

SOBRE LOS SISTEMAS COMPLETOS DE DESIGUALDADES ENTRE TRES ELEMENTOS DE UNA FIGURA CONVEXA PLANA

POR

L. A. SANTALÓ

SUMMARY

In order to get a better understanding of the inequalities between the fundamental elements of a convex body in space, BLASCHKE introduced a diagram which proved very useful for ulterior researches (BLASCHKE [1], BONNESEN-FENCHEL [2] p. 84, HADWIGER [4] p. 72).

In this paper we apply a similar device for convex figures in the euclidean plane. Given three real numbers a_1, a_2, a_3 the question rises if there exists a convex figure K which has them as the values of three of its elements, such that $(L, F, D), (L, F, E), (F, R, r), \dots$ where $L =$ length, $F =$ area, $D =$ diameter, $E =$ thickness, $R =$ radius of the circumscribed circle, $r =$ radius of the inscribed circle. To each triad a_1, a_2, a_3 we assign a point of the unit square; the points for which such a convex figure K exists will fill a connected domain $D(K)$. The problem is to determine $D(K)$ for each given triad of elements.

The domain $D(K)$ is determined by certain inequalities between a_1, a_2, a_3 ; if these inequalities form a complete system, $D(K)$ is completely determined. If some inequality is lacking, some part of the boundary of $D(K)$ remains unknown. The method gives a geometric interpretation of these inequalities and systematizes the known and the unknown results.

In this paper we consider only the elements F, L, D, E, R, r and give the diagram for seven cases. Most of the applied inequalities are known; they are put together in n° 4. The inequalities and results of the cases (D, R, r) , n° 9, and (E, R, r) , n° 10 seems to be new.

It is clear that many other cases can be considered (n° 13); however most of them need the discovery of new inequalities.

1. Introducción

Para los cuerpos convexos del espacio, BLASCHKE ideó un diagrama para representarlos como puntos del plano a partir de sus tres elementos fundamentales: volumen V , área F y curvatura media total M . Este diagrama puede verse por ejemplo en BONNESEN-FENCHEL [2] p. 84 y de manera muy deta-

llada en HADWIGER [4], p. 72. A partir de este diagrama se vió, por ejemplo, que las clásicas desigualdades de MINKOWSKY

$$(1) \quad M^2 \geq 4\pi F, \quad F^2 \geq 3VM$$

de las cuales se deducen como consecuencia las

$$F^3 \geq 36\pi V^2, \quad M^3 \geq 48\pi^2 V$$

no forman un sistema completo. Es decir, no es suficiente que tres números reales V , F , M satisfagan a las relaciones (1) para poder asegurar que existe un cuerpo convexo que los tiene como medida de su volumen, área y curvatura media total respectivamente. Falta todavía otra desigualdad, que permanece desconocida en el caso general y que se conoce únicamente en algunos casos particulares gracias principalmente a los trabajos de HADWIGER [4].

Nuestro objeto es estudiar diagramas análogos para las figuras convexas del plano. Si nos limitamos al área F y a la longitud L , la única desigualdad es la isoperimétrica clásica

$$(2) \quad L^2 - 4\pi F \geq 0$$

y no hay ninguna otra, puesto que dados dos números reales cualesquiera F , L ligados por la relación (2), existe siempre una figura convexa (naturalmente no única) que tiene L por longitud y F por área. En efecto, basta tomar un rectángulo de lados a , $2b$ y considerar la figura formada por el mismo más dos semicírculos de radio b añadidos sobre los lados de longitud $2b$ (fig. 4). Para esta figura (que llamaremos abreviadamente «rectángulo terminado por semicírculos») es

$$(3) \quad L = 2a + 2\pi b, \quad F = 2ab + \pi b^2$$

y por tanto, dados L , F basta tomar

$$a = \frac{1}{2} (L^2 - 4\pi F)^{\frac{1}{2}}, \quad b = \frac{1}{2\pi} (L - (L^2 - 4\pi F)^{\frac{1}{2}})$$

para tener una figura convexa con las características L , F .

Junto con L, F se pueden también considerar otros elementos de K , por ejemplo $D =$ diámetro, $E =$ anchura, $R =$ radio del círculo circunscrito, $r =$ radio del círculo inscrito. Entre estos elementos, tomados dos a dos, existen ciertas desigualdades que reunimos en el n° 4. También en todos estos casos es fácil comprobar que las desigualdades conocidas forman un sistema completo, es decir, las únicas desigualdades posibles entre los elementos L, F, D, E, R, r , tomados dos a dos, son las del n° 4, todas ellas conocidas.

La cuestión cambia si en vez de dos elementos se dan tres elementos de una figura convexa K , elegidos entre los mismos L, F, D, E, R, r anteriores. Representémoslos por a_1, a_2, a_3 . Se presenta el problema de averiguar las condiciones necesarias y suficientes para que dados tres números reales a_1, a_2, a_3 exista una figura convexa plana K que los tenga por dichos elementos.

Para ello es necesario que las a_1, a_2, a_3 cumplan ciertas desigualdades. Para poner de manifiesto estas desigualdades y darles una forma más clara, es útil representar en cada caso un diagrama al estilo del de BLASCHKE para cuerpos convexos. Poniendo $x = f_1(a_1, a_2, a_3)$, $y = f_2(a_1, a_2, a_3)$ de manera que x, y no varien al sustituir K por una figura semejante y sea $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$, se tendrá en cada caso una aplicación de las figuras convexas en los puntos del cuadrado unidad. Los puntos de este cuadrado para los cuales existe una figura convexa con las características a_1, a_2, a_3 llenarán un cierto dominio y es precisamente este dominio lo que se trata de determinar. Naturalmente que la correspondencia entre los puntos de este dominio y las figuras convexas no es biunívoca, ni aún salvo una semejanza, pues a un mismo punto pueden corresponder figuras convexas de forma muy variada.

Se tiene así un diagrama para cada terna de elementos. Cuando las desigualdades conocidas entre los elementos a_1, a_2, a_3 permiten delimitar totalmente el dominio de los puntos para los que existe una figura convexa K , el problema está totalmente resuelto y las desigualdades conocidas forman un sistema completo. En cambio, si las desigualdades conocidas no permiten delimitar totalmente dicha área (ver, por ejemplo, el caso $(E,$

R, r) y la fig. 12) queda puesto de manifiesto que faltan desigualdades. De esta manera el diagrama sirve para indicar direcciones de investigación.

En este trabajo damos solamente algunos ejemplos. Aún limitándonos a los elementos F, L, D, E, R, r quedan todavía muchos por considerar (nº 13). Si se tienen en cuenta más elementos (nº 2) el número de casos crece rápidamente.

Aunque, para los casos aquí considerados, la mayoría de las desigualdades utilizadas son conocidas, creemos que mediante estos diagramas se obtiene una sistematización interesante, que pone orden entre los resultados conocidos e indica las direcciones en que sería interesante proseguir el estudio. Las desigualdades de los casos (D, R, r) y (E, R, r) parecen ser nuevas.

2. Elementos principales de una figura convexa

Dada una figura convexa plana K , quedan determinadas infinitas características de la misma. Las que vamos a considerar en este trabajo son:

F = área,

L = longitud o perímetro de su contorno,

D = diámetro = máxima distancia entre dos puntos de K ,

E = anchura mínima o espesor = distancia mínima entre dos rectas paralelas que contienen a K ,

R = radio del círculo circunscrito = radio del círculo mínimo que contiene a K ,

r = radio del círculo inscrito = radio del círculo máximo contenido en K .

Se podrían considerar otras muchas características. Por ejemplo:

T = área del triángulo de área mínima que contiene a K ,

t = área del triángulo de área máxima contenido en K ,

I = momento de inercia polar respecto del centro de gravedad de K ,

L_a = longitud afin del contorno de K .

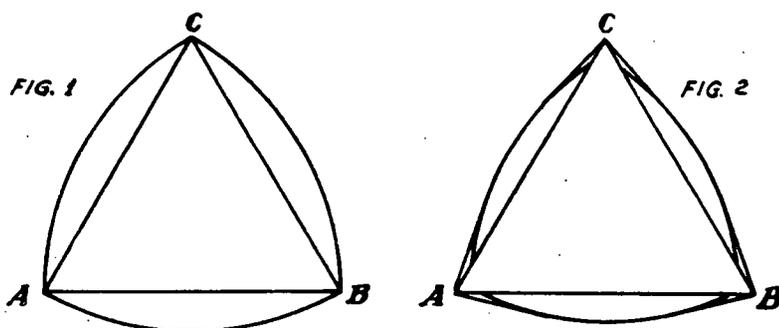
En el libro de BONNESEN-FENCHEL [2] o el de POLYASZEGO [7] se encuentran otras muchas características que podrían incluirse en esta sistematización general.

3. Algunas figuras convexas típicas

Hay ciertas figuras convexas que aparecen con frecuencia en los problemas de máximos y mínimos y que conviene reunir y darles nombre para evitar repeticiones.

Aparte las triviales del segmento, círculo y triángulo equilátero, estas figuras son:

a) *Triángulo de REULEAUX*. Es el triángulo curvilíneo formado a partir de un triángulo equilátero $A B C$, al sustituir los lados por arcos de circunferencia cuyo centro es el vértice opuesto (fig. 1).



El triángulo de REULEAUX es un caso particular de las llamadas *figuras de anchura constante*, que son aquellas que en cualquier dirección tienen la misma anchura, es decir, la misma distancia entre dos rectas de apoyo paralelas. Para todas las figuras de anchura constante es

$$D = E, \quad L = \pi E.$$

b) *Figuras de YAMANOUTI*. Se obtienen tomando un triángulo equilátero $A B C$ y sobre cada lado un arco de circunferencia de centro el vértice opuesto y radio menor que el lado del triángulo; la envoltura convexa mínima de la figura así formada (obtenida trazando por los vértices del triángulo las tangentes a dichos arcos de circunferencia) es una figura de YAMANOUTI [9] (fig. 2).

c) *Círculo con dos capuchones simétricos.* Es la figura formada por un círculo más las tangentes al mismo desde dos puntos exteriores A, B pertenecientes a un mismo diámetro (fig. 3). Obsérvese que para estas figuras es

$$E=r, \quad 2F=rL$$

$$L=2(D^2-E^2)^{\frac{1}{2}}+2E \operatorname{arc} \operatorname{sen} \frac{E}{D}$$

d) *Rectángulo terminado por semicírculos.* Es un rectángulo con dos lados opuestos sustituidos por semicírculos (fig. 4). Para estas figuras es

$$\pi r^2 - Lr + F = 0, \quad 4F = 2EL - \pi E^2.$$

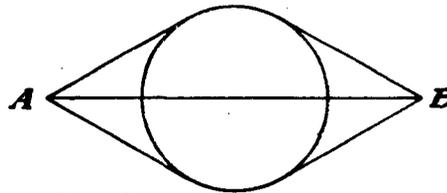


FIG. 3

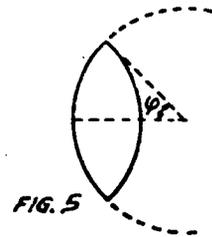


FIG. 5

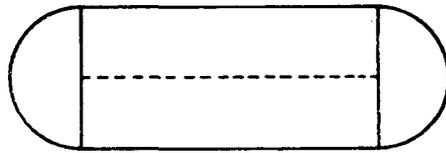


FIG. 4

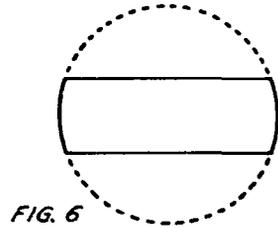


FIG. 6

e) *Lenteja simétrica.* Es la parte común a dos círculos de igual radio que se cortan (fig. 5). Llamando 2φ al ángulo que forman los radios de uno de los círculos que van a los extremos de la lenteja y a al radio de los círculos, es

$$L=4a\varphi, \quad F=2a^2(\varphi - \operatorname{sen} \varphi \cos \varphi),$$

$$D=2R=2a \operatorname{sen} \varphi, \quad E=2r=2a(1 - \cos \varphi).$$

f) *Segmento de círculo simétrico.* Es la parte de círculo limitada por dos cuerdas paralelas que equidistan del centro (fig. 6). Para estas figuras valen las relaciones

$$L = 2(D^2 - E^2)^{\frac{1}{2}} + 2D \operatorname{arc} \operatorname{sen} (E/D)$$

$$2F = E(D^2 - E^2)^{\frac{1}{2}} + D^2 \operatorname{arc} \operatorname{sen} (E/D).$$

4. Desigualdades conocidas

Entre los elementos de una figura convexa hay ciertas desigualdades, algunas inmediatas, otras más complicadas, que vamos a reunir a continuación, indicando al mismo tiempo las figuras para las cuales vale el signo de igualdad. Tenemos en cuenta únicamente los elementos L , F , D , E , R , r .

a) Desigualdades entre dos elementos.

- (I) $4\pi F \leq L^2$ igualdad para los círculos,
- (II) $4F \leq \pi D^2$ igualdad para los círculos,
- (III) $E^2 \leq \sqrt{3}F$ igualdad para los triángulos equiláteros,
- (IV) $\pi r^2 \leq F$ igualdad para los círculos,
- (V) $F \leq \pi R^2$ igualdad para los círculos,
- (VI) $L \leq \pi D$ igualdad para las figuras de anchura constante,
- (VII) $2D \leq L$ igualdad para los segmentos de recta,
- (VIII) $\pi E \leq L$ igualdad para las figuras de anchura constante,
- (IX) $2\pi r \leq L$ igualdad para los círculos,
- (X) $L \leq 2\pi R$ igualdad para los círculos,
- (XI) $E \leq D$ igualdad para las figuras de anchura constante,
- (XII) $D \leq 2R$ igualdad para muchas figuras,

- (XIII) $R \leq D/\sqrt{3}$ igualdad para los triángulos equiláteros y todas las figuras de diámetro D que contienen a un triángulo equilátero de lado D ,
- (XIV) $2r \leq D$ igualdad para los círculos,
- (XV) $E \leq 2R$ igualdad para los círculos,
- (XVI) $E \leq 3r$ igualdad para los triángulos equiláteros,
- (XVII) $2r \leq E$ igualdad para muchas figuras,
- (XVIII) $r \leq R$ igualdad para los círculos,
- (XIX) $4R \leq L$ igualdad para los segmentos de recta.

Es fácil comprobar que estas desigualdades son las únicas existentes entre los elementos considerados L, F, D, E, R, r tomados dos a dos. Ellas forman un sistema completo. Es decir, dados dos elementos cualesquiera entre los seis considerados, basta que satisfagan a las desigualdades anteriores, para que exista una figura convexa plana que tenga estos elementos.

De las desigualdades anteriores muchas son triviales, otras son complicadas. Su demostración y bibliografía correspondiente puede verse en BONNESEN-FENCHEL [2].

b) *Desigualdades entre más de dos elementos.*

- (XX) $DE \leq 2F$, si $2E \leq \sqrt{3}D$ la igualdad vale sólo para los triángulos de base D y altura E . Si $2E > \sqrt{3}D$ vale siempre el signo $<$.
- (XXI) $2(D^2 - E^2)^{\frac{1}{2}} + 2E \operatorname{arc} \operatorname{sen}(E/D) \leq L$, igualdad para círculos con dos capuchones simétricos,
- (XXII) $L \leq 2(D^2 - E^2)^{\frac{1}{2}} + 2D \operatorname{arc} \operatorname{sen}(E/D)$, igualdad para los segmentos de círculo simétricos,
- (XXIII) $2F \leq E(D^2 - E^2)^{\frac{1}{2}} + D^2 \operatorname{arc} \operatorname{sen}(E/D)$, igualdad para segmentos de círculo simétricos,
- (XXIV) $4F \leq 2EL - \pi E^2$, igualdad para los rectángulos terminados por semicírculos.

- (XXV) $Lr \leq 2F$, igualdad para círculos con dos capuchones simétricos,
- (XXVI) $F \leq r(L - \pi r)$ igualdad para los rectángulos terminados por semicírculos,
- (XXVII) $F \leq R(L - \pi R)$ igualdad para los círculos,
- (XXVIII) $8\varphi F \leq L(L - 2D \cos \varphi)$, con $2\varphi D = L \sin \varphi$, igualdad para las lentejas simétricas.

Todas estas desigualdades pueden verse en BONNESEN-FENCHEL [2] o bien en SHOLANDER [8] donde se advierte que las desigualdades (3), (6), (5) pág. 81 de BONNESEN-FENCHEL deben sustituirse por las (XXIII), (XXIV), (XXVIII) anteriores.

Al revés de lo que ocurre en el caso de dos elementos, las desigualdades anteriores están lejos de formar un sistema completo.

Faltan todavía muchas desigualdades y precisamente los diagramas que damos a continuación sirven para poner de manifiesto cuales son las desigualdades todavía desconocidas (ver, por ej. los n^{os}. 10 y 12). En los n^{os}. 9 y 10 obtenemos nuevas desigualdades.

5. Caso F, L, E .

Vamos a empezar por estudiar el caso correspondiente a los elementos L, F, E , es decir, se trata del problema siguiente: hallar las condiciones que deben cumplir tres números reales dados L, F, E para que exista una figura convexa del plano que los tenga, respectivamente, por longitud, área y anchura mínima.

Es un caso complicado que ha sido resuelto por varios autores, principalmente por KUBOTA-HEMMI [5], SHOLANDER [8] y OHMAN [6]. Nosotros vamos a tomar los resultados de estos autores para hacer el diagrama correspondiente. Con este ejemplo, complicado aunque conocido, se pondrá de manifiesto el método y sus ventajas para ver la necesidad de las distintas etapas que ha sido necesario ir venciendo.

Pongamos

$$(1) \quad x = \frac{\pi E}{L}, \quad y = \frac{E^2}{\sqrt{3}F}.$$

Según las desigualdades (VIII) y (III) a cada figura convexa K con los elementos L, F, E corresponde un punto del cuadrado unidad $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$. A todas las figuras semejantes corresponde el mismo punto, pero a un mismo punto pueden corresponder también figuras no semejantes.

Consideremos la desigualdad (XXIV). De ella y (1) se deduce

$$y \geq \frac{4x}{\pi\sqrt{3}(2-x)}.$$

Para $0 \leq x \leq 1$, la curva

$$\pi\sqrt{3}(2-x)y - 4x = 0.$$

es un arco de hipérbola que une el origen con el punto $C(1, 4/\pi\sqrt{3})$.

Los puntos a los cuales corresponde una figura convexa K están por encima de esta curva. Los puntos de la curva OC son los correspondientes a rectángulos terminados por semicírculos, variando desde el segmento (punto O), hasta el círculo (punto C).

Falta ver la acotación superior. Para $2\sqrt{3}E \leq L$, o sea, $x \leq \pi/2\sqrt{3}$, YAMANOUTI probó que la mínima F (y por tanto la máxima y) se obtiene para los triángulos isósceles cuyas alturas iguales miden E y cuyo perímetro es L . Para estos triángulos, llamando α al ángulo de la base y a a la base misma, es

$$E = a \operatorname{sen} \alpha, \quad L = a(1 + \cos \alpha) \cos^{-1} \alpha, \quad F = (a^2/4) \operatorname{tg} \alpha$$

y por tanto

$$x = \pi \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha (1 + \cos \alpha)^{-1}, \quad y = (4/\sqrt{3}) \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha.$$

Estas son las ecuaciones paramétricas (para $0 \leq \alpha \leq \pi/3$) del arco de curva OT , que limita el área buscada superiormente.

entre $0 \leq x \leq \pi/2 \sqrt{3}$. A los puntos de este arco corresponden los triángulos isósceles mencionados, desde el segmento (punto O) hasta el triángulo equilátero, punto $T(\pi/2 \sqrt{3}, 1)$.

Para $\pi/2 \sqrt{3} \leq x \leq 1$, o sea, $\pi E \leq L \leq 2 \sqrt{3} E$, KUBOTA-HEMMI [5] probaron que es $2F \geq EL - \sqrt{3} E^2 \sec^2 \theta$ con θ raíz de la ecuación $6E(\operatorname{tg} \theta - \theta) = L - \pi E$, tal que $0 \leq \theta \leq \pi/6$. Esto equivale a la condición

$$(2) \quad y \leq \frac{2x}{\sqrt{3\pi - 3x \sec^2 \theta}}$$

con θ raíz de $6x(\operatorname{tg} \theta - \theta) = \pi(1 - x)$.

Poniendo el signo igual en (2) resulta una ecuación trascendente complicada, pero que representa un arco de curva como el TR de la fig. 7. Para $x=1$, es $\theta=0$, $y=2/(\sqrt{3\pi} - 3)$.

A los puntos de esta curva TR corresponden figuras de YAMANOUDI, que varían desde el triángulo equilátero (punto T) hasta el triángulo de REULEAUX (punto R).

Los puntos del segmento CR , para los cuales es $x=1$, corresponden a figuras de anchura constante, desde el triángulo de REULEAUX (punto R) hasta el círculo (punto C). Recordemos que entre las figuras de anchura constante fija E , el mínimo de F corresponde efectivamente al triángulo de REULEAUX y el máximo de F al círculo (teorema de LEBESGUE-BLASCHKE, ver BONNSEN-FENCHEL [2] p. 132-134).

Se tiene así completamente delimitada el área a cuyos puntos corresponden figuras convexas del plano con dados F , L , E ligados con x , y por las relaciones (1). El problema (F , L , E) está, pues, completamente resuelto. El arco TR es el más complicado.

6. Caso F , D , E

Debido a las desigualdades (XI), (II), poniendo

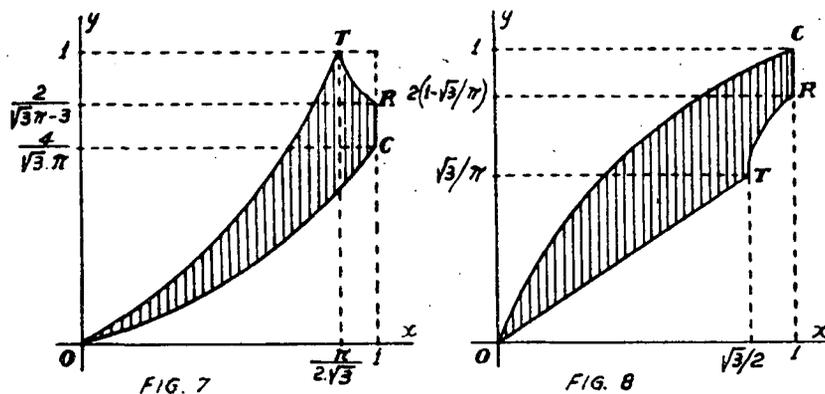
$$x = \frac{E}{D}, \quad y = \frac{4F}{\pi D^2}$$

tendremos una aplicación del conjunto de las figuras convexas K , en el cuadrado unidad $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

La desigualdad (XXIII) nos dice que

$$y \leq \frac{2}{\pi} \left[x(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + \arcsen x \right]$$

válida para todo $0 \leq x \leq 1$. Tenemos así, tomando el signo = en la desigualdad anterior, la ecuación del arco OC que limita superiormente el dominio buscado de los puntos que son imágenes de figuras convexas (fig. 8). A los puntos de este arco OC corresponden segmentos de círculo simétricos, que van desde el segmento (punto O), hasta el círculo (punto C).



Para la acotación inferior, la desigualdad (XX) nos dice que, para el intervalo $0 \leq x \leq \sqrt{3}/2$, es

$$y \geq \frac{2}{\pi} x.$$

Se tiene así el segmento de recta OT , siendo T el punto $(\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/\pi)$ que corresponde al triángulo equilátero. A los puntos del segmento OT corresponden triángulos de base D y altura E ; fijando D y variando E estos triángulos varían desde el segmento (punto O) hasta el triángulo equilátero (punto T).

Finalmente, para el intervalo $\sqrt{3}/2 \leq x \leq 1$, KUBOTA-HEMMI [5] demuestran la desigualdad

$$F \geq 3E \left[(D^2 - E^2)^{\frac{1}{2}} + E (\arcsen (E/D) - \pi/3) \right] - (\sqrt{3}/2) D^2$$

o sea,

$$y \geq (12/\pi) x \left[(1 - x^2)^{\frac{1}{2}} + x (\arcsen x - \pi/3) \right] - 2\sqrt{3}/\pi.$$

Tomando el signo = se tiene la ecuación del arco TR . Al punto $R(1, 2(1 - \sqrt{3}/\pi))$ corresponde el triángulo de $REULEAUX$. A los puntos del arco TR corresponden figuras de $YAMANOUTI$, que varían desde el triángulo equilátero T hasta el triángulo de $REULEAUX R$.

A los puntos del segmento RC corresponden las figuras de anchura constante, desde el triángulo de $REULEAUX R$ (área mínima) hasta el círculo C (área máxima).

7. Caso F, L, R

Debido a las relaciones (XIX) y (I) podemos poner

$$x = \frac{4R}{L}, \quad y = \frac{4\pi F}{L^2}$$

con lo cual será $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

La desigualdad evidente (X) da

$$x \geq \frac{2}{\pi}.$$

Este valor corresponde al círculo y por tanto $y=1$; se tiene así el punto $C(2/\pi, 1)$, fig. 9.

Se sabe que el máximo de F , dados L y R corresponde a la lenteja simétrica (BONNESEN-FENCHEL, [2] p. 82). Por tanto, según las fórmulas del n° 3, es

$$8\varphi F \leq L(L - 4R \cos \varphi)$$

donde φ está determinado por la ecuación $L \operatorname{sen} \varphi = 4 R \varphi$. Esta desigualdad puede escribirse

$$y \leq \frac{\pi}{2\varphi} (1 - x \cos \varphi)$$

con φ dado por $\operatorname{sen} \varphi = x \varphi$.

Se tiene así, tomando el signo =, la ecuación de una curva trascendente que une C (para $x=2/\pi$ es $\varphi=\pi/2$, $y=1$) con $S(1,0)$ que corresponde al segmento de recta (para $x=1$ es $\varphi=0$, $y=0$). Esta curva da el contorno superior del dominio buscado. A todos los puntos de esta curva corresponden lentejas simétricas, las cuales varían desde el segmento al círculo.

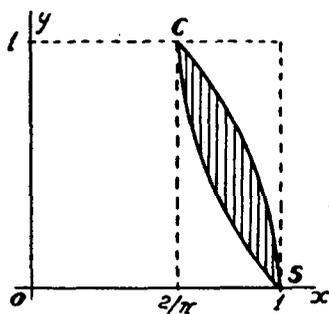


FIG. 9

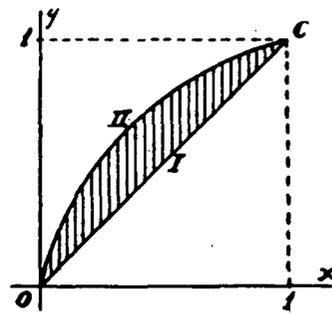


FIG. 10

La curva inferior es todavía más complicada. Según FAVARD [3] el mínimo de F dados L y R (o sea, el mínimo de y para cada x) corresponde a los polígonos inscritos en un círculo de radio R cuyos lados son todos iguales entre sí, excepto uno de ellos, que es igual o menor. La expresión de F en función de L y R es complicada, pero está bien determinada y permite construir la curva inferior CS por puntos.

En lugar de la curva exacta, FAVARD demuestra en el lugar citado que una acotación simple, si bien no muy precisa, es,

$$F \geq R(L - 4R)$$

o sea

$$y \geq \pi x(1 - x).$$

La curva $y = \pi x(1-x)$ aproxima al arco inferior CS de la fig. 9, pero no es exacta; por ejemplo, para $x = 2/\pi$ resulta $y = 2(1 - 2/\pi) < 1$, cuando debería ser $y = 1$.

8. Caso F, L, r

Este es un caso simple. Pongamos

$$(1) \quad x = \frac{2\pi r}{L}, \quad y = \frac{4\pi F}{L^2}$$

con lo cual, según (IX) y (I) será $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

La desigualdad (XXV) se escribe

$$y \geq x.$$

Por tanto la diagonal OC es el contorno inferior del dominio buscado. A los puntos de esta diagonal corresponden los círculos con dos capuchones simétricos, variando desde el segmento (punto O) hasta el círculo (punto C), fig. 10.

Otra desigualdad importante es la de BONNESEN (XXVI) que se escribe

$$y \leq x(2-x).$$

Se tiene así el arco superior OC de la fig. 10. A los puntos de este arco corresponden rectángulos terminados por semicírculos. La parte del plano que según la aplicación (1) corresponde a figuras convexas es la rayada de la fig. 10.

9. Caso D, R, r

Debido a las desigualdades evidentes (XXVIII) y (XII) podemos poner

$$x = \frac{D}{2R}, \quad y = \frac{r}{R}$$

para que sea siempre $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$.

La desigualdad (XIII) se escribe

$$x \geq \sqrt{3}/2.$$

Los puntos para los cuales es $x = \sqrt{3}/2$ corresponden a las figuras de diámetro D que contienen en su interior un triángulo equilátero de lado D . El mínimo de r para estas figuras corresponde al triángulo equilátero, para el cual es $y = 1/2$. El máximo de r corresponde al triángulo de REULEAUX, para el cual es $y = \sqrt{3} - 1$ (punto R). Se tiene así el segmento TR (fig. 11) al cual corresponden las figuras dichas, para las cuales es $\sqrt{3}R = D$ (o sea, $x = \sqrt{3}/2$).

Sobre el lado opuesto, $x = 1$, y puede tener cualquier valor. Basta considerar el círculo con dos capuchones simétricos y observar que puede variar desde el segmento $S(1, 0)$ hasta el círculo $C(1, 1)$, siendo siempre $D = 2R$.

Faltan hallar las curvas RC , contorno superior, y TS , contorno inferior.

Para el contorno inferior hay que buscar el mínimo de r dados D y R . Para ello utilizamos el siguiente lema elemental:

Lema. Entre dos triángulos inscriptos en un mismo círculo y con un lado común a , el radio del círculo inscripto es menor para el que tiene menor altura respecto del lado a .

En efecto, si es $a = BC$ y O es el centro del círculo inscripto, el ángulo A es fijo y áng. $BOC = (\pi + A)/2$ también. Al variar A , el centro O describe por tanto el arco capaz del ángulo constante BOC y el punto A está siempre sobre la recta que une O con el punto medio del arco de circunferencia BC del círculo circunscripto al triángulo, que no contiene el punto A . Por tanto la distancia de O al lado a , que es el radio del círculo inscripto, es menor para el triángulo en que A dista menos de a .

Sentado este lema supongamos una figura convexa K y su círculo circunscripto C_R de radio R . Si $D < 2R$ hay por lo menos tres puntos del contorno de C_R que pertenecen a K y no están sobre una misma semicircunferencia, o sea, existen tres puntos A, B, C de K tales que el triángulo ABC contiene al centro de C_R . Sea $BC = a$ el lado mayor de este triángulo. El radio r del círculo inscripto en el mismo es menor o igual que el radio r del círculo inscripto de K . Fijando B, C podemos

sustituir A por el punto A' tal que $A'B = D$, $A'C \leq AC \leq D$. Con esto, según el lema, tendremos otro triángulo, de diámetro D , con $r'_i \leq r_i \leq r$ y el mismo círculo circunscrito C_R . Hemos obtenido así una figura convexa (el triángulo $A'BC$) con iguales D y R , que K y con menor radio del círculo inscrito. El procedimiento es aplicable, con el signo estrictamente $<$, siempre que K no sea un triángulo isósceles ABC con $BC = BA = D$. Luego esta figura suministra el mínimo buscado para r , dados D y R .

Para un tal triángulo isósceles, llamado α a la mitad del ángulo desigual ABC , es

$$(D \cos \alpha - r) \operatorname{sen} \alpha = r, \quad \cos \alpha = \frac{D}{2R}$$

y por tanto

$$(D^2/2R - r) (4R^2 - D^2)^{\frac{1}{2}} = 2Rr.$$

De aquí, despejando r , resulta que:

Para todas las figuras convexas del plano, entre D , R , r se cumple la desigualdad

$$r \leq \frac{D^2 (4R^2 - D^2)^{\frac{1}{2}}}{2R \left[2R + (4R^2 - D^2)^{\frac{1}{2}} \right]}$$

donde la igualdad vale únicamente para el triángulo isósceles de lado igual a $D \leq 2R$ inscrito en el círculo de radio R .

Esta desigualdad se puede escribir

$$y \leq \frac{2x^2(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{1+(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}$$

Tomando el signo $=$, ésta es la ecuación de la curva TS de la fig. 11 que limita inferiormente el área buscada.

Para encontrar el arco RC superior debemos demostrar la siguiente desigualdad:

Entre D, R, r de cualquier figura convexa del plano, vale la relación

$$D \geq R + r$$

donde el signo igual vale, entre otras, para las figuras de anchura constante.

En efecto, según un teorema conocido (BONNESEN-FENCHEL [2] p. 130) toda figura convexa K de diámetro D puede completarse hasta formar una figura de anchura constante D que contiene a K ; sea K^* esta figura. Evidentemente es

$$D^* = D, \quad R^* \geq R, \quad r^* \geq r$$

indicando con un asterisco los elementos de K^* . Por otra parte, para las figuras de anchura constante es $D^* = R^* - r^*$ (BONNESEN-FENCHEL [2], p. 127). De aquí y de las desigualdades anteriores resulta el enunciado.

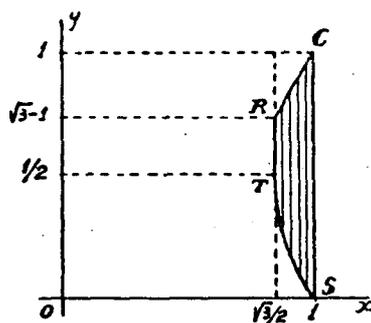


FIG. 11

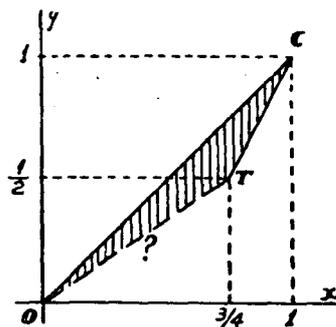


FIG. 12

Ejemplos de figuras para las cuales es $D = R + r$ se obtienen tomando los vértices de un triángulo equilátero ABC inscrito en C_R y un círculo interior concéntrico C_r de radio $r > R/2$; la envoltura convexa mínima de C_r y los puntos A, B, C cumple la condición $D = R + r$.

La relación $D \geq R + r$ se puede escribir

$$2x \geq 1 + y$$

es decir, el contorno superior RC de la fig. 11 es un segmento de la recta $y = 2x - 1$. A los puntos de este segmento de recta corresponden figuras como las que acabamos de mencionar, que van desde el triángulo de REULEAUX hasta la circunferencia.

10. Caso E, R, r

En virtud de las relaciones evidentes $E \leq 2R, r \leq R$, pondremos

$$x = \frac{E}{2R}, \quad y = \frac{r}{R}$$

con lo cual será $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$.

La relación $E \geq 2r$ da

$$x \geq y$$

y a los puntos de la recta $y = x$ corresponden las figuras con $E = 2r$, por ejemplo los segmentos de círculo simétricos o los círculos con dos capuchones simétricos, las cuales varían desde el segmento (punto O), hasta el círculo (punto C), fig. 12. Se tiene así el contorno superior del área buscada, que será la diagonal OC .

El contorno inferior es un poco más complicado. La relación (XVI) da

$$y \geq \frac{2}{3}x$$

pero aquí el signo igual vale sólo para los triángulos equiláteros, para los cuales es $E = 3r, R = 2r$, o sea, vale tan sólo para el punto $T (3/4, 1/2)$. Para los demás valores de x la acotación anterior es excesiva, pues no existen figuras para las cuales valga el signo de igualdad.

Vamos a buscar primero la rama TC . Sea C_R el círculo circunscrito a K y consideremos el máximo círculo C^* concéntrico con C_R y totalmente contenido en K ; sea r^* el radio de C^* . Si A es un punto del contorno de K que pertenece al contorno de C^* , su opuesto tendrá la recta de apoyo paralela a la de A y no puede ser exterior a C_R ; por tanto es $E \leq R + r^*$. Por otra parte es $r^* \leq r$; en consecuencia

$$E \leq R + r.$$

Esta relación se puede escribir

$$y \geq 2x - 1.$$

Es decir, el contorno TC es el segmento correspondiente de la recta $y = 2x - 1$. A los puntos de este segmento corresponden todas las figuras para las cuales es $E = R + r$, por ejemplo las que se obtienen a partir de un triángulo equilátero inscrito en C_R sustituyendo los lados por arcos de circunferencia iguales cuyos centros estén sobre la altura correspondiente a dichos lados. Se pasa de esta manera, con continuidad, desde el triángulo equilátero T hasta el círculo C .

Para el intervalo $0 \leq x \leq 3/4$ dejamos el problema sin resolver. Una acotación es la dada por la recta $y = (2/3)x$, pero ya dijimos que no es óptima, excepto para el punto T , por no ser alcanzada por ninguna figura convexa. Es probable que la acotación óptima corresponda a los triángulos isósceles que van desde el segmento O hasta el triángulo equilátero T , pero falta la demostración.

11. Caso L, D, E

Este es un caso simple, completamente resuelto por las desigualdades (XXI) y (XXII) debidas a KUBOTA (ver BONNESEN-FENCHEL [2], p. 80-81). Poniendo

$$x = \frac{E}{D}, \quad y = \frac{L}{\pi D}$$

es $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. La desigualdad (XXI) se escribe

$$y \geq \frac{2}{\pi} \left[(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + x \operatorname{arc} \operatorname{sen} x \right]$$

que, al tomar el signo igual nos da el borde inferior del dominio buscado. Esta curva une el punto $S(0, 2/\pi)$ que corresponde a los segmentos, con el $R(1, 1)$ que corresponde a todas las figuras de anchura constante. A los puntos de esta curva corresponden los círculos con dos capuchones simétricos (fig. 13):

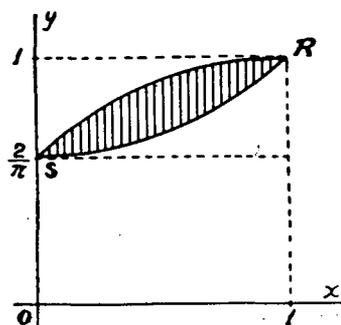


FIG. 13

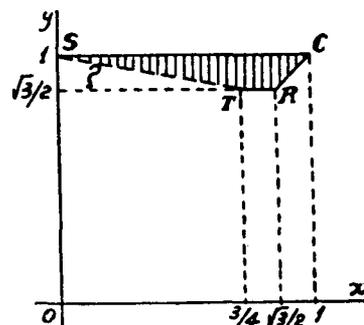


FIG. 14

La desigualdad (XXII) se escribe

$$y \leq \frac{\pi}{2} \left[(1-x^2)^{\frac{1}{2}} + \operatorname{arc} \operatorname{sen} x \right]$$

y tomando el signo igual tendremos el borde superior, que es otra curva que une S con R , fig. 13. Sus puntos corresponden a los segmentos de círculo simétricos.

12. Caso D, E, R

Pongamos

$$x = \frac{E}{2R}, \quad y = \frac{D}{2R}$$

con lo cual es $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 1$. La desigualdad $E \leq D$ nos dice que $x \leq y$. Esta desigualdad sólo es óptima para las figuras

en que $E=D$, o sea, para las de anchura constante. Para estas figuras se tiene $R \leq E/\sqrt{3}$, con el signo igual para los triángulos de REULEAUX, y por tanto $x \geq \sqrt{3}/2$ (ver BONNESEN-FENCHEL [2], p. 134). En consecuencia tenemos el segmento que une $R(\sqrt{3}/2, \sqrt{3}/2)$, triángulo de REULEAUX, con $C(1,1)$, círculo; a los puntos de este segmento RC corresponden figuras de anchura constante (fig. 14).

Por otra parte, considerando por ejemplo segmentos de círculo simétricos, para ellos es $y=1$, mientras que x varía desde 0 hasta 1. Es decir, el segmento que une $S(0,1)$ con C es el borde superior, alcanzable por dichas figuras y todas aquellas para las cuales sea $D=2R$ (por ejemplo, también los círculos con dos capuchones simétricos).

El triángulo equilátero corresponde al punto $T(3/4, \sqrt{3}/2)$. Por otra parte, la desigualdad (XIII) da $y \geq \sqrt{3}/2$; por tanto el segmento TR paralelo al eje x forma parte del contorno buscado; sus puntos corresponden a figuras como las de YAMANOUTI, o bien a las formadas por el triángulo equilátero sustituyendo los lados por arcos de circunferencia interiores al arco correspondiente al triángulo de REULEAUX.

Queda por determinar el arco ST . Lo dejamos como problema propuesto. Probablemente corresponde a los triángulos isósceles que varían desde el segmento S al triángulo equilátero T , pero falta la demostración.

13. Consideraciones finales

Dentro del margen de los elementos L, F, D, E, R, r que nos hemos fijado, quedan todavía por considerar los casos siguientes:

$(F, L, D), (F, D, R), (F, D, r), (F, E, R), (F, E, r),$
 $(F, R, r), (L, E, R), (L, E, r), (L, R, r), (L, D, R),$
 $(L, D, r), (D, E, r).$

El primero de ellos es complicado y está resuelto parcialmente por SHOLANDER [8]. No entramos en la solución de los restantes casos pues nuestro objeto era, principalmente,

mostrar como mediante un diagrama apropiado se pueden poner claramente de manifiesto tanto los puntos difíciles todavía no resueltos, como sistematizar los casos ya conocidos, en general dispersos en publicaciones variadas.

BIBLIOGRAFIA

- [1] BLASCHKE, W., *Eine Frage über konvexe Körper*, Jahresbericht Deutsch. Math. Ver. 25, 1916, 121-125.
- [2] BONNESEN, T., FENCHEL, W., *Theorie der konvexen Körper* Springer, Berlin, 1934.
- [3] FAVARD, J., *Problemes d'extremum relatifs aux courbes convexes I, II*, Ann. Ecole Norm. Sup. 46, 1929, 345-369; 47, 1930, 313-324.
- [4] HADWIGER, H., *Altes und Neues über konvexe Körper*, Basel und Stuttgart, 1955.
- [5] KUBOTA, T., HEMMI, D., *Some problems of minima concerning the oval*, J. of the Math. Soc. Japan, 5, 1953, 372-389.
- [6] OHMANN, D., *Extremalprobleme für konvexe Bereiche der euklidische Ebene*, Math. Zeits. 55, 1952, 347-352.
- [7] POLYA, G., SZEGO, G., *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*, Annals of Mathematics Studies, nº 27, Princeton, 1951.
- [8] SHOLANDER, M., *On certain minimum problems in the theory of convex curves*, Trans. Amer. Math. Soc. 73, 1952, 139-173.
- [9] YAMANOUTI, M., *Notes on closed convex figures*, Proc. Phys. Math. Soc. Japan, 14, 1932.