Acta Cientifica Compostelana, IV (3-4), 149-158 (1967).

CURVATURAS ABSOLUTAS TOTALES DE VARIEDADES CONTENIDAS EN UN ESPACIO EUCLIDIANO

Por L. A. SANTALÓ

SUMMARY

Let X^n be a compact (without boundary) differentiable manifold of dimension n and class C^3 contained in the euclidean space E^{n+N}. We define the following total absolute curvatures $K_r(X^n)$, $(1 \leq r \leq n+N-1)$:

a) Case $1 \leq r \leq n$. Let $T_n(p)$ be the tangent space of X^n at the point p. Let $L_{n+N-r}(0)$ be a $(n+N-r)$ — dimensional linear subspace through the fixed point 0 and let $dL_{n+N-r}(0)$ be the density for sets of $L_{n+N-r}(0)$ (volume element of the Grassmann manifold $G_{n+N-r,r}$). Let Γ_r denote the set of all linear subspaces L_r of E^{n+N} which *are contained* in some $T_n(p)$, pass through p and are orthogonal to $L_{n+N-r}(0)$. Then we define $K_r(X^n)$ by the formulae (1 . 1), (1 . 2).

b) Case $n \leq r \leq n+N-1$. With the same notations above, denoting now Γ_r the set of all linear subspaces L_r which *contain* some $T_n(p)$ and are orthogonal to $L_{n+N-r}(0)$, the total absolute curvature $K_r(X^n)$ is defined by the same formulae (1 . 1) and (1 . 2).

We prove the following properties of these curvatures: 1. In case $1 \leq r \leq n$ we have $K_r(X^n) \neq 0$ if and only if $n \geq r N$; 2. For $r \geq n$ the only absolute curvature which is $\neq 0$ is $K_{n+N-1}(X^n)$ and it coincides with the curvature of Chern-Lashof; 3. The case $N = 1$ generalizes to compact manifolds the well known mean curvatures of convex hypersurfaces; 4. The case $n = r N$ (formula (2 . 9)) is particularlly interesting; we consider in detail the case $n = 2$, $N = 2$, $r = 1$. In n.° 4 we state some inequalities among the absolute curvatures $K_r(X^n)$.

1. Definiciones.

Sea X^n una variedad compacta sin borde, de clase C^2 contenida en el espacio euclidiano E^{n+N}. En cada punto p de M^n se tiene el espacio lineal tangente $T_n(p)$ de dimensión n. En todo lo que sigue L_r indicará un subespacio lineal de dimensión r en E^{n+N} y $L_r(O)$ un subespacio lineal de dimensión r que pasa por el punto O.

Para definir las curvaturas totales de X^n procedemos de la siguiente manera:

a) Sea r un número natural tal que $1 \leqslant r \leqslant n$. Por el punto fijo O de E^{n+N} tomamos un subespacio lineal orientado $L_{n+N-r}(O)$ de dimensión $n + N - r$. Consideremos todos los L_r de E^{n+N} que *están contenidos* en algún $T_n(p)$, pasan por el punto p *y son ortogonales* a $L_{n+N-r}(O)$; representemos por Γ_r al conjunto de estos L_r. Puesto que cada L_r corta a $L_{n+N-r}(O)$ en un punto, la intersección $\Gamma_r \cap L_{n+N-r}(O)$ será una cierta variedad cuya dimensión calcularemos en el n.º 2; sea $\mu(\Gamma_r \cap L_{n+N-r}(O))$ su medida (si la intersección consta de un número finito de puntos la medida es este número; si es una variedad de dimensión h, entendemos por medida su volumen h-dimensional como subvariedad del espacio euclidiano $L_{n+N-r}(O)$). Sea $d\,L_{n+N-r}(O)$ la densidad en el espacio de todos los $L_{n+N-r}(O)$ orientados de E^{n+N} (elemento de volumen de la grassmaniana $G_{n+N-r,r}$) (ver n.º 3).

Definimos la *r-ésima curvatura absoluta total de* $X^n \subset E^{n+N}$ por la integral $(r = 1, 2, \ldots, n)$

$$(1.1)\quad K_r(X^n) = \frac{O_1 O_2 \ldots O_{r-1}}{O_{n+N-2} \ldots O_{n+N-r-1}} \int_{G_{n+N-r,r}} \mu(\Gamma_r \cap L_{n+N-r}(O))\, d\,L_{n+N-r}(O)$$

donde O_i representa el área de la esfera unidad i-dimensional, o sea

$$(1.2)\qquad O_i = \frac{2\pi^{\frac{i+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)}$$

y el factor delante del signo integral se ha tomado para normalizar de manera conveniente.

b) Sea ahora $n \leqslant r \leqslant n + N - 1$. Con las mismas notaciones anteriores, consideremos ahora el conjunto Γ_r de todos los L_r que *contienen* algún $T_n(p)$ *y son ortogonales* a un $L_{n+N-r}(O)$ fijo. La misma fórmula (1.1) define entonces las curvaturas totales absolutas de $X^n \subset E^{n+N}$ para $r = n, n + 1, \ldots, n + N - 1$.

Obsérvese que, según la definición, puesto que las medidas no pueden ser negativas, es siempre $K_r \geqslant 0$.

2. Primeras propiedades.

Vamos a buscar las relaciones que deben existir entre n, N y r para que la curvatura $K_r(X^n)$ sea distinta de cero.

a) Consideremos primero el caso $1 \leqslant r \leqslant n$.

El conjunto de todos los L_r de E^{n+N} constituye la grassmaniana $G_{r+1,n+N-r}$ cuya dimensión es $(r+1)(n+N-r)$. El conjunto de los L_r contenidos en un $T_n(p)$ fijo y pasan por p, constituye la grassmaniana $G_{r,n-r}$ de dimensión $r(n-r)$ y por tanto el conjunto de todos los L_r que están contenidos en algún $T_n(p)$ y pasan por el punto p correspondiente, tiene dimensión $r(n-r)+n$. Por otra parte, el conjunto de los L_r ortogonales a un $L_{n+N-r}(O)$ fijo, es de dimensión $n+N-r$. Por tanto la dimensión de la intersección de los dos últimos conjuntos (que antes hemos indicado con Γ_r) es

$$r(n-r)+n+n+N-r-(r+1)(n+N-r)=n-rN. \tag{2.1}$$

Por consiguiente: *en el caso* $1 \leqslant r \leqslant n$, *para que sea* $K_r(X^n) \neq 0$, *debe cumplirse la condición*

$$n \geqslant rN. \tag{2.2}$$

b) Sea ahora el caso $n \leqslant r \leqslant n+N-1$.

El conjunto de los L_r de E^{n+N} que *contiene* un $T_n(p)$ fijo constituye la grassmaniana $G_{r-n,n+N-r}$ (basta cortar por un L_N ortogonal a $T_n(p)$ y considerar la intersección) y por tanto el conjunto de todos los L_r que contienen algún $T_n(p)$ tiene dimensión $(r-n)(n+N-r)+n$. Las demás dimensiones son las mismas de antes, de manera que la dimensión del conjunto Γ_r, intersección de los L_r que contienen algún $T_n(p)$ con el conjunto de los L_r ortogonales a un $L_{n+N-r}(O)$ fijo, vale

$$\begin{aligned}(r-n)(n+N-r)+n+n+N-r-(r+1)(n+N-r)\\ =rn-n^2-nN+n.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Para que esta dimensión no sea negativa debe ser

$$r \geqslant n+N-1. \tag{2.4}$$

De aquí:

Para $r \geqslant n$, *la única curvatura* $K_r(X^n)$ *no nula es la* $K_{n+N-1}(X^n)$.

Ejemplos: 1. Caso $r=n+N-1$. En este caso $L_{n+N-r}(O)$ es una recta orientada $L_1(O)$ y dL_1 es el elemento de área de la esfera unidad $(n+N-1)$ – dimensional correspondiente a la dirección de la misma (que representaremos por $dO_{n+N-1}=dL_1(O)$). El volumen total de la grassmaniana $G_{1,n+N-1}$ es O_{n+N-1}. La expresión (1.1) toma la forma

$$K_{n+N-1}(X^n) = \tfrac{1}{2}\int_{O_{n+N-1}} \nu \, dL_1(O) \tag{2.5}$$

donde ν es el número de hiperplanos L_{n+N-1} que contienen algún $T_n(p)$ y son ortogonales a la recta $L_1(O)$.

Esta curvatura total $K_{n+N-1}(X^n)$, salvo el factor $\frac{1}{2}$, coincide con la considerada por Chern-Lashof en varios trabajos [6], [7].

2. Sea el caso $N = 1$. Según (2.2) tenemos entonces todas las curvaturas absolutas totales $K_1, K_2, \ldots, K_n$. La variedad $\Gamma_r \cap L_{n+N-r}(O)$ según (2.1) tiene dimensión $n-r$, o sea, es una hipersuperficie del subespacio $L_{n+1-r}(O)$. La expresión (1.1) toma la forma

$$K_r(X^n) = \frac{O_1 O_2 \ldots O_{r-1}}{O_{n-1} O_{n-2} \ldots O_{n-r}} \int_{G_{n+1-r,r}} \mu(\Gamma_r \cap L_{n+1-r}(O))\, dL_{n+1-r}(O), \tag{2.6}$$

Si X^n es el contorno de un dominio convexo de E^{n+1} (hipersuperficie convexa de clase C^2) se sabe que este $K_r(X^n)$ coincide con la *r-ésima curvatura media* de X^n, definida por

$$M_r(X^n) = \frac{1}{\binom{n}{r}} \int_{X^n} S_r \, d\sigma \tag{2.7}$$

donde S_r es la r-ésima función simétrica elemental de las n curvaturas principales de X^n y $d\sigma$ es el elemento de área n-dimensional de esta hipersuperficie, estando la integral extendida a toda la hipersuperficie (ver [15]).

Si X^n no es convexa, $K_r(X^n)$ es la r-ésima curvatura media absoluta, es decir, vale

$$K_r(X^n) = \frac{1}{\binom{n}{r}} \int_{X^n} |S_r| \, d\sigma \tag{2.8}$$

donde $|S_r|$ indica el valor absoluto de S_r. Esta es la razón de llamar a las $K_r(X^n)$ curvaturas totales *absolutas*.

3. Caso $n = r\,N$. Este caso es particularmente interesante porque, según (2.2) en él la intersección $\Gamma_r \cap L_{n+1-r}(O)$ tiene dimensión nula, es decir, el integrando de (1.1) es igual al número natural ν de subespacios lineales L_r contenidos en algún espacio tangente $T_n(p)$ y ortogonales a $L_{n+N-r}(O)$. Es decir, K_r se puede escribir

$$(2.9) \qquad K_r(X^n) = \frac{O_1 O_2 \dots O_{r-1}}{O_{n+N-2} \dots O_{n+N-r-1}} \int_{G_{n+N-r,r}} \nu \, d\, L_{n+N-r}(O) .$$

Para $N = 1$, $r = n$, tenemos de nuevo el caso (2.5).

Para $r < n$, $n = r\,N$ si X^n está contenida en un L_{n+N-1} también los espacios tangentes $T_n(p)$ estarán en este L_{n+N-1} y por tanto será $\nu = 0$ excepto para un conjunto de direcciones de medida nula (las paralelas a L_{n+N-1}). Recíprocamente, si X^n no está contenida en ningún subespacio de E^{n+N}, el cálculo dimensional que conduce a (2.2) prueba que en general es $\nu > 0$ y por tanto $K_r(X^n) \neq 0$. Es decir, refiriéndonos siempre a variedades X^n compactas de clase C^3 en E^{n+N}, se tiene:

Si se cumple la relación $n = r\,N$, *con* $N > 1$, *la condición* $K_r(X^n) = 0$ *es necesaria y suficiente para que* X^n *esté contenida en un subespacio de dimensión* $n + N - 1$.

Esto prueba que la curvatura $K_r(X^n)$ es distinta de la $K_{n+N-1}(X^n)$, pues esta última (curvatura de Chern-Lashof) no depende de la dimensión del espacio ambiente (Kuiper [12], Chern-Lashof [7]).

4. El caso $n = 2$, $r = 1$, $N = 2$.

Este caso es interesante por ser el más simple en que cumple la condición $n = r\,N$, con $N > 1$. Es el caso de una superficie X^2 en E^4.

Según (2.9) $K_1(X^2)$ se escribe

$$(2.10) \qquad K_1(X^2) = \frac{1}{O_2} \int_{O_2} \nu_1 \, d\, L_1(O)$$

habiendo puesto $d\,L_1(O)$ en vez de $d\,L_2(O)$ por la dualidad $d\,L_1(O) = d\,L_2(O)$ que veremos en el número siguiente. Recordemos que ν_1 es el número de rectas paralelas a la dirección $L_1(O)$ que están contenidas en algún $T_2(p)$.

La curvatura $K_2(X^2)$ según (2.5) se puede escribir en este caso

$$(2.11) \qquad K_2(X^2) = \tfrac{1}{2} \int_{O_2} \nu_2 \, d\, L_2(O)$$

habiendo utilizado la dualidad anterior y siendo ahora ν_2 el número de hiperplanos paralelos a $L_2(O)$ que contienen algún $T_2(p)$.

Según las desigualdades (2.2) y (2.4) estas dos curvaturas K_1 y K_2 son las únicas curvaturas de X^2 no siempre nulas. La condición para que X^2 esté contenida en un L_3 es $K_1(X^2) = 0$. En cambio, se cumple siempre $K_2(X^2) \geqslant O_2 = 2\pi^2$, puesto que evidentemente es siempre $\nu_2 \geqslant 2$.

Para dar una interpretación conveniente de estas dos curvaturas se puede proceder de la manera siguiente. Consideremos la aplicación φ : $T_2(p) \to L_2(O)$, siendo $L_2(O)$ el plano paralelo al $T_2(p)$ por el punto fijo O. Por otra parte, cortando el conjunto de los subespacios $L_i(O)$ $(i = 1, 2, 3)$ por una 3-esfera de radio unidad y centro O e identificando los puntos diametralmente opuestos de la misma para tener el espacio elíptico S_3, tenemos la aplicación ψ : $L_i(O) \to S_{i-1}$ $(i = 1, 2, 3)$, indicando con S_0 los puntos, S_1 las rectas y S_2 los planos de S_3. La composición $\psi \circ \varphi$ aplica el conjunto de los planos tangentes $T_2(p)$ en una congruencia de rectas T de S_3 y en ella ν_1 indica el número de rectas de la congruencia que pasan por el punto S_0 y ν_2 indica el número de rectas de la congruencia que están contenidas en el plano S_2. Las densidades $d\,L_1(O)$ y $d\,L_3(O)$ que figuran en (2.10) y (2.11) son las densidades $d\,S_0$ y $d\,S_2$ de puntos y planos del espacio elíptico S_3 (ver [16]). En los casos en que ν_1 y ν_2 sean constantes resulta que $K_1(X^2)$ indica el *orden* de la congruencia T y $K_3(X^2)$ la *clase* de la misma (salvo un factor constante).

3. Expresión de las densidades $d\,L_h(O)$.

Las expresiones de las densidades $d\,L_h(O)$ $(h = 1, 2, \ldots, n + N - 1)$ que aparecen en (1.1) para espacios lineales orientados de dimensión h de E^{n+N} que pasan por un punto fijo O, son conocidas (ver, por ejemplo [15] o [5]). Vamos a recordarlas rápidamente para tenerlas a mano.

Sea $(O; e_1, e_2, \ldots, e_{n+N})$ una referencia ortogonal de E^{n+N} de vértice O (conjunto de $n + N$ vectores de módulo unidad ortogonales entre sí que pasan por el punto O). En el espacio de todas las referencias ortogonales de vértice O se definen las siguientes formas diferenciales

$$(3.1) \qquad \omega_{im} = -\omega_{mi} = e_m\, de_i .$$

Consideremos el $L_h(O)$ determinado por $e_1, e_2, \ldots, e_h$. Su densidad es

$$(3.2) \qquad d\,L_h(O) = \bigwedge_{i,m} \omega_{im}$$

para

$$i = 1, 2, \ldots, h \quad ; \quad m = h + 1, h + 2, \ldots, n + N$$

donde en el segundo miembro de (3.2) se entiende el producto exterior.

El $L_{n+N-h}(O)$ normal a $L_h(O)$ está determinado por los vectores $e_{h+1}, \ldots, e_{n+N}$ y aplicando la misma definición (3.2) resulta la «dualidad»

$$(3.3) \qquad d\,L_h\,(O) = d\,L_{n+N-h}\,(O)\,.$$

La medida del conjunto de todos los $L_h(O)$ orientados (volumen de la grassmaniana $G_{h,n+N-h}$) se calcula fácilmente, sea directamente [15], sea recordando que $G_{h,n+N-h}$ es el espacio cociente $SO(n+N)/SO(h) \times SO(n+N-h)$, [5], resultando

$$(3.4) \qquad \int_{G_{h,n+N-h}} d\,L_h\,(O) = \frac{O_{n+N-1} \ldots O_{n+N-h}}{O_1\,O_2 \ldots O_{h-1}}$$

donde O_i tiene el valor (1.2).

4. Desigualdades entre curvaturas absolutas totales.

a) Caso $r = n + N - 1$.

En este caso $K_{n+N-1}(X^n)$, dada por (2.5), ya dijimos que coincide con la curvatura de Chern-Lashof y por tanto satisface la desigualdad [6]

$$(4.1) \qquad K_{n+N-1}\,(X^n) \geqslant O_{n+N-1}$$

fácilmente deducible de (2.5) observando que $\nu \geq 2$. Otras propiedades se encuentran en [6], [7].

El caso $n = 1$, curvas en E^{N+1}, ha sido particularmente estudiado. En este caso la curvatura absoluta total $K_N(X^1)$ se expresa

$$(4.2) \qquad K_N\,(X^1) = \frac{O_N}{O_1} \int_{X^1} |\varkappa|\, ds$$

siendo $|\varkappa|$ el valor absoluto de la curvatura de X^1 y ds el elemento de arco.

Esta fórmula (4.2) resulta de (2.5) por el razonamiento siguiente. Consideremos la imagen esférica tangencial de la curva X^1, o sea, la curva Γ obtenida en O_N trazando por el centro de O_N radios paralelos a las tangentes de X^1 (obsérvese que aquí indicamos por O_N la N-esfera de radio unidad, no su área como anteriormente). El número ν es el número de puntos en que Γ es cortada por la $(N-1)$-esfera máxima cuyo polo corresponde al elemento de área $d\,L_1(O)$ de (2.5). Por tanto se sabe que la integral (2.5) es igual al factor $2O_N / O_1$ por la longitud de Γ [16, pag. 27], lo cual es precisamente el segundo miembro de (4.2).

La desigualdad (4.1) se escribe en este caso

$$\int_{X^1} | x \quad ds \geqq 2 \pi$$

que para curvas del espacio E^3 es debida a Fenchel [10].

Si consideramos curvas contenidas en una esfera de radio R del espacio E^{n+N}, la curvatura K_N está acotada inferiormente por la longitud L de X^1 por la desigualdad

$$L(X^1) \leqq \frac{O_1}{O_N} R \; K_N(X^1) \tag{4.3}$$

que para $N = 2$ fue dada por Fáry [9] y luego generalizada y mejorada a cualquier dimensión por Chakerian [3], [4].

b) Caso $N = 1$.

Es el caso de hipersuperficies X^n en E^{n+1}. Para el caso de ser X^n una hipersuperficie *convexa*, las K_i están relacionadas entre sí por clásicas desigualdades cuadráticas, que para $n = 2$ proceden de Minkowski (ver Bonnesen — Fenchel [1] y Busemann [2]). Otras desigualdades (para X^n convexa y cerrada) han sido obtenidas por Fenchel, Alexandrow y Hadwiger, las cuales pueden condensarse en las siguientes (ver Hadwiger [11, pag. 282])

$$K_{\alpha-1}^{\beta-\gamma} \; K_{\beta-1}^{\gamma-\alpha} \; K_{\gamma-1}^{\alpha-\beta} \geqq 1 , \; 0 \leqq \alpha < \beta < \gamma \leqq n+1 \tag{4.4}$$

donde se conviene en poner K_0 = área n-dimensional de X^n y $K_{-1} = (n+1) V$, siendo V el volumen del dominio limitado por X^n.

En este caso existen también desigualdades del tipo de Fáry [9]. Suponiendo que la hipersuperficie compacta X^n de E^{n+N}, no necesariamente convexa, está contenida en una esfera euclidiana de radio R, valen las desigualdades

$$K_r(X^n) \leqq R^{n-r} K_n(X^n) \quad , \quad r = 1, 2, \ldots, n \tag{4.5}$$

y también, si F es el área n-dimensional de X^n,

$$F(X^n) \leqq R^n K_n(X^n) \tag{4.6}$$

$$F(X^n) \leqq \frac{O_{n+1-r} \; O_{r-1}}{r \; O_{n+1}} R^r K_r(X^n) , \; r = 1, 2, \ldots, n \tag{4.7}$$

Para $r = 1$, la última desigualdad puede mejorarse en $F(X^n) \leq R\, K_1(X^n)$, de acuerdo con Chakerian [4]. Estas desigualdades (4.5), (4.6), (4.7) han sido obtenidas por nosotros en otro lugar [17].

c) Caso $N > 1$, $r < n$.

Como ya observamos en el n.º 2, el caso más interesante parece ser el $n = r N$, por el hecho de expresarse K_r por la fórmula (2, 9) en la cual el integrando ν es un número natural. No se conocen desigualdades en este caso. Si el conjunto de los ν puntos $p \in X^n$ en los cuales $L_r \subset T_n(p)$ se descompone según sean o no puntos críticos de X^n y, en caso de serlo, según su índice k, la curvatura $K_r(X^n)$ se puede descomponer en una suma de «curvaturas de índice k», al estilo de las introducidas por Kuiper para el caso $r = n + N - 1$ [13], [14], que sería interesante estudiar también en este caso.

BIBLIOGRAFIA

[1] T. Bonnesen - W. Fenchel, *Theorie der konvexen Korper*, Berlín 1934.

[2] H. Busemann, *Convex surfaces*, New York, 1958.

[3] G. D. Chakerian, *An inequality for closed space curves*, Pacific Journal of Mathem., 12, 1962, 53-57.

[4] G. D. Chakerian, *On some geometric inequalities*, Proc Am. Math. Soc. 15, 1964, 886-888.

[5] S. S. Chern, *On the kinematic Formula in Integral Geometry*, Journal of Math. and Mechanics, 16, 1966, 101-118.

[6] S. S. Chern - R. K. Lashof, *On the total curvature of immersed manifolds*, Am. J. Math. 79, 1957, 306-318.

[7] S. S. Chern - R. K. Lashof, *On the total curvature of immersed manifolds, II*, Michigan Math. J., 5, 1958, 5-12.

[8] I. Fary, *Sur la courbure total d'une courbe gauche faisant un noeud*, Bull. Soc. Math. France, 77, 1949, 128-138.

[9] I. Fary, *Sur certaines inegalités géométriques*, Acta Sci. Math. (Szeged),

[10] W. Fenchel, *Uber Krummung und Windung geschlossener Raumkurven*, Math. Annalen, 101, 1929, 238-252.

[11] H. Hadwiger, *Vorlesungen uber Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Berlín, 1957.

[12] N. H. Kuiper, *Immersions with minimal total absolute curvature*, Coll. de Géom Diff. Bruxelles, Centre Belge de recherches Mathématiques, 1958, 75-88.

[13] N. H. Kuiper, *La courbure d'indice k et les aplications convexes*, Séminaire Ehresmann, 1960.

[14] N. H. Kuiper, *Der Satz von Gauss-Bonnet fur Abbildungen in E^N und damit verwandte Probleme*, Jahres. der D. M. V. 69, 1967, 77-88.

[15] L. A. Santaló, *Sur la mesure des espaces linéaires qui coupent un corps convexe et problemes qui s'y rattachent*, Colloque sur les questions de réalité en Géométrie, Liege, 1955, 177-190.

[16] L. A. Santaló, *Geometría Integral en espacios de curvatura constante*, Publicaciones de la Comisión Nacional de Energía Atómica, Serie Matemática, Buenos Aires, 1952.

[17] L. A. Santaló, *On some geometrical inequalities in the style of Fáry*, a publicarse en el American Journal of Mathematics.