SECCIÓN CONFERENCIAS

APLICACIONES Y PROBLEMAS ACTUALES DE ALGUNAS TEORIAS MATEMATICAS

POR

LUIS A. SANTALÓ

Conferencia pronunciada en la Sociedad Científica Argentina el día 5 de julio de 1950. (Año del Libertador General San Martín).

Cuando se habla de las aplicaciones de la matemática se entienden en general dos tipos de ellas: *a*) aplicaciones dentro del campo de la matemática misma, o sea, aplicaciones de una teoría matemática a otra; *b*) aplicaciones directas a problemas o cuestiones de la técnica o a otras teorías no matemáticas. Pero hay también, siempre más difíciles pero de mayor importancia, un tercer tipo de aplicaciones que se podrían llamar más propiamente aplicaciones del pensar matemático y que consisten, *c*) en plantear en términos matemáticos los problemas de una teoría hasta entonces no matemática.

Las aplicaciones del tipo *a*) más que aplicaciones son la matemática misma. Se ha dicho que los matemáticos son ornamentistas en deducciones lógicas. Sobre un número muy reducido de premisas fundamentales, y siguiendo las reglas estrictas de la lógica, los matemáticos han ido edificando desde el tiempo de los babilonios hasta nuestros días las diversas teorías que componen la inmensa obra de arte que es hoy la matemática. Monumento artístico en que cada matemático ha dejado impreso su estilo particular, pero sin que está variedad de estilos influya sobre la armonía del conjunto. Si en alguna parte de esta obra monumental se encuentran ramificaciones que llegan hasta otra sección de la misma, para apoyarla o adornarla, ellas, más que aplicaciones o apéndices de la matemática son nervios de un mismo edificio, forman un todo común con el resto de las matemáticas.

Las del tipo *b*) son las más comúnmente entendidas bajo el nombre de aplicaciones de la matemática. Pertenecen a él todas las aplicaciones a la técnica, cuya existencia e importancia es ya un hecho de dominio común: basta hojear cualquier libro técnico de ingeniería para darse cuenta de hasta qué punto el cálculo matemático se ha introducido y ha llegado a ser imprescindible en el tratamiento de los problemas de la técnica.

Aunque, como tuvimos oportunidad de analizar en otro lugar [1], las teorías matemáticas, por lo menos en su gran mayoría, no tienen su origen en la necesidad de resolver problemas prácticos, sino que han nacido por el simple placer o satisfacción del matemático que las creó, no hay duda que las aplicaciones aparecidas más tarde por afortunada coincidencia, han influido sobre el desarrollo posterior de la teoría. Las aplicaciones sirven tanto para poner a prueba los recursos de una teoría, manteniéndola ágil y viva, como para indicar las direcciones en que la misma puede y debe evolucionar. Y en esta evolución, dirigida por las necesidades prácticas, muchas veces han aparecido resultados de gran valor para la misma matemática pura.

Tomemos, por ejemplo, la teoría de las ecuaciones diferenciales. La mayoría de los tipos particulares de ecuaciones se han empezado a estudiar al aparecer en problemas de la técnica o de la física y, sin embargo, de su estudio han nacido muchas veces funciones especiales (como las funciones de Bessel) que luego han resultado de gran valor para otras teorías puramente matemáticas (como la teoría de números). Cuando la física clásica necesitaba resolver problemas de la teoría del potencial, se desarrolló intensamente la teoría de las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden de tipo elíptico y de ello se derivaron fructíferas consecuencias para la teoría de funciones de variable compleja. Recientemente, para el estudio de la aerodinámica a velocidades superiores a la del sonido (vuelo supersónico) resultan de interés las ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden de tipo hiperbólico, antes mantenidas en segundo plano, y ha sido necesario emprender el estudio de las mismas, dirección en la que están apareciendo resultados de interés tanto para otros capítulos de la matemática aplicada, como para la misma matemática pura.

[1] *Revista de Ingeniería* de la Asociación de Ingenieros del Uruguay, año XXXIX, octubre 1945.

Sin embargo, la influencia de las aplicaciones sobre el desarrollo de las teorías matemáticas no es tan grande como pudiera parecer. La historia demuestra que los matemáticos se sienten más atraídos por la belleza de un problema que por su posible utilidad práctica. En este sentido es instructivo y puede servir como modelo de un hecho casi general el origen del Cálculo de Variaciones.

El Cálculo de Variaciones hace su aparición en la historia de la Matemática con dos problemas: el de la superficie de revolución de mínima resistencia de Newton (1686) y el de la braquistocrona de Juan Bernoulli (1696). El primero consiste en lo siguiente (²): « *Determinar la curva plana que une dos puntos A y B y que al girar alrededor de un eje de su plano que no la corte engendre la superficie de revolución que al moverse según la dirección del eje encuentre mínima resistencia* ». Newton supone que la resistencia para cada elemento de superficie es proporcional al cuadrado de la proyección de la velocidad sobre la normal al mismo (³). No hay duda de que este problema tiene un origen eminentemente práctico y debía ser considerado de gran utilidad tanto en balística como en la construcción de buques. Parece, por tanto, que el Cálculo de Variaciones nace de un problema práctico.

Sin embargo se da el caso notable de que el verdadero problema que más ha influido en el desarrolo del Cálculo de Variaciones y que constituye su verdadero origen, puesto que para él se idearon los métodos característicos de dicho cálculo, no es el anterior, sino otro mucho más alejado de cualquier posible aplicación práctica, pero de enunciado y resultado mucho más atrayente y curioso. Es el problema de la braquistocrona de J. Bernoulli, el cual lo propuso por primera vez en el *Acta Eruditorum* de Leipzig en junio de 1696. El problema dice: « *Dados dos puntos A y B en un mismo plano vertical, determinar la trayectoria AMB descrita por un punto M que partiendo de A y bajo la acción de su propio peso, llega a B en un tiempo mínimo* ».

J. Bernoulli propone el problema a los matemáticos de su tiempo,

(²) I. Newton, *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, London 1686, libro II, sección VII, proposición 34, escolio.

(³) Esta es la famosa « ley del seno cuadrado » que no es cierta y que por haber creído demasiado en ella los teóricos del siglo pasado consideraban la aviación como imposible. Esta circunstancia no importa para las consideraciones del texto.

añadiendo que dará la solución del mismo al terminar el año en curso si nadie lo hace antes. No obstante en enero de 1697, vuelve a publicar en Gröningen un « Aviso » dirigido a « todos los matemáticos del mundo » en el cual expone que ante el ruego de Leibniz y para dar tiempo a que el problema pueda ser conocido en Francia e Italia y nadie pueda quejarse de lo perentorio del plazo, extiende el mismo hasta las fiestas de Pascua. En este « Aviso » repite J. Bernoulli el enunciado del problema y añade estos interesantes párrafos: « Quien logre resolverlo ganará el premio que hemos establecido para el solucionista. Naturalmente éste no consiste en oro ni plata, pues esto atrae únicamente a las almas pequeñas y venales de las cuales no esperamos nada loable ni útil para la ciencia. Por el contrario, puesto que la Virtud es por sí misma la más hermosa recompensa y la Fama un poderoso aguijón, ofrecemos como premio, como corresponde a los hombres nobles, honor, alabanza y aplauso, para lo cual la sagacidad de este gran Apolo, nosotros, públicamente y en privado, por escrito y de palabra, elogiaremos, ensalzaremos y festejaremos ».

Es evidente que de un problema planteado en tales términos no era de esperar provecho utilitario alguno. La Fama, que Bernoulli prometía a los demás, era el único fin que lo había movido a él a plantearse y resolver el problema. Incluso el estilo nos recuerda el de los libros de caballería. Tal vez los matemáticos no hayan sido nunca otra cosa que esto: caballeros andantes en reinos ideales, ávidos de aventuras que les dieran « renombre y fama », « desfacedores de entuertos » cometidos contra la lógica, creadores de un mundo orgullo del espíritu humano.

Puesta la piedra fundamental, el Cálculo de Variaciones evoluciona gracias al aporte de los más grandes matemáticos de las generaciones sucesivas: Euler, Lagrange, Legendre, Jacobi, Weierstrass. Al extender su campo de acción fueron apareciendo las aplicaciones, principalmente a la mecánica y a la física (principios de mínima acción) pero también a otras ramas aparentemente más apartadas. La Navegación Aérea, por ejemplo, planteó un problema que luego resultó de gran importancia desde el punto de vista teórico, ocupándose del mismo matemáticos contemporáneos tan eminentes como Zermelo, von Mises y Caratheodory [1]. Es el llamado « problema

[1] Ver por ejemplo C. CARATHEODORY, *Variationsrechnung*, Berlín, 1935, págs. 234 y 378.

de la navegación » de Zermelo, que fué quien primero se ocupó del mismo, y se anuncia de la manera siguiente: « *Dada una distribución conocida de los vientos sobre una región, variables con el lugar y el tiempo, hallar la ruta de mínimo tiempo para un avión de velocidad propia constante que tiene que ir de un punto a otro* ». Problema curioso, de solución no simple, que guarda grandes analogías con el problema de Fermat de la trayectoria de un rayo luminoso a través de un medio de índice de refracción variable.

o o o

Pasemos ahora a las aplicaciones del tipo *c*), es decir, a las que consisten en dar estructura matemática a una teoría o a un grupo de problemas hasta entonces ajenos a la matemática. Estas aplicaciones son las más difíciles, puesto que obligan muchas veces a crear nuevas ramas de la matemática, o a dar nuevas formas a las ya existentes, para adaptarlas a la nueva disciplina que se quiere tratar matemáticamente.

La dificultad en « matematizar » una teoría consiste fundamentalmente en simplificarla, saber prescindir de los detalles, de las hojas y ramas que ocultan el verdadero tronco, para poder esquematizarla en un reducido número de símbolos matemáticos, ligados entre sí por ciertas relaciones (axiomas) o reglas operatorias (álgebras).

La construcción de este esquema central, la elección de sus axiomas y reglas operatorias de manera que la teoría matemática resultante sea una fiel representación de la teoría primitiva es la parte más difícil y la que necesita de la inspiración y visión superior del genio o inteligencia privilegiada. Los desarrollos posteriores, simples consecuencias lógicas de las premisas elegidas, son ya cuestiones de pura calculatoria.

Muchas veces se ha intentado matematizar teorías sin obtener mayor éxito. Ello es debido a que son teorías demasiado complejas, con excesivo número de factores imponderables para poder encuadrarlas dentro de las normas demasiado rígidas del pensar matemático. Claro que cuando ello resulta posible se nota inmediatamente un brusco florecimiento de la teoría, pues todo el instrumento matemático puesto a su servicio, además de darle elegancia y seguridad lógica, le ayuda a profundizar hasta regiones de otro modo inasequibles. De aquí que muchos de los grandes filósofos hayan pretendido edificar sus teorías en modelo matemático. Así

Descartes, para el cual «todo se volvía matemática» y Leibniz, según el cual «mi metafísica es todo matemática».

Se ha intentado, por ejemplo, matematizar la ética. Tal vez el último ensayo proceda del gran matemático norteamericano George D. Birkhoff, en varias conferencias dictadas en 1939-1940 (5).

Birkhoff define la *medida ética* M de una determinada acción como suma algebraica de ciertos factores positivos (bienes materiales, felicidad, satisfacción espiritual o intelectual que la acción pueda producir) y otros negativos (males materiales, penas, turbaciones espirituales o intelectuales). Si se pudiese calcular esta medida ética para cada acción tendríamos una manera de comparar acciones diversas, operar con éllas y poder decir, por ejemplo, que dos acciones, sumadas, equivalen éticamente a una tercera, o que dos acciones de signos opuestos se compensan exactamente, etcétera. Birkhoff menciona varios problemas concretos en que su medida puede calcularse, pero en todos ellos (excepto en algunos en que intervienen ciertas nociones del cálculo de probabilidades) los pesos atribuídos a cada factor de los que componen M son tan subjetivos, que las fórmulas obtenidas conservan la ambigüedad característica de las apreciaciones personales.

También se han aplicado las matemáticas, ya desde los griegos, a la estética. El dar el valor de ciertas proporciones (división áurea, por ejemplo) para obtener la belleza en determinadas obras escultóricas o arquitectónicas, data de muy antiguo.

Modernamente, el mismo Birkhoff intentó una teoría matemática de la estética (6). Aquí la *medida estética* M viene definida como cociente de dos factores $M = O/C$. El primero O es el *orden* y el segundo C la *complejidad*. Cada uno de estos factores es la resultante de otros factores secundarios, unos positivos (repetición moderada, semejanza, equilibrio...) y otros negativos (ambigüedad, repetición excesiva, imperfección...). Igual que antes, si esta medida M se pudiera aplicar a toda obra de arte, se tendría la manera de sumar o restar valores estéticos y aun de someterlos a operaciones matemáticas más complicadas. Birkhoff da reglas para

(5) G. D. Birkhoff, *A Mathematical Approach to Ethics*. The Rice Institute Pamphlet, vol. XXVIII, 1941.

(6) G. D. Birkhoff, *A mathematical theory of Aesthetics and its application to Poetry and Music*, Rice Institute Pamhlet, vol. XIX, 1932. Hay también el libro del mismo autor *Aesthetic Measure*, Cambridge, 1933.

el cálculo de su medida estética M y las aplica a comparar el valor estético de obras de escultura o pintura suficientemente simples para que la cuestión sea posible. También aplica su teoría a la poesía y a la música. Los resultados obtenidos, si bien mejores que en el caso de la ética, deben considerarse como muy modestos. Por el momento la teoría no ha tenido seguidores y no es posible decir si quedará tan solo como un ensayo o si será el principio de una teoría más completa.

Con mayor éxito que a la ética y a la estética se ha desarrollado la matematización de la tercera rama del pensar filosófico: la lógica. Actualmente la lógica matemática forma ya un capítulo de la matemática moderna, capítulo de gran extensión y profundidad. Con ello se ha beneficiado sin duda la lógica, pero también la matemática, que ha podido afirmar de manera más sólida sus fundamentos y aclarar ciertos puntos oscuros de los mismos.

Hace tiempo que el cálculo matemático se emplea con éxito en la *biología*, tanto en problemas de equilibrio biológico, epidemiología y teoría de la evolución (es bien conocido el libro de V. Volterra sobre *La teoría matemática de la lucha por la vida*) como en la biofísica con la escuela de Rashevsky de la Universidad de Chicago. Un intento de llevar el método matemático a regiones todavía más complejas, como la fisiología del sistema nervioso comparándolo con los servomecanismos, la psicología, sociología y otras ramas muy diversas, lo constituye la llamada *Cibernética* (7) iniciada por un grupo de científicos norteamericanos encabezado por el matemático N. Wiener y de la cual se ha ocupado en la Argentina, en diversos cursos y conferencias, el prof. Alberto González Domínguez.

Muchos ensayos de someter al cálculo matemático ciertas disciplinas, como la ética, la estética o los mismos ambiciosos proyectos de la Cibernética, pueden parecer fantásticos e irrealizables. Intervienen en ellos demasiados factores y demasiado complejos — se dice — para que sea posible esquematizarlos en un modelo matemático. Es posible que haya cierto grado de razón en este escepticismo, pero no hay que perder de vista que la misma dificultad tiene que haberse planteado en los comienzos del tratamiento matemático de cualquier teoría. Poco podía sospechar Ticho Brahe que todas sus tablas de observaciones podían condensarse en la simple fórmu-

(7) Ver el libro *Cybernetics* de N. Wiener, New York 1948.

la matemática de la ley de atracción universal de Newton, ni es probable que Galvani y Volta al ver las muy diversas manifestaciones de los fenómenos eléctricos creyeran que sería posible algún día condensarlos todos en las cuatro fórmulas de Maxwell. También debía ser difícil de creer que se llegara a poder tratar matemáticamente la evolución de sistemas con prácticamente infinitos grados de libertad, las moléculas de un gas por ejemplo, como hizo después la mecánica estadística.

o o o

En los estudios económicos se ha intentado muchas veces utilizar el cálculo matemático. Los resultados, sin embargo, no pueden considerarse un éxito. Tal vez ello sea debido a que se ha pretendido casi siempre aplicar modelos matemáticos que fueron creados para otras disciplinas. Uno de los últimos ensayos, cuyo éxito o fracaso sólo la práctica o la experiencia podrán decidir, es el llevado a cabo por el matemático John von Neumann y el economisma Oskar Morgenstern en su libro *Theory of games and economic behavior* publicado en 1943.

La importancia de este libro radica principalmente en que en el mismo se introducen por primera vez métodos matemáticos completamente nuevos, creados expresamente para los problemas que se trata de resolver, los cuales no tienen análogo en otras disciplinas matemáticas. « No se debe olvidar —dicen los autores— que los cambios en la técnica matemática a que puede obligar la aplicación a una nueva disciplina, pueden ser muy considerables. La fase decisiva de la aplicación de la matemática a la física —la creación por Newton de la mecánica racional— puede difícilmente ser separada del descubrimiento del cálculo infinitesimal. Ahora bien, la importancia de los fenómenos sociales, el poder y la multiplicidad de sus manifestaciones y la multiplicidad de su estructura, es por lo menos igual a la de aquellos de la física. Hay por consiguiente que esperar —o temer— que sean necesarios descubrimientos matemáticos de una magnitud comparable a la del cálculo para lograr un éxito definitivo en este campo. A fortiori es improbable que una simple repetición de los artificios que han servido muy bien en física, sigan sirviendo para los fenómenos sociales. La probabilidad es en efecto muy pequeña, puesto que los problemas que aparecen en este último campo son muy distintos de los que presenta la física ».

En esencia la teoría de von Neumann-Morgenstern consiste en asimilar la lucha económica entre varios competidores a un juego entre jugadores, en el cual cada uno trata de obtener el máximo provecho. Como el resultado, para un determinado jugador, no depende únicamente de sus propios actos, sino también de los de los demás, el problema es do obtener el máximo de una función de la cual no se controlan todas las variables. Este es el problema que no tiene análogo en otras ramas de la matemática.

Como el método tiene aplicaciones muy variadas, vale la pena de que lo puntualicemos con más detalle.

Sean A y B dos jugadores que convienen en el siguiente juego: A elige a voluntad un número α entre los 1, 2, 3, 4 .... m_1 y B, independientemente, elige otro β entre los 1, 2, 3 .... m_2. De antemano se ha dado una función de dos variables $H(\alpha, \beta)$ que indica, para cada par α, β elegido, el número de pesos que A recibe de B; si H resulta negativo indicará los pesos que A pagará a B.

Supongamos que la *probabilidad* de A para elegir α entre los números 1, 2, 3 .... m_1 sea ξ_α. Esta función ξ_α constituye la llamada *estrategia* de A. En efecto A la puede elegir a su voluntad, a la manera que estime más conveniente. Análogamente, sea η_β la estrategia de B. La esperanza matemática de la ganancia de A será

$$K(\xi, \eta) = \sum_{\alpha=1}^{m_1} \sum_{\beta=1}^{m_2} H(\alpha, \beta)\, \xi_\alpha \eta_\beta . \qquad [1]$$

¿Cómo deberá elegir A su estrategia ξ_α? Debe ser tal que cualquiera que sea la manera de jugar de B, o sea, cualquiera que sea la estrategia η_β, la esperanza K sea lo mayor posible. Una vez elegido α, en el peor de los casos (para A) de que B se entere del número α elegido, jugará de manera que $K(\xi, \eta)$ resulte mínimo, o sea de modo de obtener el $\min_\eta K(\xi, \eta)$. Por tanto A, presuponiendo esto, debe jugar de manera que el mínimo anterior resulte máximo, es decir, la buena estrategia para A será la que corresponde al

$$\text{máx}_\xi \, \text{mín}_\eta \, K(\xi, \eta) . \qquad [2]$$

Análogamente, B debe razonar así: mi estrategia η_β debe ser tal que si A se entera de ella y por tanto elige ξ_α de manera de alcanzar el máx$_\xi$ $K(\xi, \eta)$, la η debe hacer mínimo a este máximo, o sea, debe verificar el

$$\text{mín}_\eta \ \text{máx}_\xi \ K(\xi, \eta). \qquad [3]$$

El teorema fundamental de esta teoría de los juegos de von Neumann, afirma que cualquiera que sea la función $H(\alpha,\beta)$, [2] resulta igual a [3]. Es el llamado principio del «minimax». Con la condición de realizar [2] ó [3] se obtienen las «buenas estrategias»; éstas, en general, no son únicas, pues los sistemas de valores ξ_α, η_β que realizan [2] ó [3] pueden ser varios. Considerando las ξ_α como coordenadas de un punto ξ y las η_β como coordenadas de un punto η, las «buenas estrategias» resultan ser las coordenadas de los «puntos de ensilladura» (*saddle points*) de la función $K(\xi, \eta)$.

Este esquema de razonamiento y solución de un problema de juego, no de azar, sino entre jugadores inteligentes, tiene aplicación no sólo en economía, sino también en otras muchas cuestiones. Por ejemplo, durante la última guerra, se ha utilizado para resolver problemas de estrategia militar (8).

Vamos a dar un ejemplo numérico concreto que sirva al mismo tiempo de aclaración de la teoría.

Sean A y B dos comandos de fuerzas aéreas enemigas. A dispone de una escuadra aérea de bombarderos nocturnos que durante el día debe guardar en uno de m aerodromos $a_1, a_2, \ldots, a_m$; se supone que cada noche puede elegir el aerodromo donde la escuadra deberá permanecer el día siguiente. Por su parte el enemigo B puede bombardear durante el día uno solo de los aerodromos $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Cada aerodromo a_i tiene sus características propias que varían de uno a otro: defensas antiaéreas, protección aérea, facilidades de camouflage, dificultad de acceso por parte de B, etc. Teniendo en cuenta estas condiciones, se calcula que si la escuadra está en el aerodromo a_i y B bombardea el aerodromo a_j, A gana $H(a_i, a_j)$ aviones enemigos; es decir, $H(a_i, a_j)$ es la diferencia entre el número de aviones perdidos por B y los perdidos por A; si H resulta negativo, indica que A pierde más aviones que B.

(8) Ver por ejemplo el artículo de P. A. MORSE, *Mathematical problems in operations research*, Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 54, 1948.

La función $H(a_i, a_j)$ es el dato del problema; debe calcularse a priori a partir de las condiciones dichas que caracterizan a cada aerodromo. El problema es: dada la función $H(a_i, a_j)$ ¿según que ley (o estrategia) debe ir guardando A su escuadra en los distintos aerodromos $a_1, a_2, \ldots, a_m$?

Ya hemos dicho, según la teoría general, que la estrategia de A debe ser tal que se cumpla la condición [2] o su equivalente [3]. Supongamos, para fijar todavía más las ideas que los aerodromos sean tres a_1, a_2, a_3 y que la función $H(a_i, a_j)$ esté dada por el siguiente cuadro

B \ A	a_1	a_2	a_3
a_1	-10	4	4
a_2	8	-6	8
a_3	5	5	-8

[4]

Esto quiere decir, por ejemplo, que si A guarda su escuadra en el aerodromo a_2 y B bombardea el a_1, A gana 4 aviones; si A elige el aerodromo a_3 y B bombardea el mismo a_3, A pierde 8 aviones, etc.

Según [1] será

$$\begin{aligned} K(\xi, \eta) = & (-10\, \xi_1 \eta_1 + 4\, \xi_2 \eta_1 + 4\, \xi_3 \eta_1) \\ & + (\quad 8\, \xi_1 \eta_2 - 6\, \xi_2 \eta_2 + 8\, \xi_3 \eta_2) \\ & + (\quad 5\, \xi_1 \eta_3 + 5\, \xi_2 \eta_3 - 8\, \xi_3 \eta_3). \end{aligned} \quad [5]$$

y además, si ξ_1, ξ_2, ξ_3 son las probabilidades de guardar la escuadra en los aerodromos a_1, a_2, a_3 respectivamente y η_1, η_2, η_3 las de bombardear los mismos por parte de B, es

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1, \quad \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 1 \quad [6]$$

Según esto, se puede sustituir en [5] $\eta_3 = 1 - \eta_1 - \eta_2$, $\xi_3 = 1 - - \xi_1 - \xi_2$ y para obtener las buenas estrategias bastará hallar los «puntos de ensilladura» de $K(\xi, \eta)$, en los cuales debe ser:

$$\frac{\partial K}{\partial \eta_1} = -27\, \xi_1 - 13\, \xi_2 + 12 = 0,$$

$$\frac{\partial K}{\partial \eta_2} = -13\, \xi_1 - 27\, \xi_2 + 16 = 0$$

de donde,

$$\xi_1 = \frac{29}{140}, \quad \xi_2 = \frac{69}{140}, \quad \xi_3 = \frac{42}{140} \qquad [7]$$

es decir: supuesto bien estimado el cuadro [4] de la función $H(a_i, a_j)$ la mejor estrategia para A será aquella que de cada 140 días, guarda 29 días la escuadra en el aerodromo a_1, 69 en el a_2 y 42 en el a_3. Para un tiempo menor hay que distribuir estos días proporcionalmente.

Por su parte, procediendo análogamente respecto η_1, η_2, η_3 se obtiene

$$\eta_1 = \frac{13}{40}, \quad \eta_2 = \frac{13}{40}, \quad \eta_3 = \frac{14}{40}. \qquad [8]$$

Es decir, siempre en la hipótesis de que el cuadro [4] esté bien estimado, la mejor estrategia para B será aquella que de cada 40 días bombardea 13 el aerodromo a_1, 13 el a_2 y 14 el a_3, números que deben sustituirse por otros proporcionales para un espacio de tiempo menor.

Procediendo de la manera indicada A puede estar seguro de que, cualquiera que sea la manera de proceder de B, la esperanza matemática de los aviones ganados por A será por lo menos igual al valor [1] donde se sustituyan ξ y η por los valores [7] y [8] (en el ejemplo resulta $K = 11/10 \sim 1$).

° ° °

Donde las matemáticas se han aplicado con mayor éxito es en las ciencias físicas. Muchos capítulos de la matemática forman una unidad indivisible con la parte de la física que les ha dado origen y de la cual constituyen la estructura fundamental. El extraordinario desarrollo de la física clásica fué motivado principalmente por *disponer del instrumento matemático*: *al expresarlas matemáticamente* muchas ideas se aclararon y muchos conceptos quedaron bien definidos, formando una firme base sobre la que fué posible edificar toda la teoría.

Un hecho curioso que ocurre con frecuencia al matematizar una teoría o condensar en fórmulas concretas un grupo de ideas o de hechos aislados, es que, contrariamente a lo que parecería natural, estas fórmulas permiten luego deducir consecuencias inesperadas.

Se podría creer, que « las fórmulas no pueden contener más de lo que se ha metido en ellas » y sin embargo, debido posiblemente a que sin sospecharlo se introduce en ellas mucho más de lo que se intenta, muchas veces, una vez planteada matemáticamente una teoría, reducidos a fórmulas sus principios, resulta que se deducen de ellas muchas consecuencias que no se habían previsto y que resultan ciertas.

En la Física abundan ejemplos de este hecho. Es clásico y muy citado el caso de las ecuaciones de Maxwell, que escritas para condensar todos los fenómenos electromagnéticos conocidos, se vió que contenían la propagación ondulatoria de la electricidad, lo que fué comprobado más tarde por Hertz.

Más moderno es el descubrimiento del mesón. El físico japonés Yukawa, en 1935, al expresar mediante una fórmula matemática el potencial de atracción entre dos nucleones (potencial de Yukawa), fórmula que escribía para explicar un grupo de fenómenos, se encontró, como consecuencia no esperada, que como contrapartida de los fotones del campo electromagnético debían existir, en el campo nuclear, partículas pesadas cuya masa permitía la fórmula calcular. Como estas partículas no se conocían se creyó primeramente que ello era un inconveniente de la teoría, hasta que poco después se encontraron efectivamente las partículas previstas, con la masa prevista: fueron los llamados mesones.

Un hecho análogo, tal vez más instructivo porque prueba la confianza que hay que tener en las fórmulas matemáticas, ocurrió con las ecuaciones de la gravitación de Einstein. En el interior de la materia estas ecuaciones se escriben

$$R_{ji} - \frac{1}{2} g_{ij} R = - \varkappa T_{ij} \qquad [9]$$

donde R_{ij} es el tensor de Ricci del espacio tiempo, g_{ij} el tensor fundamental, R la curvatura escalar, $\varkappa$ una constante universal y T_{ij} el tensor-energía de la materia (nulo fuera de la materia). Al aplicar las ecuaciones [9] para obtener la forma global de todo el espacio tiempo, suponiendo en él un reparto uniforme de la materia, y suponiendo al mismo estático, es decir, invariable con el tiempo, resulta que el sistema es incompatible a no ser que sea « vacío », con densidad de materia nula. Como este hecho no se ajusta a la realidad, la única manera de salvar la teoría pareció ser la de añadir a las ecuaciones [9] un término complementario λg_{ij}, con una nueva constante universal λ que se llamó constante cosmológica. Sin embargo esto supuso una falta de fe en las ecuaciones [9]; en vez de corregirlas, se debió aplicarlas estrictamente, aun sacrificando otras hipótesis que parecían naturales. En efecto, si en vez de suponer el universo estático se supone que puede variar con el tiempo (universo con curvatura función del tiempo), las ecuaciones [9] ya no resultan incompatibles. Lo que ocurre entonces es que el radio de curvatura del universo resulta variable con el tiempo, hecho confirmado más tarde por Hubble y que constituye la llamada «expansión del universo». Esta «expansión» resultó, por tanto, estar ya contenida en las ecuaciones de la gravitación, apesar de que el mismo Einstein no sólo no lo sospechó, sinó que creyó más lógico modificar las ecuaciones antes que aceptar esta consecuencia que parecía absurda.

° ° °

Con los ejemplos anteriores vemos que un primer aspecto de los problemas actuales de la matemática es el de matematizar teorías que todavía no lo han sido. Después del éxito de las matemáticas en la física clásica, ha venido la física moderna en que este éxito ya no es tan claro ni positivo. Para explicar muchos fenómenos experimentales, de la estructura del átomo principalmente, ha sido necesario crear una gran variedad de nuevos modelos matemáticos, que han resultado aplicables en ciertos casos, pero que han fracasado en otros. En el fondo de toda la física moderna es de esperar que haya una estructura matemática única para todos los fenómenos, pero todavía no ha sido encontrada.

De igual actualidad son las aplicaciones a la economía y ciencias sociales, en cuya dirección el libro citado de von Neumann y Morgenstern constituye los principios de lo que puede ser una importante teoría y la Cibernética de N. Wiener es sólo un programa tal vez excesivamente ambicioso.

Quedan después los problemas dentro de la matemática misma. En este sentido cada rama tiene sus problemas propios, de naturaleza muy diversa, lo que hace imposible dar una característica común a todos. Es necesario elegir un punto de vista y contentarse en vislumbrar una determinada sección del horizonte matemático.

Si nos ponemos en el campo de la Geometría, incluyendo varias ramas más o menos relacionadas con ella, existe actualmente un aspecto bien definido que caracteriza la dirección hacia la que tienden a evolucionar y en las que se trabaja con mayor intensidad. Se trata de los llamados problemas « en grande » (en inglés « in the large », en alemán « im Grössen »). Consisten en lo siguiente: El cálculo diferencial ha permitido estudiar bien las propiedades de cualquier curva, superficie o variedad (o cualquier elemento matemático por ellas representado, como los grupos continuos) alrededor de un punto, o sea « en pequeño », pero salvo en casos aislados no se ha podido, de estas propiedades, deducir consecuencias sobre toda la curva, superficie o variedad considerada en su conjunto; estas últimas serían las propiedades « en grande » que actualmente se trata de encontrar. Veamos algunos ejemplos que aclaren la cuestión:

1. En la teoría de superficies clásica se supone siempre tratar de una región de superficie en la cual existe un sistema de coordenadas curvilíneas u, v tal que por cada punto pasa una y una sola curva del sistema u y una y una sola del sistema v. Supongamos una superficie cerrada S, ¿existirá siempre un sistema de coordenadas de este tipo válido para toda la superficie?

Esto es un ejemplo de geometría diferencial « en grande », puesto que se trata de ver si es posible extender a toda una superficie una propiedad bien simple y conocida para regiones pequeñas de la misma. En este caso el problema está resuelto, con el resultado curioso de que para que sea posible es necesario y suficiente que la superficie S sea del mismo tipo topológico que el toro. Para una esfera, por ejemplo, no es posible.

2. La esfera goza de la propiedad notable de que todas sus geodésicas (los círculos máximos) son curvas cerradas. Lo mismo ocurre para la hiperesfera del espacio de n dimensiones (lugar de los puntos cuyas coordenadas satisfacen la ecuación $x_1^2 + x_2^2 + \ldots \ldots + x_n^2 = R^2$). Para el caso de superfices ($n = 2$) se sabe que existen y han sido bien estudiadas otras superficies, distintas de la esfera, con la misma propiedad de tener todas sus curvas geodésica cerradas. En cambio para variedades de dimensión superior a dos ¿existirán también variedades distintas de las hiperesferas tales que todas sus geodésicas sean curvas cerradas? La respuesta no se conoce.

3. Interesantes y difíciles son los problemas de « inmersión » de una variedad dentro de otra. Por ejemplo, se sabe que no existe ninguna superficie de curvatura constante negativa que pueda estar contenida en el espacio ordinario de 3 dimensiones sin presentar singularidades; es decir, las superficies de curvatura constante negativa no son inmersibles en el espacio ordinario. ¿Lo serán en un espacio euclidiano de mayor número de dimensiones?

Más general: ¿es siempre una variedad de Riemann inmersible en un espacio euclidiano?

Ambos problemas son fáciles de resolver (por la afirmativa) « en pequeño », es decir, para porciones suficientemente limitadas de superficie o variedad, pero no se han podido resolver « en grande », para la variedad completa.

4. — S. Bochner ha obtenido el siguiente resultado (9): si el tensor de Ricci $R_{jk} = R_{ijkl}g^{il}$ de una variedad de Riemann cerrada es positivo y definido, el número de Betti (o coeficiente de conexión) de primer orden de la variedad es cero. Resultado interesante que vincula una propiedad « en pequeño », si bien cumplida en cada punto de la variedad, con una propiedad « en grande » que depende de la estructura topológica de la misma. La geometría diferencial actual tiende a resolver problemas de tipo análogo. El teorema de Bochner permite únicamente decidir si el primer número de Betti es o no nulo, pero ¿existirán otros tensores u otras formas cuadráticas, de cuyo comportamiento se pueda deducir el valor o tan sólo una acotación para los números de Betti de orden superior? Algunos resultados han sido obtenidos en este sentido por Hodge (10) y el mismo Bochner (11), pero en general se trata todavía de un campo prácticamente desconocido en cuya exploración están trabajando los mejores geómetras de nuestros días (12).

La Topología trata toda ella de problemas « en grande ». De aquí su gran desarrollo en los últimos años y sus ramificaciones a todas las partes de la matemática. Una interesante recopilación de proble-

(9) *Vector fields and Ricci curvature*, Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 52, 1946.

(10) *Theory and applications of Harmonic Integrals*, 1941.

(11) *Curvature and Betti numbers*, I, II, Annals of Mathematics, vols. 49 y 50 (1948-1949).

(12) Más detalles y otro tipo de problemas se encuentran en la exposición de S. S. CHERN, *Some new viewpoints in Differential Geometry in the large*, Bulletin of the American Mathematical Society, vol. 52, 1946.

mas pendientes en Topología y en la teoría de grupos con ella relacionada puede verse en el artículo de S. Eilenberg titulado *On the problems of Topology*, Annals of Mathematics, vol. 50, 1949.

Un campo en que los nuevos puntos de vista se manifiestan en todas sus brillantes perspectivas es el llamado «Cálculo de Variaciones en grande» creado por el matemático norteamericano Marston Morse. Se trata, con algunas variantes, de problemas del tipo siguiente: dados dos puntos A y B sobre una superficie o variedad ¿cuántas geodésicas habrá que los unan?; o bien, si A y B coinciden, ¿cuántas geodésicas cerradas contiene una superficie o variedad dada? De este tipo de problemas se conoce, en general, sóla una acotación inferior para el número de geodésicas.

Vale la pena que demos una idea de cómo Morse atacó este tipo de problemas, mezcla interesante de análisis y topología. Consideremos todas las curvas c de la variedad que unen A y B, como puntos c de un espacio funcional F. Sea $L(c)$ la longitud de la curva c, es decir, $L(c)$ es una función de punto definida sobre F. El problema queda convertido en el siguiente: dada una variedad F de puntos c y una función $L(c)$ sobre la misma, hallar los *puntos estacionarios* (o puntos *críticos*) de $L(c)$ sobre F. En este sentido Morse logra las desigualdades fundamentales $M_k \geqq R_k$, que relacionan los números M_k de puntos estacionarios de tipo k (esta clasificación de los puntos estacionarios en tipos es un problema topológico), con los números de Betti R_k de la variedad. Por tanto bastará conocer estos últimos para el espacio funcional F para poder asegurar la existencia de un cierto número mínimo de geodésicas que unen A con B.

El mismo método de Morse es aplicable a la solución de otros tipos muy diversos de problemas. Se puede resolver, por ejemplo, el siguiente: sean dadas en un plano n curvas cerradas con tangente en cada punto y sin puntos dobles; llamemos «polígono de luz» a todo polígono cerrado $A_1 A_2 A_3 \ldots A_n A_1$ cuyos vértices estén sobre cada curva y que pudiese ser recorrido por un rayo de luz tal que en cada vértice se reflejara sobre la curva correspondiente como si ésta fuera un espejo, según las leyes ordinarias de la reflexión. Se demuestra entonces, mediante las desigualdades de Morse mencionadas, que existen siempre, por lo menos, 2^n polígonos de luz (13).

(13) Otros ejemplos de aplicación del mismo método se pueden ver en M. Morse, *What is analysis in te large?*, *American Mathematical Monthly*, vol. XLIX, 1942.

Del mismo tipo, aunque todavía más difíciles, son los problemas sobre superficies de área mínima limitadas por un contorno dado, problemas estudiados principalmente por R. Courant. La cuestión de hallar una superficie de área mínima cuyo contorno sea una curva cerrada dada constituye el llamado problema de Plateau (1873) en el que han trabajado los más insignes geómetras del último cuarto del siglo pasado y del actual. Se consiguió demostrar la existencia de por lo menos una tal superficie para cada contorno que cumpliese ciertas condiciones muy amplias de regularidad. Pero queda pendiente: dado un contorno, se puede saber cuántas superficies de área mínima puede limitar? ¿existen curvas que sean contorno de infinitas superficies mínimas? Experimentalmente es fácil tratar la primera cuestión, simplemente sumergiendo un alambre de igual forma que la curva dada en una solución jabonosa y ver la membrana que se forma (ella es una superficie mínima); se observa, en ciertos casos, la posibilidad de que se formen diferentes tipos de membranas para un mismo contorno. Sin embargo el tratamiento matemático del problema es una cuestión abierta.

En estos, como en la mayoría de los problemas « en grande », se nota la falta de un instrumento matemático que sea de aplicación general para todos. El cálculo diferencial ha dado resultados magníficos para los problemas « en pequeño »; la topología los está dando para problemas « en grande » cuyos datos sean también de la misma naturaleza. Falta el mecanismo que a partir de datos « en pequeño » (como son las condiciones de que una curva sea geodésica, o que una superficie sea mínima, pues lo primero equivale a que sea nula la curvatura geodésica en cada punto y lo segundo a que lo sea la curvatura media) permita deducir consecuencias « en grande ».

o o o

En otros muchos capítulos de la matemática se presentan también innumerables problemas no menos importantes ni de menos actualidad. Como ya dijimos, nos hemos tenido que colocar en un ángulo particular y limitado desde el cual sólo una parte reducida del edificio matemático se puede vislumbrar. Pero nuestro objeto era sólo dar una idea de los esfuerzos que hoy, como en todas las épocas pasadas, realizan los matemáticos tanto para resolver los problemas que ellos mismos se van planteando, como para reducir al cálculo matemático todas las disciplinas que gobiernan o influyen en las actividades humanas.

Respecto esto último, incluso a veces se ha pretendido extrapolar las posibilidades de la matemática y deducir de sus fórmulas resultados trascendentes; ya desde Pitágoras se ha intentado dar un sentido místico a las fórmulas matemáticas o aplicarlas a las llamadas ciencias ocultas: astrología, quiromancia, etc. Todo ello dirigido a adivinar el porvenir. Proyectos fantásticos, por suerte. El interés de la vida radica precisamente en el desconocimiento del mañana; el día que al nacer se supiera ya el destino de cada uno, no valdría la vida la pena de ser vivida; la continua y eterna esperanza es lo que da aliciente para seguir luchando y la vida es lucha.

Menos fantástico es el sueño de llegar a matematizar la economía, la sociología, las leyes, hoy un tanto vagas, que regulan las relaciones mutuas entre los hombres y los países, llegando a resolver las disputas, como pretendía Leibniz, con un « calculemos ». Proyecto menos fantástico pero que tampoco ha de ser posible, pues por encima del frío cálculo y de las rígidas leyes de la lógica, las acciones humanas estarán siempre influidas por la pasión, que procede del alma, con sus infinitos matices, que por ser soplo divino ha de conservar eternamente la poesía que impide su sujeción a ninguna lógica y a ninguna matemática.

BIBLIOGRAFÍA

VILLALOBOS, C. y J. — Atlas de los colores. Colour Atlas. 1 vol., 38 + 2 láminas, 90 pág. de texto. Editorial El Ateneo. Buenos Aires, 1947.

En las 38 láminas de este atlas figuran, en esmerada gradación, 7279 colores distintos para la simple vista normal; vale decir casi siete veces más colores que los registrados en la segunda y última edición (año 1912) de la « Nomenclatura de Ridgway » usada frecuentemente por los naturalistas.

En los casos en que hay que clasificar colores que no son exactamente los *contenidos en el atlas, es posible interpolar entre los que están representados*, y con este recurso se llega a catalogar más de 60.000 colores diferentes, el doble, aproximadamente, del número que según se dice alcanzaron los romanos en la extraordinaria policromía de sus mosaicos. Conviene decir, sin embargo, que en las aplicaciones corrientes del atlas no es necesario echar mano del señalado recurso.

Este álbum constituye, pues, un verdadero diccionario de los colores, de admirable amplitud y de gran utilidad para los naturalistas, arquitectos, industriales, artes gráficas, decoradores, pintores, filatelistas, etc.

Uno de los autores de la obra, a quien, según se comprueba, el problema de la clasificación de los colores preocupaba desde largo tiempo atrás, concretó en un trabajo publicado en 1931 en estos *Anales* (*) ideas bien definidas al respecto. En dicho trabajo explicó que la variedad de matices que Newton distinguió y se acostumbra describir en el espectro solar, provienen de que los espectros que se consideran son impuros, por ser obtenidos mediante rendijas excesivamente anchas, y que en condiciones de pureza ese espectro muestra solamente tres secciones homogéneas, ocupadas respectivamente por las luces roja, verde y azul, las mismas que en los experimentos de Young resultaron elementales, suficientes e indispensables para obtener por mezcla todos los demás colores.

Es esta base tricrométrica la que han utilizado los autores para realizar su atlas, y para individualizar cada uno de los colores representados han adoptado una práctica notación de tres símbolos, tres coordenadas podríamos decir, indicativas, respectivamente, de lo que ellos llaman tintes, valor de luminosidad (sensación de más claro o más obscuro) y grado de cromicidad (sensación de más fuerte o más débil).

Treinta y ocho son los tintes establecidos y representados en otras tantas

(*) VILLALOBOS DOMÍNGUEZ, C. « Investigaciones sobre los espectros impuros y sus consecuencias para la teoría de los colores». *Anales de la S. C. A.* Tomo CXI, Etr. I, año 1931.