surge de la reflexión sobre uno de los elementos cruciales de la actividad matemática: el uso de elementos genéricos y de la observación de episodios de aula en los que se fijan sus reglas de uso. Hay que resaltar, pues, que, para justificar que la comprensión se puede describir mediante una trama de funciones semióticas, se recurre a entender también la comprensión como el uso competente que se deriva del conocimiento y aplicación de normas.

Esta tipología de funciones semióticas se aplica en Font y Contreras (2008) a la definición del libro de texto para caracterizar la trama de funciones semióticas que debe activar el alumno para comprenderla (figura 3). Las funciones semióticas señaladas con * en la figura 3 no están explícitamente consideradas en el texto de la definición, las que no tienen el asterisco si lo están.

FS3.1: Esta función semiótica indica que, de la clase de todas las funciones, se considera una función concreta $y = f(x)$; FS2.2: Relaciona un objeto (la función) con una clase a la cual no pertenece (su dominio); FS3.1: Relaciona la clase (el dominio) con un elemento de dicha clase (el valor a); FS1.2: Relaciona un extensivo (a) con otro ($f'(a)$); FS2.1: Relaciona el par $(a, f'(a))$ con la clase de los pares $(a, f'(a))$; FS3.2: Relaciona la clase de pares $(a, f'(a))$ con el objeto función derivada; FS1.2: Es una función semiótica de tipo representacional que relaciona el extensivo función derivada con el extensivo y' ; FS1.2: Es una función semiótica de tipo representacional que relaciona el extensivo y' con otro extensivo $f'(x)$.

Además de las funciones semióticas anteriores hay dos señaladas con interrogante que se dejan a cargo del alumno. Por una parte, se deja a cargo del alumno la última función semiótica que permite entender la función derivada como un objeto conceptual intensivo. En efecto, dicha función -que es del tipo FS2.1, ya que el alumno tiene que entender que la función derivada obtenida a partir de la función $y = f(x)$ es un miembro de la clase de las funciones derivadas-, puede conducirle a un conflicto semiótico potencial, aunque el texto posteriormente proponga actividades que permitan superar dicho conflicto.

Más grave aún nos parece dejar bajo la responsabilidad del alumno la penúltima función semiótica que permite la interpretación de $f'(x)$ como $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, ya que esta última, a nuestro entender, sólo se podría efectuar si el alumno ha completado la trama anterior con las funciones semióticas que aparecen en la figura 3 señaladas con asteriscos: FS1.2*: De tipo representacional y relaciona un extensivo con otro extensivo; FS2.1**: Relaciona un elemento con la clase a la que pertenece

Estas funciones semióticas tienen en común que todas ellas son de tipo representacional, en el sentido de que facilitan que la expresión se considere una representación del contenido, pero además pueden ser de tipos diferentes según que la expresión o el contenido sean extensivos (particulares) o intensivos (generales) y según cuál sea el criterio de correspondencia entre la expresión y el contenido. Por ejemplo, la FS2.1 por una parte es representacional, en el sentido de que el caso particular se puede tomar como un representante de la clase, pero por otra parte es de tipo metonímico (parte-todo) ya que un extensivo (una parte) se toma por el todo (la clase), en este caso el criterio de correspondencia es el de “pertenencia”. En algunos casos las funciones semióticas son exclusivamente representacionales (por ejemplo, la FS1.2 de la figura 3 que relaciona y' con $f'(x)$).

Una vez expuesta (figura 3) la trama completa de funciones que se considera que el alumno debe activar para comprender la definición de la derivada del libro de texto, en Font y Contreras (2008, p. 44) se justifica la plausibilidad de dicha trama con argumentos como los siguientes:

“(…) cuando, en la definición de derivada del apartado 4.1, se dice “*dada una función $y = f(x)$* ”, hay que tener en cuenta que el autor del texto pretende dar la definición de la función derivada de cualquier función. Para ello, lo primero que hace es dirigir la atención del alumno a “una función”, es decir, se pasa de lo general a lo particular y, por tanto, se ha introducido un objeto particular mediante una función semiótica intensivo/extensivo (una F3.1).”

“Cuando en la definición se dice “*...que asocia a cada punto a del dominio de f su derivada $f'(a)$ cuando exista.*”, a un valor concreto a se le hace corresponder otro valor concreto $f'(a)$. Por tanto, hemos considerado una función semiótica del tipo FS1.2.

Consideración final

Este trabajo ha comenzado con la formulación de las siguientes tres preguntas: ¿qué clase de signo es $f'(x)$? ¿Cuál es el significado de $f'(x)$? ¿Cuándo una persona ha comprendido el significado de $f'(x)$? En el intento de responderlas ha emergido una característica esencial de los objetos matemáticos. Nos referimos a que una característica de los objetos matemáticos que deben ser enseñados y aprendidos es su complejidad. Dicha complejidad lleva a pensar no en un objeto unitario sino en un sistema complejo formado por partes o componentes. Otro aspecto que ha emergido en este trabajo es que la articulación semiótica (entendida como el resultado de una trama encadenada de funciones semióticas) juega un papel relevante en la articulación de esta complejidad.

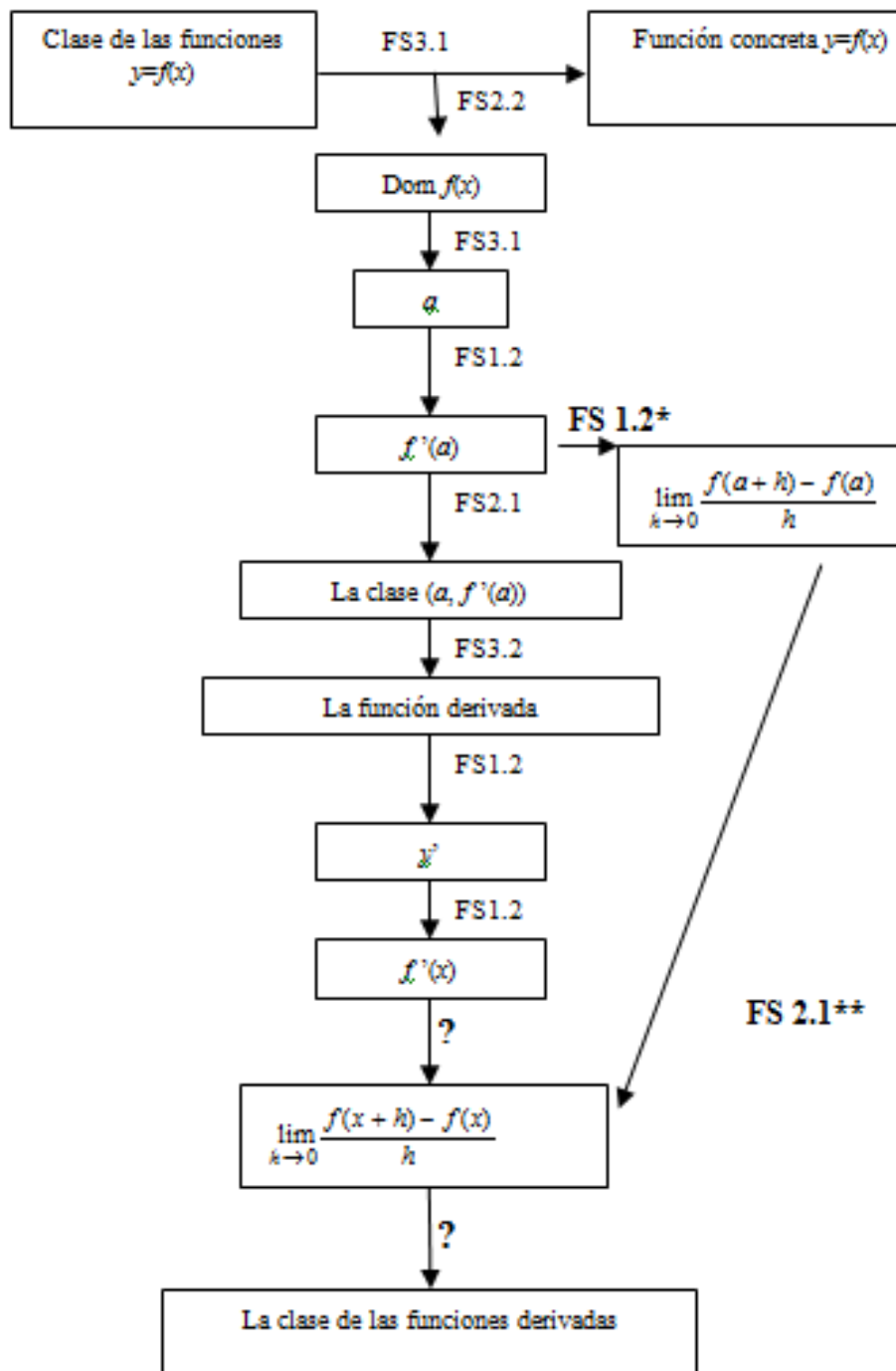


Figura 3. Trama de funciones semióticas

Agradecimientos

Este trabajo de investigación se ha llevado a cabo en el contexto del siguiente proyecto: EDU2012-32644, “Desarrollo de un programa por competencias en la formación inicial de profesores de secundaria de matemáticas”, financiado por el Ministerio de Economía y Competitividad de España.

Referencias

- Eco, U. (1991). *Tratado de semiótica general*. Barcelona: Lumen.
- Font V. (2001). Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. *POME*, 14, 1-36.
- Font, V. y Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 69, 33-52.
- Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, 82, 97-124.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V (2007). The Onto-Semiotic Approach to Research in Mathematics Education, *ZDM-The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2008). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Acta Scientiae. Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 10, 7-37.
- Hjelmslev, L. (1971). *Prolegómenos a una teoría del lenguaje*. Madrid: Gredos.
- Peirce, C.S. 1965. *Collected papers*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Pino-Fan, L., Godino, J. D. y Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, 13(1), 141-178.
- Saussure, F. (1916). *Curs de lingüística general*. Barcelona, Edicions 62, 1990 (ed. usada).
- Wittgenstein, L. (1953). *Investigaciones filosóficas*. Barcelona: Crítica.

Reflexiones del profesor en torno al concepto de pendiente

David Alfonso **Páez**

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional
México

dpaez@cinvestav.mx

José **Guzmán** Hernández

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional
México

jguzman@cinvestav.mx

José **Zambrano** Ayala

Centro de Investigación y de Estudios Avanzados, Instituto Politécnico Nacional
México

jzambrano@cinvestav.mx

Resumen

En este artículo se reportan las reflexiones de un profesor de matemáticas (grado 9) sobre los recursos usados en la comprensión y cálculo de la pendiente de rectas en el plano. Se trata de un estudio cualitativo, cuya recopilación de datos se efectuó en dos etapas: a) se video-grabaron las sesiones de clase en las que éste "enseñó" el concepto de pendiente –a sus alumnos– y se analizaron los datos recopilados tomando como marco conceptual la Aproximación documental; b) el investigador entrevistó al profesor con la finalidad de que reflexionara sobre sus recursos usados. Los resultados muestran que el profesor usó el recurso del cero como el valor de la pendiente de la recta paralela al eje de las abscisas para interpretar que ésta no tiene pendiente, dado que no hay ángulo de inclinación; pero, al reflexionar sobre éste se dio cuenta de que su justificación era incorrecta.

Palabras clave: recursos, pendiente, cero, reflexión, profesor, práctica docente.

Introducción y problema de investigación

De acuerdo con la literatura revisada, existen investigaciones en educación matemática acerca de la enseñanza del concepto de pendiente (e.g., Moore-Russo, Conner & Rugg, 2011; Stump, 1999, 2001; Zaslavsky, Sela & Leron, 2002, entre otros), el cual se considera clave en la comprensión de otros conceptos relacionados con él (e.g., el de variación) y con implicaciones que van más allá de su uso algebraico; tal como indicador de la inclinación de una recta, respecto al eje de las abscisas, en un sistema de coordenadas cartesianas XY (Nagle, Moore-Russo, Viglietti & Martin, 2013). En la actualidad, se han desarrollado investigaciones centradas en analizar y caracterizar los conocimientos de los profesores acerca del concepto de pendiente. Al respecto, Stump (1999, 2001) y Moore-Russo et al. (2011) reportan 11 categorías relacionadas con representaciones y concepciones que tienen algunos profesores acerca de la pendiente de la recta trazada en el plano cartesiano; de las 11 categorías, Stump (1999) encuentra que los profesores suelen representarla como razón geométrica. En cambio, otros investigadores afirman que hay profesores con dificultades en la comprensión del concepto de pendiente y su cálculo, dadas ciertas rectas (e.g., Nagle et al., 2013; Stump, 2001; Walter & Gerson, 2007; entre otros). Por su parte, Zaslavsky et al. (2002) aseguran que algunos profesores manifiestan una falta de

conocimiento acerca de la relación entre las representaciones algebraicas y geométricas de la pendiente de una recta y su ángulo de inclinación. Mientras que para Stump (1999, 2001) y Walter y Gerson (2007), las dificultades de comprensión de este concepto matemático se deben a los diversos significados que los profesores asocian con la palabra pendiente (e.g., inclinación, declive, empinada, entre otras). Además, para Zaslavsky et al. (2002) tales dificultades pueden deberse a las inconsistencias que algunos libros de texto introducen respecto al estudio del concepto de pendiente.

Aunque la literatura revisada contribuye a esclarecer los diferentes tipos de dificultades de comprensión del concepto de pendiente, parece que aún falta mucho por hacer (Nagle et al., 2013; Stanton & Moore-Russo, 2012). Investigaciones recientes concuerdan en que se sabe poco de cómo los profesores abordan en aula de clases este concepto matemático (e.g., Stanton & Moore-Russo, 2012; Teuscher & Reys, 2010, entre otros). Al respecto, Stump (1999) asegura que: “los profesores [...] necesitan oportunidades para examinar el concepto de pendiente, reflexionar sobre su definición [y] construir relaciones entre sus diversas representaciones” (p. 142). También, Adler, Ball, Krainer y Novotna (2005) sugieren que la reflexión de los profesores sobre su práctica docente puede propiciar el desarrollo de una “enseñanza de calidad” (p. 360). Interesados en la problemática antes descrita, en este artículo analizamos y reportamos la reflexión que un profesor de matemáticas de tercer grado de secundaria hace sobre los recursos usados en la comprensión y cálculo de la pendiente de rectas trazadas en el plano cartesiano; en particular, pretendemos responder la pregunta: ¿Qué justificaciones da el profesor, al reflexionar sobre sus recursos usados, para determinar que la recta paralela al eje de las abscisas tiene o no pendiente?

Marco conceptual

Como marco conceptual utilizamos la *Aproximación documental* (Gueudet & Trouche, 2009) y la *Reflexión-en-acción* (Gilbert, 1994).

Aproximación documental

Gueudet y Trouche (2009), inspirados en el trabajo de Adler (2000), proponen la Aproximación documental como una manera diferente de analizar la práctica docente del profesor de matemáticas; en particular, centran su atención en los recursos usados por éste ante una clase de situaciones (entendida como tarea o problema matemático). Para estos investigadores, los recursos son parte fundamental de la práctica docente del profesor porque con ellos se apoya para enseñar y facilitar el aprendizaje de las matemáticas, pero depende de cómo los use para que “permitan u obstaculicen el acceso al conocimiento matemático” (Adler, 2000, p. 214). Según la Aproximación documental, el profesor usa recursos físicos (e.g., el libro de texto, la calculadora, entre otros) y recursos no físicos (e.g., conceptos matemáticos y su simbolización), pero también llega a usar otro tipo de recursos no físicos (e.g., ya sea sus conocimientos –reflexión–, o bien, las discusiones académicas con sus colegas o estudiantes). Así, para Gueudet y Trouche, todo lo que es usado por el profesor es un recurso y no está aislado de otros, sino que pertenece a un conjunto de recursos disponibles para una clase de situaciones dada.

El profesor, de acuerdo con Gueudet y Trouche (2009), interacciona con sus recursos disponibles mediante un *trabajo documental*; además, moldea y define su trabajo en el aula. En esa interacción ocurre una *génesis documental*: proceso dinámico y dialéctico en el cual el profesor se apropia y transforma los recursos con los que interacciona en *documentos*

[*instrumentalización*], y al mismo tiempo los recursos moldean e influyen la actividad y el conocimiento del profesor [*instrumentación*]. Para estos investigadores, la transformación de recurso a documento es gradual y continua, e intervienen *esquemas de utilización* contruidos por el profesor durante su práctica docente. Los esquemas de utilización son conocimientos matemáticos o generales que guían y determinan la práctica docente del profesor; Gueudet y Trouche los definen como: "fuerzas impulsoras y resultados de la actividad del profesor" (2009, p. 205). Aunque podría interpretarse que un documento se reduce, por ejemplo, a una lista de ejercicios o problemas matemáticos que el profesor elaboró u obtuvo de algún lugar (e.g., libro de texto, páginas web, entre otros), no necesariamente es una entidad física; pues "está saturado con la experiencia del profesor" (p. 205). Así, para Gueudet y Trouche, un documento es un conjunto de recursos y esquemas de utilización de esos recursos.

Reflexión-en-acción

Investigadores como Adler, Ball, Krainer, Lin y Novotna (2005) aseguran que el profesor al reflexionar sobre su práctica docente puede analizar y cuestionar sus conocimientos inmersos en esa práctica [en el uso de los recursos]. En particular, Gilbert (1994) asegura que el profesor efectúa una reflexión-en-acción, en la cual afecta el conocimiento implícito o explícito en las acciones que él pone en juego [práctica docente]. Para Gilbert, este tipo de reflexión se da cuando el profesor tiene un problema que le es conflictivo porque, en ese momento, no tiene el conocimiento adecuado para resolverlo. Por tanto, la reflexión-en-acción es un proceso de búsqueda de conocimiento para resolver ese problema conflictivo y, al mismo tiempo, mejorar la práctica docente (cursivas de los autores).

Metodología

La investigación aquí reportada es de corte cualitativo y la recopilación de los datos fue con seis profesores de matemáticas, de educación secundaria (grado 9), y se efectuó en dos etapas: observación no participativa (video-grabación de clases) y entrevista. En la primera etapa, video-grabamos las sesiones de clases en las cuales los profesores enseñaron el concepto de pendiente; además, analizamos los datos recopilados mediante una triangulación y tomando como referente el significado y características del concepto de recurso, dadas en la Aproximación documental (Gueudet & Trouche, 2009). El análisis estuvo centrado en identificar qué y cómo los recursos son usados por los profesores y cuáles son los esquemas de utilización inmersos en esos recursos; también nos permitió recuperar un extracto relevante de las video-grabaciones acerca de los recursos usados de cada profesor. En la segunda etapa, elaboramos un protocolo de entrevista para cada profesor con el objetivo de que, al ser entrevistado por el investigador (Inv-Ent), reflexionara sobre los recursos usados (Gilbert, 1994). De acuerdo con el extracto de las video-grabaciones de cada profesor, el protocolo de entrevista incluyó preguntas abiertas acerca del uso, justificación y argumento de los recursos usados. Después, cada profesor –junto con el investigador– observó ese extracto y fue entrevistado en torno al uso de sus recursos. Durante la entrevista, de acuerdo con las respuestas del profesor, el investigador le planteó otras preguntas ajenas a las del protocolo de entrevista.

Uno de los profesores observado y entrevistado fue Carlos (pseudónimo). De acuerdo con el análisis de los datos recopilados, los seis profesores usaron recursos físicos y no físicos en la enseñanza y cálculo de la pendiente de la recta, pero Carlos –a diferencia de sus colegas– incluyó una recta paralela al eje de las abscisas. A continuación, exponemos el análisis y discusión de éste y otros recursos usados por él, y de sus reflexiones sobre los recursos usados.

Análisis de datos

Recursos de Carlos en la enseñanza y cálculo de la pendiente de la recta

En el aula de clases, Carlos dispone de un conjunto de recursos para enseñar y calcular la pendiente de la recta (Gueudet & Trouche, 2009). Tres de los recursos provienen de una Actividad del libro de texto (ver Figura 1), y con los cuales Carlos interacciona mediante su trabajo documental: un contexto acerca de la variación de la temperatura de hielo respecto al tiempo, una recta paralela al eje de las abscisas, y la expresión

$$\frac{\text{Variación de la temperatura entre los minutos 2 y 5}}{\text{Tiempo transcurrido entre los minutos 2 y 5}}.$$

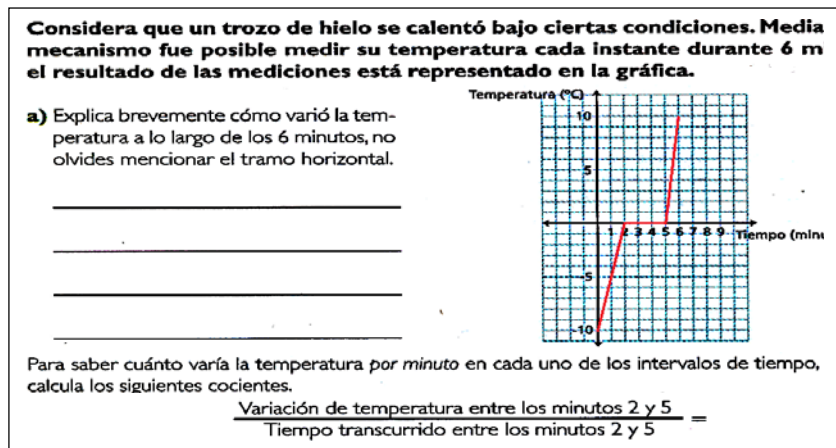


Figura 1. Parte de la Actividad del libro de texto (García & Mendoza, 2008, p. 51).

La gráfica de la Figura 1 está conformada por tres rectas, con pendiente diferente, y muestra la relación entre la temperatura del hielo –al aplicarle calor– y el tiempo transcurrido (seis minutos). Los autores del libro de texto introducen en la Actividad el término *variación* para referirse al cambio de temperatura respecto al tiempo (García & Mendoza, 2008), y sugieren para cada recta calcular esta variación [de temperatura]. Una de las rectas es paralela al eje de las abscisas (incluso coincide con este eje) y Carlos interpreta en ella que la temperatura es constante: “De dos a cinco minutos, ¿qué pasó con la temperatura? Se mantuvo constante, cero grados”. Esta interpretación se debe al esquema de utilización de Carlos en torno a que la recta representa una función (f) entre las variables tiempo (t) y temperatura (T), $f : t \in [2,5] \rightarrow 0_T$, en la cual $0[^\circ\text{C}]$ es la imagen de cada instante en el intervalo $[2,5]$ (e.g., les pregunta a los estudiantes: “En dos minutos [Señala el 2 del eje de las abscisas], la temperatura del hielo ¿cuál es?”, y ellos responden que es “cero”, esto lo hace Carlos para cada minuto en el intervalo, cuyo valor es un minuto).

Para calcular la variación de la temperatura por minuto, Carlos usa como recursos la expresión $\frac{\text{Variación de la temperatura entre los minutos 2 y 5}}{\text{Tiempo transcurrido entre los minutos 2 y 5}}$ (ver Figura 2) y la definición de cociente, los cuales están orientados por esquemas de acción instrumentada (Rabardel, 1995). Carlos cree que al comprender el uso de esa expresión, se tendrá un conocimiento de la razón de cambio (e.g., les menciona a sus estudiantes: “Un cociente es una división, es el resultado de una división. Si comprenden esta parte [se refiere a calcular la variación por minuto], van a comprender qué es una razón de cambio”).

$$\frac{\text{Variación de temperatura entre los minutos 2 y 5}}{\text{Tiempo transcurrido entre los minutos 2 y 5}} = \frac{0}{3} = 0$$

Figura 2. Variación de la temperatura del hielo por minuto.

La definición de cociente es un recurso usado por Carlos para darle significado en la recta al resultado de dividir la variación de la temperatura entre el tiempo transcurrido (3 minutos), y está orientado por esquemas de utilización acerca de la división como algoritmo: el cociente es resultado de dividir y comparar dos valores. Aunque usa este recurso, no le es útil cuando el cociente es cero porque no considera la unidad de medida ($^{\circ}\text{C}/\text{min.}$) para interpretarlo como 0°C por minuto; por ejemplo:

Carlos: Cero dividido entre una constante es cero. ¿Eso [*cociente 0*] qué quiere decir? Que no varió nada. ¿Cómo podemos decir? En el intervalo de dos a cinco minutos la variación de la temperatura fue constante, no varió nada.

La variación de la temperatura respecto al tiempo es $0^{\circ}\text{C}/\text{min.}$ ($\frac{|T_{\text{final}} - T_{\text{inicial}}|}{|t_{\text{final}} - t_{\text{inicial}}|}$), pero Carlos

muestra confusión al interpretar el cociente obtenido. Al considerar la variación de la temperatura como una constante en el intervalo de tiempo $[2,5]$, interpreta que ésta no varía porque siempre toma el valor 0°C . De acuerdo con la recta, hay dos ceros involucrados con significado diferente. El primero se refiere al valor de T asociado con cada valor de t en el intervalo $[2,5]$, y el segundo es la razón de cambio de T respecto a t ($0^{\circ}\text{C}/\text{min.}$). Sin embargo, Carlos los interpreta de igual manera (0°C) y, por ende, determina que no varía la temperatura. De igual forma, en términos Gueudet y Trouche (2009), hay una instrumentación del libro de texto hacia Carlos en torno a formalizar la razón de cambio como una característica de la recta llamada pendiente. Sin reflexión alguna, él determina que el cociente calculado es “una razón que indica la variación de la temperatura por minuto” llamada “razón de cambio de la temperatura”, y afirma que “la razón de cambio de una recta es su pendiente” (García & Mendoza, 2008, pp. 50-51). Así, la pendiente de la recta paralela al eje de abscisas es cero, pero Carlos interpreta este valor como ausencia de pendiente para esa recta. El siguiente episodio muestra lo aquí mencionado.

Carlos: ¿[...] Y las rectas que están así [*se refiere a la recta paralela al eje de las abscisas*]? No hay pendiente, la pendiente es cero.

Aunque Carlos posee conocimiento matemático básico en torno a la pendiente de rectas trazadas en el plano cartesiano, no muestra coherencia entre su interpretación y la representación geométrica del cero como el valor de la pendiente, pues considera que la recta paralela al eje de abscisas no tiene pendiente dado el valor cero. Esta interpretación de Carlos, suponemos, se debe a su esquema de utilización acerca de la recta. Además, es importante destacar que el cero como valor de la pendiente tiene como característica, en su representación geométrica, que la recta sea paralela al eje de abscisas; la interpretación de Carlos al respecto es la ausencia de pendiente.

Reflexión de Carlos sobre los recursos usados

En la entrevista, Carlos reflexiona sobre sus recursos usados y da su argumento para justificar que la recta paralela al eje de abscisas carece de pendiente, dado el valor cero. Su argumento se refiere a la percepción visual del ángulo de inclinación de la recta. Carlos posee un

conocimiento matemático respecto a la pendiente de la recta como la tangente de su ángulo de inclinación, cuya representación simbólica es $m = \tan \theta$ (ver Figura 3). Además, su conocimiento involucra una relación entre la pendiente y la razón de cambio, dados puntos de la recta, al considerar que esta última se expresa como la pendiente de la recta (“una razón de cambio [...] se puede manifestar como pendiente”). Esta relación la justifica con el uso de la trigonometría, en la cual la $\tan \theta$ del triángulo rectángulo es la razón de cambio del lado vertical entre el lado horizontal, cuyos lados hacen referencia a la variación de las coordenadas de x respecto a las de y .

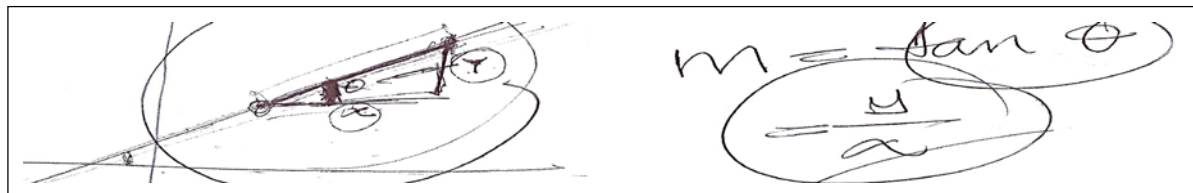


Figura 3. Representación geométrica y algebraica de la pendiente de una recta dada por Carlos.

Carlos tiene claro que, aunque el valor es el mismo, la razón de cambio y la pendiente tienen diferente interpretación en la recta; sin embargo, su discurso es impreciso al determinar que esta última se refiere al ángulo de inclinación de la recta, lo cual es incorrecto (“la pendiente sólo es el ángulo de inclinación y la razón de cambio es cómo va variando ésta [variable y] con el paso del tiempo [variable x]”). Es importante mencionar que Carlos no define la pendiente de la recta como el ángulo de inclinación de ésta, pues sabe cuál es su definición, $\tan \theta$; suponemos que se refiere, más bien, a determinar en la representación geométrica si la recta tiene pendiente al percibir visualmente el ángulo de inclinación, de manera que al no verlo deduce la ausencia de pendiente. Para ello, dos de las preguntas que el entrevistador le hizo estuvieron centradas en ubicar la pendiente en el ángulo de inclinación de la recta (ver Figura 3), y calcular la pendiente de la recta paralela al eje de las ordenadas, pues tiene ángulo de inclinación. El siguiente episodio muestra lo aquí mencionado.

Inv-Ent: Esta recta tiene una pendiente positiva [(ver Figura 3)], ¿yo la ubicaría aquí [señala el ángulo de inclinación de esa recta]?

Carlos: No. La pendiente es [...] la tangente de un ángulo [...]

Inv-Ent: La recta que tiene un ángulo de inclinación de 90° , ¿cuál sería su pendiente?

Carlos: [Guarda silencio por unos segundos]... Quizás aquí falta algo más, puedo encontrar que el ángulo de inclinación es de 90° [...]. Debo encontrar la tangente de este ángulo para saber su pendiente.

El razonamiento de Carlos muestra una falta de dominio del concepto de pendiente en rectas paralelas a los ejes cartesianos. Su argumento es una idea de ver o no el ángulo de inclinación para determinar que la recta tiene pendiente, y no un argumento matemático aun cuando la define como la $\tan \theta$ (ver Figura 4). Este argumento es recurso que usa para justificar que la recta paralela al eje de las abscisas “no tiene pendiente” y está sustentado de manera visual. Suponemos que el razonamiento se debe a su esquema de utilización de la recta paralela al eje de las abscisas (Gueudet & Trouche, 2009). El siguiente episodio muestra lo aquí mencionado:

Inv-Ent: ¿Qué pasa cuando la recta [...] es paralela al eje de las abscisas?

Carlos: No hay pendiente, porque dijimos que la pendiente es el ángulo de inclinación. Y aquí no hay pendiente, o sea, no hay ángulo de inclinación.

Inv-Ent: Entonces, ¿si la recta no tiene ángulo de inclinación no tiene pendiente?

Carlos: Así es... [Se muestra serio y pensativo mientras observa dos rectas perpendiculares trazadas en un solo plano cartesiano (ver Figura 4)].

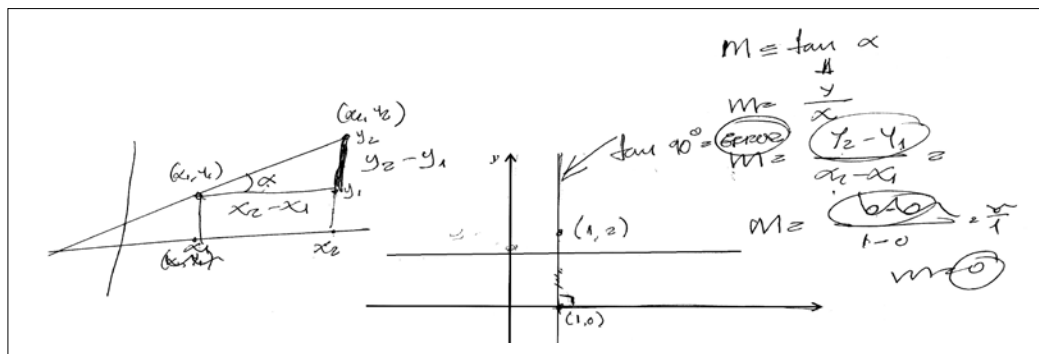


Figura 4. Relación entre pendiente y ángulo de inclinación de una recta vertical, dada por Carlos.

De acuerdo con este episodio, consideramos que la pregunta del investigador, en torno a inferir que no hay pendiente cuando “no hay ángulo de inclinación”, genera en Carlos un cierto conflicto, en términos de Gilbert (1994), y se evidencia cuando guarda silencio. Esta acción de guardar silencio corresponde a la búsqueda de conocimiento para resolver ese conflicto (Gilbert, 1994). La reflexión de Carlos sobre sus recursos se advierte al considerar si se puede calcular la $\tan 90^\circ$ y al asegurar que tiene “una confusión”. El siguiente episodio muestra lo aquí mencionado.

Inv-Ent: En la recta con un ángulo [de inclinación] de 90° , usted menciona que tiene pendiente cero.

Carlos: La tangente de 90° es... Tengo una confusión, parece ser que es al revés lo que estoy diciendo [Se refiere a que la recta paralela al eje de las ordenadas no tiene pendiente y la recta paralela al eje de las abscisas tiene pendiente]. ¿En qué momento es cero y en qué momento no hay pendiente? Aquí no hay ángulo [señala la recta horizontal]. [...] Aquí [señala la recta paralela al eje de las ordenadas] no existe la tangente de 90° [...]. Pero la recta horizontal no tiene ángulo de inclinación y no tiene pendiente.

Como puede observarse en el episodio, la reflexión de Carlos lo lleva a dudar sobre su afirmación y darse cuenta de que la recta paralela al eje de las abscisas, en efecto, tiene pendiente cero, pues en un primer momento se percata de que $\tan 90^\circ$ no está definida (Figura 4). Sin embargo, dado que la idea aún persiste en torno a ver o no el ángulo de inclinación de la recta, Carlos no está seguro de esta contradicción y continúa con su búsqueda de conocimiento; en particular, mediante su reflexión, busca darse cuenta de “en qué momento [la pendiente] es cero y en qué momento no hay pendiente”. Para esta reflexión, dos preguntas fundamentales por parte del investigador fueron calcular la “pendiente” de la recta paralela al eje de las abscisas y darle significado a esa recta partir de su “pendiente”. El siguiente episodio muestra lo aquí mencionado.

- Inv-Ent: ¿Qué significa que ésta [la recta paralela al eje de las ordenadas] tenga pendiente cero?
- Carlos: [Traza una recta en otro plano cartesiano y, dados (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , construyó un triángulo rectángulo (ver Figura 4)] Estoy tratando de analizar o encontrar una relación del triángulo para analizar el ángulo....
- Inv-Ent: Para la recta [paralela al eje de las ordenadas], ¿podría calcularme su pendiente, sabiendo que es cero?
- Carlos: [Ubica $(1, 2)$ y $(1, 0)$ en la recta y mediante la expresión $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ intenta calcular su “pendiente”, pero no tiene éxito (ver Figura 4)]... Entonces, es cierto, [...] aquí no hay pendiente porque no puedo obtener el otro punto para formar el triángulo, del eje de las ordenadas.

En esa búsqueda de conocimiento, observamos que Carlos corrobora su duda anterior al darse cuenta otra vez de que la recta paralela al eje de las ordenadas no tiene pendiente y al intentar calcularla mediante la expresión de la razón de cambio y en ambiente de lápiz y papel. En particular, esta toma de conciencia se da cuando uno de los puntos de la recta no es equivalente a (x_2, y_2) para tener una razón de cambio, lo que para Carlos es “no poder obtener el otro punto para un triángulo rectángulo”, y al tener $|x_1 - x_1| = 0$ como denominador en la expresión de la razón de cambio (ver Figura 4). Sin embargo, de acuerdo con el discurso de Carlos, este recurso no es útil para darse cuenta de si la recta paralela al eje de las abscisas tiene pendiente cero. El siguiente episodio muestra lo aquí mencionado.

- Inv-Ent: Supongamos que usted les pide a sus estudiantes que calculen la pendiente de esta recta [recta paralela al eje de las abscisas], sabiendo que no la tiene. ¿Cómo la calcularían?
- Carlos: La pendiente tiene que ver con el ángulo de inclinación, sino no tengo ángulo de inclinación no puedo encontrar las coordenadas de x y y o ese desplazamiento de ese y -sub-uno y y -sub-dos [...]. Déjame checar algo [en una calculadora registra $\tan 90^\circ$]. Ésta [Se refiere a la recta paralela al eje de las ordenadas] no tiene pendiente, y ésta [Se refiere a la recta paralela al eje de las abscisas] la pendiente es cero [en la calculadora registra $\tan 0$]. La tangente de 90 no está definida; en este caso, la tangente de cero es cero. Así es, la [recta] que es paralela al eje de las abscisas no hay ángulo de inclinación y sí hay pendiente.

Observamos en el discurso de Carlos falta de conocimiento respecto al uso de la razón de cambio para calcular la pendiente de la recta paralela al eje de abscisas, y se debe a la necesidad de representar de manera geométrica esa razón de cambio, dados puntos de la recta; de manera que vea el desplazamiento de x_1 a x_2 , y de y_1 a y_2 . Ante esta falta, el recurso físico de la calculadora fue fundamental en la reflexión de Carlos, pues le permitió darse cuenta y argumentar por qué, al no poder calcular $\tan 90$, la recta paralela al eje de las abscisas tiene pendiente cero y reafirmar su razonamiento matemático en torno al concepto de pendiente en este tipo de rectas trazadas en el sistema de coordenadas cartesianas.

Conclusiones

De acuerdo con lo sucedido en el aula de clases y en la entrevista, estamos en condiciones de poder dar respuesta a la pregunta de investigación de este artículo. Podemos decir que Carlos, en términos de Gilbert (1994), al observar su clase video-grabada y al entrevistarlo, efectuó un proceso de reflexión sobre sus recursos usados en la enseñanza y el cálculo de la pendiente de rectas paralelas al eje de las abscisas (Gueudet & Trouche, 2009). Carlos argumentó y se mostró convencido de por qué ese tipo de rectas “no tiene pendiente”. En este proceso de reflexión, durante la entrevista, él usó otros recursos que le permitieron, en un primer momento, razonar de manera incorrecta y aseverar que la recta paralela al eje de las abscisas no tiene pendiente. Consideramos que su idea en torno a la ausencia del ángulo de inclinación respecto al eje de las abscisas y querer representar geoméricamente la razón de cambio en la recta, dado dos puntos, no le permitieron darse cuenta de que la recta paralela al eje de las abscisas tiene pendiente cero. Estos recursos están sustentados por percepciones visuales de Carlos: querer ver el ángulo de inclinación y considerar que no hay razón de cambio en la recta, ya que no se puede representar de manera geométrica.

Entre sus argumentos, en el proceso de reflexión, la razón de cambio fue un recurso matemático potencial para que Carlos se percatara de que, en efecto, la recta paralela al eje de las ordenadas no tiene pendiente; sin embargo, este recurso impidió que identificara la pendiente de la recta paralela al eje de las abscisas. El uso de la calculadora fue un recurso importante en la reflexión de Carlos, pues al usarla fue consciente de qué recta tiene pendiente cero. En general, Carlos reflexionó (Gilbert, 1994) sobre sus recursos usados en clases al buscar argumentos válidos que justificaran el hecho de que la recta, en la representación geométrica, tuviera pendiente. Esta reflexión le permitió darse cuenta de que su razonamiento inicial sobre la pendiente de la recta horizontal al eje de las abscisas en un plano cartesiano era incorrecto. Podemos ver que aunque Carlos reflexiona sobre su práctica docente, continúa con su idea de no ver el ángulo de inclinación de la recta. En este sentido, Guzmán y Kieran (2013) describen esta situación como “vacíos matemáticos” del recurso, el proceso de toma de conciencia y superación de estas deficiencias (p. 185).

Referencias y bibliografía

- Adler, J. (2000). Conceptualising resources as a theme for teacher education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 3, 205-224.
- Adler, J., Ball, D. L., Krainer, K., Lin, F. L., & Novotna, J. (2005). Reflections on an emerging field: researching mathematics teacher education. *Educational Studies in Mathematics*, 60, 359-381.
- García, S., & Mendoza, T. (2008). *Fractal 3*. México: SM.
- Gilbert, J. (1994). The construction and reconstruction of the concept of the reflective practitioner in the discourses of teacher professional development. *International Journal of Science Education*, 16(5), 511-522.
- Gueudet, G., & Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics*, 71, 199-218.
- Guzmán, J., & Kieran, C. (2013). Becoming aware of mathematical gaps in new curricular materials. *The Mathematics Enthusiast*, 10(1,2), 163-190.
- Moore-Russo, D., Conner, A. M., & Rugg, K. I. (2011). Can slope be negative in 3-space? Studying concept image of slope through collective definition construction. *Educational Studies in Mathematics*, 76, 3-21.

- Nagle, C., Moore-Russo, D., Viglietti, J., & Martin, K. (2013). Calculus students' and instructors' conceptualizations of slope. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 11(6), 1491-1515.
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies: une approche cognitive des instruments contemporains*. París: Armand.
- Stanton, M., & Moore-Russo, D. (2012). Conceptualizations of slope: a review of state standards. *School Science and Mathematics*, 112(5), 270-277.
- Stump, S. L. (1999). Secondary mathematics teachers' knowledge of slope. *Mathematics Education Research Journal*, 11(2), 124-144.
- Stump, S. L. (2001). Developing preservice teachers' pedagogical content knowledge of slope. *Journal of Mathematical Behaviour*, 20, 207-227.
- Walter, J. G., & Gerson, H. (2007). Teachers' personal agency: making sense of slope through additive structures. *Educational Studies in Mathematics*, 65, 203-233.
- Zaslavsky, O., Sela, H., & Leron, U. (2002). Being sloppy about slope: the effect of changing the scale. *Educational Studies in Mathematics*, 49, 119-140.

Significados para la derivada en un curso universitario de Matemáticas

Walter F. **Castro** G.

Universidad de Antioquia

Colombia

wfcastro82@gmail.com

Germán **Cadavid** A.

Universidad Tecnológica de Pereira

Colombia

gcadavid@utp.edu.co

Luis R. **Pino-Fan**

Universidad de Los Lagos

Chile

luis.pino@ulagos.cl

Resumen

En este documento se informa sobre los significados institucionales que se le atribuyen a la derivada en el curso de Matemáticas I en la Universidad Tecnológica de Pereira, provincia de Risaralda, Colombia. Igualmente se estudian los contextos en los que enmarcan los significados; estos se han identificado mediante un análisis de configuraciones epistémicas realizado a 12 exámenes aplicados en un lapso de cinco años y al libro de ejercicios diseñado ex profeso para el curso. A partir de dicho análisis se identifican y caracterizan las configuraciones epistémicas las cuales llevan asociadas significados parciales de la derivada. Los significados institucionales identificados en los exámenes corresponden mayoritariamente a: derivabilidad y derivadas laterales por definición; verificación de derivadas, y fórmulas de derivación. Los contextos en los que se ubican las tareas matemáticas son del tipo evocado y matemático.

Palabras clave: significado institucional, derivada, configuración epistémica, educación.

Abstract

It is reported on the contexts proposed and on the meanings assigned to the derivative that are used in a mathematics course offered to freshmen at Universidad Tecnológica de Pereira, Risaralda's province, Colombia. The meanings are identified by means of epistemic configurations analysis applied to 12 exams over a span of five years. Based on the epistemic analysis some epistemic configurations linked to the derivative were identified. The institutional meanings identified correspond mainly to: derivability and lateral derivatives computed via the formal definition; use of the rules of derivation, and the verification of some derivative identities. The context where the tasks are located corresponds to evocated and mathematical.

Key words: meaning, derivative, epistemic configuration, education.

Presentación

El estudio del Cálculo Diferencial e Integral forma parte de los planes de estudio que las universidades ofrecen a los estudiantes inscritos en carreras de ingeniería, ciencias o educación matemática. Diversas investigaciones informan sobre la enseñanza del cálculo (Artigue, 1995; Badillo, 2003) y señalan algunas de sus problemáticas (Sofronas, DeFranco, Vinsonhaler, Gorgievski, Schroeder y Hamelin, 2011). Algunos estudios reportan sobre la comprensión gráfica que los estudiantes manifiestan sobre la derivada (Habre y Abboud, 2006), o sobre la comprensión sobre la regla de la cadena (Clark; Cordero; Cottrill; Czarnocha; Devries; St. John; Vidakovic, 1997). Biza y Zachariades (2010, p. 26) reportan que los estudiantes de su estudio preparan las pruebas haciendo énfasis en el desarrollo de algoritmos y fórmulas para uso específico. La derivada ha sido investigada desde diversas perspectivas, que incluye la cognitiva (concepciones de los estudiantes, esquemas cognitivos, tipos de errores...) e instruccional (estrategias y alternativas para la enseñanza de la derivada), tal y como se reporta en Artigue, Batanero y Kent (2007) o en Sánchez-Matamoros, García y Llinares (2006). Diversas investigaciones que indagan sobre los significados manifestados por los estudiantes, han informado sobre la existencia de conflictos entre las construcciones de los estudiantes y los significados formales o institucionales presentados por los libros de texto (Mundy y Graham, 1994; Sánchez-Matamoros, García y Llinares, 2006). Es de interés estudiar e identificar los significados matemáticos preferenciados por las instituciones educativas y por los profesores así como conocer las creencias declarativas de los profesores, en tanto que tales significados determinan el tipo de énfasis formativo que las instituciones educativas prefieren. De acuerdo con Pino-Fan, Godino y Font (2011; p. 174) el significado global de referencia se define “*a partir de dos nociones: significado global (también denominado significado holístico u holosignificado, comprende los diferentes significados parciales de un objeto matemático) y significado de referencia (entendido como los sistemas de prácticas que se usan como referencia para elaborar los significados que se pretenden incluir en un proceso de estudio)*”. En este trabajo entenderemos el significado de referencia como “el sistema de prácticas que usan como referencia para enseñar el concepto de derivada”. Asumiremos que los significados que se ponen en juego tanto en el diseño de los exámenes como en el diseño exprofeso del libro de ejercicios constituyen el significado de referencia en la institución educativa particular. El Departamento de Matemáticas de la Universidad Tecnológica de Pereira, provincia de Risaralda, Colombia, ha asumido un enfoque particular para orientar la evaluación del curso de Matemáticas I. Este enfoque deposita la responsabilidad de diseño de los exámenes en un grupo de profesores. Los profesores que orientan los cursos deben, entonces, preparar a sus estudiantes para que aprueben los exámenes diseñados por el grupo de profesores encargados del diseño de las pruebas. Asumimos que la preferencia manifiesta de los profesores encargados del diseño de las pruebas corresponde a la preferencia institucional tanto de los conceptos que se deben estudiar como de los logros que los estudiantes deben alcanzar para aprobar el curso motiva el interés por conocer, en detalle, los significados institucionales sobre la derivada, que es el objeto matemático que se estudia en el curso. La derivada ha adquirido diversos significados a lo largo de la historia. Pino-Fan, Godino y Font (2011, p. 171) han encontrado nueve significados distintos asociados a la derivada a lo largo de la historia. La búsqueda de los significados institucionales de referencia para los profesores, se hace tomando en cuenta dos fuentes: un libro de ejercicios, diseñado exprofeso por la Facultad de Ciencias Básicas, y los doce exámenes que se aplicaron a los estudiantes durante un lapso de ocho años. Los exámenes son aplicados a los estudiantes sin discriminación por tipo de carrera. Los significados preferidos por la Institución son los que

determinan tanto el contenido temático de los planes de curso, los objetivos, los énfasis instruccionales escogidos por los profesores y, finalmente, el diseño de los exámenes que son propuestos a los estudiantes. Los resultados de estos exámenes son un factor determinante en la permanencia de los estudiantes en el sistema universitario. En este documento se reporta sobre dos aspectos: (a) los significados institucionales enfatizados por la Universidad Tecnológica de Pereira, identificados en los exámenes aplicados durante el periodo 2006-2010; (b) Los contextos en los cuales se ubican las preguntas incluidas en los exámenes.

Enfoque teórico

El Enfoque Onto-Semiótico (EOS) de la Instrucción y la Cognición (Godino, Batanero y Font, 2007) ha afrontado el problema de la significación y representación del conocimiento matemático mediante la elaboración de una ontología matemática explícita sobre presupuestos iniciales de tipo antropológicos, semióticos y socioculturales. Esto supone asumir una cierta relatividad socio-epistémica para el conocimiento matemático ya que el conocimiento se considera ligado indisolublemente a la actividad en la cual el sujeto se implica y es dependiente de la institución cultural y contexto social del que forma parte (Radford, 1997). Los significados institucionales se estudian usando el EOS, y se utilizan tanto las entidades primarias, como las dualidades, para caracterizar los significados institucionales del objeto matemático derivada en el curso de Matemáticas I. Concretamente, se utiliza la noción de *configuración epistémica* (Pino-Fan, Godino y Font, 2011) para efectuar un análisis de los conocimientos matemáticos involucrados en las soluciones de las tareas matemáticas, la cual refiere a la descripción y caracterización de los objetos matemáticos involucrados en las prácticas institucionales.

Contexto

El estudio se realiza en la Universidad Tecnológica de Pereira, universidad pública localizada en la provincia de Risaralda, Colombia. Cada semestre académico, aproximadamente 1200 estudiantes se matriculan en el curso de Matemáticas I, asignatura que es prerrequisito de otros cursos de los planes de estudio de las carreras de la facultad de ingeniería, ciencias exactas y ciencias de la educación. Un concepto importante en el listado temático del curso Matemáticas I, es la “función derivada”. La importancia curricular concedida por la Universidad al objeto derivada, se reconoce tanto en el porcentaje alto concedido para su evaluación (50% de la nota total) como en el tiempo (42 horas o 39.2 % del tiempo total del curso) de clase magistral.

Metodología y análisis de datos

La metodología usada en esta investigación es de carácter documental (Cohen, Manion y Morrison, 2011). Los documentos fuente, para el análisis reportado en este documento, fueron el libro de ejercicios diseñado por el Departamento de Matemáticas de la Universidad, y 12 exámenes de Matemáticas I, los cuales fueron aplicados a los estudiantes del curso durante el periodo 2006-2010. Los documentos estudiados fueron codificados, de acuerdo con varios criterios, de los cuales sólo usamos dos para este reporte de investigación: *configuraciones epistémicas* y *tipos de contextos*. Se utilizó la propuesta de configuraciones epistémicas descritas en Pino-Fan, Godino y Font (2011). Se asumió la propuesta sobre los tipos de contexto de Martínez (2003) ampliada por Font (2007) para estudiar los contextos en los cuales se ubicaban las preguntas de los exámenes. Para determinar las configuraciones epistémicas se resolvieron todos los exámenes y se analizaron los grupos de ejercicios, por capítulo, contenidos en el libro de ejercicios. Se utilizó el análisis epistémico (Godino, Rivas, Castro y Konic, 2008) que identifica las entidades primarias presentes y emergentes, que se ponen en juego en la solución

de una tarea: lenguajes, situaciones, procedimientos, argumentos, proposiciones y definiciones. A partir de las soluciones y del análisis epistémico, se establecieron las entidades primarias: términos, conceptos, procedimientos y propiedades que se requieren para dar solución a cada pregunta del examen. Se identificaron 6 Configuraciones Epistémicas (CE), que caracterizan los diversos significados vinculados con la derivada. Las seis configuraciones son: 1) CE1: Tangentes; 2) CE2: Derivabilidad y derivadas laterales por definición; 3) CE3: Verificación de derivadas; 4) CE4: Reglas de Derivación; 5) CE5: Fórmulas de Derivación; y 6) CE6: Aplicaciones. Para determinar los contextos en los cuales se ubicaban las preguntas de los exámenes se analizaron los enunciados de las preguntas y los enunciados de los ejercicios propuestos en el libro. La propuesta de Font (2007) amplía a cuatro los contextos: real, simulado, evocado y matemático, y considera el contexto como el trasfondo en el cual se ubican las situaciones o problemas. El contexto real refiere a “la situación de práctica «real» de las matemáticas, al entorno sociocultural donde la práctica tiene lugar” (Martínez, 2003; p.191). El simulado “refiere a una representación del contexto real y reproduce una parte de sus características” (Martínez, 2003). El contexto evocado “refiere a las situaciones o problemas matemáticos propuestos por el profesor en el aula, y que permite imaginar un marco o situación donde se da este hecho...” (Martínez, 2003; p.191). Finalmente, el contexto matemático refiere a una situación intra-matemática. Vinculados a los contextos se ubicaron las aplicaciones de los objetos matemáticos. Los tres tipos de aplicaciones propuestos en los exámenes son: A1-Graficación; A2-Razones de cambio relacionadas y A3-Optimización.

Resultados

Por razones de espacio sólo se informa sobre los resultados de los análisis correspondientes a Configuraciones Epistémicas encontradas (Tabla 1); los tipos de contexto para las preguntas de los exámenes parciales aplicados durante el periodo 2006-2010 (Tabla 2) y las configuraciones epistémicas cruzadas con los contextos (Tabla 3). La Tabla 1 cruza las Configuraciones Epistémicas con los exámenes -cuarto y quinto- aplicados en el periodo 2006-2010. Se colige que durante el periodo 2006-2010 las configuraciones CE2, CE3 y CE5 fueron preferenciadas. Estas configuraciones corresponden a CE2: *Derivabilidad y derivadas laterales por definición*; CE3: *Verificación de derivadas*, y CE5: *Formulas de Derivación*. Las tres configuraciones enfatizan el uso de la definición de la derivada o el uso de reglas de derivación o la comprobación de ciertas identidades. El carácter procedimental y algebraico identificado en la preferencia por estas tres configuraciones es notable. Artigue (1995) advierte que aunque es importante enseñar a los alumnos a realizar cálculos de derivadas y a resolver algunos problemas estándar, es importante enfatizar otros aspectos del concepto para favorecer que los estudiantes logren alcanzar una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que conforman el núcleo de este campo de las matemáticas. Zandieh (2000) sugiere que un estudiante no exhibe comprensión amplia sobre el concepto derivada, si éste no puede, en algún contexto relevante, reconocer y construir cada uno de los tres procesos (razón, límite y función) involucrados en la comprensión del concepto de derivada.

Tabla 1

Configuraciones epistémicas en el cuarto y en el quinto examen de Matemáticas I.

Configuraciones epistémicas	Periodo 2006-2010																	
	CE1		CE2		CE3		CE4		CE5		CE6		SCE1		SCE2		SCE3	
Años	4º	5º	4º	5º	4º	5º	4º	5º	4º	5º	4º	5º	4º	5º	4º	5	4	5
Año 1 (2006)	-		✓		✓		-		✓	✓	-	✓						
Año 2	-	-	✓	✓	-	✓	-	-	✓	✓	✓	✓	✓					
Año 3	-	✓	✓	✓	✓		-		✓	✓	-	✓						
Año 4		-	✓	-	✓	✓	-	-	✓	✓	-	✓						
Año 5 (2010)		-	✓	✓	✓	-	-	-	✓	✓	-	✓						

Nota. Los guiones indican que los exámenes, en los años correspondientes, no incluyeron una pregunta en tal configuración.

La Tabla 2 muestra los tipos de contexto identificados para el cuarto y quinto examen, correspondiente al periodo 2006-2010. La inclusión de tareas en contexto se vincula con la matemática como actividad de carácter humano. Si consideramos que durante los 5 años hubo 25 ocasiones para formular preguntas -cinco por cada año- de estas el 18% corresponden al contexto matemático, mientras que 82% corresponden al contexto evocado. Este contexto refiere a las situaciones matemáticas propuestos por el profesor que permite imaginar un marco o situación donde se da este hecho matemático.

Tabla 2

Tipos de contexto para el cuarto y quinto examen en el periodo 2006-2010.

Año	Pregunta 1		Pregunta 2		Pregunta 3		Pregunta 4		Pregunta 5	
	4°	5°	4°	5°	4°	5°	4°	5°	4°	5°
Año 1 (2006)	Mat	Evo	Evo	Evo	Evo	Evo	Evo	Mat	Evo	Sim
Año 2	Evo	Mat	Evo	Evo	Evo	Evo	Evo	Mat	...	Sim
Año 3	Mat	Mat	Evo	Evo	Evo	Evo	Evo	Mat	Evo	Sim
Año 4	Mat	Evo	Evo	Evo	Evo	Mat	Evo	Sim	...	...
Año 5 (2010)	Mat	Evo	Evo	Evo	Evo	Mat	Evo	Mat	...	Mat

Nota. Los puntos suspensivos indican que los exámenes, en los años correspondientes, no incluyeron una quinta pregunta. “Mat” representa Matemático; “Evo” representa Evocado y “Sim” representa “Simulado”.

La Tabla 3 muestra los contextos empleados y las configuraciones epistémicas contempladas en el cuarto y quinto examen de Matemáticas I para el periodo 2006-2010.

Tabla 3

Contextos versus configuraciones epistémicas.

Cuarto examen y quinto examen. Periodo 2006-2010	Configuraciones Epistémicas: CE									
	4º examen					5º examen				
<i>Contextos</i>										
<i>Evocado</i>	<i>CE1</i>	<i>CE2</i>	<i>CE3</i>	<i>CE4</i>	<i>CE 5</i>	<i>CE2</i>	<i>CE3</i>	<i>CE4</i>	<i>CE5</i>	
<i>Real</i>			...						<i>CE6</i>	
<i>Simulado</i>			...						<i>CE6</i>	
<i>Matemático</i>	<i>CE1</i>	<i>CE2</i>	<i>CE3</i>	<i>CE4</i>	<i>CE5</i>				<i>CE2</i>	

Al cruzar los contextos matemáticos con las configuraciones epistémicas se aprecia que, para el cuarto examen, las configuraciones aparecen distribuidas en los dos tipos de contexto referidos: evocado y matemático, sin embargo para el quinto examen, las configuraciones se vinculan con cada uno de los contextos. Para ambos exámenes, las configuraciones se concentran en el contexto evocado. Esta distribución se interpreta en términos de la presencia constante de los cinco tipos de configuraciones a lo largo del tiempo.

Conclusiones

Las configuraciones de significados y los tipos de contexto que surgen en las diferentes versiones del cuarto y quinto examen aplicado a los estudiantes muestran las preferencias institucionales manifestadas por los diseñadores de los exámenes y por ende, por la Universidad. La visión institucional de la Universidad para el concepto de derivada se decanta hacia el conocimiento de los procedimientos algebraicos vinculados con la derivada. Tal visión se identifica en la preferencia de las tres configuraciones: *Derivabilidad y derivadas laterales por definición* (CE2); *Verificación de derivadas* (CE3); y *Formulas de Derivación* (CE5). Las tres configuraciones enfatizan el uso de la definición de la derivada o el uso de reglas de derivación o la comprobación de ciertas identidades. Los tres procesos planteados por Zandieh (2000) -razón, límite y función- están escasamente representados en el conjunto de exámenes. En las pruebas estudiadas no se explora la comprensión gráfica de la derivada, por ejemplo, no se proponen gráficas que modelan fenómenos de variación para que se encuentren las expresiones algebraicas que pueden describir tales comportamientos. La regla de la cadena se explora solo en su manifestación simbólica, cuando se aplica a varias funciones compuestas, pero no se explora su uso en problemas de modelación. Tampoco se exploran ejercicios en donde la derivada dependa de dos parámetros lo que favorece que el estudiante pueda hacer uso de los elementos matemáticos de la derivada y establecer relaciones entre ellos variando estos parámetros (Sánchez-Matamoras; García y Llinares, 2006). Los contextos elegidos para ubicar los conceptos son mayoritariamente dos: el evocado y el matemático. Stillman (2009) plantea una distinción entre modelación y resolución de problemas: en la modelación matemática se inicia con las matemáticas se termina con la realidad. Por su parte, con la resolución de problemas se inicia en la realidad se termina con las matemáticas. En los términos anteriores la preferencia institucional de la Universidad se decanta por la modelación matemática, es decir, “iniciar con los conceptos y terminar en la realidad”.

Referencias y bibliografía

- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: Problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. In M. Artigue, R. Douady, L. Moreno & P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática*, (pp. 97-140). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Artigue, M., Batanero, C., & Kent, P. (2007). Mathematics thinking and learning at postsecondary level. En F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, (pp. 1011 – 1049). Charlotte, N.C: NCTM and IAP.
- Badillo, E. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemáticas de Colombia*. Tesis doctoral, U Autònoma de Barcelona, España.
- Biza, I.; Zachariades, T. (2010). First year mathematics undergraduates' settled images of tangent line. *Journal of Mathematical Behavior*, 29(4), 218–229.
- Clark, J.M., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., Devries, D.J., St. John, D., Tolias, G., & Vidakovic, D. (1997) Constructing a Schema: The Case of the Chain Rule. *Journal of Mathematical Behavior*, 14(4), 345-364.
- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2011). *Research methods in education*. London and New York: Routledge.
- Font, V. (2007). Comprensión y contexto: Una mirada desde la didáctica de las matemáticas. *La Gaceta de la RSME*, 10(2), 427 – 442.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1), 127 – 135.
- Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. F., & Konic, P. (2008). Epistemic and cognitive analysis of an arithmetic-algebraic problem solution. En De Bock, D; Søndergaard B.D., Gómez-Alfonso B & Litwin Cheng, C. (Eds.) *ICME 11*. Morelia: ICME.
- Habre, S., & Abboud, M. (2006) Student's conceptual understanding of a function and its derivative in an experimental calculus course. *Journal of Mathematical Behavior*, 25(1), 57-72, 2006.
- Mundy, F. J., & Graham, K. (1994). Research in calculus learning: understanding limits, derivatives and integrals. En J. Kaput y E. Dubinsky (Eds.), *Research Issues in Undergraduate Mathematics Learning*, MAA Notes 33, (pp. 31-45). Washington DC: Mathematical Association of America.
- Martinez Silva, M. (2003). *Concepciones sobre la enseñanza de la resta: Un estudio en el ámbito de la formación permanente del profesorado*. Departamento de Didáctica de las Matemáticas y de la Ciencias Experimentales. Bellaterra, Universidad Autònoma de Barcelona. Doctorado.
- Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa*, 13(1), 141 – 178.
- Radford, L. (1997). On psychology, historical epistemology and the teaching of mathematics: Towards a socio-cultural history of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 17(1), 26-33.
- Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2006). El desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las Ciencias*, 24(1), 85 – 98.
- Sofronas, K. S. D., T.C; Vinsonhaler, C; Gorgievski, N; Schroeder, & L; Hamelin, C (2011). What does it mean for a student to understand the first-year calculus ? Perspectives of 24 experts. *Journal of Mathematical Behavior*, 30(2), 131-148.
- Stillman, G. (2009, Jun 4). Implementing applications and modelling in secondary school: Issues for teaching and learning. *Keynote address delivered at the Mathematics Teachers Conference, Singapore*.

Zandieh, M. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. En Dubinsky, E., Schoenfeld, A. J. & Kaput, J. (Eds.). *Research in Collegiate Mathematics Education IV Vol. 8*, (pp. 103-127). Providence, USA: American Mathematical Society

Uma produção de significados para o conceito de anel

Marcelo Silva de **Jesus**

Universidade Estadual de Londrina

Brasil

marcelosilvadejesus@hotmail.com

Angela Marta Pereira das Dores **Savioli**

Universidade Estadual de Londrina

Brasil

angelamarta@uel.br

Mariany Layne **Souza**

Universidade Estadual de Londrina

Brasil

marianylayne@gmail.com

Resumo

No presente artigo, apresentam-se significados que podem ser produzidos para o conceito de anel em estruturas algébricas a partir de livros didáticos. O objetivo é apresentar e discutir que significados alunos de um curso de estruturas algébricas poderiam produzir. Para tanto, adota-se o Modelo dos Campos Semânticos (MCS), proposto por Lins (2012), como base teórica epistemológica. Percebe-se que são diversos os significados que podem ser produzidos para o conceito de anel a partir de livros didáticos, entre eles, um conjunto numérico e duas operações, um conjunto qualquer e duas operações e um conjunto qualquer que com duas operações goza determinadas propriedades. Assim, se atentar para isso é fundamental para promover um espaço comunicativo nas salas de aula favorável ao processo de ensino e aprendizagem de conceitos algébricos.

Palavras chave: estruturas algébricas, anel, livros didáticos, produção de significados, modelo dos campos semânticos.

Introdução

As estruturas algébricas ocupam um papel de destaque na Álgebra Abstrata, pela rica contribuição para o seu desenvolvimento. Além de integrarem o currículo de cursos de Matemática aparecem em currículos de cursos tais como as Engenharias, a Física e a Computação.

O ensino de estruturas algébricas encontra uma justificativa nas palavras de Souza (2008) quando ela escreve: “Não é só importante, mas fundamental o ensino de estruturas algébricas em um curso de licenciatura em matemática. Sem esta disciplina o aluno sai do curso sem o alicerce básico para ensinar os princípios fundamentais da matemática” (p. 3).

Porém, o ensino de estruturas algébricas em cursos de graduação não tem apresentado resultados satisfatórios por parte dos alunos. Pela abstração e formalismo, são inúmeras as

dificuldades apresentadas. Como observa Campos (2008) “... os conceitos algébricos são apresentados aos estudantes, em geral, a partir das definições formais apoiadas na linguagem da teoria de conjuntos, em que as relações entre os objetos são mais importantes do que o próprio objeto e o conhecimento é apresentado na forma axiomática” (p. 4).

Ainda são incipientes os trabalhos relacionados a estruturas algébricas, principalmente os que tratam de anéis. O estudo de anéis também encontra em Souza (2008) uma justificativa: “... é fundamental um aluno de licenciatura em matemática, não só saber, mas dominar as propriedades dos anéis, saber dar exemplos, contra-exemplos, discuti-los e resolver exercícios com as propriedades pertinentes” (p.3).

O conceito de anel, como outros conceitos da Álgebra Abstrata, passou por um longo processo de desenvolvimento até se constituir nos conceitos que encontramos nos livros didáticos analisados. Tais conceitos tiveram suas origens ligadas a diferentes domínios, como por exemplo, polinômios e a teoria de inteiros algébricos. Muitos matemáticos como Richard Dedekind, David Hilbert, Adolf Fraenkel e Emmy Noether contribuíram no desenvolvimento desses conceitos.

Em geral, nos cursos de estruturas algébricas os alunos são apresentados a livros considerados didáticos, e é esperado que produzam significados para os conteúdos abordados.

Considerando que estes livros influenciam os significados produzidos pelos alunos, que nem sempre são os esperados pelo professor, propõe-se neste artigo apresentar e discutir significados que podem ser produzidos para o conceito de anel em estruturas algébricas a partir de livros considerados didáticos.

Significado e o Modelo dos Campos Semânticos

O modelo dos Campos Semânticos (MCS) é entendido por Silva (1997) como sendo “um modelo epistemológico que nos permite compreender alguns aspectos do processo de produção de significados em matemática” (p. 10).

Esse modelo começou a ser idealizado por Lins (1999) ao tentar responder perguntas relacionadas à sala de aula, como por exemplo: o que os alunos pensam quando erram? (sem que o foco estivesse no erro); o que é significado? E o que é conhecimento? (termos comumente utilizados em pesquisas científicas sem que os pesquisadores se preocupem em defini-los).

Ao contrario de outros pesquisadores Lins (2012) preocupa-se em definir o que é conhecimento e o assume como “... uma crença-afirmação (o sujeito enuncia algo em que acredita) junto com uma justificação (aquilo que o sujeito entende como lhe autorizando a dizer o que diz)” (p. 12). Por exemplo, considere que um aluno do 3º ano do Ensino Fundamental e um aluno do Ensino Médio tenham que justificar o porquê de determinada figura ser classificada como um quadrado. Ao justificar sua crença-afirmação, o aluno do 3º ano poderia dizer que é porque ‘a figura possui os quatro lados de mesma medida’. Enquanto o outro poderia dizer que ‘a figura satisfaz a condição de ser um retângulo, ou seja, é um quadrilátero com quatro ângulos iguais e, além disso, possui os quatro lados de mesma medida’.

A partir da definição de conhecimento, proposto por Lins, os dois alunos constituíram conhecimentos distintos. Isso porque apesar dos dois acreditarem e afirmarem uma mesma coisa, a figura ser um quadrado, as justificações dadas são diferentes, e consequentemente os conhecimentos também o são.

Como nesse artigo um dos objetivos está em produzir significados para o conceito de anel a partir de livros didáticos, busca-se compreender o processo de comunicação proposto pelo MCS, constituído pela tríade autor-texto-leitor. Lins (2012) explica essa tríade da seguinte maneira:

Quem produz uma enunciação é o autor. O autor fala sempre na direção de um leitor, que é constituído (produzido, instaurado, instalado, introduzido) pelo o autor. Quem produz significado para um resíduo de enunciação é o leitor. O leitor sempre fala na direção de um autor, que é constituído (produzido, instaurado, instalado, introduzido) pelo o leitor (p. 14).

Em Lins (2012) “resíduo de enunciação é entendido como sendo algo com que me deparo e que acredito ter sido dito por alguém” (p. 27). Já o significado é definido como sendo “... aquilo que efetivamente se diz a respeito de um objeto (aquilo para que se produz significado), no interior de uma atividade” (Lins, 2012, p. 28).

Nesse sentido, as informações contidas em um livro são resíduos de enunciação que podem tornar-se texto quando alguém produz significado para eles. Ao ler os resíduos de enunciação, encontrados em livros didáticos, irá se constituir o leitor na medida em que produz significados para tais enunciações, constituindo ao mesmo tempo um autor (produtores dos tais resíduos de enunciação), para o qual fala em sua direção.

Outros dois conceitos importantes no MCS são o de núcleo e o de campo semântico. De acordo com Lins (2012) “o núcleo de um campo semântico é constituído por estipulações locais, que são localmente verdades absolutas, que não requerem, localmente, justificação. Já o campo semântico é um processo de produção de significado, em relação a um núcleo, no interior de uma atividade” (pp. 26-27).

Uma pessoa opera em um campo semântico toda vez que estiver produzindo significado em relação a um núcleo dado.

Metodología, Leitura plausível e os livros didáticos

Para identificar e discutir os significados a respeito do conceito de anel optou-se por realizar uma pesquisa de natureza qualitativa.

A atividade de produzir significados para o conceito de anel a partir dos resíduos de enunciação encontrados em livros didáticos será por meio de uma leitura plausível, pois se entende que:

A leitura plausível se aplica de modo geral aos processos de produção de conhecimento e significado; ela indica um processo no qual o todo do que eu acredito que foi dito faz sentido. Outra maneira de dizer que faz sentido em seu todo é dizer que o todo é coerente (nos termos de quem eu constituo como um autor do que estou lendo)” (Lins, 2012, p. 23).

É importante deixar claro que fazer uma leitura plausível implica em direcionar os olhares para aquilo que foi dito pelo sujeito e nunca para o que ele não disse.

Além disso, para explicitar a importância de um professor conhecer os diferentes significados que seus alunos podem produzir para um conceito matemática, apresentam-se os Campos Semânticos na qual se opera durante a atividade de decidir se são anéis os conjuntos $(M_n(A), +, \cdot)$, $2Z = \{0, \pm 2, \pm 4, \dots\}$, $M_2(R)$ e a tripla $(R, +, \cdot)$ com $R = \{0, 1, 2, 3\}$ definida de acordo com as tabelas:

Tabela 1

Tabela de adição

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

Fonte: Baldo. 2013.

Tabela 2

Tabela de multiplicação

*	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	0	3	3
2	0	0	2	2
3	0	0	1	1

Fonte: Baldo. 2013.

A seleção dos livros foi feita considerando aqueles que permitissem por meio da leitura de definições e exemplos produzir algum significado matemático para o conceito de anel e que compõem as ementas da disciplina de estruturas algébricas de um curso de licenciatura em matemática de uma universidade norte paranaense, demonstrando certa preferência de alguns professores por esses livros.

Os livros selecionados foram: Domingues e Iezzi (2003), Hefez (1993), Lang (1972), Hernstein (1970).

Resultados das análises

Iniciando a leitura a partir do livro de Hefez (1993) seguem as análises e os resultados.

Hefez (1993) define anéis já no 2º capítulo, intitulado *Os Números Inteiros e Racionais*, para motivar a caracterização dos inteiros. Percebe-se isso a partir do seguinte comentário.

Os Números inteiros

O conjunto $\mathbb{Z}$ dos números inteiros é munido de duas operações, uma adição (+) e uma multiplicação ($\cdot$), além de uma relação de ordem ($\leq$). Estes objetos se relacionam através de várias propriedades que listaremos ao longo das três próximas subseções. Esta lista de propriedades caracterizará completamente os números inteiros. (p. 23).

Logo em seguida, apresenta a seguinte definição:

Sejam A um conjunto e (+) e ($\cdot$) duas de operações em A , chamadas de adição e multiplicação. A terna $(A, +, \cdot)$ será chamada de anel se as operações gozarem das seguintes propriedades.

A_1 (**A adição é associativa**). Quaisquer que sejam $a, b, c \in A$, tem-se que $(a + b) + c = a + (b + c)$.

A_2 (**A adição é comutativa**). Quaisquer que sejam $a, b \in A$ tem-se que $a + b = b + a$

A_3 (**Existe um elemento neutro para a adição**) Existe $\alpha \in A$ tal que $\alpha + x = x$, para todo $x \in A$.

A_4 (**Todo elemento de A possui um simétrico**) Para todo $\alpha \in A$, existe $a' \in A$ tal que $a + a' = \alpha$.

M_1 (**A multiplicação é associativa**) Quaisquer que sejam $a, b, c \in A$ tem-se que $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

M_2 (**A multiplicação é comutativa**) Quaisquer que sejam $a, b \in A$, tem-se que $a \cdot b = b \cdot a$.

M_3 (**Existe um elemento neutro para a multiplicação**) Existe $e \in A$ com $e \neq 0$, tal que $x \cdot e = x$ para todo $x \in A$.

AM (**A multiplicação é distributiva com relação à adição**) Quaisquer que sejam $a, b, c \in A$, tem-se que $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$. (Hefez, 1993, p. 24)

A partir da leitura desse texto gerou-se o seguinte significado para anel:

A: Um anel é um conjunto numérico, uma generalização dos inteiros, munido das operações de adição e multiplicação que goza das propriedades associativa e comutativa para a adição e a multiplicação, a existência de elemento neutro para a adição e para a multiplicação, a existência de simétrico aditivo para qualquer elemento e a distributividade da multiplicação em relação à adição.

Estabelecido um núcleo a partir deste significado, a atividade de produção de significado em relação a esse núcleo será chamada aqui de Campo Semântico dos Inteiros.

Operando neste campo semântico não se produziu significados para os anéis de matrizes, $(M_n(A), +, \cdot)$, no qual não importa a natureza de seus elementos, por não ser o conjunto dos inteiros.

Por sua vez, Lang (1972) apresenta a definição de anel da seguinte maneira:

Um anel R é um conjunto, cujos objetos podem ser adicionados e multiplicados, (i. e. são dadas correspondências $(x, y) \rightarrow x + y$ e $(x, y) \rightarrow xy$ de pares de elementos de R , em R), e que satisfaz às seguintes condições:

AN 1. Sob a adição, R é um grupo aditivo (abeliano)

AN 2. Para todos $x, y, z \in R$ temos

$$x(y + z) = xy + xz \text{ e } (y + z)x = yx + zx$$

AN 3. Para todos $x, y, z \in R$, temos $(xy)z = x(yz)$.

AN 4. Existe um elemento $e \in R$, tal que $ex = xe = x$ para todo $x \in R$. (p. 40)

Percebe-se que o autor utiliza o conceito de grupo aditivo para definir anel.

Lang (1972) apresenta ainda alguns exemplos de anéis:

Exemplo 1. Seja R o conjunto $\mathbb{Z}$ dos inteiros; R é um anel;

Exemplo 2. Os conjuntos dos números racionais, reais e complexos são anéis;

Exemplo 3. Seja R o conjunto das funções contínuas com valores reais, definidas no intervalo $[0, 1]$. A soma e o produto de duas funções f, g são definidas da maneira usual, ou seja, $(f + g)(t) = f(t) + g(t)$ e $(fg)(t) = f(t)g(t)$. Com isso, R é um anel. (p. 40)

Isto leva a produzir outro significado para anel:

B: Um anel é um conjunto qualquer, munido das operações de adição e multiplicação, que satisfaz as condições de ser um grupo aditivo abeliano, e com a multiplicação ser comutativa, associativa e distributiva à esquerda e à direita e possuir elemento neutro para a multiplicação.

Estabelecido um núcleo a partir desse significado, a atividade de produção de significado em relação a esse núcleo será chamada aqui de Campo Semântico Conjunto qualquer - Associatividade.

Operando neste campo semântico compreende-se o conjunto vazio como sendo um anel, na qual pode demonstrar que o conjunto goza de todas as propriedades necessárias por vacuidade. Enquanto que os conjuntos $2Z = \{0, \pm 2, \pm 4, \dots\}$ e $M_2(R)$ não seriam, por não possuir elemento neutro para a multiplicação e não gozar a propriedade comutativa para a multiplicação, respectivamente.

Já o livro de Hernstein (1964) introduz o Capítulo 3 intitulado *Teoria dos Anéis*, dizendo que anéis são alguns dos sistemas algébricos que funcionam como as pedras fundamentais para as estruturas que compreendem a matéria hoje denominada álgebra moderna, os quais provêm do conjunto dos inteiros, sendo cópias e generalizações dos aspectos algébricos dos inteiros ordinários. E define anel como:

Um conjunto não vazio R é dito um anel associativo se em R estão definidas duas operações, indicadas por $+$ e $*$ respectivamente, tais que para todos a, b e c em R :

- (1) $a + b$ está em R .
- (2) $a + b = b + a$.
- (3) $(a + b) + c = a + (b + c)$
- (4) Existe um elemento 0 em R tal que $a + 0 = a$ (para cada a em R).
- (5) Existe um elemento $-a$ em R tal que $a + (-a) = 0$.
- (6) $a \cdot b$ está em R .
- (7) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
- (8) $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ e $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$ (as duas leis distributivas). (pp. 101-102)

O autor apresenta a possibilidade de termos um anel que não satisfaça a associatividade da multiplicação quando diz:

Sempre que falarmos de anel será entendido que queremos dizer anel associativo. Anéis não-associativos, isto é, aqueles em que o axioma 7 não vale, podem ocorrer em matemática e são estudados, mas não teremos oportunidade de considerá-los. (Hernstein, 1970, p. 102)

A leitura dessas frases propostas por Hernstein induz a gerar o seguinte significado para anel:

C: Anel é um conjunto qualquer, não vazio, munido das operações de adição e de multiplicação, satisfaz a condição de ser um grupo abeliano com relação à operação de adição, fechado com relação à multiplicação, associativo para a multiplicação e distributivo em relação à adição.

Estabelecido um núcleo a partir desse significado, a atividade de produção de significado em relação a esse núcleo será chamada aqui de Campo Semântico Conjunto não vazio.

Operando neste campo semântico pode-se afirmar que a tripla $(R, +, \cdot)$ (definida anteriormente) é um anel, mesmo não satisfazendo a propriedade associativa para a multiplicação.

Outro encaminhamento pode ser identificado em Domingues e Iezzi (2003). Os autores apresentam a definição de anel como inspiração das propriedades compartilhadas pelo sistema dos números inteiros, e o defini como:

Um sistema matemático constituído de um conjunto não vazio A e um par de operações sobre A , respectivamente uma adição $(x, y) \rightarrow x + y$ e uma multiplicação $(x, y) \rightarrow xy$, é chamado anel se:

- (i) $(A, +)$ é um grupo abeliano, ou seja:
 - a) Se $a, b, c \in A$, então $a + (b + c) = (a + b) + c$ (associatividade);
 - b) Se $a, b \in A$, então $a + b = b + a$ (comutativa);
 - c) Existe um elemento $0_A \in A$ tal que, qualquer que seja $a \in A$, $a + 0_A = a$ (existência do elemento neutro);
 - d) Qualquer que seja $a \in A$, existe um elemento em A , indicado genericamente por $-a$, tal que $a + (-a) = 0_A$ (existência de opostos).
- (ii) A multiplicação goza da propriedade associativa, isto é:

se $a, b, c \in A$, então $a(bc) = (ab)c$.
- (iii) A multiplicação é distributiva em relação à adição, vale dizer:

se $a, b, c \in A$, então $a(b + c) = ab + ac$ e $(a + b)c = ac + bc$. (p. 211)

Em Domingues e Iezzi (2003) os autores apresentam alguns anéis, considerados por ele como importantes:

- (i) Anéis numéricos
 - a) anel dos números inteiros: $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$;
 - b) anel dos números racionais: $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$;
 - c) anel dos números reais: $(\mathbb{R}, +, \cdot)$;
 - d) anel dos números complexos: $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.
- (i) Anel das classes de resto módulo m
- (ii) Anéis de matrizes
- (iii) Anéis de funções
- (iv) Produtos diretos. (p. 213)

A partir da leitura desse resíduo de enunciação houve a produção de mais um significado:

D: Anel é um sistema matemático constituído de um conjunto não vazio A e um par de operações sobre A , respectivamente uma adição $(x, y) \rightarrow x + y$ e uma multiplicação $(x, y) \rightarrow xy$ que satisfaz a condição de ser um grupo abeliano sob a adição, a multiplicação goza da propriedade associativa e distributiva em relação à adição.

A atividade de produção de significado em relação a um núcleo, constituído pelo significado acima, será chamada aqui de campo semântico conjunto não vazio - associativo.

Operando neste campo semântico tem-se que a tripla $(R, +, \cdot)$ apresentada não é um anel, por não gozar da propriedade associativa para a multiplicação enquanto que os conjuntos $2\mathbb{Z} = \{0, \pm 2, \pm 4, \dots\}$ e $M_2(\mathbb{R})$ são.

Discussão dos resultados

Por meio dos significados produzidos para o conceito de anel a partir dos livros didáticos analisados, percebe-se que, provavelmente, os objetos produzidos por um aluno a partir do livro, por exemplo, de Hefez (1993) serão diferentes daqueles produzidos pelo de Lang (1972). Ficam evidentes que são diversas as maneiras que esse conceito matemático pode ser pensado, entre essas diversas maneiras têm-se: como um conjunto numérico e duas operações quaisquer, como um conjunto qualquer e as operações de adição e multiplicação usuais, e para cada um desses modos gozando ou não determinadas propriedades.

Consequentemente, os Campos Semânticos em que um aluno pode operar podem ser diversos e nem sempre são os esperados pelo professor.

Considerações finais

Percebem-se neste artigo alguns significados, sob a ótica dos MCS, que podem ser produzidos para o conceito de anel em estruturas algébricas a partir de livros didáticos. É claro que outros significados podem ser produzidos para os mesmos resíduos de enunciação analisados, constituindo diferentes núcleos e consequentemente, diferentes Campos Semânticos.

Concorda-se com Oliveira (2002) quando diz que:

...o professor de Matemática na sua prática em sala de aula muitas vezes fala de diferentes significados para uma mesma ideia como se fossem os mesmos, ou entendendo-os distintos, como se estabelecer relações entre eles fosse algo fácil ou natural.

Pensando nessas possibilidades em sala de aula, é necessário que o professor, em sua prática docente se atente para os diferentes significados que seus alunos produzam para as ideias matemáticas apresentadas a eles, sem valorizar um ou outro significado, mas criando um espaço comunicativo com tarefas que incentivem a produção de significados, e que todos eles sejam valorizados e discutidos, possibilitando assim, intervir e interagir no processo de ensino e aprendizagem quando necessário.

Limitações do estudo e pesquisas futuras

Esta pesquisa limitou-se a analisar cinco livros didáticos a partir de uma leitura plausível, por isso acredita-se que significados diferentes dos apresentados possam ser produzidos por outras pessoas que se proponham a analisar os mesmos textos ou livros diferentes dos selecionados aqui. Mas, com os resultados obtidos e sabendo das possibilidades de se estudar os significados que podem ser produzidos para conceitos matemáticos, propõe-se para pesquisas futuras a seguinte questão: como valorizar nas aulas de Álgebra Abstrata os diferentes significados produzidos pelos alunos?

Referências

- Campos, E. (2009). *A noção de congruência algébrica no Curso de Matemática: uma análise das respostas dos estudantes* (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal do Paraná, Curitiba). Recuperado em http://www.ppge.ufpr.br/teses/D09_campos.pdf
- Baldo, H. (2013). Um exemplo de anel finito não-associativo [em linha]. Instituto de matemática, estatística e computação científica. Recuperado 05 maio 2014 em http://www.ime.unicamp.br/~ftorres/ENSINO/CURSOS/Heitor2_2013.pdf.
- Domingues, H. H., & Iezzi, G. (2003). Anéis e Corpos. In *Álgebra Moderna* (4ª ed. pp. 210-280). São Paulo, SP: Atual.

- Franco, H. J. R. (2011). *Os diversos conflitos observados em alunos de licenciatura num curso de Álgebra: identificação e análise* (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora. Recuperado em <http://www.ufjf.br/mestradoedumat/files/2012/02/DISSERTA%C3%87%C3%83O-Hernando.pdf>
- Hefez, A. (1993). Os Números Inteiros e Racionais. In *Curso de Álgebra* (2ª ed. pp. 22-41). Rio de Janeiro, RJ.
- Hernstein, I. N. (1970). Teoria dos Anéis. In *Tópicos de Álgebra* (pp. 101-156). São Paulo, SP: Polígono.
- Lang, S. (1972). Anéis. In *Estruturas Algébricas* (pp. 40-54). Rio de Janeiro, RJ: Ao livro técnico S.A.
- Lins, R. C. (2012). O modelo dos campos semânticos: estabelecimento e notas de teorizações. In C. L. Angelo, E. P. Barbosa, J. R. Santos, S. C. Dantas, & V. C. A. Oliveira (Eds.), *Modelo dos campos semânticos e educação matemática* (pp. 11-30). São Paulo, SP: Midiograf.
- Oliveira, V. C. A. (2002). *Sobre a produção de significados para a noção de transformação linear em álgebra linear* (Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro). Recuperado em <http://base.repositorio.unesp.br/handle/11449/91119>.
- Silva, A. M. (2003). *Sobre a dinâmica da produção de significados para a Matemática* (Tese de Doutorado). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro. Recuperado em <http://base.repositorio.unesp.br/handle/11449/102156>.
- Souza, S. A. O. (2008). *O ensino de Álgebra no Curso de Licenciatura em Matemática*. Recuperado 10 junho 2014 em <http://www.hottopos.com/vdletras7/suzana.htm>

Un *esquema* de Transformación Lineal asociado al concepto Base

Doris Evila **González** Rojas
Universidad Industrial de Santander
Colombia

dorevigonroj@gmail.com

Solange **Roa** Fuentes
Universidad Industrial de Santander
Colombia

sroa@matematicas.uis.edu.co

Resumen

En este documento presentamos una propuesta de investigación que tiene por objetivos primero construir en términos de la Teoría APOE un esquema validado de transformación lineal que tome como elementos fundamentales su representación matricial y geométrica a partir del concepto de base. Y segundo, diseñar con base en el análisis teórico propuesto un modelo de clase que incluya elementos curriculares y didácticos que motiven la construcción exitosa de los estudiantes del esquema de transformación lineal en cursos regulares de álgebra lineal. El análisis del rol de la base ordenada en el momento de construir una de las representaciones mencionadas de la transformación lineal, nos permitirá establecer la evolución del esquema de este concepto a través de la descripción de los niveles inter, intra y trans.

Palabras clave: Transformación Lineal, Base, Representación matricial, Teoría APOE, Descomposición genética.

Introducción

Los estudiantes de ingenierías, matemáticas, licenciatura en matemáticas, entre otros, se enfrentan por primera vez con ella en el primer año de universidad. Para Dorier (2000), y otros investigadores franceses (Dorier, 1998; Dorier, Robert, Robinet, y Rogalski, 1997; Strang, 1998) los estudiantes tienen serias dificultades para el aprendizaje del álgebra lineal, sobre todo por su naturaleza abstracta y formal. La enseñanza del álgebra lineal, en particular las dificultades presentadas en los estudiantes cuando intentan aprender los conceptos abstractos de esta, han recibido la atención de varios investigadores en los últimos años. Las dificultades que se han reportado han motivado el trabajo de grupos de investigación en el mundo, que buscan explicar cómo los individuos construyen los conceptos básicos de álgebra lineal. Por ejemplo Dubinsky (1991) y otros miembros de *Research Undergraduate Mathematics Education Community* (RUMEC por sus siglas en inglés), han diseñado teorías con miras con el objetivo de plantear propuestas didácticas y metodológicas que buscan ayudar a los estudiantes a superar sus dificultades al enfrentarse con los conceptos de combinación lineal, espacio vectorial, base, conjunto generador, espacio generado, transformación lineal, entre otros.

Por ejemplo Oktaç y Trigueros (2010), presentan los resultados de un proyecto realizado en México, cuyo propósito es profundizar en la forma en que los estudiantes universitarios

aprenden álgebra lineal. En particular, las autoras, presentan los resultados obtenidos para los conceptos de espacio vectorial, transformación lineal, base y sistemas de ecuaciones lineales.

Las autoras manifiestan que todos los estudios del proyecto involucrados revelan que el aprendizaje del álgebra lineal requiere un gran esfuerzo, también muestra la necesidad de realizar estudios que no se queden en identificar las dificultades de los estudiantes, sino que ayuden a remediarlas. Por otra parte se muestra que a través de los distintos trabajos del proyecto se puede verificar que el uso de la *descomposición genética* (constructo de la Teoría APOE) constituye una herramienta poderosa para explicar las construcciones mentales involucradas en la obtención de los distintos conceptos del álgebra lineal.

En nuestro proyecto nos interesa estudiar la construcción del esquema de transformación lineal tomando como elemento principal el concepto de base ordenada. De la información obtenida en este estudio, esperamos diseñar actividades didácticas que permitan a los estudiantes una construcción más sólida de los conceptos del álgebra lineal, que les permita observar que estos conceptos están fuertemente relacionados.

Recordemos que si se conoce el efecto de la transformación lineal sobre los vectores de la base, se conoce el efecto sobre cualquier otro vector; como lo muestra Grossman (2008, p. 473)

Sea V un espacio de dimensión finita con base $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Sea W un espacio vectorial que contiene los vectores $w_1, w_2, \dots, w_n$. Entonces existe una transformación lineal única $T: V \rightarrow W$ tal que $T(v_i) = w_i$ para $i = 1, 2, \dots, n$.

En el presente escrito está dividido en cinco partes, esta introducción para dar paso a una la sección que nos muestra algunos trabajos que se han realizado, desde diferentes contextos, sobre el concepto de transformación lineal y que hemos llamado: El concepto de transformación lineal en Matemática Educativa. Seguido nos encontramos con el planteamiento de nuestro problema de investigación, allí mostramos las preguntas de investigación y los objetivos propuestos. Posteriormente, nos encontramos con La Teoría, en esta sección hablamos de aspectos básicos de esta y finalizamos con un apartado de conclusiones, donde expresamos los resultados que esperamos alcanzar en nuestro proyecto.

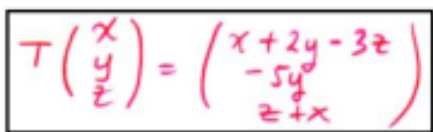
El concepto de Transformación Lineal en Matemática Educativa

La transformación lineal ha sido uno de los temas que presenta mayor obstáculo en el estudio del álgebra lineal. Algunas de las investigaciones se han centrado en el estudio de este concepto, desde diferentes miradas. Por ejemplo, Molina y Oktaç (2007) encontraron evidencias sobre la problemática del aprendizaje de la transformación lineal considerando la teoría sobre la intuición y los modelos intuitivos; los autores se plantearon la hipótesis que : los modelos intuitivos detectados en todos los estudiantes sobre la TL son una serie de casos particulares de transformaciones lineales; ellos advierten que algunos estudiantes reconocen las transformaciones lineales como expansiones, contracciones, reflexiones, rotaciones y composiciones de estos. Siendo esta una dificultad ya que por ejemplo, la transformación identidad no es una transformación lineal.

Molina y Oktaç (2007), también observan que algunos estudiantes tienden a relacionar las transformaciones lineales con líneas rectas, y que si un objeto no es una línea recta, este no puede ser el resultado de una transformación lineal. Por otro lado, los autores resaltan la importancia de trabajar las transformaciones lineales sobre espacios de diferentes dimensiones ya

que esto podría ayudar al estudiante a percibir que las transformaciones lineales pueden representar situaciones diferentes a movimientos simples.

Por su parte, Ramírez, Romero y Okaç (2014), analizan la coordinación de registros de representación de los estudiantes y su relación con el éxito y la eficiencia al resolver situaciones planteadas referentes a la transformación lineal. Estos autores para lograr un análisis significativo, no solo estudian las representaciones utilizadas por los estudiantes sino que además, sus explicaciones verbales. Por ejemplo, un estudiante presenta la siguiente definición de transformación lineal:



$$T\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} x + 2y - 3z \\ -5y \\ z + x \end{pmatrix}$$

Figura 1. Ramírez, Romero y Okaç (2014, p.15).

Los autores muestran que además que el estudiante proporciona un ejemplo de transformación lineal, decidió demostrar por qué lo es y expuso la coordinación de los registros algebraicos y matriciales eficazmente.

Mientras que Roa-Fuentes y Okaç (2010; 2012), proporcionan una descomposición genética del concepto, que consideró la interpretación funcional del concepto de transformación lineal. Estas autoras consideraron dos formas de construcción, una considerando el concepto de transformación (general) para después construir el concepto de transformación lineal como un caso específico. Es decir, *una transformación lineal como una función que va de un espacio vectorial en otro*. Y la segunda, donde el concepto de transformación lineal se puede ver como un caso particular del concepto de función. En este caso, se puede decir que un estudiante puede empezar a construir el concepto de transformación lineal realizando acciones que consisten en comprobar las dos condiciones de linealidad. Reflexionar sobre las acciones puede dar lugar a dos procesos que corresponden a cada una de las propiedades de linealidad. Luego de que estos dos procesos se coordinan, se construye un nuevo proceso **linealidad**. Cuando surge la necesidad de realizar acciones sobre el proceso construido, éste se encapsula para dar lugar al objeto de transformación lineal (Ver Figura 2).

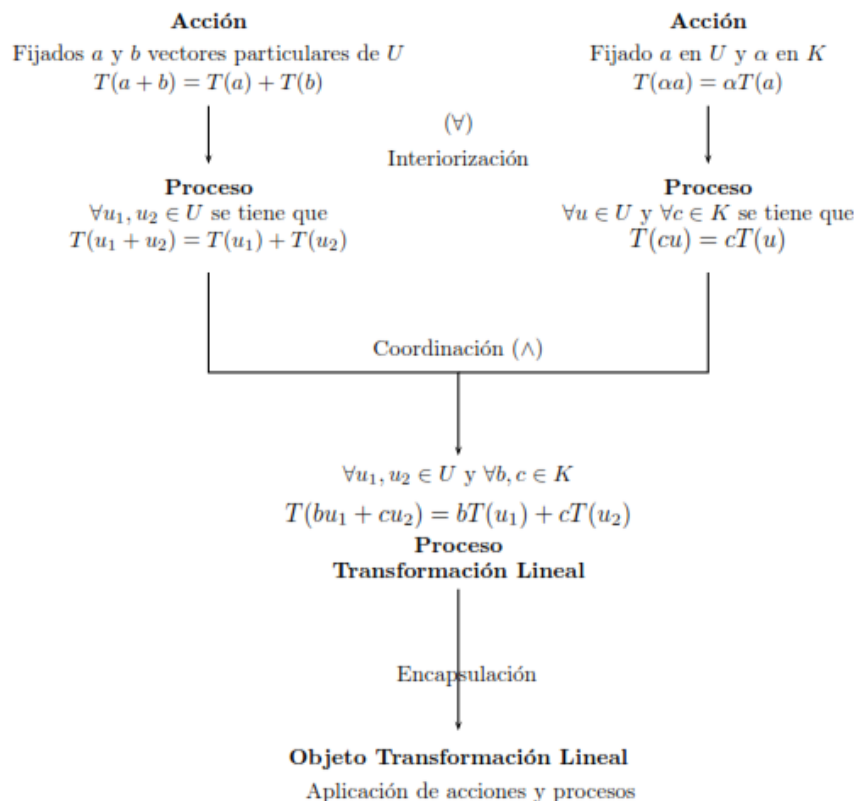


Figura 2. Descomposición Genética Refinada (Roa-Fuentes y Oktaç, 2012, p.226).

Las autoras manifiestan que durante el análisis de los resultados surge la necesidad de construir el concepto de transformación lineal de manera paralela con otros, tales como, el concepto de base. También muestran la importancia de involucrar un análisis más específico sobre la naturaleza del campo sobre el cual están definidos los espacios vectoriales.

Planteamiento del Problema

El álgebra lineal es una rama de las matemáticas que más aplicabilidad tiene tanto en matemáticas como en otras áreas. En nuestro país, como en muchos otros, los estudiantes de ingenierías, matemáticas, licenciatura en matemáticas, entre otros, se enfrentan por primera vez con ella en el primer año de universidad. Para Dorier (2000), y otros investigadores franceses (Dorier, 1998; Dorier, Robert, Robinet, y Rogalski, 1997; Strang, 1998) los estudiantes tienen serias dificultades para el aprendizaje del álgebra lineal, sobre todo por su naturaleza abstracta y formal.

Las dificultades que se han reportado han motivado el trabajo de grupos de investigación en el mundo, que buscan explicar cómo los individuos construyen los conceptos básicos de álgebra lineal. Por ejemplo Dubinsky (1991) y otros miembros de *Research Undergraduate Mathematics Education Community* (RUMEC por sus siglas en inglés), han diseñado teorías con miras con el objetivo de plantear propuestas didácticas y metodológicas que buscan ayudar a los estudiantes a superar sus dificultades al enfrentarse con los conceptos de combinación lineal, espacio vectorial, base, conjunto generador, espacio generado, transformación lineal, entre otros. Consideramos que el uso de la Teoría APOE nos permitirá determinar las estructuras mentales necesarias para construir un esquema del concepto de transformación lineal, que tome como

elementos fundamentales su representación matricial y geométrica a partir del concepto de base ordenada.

Actualmente, se cuenta con descomposiciones genéticas validadas del concepto de transformación lineal y de Base de manera independiente. Roa-Fuentes y Oktaç (2010) proponen un análisis teórico que toma la definición de transformación lineal; el análisis de datos publicados por las mismas autoras en 2012, muestra que los estudiantes utilizan la representación geométrica de la transformación lineal para comprender ciertas situaciones planteadas en un contexto puramente analítico. Además señalan la dependencia de las transformaciones lineales con el concepto de base. Este concepto fue estudiado por Kú, Oktaç y Trigueros (2008) haciendo referencia a la base de un espacio vectorial como un conjunto ordenado de vectores linealmente que lo genera. Por su parte, Maturana, Rodríguez y Parraguez (2013), investigaron las construcciones y mecanismos mentales necesarios para reconstruir el Teorema Matriz Asociada a una transformación lineal.

Por tanto es de nuestro interés estudiar la construcción del esquema de transformación lineal tomando como elemento principal el concepto de base ordenada. A partir de él analizaremos las estructuras y los mecanismos que hacen parte del esquema y que pueden dar lugar a la construcción de la representación matricial y geométrica de la transformación lineal. El análisis del rol de la base ordenada en el momento de construir una de las representaciones mencionadas de la transformación lineal, nos permitirá establecer la evolución del esquema de este concepto a través de la descripción de los niveles inter, intra y trans. Para esto tomaremos como fundamento la primera descripción de estos niveles presentada en Roa-Fuentes (2008).

Con este panorama en esta investigación nos proponemos analizar las siguientes preguntas:

- ¿Qué estructuras (Acciones, Procesos, Objetos, Esquemas) y mecanismos mentales (interiorización, coordinación, encapsulación, tematización) debe construir un individuo para lograr un esquema de transformación lineal?
- ¿A través de qué mecanismo la base como *proceso*, determina la representación de una transformación lineal?
- ¿Qué clase de situaciones matemáticas deben abordarse en un curso regular de Álgebra Lineal para potenciar la construcción de dicho *esquema*?

De estas preguntas se desprenden los siguientes objetivos: El primero es construir en términos de la Teoría APOE un esquema validado de transformación lineal que tome como elementos fundamentales su representación matricial y geométrica a partir del concepto de base. Y el segundo, diseñar con base en el análisis teórico propuesto un modelo de clase que incluya elementos curriculares y didácticos que motiven la construcción exitosa de los estudiantes del esquema de transformación lineal en cursos regulares de álgebra lineal.

Teoría APOE

La Teoría APOE (acrónimo de Acción, Proceso, Objeto, Esquema) es una teoría constructivista que toma como marco de referencia la teoría de Piaget, principalmente en el concepto de *abstracción reflexiva*, logrado para describir el desarrollo del pensamiento lógico en los niños; Dubinsky extiende esta idea al análisis cognitivo de conceptos matemáticos que se estudian en un nivel escolar superior (Dubinsky, 1991).

Dubinsky (1991) considera cinco tipos de abstracción reflexiva: la interiorización, la coordinación, la encapsulación, la generalización y la reversión. Para la Teoría APOE, la construcción del conocimiento matemático está condicionada por el “paso” que un individuo logra dar entre concepciones acciones, procesos y objetos, para lograr finalmente una estructura general de su conocimiento en esquemas. Esta teoría da información acerca de las estructuras mentales y de los mecanismos mediante los cuales éstas se logran cuando una persona construye su conocimiento matemático al tratar de solucionar situaciones matemáticas. En especial es útil para analizar conceptos matemáticos avanzados; así como también puede ser utilizada para explicar las dificultades que los estudiantes presentan al construir un concepto o noción matemática.

En la Teoría APOE, la herramienta que permite describir la manera como se construye el conocimiento es la *Descomposición Genética*, ya que describe aspectos constructivos de una porción de conocimiento matemático, que además se espera determine aspectos metodológicos relacionados con la enseñanza de dicho conocimiento (Asiala, Brown, DeVries, Dubinsky, Mathews y Thomas, 1996). La descomposición genética es un camino cognitivo que explica las relaciones que se deberían dar entre las estructuras (Acciones, Procesos, Objetos y Esquemas) y los mecanismos mentales (interiorización, coordinación, encapsulación, tematización, generalización y reversión) para que un individuo logre construir un concepto y/o noción matemático.

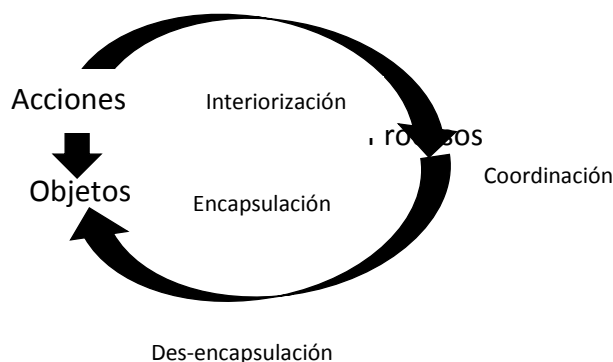


Figura 3. Estructuras y mecanismos mentales para la construcción del conocimiento matemático (Asiala et al., 1996, p.9).

Como puede verse en la Figura 3, cuando un individuo inicia la construcción de un concepto o noción matemática realiza transformaciones (acciones y procesos) sobre objetos existentes Arnon, Cottril, Dubinsky, Oktaç, Roa, Trigueros y Weller (2014); para la teoría APOE, una Acción es una transformación de un objeto que es el resultado de estímulos externos y por lo general es realizada paso a paso por el individuo.

Cuando el individuo puede reflexionar sobre el concepto, sin realizar acciones específicas sobre él, ha empezado a interiorizar dichas acciones en un Proceso. De esta manera, el individuo podrá conocer un resultado sin tener que realizar la totalidad de los cálculos; además será capaz de invertir los pasos de una determinada transformación sin tener que volver a realizarlos.

El Objeto es el resultado de la encapsulación de un proceso. Es decir, el individuo piensa en el proceso como un todo y, realiza y construye transformaciones sobre su totalidad.

Arnon et al. (2014) describen el esquema de un individuo sobre un concepto matemático como la colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas que están unidos por algunos

principios o relaciones generales para formar una estructura en la mente del individuo que puede ser ejercida sobre una situación problemática que implica ese concepto.

Método: Paradigma de investigación de la Teoría APOE

La Teoría APOE proporciona un paradigma o ciclo de investigación que consta de tres elementos: Análisis teórico, diseño e implementación de enseñanza y observación, análisis y verificación de los datos. El ciclo de investigación pasa a través de las tres componentes como se muestra en la *Figura 5*. La aplicación de este ciclo nos permitirá obtener una descripción de las construcciones y mecanismos mentales que deben construir los individuos para lograr un esquema de transformación lineal y de esta manera responder a nuestras preguntas de investigación.

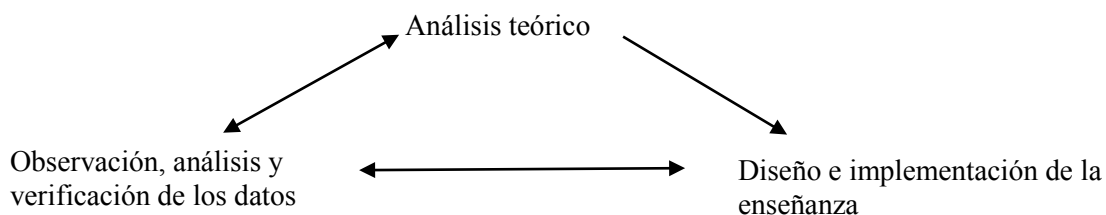


Figura 4. Ciclo de investigación (Asiala et al., 1996).

El análisis teórico es la primera componente del ciclo de investigación de la Teoría APOE, se realiza un análisis teórico del concepto a estudiar, y aquí se hace un análisis de las construcciones mentales que debe desarrollar un estudiante para la comprensión de dicho concepto. Este análisis nos lleva a la construcción e implementación de una estrategia de enseñanza, con el fin de que los estudiantes logren alcanzar las construcciones mentales propuestas en el análisis teórico; en base a la descomposición genética obtenida se diseñan unas actividades que se implementarán en la clase y para finalizar, a raíz de la aplicación de diseños de enseñanza se obtienen datos que se analizan desde la Teoría APOE, en algunos casos es necesario refinar la descomposición genética obtenida en el análisis teórico.

A continuación describiremos en más detalle cada una de las componentes:

Análisis teórico

El ciclo parte de un análisis teórico del concepto matemático y para ello tiene en cuenta el análisis de libros de texto y la experiencia de los investigadores (estudiante y/o profesor), exámenes diagnóstico y los resultados de estudios previos, entre otros aspectos que permitan obtener información sobre cómo se estructura el concepto, para luego determinar un camino posible para la construcción de dicho concepto. De este análisis surge una descomposición genética, que como lo mencionamos anteriormente, es un camino que nos muestra cómo un individuo puede construir un concepto matemático en términos de las construcciones y mecanismos mentales (Roa, 2008).

En nuestro caso, el análisis de libros de texto se basa en estudiar el concepto de Transformación Lineal y en cómo está relacionado con el concepto de base; además de determinar cuál es el rol que juega en dicha relación la representación matricial y la representación geométrica (en el caso de las transformaciones de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$). Por otra parte, como hemos mencionado anteriormente, nos basamos principalmente en las descomposiciones genéticas que ya han sido estructuradas sobre los dos conceptos de interés.

Todo esto sumado a la experiencia de las investigadoras como profesoras y estudiantes nos permitirá establecer de manera hipotética las relaciones que se destacan en la construcción del Esquema de Transformación Lineal. De este análisis teórico obtenemos una descomposición genética preliminar que nos permitirá hacer los diseños de los instrumentos que aplicaremos y una vez realizado el ciclo completo se determinará un análisis más refinado teniendo en cuenta el trabajo que logran desarrollar los estudiantes. Damos lugar a la siguiente componente de investigación.

Diseño y aplicación de instrumentos

La segunda componente del ciclo de investigación tiene que ver con el diseño y la aplicación de instrumentos basados en los análisis teóricos (Asiala, et al., 1996). Después de tener la descomposición genética preliminar necesitamos documentarla para validarla o refinarla. Por ello es necesario diseñar y aplicar instrumentos que permitan identificar las construcciones mentales señaladas en la descomposición genética y aquellas que no se hayan incluido pero que sean necesarias según los procedimientos realizados por los estudiantes (Roa, 2008).

Nuestro interés es realizar el ciclo completo, es por ello que a partir del análisis teórico no solo queremos aportar una descomposición genética del Esquema de Transformación Lineal, sino que además buscamos hacer sugerencias de tipo didáctico sobre cómo se debe desarrollar en un curso de Álgebra Lineal el concepto de Transformación Lineal y además también cuestiones de tipo curricular para que muestre que los conceptos no se construyen de forma lineal sino que hay conexiones entre ellos que deben irse estableciendo previamente y dentro de esas conexiones pensamos que va a jugar un papel importante la representación matricial y en algunos casos su representación geométrica.

Entonces, a partir de la descomposición genética preliminar se realizará un diseño de clase y el desarrollo de dichas actividades serán trabajadas por tres profesores dentro de un curso regular, con estudiantes de primer semestre de ingeniería y licenciatura en matemáticas. Como se mencionó anteriormente, nos permitirán evidenciar las construcciones mentales de los estudiantes.

Análisis y verificación de los datos

Por último, la tercera componente del ciclo de investigación es el análisis y verificación de los datos. En esta componente se analizan los datos empíricos obtenidos en la componente anterior. Los datos obtenidos se analizan desde la descomposición genética preliminar teniendo en cuenta los elementos que no han sido considerados o cuáles de las construcciones dadas en la descomposición genética preliminar no se perciben. Después de este análisis obtenemos una descomposición genética refinada (Roa, 2008).

En esta componente con base en los análisis obtenidos en el aula se hace una reestructuración del análisis teórico, haremos entrevistas a los participantes que estuvieron en esos eventos controlados de acuerdo a los resultados obtenidos en esta se validarán los diseños de clase y como se mencionó anteriormente se obtendrá una descomposición genética refinada del Esquema de Transformación Lineal.

Consideraciones finales

Los alcances de nuestro proyecto se relacionan con la construcción de materiales de clase, que sean viables en el aula regular de los cursos básicos de Álgebra Lineal. Esto a partir del estudio de las estructuras y mecanismos mentales que propone la Teoría APOE asociados al

concepto Transformación Lineal. La aplicación completa del ciclo de investigación propuesto por la teoría, que se constituye en el método de nuestra investigación, permite construir una descomposición genética que apoye el diseño de materiales de clase para potenciar la construcción exitosa de dicho concepto.

Con esta investigación, esperamos obtener un Esquema validado de Transformación Lineal que tome como elementos fundamentales su representación matricial y geométrica a partir del concepto de base. Este a su vez nos dará información clara sobre la forma en que los estudiantes construyen el concepto de Transformación Lineal y la relación de este concepto con otros como el de base ordenada y la matriz de la transformación.

Para ello diseñaremos un modelo de clase que incluya elementos curriculares y didácticos que motiven la construcción exitosa de los estudiantes del Esquema de Transformación Lineal en cursos regulares de Álgebra Lineal. De esta manera también estaremos aportando a la Teoría APOE una forma de estudiar el concepto de Transformación Lineal, por medio de la integración de los conceptos de Transformación Lineal y base ordenada a través de las relaciones entre las diferentes estructuras que determina la construcción del Esquema.

Bibliografía y referencias

- Arnon, I., Dubinsky, E., Cottrill, J., Oktaç, A., Roa-Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *Apos theory—a framework for research and curriculum development in mathematics education*. New York: Springer.
- Asiala, et al., 1996, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). *A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education*. Research in Collegiate Mathematics Education, II. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld & E. Dubinsky (Eds.) *CBMS Issues in Mathematics Education*, 6, 1-32.
- Clark, J. M., F. Cordero, J. Cottrill, B. Czarnocha, D. J. DeVries, D. St. John, G. Tolia, & D. Vidakovic (1997), “Constructing a Schema: The Case of the Chain Rule”, *Journal of Mathematical Behavior*, 16, 345-364.
- Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). “Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Schema”. *The Journal for Mathematical Behavior*, 15, 167-192.
- Dorier, J. (2000). Epistemological analysis of the theory of vector spaces. In J-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra*, Kluwer Academic Publishers (pp. 6-11).
- Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematical Thinking. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Holland: Reidel.
- Kú, D., Trigueros, M., & Oktac, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la Teoría APOE. *Educación Matemática*, 20(2), 65-89.
- Maturana, I., & Parraguez, M. (2013). APOE: Una perspectiva cognitiva para el aprendizaje de la matriz asociada a una transformación lineal. En *Actas del VII Congreso Iberoamericano de Educación Matemática* (pp. 1798-1807). CIBEM 2013, ISSN 2301-0797, Montevideo-Uruguay.
- McDonald, M. A., Mathews, D., & Strobel, K. (2000). Understanding Sequences: A Tale of Two Objects. En E. Dubinsky, J. J. Kaput, & A. H. Schoenfeld (Eds.), *Research in Collegiate Mathematics Education IV*(8), 7-102. Providence, R.I., AMS y Washington MAA.

- Molina, J., & Oktac, A. (2007). Concepciones de la Transformación Lineal en un Ambiente Geométrico. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 10(2), 241-273.
- Oktac, A., & Trigueros, M. (2010). ¿Cómo se aprenden los conceptos de Álgebra Lineal? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(4-II), 373-385.
- Ramírez, O., Romero, C., & Oktac, A. (2014). Coordinación de registros de representación semiótica en el uso de Transformaciones Lineales en el plano. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 19, xx-xx.
- Roa, S. (2008). Construcciones y mecanismos mentales asociados al concepto de transformación lineal (Tesis de maestría no publicada). CINVESTAV, México.
- Roa-Fuentes, S., & Oktac, A. (2010). Construcción de una descomposición genética: Análisis teórico del concepto Transformación Lineal. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 13(1), 89-112.
- Roa-Fuentes, S., & Oktac, A. (2012). Validación de una descomposición genética de transformación lineal: Un análisis refinado por la aplicación del ciclo de investigación de APOE. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 15(2), 199-232.
- Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students thinking in linear algebra. In J-L Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 209 – 246). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Trigueros, M. (2000). Students' conceptions of solution curves and equilibrium in systems of differential equations. In *Proceedings of the 22nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education I* (pp. 93-97). Columbus, OH.
- Trigueros, M. (2005) La noción de esquema en la investigación en matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, 17(1), pp. 5-31.
- Uicab, R., & Oktac, A. (2006). Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 9(3), 459-490.

Una propuesta didáctica para el estudio del tema de Espacios Vectoriales en un curso de Álgebra Lineal

Bolívar Alonso **Ramírez** Santamaría
Sección de Matemática, Sede Occidente, Universidad de Costa Rica
Costa Rica
bolivar.ramirezsanamaria@ucr.ac.cr

Resumen

La presente investigación tiene como propósito fundamental el diseño, validación e implementación de una unidad didáctica que permita fortalecer el proceso de la enseñanza y aprendizaje del tema de Espacios Vectoriales en un curso de Álgebra Lineal dirigido a estudiantes de diferentes ingenierías, como la industrial, eléctrica, química, civil, telecomunicaciones, entre otras. Lo novedoso de esta propuesta es que usa software educativo, además de aplicaciones y utilidades de los temas a la ingeniería y diferentes ramas científicas. La unidad fue valorada ante un grupo de profesores con experiencia en la educación superior, para posteriormente ser validada en un curso de Álgebra Lineal (MA1004) de la Universidad de Costa Rica. Para ello se usó un grupo experimental y un grupo control. También, participaron docentes de la Universidad de Costa Rica como observadores externos y se disponía de diferentes técnicas de recolección de información como cuestionarios, guías de observación y exámenes. Se llega a la conclusión principal que la propuesta realmente beneficia el interés, la motivación y la comprensión de los educandos durante el estudio del tema de Espacios Vectoriales.

Palabras clave: unidad didáctica, enseñanza, aprendizaje, álgebra lineal, espacios vectoriales.

Introducción

Actualmente, el trabajo del docente de Matemática en la educación superior no solo se enfoca en la suposición de transmitir los conocimientos demandados en los programas de los diversos cursos de una forma magistral y positivista, pues, de acuerdo con Costa, di Domenicantonio, Prodanoff, Tolosa, y Guarepi (2008), “En los últimos años se ha venido observando una tendencia de cambio en el modelo de enseñanza y aprendizaje...” (p. 1), esto en el sentido que también se debe procurar que el educando use tecnologías y realice interrelaciones y aplicaciones de los nuevos contenidos adquiridos.

En esta misma dirección, y en particular, al referenciar el curso de Álgebra Lineal (MA1004) de la Universidad de Costa Rica, se observa que este procura que los discentes sean competentes para aplicar las nuevas estructuras cognitivas a sus respectivas disciplinas (Carta al estudiante de Algebra Lineal, II Ciclo del 2014). Más aún, Ortiz, Rico, y Castro (2008) aseguran que esta asignatura “...propicia una riqueza de aplicaciones en la modelización de situaciones del mundo real” (p. 182).

Sin embargo, según Boza (1998), a los estudiantes "...muchas veces se les pide que aprendan los rudimentos del álgebra lineal, como si ella fuera un fin en sí misma, sin tomar en cuenta que esta disciplina se desarrolló en buena medida para satisfacer demandas de la física, la geometría y las ecuaciones diferenciales" (p. 23). Es así, como muchos docentes de Matemática, atendiendo a una pedagogía tradicional, al dar el curso de Álgebra Lineal, únicamente enseñan de manera instrumental y conductista los diferentes temas de este curso (Uzuriaga, Arias, y Manco, 2010), sin darles mayor contextualización y mucho menos aplicaciones a la vida cotidiana, a la realidad y al mundo tecnológico.

Igualmente, Uzuriaga et al. (2010) mencionan que se está ante un problema de metodología y no de contenidos, además que

No existe claridad en todos los docentes sobre la importancia que tiene el álgebra lineal como asignatura de ciencias básicas en la formación de un ingeniero, desconociendo el aporte que hace la matemática al desarrollo del pensamiento del alumno y las herramientas que proporciona al modelado y soluciones de aplicaciones en la ingeniería (p. 290).

En este sentido, los educadores de Matemática, sin perder el rigor que esta ciencia exige, deben desarrollar y buscar metodologías que le permitan al estudiante, dentro de sus expectativas, darse cuenta de la relevancia que les aporta los conocimientos matemáticos que brinda el Álgebra Lineal para resolver y generalizar situaciones que se le presentaran en su desarrollo profesional.

Por otro lado, muchos de los temas de Álgebra Lineal en la educación superior pueden ser muy abstractos para el estudiantado. Particularmente, Kú, Trigueros y Oktac (2008) opinan que los educandos no llegan a interiorizar adecuadamente los contenidos asociados al tema de Espacios Vectoriales, y que esto puede repercutir en su rendimiento académico. Además, concluyen que existe una necesidad de trabajar desde una perspectiva pedagógica para sanar estas dificultades que se están presentando en el proceso de enseñanza y aprendizaje del tema en cuestión.

Azofeifa (2009), respecto al aprendizaje y enseñanza del concepto de Espacio Vectorial, recalca que

... muchas veces levantamos un edificio muy lujoso en definiciones y teoremas, con relaciones y ejercicios difíciles, bien rebuscados, sin embargo, muy pobres en motivaciones, explicaciones conceptuales y aplicaciones. Tal vez ni siquiera tenemos idea por qué lo hacemos ni para qué. Podría ser para cumplir un programa bastante amplio y exigente. Así también con mucha más razón, menos el estudiante tendrá una visión y motivación... (p. 180).

En relación con lo anterior, se deben buscar otros caminos didácticos y metodológicos que puedan generar en los discentes una mayor motivación y comprensión en los contenidos que involucra el tema de Espacios Vectoriales. De esta forma, surge el siguiente problema:

¿Se puede facilitar la comprensión del tema de Espacios Vectoriales en un curso de Álgebra Lineal utilizando las aplicaciones de este tópico en ramas de la ingeniería y de la tecnología, además de recursos informáticos?

Antecedentes

Es importante subrayar que existen bastantes trabajos acerca de la enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal o contenidos afines a ésta, sin embargo, existen muy pocas investigaciones que traten el tema de Espacios Vectoriales desde una perspectiva pedagógica.

Se inicia con el trabajo realizado por Moreno (2001), el cual pretende facilitar a los estudiantes la comprensión y memorización del tema de Espacios Vectoriales por medio de una analogía, esto mediante el uso de los colores primarios y sus respectivas mezclas, sin dejar de lado la rigurosidad matemática de los contenidos tratados.

Por otro lado, existe un proyecto elaborado por Ortega (2002), en el cual se estudia el comportamiento de una estrategia didáctica que incorpora el uso del programa de cálculo simbólico DERIVE en la enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal, cuyas estrategias consisten en que el estudiante, con ayuda de dicho programa, indague y concluya sobre propiedades de ciertos temas sin que el docente se las haya dado previamente.

Por su parte, Montero, Martínez, Moran, Aliás, y Rodríguez (2004) desarrollaron una aplicación multimedia llamada ALGTEC, la cual pretende acercar al educando de ingeniería con temas de Álgebra Lineal y a algunas de sus aplicaciones en el mundo tecnológico, es decir, "...poner al alcance del alumno una aplicación que pretende hacerle entender a un mejor cómo determinados conceptos algebraicos son la base de conceptos asociados a aplicaciones técnicas" (p. 2).

Otro trabajo de enorme valor es el elaborada por Costa et al. (2008), que implementaron estrategias que mejoran el aprendizaje del concepto de campo vectorial, apoyándose con el software matemático Maple. El objetivo primordial que perseguían era que el estudiante, desde la visualización de campos vectoriales, sea capaz de reconocer campos de uso común en física e interpretar aplicaciones de estos. Al final, estos autores concluyen que un 62% de los estudiantes alcanzaron un amplio conocimiento, y con mayor significancia, de los campos vectoriales y sus aplicaciones.

Por último, Kú et al. (2008), quienes apoyados en la teoría APOE (acción-proceso-objeto- esquema), presentan un conjunto de construcciones mentales que los discentes pueden desarrollar para la comprensión del concepto de base de un espacio vectorial. En este trabajo se construyó una entrevista para generar datos de las posibles construcciones mentales, que ellos llaman una descomposición genética del concepto de base de un espacio vectorial.

Fundamentación teórica

Dentro del marco teórico de la investigación, se fundamenta teoría sobre unidades didácticas, aplicaciones y el uso de la tecnología.

Unidades Didácticas

En la enseñanza y aprendizaje formal se suele hablar sobre unidades didácticas, cuya conceptualización está profundamente ligada al pensamiento del profesor (Fernández, Elortegui, Rodríguez, y Moreno, 1999). De esta forma, Area (1993) se refiere a la unidad didáctica como "...un segmento o porción de enseñanza y aprendizaje significativo, con entidad en sí mismo configurado en torno a un tema, centro de interés o eje organizador. Puede variar en su longitud, extensión o relevancia" (p. 34).

Fernández et al. (1999) escriben que “...la unidad didáctica es un conjunto de ideas, una hipótesis de trabajo, que incluye no sólo los contenidos y los recursos necesarios para el trabajo diario, sino unas metas de aprendizaje, una estrategia que ordene y regule en la práctica educativa los diversos contenidos del aprendizaje...” (p. 13). Además, estos autores insisten en que el desarrollo de la unidad didáctica está íntimamente relacionado con la forma de pensar del docente o grupo de docentes que la elaboren.

Además, García (2009) establece que la unidad didáctica es:

Un conjunto integrado, organizado y secuencial de los elementos básicos que conforman el proceso de enseñanza y aprendizaje (motivación, relaciones con otros conocimientos, objetivos, contenidos, método y estrategias, actividades y evaluación) con sentido propio, unitario y completo que permite a los estudiantes, tras su estudio, apreciar el resultado de su trabajo (p. 1).

Se puede observar las definiciones anteriores tienen aspectos en común. En fin, una unidad didáctica busca organizar la práctica de la enseñanza y aprendizaje de manera eficiente, precisa, ordenada, estructurada, articulada y completa. Para planificar dicho proceso se usan elementos del currículo, de forma ordenada, como: los contenidos, los objetivos, las pautas metodológicas y la evaluación.

Las unidades didácticas presentan una amplia variedad de características, por lo que diversos autores tienen sus aportes al respecto. A continuación se presenta, de acuerdo con Area (1993), Rodríguez (2004) y Corrales (2010), un compendio de estas características:

- Es una unidad de trabajo que articula los objetivos, los contenidos, la metodología y la evaluación, por lo que tiene un carácter unitario.
- Es un instrumento de trabajo o de planificación que permite al docente organizar su práctica educativa para articular unos procesos de enseñanza y aprendizaje de calidad.
- Es ajustada al grupo y al estudiante, en el sentido que responde a las características concretas y a la diversidad de los educandos a los que se dirige.
- Es un conjunto de experiencias de aprendizaje relacionadas con un eje organizador que contiene la concreción de los contenidos a desarrollar y las actividades que deben realizarse.
- Es completa pues debe de ser un conjunto en el que cada una de sus partes estén debidamente pensadas, organizadas, entrelazadas y acabadas dándole solidez y empaque a dicha unidad didáctica.
- Las unidades didácticas pueden tener diferentes duraciones, autores, lugares, ejes organizadores, ambientes o grados de definición o terminación de su diseño.
- Las unidades didácticas se desarrollan con base en un tema en específico.

Una perspectiva pedagógica de las aplicaciones de la Matemática y el Álgebra Lineal

Dentro de un enfoque contextual de la enseñanza y aprendizaje de la Matemática, se supone que la mente del estudiante busca, de forma natural, el significado de los nuevos conocimientos en el contexto, es decir, en el ámbito donde la persona se encuentra.

También, las aplicaciones de la Matemática, dentro de un marco pedagógico, permiten que el educando establezca relaciones entre la teoría y el contexto del mundo real, esto con el fin de darle a los conceptos matemáticos un cierto sentido y utilidad.

Con ello, se persigue que el aprendizaje se refuerce cuando los conceptos se presentan en un contexto de relaciones que son familiares o conocidas para el estudiante. Según Mora (2003), este tipo de situaciones didácticas tienen que ver con actividades significativamente importantes para los jóvenes.

De hecho, en relación con García (2004):

Es conocida entre los profesores de matemática la frase formulada por muchos estudiantes en una clase *profesor y para qué sirve esto*, por lo que la poca motivación de muchos alumnos para el aprendizaje de la Matemática tiene una relación directa con las dificultades de sus profesores para explicar por qué se enseña uno u otro tema, y en virtud de ello, para presentar problemas prácticos sencillos que justifiquen su utilidad... (p. 8).

En este sentido, el Álgebra Lineal tiene importantes y diversas conexiones con áreas dentro y fuera de la Matemática, de hecho, siguiendo esta línea, Paredes, Iglesias, y Ortiz (2009) consideran que "...el estudiante debe adquirir habilidades para seleccionar métodos apropiados para la aplicación de la Matemática en diferentes áreas de la vida ..." (p. 88).

Pero, estas aplicaciones suelen ser omitidas durante el proceso de enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal en la educación superior, y sumado la complejidad del lenguaje y la alta abstracción de los conceptos de esta rama de la Matemática, conlleva a que los educandos no se involucren de forma activa y consciente en las clases (Azofeifa, 2009).

Gómez (2003) refuerza la proposición anterior pues menciona que las aplicaciones quedan en un segundo plano durante el acto educativo.

La tecnología como insumo didáctico

La relevancia del Álgebra Lineal para las aplicaciones se ha desarrollado en forma proporcional al incremento de la informática. Es por ello que "La ciencia del cómputo está así intrínsecamente ligada al álgebra lineal, a través del crecimiento explosivo del procesamiento en paralelo y de los cálculos en gran escala" (Lay, 2012, p. 2).

Es por ello que actualmente los ingenieros trabajan en problemas mucho más complejos que involucran el álgebra lineal y cálculos numéricos a gran escala, los cuales son extremadamente difíciles (por no decir imposibles) de resolver, por lo que se acude a software especializados que los solucionen.

Esto justifica el hecho que los estudiantes de ingeniería que cursan Álgebra Lineal deben conocer herramientas informáticas que permitan desarrollar estos cálculos, con el fin de que en su futura labor profesional puedan recurrir a éstas.

Más aún, "...la tecnología tiene en el álgebra un terreno de aplicación para beneficio de los estudiantes y profesores. El uso de la computadora y un software de cálculo simbólico abren la atractiva posibilidad de experimentar con la matemática" (Paredes et al., 2009, p. 88).

Tampoco el objetivo es realizar de aprendizaje completamente virtuales, sino, acercar e interesar al estudiante al uso de software de cálculo simbólico y numérico adecuados para el curso de Álgebra Lineal, con el fin de enriquecer la labor educativa, en el sentido de valorar la importancia de la motivación y de la experiencia vivencial para obtener aprendizajes significativos y perdurables.

Algunos paquetes computacionales que se pueden usar con este fin son Scilab, Mathematica, Derive, Maple, Matlab, Maxima, entre otros.

Elementos metodológicos de la investigación

El desarrollo de la investigación se fundamenta en el enfoque mixto; es decir, un enfoque donde se recolectan, analiza y vinculan datos cuantitativos y cualitativos en una misma investigación, centrándose más en uno de estos o dándoles la misma importancia, con el fin de responder al planteamiento del problema (Hernández, Fernández, y Baptista, 2010).

En cuanto a las técnicas e instrumentos para recolectar la información, se destacan la observación y el cuestionario. Para todos los cuestionarios, se plantearon preguntas abiertas y cerradas. Éstas últimas utilizaban un escalamiento Likert, definido éste como un conjunto de ítems que se presentan en forma de afirmaciones para medir la reacción del sujeto en cinco categorías (Hernández et al., 2010). Las cinco categorías (o indicadores) van desde totalmente desacuerdo (con una puntuación de 1) hasta totalmente de acuerdo (con una puntuación de 5). Posteriormente, las puntuaciones o resultados obtenidos se promedian para realizar un análisis en el intervalo $[1,5]$, donde 1 representa una opinión o aptitud muy desfavorable y 5 representa una opinión o actitud muy favorable para una afirmación positiva.

Las etapas de la investigación se generalizan, de forma cronológica, en las siguientes:

Etapas 1

Diseño y elaboración de la Unidad Didáctica en el tema de Espacios Vectoriales, en la cual se utiliza software educativo y aplicaciones a la ingeniería y la tecnología, las cuales permiten visualizar y modelar los tópicos estudiados. Dicha unidad consta de 10 capítulos; el primero corresponde a la introducción y elementos esenciales de la unidad (introducción, objetivos, tiempo probable y conocimientos previos). Un segundo capítulo hace relación al uso del software (el paquete usado es Mathematica 9, del cual la Universidad de Costa Rica posee licencia para uso de profesores y estudiantes) y la última sección compete a una lista de ejercicios que evalúan los conocimientos teóricos adquiridos al finalizar la unidad. En los demás capítulos se desarrollan los conceptos, actividades y evaluación referentes al tema de estudio y se caracterizan por tener un orden curricular estricto (título, objetivos específicos, contenido actividad introductoria, desarrollo y evaluación). Por último, la unidad posee al final todas las referencias utilizadas para su esbozo.

Etapas 2

En esta etapa se procede con la valoración de la Unidad Didáctica ante ocho profesores de Matemática con experiencia en educación superior y que además hayan impartido cursos de Álgebra Lineal. Para esta etapa se usó un cuestionario con preguntas abiertas y cerradas.

Etapas 3

Aquí se realiza la validación de la Unidad Didáctica, para lo cual se usan dos grupos de Álgebra Lineal (MA1004) de la Universidad de Costa Rica, uno denominado experimental (con 20 estudiantes), donde se implementa la unidad, y otro llamado grupo control (con 30 estudiantes), donde no se implementa la unidad, esto con el fin de realizar las respectivas comparaciones. Para establecer si los grupos eran comparables, se hizo un estudio en cuanto al porcentaje de asistencia, edad, género, tipo de institución de educación secundaria de procedencia, situación laboral, cantidad de repitentes, cantidad de horas de estudio que dedica al curso de Álgebra Lineal, cantidad de cursos matriculados, entre otros criterios. En esta etapa se utilizan cuestionarios (entre estos, dos cuestionarios para medir, respectivamente, la aptitud y opinión antes y después de usar la unidad), un examen corto y la participación de

observadores externos en el grupo experimental, para lo cual también se construye una guía de observación. La validación tardó dos semanas, con cinco horas clases por semana distribuidos en dos días, siendo en total cuatro clases.

El curso de Álgebra Lineal (MA1004) de la Universidad de Costa Rica es un curso dirigido a diferentes ingenierías, que se caracteriza por ser un curso de cátedra, por lo que se emplean los mismos exámenes para todos los grupos. En este curso se trabaja los temas de Sistemas de Ecuaciones Lineales, Matrices, Determinantes, Geometría Vectorial, Rectas y Planos, Espacios Vectoriales, Ortonormalidad y Proyecciones, Transformaciones Lineales, Valores y Vectores Propios y Curvas y Superficies Cuadráticas.

Etapas 4

En ésta se procede con el análisis y triangulación de todos los resultados obtenidos con los instrumentos de recolección de información. Seguidamente se establecen las conclusiones y limitaciones.

Discusión de los resultados obtenidos

Valoración de la unidad didáctica

Para el cuestionario usado con el fin de valorar la Unidad Didáctica ante ocho profesores de Matemática, las preguntas cerradas mediante el escalamiento Likert reflejan que el promedio por pregunta y por docente es 4,69 en cuanto a las afirmaciones dadas, lo cual permite inferir que realmente la unidad desarrollada puede ser una herramienta pedagógica que favorezca el estudio del tema de Espacios Vectoriales, en el sentido que puede ayudar a mejorar la motivación, interés y comprensión del educando al estudiar el tema de Espacios Vectoriales en un curso de Álgebra Lineal dirigido a diferentes ingenierías. Además, se realizan correcciones y sugerencias hechas por los docentes valoradores, entre ellas escribir más ejercicios que involucren aplicaciones, arreglos de formato y mejorar el capítulo 9 sobre espacio fila y espacio columna de una matriz.

Validación de la unidad didáctica

En cuanto a la validación de la unidad didáctica, primero los estudiantes del grupo experimental completaron un cuestionario para conocer la opinión y actitud de ellos antes de estudiar en clase el tema de Espacios Vectoriales mediante la Unidad Didáctica. Dicho cuestionario lo completaron 20 educandos. Los resultados son los siguientes:

Para la primera afirmación “Las actividades de clase empleadas en los temas estudiados hasta ahora en Álgebra Lineal (MA1004) han beneficiado mi aprendizaje de la teoría”, obtiene una puntuación promedio de 3,25. Esto quiere decir que los educandos se sienten con un nivel de conformidad sobre las actividades desarrolladas hasta ahora en el curso.

Además, para la segunda proposición “Los ejemplos y ejercicios planteados hasta ahora en el curso Álgebra Lineal (MA1004) me han ayudado a la comprensión según el desarrollo teórico”, tiene un resultado medio de 3,15, lo cual permite establecer que también los alumnos se encuentran en un estado de conformidad casi neutral con esta aseveración.

La tercera declaración “Mi interés y motivación son muy buenos ante los temas de estudio vistos hasta ahora en el curso Álgebra Lineal (MA1004)” promedia un 3,55. Esta calificación refleja un interés y una motivación buena por parte de los estudiantes antes de iniciar el estudio del tema de Espacios Vectoriales con la Unidad Didáctica, pero es tendiente a lo neutral, en el sentido que tampoco es la más favorable.

Por otro lado, la cuarta afirmación “La metodología utilizada por el profesor hasta ahora en el curso Álgebra Lineal (MA1004) ha favorecido mi aprendizaje de los temas estudiados” tiene una media de 2,85, lo que permite establecer que los alumnos siguen estando casi que en un estado de conformidad, no obstante tampoco es favorable.

La quinta y última proposición “En general, conozco sobre aplicaciones y utilidades de Álgebra Lineal a la ingeniería, la tecnología y otras ramas científicas que me ayuden a mejorar mi comprensión de la teoría del curso estudiada hasta ahora”, tiene una calificación media de 2,45, la más baja de todas, y lo cual funda el hecho que en el curso no se hayan trabajado ejemplos que involucren actividades de este tipo.

El promedio ponderado total corresponde a un 3,05, que es casi neutral, afirmando la conformidad del estudiante hasta ahora en el curso de Álgebra Lineal. La aplicación de la unidad didáctica, entre otros aspectos, mejoró estos resultados.

En efecto, los mismos 20 educandos del grupo experimental completaron un cuestionario para conocer su opinión y actitud después de estudiar en clase el tema de Espacios Vectoriales mediante la Unidad Didáctica. Los resultados se muestran a continuación:

Para la primera afirmación “El uso de aplicaciones, utilidades y del software educativo durante el desarrollo teórico me permitió o un mejor aprendizaje de los conceptos vinculados al tema de Espacios Vectoriales”, se obtiene un promedio de 4,4, que en comparación con el resultado obtenido de 3,25 en la primera proposición del cuestionario anterior, se aumenta significativamente. En este sentido, después de aplicar la unidad, los alumnos del grupo experimental presentan una actitud muy favorable pues consideran que realmente su aprendizaje se beneficia con el uso de aplicaciones, utilidades y del software educativo.

En cuanto a la segunda declaración, “Los ejemplos y ejercicios de la Unidad Didáctica tienen un nivel significativo y adecuado según el desarrollo teórico, además de que me han permitido una mejor comprensión”, la calificación media es de 4,65. En contraste con la segunda proposición del anterior, la cual tiene un resultado de 3,15, se observa que realmente los discentes consideran que los ejemplos trabajados en la unidad son representativos para su aprendizaje, e inclusive, pueden beneficiar la comprensión de los tópicos estudiados.

La tercera enunciación corresponde a “Mi interés y motivación por el tema de estudio aumentó al conocer sobre diferentes aplicaciones y utilidades a diversas ramas científicas de los Espacios Vectoriales”, la cual promedia un puntaje de 4,45. En contraposición, la tercera afirmación del cuestionario anterior, tiene una media de 3,55, que a su vez es aceptable, pero aún así se mejora lo suficiente hasta alcanzar un nivel bastante favorable en el escalamiento Likert.

Esto también permite establecer que la actitud de los estudiantes es positiva a lo largo de las clases en que se implementó la unidad.

Por otro lado, la media de 4,7 le pertenece a la cuarta afirmación “La metodología utilizada por el profesor e inducida por la Unidad Didáctica favoreció mi aprendizaje del tema de Espacios Vectoriales”, lo que permite fundar que la metodología semi magistral inducida y recomendada por la unidad es del agrado de los estudiantes. En comparación, la cuarta proposición del cuestionario anterior tiene un resultado de 2,85, se nota que existe una brecha enorme a favor del uso de la unidad.

La quinta aseveración “En general, la Unidad Didáctica empleada para el estudio de Espacios Vectoriales y el conocer sobre las aplicaciones a la ingeniería, la tecnología y otras ramas científicas de dicho tema, me ayudo para una mejor comprensión de la teoría” posee un promedio de 4,7, y en contraste con la puntuación de 2,45 de la quinta afirmación del cuestionario anterior, se nota una enorme diferencia, en el sentido que los estudiantes sí consideran importantes conocer utilidades a la ingeniería y la tecnología de los temas que se estudian.

Además, el promedio general de la apreciación por pregunta y por estudiante es de 4,58, el cual se compara con su análogo del cuestionario anterior, que corresponde a 3,04, con lo que permite fortalecer la veracidad de la hipótesis de que la Unidad Didáctica empleada para estudiar Espacios Vectoriales en un curso de Álgebra Lineal dirigido a educandos de ingeniería realmente puede beneficiar el proceso de enseñanza y aprendizaje del tema en cuestión.

También, los comentarios hechos por los estudiantes en las preguntas abiertas del cuestionario para validar la unidad siempre fueron muy positivos y favorables hacia el uso de la unidad en clases de Álgebra Lineal para estudiar Espacios Vectoriales, siendo esto pruebas cualitativas que reafirman la hipótesis del párrafo anterior. Igualmente, los educandos hicieron algunas sugerencias, como de disponer de más tiempo para realizar más ejercicios y actividades de evaluación en clase, por lo que en la unidad el tiempo probable pasó de 10 horas lectivas a 15 horas lectivas.

Cabe destacar que hubo al menos dos observadores por clase durante las cuatro lecciones que se disponía para implementar la unidad didáctica, los cuales disponían de una guía de observación donde podían anotar cualquier observación o comentario y debían llenar preguntas cerradas mediante un escalamiento Likert que medían el interés, la motivación y otros aspectos durante el inicio, desarrollo y cierre de la clase. Las puntuaciones siempre fueron arriba de 4, los comentarios siempre fueron constructivos y además permitieron hacer arreglos de formato y redacción a la unidad.

Dentro de la validación de la unidad se aplicó un mismo examen corto, que evalúa los contenidos teóricos de Espacios Vectoriales vistos en ambos grupos, tanto al grupo experimental y al grupo control. El promedio obtenido en el primer grupo corresponde a 60,68, y al segundo grupo es de un 46,98.

Abonado a lo anterior, también se consideró las notas de los alumnos de ambos grupos en el segundo examen parcial de Álgebra Lineal (MA1004), sólo en aquellas preguntas que evalúan contenidos de Espacios Vectoriales. Estos dos grupos realizan el mismo examen pues este curso de la Universidad de Costa Rica se caracteriza por ser un curso de cátedra, consecuentemente los exámenes son colegiados. En fin, los resultados son los siguientes:

En el grupo experimental, el promedio del segundo examen parcial es de un 49,11, mientras que la nota media en los puntos seleccionados de la evaluación es de un 71,40. En contraste, en el grupo control la calificación media en el segundo examen parcial es de un 49,03 y el promedio en los puntos seleccionados de la prueba es un 56,05. Entonces, a pesar de que ambos grupos poseen un promedio muy similar en el examen en cuestión, sí existe una diferencia significativa si sólo se consideran las preguntas que evalúan el tema de Espacios Vectoriales.

En general, las calificaciones anteriores, permiten establecer que la implementación de la unidad didáctica en el grupo experimental realmente sí beneficia la comprensión de los

conceptos relacionados al tema de Espacios Vectoriales, pues el rendimiento académico promedio del grupo experimental posee una mejoría significativa en contraste con las calificaciones del grupo control.

Conclusiones

La implementación de actividades pedagógicas que utilizan aplicaciones y utilidades a la ingeniería y diversas ramas científicas, realmente favorecen el proceso de la enseñanza y aprendizaje del tema de Espacios Vectoriales en cursos de Álgebra Lineal, además de que beneficia la motivación y el interés de los estudiantes durante la clase.

Paralelamente, el uso del software educativo ayuda al estudiante a ejercitar conocimientos que ya posee en su estructura cognitiva previa, lo cual a su vez permite agilizar cálculos. También, por su carácter interactivo, admite desarrollar actividades intelectuales que propician un aprendizaje significativo, además que los paquetes computacionales son casi una necesidad cuando se deben resolver extensas y tediosas operaciones.

Al igual que el uso de las unidades didácticas en el proceso de la enseñanza y aprendizaje del Álgebra Lineal que vinculen las ideas de los párrafos anteriores, permite captar y mantener el interés de los alumnos y a la vez estructura y regula la práctica educativa en cuanto a sus componentes curriculares, tales como contenidos, objetivos, metodología, evaluación y motivación.

En suma, y según los resultados de esta investigación, los estudiantes del grupo experimental y los observadores externos siempre mantuvieron una opinión y actitud positiva (tanto cuantitativa como cualitativa) hacia las actividades que involucraba la Unidad Didáctica empleada para el tema de Espacios Vectoriales, lo cual evidencia la importancia y el potencial de utilizar nuevas propuestas pedagógicas bajo una enseñanza contextualizada en contenidos de Álgebra Lineal.

De allí la relevancia que en todos los cursos de Matemática dirigidos a estudiantes de diferentes ingenierías, los docentes deben propiciar a los educandos de actividades de clase donde se visualicen (o inclusive modelen) las aplicaciones y utilidades de los tópicos estudiados o por estudiar, además del uso del software educativo.

Referencias y bibliografía

- Area, M. (1993). *Unidades didácticas e investigación en el aula*. España: Nagal.
- Azofeifa, C. (2009). *Aprendizaje del concepto de espacio vectorial*. Conferencia presentada en sexto congreso internacional sobre la enseñanza de la Matemática asistida por computadora en la Universidad Tecnológica de Costa Rica.
- Boza, J. (1998). Bosquejo histórico del Álgebra lineal. *Reflexiones. Universidad de Costa Rica*, 72, 23-36.
- Corrales, A. (2010). La programación a medio plazo dentro del tercer nivel de concreción. Las unidades didácticas. *Revista Digital de Educación Física*, 1(2). Descargado de dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/3175435.pdf
- Costa, V., di Domenicantonio, R., Prodanoff, F., Tolosa, E. & Guarepi, V. (2008). *Acciones interdisciplinarias entre Matemática y Física para mejorar la enseñanza y aprendizaje del cálculo vectorial*. Buenos Aires: Editorial de la Universidad Nacional de Salta.
- Fernández, J., Elortegui, N., Rodríguez, J. & Moreno, T. (1999). *¿Cómo hacer unidades didácticas innovadoras?* Sevilla: DIADA.

- García, L. (2004). *La modelación matemática en el proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo diferencial*. (Tesis inédita de doctorado). Universidad Autónoma de Nuevo León, México.
- García, L. (2009). *Las unidades didácticas*. Madrid: BENED.
- Gómez, J. (2003). La modelización matemática: una herramienta válida en la enseñanza de las matemáticas universitarias. *SUMA*, 42, 37-45.
- Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. México: McGraw Hill.
- Kú, K., Trigueros, M. & Oktac, A. (2008). Comprensión del concepto de base de un espacio vectorial desde el punto de vista de la teoría APOE. *Educación Matemática*, 20(2), 65-89.
- Lay, D. (2012). *Álgebra lineal y sus aplicaciones*. (3a ed.). México: Prentice Hall.
- Montero, J., Martínez, E., Moran, J., Alías, F. & Rodríguez, J. (2004). *ALGTEC: un complemento a la enseñanza del Álgebra Lineal en carreras de ingeniería de telecomunicaciones*. Conferencia presentado en el simposio nacional de la Unión Radio Científica Internacional (URSI). Recuperado de <http://www.educoas.org/virtualeduca/virtual/actas2002/actas02/414.pdf>
- Mora, D. (2003). Estrategias para el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas. *Revista Pedagógica*, 24(70), 181-272.
- Moreno, M. (2001, Junio). Los espacios vectoriales, el amarillo, el rojo y el azul. *SUMA*, 37, 75-82.
- Ortega, P. (2002). *La enseñanza del álgebra lineal mediante sistemas informáticos de cálculo algebraico*. (Tesis inédita de doctorado). Universidad Complutense de Madrid, Madrid, España.
- Ortiz, J., Rico, L. & Castro, E. (2008). La enseñanza del Álgebra Lineal utilizando modelización y calculadora gráfica: un estudio con profesores en formación. *PNA*, 2(4), 181-189.
- Paredes, Z., Iglesias, M. & Ortiz, J. (2009). Los docentes y su formación inicial hacia el aula de Matemática. Una propuesta con modelización y nuevas tecnologías. *Revista Iberoamericana sobre calidad, eficacia y cambio en educación*, 7(1), 85-102.
- Rodríguez, M. (2004). Generalidades de la planificación de la unidad didáctica en temas de educación ambiental. *Biocenosis*, 18(1-2), 26-37.
- Universidad de Costa Rica. Escuela de Matemática. (II Ciclo del 2014). *Carta al estudiante del curso Álgebra Lineal (MA1004)*. San José, Costa Rica.
- Uzuriaga, V., Arias, J. & Manco, D. (2010, Abril). Diagnóstico y análisis de algunas causas que dificultan el aprendizaje del álgebra lineal en estudiantes de ingeniería. *Scientia Et Technica*, 16(44), 286-291.