



VALOR MEDIO DEL NUMERO DE PARTES EN QUE UNA FIGURA CONVEXA ES DIVIDIDA POR n RECTAS ARBITRARIAS

por L. A. SANTALÓ

Sea una figura convexa K de área F y perímetro L . Suponiendo trazadas n rectas que cortan a K , el número de regiones en que queda dividida depende de la posición de las rectas. Por ejemplo, para $n=4$, en la fig. 1 el número N de regiones es 9 y en la fig. 2 es 7. Queremos hallar el *valor medio* del número de estas regiones para todas las posiciones posibles de las n rectas. Este número N veremos que está relacionado muy simplemente con el número N' de puntos de intersección de las rectas entre sí que son interiores a K ; así en la fig. 1 es $N'=4$ y en la fig. 2 es $N'=2$. Empezaremos para hallar el valor medio de este último número N' para pasar luego al buscado.

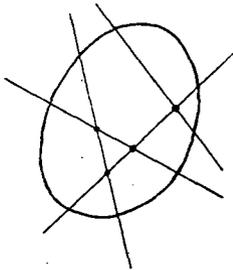


Fig. 1.

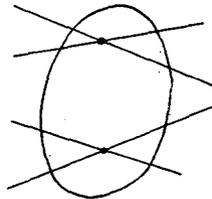


Fig. 2

1. Recordemos que como medida de un conjunto de rectas se entiende simplemente el valor de la integral doble, extendida al conjunto considerado, de la expresión $dG = dp \, d\theta$ siendo p la distancia de la recta a un origen fijo y θ el ángulo de la normal a la recta con una dirección también fija (fig. 3). Solamente habrá lugar, en esta nota, a considerar conjuntos de rectas para los que la integral anterior existe. Por ejemplo la medida de las rectas que cortan a un segmento de longitud l

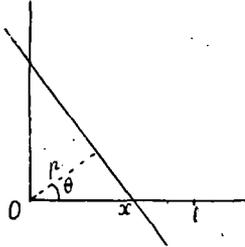


Fig. 3

se puede calcular directamente: si se supone que la posición del segmento es la O, l de la fig. 3, llamando x a la abscisa del punto de intersección será

$$\int dp d\theta = \int_0^l dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta = 2l \quad (1)$$

Se puede ver que este valor es independiente de la posición del segmento en el plano.

En general si hay m segmentos de longitudes l_i , llamando v al número de ellos que son cortados por una recta G en cada posición de la misma, sumando las integrales (1) correspondientes a cada segmento, se obtiene

$$\int v dG = 2 \sum_{i=1}^m l_i \quad (2)$$

extendida la integración a todas las posiciones de la recta.

Para el problema que nos ocupa debemos también recordar que la medida de las rectas que cortan a una figura convexa K es igual a su longitud, o sea

$$\int dG = L \quad (3)$$

G. K. = 0

indicando por $G \cdot K \neq O$ que la integración está extendida a todas las rectas que cortan a K o sea, cuya intersección con K es distinta de cero.

Llamando s a la longitud de la cuerda que la recta G determina en la figura convexa K también debemos recordar la fórmula casi inmediata

$$\int s \, dG = \pi F \quad (4)$$

fácil de obtener integrando primero $s \, dp$ (lo que da el área F) y luego haciendo variar Θ de O a π .

2. Por *valor medio* del número de puntos N' de intersección de las n rectas que son interiores a K se entiende lo siguiente. El número N' es una función de las n rectas G_i , o sea de sus $2n$ coordenadas p_i, Θ_i ($i = 1, 2, \dots, n$); si se sabe calcular la integral

$$J' = \int N' \, dG_1 \, dG_2 \, dG_3 \dots dG_n \quad (5)$$

extendida a todas las posiciones de las n rectas en las cuales cortan a K , como además la medida de todas estas posiciones posibles según (3) vale

$$\int_{G_i \cdot K \neq O} dG_1 \, dG_2 \, dG_3 \dots dG_n = L^n \quad (6)$$

el *valor medio* de N' será, por definición, el cociente entre (5) y (6).

3. Hay pues que calcular J' . Llamando N'_{ij} a una función de G_i y G_j (o sea de $p_i, \Theta_i, p_j, \Theta_j$) tal que valga uno si G_i y G_j se cortan dentro de K y cero si se cortan fuera (por uniformidad pondremos también $N'_{ij} = 0$). Por cada posición de las n rectas es

$$N' = \sum_{i,j} N'_{ij}$$

y el número de las N'_{ii} es igual al de combinaciones de las n rectas tomadas 2 a 2 o sea $\binom{n}{2}$.

Llamando s_i a la longitud de la cuerda que G_i determina en K , según (1) y (4) se tiene

$$\int_{G_i, K \neq 0} N'_{ii} dG_i dG_i = 2 \int s_i dG_i = 2 \pi F$$

Luego

$$\begin{aligned} J &= \int N' dG_1 dG_2 \dots dG_n = \sum_{i,j} \int N'_{ij} dG_1 dG_2 \dots dG_n = \\ &= \binom{n}{2} 2 \pi F L^{n-2} \end{aligned} \quad (7)$$

Dividiendo (7) por (6) se obtendrá por tanto, como valor medio de puntos de intersección N' que son interiores a K

$$\boxed{N' = \binom{n}{2} \frac{2 \pi F}{L^2}} \quad (8)$$

4. Para pasar de N' al número N de regiones en que las n rectas dividen a K se observa en primer lugar que las posiciones de las rectas en las cuales pasan más de 2 por un mismo punto son posiciones especiales de medida cero, es decir, sin influencia en las integrales (5) o (6) ni por tanto en los valores medios. Para las demás posiciones vamos a demostrar que se cumple la relación

$$N = N' + n + 1 \quad (9)$$

Por ejemplo en la figura 1 es $N' = 4$, $n = 4$, $N = 9$ y en la fig. 2 es $n = 4$, $N' = 2$, $N = 7$.

Para demostrar (9) consideremos la red formada por las n rectas y el contorno de K . El número de *vértices* es igual a N' más los $2n$ puntos que las rectas determinan en el contorno de K . El número de *regiones* es por definición N . Para el número de lados se observa que por cada uno de los N' vértices interiores pasan 4 y por cada uno de los vértices del contorno

pasan 3; como cada lado pertenece a 2 vértices el número de ellos será por tanto $1/2 (4N' + 6n) = 2N' + 3n$. Pero el teorema de EULER para superficies abiertas dice que el número de regiones más el de vértices es igual al de lados más uno, luego

$$N + N' + 2n = 2N' + 3n + 1$$

de donde resulta la igualdad (9) que queríamos demostrar.

El valor medio del número de regiones N , teniendo en cuenta (8) y (9) será por tanto

$$\bar{N} = \binom{n}{2} \frac{2\pi F}{L^2} + n + 1$$

5. El número total de lados de la red formada por el contorno de K más las cuerdas que las rectas G_i determinan en esta figura convexa hemos visto que era $2N' + 3n$. El número de lados del contorno es $2n$, luego el número de lados interiores será $2N' + n$. Llamando λ_i al número de lados de la región C_i , al sumar las λ_i para todas las regiones se observa que cada lado interior aparece contado dos veces y cada lado del contorno una sola vez, por tanto

$$\sum_{i=1}^N \lambda_i = 2(2N' + n) + 2n = 4N' + 4n.$$

De aquí que el valor medio del número de lados de las regiones en que una figura convexa K queda dividida por n rectas arbitrarias que la cortan es

$$\bar{\lambda} = \frac{4\bar{N} + 4n}{N} = \frac{4\bar{N} + 4n}{\bar{N} + n + 1} < 4.$$

N' está dado por (8).